Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Martin Raška

Univerzální metrické prostory

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce:	prof. RNDr. Miroslav Hušek, DrSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2015

Děkuji všem pedagogům, jejichž výuky jsem se dosud mohl účastnit. Zvláště děkuji prof. Miroslavu Huškovi, který mi umožnil věnovat se předkládanému tématu a vedl mě při práci. Děkuji rodině za důvěru a finanční podporu.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 30. července 2015 Martin Raška

Název práce: Univerzální metrické prostory

Autor: Martin Raška

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Miroslav Hušek, DrSc., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: Předkládaná práce se zabývá vlastnostmi izometrických vnoření metrických prostorů do Urysohnova univerzálního prostoru U (P.S. Urysohn, 1927) a jeho zobecnění (M. Katětov, 1988). Zkoumání mnohých metrických vlastností prostoru U přechází na otázku rozšiřitelnosti vnoření $\varphi\colon M \to U$ z podprostoru M jistého prostoru P na vnoření $\Phi\colon P \to U$. K této otázce zde v situaci $P = M \cup \{p\}$ přistupujeme v jemnější podobě. Značí-li φ vnoření $M \to U$, označme symbolem R_φ množinu obrazů bodu p v U při všech možných izometrických rozšířeních vnoření φ (R_φ nazýváme prostorem realizací). Hlavním předmětem práce je zodpovězení následující otázky: *Jakých podob nabývají prostory R_φ, prochází-li φ všechna vnoření prostoru M do prostoru U?* Metrickou charakterizaci souboru $\{R_\varphi | \varphi\colon M \to U\}$ podávají důsledek 1 a věta 3 ve II. části práce. V části III jsou předchozí výsledky užity k určení počtu tříd metricky ekvivalentních vnoření prostoru M do prostoru U. Jako důsledek obdržíme výsledek J. Melleraye (2007) o homogenitě prostoru U.

Klíčová slova: Urysohnův univerzální prostor, metrický prostor, homogenní prostor, vnoření, prostor realizací

Title: Universal metric spaces

Author: Martin Raška

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: prof. RNDr. Miroslav Hušek, DrSc., Department of Mathematical Analysis

Abstract: The thesis covers the properties of isometric embeddings of metric spaces into the Urysohn universal space U (P.S. Urysohn, 1927) and its generalizations (M. Katětov, 1988). The examination of various metric properties of the space U leads to the question of extendability of the embedding $\varphi\colon M \to U$ from a subspace M of a space P onto an embedding $\Phi\colon P \to U$. We approach to this question in situation $P = M \cup \{p\}$ in finer form. If φ denotes an embedding $M \to U$, let R_φ denotes the set of images of the point p in U under all possible isometric extensions of the embedding φ (we call R_φ the space of realizations). The main objective of this thesis is answering the following question: *Which forms do the spaces R_φ assume, if φ passes all embeddings of the space M into the space U?* Corollary 1 and theorem 3 in the II. part of the thesis metrically characterize the family $\{R_\varphi | \varphi\colon M \to U\}$. We use previous results in part III in order to determine the number of classes of metrically equivalent embeddings of the space M into the space U. As a consequence, we obtain the result of J. Melleray about the homogeneity of the space U.

Keywords: Urysohn universal space, metric space, homogeneous space, embedding, space of realizations

Obsah

Úvod

Předkládaná práce se zabývá vlastnostmi vnoření metrických prostorů do Urysohnova univerzálního metrického prostoru U sestrojeného P. S. Urysohnem v roce 1924 (se spočetnou hustotou) a zobecněného M. Katětovem pro hustoty kardinality κ splňující rovnost $\kappa = \kappa^{<\kappa}$.

Zkoumání mnohých metrických vlastností prostoru U vede na otázku rozšiřitelnosti vnoření $\varphi\colon M \to U$ z podprostoru M jistého prostoru P na vnoření $\psi\colon P \to U$. Sestrojováním takového rozšíření „bod po bodu" přecházíme do situace $P = M \cup \{p\}$, kterou se zde budeme převážně zabývat, a to z pohledu hledání podmínek prostoru P, za kterých takové rozšíření ψ existuje pro všechna vnoření φ.

Mějme metrický prostor $M \cup \{p\}$. Značí-li φ vnoření prostoru M do prostoru U, označme symbolem R_φ množinu obrazů bodu p při všech možných izometrických rozšířeních vnoření φ do bodu p s hodnotou v U. Vnoření φ lze izometricky rozšířit do bodu p s hodnotou v U, právě když je podprostor R_φ prostoru U neprázdný. Hlavním předmětem práce je řešení následující otázky:

Otázka. Jakých podob nabývají podprostory R_φ, prochází-li φ všechna vnoření prostoru M do prostoru U?

Otázku zodpovíme metrickou charakterizací souboru $\{R_\varphi\colon\ \varphi\colon M \to U\}$ podanou v důsledku 1 (str. 20) a větě 3 (str. 25) ve II. části práce. Potřebné pojmy jsou zavedeny v části I — rozšiřující funkce (definice 2), jejich realizace v prostorech (definice 4), přenos rozšiřujících funkcí izometriemi (definice 6) a vlastnost skorourčitelnosti rozšiřující funkce (definice 7).

Dvě vnoření $\varphi, \psi\colon M \to U$ nazveme metricky ekvivalentní, jestliže existuje izometrie Θ prostoru U taková, že $\psi = \Theta \circ \varphi$. V části III (věta 4) určíme na základě předchozích výsledků počet tříd této ekvivalence.

Otázku existence univerzálního separabilního prostoru položil M. Fréchet[†]. Táže se, zda existuje metrický prostor U s následujícími vlastnostmi:

(i) U je separabilní,

(ii) každý separabilní metrický prostor lze izometricky vnořit do prostoru U.

Urysohn (1927) odpovídá na Fréchetovu otázku kladně sestrojením metrického prostoru U splňujícího (i) a (ii), a dále takového, že

(iii) každou izometrii mezi konečnými podmnožinami prostoru U lze rozšířit na izometrii celého prostoru,

(iv) prostor U je úplný.

Pozdější pozornost k tomuto prostoru přitáhla silná vlastnost homogenity (iii), která je ve spojení s ostatními podmínkami zdrojem řady dalších pozoruhodných vlastností. Vedle mnohých výsledků Urysohn ponechává otevřené dvě otázky:

[†]Okolnosti vzniku Urysohnovy práce a další historické souvislosti jsou popsány v (Hušek, 2008).

1. Existuje metrický prostor s vlastnostmi (ii) a (iii), který není úplný?

2. Je prostor U homogenní (v pojetí podmínky (iii)) vůči větší třídě podprostorů, než konečných?

První otázku zodpovídá kladně M. Katětov (1988, věta IV) při rozpracování nové metody konstrukce univerzálních homogenních prostorů.

Druhou otázku Urysohn doplňuje (1927, tvrzení XII, str. 87) příkladem dvou nespočetných izometrických podmnožin prostoru U, které na sebe nelze zobrazit žádnou izometrií prostoru U. Zápornou odpověď pro spočetné podprostory dává S. Mrówka (1953). Totéž pro spočetné uzavřené podprostory ukazuje G.E. Huhunaišvili (1955), a přidává kladnou odpověď pro totálně omezené podprostory. J. Melleray(2007) ukazuje, že je předpoklad totální omezenosti nejlepší možný. Silnější odpověď a její zobecnění pro Urysohnovy prostory s hustotu $\kappa > \aleph_0$ podáme na konci III. části.

V práci jsem vycházel především z prací Urysohna (1927) a Huhunaišviliho (1955). Výsledek a otázka v druhé z prací — otázka přesného vymezení homogenity prostoru U — byla jedním z podnětů k výsledkům v II. části. Později jsem se seznámil s prací Melleraye (2007), kde již byla tato otázka v separabilním případě vyřešena. Rozšíření odpovědi na prostory vyšší hustoty není těžké, vzhledem ke Katětovově charakterizaci příslušných kardinálů (viz větu níže).

Pojmy univerzality a homogenity definujeme v následujícím tvaru.

Definice 1.[†] Mějme nekonečný kardinál κ a $d \in [0, \infty]$. Metrický prostor U nazveme

1. *$\leq\kappa$-univerzální diametru d,* jestliže $\operatorname{diam} U \leq d$ a pro každý metrický prostor P, $\operatorname{card} P \leq \kappa$, $\operatorname{diam} P \leq d$, existuje vnoření prostoru P do prostoru U;

2. *$<\kappa$-volně $\leq\kappa$-univerzální diametru d,* jestliže $\operatorname{diam} U \leq d$ a pro každý metrický prostor P, $\operatorname{card} P \leq \kappa$, $\operatorname{diam} P \leq d$, lze každé vnoření $\varphi\colon K \to U$, kde $K \in [P]^{<\kappa}$, rozšířit na vnoření $\Phi\colon P \to U$;

3. *$<\kappa$-homogenní,* jestliže pro každé dva podprostory $K, L \in [P]^{<\kappa}$ lze každá izometrie $\varphi\colon K \to L$ rozšířit na izometrii $\Phi\colon U \to U$;

4. *Urysohnův univerzální prostor hustoty κ a diametru d,* jestliže je úplný, $\leq\kappa$-univerzální diametru d, $<\kappa$-homogenní a $\mathrm{d}\, U < \kappa$.

Existence Urysohnova prostoru a jeho ekvivalentní podmínky pochází v separabilním případě od Urysohn, pro vyšší hustoty výsledky rozšířil Katětov.

Věta (Katětov, 1988, Theorems I, II and III).
Mějme nekonečný kardinál κ a $d \in (0, \infty]$. Potom Urysohnův univerzální prostor hustoty κ a diametru d existuje právě když κ splňuje rovnost $\kappa = \kappa^{<\kappa}$. Existuje-li, je určen jednoznačně až na izometrii.

[†]Zcela nezvykle v této definici připouštíme $d = 0$ a označujeme jednobodový prostor Urysohnovým univerzálním prostorem hustoty κ a diametru 0. Navzdory nesouladu hustoty bude taková definice užitečná ve větě 1 a důsledku 1.

Tvrzení 1. (Katětov, 1988, Lemma 2.9) *Mějme nekonečný kardinál* κ*,* $d \in [0, \infty]$ *a metrický prostor* U*. Jestliže* U *je* $\leq\kappa$*-univerzální diametru* d *a* $<\kappa$*-homogenní, potom je* $<\kappa$*-volně* $\leq\kappa$*-univerzální diametru* d*.*

Tvrzení 2. (Katětov, 1988, Lemma 2.9, Proposition 2.6) *Mějme nekonečný kardinál* κ*,* $d \in [0, \infty]$ *a úplný metrický prostor* U *hustoty* $\leq\kappa$*. Potom* U *je* $\leq\kappa$*-univerzální diametru* d *a* $<\kappa$*-homogenní právě když je* $<\kappa$*-volně* $\leq\kappa$*-univerzální diametru* d*.*

Pojmy užité v následujícím tvrzení jsou definovány na stranách 5 a 7.

Tvrzení 3. (Katětov, 1988, Corollary 2.3) *Mějme nekonečný kardinál* κ*,* $d \in [0, \infty]$ *a metrický prostor* U *diametru* $\leq d$*. Potom* U *je* $<\kappa$*-volně* $\leq\kappa$*-univerzální diametru* d *právě když pro každý podprostor* $K \in [U]^{<\kappa}$ *a každé* $f \in \mathrm{E}(K)$*,* $f \leq d$*, existuje* $u \in U$ *realizující rozšiřující funkci* f*.*

Základní pojmy a značení

Základy teorie množin s axiomem výběru – Ordinální čísla značíme $\alpha, \beta, \zeta, \xi$, kardinální čísla (tj. počáteční ordinální čísla) značíme κ, μ; $\operatorname{card} A$ značí mohutnost množiny A a $[A]^{<\kappa} = \{B \subseteq A\colon \operatorname{card} B < \kappa\}$; $\operatorname{cf} \kappa$ značí kofinalitu kardinálu κ a $\kappa^{<\kappa} = \sup\{\kappa^\mu\colon \mu < \kappa\}$.

Základy teorie metrických prostorů – Připouštíme metrický prostor na prázdné množině. Vnořením rozumíme izometrické zobrazení. Izometrií rozumíme vnoření které je bijekcí. Diametr, hustotu a zúplnění prostoru M značíme $\operatorname{cl} M$, $\operatorname{diam} M$ a $\operatorname{compl} M$; uzávěr podmnožiny $K \subseteq M$ značíme $\mathrm{d}\, M$.

Množinu všech vnoření prostoru M do prostoru P značíme $[M, P]$, množinu izometrií prostoru M značíme $\mathrm{Iso}(M)$.

Podmnožina K metrického prostoru (M, ρ) je ε-síť ($\varepsilon \geq 0$), jestliže

$$\forall\, m \in M\colon \exists k \in K\colon \rho(m, k) \leq \varepsilon.$$

Prostor M je κ-prekompaktní (κ nekonečný kardinál), jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje ε-síť $K \in [M]^{<\kappa}$.

Je-li Φ vnoření, pak u funkční hodnoty někdy vynecháváme závorky, to jest značíme Φm namísto $\Phi(m)$.

V textu se odkazujeme na následující dvě tvrzení.

Tvrzení 4. *Mějme metrické prostory* P *a* Q*, hustou část* $P' \subset P$ *a vnoření* $\psi'\colon P' \to Q$*. Je-li je prostor* Q *úplný, potom existuje právě jedno vnoření* $\psi\colon P \to Q$ *rozšiřující vnoření* ψ'*.*

Tvrzení 5. *Mějme metrické prostory* P *a* Q*, ordinál* ξ*, soubor podprostorů prostoru* P $(D_\zeta\colon \zeta < \xi)$ *a soubor vnoření* $(\psi_\zeta\colon D_\zeta \to Q\colon \zeta < \xi)$*. Jestliže pro každé* $\zeta < \xi' < \xi$ *je* $\psi_\zeta \subseteq \psi_{\xi'}$*, potom* $\psi_\xi := \bigcup_{\zeta<\xi} \psi_\zeta$ *je vnoření prostoru* $D_\xi := \bigcup_{\zeta<\xi} D_\zeta$ *do prostoru* Q*.*

I. Uvedení pojmů

(A) Rozšiřující funkce metrického prostoru

Uvedení. Ústřední postavení v této práci zaujímá pojem jednobodového metrického rozšíření N metrického prostoru M, to jest metrického prostoru $N \supset M$, kde $\operatorname{card}(N \setminus M) = 1$. Tato rozšíření $N = (M \cup \{p\}, \rho)$ jsou až na volbu rozšiřujícího bodu p jednoznačně reprezentována funkcemi $M \to \mathbb{R}\colon m \mapsto \rho(p, m)$.

Definice 2.[†] Mějme metrický prostor $M = (M, \rho)$. Funkci $f\colon M \to \mathbb{R}$ nazveme *rozšiřující funkcí prostoru M*, jestliže pro každé $p, q \in M$ je

$$|f(p) - f(q)| \leq \rho(p, q) \leq f(p) + f(q).$$

Rozšiřující funkci f nazveme *vlastní*, jestliže pro každé $p \in M$ je $f(p) > 0$; v opačném případě nazveme f *nevlastní.* Symbolem $|f|$ značíme číslo

$$|f| := \sup_{[0,\infty]}\{f(m)\colon m \in M\} \in [0, \infty].$$

Množinu všech rozšiřujících funkcí prostoru M značíme $\mathrm{E}(M)$, přesněji $\mathrm{E}(M, \rho)$.

Tvrzení. *Mějme metrické prostory $N \subseteq M$ a $f \in \mathrm{E}(M)$.*
(i) *Funkce f je nezáporná,*
(ii) $f\restriction_N \in \mathrm{E}(N)$.

Důkaz. Vlastnosti jsou přímým důsledkem definice a budeme je v textu práce užívat bez odkazů. Q.E.D.

Definice 3. Mějme metrický prostor M. Symboly $\underline{\mathrm{d}}_M$, $\overline{\mathrm{d}}_M$ značíme funkce

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{d}}_M\colon\ & \mathrm{E}(M) \times \mathrm{E}(M) \to [0, \infty] \\ & (\ f\ ,\ \ g\ ) \quad \mapsto \sup_{[0,\infty]}\{|f(m) - g(m)| : m \in M\} \\ \overline{\mathrm{d}}_M\colon\ & \mathrm{E}(M) \times \mathrm{E}(M) \to [0, \infty] \\ & (\ f\ ,\ \ g\ ) \quad \mapsto \inf_{[0,\infty]}\{f(m) + g(m)\colon m \in M\}. \end{aligned}$$

Úmluva 1. Mějme metrické prostory (M, ρ), (N, σ) a funkce $f, g \in \mathrm{E}(M, \rho) \cap \mathrm{E}(N, \sigma)$. Potom je jistě $M = N$ $(= \operatorname{dom} f = \operatorname{dom} g)$. Zatímco množiny $\mathrm{E}(M, \rho)$ a $\mathrm{E}(M, \sigma)$ mohou být různé, funkce $\underline{\mathrm{d}}_{(M,\rho)}$ a $\underline{\mathrm{d}}_{(M,\sigma)}$ ($\overline{\mathrm{d}}_{(M,\rho)}$ a $\overline{\mathrm{d}}_{(M,\sigma)}$) mají na průniku svých definičních oborů funkční hodnoty shodné, neboť na metrikách ρ a σ nezávisí. Z toho důvodu, zajímají-li nás pouze funkční hodnoty, budeme index prostoru vynechávat:

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{d}}(f, g) &= \underline{\mathrm{d}}_{(M,\rho)}(f, g) = \underline{\mathrm{d}}_{(M,\sigma)}(f, g), \\ \overline{\mathrm{d}}(f, g) &= \overline{\mathrm{d}}_{(M,\rho)}(f, g) = \overline{\mathrm{d}}_{(M,\sigma)}(f, g). \end{aligned}$$

[†] Rozšiřující funkce jsou také označovány jako *Katětovova zobrazení*, viz (Melleray, 2007, 2008). Reprezentaci jednobodových metrických rozšíření souborem $(\rho(p, m)\colon m \in M)$ užíval již Urysohn. Katětov (1988) užil množiny rozšiřujících funkcí jako základ pro konstrukci univerzálních prostorů.

Tvrzení 6. *Mějme metrický prostor M a $f, g, h \in \mathrm{E}(M)$.*

(i) *Je-li $M = \emptyset$, potom $f = g$ je prázdné zobrazení a $\underline{\mathrm{d}}(f, g) = 0$, $\overline{\mathrm{d}}(f, g) = \infty$;*

(ii) *jestliže $M \neq \emptyset$, potom je*

$$0 \leq \underline{\mathrm{d}}(f, g) \leq \overline{\mathrm{d}}(f, g) < \infty;$$

(iii) *je-li $d \in [0, \infty]$ a $f, g \leq d$, potom $\underline{\mathrm{d}}(f, g) \leq d$;*

(iv) *jestliže je $K \subseteq M$, potom*

$$\underline{\mathrm{d}}(f\restriction_K, g\restriction_K) \leq \underline{\mathrm{d}}(f, g), \qquad \overline{\mathrm{d}}(f, g) \leq \overline{\mathrm{d}}(f\restriction_K, g\restriction_K);$$

(v) *funkce $\underline{\mathrm{d}}$, a je-li $M \neq \emptyset$, pak také $\overline{\mathrm{d}}$, jsou symetrické;*

(vi) *je-li $M \neq \emptyset$, platí nerovnost*

$$\left|\overline{\mathrm{d}}(f, g) - \overline{\mathrm{d}}(f, h)\right| \leq \underline{\mathrm{d}}(g, h);$$

(vii) *funkce $\underline{\mathrm{d}}$, a je-li $M \neq \emptyset$, pak také $\overline{\mathrm{d}}$, splňují trojúhelníkovou nerovnost;*

(viii) *funkce $\underline{\mathrm{d}}_M$ je metrikou na množině $\mathrm{E}(M)$.*

Důkaz. (i) Podle definice 3 je

$$\underline{\mathrm{d}}(f, g) = \sup\nolimits_{[0,\infty]} \emptyset = 0, \quad \overline{\mathrm{d}}(f, g) = \inf\nolimits_{[0,\infty]} \emptyset = \infty.$$

(ii) Uvažujme libovolné $p, q \in M$. S užitím vlastností rozšiřující funkce (def. 2) dostáváme

$$0 \leq |f(p) - g(p)| \leq |f(p) - \rho(p, q)| + |\rho(p, q) - g(p)| \leq f(q) + g(q).$$

Přechodem k supremu přes všechna $p \in M$ a přechodem k infimu přes všechna $q \in M$ obdržíme nerovnosti $0 \leq \underline{\mathrm{d}}(f, g) \leq \overline{\mathrm{d}}(f, g)$. Protože $M \neq \emptyset$, existuje $p \in M$ a dostáváme $\overline{\mathrm{d}}(f, g) \leq f(p) + g(p) < \infty$.

(iii) Pro každé $p \in M$ z odhadu $0 \leq f, g \leq d$ plyne

$$|f(p) - g(p)| \leq \max\{f(p), g(p)\} \leq d,$$

přechodem k supremu obdržíme $\underline{\mathrm{d}}(f, g) \leq d$.

(iv) Na levé (pravé) straně první (druhé) nerovnosti počítáme supremum (infimum) z menší množiny než na straně protější.

(v) Rovnosti plynou přímo z definice.

(vi) Pro každé $p \in M$ s užitím nerovnosti $|g(p) - h(p)| \leq \underline{\mathrm{d}}(g, h)$ odhadneme

$$f(p) + g(p) \leq f(p) + h(p) + \underline{\mathrm{d}}(g, h), \quad f(p) + h(p) \leq f(p) + g(p) + \underline{\mathrm{d}}(g, h).$$

Přechodem k infimu přes všechna $p \in M$ obdržíme nerovnosti

$$\overline{\mathrm{d}}(f, g) \leq \overline{\mathrm{d}}(f, h) + \underline{\mathrm{d}}(g, h), \quad \overline{\mathrm{d}}(f, h) \leq \overline{\mathrm{d}}(f, g) + \underline{\mathrm{d}}(g, h).$$

Protože dle (ii) jsou všechna čísla konečná, úpravou dostáváme tvrzenou nerovnost.

(vii) Nerovnosti pro funkci $\underline{\mathrm{d}}$ obdržíme z odhadu

$$|f(p) - g(p)| \leq |f(p) - h(p)| + |h(p) - g(p)| \leq \underline{\mathrm{d}}(f, h) + \underline{\mathrm{d}}(h, g)$$

přechodem k supremu přes všechna $p \in M$. Je-li $M \neq \emptyset$, nerovnost pro funkci $\overline{\mathrm{d}}$ plyne z (vi) a (ii).

(viii) Konečnost funkce dostáváme z (i) a (ii). Pro $f \neq g$ obdržíme z definice 3 nerovnost $\underline{\mathrm{d}}(f, g) > 0$. Zbývající je tvrzeno v (v) a (vii). (zobrazení $\underline{\mathrm{d}}_M$ je definováno vzorcem pro obvyklou supremovou metriku). Q.E.D.

Úmluva 2. Uvažujme metrický prostor M. Podle bodu (viii) předchozího tvrzení je $(\mathrm{E}(M), \underline{\mathrm{d}}_M)$ metrický prostor. Kdykoli budeme dále mluvit o metrických pojmech na $\mathrm{E}(M)$, uvažujeme vždy na této množině uvedenou metriku $\underline{\mathrm{d}}_M$.

Poznámka. Zkoumání vlastností prostoru $(\mathrm{E}(M), \underline{\mathrm{d}})$ započal Katětov (1988), jehož metody byly (s různými obměnami) později užity k získání řady významných výsledků. Pro příklad uveďme (Uspenskij, 1990).

Tvrzení 7. *Mějme metrický prostor (P, ρ), $M \subseteq P$ a $p \in P$. Potom zobrazení*

$$e_p \colon M \to \mathbb{R} \colon m \mapsto \rho(p, m)$$

je rozšiřující funkcí prostoru M.

Důkaz. Podmínka definice 2 pro e_p plyne přímo z vlastností metriky ρ. Q.E.D.

Definice 4. Mějme metrický prostor (P, ρ) a podprostor $M \subseteq P$.
1. Symbolem ext^P_M značíme zobrazení

$$\mathrm{ext}^P_M \colon P \to \mathrm{E}(M) \colon p \mapsto e_p$$

(zobrazení e_p definováno v předchozím tvrzení), to jest zobrazení definované vztahy

$$\mathrm{ext}^P_M(p)(m) = \rho(p, m), \qquad p \in P,\ m \in M.$$

2. Mějme dále $f \in \mathrm{E}(M)$ a $p \in P$. Řekneme, že *bod p realizuje rozšiřující funkci f (v prostoru P),* jestliže

$$f = \mathrm{ext}^P_M(p).$$

3. Mějme opět $f \in \mathrm{E}(M)$. *Prostorem realizací f v prostoru P* rozumíme podprostor $\left(\mathrm{ext}^P_M\right)^{-1}(f)$ prostoru P.

Tvrzení 8. *Mějme metrické prostory $M \subseteq N \subseteq P \subseteq Q$ a bod $p \in P$.*
Potom platí

(i) $\mathrm{ext}^Q_M(p) = \mathrm{ext}^P_M(p)$*;*

(ii) $\mathrm{ext}^P_N(p)\restriction_M = \mathrm{ext}^P_M(p)$*;*

(iii) *je-li dále $q \in P$ a značíme-li $P = (P, \rho)$, potom*

$$\underline{\mathrm{d}}\big(\mathrm{ext}^P_M(p), \mathrm{ext}^P_M(q)\big) \le \rho(p, q) \le \overline{\mathrm{d}}\big(\mathrm{ext}^P_M(p), \mathrm{ext}^P_M(q)\big),$$

zejména je zobrazení $\mathrm{ext}^P_M \colon P \to \mathrm{E}(M)$ *1-lipschitzovské, tedy spojité (viz úmluvu 2);*

(iv) (Fréchet, Kuratowski) *zobrazení* $\mathrm{ext}^M_M \colon M \to \mathrm{E}(M)$ *je vnoření prostoru M do prostoru $\mathrm{E}(M)$.*

Důkaz. Rovnosti (i) a (ii) obdržíme přímo z definice. Dále značíme $P = (P, \rho)$.
(iii) Pro každé $m, n \in M$ pro metriku ρ platí

$$|\rho(p, m) - \rho(q, m)| \le \rho(p, q) \le \rho(p, n) + \rho(q, n).$$

Přechodem k supremu (infimu) přes všechna $m \in M$ $(n \in M)$ s užitím definic 4 a 3 obdržíme tvrzené nerovnosti.

(iv) Vzhledem k předchozí části zbývá pro $m, n \in M$ učinit odhad (def. 3 a 4)

$$\underline{\mathrm{d}}\big(\mathrm{ext}^M_M(m), \mathrm{ext}^M_M(n)\big) \ge \left|\mathrm{ext}^M_M(m)(n) - \mathrm{ext}^M_M(n)(n)\right| = \rho(m, n).$$ Q.E.D.

Uvedení. Následují dvě tvrzení o rozšiřitelnosti funkce $f \in \mathrm{E}(M)$ na funkci $h \in \mathrm{E}(M \cup \{p\})$. Tvrzení 10 udává postačující podmínku pro hodnotu $h(p)$, z tvrzení 9 plyne, že je tato podmínka též nutná.

Tvrzení 9. *Mějme metrický prostor M, podprostor $K \subseteq M$, funkci $g \in \mathrm{E}(M)$ a bod $m \in M$. Potom platí*

$$\underline{\mathrm{d}}\big(\mathrm{ext}_K^M(m), g{\restriction_K}\big) \le g(m) \le \overline{\mathrm{d}}\big(\mathrm{ext}_K^M(m), g{\restriction_K}\big).$$

Jestliže je navíc $m \in K$, potom v předchozím vztahu nastávají rovnosti.

Důkaz. Značíme $M = (M, \rho)$. Pro každé $k \in K$ podle definic 4 a 2 dostáváme

$$\begin{aligned} \big|\mathrm{ext}_K^M(m)(k) - g(k)\big| &= |\rho(m,k) - g(k)| \le g(m), \\ \mathrm{ext}_K^M(m)(k) + g(k) \;&=\; \rho(m,k) + g(k) \;\ge g(m). \end{aligned}$$

Přechodem k supremu (infimu) přes všechna $k \in K$ v prvním (druhém) odhadu obdržíme první (druhou) tvrzenou nerovnost (viz def. 3).

Je-li navíc $m \in K$, potom z rovnosti $\mathrm{ext}_K^M(m)(m) = \rho(m,m) = 0$ a definice 3 dostáváme odhady

$$\begin{aligned} g(m) &= \big|\mathrm{ext}_K^M(m)(m) - g(m)\big| \le \underline{\mathrm{d}}\big(\mathrm{ext}_K^M(m), g{\restriction_K}\big), \\ g(m) &= \mathrm{ext}_K^M(m)(m) + g(m) \;\ge \overline{\mathrm{d}}\big(\mathrm{ext}_K^M(m), g{\restriction_K}\big), \end{aligned}$$

které společně s předchozím dokazují druhou část tvrzení. Q.E.D.

Tvrzení 10. *Mějme metrický prostor P, podprostor M prostoru P, rozšiřující funkci $f \in \mathrm{E}(M)$ a bod $p \in P$. Označme $e := \mathrm{ext}_M^P(p) \in \mathrm{E}(M)$.*

Jestliže $c \in \mathbb{R}$ leží v intervalu $\big[\underline{\mathrm{d}}(f,e), \overline{\mathrm{d}}(f,e)\big]$, potom lze f rozšířit na funkci $h \in \mathrm{E}\big(M \cup \{p\}\big)$ tak, že $h(p) = c$.

Důkaz. Značíme $P = (P, \rho)$, $M' := M \cup \{p\}$. Předně, je-li $p \in M$, potom z předchozího tvrzení (značení M souhlasí, dále volíme $K := M$, $g := f$, $m := p$) a tvrzení 6 (v) dostáváme rovnosti $\underline{\mathrm{d}}(f,e) = f(p) = \overline{\mathrm{d}}(f,e)$ a z předpokladu o c plyne $c = f(p)$. Můžeme tedy definovat funkci $h\colon M' \to \mathbb{R}$ rovnostmi

$$\begin{aligned} h(m) &= f(m), \qquad m \in M, \\ h(p) &= c. \end{aligned}$$

Zbývá ukázat $h \in \mathrm{E}(M')$. K tomu je třeba ověřit (def. 2) pro každé $u, v \in M'$ nerovnosti

$$|h(u) - h(v)| \le \rho(u,v) \le h(u) + h(v). \tag{1}$$

Ze vztahů $h \supseteq f$ a $f \in \mathrm{E}(M)$ dostáváme platnost (1) pro každé $u, v \in M$. Pro $u = v = p$ vyplývají nerovnosti z odhadu $0 \le \underline{\mathrm{d}}(f,e) \le c$. Ve zbývajícím případě stačí, s ohledem na symetričnost (1) v u, v, uvažovat $u = p$ a $v =: m \in M$. Potom, vzhledem k definici h a rovnosti $\rho(p,m) = \mathrm{ext}_M^P(p)(m) = e(m)$, podmínka (1) nabývá podoby

$$|c - f(m)| \le e(m) \le c + f(m),$$

která je ekvivalentní nerovnostem

$$|f(m) - e(m)| \le c \le f(m) + e(m).$$

a plyne z podmínky pro c při užití definice 3. Q.E.D.

Uvedení. Protože dle částí (i) a (ii) tvrzení 6 je vždy $\big[\underline{\mathrm{d}}(f,e),\overline{\mathrm{d}}(f,e)\big] \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$, každá funkce $f \in \mathrm{E}(M)$ lze použitím předchozího tvrzení transfinitní rekurzí rozšířit na funkci $f \in \mathrm{E}(P)$ pro libovolný metrický prostor P, $P \supseteq M$. V následujícím zavedeme určitá význačná, *rovnoměrná*, rozšíření funkcí z $\mathrm{E}(M)$ na funkce z $\mathrm{E}(P)$.

Definice 5. Mějme metrické prostor $\emptyset \neq M \subseteq P$, funkci $f \in \mathrm{E}(M)$ a $\lambda \in [0,1]$. Symboly $\overline{\mathrm{e}}^P f$, $\underline{\mathrm{e}}^P f$ a $\mathrm{e}^P_\lambda f$ značíme funkce $P \to \mathbb{R}$ definované rovnostmi

$$\left.\begin{aligned} \overline{\mathrm{e}}^P f(p) &= \overline{\mathrm{d}}\big(f, \mathrm{ext}^P_M(p)\big), \\ \underline{\mathrm{e}}^P f(p) &= \underline{\mathrm{d}}\big(f, \mathrm{ext}^P_M(p)\big), \\ \mathrm{e}^P_\lambda f(p) &= \lambda \cdot \overline{\mathrm{e}}^P f(p) + (1-\lambda) \cdot \underline{\mathrm{e}}^P f(p), \end{aligned}\right. \qquad p \in P.$$

Tvrzení 11.[†] *Mějme metrické prostory $\emptyset \neq M \subseteq P$, $f \in \mathrm{E}(M)$ a $\lambda \in [0,1]$.*

(i) *Potom $\mathrm{e}^P_\lambda f$ je 1-lipschitzovská funkce rozšiřující funkci f;*

(ii) *jestliže $\lambda \in \big[\frac{1}{2}, 1\big]$, potom $\mathrm{e}^P_\lambda f \in \mathrm{E}(P)$.*

Důkaz. Značíme $P = (P, \rho)$. (i) Pro $m \in M$ podle tvrzení 9 je

$$\underline{\mathrm{d}}\big(f, \mathrm{ext}^P_M(m)\big) = f(m) = \overline{\mathrm{d}}\big(f, \mathrm{ext}^P_M(m)\big),$$

a tedy dle definice 5 získáme $\mathrm{e}^P_\lambda(m) = \lambda f(m) + (1-\lambda) f(m) = f(m)$.

Uvažujme dále libovolné $p, q \in P$ a označme $g := \mathrm{ext}^P_M(p)$, $h := \mathrm{ext}^P_M(q)$. Podle definice 5, tvrzení 6 (vi) (resp. tvrzení 6 (vii)) a tvrzení 8 (iii) dostáváme

$$\begin{aligned} |\overline{\mathrm{e}}^P f(p) - \overline{\mathrm{e}}^P f(q)| &= \big|\overline{\mathrm{d}}(f,g) - \overline{\mathrm{d}}(f,h)\big| \leq \underline{\mathrm{d}}(g,h) \leq \rho(p,q), \\ |\underline{\mathrm{e}}^P f(p) - \underline{\mathrm{e}}^P f(q)| &= |\underline{\mathrm{d}}(f,g) - \underline{\mathrm{d}}(f,h)| \leq \underline{\mathrm{d}}(g,h) \leq \rho(p,q). \end{aligned}$$

Funkce $\overline{\mathrm{e}}^P f$, $\underline{\mathrm{e}}^P f$ jsou tedy 1-lipschitzovské a taktéž jejich konvexní kombinace $\mathrm{e}^P_\lambda f$.

(ii) Uvažujme libovolné $p, q \in P$ a opět označme $g := \mathrm{ext}^P_M(p)$, $h := \mathrm{ext}^P_M(q)$. Vzhledem k části (i) a definici 2 zbývá ukázat nerovnost

$$\mathrm{e}^P_\lambda(p) + \mathrm{e}^P_\lambda(q) \geq \rho(p,q). \tag{2}$$

V případě $\lambda = 1$ je $\mathrm{e}^P_\lambda f = \overline{\mathrm{e}}^P f$ a nerovnost (2) obdržíme z definice 5, částí (v) a (vii) tvrzení 6 a z tvrzení 8 (iii) odhadem

$$\overline{\mathrm{e}}^P f(p) + \overline{\mathrm{e}}^P f(q) = \overline{\mathrm{d}}(f,g) + \overline{\mathrm{d}}(f,h) \geq \overline{\mathrm{d}}(g,h) \geq \rho(p,q).$$

V případě $\lambda = \frac{1}{2}$ je $\mathrm{e}^P_\lambda f = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{e}}^P f + \frac{1}{2}\underline{\mathrm{e}}^P f$ a nerovnost (2) obdržíme z definice 5, úpravou a dále z částí (v) a (vi) tvrzení 6 a z tvrzení 8 (iii) odhadem

$$\begin{aligned} 2\big(\mathrm{e}^P_\lambda f(p) + \mathrm{e}^P_\lambda f(q)\big) &= \overline{\mathrm{d}}(f,g) + \underline{\mathrm{d}}(f,g) + \overline{\mathrm{d}}(f,h) + \underline{\mathrm{d}}(f,h) = \\ &= \big(\overline{\mathrm{d}}(f,g) + \underline{\mathrm{d}}(f,h)\big) + \big(\overline{\mathrm{d}}(f,h) + \underline{\mathrm{d}}(f,g)\big) \geq 2\,\overline{\mathrm{d}}(g,h) \geq 2\rho(p,q). \end{aligned}$$

V obecném případě položme $\gamma := 2\lambda - 1 \in [0,1]$. Potom je $1 - \gamma = 2(1-\lambda)$, $\lambda = \gamma + \frac{1}{2}(1-\gamma)$ a $(1-\lambda) = \frac{1}{2}(1-\gamma)$ a dostáváme

$$\mathrm{e}^P_\lambda f = \lambda \cdot \overline{\mathrm{e}}^P f + (1-\lambda) \cdot \underline{\mathrm{e}}^P f = \gamma \cdot \overline{\mathrm{e}}^P f + (1-\gamma)\big(\tfrac{1}{2} \cdot \overline{\mathrm{e}}^P f + \tfrac{1}{2} \cdot \underline{\mathrm{e}}^P f\big).$$

Protože funkce $\mathrm{e}^P_{\lambda'} f$, $\lambda' \in \big\{1, \frac{1}{2}\big\}$, splňují nerovnost (2), tutéž vlastnost má i jejich konvexní kombinace $\mathrm{e}^P_\lambda f$. Q.E.D.

[†] Rozšíření $\mathrm{e}^P_\lambda f$ pro $\lambda = 1$ je v literatuře široce užívané, viz (Urysohn, 1927) a především (Katětov, 1988) a práce navazující. Označováno je jako *Katětovovo rozšíření*.

Tvrzení 12. *Mějme metrické prostory $\emptyset \neq M \subseteq P$ a $\lambda \in [0,1]$.*

(i) *Mějme dále funkce $f, g \in \mathrm{E}(M)$. Jestliže $\mathrm{e}_\lambda^P f$, $\mathrm{e}_\lambda^P g \in \mathrm{E}(P)$, potom*

$$\underline{\mathrm{d}}\big(\mathrm{e}_\lambda^P f, \mathrm{e}_\lambda^P g\big) \leq \underline{\mathrm{d}}(f, g),$$

(ii) (Katětov, 1988, $\lambda = 1$)[†] *je-li $\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, potom zobrazení*

$$\mathrm{e}_\lambda^P\colon\ \mathrm{E}(M) \to \mathrm{E}(P)\colon f \mapsto \mathrm{e}_\lambda^P f$$

je vnoření prostoru $\mathrm{E}(M)$ do prostoru $\mathrm{E}(P)$ přiřazující každé funkci její rozšíření.

Důkaz. (i) Pro libovolné $p \in P$ podle definice 5 a částí (v) a (vi) (respektive (vii)) tvrzení 6 odhadneme

$$\begin{aligned}
|\overline{\mathrm{e}}^P f(p) - \overline{\mathrm{e}}^P g(p)| &= \left|\overline{\mathrm{d}}\big(f, \mathrm{ext}_M^P(p)\big) - \overline{\mathrm{d}}\big(g, \mathrm{ext}_M^P(p)\big)\right| \leq \underline{\mathrm{d}}(f, g),\\
|\underline{\mathrm{e}}^P f(p) - \underline{\mathrm{e}}^P g(p)| &= \left|\underline{\mathrm{d}}\big(f, \mathrm{ext}_M^P(p)\big) - \underline{\mathrm{d}}\big(g, \mathrm{ext}_M^P(p)\big)\right| \leq \underline{\mathrm{d}}(f, g).
\end{aligned}$$

Odtud dle definice 5 získáme

$$\left|\mathrm{e}_\lambda^P f(p) - \mathrm{e}_\lambda^P g(p)\right| = \left|\lambda\big(\overline{\mathrm{e}}^P f(p) - \overline{\mathrm{e}}^P g(p)\big) + (1-\lambda)\big(\underline{\mathrm{e}}^P f(p) - \underline{\mathrm{e}}^P g(p)\big)\right| \leq \underline{\mathrm{d}}(f, g).$$

Přechodem k supremu přes všechna $p \in P$ obdržíme dle def. 3 tvrzenou nerovnost.

(ii) Podle tvrzení 11 (ii) je $\mathrm{e}_\lambda^P[\mathrm{E}(M)] \subseteq \mathrm{E}(P)$. Dle tvrzení 11 (i) je $\mathrm{e}_\lambda^P f \supseteq f$ pro každé $f \in \mathrm{E}(M)$. Izometričnost dostáváme z části (i) a tvrzení 6 (iv). Q.E.D.

Uvedení. Rozšiřující funkce prostoru M se izometrií $\varphi\colon M \to N$ přirozeně přenášejí na rozšiřující funkce prostoru N. Tato korespondence je izometrií prostorů $\mathrm{E}(M)$ a $\mathrm{E}(N)$. Viz Katětovovu práci (1988, odstavec 1.6).

Tvrzení 13. *Mějme metrické prostory M a N, izometrii $\varphi\colon M \to N$ a funkci $f \in \mathrm{E}(M)$. Potom $f \circ \varphi^{-1} \in \mathrm{E}(N)$.*

Důkaz. Označme $M = (M, \rho)$, $N = (N, \sigma)$ a $g := f \circ \varphi^{-1}\colon N \to \mathbb{R}$. K ověření vztahu $g \in \mathrm{E}(N)$ je podle definice 2 potřeba (vzhledem k rovnosti $\varphi[M] = N$) ukázat pro každé $p, q \in M$ nerovnosti

$$|g(\varphi p) - g(\varphi q)| \leq \sigma(\varphi p, \varphi q) \leq g(\varphi p) + g(\varphi q). \tag{3}$$

Podle definice g je $g(\varphi p) = f(p)$ a $g(\varphi q) = f(q)$, z izometričnosti zobrazení φ dostáváme $\sigma(\varphi p, \varphi q) = \rho(p, q)$. Užijeme-li těchto rovností, obdržíme nerovnost (3) ze vztahu $f \in \mathrm{E}(M)$. Q.E.D.

Definice 6. (Katětov) Mějme metrické prostory M, N a izometrii $\varphi\colon M \to N$. Symbolem φ^* značíme zobrazení

$$\varphi^*\colon\ \mathrm{E}(M) \to \mathrm{E}(N)\colon f \mapsto f \circ \varphi^{-1}$$

(viz předchozí tvrzení), to jest zobrazení definované rovnostmi

$$(\varphi^* f)(\varphi m) = f(m), \qquad f \in \mathrm{E}(M),\ m \in M.$$

Tvrzení 14. (i) *Mějme metrický prostor P, podprostor $M \subseteq P$ a bod $p \in P$. Potom $\left|\mathrm{ext}_M^P(p)\right| \leq \mathrm{diam}\, P$.*

(ii) *Mějme metrické prostory M, N, izometrii $\varphi\colon M \to N$ a funkci $f \in \mathrm{E}(M)$. Potom $|\varphi^* f| = |f|$.* (tvrzení plynou přímo z definic 4 a 6) *Q.E.D.*

[†] Rozšiřování zobrazením e_λ^P pro $\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ sdílí další vlastnosti s Katětovovým rozšířením e_1^P. Zejména je možné jej užít namísto rozšíření e_1^P při Katětovově konstrukci univerzálních prostorů.

(B) Vlastnosti prostorů realizací rozšiřujících funkcí

Tvrzení 15. *Mějme metrický prostor P, podprostor $M \subseteq P$ a $f \in \mathrm{E}(M)$. Potom prostor realizací f v P je uzavřený podprostor prostoru P diametru $\leq \overline{\mathrm{d}}(f,f)$.*

Důkaz. Označme $P = (P, \rho)$, $R := \left(\mathrm{ext}_M^P\right)^{-1}(f)$. Podprostor R je vzorem uzavřené (jednoprvkové) množiny při spojitém zobrazení ext_M^P (viz bod (iii) tvrzení 8) a je tedy uzavřený.

Uvažujme dále $r, s \in R$ a $m \in M$. Vzhledem k definici 4 dostáváme $\rho(r,m) = \mathrm{ext}_M^P(r)(m) = f(m)$ a obdobně $\rho(s,m) = f(m)$. S užitím vlastnosti metriky a předchozích rovností odhadneme

$$\rho(r,s) \leq \rho(r,m) + \rho(s,m) = f(m) + f(m).$$

Přechodem k infimu přes všechna $m \in M$ obdržíme podle definice 3 nerovnost $\rho(r,s) \leq \overline{\mathrm{d}}(f,f)$. Q.E.D.

Tvrzení 16. *Mějme disjunktní metrické prostory M a R a vlastní rozšiřující funkci $f \in \mathrm{E}(M)$. Jestliže $\operatorname{diam} R \leq \overline{\mathrm{d}}(f,f)$, potom existuje (právě jedno) rozšíření D prostorů M a R splňující $D = M \cup R$ a*

$$R = \left(\mathrm{ext}_M^D\right)^{-1}(f)$$

(to jest, R je prostorem realizací f v prostoru D). Je-li navíc $d \in [0,\infty]$ takové, že $\operatorname{diam} M \leq d$, $\operatorname{diam} R \leq d$ a $|f| \leq d$, potom je také $\operatorname{diam} D \leq d$.

Důkaz. Označme sjednocení množin $D := M \cup R$. Vzhledem k disjunktnosti M a R označme metriky obou prostorů symbolem ρ a rozšiřme jej symetricky a pozitivně na zobrazení $D \times D \to \mathbb{R}$ položením

$$\rho(m,r) = \rho(r,m) := f(m), \qquad m \in M,\ r \in R. \tag{4}$$

($f > 0$ pro dle předpokladu vlastní f). Z axiomů metriky zbývá ověřit trojúhelníkovou nerovnost pro trojice (m,n,r) a (m,r,s), kde $m,n \in M$, $r,s \in R$. V prvním případě ověřujeme nerovnosti

$$|\rho(r,m) - \rho(r,n)| \leq \rho(m,n) \leq \rho(m,r) + \rho(r,n),$$

které po přepsání dle (4) na tvar

$$|f(m) - f(n)| \leq \rho(m,n) \leq f(m) + f(n),$$

obdržíme (podle definice 2) ze vztahu $f \in \mathrm{E}(M)$. V případě trojice (m,r,s) ověřujeme nerovnosti

$$|\rho(m,r) - \rho(m,s)| \leq \rho(r,s) \leq \rho(r,m) + \rho(m,s).$$

Přepsáním opět dle (4) dostáváme nerovnosti

$$|f(m) - f(m)| \leq \rho(r,s) \leq f(m) + f(m),$$

z nichž první plyne z nezápornosti metriky na R, druhá plyne z odhadu $\rho(r,s) \leq \operatorname{diam} R \leq \overline{\mathrm{d}}(f,f) \leq f(m) + f(m)$. Dále značíme $D = (D, \rho)$ rozšíření prostorů M a R.

Rozšíření funkce ρ podle vzorce (4) je dle definice 4 postačující a nutné pro inkluzi $R \subseteq \left(\mathrm{ext}^D_M\right)^{-1}(f)$ (odtud také jednoznačnost prostoru D). Dále pro každé $m \in M$ je $\mathrm{ext}^D_M(m)(m) = \rho(m,m) = 0 < f(m)$ a dostáváme $\mathrm{ext}^D_M(m) \neq f$. Odtud plyne zbývající inkluze $\left(\mathrm{ext}^D_M\right)^{-1}(f) \subseteq D \setminus M = R$. Q.E.D.

Tvrzení 17. *Mějme metrické prostory P a Q, podprostor M prostoru P a vnoření $\psi\colon P \to Q$. Označme $\varphi := \psi\restriction_M$ a $N := \varphi[M]$. Potom*

(i) *pro každé $p \in P$ je*

$$\varphi^*\left(\mathrm{ext}^P_M(p)\right) = \mathrm{ext}^Q_N(\psi p);$$

(ii) *pro každé $f \in \mathrm{E}(M)$ je*

$$\psi\left[\left(\mathrm{ext}^P_M\right)^{-1}(f)\right] \subseteq \left(\mathrm{ext}^Q_N\right)^{-1}(\varphi^* f); \tag{5}$$

je-li navíc ψ izometrie prostorů P a Q, potom lze v předchozím vztahu nahradit inkluzi rovností, to jest: prostor realizací f v prostoru P a prostor realizací $\varphi^* f$ v prostoru Q jsou na sebe vzájemně zobrazeny izometrií ψ.

Důkaz. Značíme $P = (P, \rho)$ a $Q = (Q, \sigma)$. (i) Mějme $p \in P$. Označme $f := \mathrm{ext}^P_M(p)$, $g := \mathrm{ext}^Q_N(\psi p)$. Dle definic 4, 6 a rovnosti $\psi[M] = N$ je $f \in \mathrm{E}(M)$, $g, \varphi^* f \in \mathrm{E}(N)$. Pro každé $m \in M$ podle definic 6, 4, izometričnosti zobrazení ψ a rovnosti $\varphi = \psi\restriction_M$ dostáváme

$$\begin{aligned}(\varphi^* f)(\varphi m) = f(m) = \mathrm{ext}^P_M(p)(m) = \rho(p,m) = \sigma(\psi p, \psi m) = \\ = \mathrm{ext}^P_M(\psi p)(\psi m) = g(\psi m) = g(\varphi m).\end{aligned}$$

Tím je ověřena rovnost $\varphi^* f = g$.

(ii) Mějme $f \in \mathrm{E}(M)$. Uvažujme libovolné $p \in \left(\mathrm{ext}^P_M\right)^{-1}(f)$. Podle (i) s užitím rovnosti $\mathrm{ext}^P_M(p) = f$ dostáváme

$$\mathrm{ext}^Q_N(\psi p) = \varphi^*\left(\mathrm{ext}^P_M(p)\right) = \varphi^* f$$

a tedy $\psi p \in \left(\mathrm{ext}^Q_N\right)^{-1}(\varphi^* f)$. Tím je inkluze (5) ověřena.

Předpokládejme navíc, že $\psi[P] = Q$. Užijme již dokázanou inkluzi (5) na izometrii $\psi^{-1}\colon Q \to P$ a rozšiřující funkci $\varphi^* f \in \mathrm{E}(N)$. Protože $\psi^{-1}\restriction_N = \varphi^{-1}$ a $\varphi^{-1}[N] = \varphi^{-1}\varphi[M] = M$, dostáváme

$$\psi^{-1}\left[\left(\mathrm{ext}^Q_N\right)^{-1}(\varphi^* f)\right] \subseteq \left(\mathrm{ext}^P_M\right)^{-1}\left(\left(\varphi^{-1}\right)^*(\varphi^* f)\right).$$

Odtud užitím rovnosti $\left(\varphi^{-1}\right)^*(\varphi^* f) = f \circ \varphi^{-1} \circ (\varphi^{-1})^{-1} = f$ (viz def. 6) a přechodem k obrazu při zobrazení ψ (je $\psi \circ \psi^{-1} = \mathrm{id}_Q$) získáme inkluzi

$$\left(\mathrm{ext}^Q_N\right)^{-1}(\varphi^* f) \subseteq \psi\left[\left(\mathrm{ext}^P_M\right)^{-1}(f)\right],$$

která společně s (5) dává tvrzenou nerovnost. Q.E.D.

(C) Určitelnost rozšiřujících funkcí

Uvedení. Uvažujme Urysohnův prostor hustoty κ. Rozšiřující funkce na podprostorech prostoru U mohutnosti menší než κ mají dle tvrzení 3 vždy v prostoru U realizaci. V následujícím se budeme zabývat rozšiřujícími funkcemi, které mají, jak ukážeme v II. části, vůči Urysohnovým prostorům tutéž vlastnost. V případě $\kappa = \aleph_0$ nalezneme ekvivalentní definice v Mellerayově práci (2007, str. 399) pod názvy *ε-saturated* a *saturated*.

Definice 7. Mějme metrický prostor M a funkci $f \in \mathrm{E}(M)$.

1. Mějme $K \subseteq M$ a $\varepsilon \geq 0$. Rozšiřující funkci f nazveme *ε-určenou body K*, jestliže

$$\forall g \in \mathrm{E}(M)\colon (g{\restriction_K} = f{\restriction_K}) \Rightarrow \underline{\mathrm{d}}(f, g) \leq \varepsilon.$$

2. Mějme nekonečný kardinál κ. *$<\kappa$-odchylností* f rozumíme nezáporné číslo

$$\inf\nolimits_{[0,\infty]}\{\varepsilon \geq 0\colon \exists K \in [M]^{<\kappa}\colon f \text{ je } \varepsilon\text{-určená body } K\}.$$

3. Mějme nekonečný kardinál κ. Rozšiřující funkci f nazveme *$<\kappa$-body skorourčitelnou*, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\colon \exists K \in [M]^{<\kappa}\colon f \text{ je } \varepsilon\text{-určená body } K.$$

Poznámka 1. Pojmy definované v předchozí definici závisí na prostoru M (tedy i na metrice na M), ačkoli se to neodráží v užité terminologii. Může být funkce f $<\kappa$-body skorourčitelná, uvažujeme-li ji jako prvek $\mathrm{E}(M, \rho)$, zatímco tak být nemusí, uvažujeme-li ji jako prvek $\mathrm{E}(M, \sigma)$ pro jinou metrikou $\sigma \neq \rho$. Této nedůslednosti se dopouštíme (v zájmu kratšího vyjadřování) s vědomím, že při používání pojmů musí být uvažovaná metrika na M (a tím prostor $\mathrm{E}(M)$) zřejmá z kontextu.

Tvrzení 18. *Mějme nekonečný kardinál κ, metrický prostor M a rozšiřující funkci $f \in \mathrm{E}(M)$. Potom f je $<\kappa$-body skorourčitelná právě když $<\kappa$-odchylnost f je rovna nule.*

Důkaz. Podmínka nalevo je zřejmě silnější, ekvivalence plyne z vlastnosti infima a z toho, že kdykoli je f ε-určená body K, je také ε'-určená body K pro každé $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon'$, $K \subseteq M$. Q.E.D.

Tvrzení 19. *Mějme nekonečný kardinál κ, metrický prostor M a rozšiřující funkci $f \in \mathrm{E}(M)$. Potom pro $\eta \geq 0$ je ekvivalentní:*

(i) *$<\kappa$-odchylnost f je $\geq \eta$,*

(ii) *pro každé ε, $0 < \varepsilon < \eta$ a každé $K \in [M]^{<\kappa}$, existuje $m \in M$ splňující alespoň jednu z podmínek*

$$f(m) + \varepsilon \leq \overline{\mathrm{d}}\big(\mathrm{ext}_K^M(m), f{\restriction_K}\big), \tag{6}$$

$$f(m) - \varepsilon \geq \underline{\mathrm{d}}\big(\mathrm{ext}_K^M(m), f{\restriction_K}\big). \tag{7}$$

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): Uvažujme libovolné ε, $0 < \varepsilon < \eta$ a $K \in [M]^{<\kappa}$. Protože je $\varepsilon < \eta$, z (i) a bodu 2 definice 7 plyne, že f není ε-určená body K. Z bodu 1 téže definice plyne existence $g \in \mathrm{E}(M)$ splňující

$$g{\restriction}_K = f{\restriction}_K \tag{8}$$

a $\underline{\mathrm{d}}(f,g) > \varepsilon$. Existuje tedy (podle def. 3) $m \in M$ pro které je $|f(m) - g(m)| \geq \varepsilon$. Je-li $g(m) - f(m) \geq \varepsilon$, podle tvrzení 9 a (8) dostáváme

$$f(m) + \varepsilon \leq g(m) \leq \overline{\mathrm{d}}\big(\mathrm{ext}_K^M(m), g{\restriction}_K\big) = \overline{\mathrm{d}}\big(\mathrm{ext}_K^M(m), f{\restriction}_K\big).$$

Jestliže platí $f(m) \geq g(m) + \varepsilon$, opět dle tvrzení 9 a (8) dostáváme

$$f(m) - \varepsilon \geq g(m) \geq \underline{\mathrm{d}}\big(\mathrm{ext}_K^M(m), g{\restriction}_K\big) = \underline{\mathrm{d}}\big(\mathrm{ext}_K^M(m), f{\restriction}_K\big).$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): Uvažujme libovolné ε', $0 < \varepsilon' < \eta$ a $K \in [M]^{<\kappa}$. Zvolme ε splňující $\varepsilon' < \varepsilon < \eta$. Dle (ii) existuje $m \in M$ vyhovující alespoň jedné z nerovností (6), (7). Položme

$$c := \begin{cases} f(m) + \varepsilon, & \text{platí-li (6)}, \\ f(m) - \varepsilon, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Podle tvrzení 10 (volíme $P := M$, $M := K$, $f := f{\restriction}_K$, $p := m$; podmínka pro c pak plyne z (6), respektive (7), a tvrzení 9) lze funkce $f{\restriction}_K$ rozšířit na funkci $h \in \mathrm{E}(K \cup \{m\})$ tak, že $h(m) = c$. Dle tvrzení 11 pro $g := \mathrm{e}_1^M h$ platí $g \in \mathrm{E}(M)$ a $g{\restriction}_K = h{\restriction}_K = f{\restriction}_K$. Protože z definice 3, rovnosti $g(m) = h(m)$ a volby c plyne

$$\underline{\mathrm{d}}(f,g) \geq |f(m) - h(m)| \geq \varepsilon > \varepsilon',$$

funkce f, dle bodu 1 definice 7, není ε'-určená body K. Dle bodu 2 téže definice, $<\kappa$-odchylnost f je $\geq \varepsilon'$. Protože $\varepsilon' < \eta$ bylo libovolné, dostáváme (i). Q.E.D.

Tvrzení 20. *Mějme nekonečný kardinál κ, $d \in [0,\infty]$, metrický prostor M diametru $\leq d$ a $f \in \mathrm{E}(M)$, $f \leq d$. Potom $<\kappa$-odchylnost η rozšiřující funkce f je konečná a platí $\eta \leq \min\{d, \overline{\mathrm{d}}(f,f)\}$.*

Důkaz. Značíme $M = (M, \rho)$. Je-li $M = \emptyset$, z definice 7 a tvrzení 6 (i) dostaneme rovnost $\eta = 0$.

Předpokládejme $M \neq \emptyset$. Protože dle tvrzení 6 (ii) je $\overline{\mathrm{d}}(f,f) < \infty$, konečnost η plyne z tvrzené nerovnosti. Označme $d' := \min\{d, \overline{\mathrm{d}}(f,f)\}$ a uvažujme libovolné $\varepsilon > 0$. Protože $M \neq \emptyset$, z definice 3 plyne existence $k \in M$, pro které je

$$f(k) \leq \tfrac{1}{2}\,\overline{\mathrm{d}}(f,f) + \tfrac{\varepsilon}{2}. \tag{9}$$

Označme $K := \{k\}$ a ukažme, že f je $(d' + \varepsilon)$-určená body K. K tomu uvažujme libovolné $g \in \mathrm{E}(M)$ splňující $g{\restriction}_K = f{\restriction}_K$ a libovolné $m \in M$. Z nerovnosti $f \leq d$ (a $0 \leq g$) dostáváme

$$f(m) - g(m) \leq d < d + \varepsilon. \tag{10}$$

Protože $g(k) = f(k)$, $\rho(m,k) \leq \operatorname{diam} M \leq d$ a $f(m) \geq \frac{1}{2}\,\overline{\mathrm{d}}(f,f)$ (viz opět def. 3), s užitím definice 2 a nerovnosti (9) odhadneme

$$\begin{aligned} g(m) - f(m) &= g(m) - g(k) + f(k) - f(m) \leq \\ &\leq \rho(m,k) + \tfrac{1}{2}\,\overline{\mathrm{d}}(f,f) + \tfrac{\varepsilon}{2} - \tfrac{1}{2}\,\overline{\mathrm{d}}(f,f) < d + \varepsilon. \end{aligned}$$

Odtud a z (10) získáme

$$|g(m) - f(m)| \leq d + \varepsilon. \tag{11}$$

Dále s užitím definice 2 a nerovnosti (9) odhadneme

$$\begin{aligned} |g(m) - f(m)| &\leq |g(m) - \rho(m,k)| + |\rho(m,k) - f(m)| \\ &\leq g(k) + f(k) = 2f(k) \leq \overline{\mathrm{d}}(f,f) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Odtud a z nerovnosti (11) dostáváme $|g(m) - f(m)| \leq d' + \varepsilon$. Přechodem k supremu přes $m \in M$ obdržíme dle def. 3 nerovnost $\overline{\mathrm{d}}(g,f) \leq d' + \varepsilon$. Tím je dokázáno, že f je $(d' + \varepsilon)$-určená body K; protože je navíc $\operatorname{card} K = 1 < \kappa$, dostáváme $\eta \leq d' + \varepsilon$ (viz definici 7). Je tedy $\eta \leq d'$, neboť ε bylo libovolně malé. Q.E.D.

Tvrzení 21. *Mějme metrický prostor N, rozšiřující funkci $h \in \mathrm{E}(N)$ a podprostory $M, L \subseteq N$ splňující $N = M \cup L$. Označme $f := h\restriction_M \in \mathrm{E}(M)$.*

(i) *Mějme dále $\varepsilon \geq 0$ a $K \subseteq M$. Jestliže funkce f je ε-určená body K, potom funkce h je ε-určená body $(K \cup L)$;*

(ii) *Mějme nekonečný kardinál κ. Jestliže je* $\operatorname{card} L < \kappa$, *potom $<\kappa$-odchylnost funkce h je menší nebo rovna $<\kappa$-odchylnosti funkce f.*

Důkaz. (i) Vzhledem k bodu 1 definice 7 uvažujme libovolné $g \in \mathrm{E}(N)$ splňující

$$g\restriction_{(K \cup L)} = h\restriction_{(K \cup L)} \tag{12}$$

a ověřme, že je $\underline{\mathrm{d}}(h,g) \leq \varepsilon$. Označme $e := g\restriction_M \in \mathrm{E}(M)$. Z rovnosti (12) a značení e a f dostáváme $e\restriction_K = (g\restriction_M)\restriction_K = (h\restriction_M)\restriction_K = f\restriction_K$. Protože f je ε-určená body K, dle bodu 1 definice 7 ze vztahů $e \in \mathrm{E}(M)$ a $e\restriction_K = f\restriction_K$ plyne $\underline{\mathrm{d}}(f,e) \leq \varepsilon$, to jest $\underline{\mathrm{d}}(h\restriction_M, g\restriction_M) \leq \varepsilon$. Protože je navíc $g\restriction_L = h\restriction_L$ a $N = M \cup L$, je také $\underline{\mathrm{d}}(h,g) \leq \varepsilon$ (viz definici 3).

(ii) Označme symbolem η $<\kappa$-odchylnost funkce f a uvažujme libovolné $\varepsilon > 0$. Dle bodu 2 definice 7 existuje $K \in [M]^{<\kappa}$ takové, že f je $(\eta + \varepsilon)$-určená body K. Protože $\operatorname{card} L < \kappa$, dostáváme $(K \cup L) \in [N]^{<\kappa}$ a tvrzení plyne z části (i) (opět dle bodu 2 definice 7). Q.E.D.

Tvrzení 22. *Mějme metrický prostor M a funkci $f \in \mathrm{E}(M)$.*

(i) *Mějme $K \subseteq M$ a $\varepsilon \geq 0$. Jestliže K je ε-síť prostoru M, potom funkce f je 2ε-určená body K.*

(ii) *Mějme nekonečný kardinál κ. Jestliže prostor M je κ-prekompaktní, potom funkce f je $<\kappa$-body skorourčitelná.*

Důkaz. Značíme $M = (M, \rho)$. (i) Uvažujme libovolné $g \in \mathrm{E}(M)$ splňující $g\restriction_K = f\restriction_K$ a libovolné $m \in M$. Protože K je ε-síť, existuje $k \in K$ pro které je $\rho(m,k) \leq \varepsilon$. S užitím rovnosti $g(k) = f(k)$ a definice 2 odhadneme

$$|f(m) - g(m)| \leq |f(m) - f(k)| + |g(k) - g(m)| \leq \rho(m,k) + \rho(m,k) \leq 2\varepsilon.$$

Přechodem k supremu přes všechna $m \in M$ obdržíme nerovnost $\underline{\mathrm{d}}(f,g) \leq 2\varepsilon$, kterou bylo třeba ověřit (viz bod 1 definice 7).

(ii) Protože dle předpokladu v prostoru M existuje ε-síť $K \in [M]^{<\kappa}$ pro každé $\varepsilon > 0$, tvrzení plyne z (i) (viz bod 3 definice 7 a tvrzení 18). Q.E.D.

Uvedení. Na závěr této části uvedeme některé postačitelné podmínky pro rozšiřujících funkce, vedoucí ke kladné odchylnosti.

Tvrzení 23. *Mějme metrický prostor M.*

(i) *Mějme dále funkci $f \in \mathrm{E}(M)$ a označme*

$$\eta := \inf\{f(m) + f(n) - \rho(m,n) \colon m, n \in M\}.$$

Je-li $\operatorname{diam} M = \infty$, *potom $<\aleph_0$-odchylnost funkce f je $\geq \eta$.*

(ii) *Mějme nekonečný kardinál κ, podprostor $P \subseteq M$ a funkci $f \in \mathrm{E}(P)$. Označme*

$$\eta := \inf\{\rho(p,q) + f(q) - f(p) \colon p, q \in M,\ p \neq q\}.$$

Je-li $\operatorname{card} P \geq \kappa$, *potom $<\kappa$-odchylnost Katětovova rozšíření $\overline{\mathrm{e}}^M f \in \mathrm{E}(M)$ je $\geq \eta$.*

(iii) *Mějme nekonečný kardinál κ, funkci $f \in \mathrm{E}(M)$ a $\varepsilon > \delta \geq 0$ takové, že v M neexistuje ε-síť $K \in [M]^{<\kappa}$ a pro každé $p, q \in M$ je $|f(p) - f(q)| \leq \delta$. Potom $<\kappa$-odchylnost funkce f je $\geq \varepsilon - \delta$.*

(iv) †*Mějme nekonečný kardinál κ splňující $\kappa = \kappa^{<\kappa}$ a $d \in [0, \infty]$. Jestliže M není κ-prekompaktní, potom existuje funkce $f \in \mathrm{E}(M)$, $f \leq d$, která není $<\kappa$-body skorourčitelná.*

Důkaz. (i) Uvažujme libovolnou konečnou podmnožinu $K \subseteq M$. Označme $r := \max\{f(k) \colon k \in K\}$ a zvolme bod $m \in M$ splňující $f(m) \geq r + \eta$ (protože $\operatorname{diam} M = \infty$, funkce f je neomezená). Dle volby r, m a η dostáváme pro libovolné $k \in K$ odhady

$$\begin{aligned} f(k) - \rho(m,k) &\leq f(k) \leq r \leq f(m) - \eta, \\ \rho(m,k) - f(k) &\leq f(m) - \eta. \end{aligned}$$

Sloučením nerovností a přechodem k supremu přes všechna $k \in K$ obdržíme nerovnost $\underline{\mathrm{d}}\big(\mathrm{ext}_K^M(m), f{\restriction}_K\big) \leq f(m) - \eta$ a zbývá užít tvrzení 19.

(ii) Uvažujme libovolné $K \in [M]^{<\kappa}$. Z definice η plyne $\rho(p,q) \geq \eta$ pro každé $p \neq q \in P$. Jelikož $\operatorname{card} P \geq \kappa$, existuje $p \in P$, $\operatorname{dist}(p, K) \geq \frac{\eta}{2}$. Uvažujme libovolné $q \in P$, $q \neq p$, a $k \in K$. Podle tvrzení 11 (i), dle volby η a vlastnosti metriky ρ odhadneme

$$\overline{\mathrm{e}}^M f(p) + \eta = f(p) + \eta \leq \rho(p,q) + f(q) \leq \rho(p,k) + \rho(k,q) + f(q). \tag{13}$$

Dále je $\overline{\mathrm{e}}^M f(p) + \eta = f(p) + \eta \leq \rho(p,k) + \rho(k,p) + f(p)$. Přechodem k infimu přes všechna $q \in P$ (def. 4 a 3) a dle definice 5 dostáváme

$$\overline{\mathrm{e}}^M f(p) + \eta \leq \rho(p,k) + \overline{\mathrm{d}}\big(\mathrm{ext}_P^M(k), f\big) = \rho(p,k) + \overline{\mathrm{e}}^M f(k). \tag{14}$$

Přechodem k infimu přes všechna $k \in K$ dle definic 4 a 3 obdržíme nerovnost $\overline{\mathrm{e}}^M f(p) + \eta \leq \overline{\mathrm{d}}\big(\mathrm{ext}_K^M(p), \overline{\mathrm{e}}^M f{\restriction}_K\big)$ a zbývá užít tvrzení 19.

(iii) Uvažujme libovolné $K \in [M]^{<\kappa}$. Dle předpokladu K není ε-síť v M, existuje tedy $m \in M$, pro které je $\operatorname{dist}(m, K) \geq \varepsilon$. Pro $k \in K$ odhadneme

$$\rho(m,k) + f(k) \geq \varepsilon + f(m) - \big(f(m) - f(k)\big) \geq f(m) + \varepsilon - \delta.$$

†v případě $\kappa = \aleph_0$ viz (Melleray, 2007, str. 399)

Přechodem k infimu přes $k \in K$ obdržíme $\overline{\mathrm{d}}\big(\mathrm{ext}_K^M(m), f{\restriction_K}\big) \geq f(m) + (\varepsilon - \delta)$ a užijeme tvrzení 19.

(iv) a) Předpokládejme nejprve, že $d := \operatorname{diam} M < \infty$. Zvolme libovolné $c \in \left[\frac{d}{2}, d\right]$ a položme $f(m) = c$, $m \in M$. Potom $f \in \mathrm{E}(M)$ a podle části (iii) má f kladnou odchylnost.

b) Předpokládejme, že $\operatorname{diam} M = \infty$, $\kappa = \aleph_0$. Je-li $f \in \mathrm{E}(M)$ a $c > 0$, potom $(f + c) \in \mathrm{E}(M)$ a podle části (i) má $(f + c)$ kladnou odchylnost.

c) Předpokládejme, že $\operatorname{diam} M = \infty$, $\kappa > \aleph_0$. Potom vzhledem k rovnosti $\kappa = \kappa^{<\kappa}$ musí být $\operatorname{cf} \kappa = \kappa > \aleph_0$ (viz poznámku 3, str. 32). Protože M není κ-prekompaktní, existuje $\varepsilon > 0$ a $P \subseteq M$ ε-separovaná podmnožina mohutnosti κ. S ohledem na nerovnosti $\operatorname{cf} \kappa > \aleph_0$ můžeme předpokládat, že $r := \operatorname{diam} P < \infty$. Položme $f(p) := r$, $p \in P$. Potom $f \in \mathrm{E}(P)$ a dle části (ii) má funkce $\overline{\mathrm{e}}^M f \in \mathrm{E}(M)$ kladnou odchylnost. Q.E.D.

II. Prostory realizací v Urysohnových prostorech

(A) Prostory realizací skorourčitelných rozšiřujících funkcí

Lemma 1.[†] *Mějme nekonečný kardinál κ, $d \in [0, \infty]$, úplný $<\kappa$-volně $\leq\kappa$-univerzální metrický prostor U diametru d, podprostor $M \subseteq U$ a funkci $f \in \mathrm{E}(M)$, $|f| \leq d$. Jestliže f je $<\kappa$-body skorourčitelná, potom existuje $u \in U$ realizující f.*

Důkaz. Značíme $U = (U, \rho)$. Transfinitní rekurzí v ω krocích sestrojíme posloupnost $(u_n \colon n < \omega)$ bodů prostoru U, která splňuje pro každé $n < \omega$ při značení $f_n := \mathrm{ext}^U_M(u_n)$ podmínky

(i, n) $\quad \underline{\mathrm{d}}(f, f_n) \leq 2^{-n}$,

(ii, n) $\quad n \geq 1 \Rightarrow \rho(u_n, u_{n-1}) \leq 2^{-(n-1)}$.

Vzhledem k předpokladu o f podle definice 7, bod 3 ($\varepsilon := 1$) a bod 1, existuje $K_0 \in [M]^{<\kappa}$ tak, že

$$\forall g \in \mathrm{E}(M) \colon (g{\restriction}_{K_0} = f{\restriction}_{K_0}) \Rightarrow \underline{\mathrm{d}}(f, g) \leq 1. \tag{15}$$

Platí $K_0 \in [U]^{<\kappa}$, $f{\restriction}_{K_0} \in \mathrm{E}(K_0)$ a $|f{\restriction}_{K_0}| \leq |f| \leq d$. Protože prostor U je $<\kappa$-volně $\leq\kappa$-univerzální diametru d, podle tvrzení 3 existuje $u_0 \in U$ realizující $f{\restriction}_{K_0}$, to jest splňující rovnost

$$\mathrm{ext}^U_{K_0}(u_0) = f{\restriction}_{K_0}. \tag{16}$$

Odtud v důsledku značení f_0 a tvrzení 8 (ii) dostáváme $f_0{\restriction}_{K_0} = f{\restriction}_{K_0}$, a následně z (15) ($g := f_0$) obdržíme nerovnost (i, 0). Podmínka (ii, 0) je prázdná.

Uvažujme libovolné $1 \leq n < \omega$ a předpokládejme, že je sestrojen bod u_{n-1} splňující (i, $n-1$). Obdobně jako v případě $n = 0$ (nyní volíme $\varepsilon := 2^{-n}$) získáme $K_n \in [M]^{<\kappa}$ tak, že

$$\forall g \in \mathrm{E}(M) \colon (g{\restriction}_{K_n} = f{\restriction}_{K_n}) \Rightarrow \underline{\mathrm{d}}(f, g) \leq 2^{-n}. \tag{17}$$

Označme $K'_n := K_n \cup \{u_{n-1}\}$. Položme $c := \underline{\mathrm{d}}(f{\restriction}_{K_n}, f_{n-1}{\restriction}_{K_n})$ a užijme tvrzení 10 k rozšíření funkce $f{\restriction}_{K_n}$ do bodu u_{n-1}. K tomu v tvrzení zvolme $P := U$, $M := K_n$, $g := f{\restriction}_{K_n}$, $p := u_{n-1}$; protože e v tvrzení značí $\mathrm{ext}^U_{K_n}(u_{n-1}) = f_{n-1}{\restriction}_{K_n}$, platnost podmínek pro c obdržíme z částí (i) a (ii) tvrzení 6. Podle závěru tvrzení lze $f{\restriction}_{K_n}$ rozšířit na funkci $h_n \in \mathrm{E}(K'_n)$ tak, že

$$h_n(u_{n-1}) = c.$$

[†] Lemma vychází z Huhunaišviliho lemmatu (viz důsledek 2 na str. 20) oslabením předpokladů tak, aby stále mohla být zachována struktura původního důkazu. Vlastnost rozšiřující funkce na κ-prekompaktním prostoru potřebná pro klíčovou argumentaci je zachycena pojmem skorourčitelnosti $<\kappa$-body.

Užitím tvrzení 14 (i) a částí (iii) a (iv) tvrzení 6 z předpokladů $\operatorname{diam} U \le d$, $|f| \le d$ obdržíme odhad $c \le d$ a následně $|h_n| \le d$. Protože je dále $K'_n \in [U]^{<\kappa}$, $h_n \in \mathrm{E}(K'_n)$ a prostor U je $<\kappa$-volně $\le\kappa$-univerzální diametru d, podle tvrzení 3 existuje $u_n \in U$ realizující h_n, to jest splňující rovnosti

$$\operatorname{ext}^U_{K_n}(u_n) = h_n{\restriction}_{K_n} = f{\restriction}_{K_n}, \tag{18}$$

$$\rho(u_n, u_{n-1}) = h_n(u_{n-1}) = c. \tag{19}$$

Z (18) v důsledku značení f_n a tvrzení 8 (ii) dostáváme $f_n{\restriction}_{K_n} = f{\restriction}_{K_n}$ a následně z (17) ($g := f_n$) obdržíme (i, n). Podmínku (ii, n) získáme z rovnosti (19), odhadu $c = \underline{\mathrm{d}}(f{\restriction}_{K_n}, f_{n-1}{\restriction}_{K_n}) \le \underline{\mathrm{d}}(f, f_{n-1})$ (viz tvrzení 6 (iv)) a podmínky (i, $n-1$). Tím je rekurzivní krok dokončen.

Posloupnost $(u_n \colon n < \omega)$ je dle podmínek (ii, n), $n < \omega$, cauchyovská. Protože je prostor U úplný, existuje $u := \lim u_n \in U$. Z podmínek (i, n), $n < \omega$, plyne $f_n \to f$ v $\mathrm{E}(M)$. Ze spojitosti zobrazení ext^U_M (viz tvrzení 8 (iii)) dostáváme

$$\operatorname{ext}^U_M(u) = \operatorname{ext}^U_M(\lim u_n) = \lim \operatorname{ext}^U_M(u_n) = \lim f_n = f,$$

to jest, bod u realizuje f v prostoru U. Q.E.D.

Věta 1. *Mějme nekonečný kardinál κ, $d \in [0, \infty]$, úplný $<\kappa$-volně $\le\kappa$-univerzální metrický prostor U diametru d, podprostor $M \subseteq U$ a funkci $f \in \mathrm{E}(M)$, $f \le d$. Jestliže f je $<\kappa$-body skorourčitelná, potom prostor realizací f v U je úplný $<\kappa$-volně $\le\kappa$-univerzální prostor diametru $\min\big\{d, \overline{\mathrm{d}}(f, f)\big\}$.*

Důkaz. Značíme $U = (U, \rho)$. Položme $d' := \min\big\{d, \overline{\mathrm{d}}(f, f)\big\}$ a označme symbolem R prostor realizací f v U. Předně, podle tvrzení 15 je R uzavřeným podprostorem prostoru U diametru $\le \overline{\mathrm{d}}(f, f)$. Protože je také $\operatorname{diam} R \le \operatorname{diam} U \le d$, dostáváme nerovnost

$$\operatorname{diam} R \le \min\big\{d, \overline{\mathrm{d}}(f, f)\big\} = d'. \tag{20}$$

Úplnost prostoru R plyne z toho, že je uzavřeným podprostorem úplného prostoru.

Zbývá ukázat, že R je $<\kappa$-volně $\le\kappa$-univerzální diametru d'. K tomu uvažujme libovolný podprostor $T \in [R]^{<\kappa}$ a rozšiřující funkci $g \in \mathrm{E}(T)$, $|g| \le d'$. Ukážeme-li, že existuje $r \in R$ realizující g, věta bude dokázána vzhledem k (20) a tvrzení 3.

Užitím nezápornosti g, předpokladu $|g| \le d'$, volby d' a definice 3 pro každé $t \in T$ a $m \in M$ odhadneme

$$0 \le g(t) \le d' \le \overline{\mathrm{d}}(f, f) \le 2f(m). \tag{21}$$

Protože $T \subseteq R = \big(\operatorname{ext}^U_M\big)^{-1}(f)$, pro každé $t \in T$ a $m \in M$ dále platí

$$\rho(t, m) = \operatorname{ext}^U_M(t)(m) = f(m). \tag{22}$$

Označme $N := M \cup T$. Jestliže $u \in M \cap T$, z (22) dostáváme $f(u) = \rho(u, u) = 0$, odtud dále z (21) získáme $g(u) = f(u) = 0$. To umožňuje definovat funkci $h \colon N \to \mathbb{R}$ rovnostmi

$$\begin{aligned} h(m) &= f(m), \qquad && m \in M, \\ h(t) &= g(t), && t \in T. \end{aligned}$$

Ukažme, že $h \in \mathrm{E}(N)$. K tomu je potřeba dle definice 2 ověřit pro každé $u, v \in N$ nerovnosti

$$|h(u) - h(v)| \leq \rho(u, v) \leq h(u) + h(v). \tag{23}$$

Protože $h{\restriction}_M = f$ ($h{\restriction}_T = g$), ze vztahu $f \in \mathrm{E}(M)$ ($g \in \mathrm{E}(T)$) plyne platnost (23) pro každé $u, v \in M$ ($u, v \in T$). Ve zbývajícím případě stačí vzhledem k symetričnosti podmínky v u, v uvažovat $u =: t \in T$ a $v =: m \in M$. V tom případě, vzhledem k rovnosti (22) a definici h, podmínka (23) nabývá podoby

$$|g(t) - f(m)| \leq f(m) \leq g(t) + f(m),$$

která je ekvivalentní nerovnostem

$$|f(m) - f(m)| \leq g(t) \leq f(m) + f(m)$$

a plyne z (21).

Vzhledem k nerovnosti $\operatorname{card} T < \kappa$ a předpokladu o funkci f, podle tvrzení 21 (ii) a tvrzení 18 je h $<\kappa$-body skorourčitelná. Z nerovností $|f| \leq d$ a $|g| \leq d' \leq d$ plyne $h \leq d$. Odtud, protože U je $<\kappa$-volně $\leq\kappa$-univerzální diametru d, podle lemmatu 1 existuje $r \in U$ realizující h, to jest splňující

$$\operatorname{ext}^U_N(r) = h. \tag{24}$$

Podle tvrzení 8 (ii) odtud dostáváme $\operatorname{ext}^U_M(r) = h{\restriction}_M = f$, a tedy $r \in R$. Užijeme-li navíc část (i) téhož tvrzení, získáme také $\operatorname{ext}^R_T(r) = \operatorname{ext}^U_T(r) = h{\restriction}_T = g$, to znamená, že bod r je hledanou realizací g v prostoru R. Q.E.D.

Důsledek 1.[†] *Mějme nekonečný kardinál κ, $d \in [0, \infty]$, Urysohnův univerzální prostor U hustoty κ a diametru d, podprostor $M \subseteq U$ a funkci $f \in \mathrm{E}(M)$, $f \leq d$. Jestliže f je $<\kappa$-body skorourčitelná, potom prostor realizací f v U je Urysohnův univerzální prostor hustoty κ a diametru* $\min\bigl\{d, \overline{\mathrm{d}}(f, f)\bigr\}$.

Důkaz. Označme prostor realizací f v U symbolem R. Protože podle definice 1 a tvrzení 1 prostor U splňuje předpoklady věty 1, prostor R je úplný a $<\kappa$-volně $\leq\kappa$-univerzální diametru $\min\bigl\{d, \overline{\mathrm{d}}(f, f)\bigr\}$. Navíc $\mathrm{d}\, R \leq \mathrm{d}\, U \leq \kappa$ a zbývá tedy užít tvrzení 2. Q.E.D.

Důsledek 2. (Huhunaišvili, 1955, lemma, $\kappa = \aleph_0$) *Mějme nekonečný kardinál κ, $d \in [0, \infty]$, Urysohnův univerzální prostor U hustoty κ a diametru d a podprostor $M \subseteq U$. Jestliže M je κ-prekompaktní, potom pro každou funkci $f \in \mathrm{E}(M)$, $f \leq d$, existuje $u \in U$ realizující f.*

Důkaz. Podle tvrzení 22 (ii) je funkce$f$ $<\kappa$-body skorourčitelná. Na prostor realizací f v U se tedy vztahuje značně silnější závěr důsledku 1. K případu $\kappa > \aleph_0$ viz poznámku 3 na straně 32. Q.E.D.

[†] V případě $M = \{m\}$ (a $\kappa = \aleph_0$, $d = \infty$) nalezneme tvrzení již v Urysohnově práci (1927): *Je-li $m \in U$ a $r > 0$, potom sféra $S(m, r)$ je Urysohnův univerzální prostor hustoty κ a diametru* $\min\{d, 2r\}$. Zobecnění pro M konečnou je uvedeno v (Melleray, 2008, Exercise 8).

P. Niemiec (2009, Theorem 2.7 (U2)) ukázal obdobné tvrzení ($\kappa = \aleph_0$), je-li M tzv. *centrální podmnožina* prostoru U (a $f \in \mathrm{E}(M)$, $f \leq d$, libovolná). Důkaz je tentýž, přičemž platnost závěru lemmatu 1 jak jej užíváme ve větě 1 je požadována v definici centrální podmnožiny.

Poznámka. Důkaz silnější formulace existence realizací rozšiřujících funkcí v Urysohnově prostoru U, to jest na prekompaktních podprostorech namísto podprostorů konečných, umožnilo Huhunaišvilimu standardní metodou *back-and-forth* dokázat (zcela analogicky důkazu tvrzení 2) homogenitu prostoru U vůči prekompaktním podprostorům. Toto zesílení je v určitém smyslu nejlepší možné, viz důsledek 3 na str. 30. Stejným způsobem je možné postupovat pro $\kappa > \aleph_0$, v důsledku podmínek pro existenci U však dostáváme zesílení triviální, viz poznámku 3 na str. 32.

Věta 2. (Huhunaišvili, 1955, $\kappa = \aleph_0$) *Mějme nekonečný kardinál κ, $d \in [0, \infty]$, Urysohnův univerzální prostor U hustoty κ a diametru d, podprostory $M, N \subseteq U$ a izometrii $\varphi\colon M \to N$. Jestliže M je κ-prekompaktní, potom lze izometrii φ rozšířit na izometrii prostoru U.*

Důkaz. Huhunaišviliho důkaz (1955, věta) lze vést na základě důsledku 2 v obecnosti pro libovolné κ. Je-li však $\kappa > \aleph_0$, dle poz. 3 (str. 32) pro κ-prekompaktní M platí $\operatorname{card} M < \kappa$, a není tedy vzhledem k definici 1 co dokazovat. Q.E.D.

(B) Prostory realizací rozšiřujících funkcí s kladnou odchylností

Uvedení. V tomto oddíle dvěma navazujícími lemmaty směřujeme k větě 3, která říká, že o prostorech realizací rozšiřujících funkcí s kladnou odchylností v Urysohnových prostorech nelze říci více, než plyne z obecných podmínek v tvrzení 15.

Lemma 2. *Mějme nekonečný kardinál κ, $d \in [0, \infty]$, dále metrický prostor (M, ρ) diametru $\leq d$ a rozšiřující funkci $f \in \mathrm{E}(M)$, $f \leq d$, s $<\kappa$-odchylností $\eta > 0$.*

Potom pro každé $K \in [M]^{<\kappa}$ a každé ε, $0 < \varepsilon < \eta$, existuje bod $m \in M$ takový, že je splněna alespoň jedna ze dvou podmínek (konjunkcí podpodmínek)

$$\text{(P1)} \begin{cases} \text{(P1a)} & f(m) + \frac{\varepsilon}{3} \leq \overline{\mathrm{d}}\big(\mathrm{ext}_K^M(m), f\restriction_K\big) \quad \wedge \\ \text{(P1b)} & f(m) + \frac{\varepsilon}{3} \leq d; \end{cases}$$

$$\text{(P2)} \begin{cases} \text{(P2a)} & f(m) - \frac{\varepsilon}{3} \geq \underline{\mathrm{d}}\big(\mathrm{ext}_K^M(m), f\restriction_K\big) \quad \wedge \\ \text{(P2b)} & f(m) - \frac{\varepsilon}{3} \geq \min\big\{d, \overline{\mathrm{d}}(f, f) + \frac{\varepsilon}{3}\big\} - f(m). \end{cases}$$

Důkaz. Podle tvrzení 19 existuje $m \in M$ splňující alespoň jednu z podmínek

$$\text{(P1}') \qquad f(m) + \varepsilon \leq \overline{\mathrm{d}}\big(\mathrm{ext}_K^M(m), f\restriction_K\big).$$

$$\text{(P2}') \qquad f(m) - \varepsilon \geq \underline{\mathrm{d}}\big(\mathrm{ext}_K^M(m), f\restriction_K\big).$$

Dokazujme nejprve za předpokladu platnosti (P1′).

Podmínka (P1′) zřejmě implikuje podmínku (P1a), platí-li navíc také (P1b), není co dokazovat. Předpokládejme tedy navíc

$$f(m) + \tfrac{\varepsilon}{3} > d \tag{25}$$

a dokazujme (P2). Uvažujme libovolné $k \in K$. Z definic 4 a 3, nerovností (P1′) a (25) dostáváme

$$\begin{aligned} \rho(m, k) + f(k) &= \mathrm{ext}_K^M(m)(k) + f(k) \geq \\ &\geq \overline{\mathrm{d}}\big(\mathrm{ext}_K^M(m), f\restriction_K\big) \geq f(m) + \varepsilon > d + \tfrac{2\varepsilon}{3}. \end{aligned} \tag{26}$$

Odtud s užitím nerovnosti $\rho(m,k) \le \operatorname{diam} M \le d$ a (25) odhadneme

$$\begin{aligned} f(k) &> d + \tfrac{2\varepsilon}{3} - \rho(m,k) \ge d + \tfrac{2\varepsilon}{3} - d = \tfrac{2\varepsilon}{3}, \\ \rho(m,k) - f(k) &< d - \tfrac{2\varepsilon}{3} \le f(m) - \tfrac{\varepsilon}{3}. \end{aligned} \tag{27}$$

Podobně opět z (26) s užitím nerovnosti $f \le d$ a (25) odhadneme

$$\begin{aligned} \rho(m,k) &> d + \tfrac{2\varepsilon}{3} - f(k) \ge d + \tfrac{2\varepsilon}{3} - d = \tfrac{2\varepsilon}{3}, \\ f(k) - \rho(m,k) &< d - \tfrac{2\varepsilon}{3} < f(m) - \tfrac{\varepsilon}{3}. \end{aligned} \tag{28}$$

Získali jsme z (27) a (28) nerovnost

$$|\rho(m,k) - f(k)| \le f(m) - \tfrac{\varepsilon}{3}.$$

Přechodem k supremu přes všechna $k \in K$ (vzhledem k rovnosti $\rho(m,k) = \operatorname{ext}_K^M(m,k)$ a definici 3) dostáváme (P2a). Nerovnost (P2b) získáme z (25) a nerovnosti $\varepsilon < \eta \le d$ (k poslední nerovnosti viz tvrzení 20) následovně

$$f(m) - \tfrac{\varepsilon}{3} > d - \tfrac{2\varepsilon}{3} > \tfrac{\varepsilon}{3} > d - f(m) \ge \min\bigl\{d, \overline{\mathrm{d}}(f,f) + \tfrac{\varepsilon}{3}\bigr\} - f(m).$$

Nyní dokazujme tvrzení lemmatu za předpokladu platnosti (P2′). Omezíme se na případ, kdy není splněna podmínka (P2b) (v opačném případě získáme (P2)). Předpokládejme tedy platnost nerovností

$$\begin{aligned} f(m) - \tfrac{\varepsilon}{3} &< d - f(m), \\ f(m) - \tfrac{\varepsilon}{3} &< \overline{\mathrm{d}}(f,f) + \tfrac{\varepsilon}{3} - f(m). \end{aligned}$$

Upravme je na tvar

$$f(m) < \tfrac{d}{2} + \tfrac{\varepsilon}{6}, \tag{29}$$

$$f(m) < \tfrac{1}{2}\,\overline{\mathrm{d}}(f,f) + \tfrac{\varepsilon}{3}, \tag{30}$$

a dokazujme (P1). Uvažujme libovolné $k \in K$. Z definic 4 a 3, nerovností (P2′) a (30) dostáváme

$$\begin{aligned} f(k) - \rho(m,k) &= f(k) - \operatorname{ext}_K^M(m)(k) \le \\ &\le \underline{\mathrm{d}}\bigl(\operatorname{ext}_K^M(m), f\restriction_K\bigr) \quad \le f(m) - \varepsilon < \tfrac{1}{2}\,\overline{\mathrm{d}}(f,f) - \tfrac{2\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Odtud s užitím nerovnosti $f(k) \ge \frac{1}{2}\,\overline{\mathrm{d}}(f,f)$ (viz def. 3) a (30) odhadneme

$$\begin{aligned} \rho(m,k) &> f(k) - \tfrac{1}{2}\,\overline{\mathrm{d}}(f,f) + \tfrac{2\varepsilon}{3} \ge \tfrac{2\varepsilon}{3}, \\ \rho(m,k) + f(k) &> \tfrac{1}{2}\,\overline{\mathrm{d}}(f,f) + \tfrac{2\varepsilon}{3} > f(m) + \tfrac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Přechodem k infimu přes všechna $k \in K$ (vzhledem k rovnosti $\rho(m,k) = \operatorname{ext}_K^M(m)(k)$ a definici 3) dostáváme (P1a). Nerovnost (P1b) získáme z (29) a nerovnosti $\varepsilon < d$ následovně

$$f(m) + \tfrac{\varepsilon}{3} < \tfrac{d}{2} + \tfrac{\varepsilon}{6} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \tfrac{d}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} < d.$$

Tím je lemma dokázáno. Q.E.D.

Lemma 3. *Mějme nekonečný kardinál κ, $d \in [0,\infty]$, $<\kappa$-volně $\leq\kappa$-univerzální metrický prostor (U,ρ) diametru d, metrický prostor M diametru $\leq d$ a rozšiřující funkci $f \in \mathrm{E}(M)$, $f \leq d$, s $<\kappa$-odchylností $\eta > 0$. Mějme rozšíření D prostoru M diametru $\leq d$ splňující*

$$R := D \setminus M = \big(\mathrm{ext}_M^D\big)^{-1}(f),$$

dále neprázdný podprostor $D' \subseteq D$, $\operatorname{card} D' < \kappa$, vnoření $\psi' \colon D' \to U$ a bod $u \in U$.

Potom pro každé ε, $0 < \varepsilon < \eta$, existuje bod $m \in M$ a vnoření ψ rozšiřující ψ' do bodu m (tj. $\psi \colon D' \cup \{m\} \to U$) takové, že

$$\text{(P)} \qquad |f(m) - \rho(u, \psi m)| \geq \min\big\{\tfrac{\varepsilon}{6}, \operatorname{dist}\big(u, \psi[D' \cap R]\big)\big\}.$$

Důkaz. Označme $D = (D, \sigma)$, $K := D' \cap M$ a $R' := D' \cap R$. Budeme uvažovat pouze případ, kdy pro každé $k \in K$ je

$$|f(k) - \rho(u, \psi' k)| \leq \tfrac{\varepsilon}{6}, \tag{31}$$

neboť jinak stačí volit $\psi = \psi'$ a $m = k \in K$ porušující nerovnost (31).

Jestliže existuje $r \in R'$, pro které je

$$\rho(u, \psi' r) > \overline{\mathrm{d}}(f,f) + \tfrac{\varepsilon}{3}, \tag{32}$$

zvolme $m \in M$ splňující (M je jistě neprázdný prostor, neboť $\eta > 0$)

$$2f(m) \leq \overline{\mathrm{d}}(f,f) + \tfrac{\varepsilon}{6} \tag{33}$$

(viz definici 3 a tvrzení 6(ii)). Potom toto m společně s libovolným vnořením ψ rozšiřujícím ψ' do bodu m vyhovují závěru lemmatu. K ověření nerovnosti (P) odhadněme užitím vlastnosti metriky, nerovnosti (32) (je $\psi r = \psi' r$, neboť $\psi \supseteq \psi'$) a izometričnosti ψ, dále odhadu (33) a rovnosti $\sigma(r,m) = \mathrm{ext}_M^D(r)(m) = f(m)$ (viz předpoklad lemmatu o R) a upravme

$$\begin{aligned} \rho(u,\psi m) &\geq \rho(u,\psi r) - \rho(\psi r, \psi m) > \overline{\mathrm{d}}(f,f) + \tfrac{\varepsilon}{3} - \sigma(r,m) \geq \\ &\geq 2f(m) - \tfrac{\varepsilon}{6} + \tfrac{\varepsilon}{3} - f(m) = f(m) + \tfrac{\varepsilon}{6}. \end{aligned}$$

Dodejme, že existence takového ψ vyplývá z toho, že U je $<\kappa$-volně $\leq\kappa$-univerzální prostor diametru d, $\operatorname{card} D' < \kappa$ a $\operatorname{diam} D \leq d$ (viz def. 1).

Vzhledem k předchozímu odstavci stačí dále lemma dokazovat za předpokladu, že pro každé $r \in R'$ je

$$\rho(u, \psi' r) \leq \overline{\mathrm{d}}(f,f) + \tfrac{\varepsilon}{3}. \tag{34}$$

Podle lemmatu 3 existuje $m \in M$ takové, že je splněna alespoň jedna z podmínek (P1), (P2). Uvažme následující dvě rozšiřující funkce prostoru $\psi'[D']$:

$$g := \psi'^*\big(\mathrm{ext}_{D'}^D(m)\big), \qquad e := \mathrm{ext}_{\psi'[D']}^U(u).$$

Podle definic 4 a 6 pro každé $k \in K$ a $r \in R'$ platí

$$g(\psi' k) = \mathrm{ext}_{D'}^D(m)(k) = \sigma(m,k), \qquad e(\psi' k) = \rho(u, \psi' k), \tag{35a, 35b}$$

$$g(\psi' r) = \mathrm{ext}_{D'}^D(m)(r) = \sigma(m,r) = f(m), \qquad e(\psi' r) = \rho(u, \psi' r). \tag{36a, 36b}$$

Položme
$$c := \begin{cases} \min\{d, \overline{\mathrm{d}}(g,e)\}, & \text{platí-li (P1)}, \\ \underline{\mathrm{d}}(g,e), & \text{jinak}. \end{cases} \tag{37}$$
Z předpokladu $D' \neq \emptyset$ máme $\psi'[D'] \neq \emptyset$ a tedy z tvrzení 6 (ii) dostáváme $\underline{\mathrm{d}}(g,e) \leq \overline{\mathrm{d}}(g,e) < \infty$. Podle tvrzení 14 platí $g \leq \operatorname{diam} D \leq d$, $e \leq \operatorname{diam} U \leq d$, odtud z tvrzení 6 (iii) dostáváme $\underline{\mathrm{d}}(g,e) \leq d$. Protože podle předchozího v obou případech definice (37) obdržíme $c \in \big[\underline{\mathrm{d}}(g,e), \overline{\mathrm{d}}(g,e)\big]$ a $c \in \mathbb{R}$ (navíc dostáváme odhad $c \leq d$), podle tvrzení 10 lze g rozšířit na funkci $h \in \mathrm{E}\big(\psi'[D'] \cup \{u\}\big)$ tak, že
$$h(u) = c. \tag{38}$$
Prostor U je $<\kappa$-volně $\leq\kappa$-univerzální diametru d, $\operatorname{card}\big(\psi'[D'] \cup \{u\}\big) < \kappa$ a $h \leq d$ (nerovnost $c \leq d$ viz výše), podle tvrzení 3 existuje $w \in U$ realizující rozšiřující funkci h. Pro každé $d \in D'$ podle definice 4, dále ze vztahu $h \supseteq g$ a z rovností (35a), (36a) dostáváme
$$\rho(w, \psi' d) = h(\psi' d) = g(\psi' d) = \sigma(m, d). \tag{39}$$
Definujme zobrazení ψ rozšiřující vnoření ψ' do bodu m
$$\begin{aligned} \psi(d) &= \psi'(d), \qquad d \in D', \\ \psi(m) &= w. \end{aligned}$$
(kdyby bylo $m = d \in D'$, podle (39) je $\rho(w, \psi' d) = \sigma(d,d) = 0$ a tedy $w = \psi'(d)$). Z rovnosti (39) vyplývá, že ψ rozšiřuje ψ' izometricky.

Zbývá ověřit podmínku (P). Dle definice ψ, w a rovnosti (38) je
$$\rho(u, \psi m) = \rho(u, w) = h(u) = c.$$
Označme $\varepsilon' := \min\big\{\frac{\varepsilon}{6}, \operatorname{dist}\big(u, \psi[R']\big)\big\}$. Nerovnost (P) nyní nabývá tvaru
$$|c - f(m)| \geq \varepsilon'.$$

Předpokládejme nejprve, že platí (P1). Potom dle (37) je $c = \min\{d, \overline{\mathrm{d}}(g,e)\}$. Ukažme, že $c \geq f(m) + \varepsilon'$. Podle (P1b) je
$$d \geq f(m) + \tfrac{\varepsilon}{3} > f(m) + \tfrac{\varepsilon}{6} \geq f(m) + \varepsilon'. \tag{40}$$
Dále uvažujme libovolné $v \in \psi'[D']$. Jestliže $v = \psi'(k)$ pro nějaké $k \in K$, podle rovností (35), následně podle (31) a definic 4, 3 a dále podle (P1a) odhadneme
$$\begin{aligned} g(\psi' k) + e(\psi' k) = \sigma(m,k) + \rho(u, \psi' k) &\geq \operatorname{ext}_K^M(m)(k) + f(k) - \tfrac{\varepsilon}{6} \geq \\ &\geq \overline{\mathrm{d}}\big(\operatorname{ext}_K^M(m), f{\restriction}_K\big) - \tfrac{\varepsilon}{6} \geq \\ &\geq f(m) + \tfrac{\varepsilon}{3} - \tfrac{\varepsilon}{6} = f(m) + \tfrac{\varepsilon}{6} \geq f(m) + \varepsilon'. \end{aligned}$$
Je-li $v = \psi'(r)$ pro nějaké $r \in R'$, s užitím rovností (36) odhadneme
$$\begin{aligned} g(\psi' r) + e(\psi' r) = f(m) + \rho(u, \psi' r) &\geq \\ \geq f(m) + \operatorname{dist}\big(u, \psi[R']\big) &\geq f(m) + \varepsilon'. \end{aligned}$$

Protože $D' = K \cup R'$, dohromady dostáváme $g(v) + e(v) \geq f(m) + \varepsilon'$. Přechodem k infimu přes všechna $v \in \psi'[D']$ obdržíme nerovnost $\overline{\mathrm{d}}(g, e) \geq f(m) + \varepsilon'$, která společně s (40) dokazuje $c \geq f(m) + \varepsilon'$.

Ve zbývajícím případě, kdy nerovnost (P1) neplatí, je volbou m zaručena platnost podmínky (P2). Dle (37) je $c = \underline{\mathrm{d}}(g, e)$, ukažme, že $\underline{\mathrm{d}}(g, e) \leq f(m) - \varepsilon'$. K tomu uvažujme libovolné $v \in \psi'[D']$. Jestliže $v = \psi'(k)$ pro nějaké $k \in K$, z rovností (35), definic 4 a 3, (31) a (P2a) odhadneme

$$\begin{aligned}|g(\psi' k) - e(\psi' k)| &= |\sigma(m, k) - \rho(u, \psi' k)| \leq \\ &\leq |\sigma(m, k) - f(k)| + |f(k) - \rho(u, \psi' k)| \leq \\ &\leq \underline{\mathrm{d}}\big(\mathrm{ext}_K^M(m), f\restriction_K\big) + \tfrac{\varepsilon}{6} \leq f(m) - \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{6} = f(m) - \tfrac{\varepsilon}{6}.\end{aligned} \tag{41}$$

Je-li $v = \psi'(r)$ pro nějaké $r \in R'$, podle rovností (36) je

$$|g(\psi' r) - e(\psi' r)| = |f(m) - \rho(u, \psi' r)|\,. \tag{42}$$

Odhadněme

$$f(m) - \rho(u, \psi' r) \leq f(m) - \mathrm{dist}\big(u, \psi[R']\big) \leq f(m) - \varepsilon'. \tag{43}$$

Dále je $\rho(u, \psi' r) \leq \mathrm{diam}\, U \leq d$, podle (34) je také $\rho(u, \psi' r) \leq \overline{\mathrm{d}}(f, f) + \frac{\varepsilon}{3}$, odtud a s užitím (P2b) odhadněme

$$\begin{aligned}\rho(u, \psi' r) - f(m) &\leq \min\big\{d, \overline{\mathrm{d}}(f, f) + \tfrac{\varepsilon}{3}\big\} - f(m) \leq \\ &\leq f(m) - \tfrac{\varepsilon}{3} < f(m) - \varepsilon'.\end{aligned}$$

Z (42), (43) a předchozího dostáváme

$$|g(\psi' r) - e(\psi' r)| \leq f(m) + \varepsilon'.$$

Odtud a z (41) dohromady máme $|g(v) - e(v)| \leq f(m) - \varepsilon'$ pro každé $v \in \psi'[D']$, přechodem k supremu přes v dostáváme $\underline{\mathrm{d}}(g, e) \leq f(m) - \varepsilon'$ a lemma je dokázáno.

Q.E.D.

Věta 3. *Mějme nekonečný kardinál κ, $d \in [0, \infty]$, Urysohnův univerzální prostor U hustoty κ a diametru d, metrický prostor M hustoty $\leq\kappa$ a diametru $\leq d$, rozšiřující funkci $f \in \mathrm{E}(M)$, $f \leq d$, která není $<\kappa$-body skorourčitelná.*

Jestliže R je úplný metrický prostor hustoty $\leq\kappa$ a diametru $\leq \min\{d, \underline{\mathrm{d}}(f, f)\}$, potom existuje vnoření φ prostoru M do prostoru U takové, že prostor realizací rozšiřující funkce $\varphi^*(f)$ v prostoru U je izometrický s prostorem R.

Důkaz. Vzhledem k tvrzení věty lze prostor R nahradit libovolným prostorem s ním izometrickým, předpokládejme proto bez ztráty obecnosti, že $M \cap R = \emptyset$. Podle tvrzení 16 existuje rozšíření D prostorů M a R splňující $D = M \cup R$, $\mathrm{diam}\, D \leq d$ a

$$R = \big(\mathrm{ext}_M^D\big)^{-1}(f). \tag{44}$$

Hustota prostoru U je podle bodu 4 definice 1 rovna κ. Protože f není $<\kappa$-body skorourčitelná, M není κ-prekompaktní (tvrzení 22 (ii)) a je tedy jistě $\mathrm{d}\, M \geq \kappa$.

Jelikož opačná nerovnost je v předpokladu věty, dostáváme $\mathrm{d}\, M = \kappa$. Vzhledem k předpokladu $\mathrm{d}\, R \leq \kappa$ a rovnosti $D = M \cup R$ je také $\mathrm{d}\, D = \kappa$. Zvolme a očíslujme husté části prostorů U a D,

$$U = \mathrm{cl}\{u_\xi \colon \xi < \kappa\}, \qquad D = \mathrm{cl}\{d_\xi \colon \xi < \kappa\}. \tag{45}$$

Podle předpokladu o f a tvrzení 18, pro $<\kappa$-odchylnost η rozšiřující funkce f platí $\eta > 0$. Položíme-li $\varepsilon := \frac{\eta}{2}$, je $0 < \varepsilon < \eta$.

Transfinitní rekurzí v κ krocích sestrojíme posloupnost dvojic

$$(m_\xi, \psi_\xi) \colon \xi < \kappa, \tag{46}$$

kde

(i, ξ) $\quad m_\xi \in M$,

a označíme-li $D_\xi := \{d_\zeta, m_\zeta \colon \zeta \leq \xi\}$ podprostor prostoru D, potom

(ii, ξ) $\quad \psi_\xi$ *je vnoření prostoru* D_ξ *do prostoru* U.

Na posloupnost (46) klademe dále podmínky:

(iii, ξ) $\quad \forall \zeta < \xi \colon \psi_\zeta \subseteq \psi_\xi$;

(iv, ξ) $\quad \big| f(m_\xi) - \rho\big(u_\xi, \psi_\xi(m_\xi)\big) \big| \geq \min\big\{\frac{\varepsilon}{6}, \mathrm{dist}\big(u_\xi, \psi_\xi[R_\xi]\big)\big\}$,

kde

$$R_\xi := D_\xi \cap R = \{d_\zeta \colon \zeta \leq \xi, d_\zeta \in R\}. \tag{47}$$

Uvažujme libovolné $\xi < \kappa$ a předpokládejme, že pro každé $\zeta < \xi$ je definována dvojice (m_ζ, ψ_ζ) vyhovující vztahům (i, ζ) až (iv, ζ). Položme

$$\psi''_\xi := \textstyle\bigcup_{\zeta<\xi} \psi_\zeta, \qquad D''_\xi := \bigcup_{\zeta<\xi} D_\zeta = \{d_\zeta, m_\zeta \colon \zeta < \xi\}.$$

Dle tvrzení 5 a podmínek (iii, ζ) ($\zeta < \xi$) je ψ''_ξ vnořením prostoru D''_ξ do prostoru U, dále máme $D''_\xi \in [U]^{<\kappa}$ a $\mathrm{diam}\, D \leq d$. Položme $D'_\xi := D''_\xi \cup \{d_\xi\}$. Protože prostor U je $<\kappa$-volně $\leq\kappa$-univerzální diametru d (viz def. 1 a tvrzení 1), vnoření ψ''_ξ lze rozšířit na vnoření $\psi'_\xi \colon D'_\xi \to U$. Podle lemmatu 3 (volíme $D' := D'_\xi$, $\psi' := \psi'_\xi$, $u := u_\xi$, zbývající značení se shoduje) existuje bod $m_\xi := m \in M$ a vnoření $\psi_\xi := \psi$ rozšiřující ψ'_ξ do bodu m_ξ takové, že platí (iv, ξ). Volba m_ξ splňuje (i, ξ), podmínka (ii, ξ) plyne z předchozího a rovnosti $D'_\xi \cup \{m_\xi\} = D_\xi$, (iii, ξ) dostáváme ze vztahů $\psi_\zeta \subseteq \psi''_\xi \subseteq \psi'_\xi \subseteq \psi_\xi$ ($\zeta < \xi$). Tím je rekurzivní krok hotov.

Položme $\psi' := \bigcup_{\xi<\kappa} \psi_\xi$, $D' := \bigcup_{\xi<\kappa} D_\xi = \{d_\xi, m_\xi \colon \xi < \kappa\}$. Podle tvrzení 5 a podmínek (iii, ξ) ($\xi < \kappa$) je ψ' vnořením prostoru D' do prostoru U, z (45) plyne, že D' je hustá část prostoru D. Prostor U je úplný (viz bod 4 def. 1), vnoření ψ' lze tedy (jednoznačně) rozšířit na vnoření $\psi \colon D \to U$ (tvrzení 4).

Uvažujme libovolné $\xi < \kappa$. Je $\psi_\xi \subseteq \psi' \subseteq \psi$, $R_\xi \subseteq R$ (viz (47)), tedy

$$\psi_\xi[R_\xi] = \psi[R_\xi] \subseteq \psi[R],$$

odtud

$$\mathrm{dist}\big(u_\xi, \psi_\xi[R_\xi]\big) \geq \mathrm{dist}\big(u_\xi, \psi[R]\big).$$

Ze vztahu $\psi \supseteq \psi_\xi$, z (iv, ξ) a z předchozí nerovnosti dostáváme

$$\begin{aligned} &\big| f(m_\xi) - \rho\big(u_\xi, \psi(m_\xi)\big) \big| = \big| f(m_\xi) - \rho\big(u_\xi, \psi_\xi(m_\xi)\big) \big| \geq \\ &\geq \min\big\{\tfrac{\varepsilon}{6}, \mathrm{dist}\big(u_\xi, \psi_\xi[R_\xi]\big)\big\} \geq \min\big\{\tfrac{\varepsilon}{6}, \mathrm{dist}\big(u_\xi, \psi[R]\big)\big\}. \end{aligned} \tag{48}$$

Položme $\varphi := \psi\restriction_M$. Označme symbolem S prostor realizací rozšiřující funkce $\varphi^*(f) \in \mathrm{E}(\varphi[M])$ v prostoru U,

$$S = \big(\mathrm{ext}^U_{\varphi[M]}\big)^{-1}(\varphi^* f) \subseteq U \tag{49}$$

(viz bod 3 def. 4). Věta bude dokázána, ukážeme-li rovnost $S = \psi[R]$.

Podle tvrzení 17 (ii) (volíme $P := D$, $Q := U$, ostatní značení se shoduje) platí inkluze

$$\psi\big[\big(\mathrm{ext}^D_M\big)^{-1}(f)\big] \subseteq \big(\mathrm{ext}^U_{\varphi[M]}\big)^{-1}(\varphi^* f),$$

kterou přepíšeme podle (44) a (49) na tvar

$$\psi[R] \subseteq S.$$

K důkazu obrácené inkluze uvažujme libovolné $s \in S$. Prostor $\psi[R]$ je izometrickým obrazem úplného prostoru R, je tedy úplný a nutně v prostoru U uzavřený. K ověření vztahu $s \in \psi[R]$ stačí ukázat $s \in \mathrm{cl}\,\psi[R]$. Uvažujme proto libovolné $\delta > 0$ splňující

$$\delta < \tfrac{\varepsilon}{6}. \tag{50}$$

Z (45) plyne existence $\xi < \kappa$, pro které je

$$\rho(s, u_\xi) < \delta. \tag{51}$$

Ze vztahů $\varphi = \psi\restriction_M$ a $m_\xi \in M$, následně podle definice 4, ze vztahů $s \in S$ a (49), a nakonec podle definice 6 dostáváme

$$\rho(s, \psi m_\xi) = \rho(s, \varphi m_\xi) = \mathrm{ext}^U_{\varphi[M]}(s)(\varphi m_\xi) = (\varphi^* f)(\varphi m_\xi) = f(m_\xi). \tag{52}$$

Odhadněme s užitím (50), (51), vlastnosti metriky ρ, (52) a (48)

$$\begin{aligned} \tfrac{\varepsilon}{6} > \delta > \rho(s, u_\xi) &\geq |\rho(s, \psi m_\xi) - \rho(u_\xi, \psi m_\xi)| = \\ &= |\quad f(m_\xi) \quad - \rho(u_\xi, \psi m_\xi)| \geq \min\big\{\tfrac{\varepsilon}{6}, \mathrm{dist}\big(u_\xi, \psi[R]\big)\big\}. \end{aligned}$$

Z odhadu plyne, že se minima na pravé straně nerovností musí nabývat na druhém členu, a je tedy

$$\mathrm{dist}\big(u_\xi, \psi[R]\big) < \delta.$$

Odtud a z (51) plyne

$$\mathrm{dist}\big(s, \psi[R]\big) < 2\delta.$$

Protože δ bylo libovolně malé, je $s \in \mathrm{cl}\,\psi[R]$ a věta je dokázána. Q.E.D.

III. Počet tříd ekvivalentních vnoření do Urysohnova prostoru

Definice 8. Mějme metrické prostory M a P. Dvě vnoření $\varphi, \psi \in [M,P]$ nazveme *metricky ekvivalentní (v P)*, jestliže existuje $\Theta \in \mathrm{Iso}(P)$ takové, že $\psi = \Theta \circ \varphi$. Příslušnou relaci na množině $[M,P]$ značíme symbolem $\sim^{P}_{M}$, to jest

$$\varphi \sim^{P}_{M} \psi \Leftrightarrow \exists \Theta \in \mathrm{Iso}(P)\colon \psi = \Theta \circ \varphi.$$

Tvrzení. *Mějme metrické prostory M a P. Relace $\sim^{P}_{M}$ je reflexivní, symetrická a tranzitivní (tj. relace ekvivalence na množině $[M,P]$).* (bez důkazu) Q.E.D.

Poznámka 2. Ponechme značení M, P, φ a ψ z definice 8 a označme $\vartheta := \psi \circ \varphi^{-1}$ izometrii podprostoru $\varphi[M]$ na podprostor $\psi[M]$. Pro izometrii $\Theta \in \mathrm{Iso}(P)$ platí $\psi = \Theta \circ \varphi$ právě když $\Theta\restriction_{\varphi[M]} = \psi \circ \varphi^{-1} = \vartheta$. Z toho plyne, že izometrii ϑ lze rozšířit na izometrii prostoru P právě když vnoření φ a ψ jsou metricky ekvivalentní.

Navíc, každá izometrie ϑ' podprostorů N a N' prostoru P, kde $N \simeq M\,(\simeq N')$, je tvaru $\psi' \circ \varphi'^{-1}$ pro nějaká $\varphi', \psi' \in [M,P]$. Zkoumání relací $\sim^{P}_{M}$ je tedy zkoumáním rozšiřitelnosti izometrií mezi podprostory prostoru P na izometrie prostoru P.

Tvrzení 24. *Mějme metrické prostory M a P, rozšiřující funkci $f \in \mathrm{E}(M)$ a $\varphi, \psi \in [M,P]$. Jsou-li φ, ψ metricky ekvivalentní (v P), potom prostory realizací rozšiřujících funkcí $\varphi^* f$ a $\psi^* f$ v prostoru P jsou izometrické.*

Důkaz. Označme $\vartheta := \psi \circ \varphi^{-1}$. Potom $\psi = \vartheta \circ \varphi$ a z definice 6 dostáváme

$$\psi^* f = (\vartheta \circ \varphi)^* f = \vartheta^*(\varphi^* f).$$

Ze vztahu $\varphi \sim^{P}_{M} \psi$ podle definice 8 a poznámky 2 plyne existence $\Theta \in \mathrm{Iso}(P)$ splňující $\vartheta = \Theta\restriction_{\varphi[M]}$. Dle tvrzení 17(ii) (značení P se shoduje, dále volíme $Q := P$, $M := \varphi[M]$, $\psi := \Theta$ a $f := \varphi^* f$) izometrie Θ zobrazuje prostor realizací $\varphi^* f$ v P na prostor realizací $\vartheta^*(\varphi^* f) = \psi^* f$ v P. Q.E.D.

Věta 4. *Mějme nekonečný kardinál κ, $d \in [0,\infty]$, Urysohnův univerzální prostor U hustoty κ a diametru d a metrický prostor M hustoty $\leq\kappa$ a diametru $\leq d$.*

Je-li M κ-prekompaktní, potom relace $\sim^{U}_{M}$ má právě jednu třídu ekvivalence; jestliže M není κ-prekompaktní, potom relace $\sim^{U}_{M}$ má právě 2^κ tříd ekvivalence.

Důkaz. Vzhledem k předpokladům o M a U je dle bodů 4 a 1 definice 1 množina $[M,U]$ neprázdná. Jestliže M je navíc κ-prekompaktní a $\varphi, \psi \in [M,U]$, potom také $\varphi[M]$ je κ-prekompaktní a izometrie $\vartheta := \psi \circ \varphi^{-1}\colon \varphi[M] \to \psi[M]$ lze dle věty 2 (viz str. 21) rozšířit na izometrii $\Theta \in \mathrm{Iso}(U)$. Vzhledem k poznámce 2 je $\varphi \sim^{P}_{M} \psi$ a relace $\sim^{U}_{M}$ má tedy právě jednu třídu ekvivalence.

Předpokládejme, že M není κ-prekompaktní. Potom je jistě $d \geq \operatorname{diam} M > 0$. Počet tříd ekvivalence $\sim_M^U$ shora odhadněme mohutností jejího oboru $[M, U]$. Zvolme hustou část D prostoru M mohutnosti $\operatorname{d} M\,(=\kappa)$. Protože každé vnoření $\varphi \in [M, U]$ je jednoznačně určeno svým zúžením $\varphi\restriction_D$, dostáváme odhad

$$\operatorname{card}[M, U] \leq \operatorname{card}[D, U] \leq \operatorname{card} U^D \leq (\kappa^\omega)^\kappa = \kappa^{\omega\cdot\kappa} = \kappa^\kappa = 2^\kappa$$

Podle tvrzení 23 (iv) (užijeme Katětovovu větu, viz str. 4) existuje funkce $f \in \mathrm{E}(M)$, $f \leq d$, která není $<\kappa$-body skorourčitelná. Označme $d' := \min\{d, \underline{\mathrm{d}}(f, f)\}$. Z předpokladů o M a f plyne $d' > 0$. Uvažme libovolnou množinu $\mathcal{R}$ vzájemně neizometrických úplných metrických prostorů hustoty $\leq\kappa$ a diametru $\leq d'$. Pro každé $R \in \mathcal{R}$ existuje dle věty 3 vnoření $\varphi_R \in [M, U]$, pro které je prostor realizací $\varphi^* f$ v U izometrický s prostorem R. Dle tvrzení 24 je $\varphi_R \not\sim_M^U \varphi_{R'}$ kdykoli $R, R' \in \mathcal{R}$, $R \neq R'$. Tříd ekvivalence $\sim_M^U$ je proto nejméně $\operatorname{card}\mathcal{R}$ a tedy právě 2^κ vzhledem k tvrzení 25 (ii) uvedenému níže. Q.E.D.

Protože jsem nenalezl vhodný odkaz, následující tvrzení (vzdálené tématu práce) uvádím s důkazem. V tvrzení je užito pojmů z teorie grafů. Grafem zde rozumíme dvojici (V, E), kde V je libovolná množina vrcholů a $E \subseteq [V]^2$ je množina hran. Okolí $N(v)$ a stupeň $n(v)$ vrcholu $v \in V$ v grafu G jsou definovány vztahy

$$N(v) = N_G(v) := \{u \in V \colon \{u, v\} \in E\}, \qquad n(v) = n_G(v) := \operatorname{card} N_G(v).$$

Mohutností grafu G rozumíme mohutnost $\operatorname{card} V$. Pojem izomorfismu grafů je zřejmý.

Tvrzení 25. *Mějme nekonečný kardinál κ a $d \in (0, \infty]$.*

(i) *Existuje právě 2^κ neizomorfních grafů mohutnosti κ.*

(ii) *Existuje právě 2^κ neizometrických úplných metrických prostorů hustoty κ a diametru d.*

Důkaz. a) *Existuje množina $\mathcal{G}$, $\operatorname{card}\mathcal{G} = 2^\kappa$, vzájemně neizomorfních grafů mohutnosti κ.*

Označme

$$V := \kappa \times \{0, 1\}, \qquad u_\xi := (\xi, 0), \quad v_\xi := (\xi, 1), \quad \xi < \kappa.$$

a položme

$$E := \{\{u_\alpha, v_\beta\} \colon \alpha \leq \beta < \kappa\}.$$

Potom $G := (V, E)$ je graf mohutnosti $\operatorname{card} V = \kappa$, jehož jediným automorfismem je identické zobrazení id_V. K tomu pro spor uvažujme libovolné $\Phi \in \mathrm{Aut}(G)$, $\Phi \neq \mathrm{id}_V$. Označme $\xi := \min\{\alpha < \kappa \colon \Phi(u_\alpha) \neq u_\alpha \vee \Phi(v_\alpha) \neq v_\alpha\}$ a položme

$$V_\xi := \{u_\alpha, v_\alpha \colon \xi \leq \alpha < \kappa\}, \qquad G_\xi := G\restriction_{V_\xi}$$

(indukovaný podgraf grafu G). Potom je $\Phi[V_\xi] = V_\xi$ a tedy $\Phi_\xi := \Phi\restriction_{V_\xi} \in \mathrm{Aut}(G_\xi)$. Pro okolí a stupně vrcholů v grafu G_ξ pro každé $\alpha < \kappa$ platí

$$\begin{aligned} N(u_{\xi+\alpha}) &= \{v_{\xi+\beta} \colon \alpha \leq \beta < \kappa\}, \qquad & n(u_{\xi+\alpha}) &= \kappa; \\ N(v_{\xi+\alpha}) &= \{u_{\xi+\beta} \colon \xi \leq \beta \leq \alpha\}, \qquad & n(v_{\xi+\alpha}) &= 1 + \operatorname{card}\alpha < \kappa. \end{aligned}$$

Vrchol v_ξ (respektive u_ξ) je jediným vrcholem grafu G_ξ stupně 1 (respektive jehož okolí obsahuje vrchol stupně 1), proto musí být $\Phi_\xi(v_\xi) = v_\xi$ a $\Phi_\xi(u_\xi) = u_\xi$, což je ve sporu s volbou ξ. Tím je dokázáno $\mathrm{Aut}(G) = \{\mathrm{id}_V\}$.

Zvolme libovolné w, $w \notin V$, a označme $V' := V \cup \{w\}$. Pro $S \subseteq \kappa$ položme

$$E_S := E \cup \{\{w, u_\xi\}, \{w, v_\alpha\} \colon \xi < \kappa,\, \alpha \in S\}.$$

Potom $G_S := (V', E_S)$ je graf mohutnosti κ obsahující G jako indukovaný podgraf.

Uvažujme $S, S' \subseteq \kappa$ a předpokládejme, že existuje izomorfismus $\Phi \colon G_S \to G_{S'}$. Vrchol w je jediným vrcholem grafů G_S, $G_{S'}$, jehož okolí obsahuje κ vrcholů stupně κ (a to vrcholy u_ξ, $\xi < \kappa$), musí tedy být $\Phi(w) = w$. Odtud dostáváme $\Phi[V] = V$, $\Phi\restriction_V \in \operatorname{Aut}(G)$ a tedy $\Phi\restriction_V = \mathrm{id}_V$. Z rovnosti $\Phi = \mathrm{id}_{V'}$ plyne $E_S = E_{S'}$ a pro každé $\alpha < \kappa$ dostáváme

$$\alpha \in S \Leftrightarrow \{w, v_\alpha\} \in E_S \Leftrightarrow \{w, v_\alpha\} \in E_{S'} \Leftrightarrow \alpha \in S',$$

to jest $S = S'$. Volba $\mathcal{G} := \{G_S \colon S \subseteq \kappa\}$ tedy vyhovuje tvrzení a).

b) *Počet neizometrických úplných metrických prostorů hustoty κ a diametru d je větší nebo roven počtu neizomorfních grafů mohutnosti κ.*

Pro graf $G = (V, E)$ mohutnosti κ definujme metriku $\rho_E \colon V \times V \to \mathbb{R}$ rovnostmi

$$\rho_E(v, v) = 0, \qquad \begin{array}{ll} \rho_E(u, v) = \tfrac{1}{2}d, & \{u, v\} \in E, \\ \rho_E(u, v) = d, & \{u, v\} \notin E, \end{array} \qquad u \neq v \in V.$$

a položme $M_G := (V, \rho_E)$. Potom M_G je úplný (diskrétní) metrický prostor splňující $\mathrm{d}\, M_G = \operatorname{card} M_G = \kappa$ a $\operatorname{diam} M_G = d$ (s výjimkou úplného grafu, tj. kdy $E = [V]^2$). Tvrzení b) proto plyne z následující vlastnosti korespondence $G \mapsto M_G$: jsou-li $G = (V, E)$ a $G' = (V', E')$ grafy mohutnosti κ a $\Phi \colon V \to V'$ zobrazení, potom Φ je izomorfismus grafů G a G' právě když je izometrií prostorů M_G a $M_{G'}$.

c) *Existuje množina metrických prostorů $\mathcal{M}$,* $\operatorname{card} \mathcal{M} \leq 2^\kappa$, *obsahující (nějaký) izometrický obraz každého metrického prostoru hustoty κ a diametru d.*

Zvolme libovolnou množinu S mohutnosti κ a položme

$$\mathcal{M}' := \{(S, \rho) : \ \rho \text{ je metrika na množině } S\}.$$

Pak $\operatorname{card} \mathcal{M}' \leq \operatorname{card} \mathbb{R}^{S \times S} = (2^\omega)^{\kappa \cdot \kappa} = 2^\kappa$ a stačí zvolit $\mathcal{M} := \{\operatorname{compl} M \colon M \in \mathcal{M}'\}$. Je-li P úplný metrický prostor hustoty κ a diametru d a $D \subseteq P$ jeho hustá část mohutnosti κ, pak je $\operatorname{diam} D = \operatorname{diam} P = d$ a proto $D \simeq M$ pro nějaké $M \in \mathcal{M}'$, tedy $P \simeq \operatorname{compl} D \simeq \operatorname{compl} M \in \mathcal{M}$. Q.E.D.

Homogenita Urysohnova univerzálního prostoru

Uvedení. V tomto oddíle se vrátíme k v úvodu zmíněné otázce možnosti zesílení formulace homogenity Urysohnova prostoru, ve smyslu vysloveném Huhunaišvilim (1955, str. 4), řešené pro $\kappa = \aleph_0$ Mellerayem (2007). Předpoklad κ-prekompaktnosti v Huhunaišviliho větě je nejslabší možný:

Důsledek 3. (Melleray, 2007, Theorem 4.1) *Mějme nekonečný kardinál κ, $d \in [0, \infty]$ a Urysohnův univerzální prostor U hustoty κ a diametru d. Jestliže $M \subseteq U$ není κ-prekompaktní, potom existuje podprostor $N \subseteq U$ a izometrie $\varphi \colon M \to N$, která nelze rozšířit na izometrii prostoru U.*

Důkaz. Uvažujme libovolné vnoření $\varphi \in [M, U]$, $\varphi\colon M \to N$. Izometrie $\varphi = \mathrm{id}_M^{-1} \circ \varphi$ lze podle poznámky 2 rozšířit na izometrii prostoru U právě když $\mathrm{id}_M \sim_M^U \varphi$. Je tedy nutné a postačující vybrat $\varphi \in [M, U]$ z libovolné ze tříd ekvivalence $\sim_M^U$, vyjma třídy příslušející vnoření id_M. Taková třída existuje, neboť podle věty 4 je počet tříd roven $2^\kappa > 1$. Q.E.D.

Poznámka. Na závěr poznamenejme, že předchozí důsledek lze na základě věty 4 formulovat v následujícím silnější tvaru (který je větě 4 ekvivalentní):

Mějme nekonečný kardinál κ, $d \in [0, \infty]$ a Urysohnův univerzální prostor U hustoty κ a diametru d. Jestliže $M \subseteq U$ není κ-prekompaktní, potom existují podprostory $N_\xi \subseteq U, \xi < 2^\kappa$, a izometrie $\varphi_\xi\colon M \to N_\xi, \xi < 2^\kappa$, takové, že žádnou z izometrií φ_ξ, $\varphi_\zeta \circ \varphi_\xi^{-1}$, $\xi, \zeta < 2^\kappa$ nelze rozšířit na izometrii prostoru U.

Závěrečné poznámky

Poznámka 3. *Vliv podmínek existence Urysohnova prostoru na povahu některých pojmů a tvrzení.*

Uvažujme nekonečný kardinál κ a $d \in (0, \infty]$. Dle Katětovovy věty (viz str. 3) Urysohnův univerzální prostor hustoty κ a diametru d existuje právě když platí rovnost $\kappa = \kappa^{<\kappa}$. Každé takové κ je v důsledku Königovy nerovnosti regulární.[†] Je-li navíc κ nespočetné, dostáváme vztahy $\operatorname{cf}\kappa > \aleph_0$ a $\kappa^\omega = \kappa$ s následujícími důsledky.

- Za předpokladu $\operatorname{cf}\kappa > \aleph_0$ platí: *metrický prostor M je κ-prekompaktní právě když* $\operatorname{d} M < \kappa$. Je-li totiž M κ-prekompaktní, pro každé $n \in \omega$ existuje $\frac{1}{n}$-síť $K_n \in [M]^{<\kappa}$. Sjednocení $\bigcup_{n<\omega} K_n$ je hustá podmnožina M mohutnosti $<\kappa$.

- Za předpokladu $\operatorname{cf}\kappa > \aleph_0$ pro metrický prostor M a $f \in \mathrm{E}(M)$ platí: *funkce f je $<\kappa$-body skorourčitelná, právě když existuje $K \in [M]^{<\kappa}$ takové, že f je* 0*-určená body K.* To jest, pojem *skorourčitelnosti $<\kappa$-body* splývá s pojmem, který bychom nazvali *určitelností $<\kappa$-body*. Důvody jsou stejné jako v předchozím bodu.

- Za předpokladu $\kappa^\omega = \kappa$ pro metrický prostor platí: $\operatorname{d} M = \kappa \Rightarrow \operatorname{card} M = \kappa$. Body prostoru M jsou limitami konvergentních posloupností z husté části, tedy $\operatorname{card} M \leq (\operatorname{d} M)^\omega$. Třída všech metrických prostorů hustoty $\leq\kappa$ splývá s třídou všech metrických prostorů mohutnosti $\leq\kappa$.

[†] Z Königovy nerovnosti plyne $\kappa^{\operatorname{cf}\kappa} > \kappa$. Předpoklad $\operatorname{cf}\kappa < \kappa$ tedy vede k odhadu $\kappa < \kappa^{<\kappa}$. Vlastnost lze charakterizovat takto: nekonečný kardinál κ splňuje rovnost $\kappa = \kappa^{<\kappa}$ právě když $\operatorname{cf}\kappa = \kappa$ a pro každé $\lambda < \kappa$, $2^\lambda \leq \kappa$. Pro izolované kardinály κ^+ je tedy tato vlastnost ekvivalentní tomu, že κ splňuje zobecněnou hypotézu kontinua, tj. $2^\kappa = \kappa^+$. Viz (Comfort a Negrepontis, 1974, Corollary 1.20, Theorem 1.27 (a)).

Seznam použité literatury

Comfort, W. W. a Negrepontis, S. (1974). *The theory of ultrafilters.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 211.

Huhunaišvili, G. E. (1955). On a property of Uryson's universal metric space. *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, **101**(4), 607–610.

Hušek, M. (2008). Urysohn universal space, its development and Hausdorff's approach. *Topology Appl.*, **155**(14), 1493–1501.

Katětov, M. (1988). On universal metric spaces. In *General topology and its relations to modern analysis and algebra, VI (Prague, 1986)*, volume 16 of *Res. Exp. Math.*, pages 323–330. Heldermann, Berlin.

Melleray, J. (2007). On the geometry of Urysohn's universal metric space. *Topology Appl.*, **154**(2), 384–403.

Melleray, J. (2008). Some geometric and dynamical properties of the Urysohn space. *Topology Appl.*, **155**(14), 1531–1560.

Mrówka, S. (1953). Solution d'un problème d'Urysohn concernant les espaces métriques universels. *Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III.*, **1**(6), 233–234.

Urysohn, P. S. (1927). Sur un espace métrique universel. *Bull. Sci. Math. (2)*, **51**, 43–64, 74–96.

Uspenskij, V. V. (1990). On the group of isometries of the Urysohn universal metric space. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, **31**(1), 181–182.

Opravy

str. 3, v řádcích 17 a 18 zdola má být:

„Diametr, hustotu a zúplnění prostoru M značíme $\operatorname{diam} M$, $\operatorname{d} M$ a $\operatorname{compl} M$; uzávěr podmnožiny $K \subseteq M$ značíme $\operatorname{cl} K$."

str. 3, mezi řádky 10 a 11 zdola chybí:

„Prostor M je ε-separovaný ($\varepsilon \geq 0$), jestliže $\forall\, m, n \in M\colon \rho(m, n) \geq \varepsilon$."

str. 17, ř. 5 shora: namísto „odchylnost" má být: „$<\kappa$-odchylnost"

str. 17, ř. 7 shora: namísto „odchylnost" má být: „$<\aleph_0$-odchylnost"

str. 17, ř. 1 zdola: namísto „odchylnost" má být: „$<\kappa$-odchylnost"

chybějící záznam v seznamu literatury k odkazu v poznámce pod čarou na str. 20 zní:

NIEMIEC, P. (2009). Central subsets of Urysohn universal spaces. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, **50**(3), 445–461.