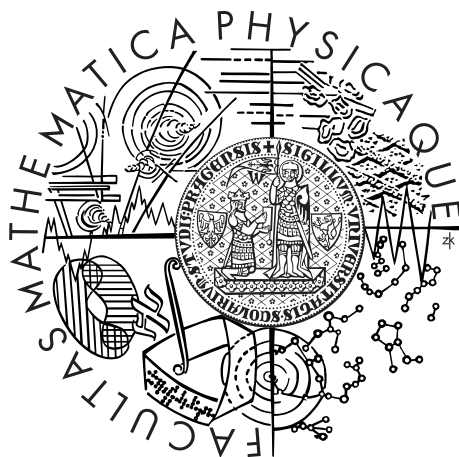


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Václav Veselý

## Metody Monte Carlo ve financích

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2015

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V

Praze

dne 31.7.2015

Podpis autora

Název práce: Metody Monte Carlo ve financích

Autor: Václav Veselý

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jan Hurt, CSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Simulační metody Monte Carlo jsou velmi univerzální nástroj, který lze použít pro řešení různorodých problémů. Hlavní část tohoto textu se bude zabývat metodami, které redukuje rozptyl a zlepšují kvalitu odhadů provedených pomocí simulačních metod Monte Carlo. Bude zde ukázáno několik praktických aplikací na oceňování finančních derivátů.

Klíčová slova: Monte Carlo, finance, redukce, rozptyl

Title: Monte Carlo methods in finance

Author: Václav Veselý

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Jan Hurt, CSc., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: Monte Carlo simulation methods are very universal tool, which is applicable in many different cases. Major part of this work is devoted to variance reduction techniques and other improvements of Monte Carlo estimate. Practical examples of financial derivative pricing will be shown.

Keywords: Monte Carlo, finance, reduction, variance

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>3</b>
1.1	Motivace . . . . .	3
1.2	Struktura . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Modelování náhodných procesů</b>	<b>5</b>
2.1	Generování náhodných čísel . . . . .	5
2.2	Základy teorie . . . . .	7
2.3	Generování trajektorií náhodných procesů . . . . .	8
2.3.1	Náhodná procházka . . . . .	9
2.3.2	Brownův most . . . . .	9
2.3.3	Geometrický Wienerův proces . . . . .	10
2.4	Oceňování finančních derivátů . . . . .	12
2.4.1	Model pro oceňování opcí . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Kvalita odhadů</b>	<b>13</b>
3.1	Vychýlení . . . . .	13
3.2	Rozptyl . . . . .	14
3.3	Relativní efience . . . . .	15
3.4	Střední čtvercová odchylka . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Redukce rozptylu</b>	<b>17</b>
4.1	Řídící proměnné . . . . .	17
4.1.1	Ceny podkladových aktiv . . . . .	20
4.2	Antitické proměnné . . . . .	20
4.3	Stratifikovaný výběr (oblastní výběr) . . . . .	22
4.4	Metoda latinské krychle . . . . .	26
4.5	Výběr podle důležitosti . . . . .	28
4.6	Regresní metoda . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Quasi-Monte Carlo, QMC</b>	<b>33</b>
5.1	Konstrukce posloupností s nízkou diskrepancí . . . . .	36
5.1.1	Příklady posloupností . . . . .	36
5.2	Lattice Rules . . . . .	38
5.3	Znáhodněné QMC . . . . .	39
5.4	Zhodnocení QMC . . . . .	40
<b>6</b>	<b>Praktické aplikace</b>	<b>41</b>
6.1	Generátory v programu <i>Mathematica</i> . . . . .	41
6.2	Evropské opce . . . . .	43

6.3 Asijské opce . . . . .	44
<b>7 Závěr</b>	<b>46</b>
<b>Literatura</b>	<b>47</b>
<b>Seznam obrázků</b>	<b>48</b>
<b>Seznam tabulek</b>	<b>49</b>

# Kapitola 1

## Úvod

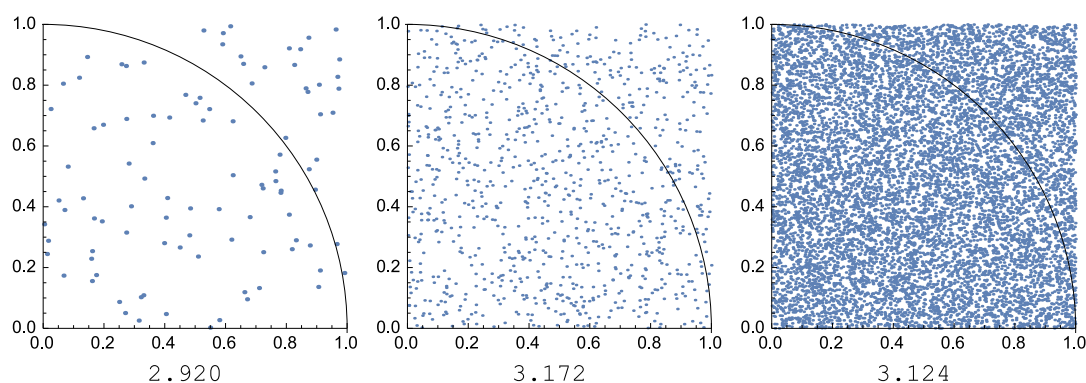
### 1.1 Motivace

Začněme známým příkladem, se kterým jsem se osobně poprvé setkal při hodině programování v prvním ročníku studia na MFF. Tehdy jsem neměl tušení o tom, že se jedná pouze o jeden specifický případ z mnohem rozsáhlejší skupiny metod numerických výpočtů zvaných Monte Carlo. Tedy k samotnému příkladu:

*Příklad.* Úkolem je numericky aproximovat  $\pi$ . K dispozici máme pouze generátor náhodných čísel z intervalu  $[0,1]$  a schopnost provádět základní aritmetické operace. Vezměme kruh o poloměru  $r = 1$ . Víme, že obsah takového kruhu je  $O = \pi$ . Generujme teď náhodně dvojice čísel:  $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) \dots (x_1^{(n)}, x_2^{(n)})$ , které budou tvořit souřadnice bodů v jednotkovém čtverci, takových bodů generujme  $n$ . Jako odhad vezmeme:

$$\hat{\pi} = 4 \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n \mathbb{I} \left( \sqrt{(x_1^{(i)})^2 + (x_2^{(i)})^2} \leq 1 \right) \right).$$

Výsledky a grafická ukázka pro volbu 100, 1000 a 10000 bodů:



Obrázek 1.1: Ilustrace odhadu  $\pi$

Víme, že  $\pi$  na 3 desetinná místa je 3.142. Můžeme tedy říci, že jsme se skutečné hodnotě relativně dobře přiblížili?

Dále bude vyložena podrobnější teorie potřebná k zodpovězení této otázky. Následně budou ukázány i některé ilustrativní i praktické aplikace při oceňování opcí.

*Poznámka.* V praktické implementaci příkladu byl použit generátor programu *Mathematica*, který umí generovat náhodné body z  $[0,1]^2$ . Úloha se také dá formulovat jako výpočet  $\int_0^1 4\sqrt{1-x^2} dx$ . Podrobnější teorii ohledně výpočtu určitých integrálů pomocí výpočtu plochy nalezneme v [3] str. 104-105. V tomto zdroji také nalezneme informace o generátorech náhodných čísel.

## 1.2 Struktura

Zaměříme se převážně na teoretickou stránku použití metod Monte Carlo (MC). Pokud možno uvedeme výsledky v obecném tvaru. To umožní jejich snadnější přenesení pro různorodé aplikace.

V některých částech navážeme na [4], aby bylo možné věnovat dostatek prostoru některým konstrukcím, které jsou v předchozí práci třeba jen zmíněny. Například vezmeme za známé generátory pseudonáhodných čísel (které jen stručně připomeneme) a navážeme kapitolou o způsobech generování trajektorií náhodných procesů.

### Předpoklady

Pro dobré pochopení tohoto textu se předpokládají za nezbytné základní znalosti teorie pravděpodobnosti, matematické statistiky a náhodných procesů. Znalost programu *Mathematica* není pro pochopení teoretických principů nezbytná, nicméně pro plné pochopení programových ukázek, které jsou součástí této práce, je žádoucí.

Dále tedy nebudou uvedeny definice pro všechny používané pojmy a bude se předpokládat, že definice pojmů jako je náhodný proces, střední hodnota atd. můžeme považovat za známé. Zmiňme také značení  $\log \equiv \log_e$ . Pokud nebude uvedeno jinak, budeme uvažovat reálné náhodné veličiny.

I přesto však připomeneme některé pojmy, například z matematické statistiky, neboť pro následující text budou velmi významné. Dojde také k drobným pozměněním některých definic, aby pokryly námi uvažované příklady. Jejich platnost a platnost vyslovených vět zůstane pro speciální případy, které by pokryla původní definice (věta), nezměněna.

### Rychlá navigace

Hlavní náplň této práce se nachází v kapitolách 4 a 5. Kapitola 3 byla zařazena pro ucelení vykládané teorie. Pokud je čtenář dobře seznámen s prací [4], může první část kapitoly 2 projít velmi zběžně.

Zájemce o praktické ukázky, kteří nemají zájem o teoretický výklad, odkážeme na kapitolu 6 a případně na krátké shrnutí v závěrečné kapitole.

# Kapitola 2

## Modelování náhodných procesů

Nejprve připomeneme základní poznatky o generování náhodných (respektive pseudonáhodných) čísel. Následně navážeme teorii spojenou s generováním trajektorií náhodných procesů. Ukážeme, jak generovat náhodné procesy, umíme-li generovat realizace náhodné veličiny. Kapitola bude zakončena popisem základních principů oceňování finančních derivátů, kde využijeme některé poznatky z teorie.

### 2.1 Generování náhodných čísel

Pro použití metod MC musíme být schopni generovat realizace náhodné veličiny. Respektive generovat náhodná čísla podle jistého pravděpodobnostního rozdělení.

Pro podrobnější informace o generování náhodných čísel odkážeme na text [4], kapitola 2. Ve vyložených postupech se nejedná o náhodné, ale deterministické generování takové, které náhodnost dobře napodobuje.

Dalším kvalitním a rozsáhlým zdrojem informací o této problematice je [3].

#### Lineární kongruenční generátor

Princip generování náhodných čísel z rovnoměrného rozdělení na intervalu  $[0,1]$ , který je založen na tvorbě posloupnosti bodu  $u_i$ :

$$x_{i+1} = (a x_i + c) \pmod n$$
$$u_{i+1} = \frac{x_{i+1}}{n} .$$

Předem danou konstantu  $n$  (dostatečně velkou) nazýváme perioda generátoru. Počáteční hodnotu  $x_0$  nazýváme random seed. Generátor lze zobecnit pro generování hodnot z  $d$ -dimenzionální krychle.

V kapitole 5 bude ukázána jedna zajímavá analogie s tímto druhem generátorů náhodných čísel.

#### Inverzní transformace

S použitím generátorů čísel z rovnoměrného rozdělení můžeme generovat čísla podle dalších pravděpodobnostních rozdělení. Předpokládejme, že máme k dispozici náhodný výběr  $(Q_1, \dots, Q_n) \stackrel{iid}{\sim} R[0,1]$ , jehož realizaci jsme schopni pomocí nějaké metody generovat.



Chceme-li generovat realizace reálné náhodné veličiny  $X$  s distribuční funkcí  $F_X$ , vezměme kvantilovou funkci  $F_X^{-1}$  (která je pro  $X$  se spojitým rozdělením klasickou inverzní funkcí k  $F_X$ ). Vezměme  $Q \sim R[0,1]$ , pak platí:

$$P(F_X^{-1}(Q) \leq x) = P(Q \leq F_X(x)) = F_X(x).$$

Protože  $F_X^{-1}(Q)$  má distribuční funkci  $F_X$  a distribuční funkce jednoznačně určuje pravděpodobnostní rozdělení, dostaneme:

$$(F_X^{-1}(Q_1), \dots, F_X^{-1}(Q_n)) \stackrel{iid}{\sim} X.$$

Jelikož umíme generovat realizaci náhodného výběru z rovnoměrného rozdělení, umíme podle těchto poznatků generovat i realizaci náhodného výběru z rozdělení náhodné veličiny  $X$ . Popsaná metoda dobře funguje, je-li  $X$  náhodná veličina se spojitým rozdělením. Pro podrobnější výklad odkážeme na [3] str. 38 nebo [4] str. 8.

### Zamítací metoda

Chceme generovat z rozdělení  $X$  s hustotou  $f(x)$  a s nosičem  $(a,b)$ . Nechť  $M = \sup_x f(x) < \infty$ . Stručný algoritmus zamítací metody je převzatý z [3] str. 40. Generované číslo v algoritmu značíme  $X$ .

1. Generování dvojice  $Z_1, Z_2$  z  $R(0,1)$ ;
2.  $Y_1 = (b-a) * Z_1 + a$ ;  $Y_2 = M * Z_2$ ;
3. IF  $Y_2 \leq f(Y_1)$  then  $X = Y_1$  else 1.

Metodu lze ještě zobecnit. Pro podrobnější výklad odkážeme na [3] str. 40-45, nebo [4] str. 10.

### Možnosti v *Mathematica*

Pro tvorbu praktických ukázek k této práci byl zvolen program *Mathematica*. Tento program nabízí široké možnosti generování nejen náhodných čísel. Pomocí příkazu `*Random*` si můžeme nechat vypsát následující seznam funkcí.

Tabulka 2.1: Možnosti generování náhodných čísel v *Mathematica*

BlockRandom	RandomColor	RandomGraph
Random	RandomComplex	RandomImage
RandomChoice	RandomFunction	RandomInteger
RandomPermutation	RandomSample	RandomWalkProcess
RandomPrime	RandomSeed	SeedRandom
RandomReal	RandomVariate	\$RandomState

Seznam rozdělení, ze kterých umí *Mathematica* generovat náhodná čísla, je velmi rozsáhlý, a proto jej nebudeme uvádět. Seznam si můžeme vypsát pomocí příkazu `*Distribution*`

Pro bezplatný software nabízející statistické výpočty a generátory náhodných čísel odkážeme na: <http://www.r-project.org/>. Tento software však v této práci nebyl použit.

## 2.2 Základy teorie

Základy teorie náhodných procesů jsou zavedeny podle [8] a některé poznatky z teorie stochastických diferenciálních rovnic (SDE) nalezneme v [2] appendix B. Teorii zavedeme pouze velmi stručně a často bez důkazů. Problematika SDE je obecně velmi rozsáhlá a nelze ji v této práci detailně rozebrat.

**Definice 2.1** (Standardní Wienerův proces, Brownian Motion). *Standardní  $d$ -dimenzionální Wienerův proces (WP) je náhodný proces  $\{W(t), t \geq 0\}$ ,  $W(t) = (W_1(t), \dots, W_d(t))^T$ , který má následující vlastnosti:*

1.  $W(0) = \mathbf{0}$  a  $\{W(t), t \geq 0\}$  má spojité trajektorie.
2.  $\forall 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$  jsou přírůstky  $W(t_i) - W(t_{i-1})$ ;  $i = 2, \dots, n$  nezávislé náhodné vektory.
3.  $\forall 0 \leq t < s$  jsou přírůstky  $W(s) - W(t) \sim N(\mathbf{0}, (s-t)I_d)$ .

Snadno je vidět, že platí:  $W(t) \sim N(\mathbf{0}, tI_d)$ . Zvolíme  $W(t) - W(0)$  v definici 2.1. Konkrétní případ  $d = 1$  je přímočarý.

**Definice 2.2** (Obecný Wienerův proces). *Obecným  $WP(\mu(t), \Sigma(t))$  rozumíme proces  $\{X(t), t \geq 0\}$ :*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(u) du + \int_0^t \Sigma^{1/2}(u) dW(u), \quad t \in [0, T],$$

kde  $\{W(u), u \geq 0\}$  je standardní WP a platí:

$$\int_0^t \Sigma^{1/2}(u)(\Sigma^{1/2}(u))^T du = \int_0^t \Sigma(u) du.$$

$\{\Sigma(u), u \geq 0\}$  je deterministický systém pozitivně semidefinitních matic  $d \times d$ . Stejně tak je deterministická  $\mu(u) : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ .

*Poznámka* (Korektnost zobecnění WP). Obecný Wienerův proces má nezávislé přírůstky, spojité trajektorie a platí :

$$X(t) - X(s) \sim N\left(\int_s^t \mu(u) du, \int_s^t \Sigma(u) du\right).$$

*Poznámka.* Wienerův proces s konstantními koeficienty  $\mu$  a  $\Sigma$  lze psát jako:

$$X(t) = \mu t + \Sigma^{1/2}W(t),$$

což je řešení stochastické diferenciální rovnice (SDE), viz definice 2.3

$$dX(t) = \mu dt + \Sigma^{1/2} dW(t).$$

*Poznámka.* Integrály jsou uvažovány po složkách.

V předchozí definici je využita následující definice, která je pro potřeby tohoto textu spíše ilustrativní.

**Definice 2.3** (SDE). *Stochastickou diferenciální rovnicí rozumíme rovnici tvaru:*

$$dX(t) = a(X(t),t) dt + b(X(t),t) dW(t), \quad X(0) = X_0,$$

kde máme

- $a : \mathbb{R}^d \times [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}^d$
- $b : \mathbb{R}^d \times [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k$
- $W(t)$  je  $k$ -dimenzionální Wienerův proces (WP).
- $X_0$   $d$ -dimenzionální náhodný vektor nezávislý s  $W(t)$ .

Silné řešení takové SDE na intervalu  $[0, T]$  je Itôův proces  $\{X(t), 0 \leq t \leq T\}$ , který splňuje  $P(X(0) = X_0) = 1$ , a platí:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(X(u), u) du + \int_0^t b(X(u), u) dW(u), \quad t \in [0, T].$$

Bohužel zde nelze rozvést podrobnější teorii stochastických integrálů, které v definici používáme. Zmíníme některé zásadní vlastnosti vycházející z hlubší teorie.

*Poznámka.* V následujícím textu budeme  $\{W(t), t \geq 0\}$  považovat za standardní WP, nebude-li řešeno jinak. Obecný WP s konstantními koeficienty můžeme v jednorozměrném případě psát ve tvaru:

$$X(t) = \mu t + \sigma W(t).$$

**Definice 2.4** (martingal). *Reálný náhodný proces  $\{S(t), t \geq 0\}$  se nazve martingal, jestliže pro každé  $0 \leq t < r$  platí:*

$$E[S(r) | \{S(u), 0 \leq u \leq t\}] = S(t) \quad \text{s.j.}$$

Dále budeme používat i jiné definice a věty z teorie pravděpodobnosti, náhodných procesů a matematické statistiky, většinu z nich však můžeme považovat za obecně známou, případně budou připomenuty později.

## 2.3 Generování trajektorií náhodných procesů

Pro praktické aplikace metod Monte Carlo (nejen) na oceňování finančních derivátů budeme potřebovat simulovat trajektorie náhodných procesů se spojitým časem. Simulovat chování procesu se spojitým časem úplně exaktně se zdá na první pohled komplikované.

Tento problém vyřešíme tak, že budeme simulovat chování náhodného procesu v daných časových bodech. Pokud tyto body označíme  $0 < t_1, \dots, < t_n$  (není-li řečeno jinak značme  $t_0 = 0$ ), budeme vyžadovat aby pro sdružené rozdělení simulovaných hodnot  $X_s$  v daných bodech platilo:  $(X_s(t_1), \dots, X_s(t_n)) \sim (X(t_1), \dots, X(t_n))$  (tj. takové metody jsou exaktní ve smyslu sdruženého rozdělení v daných bodech). Tyto simulace však podléhají tzv. diskretizační chybě ve všech ostatních bodech. Řešením této problematiky se podrobně zabývá [2] kapitola 6.

### 2.3.1 Náhodná procházka

Nyní předpokládáme, že máme k dispozici  $Z_i \sim N(0, I_d)$   $i = 1, 2, \dots, n$  vzájemně nezávislé. Realizace takového náhodného výběru můžeme provést pomocí metod popsaných a odkazovaných v úvodu této kapitoly.

Cílem bude simulovat trajektorii Wienerova procesu. Začneme obecným popisem metody, zjednodušení pro  $d = 1$  je přímočaré.

*Poznámka.* Dále budeme (nebude-li řečeno jinak) volit  $X(0) = \mathbf{0}$ . Volba jiné konstanty jako výchozí hodnoty teorii nijak neovlivní. Taková volba je pro finanční simulaci intuitivně přirozená.

Chceme-li simulovat obecný  $d$ -dimenzionální  $WP$ , kde mohou  $\mu(t)$  a  $\Sigma(t)$  záviset na  $t$ . Aproximujme v pevně daných bodech  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$  následovně:

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mu(s) ds + \Sigma^{1/2}(t_i, t_{i+1}) Z_i; \quad i = 0, \dots, n-1, \quad (2.1)$$

kde

$$\Sigma^{1/2}(t_i, t_{i+1})(\Sigma^{1/2}(t_i, t_{i+1}))^\top = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Sigma(u) du. \quad (2.2)$$

### 2.3.2 Brownův most

Tato konstrukce již není úplně přímočará, proto ji raději předvedeme pro konstrukci jednodimenzionálního  $WP$ . Začneme pomocným tvrzením:

**Tvrzení 2.1.** *Nechť  $X_1, X_2$  jsou náhodné vektory takové, že*

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N \left( \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \right).$$

*Má-li  $\Sigma_{22}$  plnou hodnost, pak platí:*

$$(X_1 | X_2 = x) \sim N(\mu_1 + \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1}(x - \mu_2), \Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21}).$$

Toto tvrzení je převzaté tvrzení (2.24)a (2.25) ze [2]. Dále budeme pracovat v jednorozměrném standardizovaném případě.

**Věta 2.2.** *Pro jednorozměrný standardní  $WP$  a pro  $s, t > 0$ ,  $s \neq t$  platí:*

$$\text{Cov}(W(s), W(t)) = \min(s, t).$$

*Důkaz.* vezměme bez újmy na obecnosti  $s < t$  a počítejme:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(W(s), W(t)) &= \text{Cov}(W(s), W(s) + (W(t) - W(s))) = \\ &= \text{Cov}(W(s), W(s)) + \text{Cov}(W(s) - W(0), W(t) - W(s)) = s + 0. \end{aligned}$$

Protože nezávislost přírůstků implikuje nulovou kovarianci. □

Vlastní metoda Brownův most se dá popsat následovně: principem je generování hodnot  $W(t_i)$  v různém pořadí a to tak, že nejdříve generujeme  $W(t_u), W(t_r)$  a následně generujeme z podmíněného rozdělení při znalosti  $W(t_u), W(t_r)$  hodnotu  $W(t_i)$ , kde  $u < i < r$ .

Vezměme tedy  $0 < u < s < t$ , chceme generovat  $W(s)$ , známe-li  $W(u), W(t)$ . Zapišme pomocí věty 2.2

$$\begin{pmatrix} W(s) \\ W(u) \\ W(t) \end{pmatrix} = N \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s & u & s \\ u & u & u \\ s & u & t \end{pmatrix} \right).$$

Ted' již můžeme s využitím věty 2.1 vyslovit následující tvrzení:

### Věta 2.3.

$$(W(s)|W(u) = x, W(t) = y) \sim N \left( \frac{(t-s)x + (s-u)y}{t-u}, \frac{(s-u)(t-s)}{t-u} \right).$$

Po zobecnění tohoto tvrzení lze odvodit obecný postup pro generování  $W(s)$ ;  $s_i < s < s_{i+1}$ ;  $i = 1, \dots, k-1$  při znalosti  $W(s_i) = x_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  následovně:

$$W(s) = \frac{(s_{i+1} - s)x_i + (s - s_i)x_{i+1}}{s_{i+1} - s_i} + \sqrt{\frac{(s_{i+1} - s)(s - s_i)}{s_{i+1} - s_i}} Z, \quad (2.3)$$

kde generujeme  $Z \sim N(0,1)$ . Podrobnější rozpis a odvození tvrzení nalezneme v [2] str. 83-86, velmi zajímavé je také znázornění Fig. 3.1. na straně 85.

*Poznámka.* Tento postup je dobře použitelný v metodách redukcujících rozptyl pomocí stratifikace (kapitola 4.3). Používá se metoda tzv. terminální stratifikace.

### 2.3.3 Geometrický Wienerův proces

V angličtině hledejme název "Geometric Brownian Motion". Jedná se asi o nejdůležitější model pro oceňování finančních aktiv. Jak uvádí [2] str. 93: "Geometric Brownian motion is the most fundamental model of the value of a financial asset". Důvodem je také to, že dále definovaný proces má nezáporné hodnoty, což je pro oceňování finančních aktiv žádoucí. Definice již zavedeme v konkrétnějším tvaru vhodném pro aplikace v kapitole 6.

**Definice 2.5** (Geometrický Wienerův proces,  $GWP$ ,  $GBM$ ). Řekneme, že náhodný proces  $\{S(t), t \geq 0\}$  je  $GWP(\mu, \sigma^2)$ , jestliže řeší SDE:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t),$$

kde  $\mu$  a  $\sigma$  jsou konstanty.

Názorněji je možné říci, že  $\{S(t), t \geq 0\}$  je  $GWP$ , jestliže  $\{X(t) = \log(S(t)), t \geq 0\}$  je  $WP$  takový, kde  $X(0) = \log(S(0))$ .

Většina následujících poznatků je převzata z [2] a byla již zmíněna také ve [4]. Stručně tedy shrneme následující.

**Tvrzení 2.4.** Pro  $\{S(t), t \geq 0\} \equiv GWP(\mu, \sigma^2)$  a pro  $u < t$  platí:

$$S(t) = S(u) \exp \left\{ \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t - u) + \sigma (W(t) - W(u)) \right\} = \quad (2.4)$$

$$= S(u) LN \left( \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t - u), \sigma^2 (t - u) \right), \quad (2.5)$$

kde  $LN(\cdot)$  značíme pro úsporu místa náhodnou veličinu s logaritmicko-normálním rozdělením. Pomocí tohoto tvrzení můžeme opět s použitím  $(Z_1, \dots, Z_n) \stackrel{iid}{\sim} N(0, 1)$  generovat trajektorii procesu  $\{S(t), t \geq 0\}$  následovně:

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) \exp \left\{ \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t_{i+1} - t_i) + \sigma \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_i \right\}, \quad i = 0, \dots, n - 1.$$

Takto generované hodnoty budou exaktní ve smyslu sdruženého rozdělení (jak bylo popsáno dříve) v bodech  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ . Deterministická interpolace hodnot mezi těmito body by opět způsobila diskretizační chybu.

Uvedeme také poznatky které vychází s vlastnosti

$$S(t) = S(0) LN \left( \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t, \sigma^2 t \right).$$

**Tvrzení 2.5.** Platí:

- $E[S(t)] = e^{\mu t} S(0)$
- $Var(S(t)) = e^{2\mu t} S^2(0) (\exp\{\sigma^2 t\} - 1)$

Dalším zajímavým faktem je, že  $\{S(t), t \geq 0\}$  tvoří Markovův proces, a pro  $0 \leq u < t$  platí:

$$E[S(t) | \{S(x), 0 \leq x \leq u\}] = E[S(t) | S(u)] = e^{\mu(t-u)} S(u).$$

Poslední fakt, který také může ospravedlňovat použití tohoto procesu ve finančním modelování, je:

$$\frac{S(t_{i+1}) - S(t_i)}{S(t_i)} \quad i = 1, \dots, n \text{ jsou nezávislé pro všechny } 0 < t_1 < \dots < t_n. \quad (2.6)$$

Což uvádí [2] výraz (3.16) str: 93.

Tímto poznatkem zakončíme čistě teoretickou část výkladu týkající se modelování náhodných procesů.

## 2.4 Oceňování finančních derivátů

Dříve představenou teorii nyní upravíme a použijeme konkrétněji pro modelování cen finančních aktiv, a tedy následně pro oceňování finančních derivátů.

Problematika oceňování finančních derivátů je velmi rozsáhlá. Proto v této kapitole jen převezmeme část shrnutí základních principů oceňování, které budeme nadále používat. Shrnutí je podrobněji uvedeno v [2].

- Pokud je možné finanční derivát ekvivalentně nahradit nějakou obchodní strategií nákupu a prodeje aktiv, cena takové obchodní strategie udává cenu finančního derivátu.
- Diskontovaná cena aktiva je náhodný proces, který je martingal. Cena derivátu je potom střední hodnota výplatní funkce derivátu za předpokladu, že cena podkladového aktiva je právě daný proces.

### 2.4.1 Model pro oceňování opcí

Krátce popíšeme nejznámější model pro oceňování (nejen) standardních evropských opcí. Předpokládáme existenci bezrizikové úrokové míry  $r$ . Budeme pracovat v modelech se spojitým časem, dostaneme tedy diskontní faktor  $e^{-rt}$ .

Budeme předpokládat, že cena podkladového aktiva  $\{S(t), t \geq 0\}$  se chová jako  $GWP(r, \sigma^2)$  podle definice 2.5. Vezměme nějakou výplatní funkci  $f$ , která je pro standardní evropskou call opci s realizační cenou  $K$  na dobu  $T$ :  $(S(T) - K)^+$ . (Například pro asijské opce, viz kapitola 6, je místo  $S(T)$  brán průměr cen za různé časové okamžiky)

Pro určení ceny takové opce chceme spočítat  $E[e^{-rT} f(\{S(t), 0 \leq t \leq T\})]$ . Klasický případ pro zmíněnou evropskou opci:  $E[e^{-rT} (S(T) - K)^+]$ .

Podrobné teoretické popsání postupů oceňování není pro následující výklad nezbytné. Konkrétní praktické postupy popíšeme u vybraných příkladů individuálně.

Základní princip oceňování pomocí metod Monte Carlo lze shrnout:

1. Vezmeme bezrizikovou úrokovou míru  $r$ , dále označíme  $\sigma$  volatilitu ceny podkladového aktiva (často akcie).
2. Provedeme  $n$  simulací vývoje ceny. Pro každou simulaci spočteme diskontovanou hodnotu výplatní funkce.
3. Spočteme průměr ze všech simulací a určíme interval spolehlivosti (popsáno dále).

*Poznámka.* Pro zmíněné evropské call opce lze dojít k známému exaktnímu řešení (Black-Scholes vzorec), které například implementuje v programu *Mathematica* funkce `FinancialDerivative[{"European", "Call"}, ...]`. Pro úplnost uveďme tento známý vzorec pro cenu evropské call opce s parametry:  $S(0)$  aktuální cena podkladového aktiva,  $T$  doba splatnosti,  $r$  bezriziková úroková míra a  $\sigma$  volatilita ceny podkladového aktiva. Vzorec pro cenu opce v čase 0 je

$$S(0) \Phi\left(\frac{\log(S(0)/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - K e^{-rT} \Phi\left(\frac{\log(S(0)/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right),$$

kde  $\Phi$  je distribuční funkce náhodné veličiny s rozdělením  $N(0,1)$ .

# Kapitola 3

## Kvalita odhadů

Definice odhadů a jejich vlastností budou uvedeny velmi podobně jako v [5], až na drobné úpravy a zobecnění potřebná pro navazující teorii.

**Definice 3.1** (Odhad). *Odhadem neznámého parametru  $\theta$  (obecně i vektorového) náhodného vektoru  $\mathbb{X}_n = (X_1, \dots, X_n)^\top$  rozumíme měřitelnou funkci*

$$\hat{\theta}_n = T_n(X_1, \dots, X_n).$$

Odhad  $\hat{\theta}_n$  je tedy podle předchozí definice sám také náhodnou veličinou. Z definice vypouštíme požadavek na *iid* (nezávislé stejně rozdělené složky  $\mathbb{X}_n$ ), i přes to, že ve většině případů dále budeme *iid* uvažovat. V našem případě budou  $X_i$  náhodně generované hodnoty s určenými vlastnostmi a budeme je nazývat replikace. Pro generování  $X_i$  budeme používat metody popsané v předchozích kapitolách.

**Definice 3.2** (Monte Carlo). *Simulací Monte Carlo rozumíme provedení odhadu ve smyslu předchozí definice 3.1 na základě dat získaných pomocí nějaké simulace ve smyslu předchozí kapitoly.*

Odhadovaný parametr bude ve většině aplikací střední hodnota  $f(X)$ . V následujícím textu se budeme zabývat tím, jak kvalitní je odhad  $\hat{\theta}_n$  neznámého parametru  $\theta$  ve smyslu vychýlení, časové složitosti, rozptylu a relativní eficeince. V definici 3.8 zavedeme také střední čtvercovou odchylku (*MSE*).

### 3.1 Vychýlení

Z intuice je zřejmé, že dobrou skupinou odhadů budou takové, které se od odhadovaného parametru moc neliší ve smyslu střední hodnoty. Zavedeme tedy pojem nestranný odhad a popíšeme některé další vlastnosti odhadů. Následují definice.

**Definice 3.3** (Vychýlení). *Je-li  $\hat{\theta}_n$  odhad parametru  $\theta$  a  $|\mathbb{E}[\hat{\theta}_n]| < \infty$ , pak vychýlení nazveme:  $\mathbb{E}[\hat{\theta}_n - \theta]$ .*

**Definice 3.4** (Nestrannost). *Je-li  $\hat{\theta}_n$  odhad parametru  $\theta$ , pak tento odhad nazveme nestranný právě když pro všechna  $n$  platí  $\mathbb{E}[\hat{\theta}_n] = \theta$ .*



Pro naše účely budou zajímavé převážně jen nestranné nebo málo vychýlené odhady. Tomu budou také podřízeny všechny námi použité metody pro redukci rozptylu odhadu.

Na druhou stranu je vhodné poznamenat, že nestrannost odhadu nezaručuje jeho smysluplnost, jak ukazuje příklad 7.3 v [1].

Vychýlení může být různé pro různé velká  $n$ . Další dobře použitelnou skupinou odhadů je taková, kde pro rostoucí  $n$  dochází ke zmenšení vychýlení.

**Definice 3.5** (Asymptotická nestrannost). *Je-li  $\hat{\theta}_n$  odhad parametru  $\theta$ , pak tento odhad nazveme asymptoticky nestranný právě když:  $E[\hat{\theta}_n - \theta] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .*

Doposud zavedené definice jsou obecné. Pro metodu Monte Carlo tak, jak ji budeme dále používat, máme většinou speciální případ (klasická metoda Monte Carlo), kdy

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$

$E X_i = \mu$  a platí  $Var(X_i) = \sigma_X^2 < \infty$ .  $\hat{\theta}_n$  a  $X_i$  jsou *iid* tedy vlastně se jedná o výběrový průměr a je možné aplikovat poznatky z [1] a [5].

Pro úplnost připomeneme:

**Definice 3.6** (Konzistence). *Je-li  $\hat{\theta}_n$  odhad parametru  $\theta$ , pak tento odhad nazveme konzistentní právě když:  $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$  pro  $n \rightarrow \infty$ .*

Můžeme také zmínit, že je-li  $E[\hat{\theta}_n^2] < \infty$  pro každé  $n$ , tak je odhad konzistentní právě když je asymptoticky nestranný a  $Var(\hat{\theta}_n) \rightarrow 0$ . Jak je psáno v [1] strana 105 věta 7.6.

Nadále, pokud nebude řečeno jinak, budeme uvažovat odhady provedené na základě náhodného výběru (*iid*). Tedy v klasickém smyslu matematické statistiky, a bude tedy možné přenést cenné poznatky o chování odhadu.

## 3.2 Rozptyl

Ještě jednou zdůrazněme, že nyní uvažujeme odhad  $\hat{\theta}_n$  parametru  $\theta$  založený na  $(X_1, \dots, X_n)$  *iid*. Pro jednorozměrný případ  $\mu = \theta \in \mathbb{R}$  a odhad ve tvaru  $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ , podle dříve zmíněného a s využitím centrální limitní věty (CLV), dostaneme:

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma_X} (\hat{\theta}_n - \mu) \xrightarrow{D} N(0,1),$$

kde  $\sigma_X^2 = Var(X_i)$ . V tomto případě by také šlo zavést běžné značení  $\hat{\theta}_n = \bar{X}_n$ . V praxi většinou neznáme  $\sigma_X$ , a proto je vhodné zavést  $\hat{\sigma}_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\theta}_n)^2}$ . S využitím vlastnosti  $\hat{\sigma}_n / \sigma_X \xrightarrow{P} 1$  můžeme vyjádřit asymptotický intervalový odhad parametru  $\mu$  o spolehlivosti  $1 - \alpha$  následovně

$$IS = \left( \hat{\theta}_n - u_{1-\alpha/2} \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}, \hat{\theta}_n + u_{1-\alpha/2} \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \right), \quad (3.1)$$

kde  $u_\alpha$  je  $\alpha$ -kvantil  $N(0,1)$ , často ale volíme kvantil rozdělení  $t_{n-1}$ , neboť chceme být obezřetní a raději volíme interval širší.

Pro rostoucí  $n$  při pevném rozptylu dostaneme užší interval, tedy přesnější odhad, naopak při pevném  $n$  dostaneme zmenšením  $\sigma_X^2$  užší  $IS$ . Pro námi generované replikace chceme mít rozptyl co nejmenší. S rostoucím  $n$  však roste celá časová složitost provedení odhadu pomocí simulace, viz dále.

### 3.3 Relativní efience

Časovou složitostí odhadu provedeného danou simulací budeme chápat, jak dlouho trvá provést tento odhad. Budeme zde používat pojmy jako výpočetní čas, nicméně spíše než jednotky času budeme pro výpočetní čas a časovou složitost používat počty elementárních instrukcí, které musí počítač při simulaci a výpočtu odhadu provést. Pro následující teorii jednotky nejsou podstatné.

Budeme uvažovat, že časová složitost odhadu  $\hat{\theta}_n$  je  $\tau n$ , kde  $\tau$  je časová složitost provedení jedné replikace  $X_i$  a výpočtů s ní spojených.

Rozptyl a časovou složitost výpočtu je dobré uvažovat společně, neboť kdybychom uvažovali tyto vlastnosti zvlášť, tak bychom vytvořili mezi odhady pouze částečné uspořádání.

Podle předchozích poznatků máme, že rozdělení chyby odhadu se dá aproximovat následovně  $(\hat{\theta}_n - \mu) \xrightarrow{D} N(0, \frac{\sigma_X^2}{n})$ . Čehož také využijeme pro zdůvodnění korektnosti následující definice.

**Definice 3.7** (Relativní efience). *Relativní efience 2. metody vzhledem k 1. metodě*

$$\mathcal{E} = \frac{\tau_1 \sigma_1^2}{\tau_2 \sigma_2^2},$$

kde  $\tau_i$  (resp.  $\tau_2$ ) je časová složitost replikací v 1. metodě (resp. 2. metodě). Obdobně  $\sigma_i^2$ ,  $i = 1, 2$ .

Zdůvodnění korektnosti zavedeného pojmu je založené na tom, že pokud si představíme  $s$  jako maximální použitelný strojový čas (můžeme nazvat časový rozpočet), pak dostaneme, že s metodou, kde  $X_i$  replikace trvá  $\tau$ , můžeme dokončit  $\lfloor s/\tau \rfloor$  replikací, a tedy výsledný odhad touto metodou je  $\hat{\theta}_{\lfloor s/\tau \rfloor}$ . Opět s využitím centrální limitní vety (CLV) dostaneme:

$$\sqrt{\lfloor s/\tau \rfloor} (\hat{\theta}_{\lfloor s/\tau \rfloor} - \mu) \xrightarrow{D} N(0, \sigma_X^2) \text{ pro } s \rightarrow \infty,$$

což lze přepsat jako

$$\sqrt{s} (\hat{\theta}_{\lfloor s/\tau \rfloor} - \mu) \xrightarrow{D} N(0, \sigma_X^2 \tau) \text{ pro } s \rightarrow \infty,$$

neboť pro konstantní  $\tau$  a rostoucí  $s$  platí, že  $\lfloor s/\tau \rfloor \approx s/\tau$ .

Aplikací této aproximace a následným porovnáním asymptotických rozptylů obou metod dostaneme korektnost definice.

Teorie se dá rozšířit i pro případ, kdy  $\tau_i^j$ ,  $i = 1, 2$  jsou obecně různé pro různá  $j$ . Využití obecnější teorie se najde u oceňování barierových opcí.

### 3.4 Střední čtvercová odchylka

Střední čtvercová odchylka je dobrá míra kvality odhadů, jak ukáže následující věta.

**Definice 3.8** (Střední čtvercová odchylka,  $MSE$ ). *Je-li  $\hat{\theta}_n$  odhad parametru  $\theta$ , pak definujeme  $MSE(\hat{\theta}_n) = E[(\hat{\theta}_n - \theta)^2]$ .*

**Věta 3.1.** *Platí, že  $MSE(\hat{\theta}_n) = (E[\hat{\theta}_n] - \theta)^2 + Var(\hat{\theta}_n)$ .*

*Důkaz.* Využijeme půjčím/vrátím s  $E[\hat{\theta}_n]$ . Roznásobíme vzniklou závorku a použijeme linearitu střední hodnoty. □

Věta říká, že  $MSE$  je součtem kvadrátu vychýlení a rozptylu odhadu. Podotkněme, že použití  $MSE$  může být v praxi někdy komplikované, viz [5].

# Kapitola 4

## Redukce rozptylu

Cílem této kapitoly je vyložit teoretické základy různých metod, které se snaží dosáhnout menšího rozptylu odhadu získaného pomocí modifikované simulace Monte Carlo, než by produkovala klasická metoda Monte Carlo založená pouze na výběrovém průměru.

Síla metod redukujících rozptyl, které dále popíšeme, spočívá v pečlivé volbě konkrétní metody pro daný specifický případ.

Nejdříve odvodíme teoretické poznatky o různých metodách, nicméně kvůli různorodosti metod a příkladů, kde je vhodné je využít, je dobré tyto metody spíše srovnávat na praktických příkladech.

### 4.1 Řídící proměnné

Princip lze shrnout jako zavedení nové kontrolní proměnné, o které máme dobré apriorní informace. Pomocí vztahu s odhadovanou proměnnou dojdeme k redukci rozptylu.

Mějme k dispozici  $n$  *iid* replikací:  $Y_1, \dots, Y_n$ . Cílem je odhadnout  $E[Y_i]$ . Respektive  $E[Y]$ , kde  $Y_1, \dots, Y_n \stackrel{iid}{\sim} Y$ . V obyčejné metodě Monte Carlo bychom použili za odhad výběrový průměr, který je nestranný a konzistentní. A bylo by možné zkonstruovat asymptotický *IS*. Tento přístup se pokusíme vylepšit, proto přesněji definujeme již představenou intuici kontrolní proměnné.

**Definice 4.1** (Odhad metodou řídicí proměnné). *Mějme  $X$  náhodnou veličinu takovou, že  $E[X]$  známe. Mějme dále  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n) \stackrel{iid}{\sim} (X, Y)$ . Pro pevně dané  $b$  definujeme*

$$Y_i(b) = Y_i - b(X_i - E[X])$$
$$\overline{Y(b)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i(b) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [Y_i - b(X_i - E[X])] = \bar{Y} - b(\bar{X} - E[X]).$$

*Druhou z rovností nazveme odhad metodou řídicí proměnné.*

Tato definice byla zavedena na základě [2] str. 186. Metody zavádíme pomocí definice pro snadnější orientaci.

**Věta 4.1.** Odhad  $\overline{Y(b)}$  z předchozí definice je nestranný a konzistentní odhad  $E[Y]$ .

*Důkaz.* S využitím linearitu střední hodnoty dostaneme.

$$E[\overline{Y(b)}] = E[\bar{Y} - b(\bar{X} - E[X])] = E[\bar{Y}] = E[Y].$$

Konzistenci vidíme snadno neboť  $\bar{Y}$  a  $\bar{X}$  jsou konzistentní odhady. □

Odhad je tedy podle našich požadavků z kapitoly 3 dobře použitelný. Zkoumejme tedy rozptyl odhadu. Označme

$$\sigma^2(b) = \text{Var}(Y_i(b)) = \text{Var}(Y_i - b(X_i - E[X])) = \sigma_Y^2 - 2b\rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y + b^2\sigma_X^2.$$

**Věta 4.2.** Platí, že

$$\text{Var}(\overline{Y(b)}) = \frac{\sigma^2(b)}{n}.$$

*Důkaz.* Je zřejmé, neboť veličiny  $Y_i(b)$  jsou nezávislé stejně rozdělené. □

Z uvedených vět tedy můžeme odvodit, že odhad metodou řídicí proměnné má menší rozptyl než původní, jestliže platí  $b^2\sigma_X^2 < 2b\rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y$ .

Po snadném výpočtu (hledáme minimum  $b^2\sigma_X^2 - 2b\rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y$  vzhledem k  $b$ ) dostaneme že nejmenší rozptyl máme pro volbu

$$b_m = \frac{\rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y}{\sigma_X^2} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\text{Var}(X)}.$$

Budeme-li nyní chtít porovnat odhady ve smyslu relativní eficeie, dostaneme po dosazení  $b_m$  a za předpokladu stejné časové složitosti.

$$\frac{\sigma_Y^2/n}{\sigma^2(b_m)/n} = \frac{1}{1 - \rho_{X,Y}^2}.$$

Pokud bychom uvažovali časovou složitost druhé metody (řízené) například dvakrát větší, zmenšila by se uvedená hodnota na polovinu. Ze vzorce je také patrné, že nejlepších výsledků bude metoda dosahovat pro případy, kdy  $X$  a  $Y$  jsou silně (kladně nebo záporně) korelované.

V praxi bohužel většinou  $b_m$  přesně neznáme, neboť naše znalosti o veličině  $Y$  jsou značně omezené. Tuto situaci můžeme ovšem řešit použitím odhadu, například:

$$\hat{b}_n = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}.$$

A zřejmá otázka, jak dobré bude použít  $Y_i(\hat{b}_n)$ , se zodpoví také díky vlastnosti  $\hat{b}_n \xrightarrow{P} b_m$ . Tuto vlastnost lze zřejmě odvodit z vlastností výběrových protějšků kovariance a rozptylu.

Ted' už nebude žádným překvapením, že  $\overline{Y(b)}$  má po znormování asymptoticky normální rozdělení. Dále se nejedná pouze o jednoduchou aplikaci CLV. Neboť použitím odhadu  $\hat{b}_n$  místo  $b_m$  ztratíme nezávislost  $Y_i(b)$ .

**Věta 4.3.** Platí

$$\frac{\sqrt{n}}{\hat{\sigma}(\hat{b}_n)} (\overline{Y(\hat{b}_n)} - \mathbb{E}[Y]) \xrightarrow{D} N(0,1),$$

kde  $\hat{\sigma}(b) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i(b) - \overline{Y(b)})^2}$ .

*Důkaz.* Podle CLV platí:

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma(b_m)} (\overline{Y(\hat{b}_n)} - \mathbb{E}[Y]) \xrightarrow{D} N(0,1).$$

Víme, že  $\hat{b}_n$  je konzistentní. Ze známých vlastností výběrového rozptylu dostaneme:  $\hat{\sigma}(b_m) \xrightarrow{P} \sigma(b_m)$ . Dále rozepíšme:

$$\begin{aligned} \sqrt{n} (\overline{Y(\hat{b}_n)} - \overline{Y(b_m)}) &= \frac{\sqrt{n}}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - b_m(X_i - \mathbb{E}[X])) - (Y_i - \hat{b}_n(X_i - \mathbb{E}[X])) = \\ &= \frac{\sqrt{n}}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{b}_n - b_m)(X_i - \mathbb{E}[X]) = (\hat{b}_n - b_m) \sqrt{n} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mathbb{E}[X] \right). \end{aligned}$$

Pro poslední výraz platí:

$$(\hat{b}_n - b_m) \sqrt{n} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mathbb{E}[X] \right) \xrightarrow{D} 0 N(0, \sigma_X^2) = 0 \quad (= \delta_0).$$

Z teorie pravděpodobnosti (z vlastností konvergence v distribuci [6] str. 80) již plyne tvrzení. □

Před prezentací intervalu spolehlivosti zdůrazněme, že interval je pouze asymptotický a použití odhadu  $\hat{b}_n$  místo  $b_m$  pevného může pro malý rozsah výběru být problémové a způsobovat nezanedbatelné vychýlení odhadu. Konečně tedy můžeme zkonstruovat asymptotický interval spolehlivosti

$$IS = \left( \overline{Y(\hat{b}_n)} - u_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}(\hat{b}_n)}{\sqrt{n}}, \overline{Y(\hat{b}_n)} + u_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}(\hat{b}_n)}{\sqrt{n}} \right). \quad (4.1)$$

Na tomto místě pro lepší intuici předvedeme fungování teorie na jednoduchých příkladech.

*Příklad.* Jak bylo popsáno v předchozí kapitole, simulace náhodných procesů se většinou provádějí na základě simulací  $X_i \sim N(0,1)$ . Je tedy možné obecně skoro v každé aplikaci volit jako řídicí proměnné  $X_i$ . O té máme úplné znalosti. Tato metoda kvůli své obecnosti nebývá příliš efektivní.

*Příklad.* Mějme standardní evropskou call opci tj. výplatní funkce  $(S(T) - K)^+$ , kde cena podkladového aktiva  $S(t)$  v čase  $t \in [0, T]$  je náhodný proces. Podle principů oceňování finančních aktiv známe  $\mathbb{E}[S(T)] = e^{rT} S(0)$ , a můžeme tedy volit  $S(T)$  jako řídicí proměnnou. Dostaneme odhad

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [e^{rT} - \hat{b}_n (S_i(T) - e^{rt} S(0))],$$

kde vývoj ceny ( $S_i$ ) simulujeme podle teorie z 2. kapitoly.

### 4.1.1 Ceny podkladových aktiv

Ceny podkladových aktiv, jak bylo dříve zmíněno v příkladu, jsou dobrou kontrolní proměnnou při oceňování finančních derivátů.

Pro zlepšení kvality odhadu se dá použít také následující princip. Mějme cenu podkladového aktiva  $\{S(t), t \geq 0\}$ , uvažme  $r$  konstantní bezrizikovou úrokovou míru a  $S(0)$  známe.

Definujeme-li průměrný proces

$$\hat{S}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i(t),$$

kde  $\{S_i(t), t \geq 0\}$  jsou pro  $i = 1, \dots, n$  nezávislé stejně rozdělené simulace z rozdělení procesu popisujícího cenu  $\{S(t), t \geq 0\}$ .

Podle principů oceňování finančních aktiv má platit:  $e^{-rt} E[S(t)] = S(0)$ . Zřejmě je vidět, že pro konečná  $n$  nemusí vždy nutně platit  $\hat{S}(t) = E[S(t)]$ . Této chyby při oceňování aktiva se můžeme zbavit pomocí upravení  $S_i$  a to například volbou:

$$\tilde{S}_i(t) = S_i(t) \frac{e^{rt} S(0)}{\hat{S}(t)}, \text{ neboť}$$

$$E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i(t) \frac{e^{rt} S(0)}{\hat{S}(t)}\right] = e^{rt} S(0) E\left[\frac{1}{\hat{S}(t)} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i(t)\right] = e^{rt} S(0) = E[S(t)].$$

Pro další možnosti řešení a hlubší teorii odkážeme na [2], kde je pro pochopení zapotřebí rozšířit znalosti ze sekce 4.1 o nelineární řízení.

## 4.2 Antitetické proměnné

**Definice 4.2** (Antitetický pár). *V tomto textu budeme říkat, že dvojice náhodných veličin  $(X, X^a)$  tvoří antitetický pár, jestliže jsou stejně rozdělené ( $X \sim X^a$ ) a platí*

$$\frac{1}{2}(X + X^a) = E[X].$$

*Náhodné veličiny mohou být obecně i vektory.*

Princip lze ukázat na příkladu, který bude pro účely finančních simulací praktický. Pokud  $X \sim N(0,1)$ , pak platí, že i  $-X \sim N(0,1)$ . Dvojice  $(X, -X)$  tvoří antitetický pár, neboť zřejmě  $(X + (-X))/2 = 0$ . Vezmeme-li  $(X_1, \dots, X_n)$  spolu s  $(-X_1, \dots, -X_n)$ , dostaneme, že provedení odhadu  $E[X]$  na základě

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i + (-X_i))/2 = 0$$

má nulový rozptyl. Toto by znamenalo, že pro odhadování  $E[f(X)]$ , kde  $f$  je skoro lineární funkce, dostaneme velmi malou hodnotu rozptylu.

**Definice 4.3** (Odhad pomocí antitetických proměnných). *Chceme-li odhadnout  $E[Y] = E[f(X)]$  ( $X$  může být, a zpravidla v aplikacích bývá, vektor), pak takovým odhadem rozumíme*

$$\bar{Y}_A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (Y_i + \tilde{Y}_i) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{Y}_i \right),$$

kde  $((Y_1, \tilde{Y}_1), \dots, (Y_n, \tilde{Y}_n))$  tvoří náhodný výběr takový, že  $Y_i = f(X_i)$ ,  $\tilde{Y}_i = f(X_i^a)$  a  $((X_1, X_1^a), \dots, (X_n, X_n^a))$  je náhodný výběr tvořený antitetickými páry (antitetický náhodný výběr).

Zřejmě vidíme, že střední hodnota takového odhadu se rovná střední hodnotě  $Y$ . Zavedeme-li nyní značení  $\sigma_A^2 = \text{Var}(Y_i + \tilde{Y}_i)/4$ , pak dostaneme

**Věta 4.4.** *Pro odhad pomocí antitetických proměnných platí:*

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma_A}(\bar{Y}_A - \mathbb{E}[Y]) \xrightarrow{D} N(0,1).$$

Věta nepotřebuje důkaz, neboť je zřejmé, že se jedná pouze o jednoduchou aplikaci CLV. Lze tedy opět určit asymptotický interval spolehlivosti.

$$IS = \left( \bar{Y}_A - u_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}_A}{\sqrt{n}}, \bar{Y}_A + u_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}_A}{\sqrt{n}} \right), \quad (4.2)$$

kde  $\hat{\sigma}_A = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left( \frac{Y_i + \tilde{Y}_i}{2} - \bar{Y}_A \right)^2}$ .

Pro účel porovnání změny rozptylu nyní předpokládejme, že doba pro generování antitetické replikace je přibližně dvojnásobná oproti obyčejné replikaci.

Jeden možný přístup je vzít podmínku pro relativní eficienci  $\mathcal{E} > 1$ , pak za zmíněného předpokladu dostaneme podmínku pro volbu 2. metody:

$$\sigma_A^2 < 2\sigma_Y^2.$$

Podmínka se dále zjednoduší na  $\text{Cov}(Y_i, \tilde{Y}_i) < 0$ , neboť

$$\text{Var}(Y_i + \tilde{Y}_i) = 2\text{Var}(Y_i) + 2\text{Cov}(Y_i, \tilde{Y}_i).$$

*Poznámka.* Ke stejnému výsledku dojdeme i možná intuitivnější cestou s podmínkou: Zvolíme metodu antitetických proměnných, pokud platí

$$\text{Var}(\bar{Y}_A) < \text{Var}\left(\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} Y_i\right).$$

Výsledná kvalita odhadu touto metodou zřejmě záleží také na funkci  $f$ . Provedeme stručnou analýzu:

**Definice 4.4.** *Definujme*

$$f_0(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2},$$

$$f_1(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

*Tyto funkce nazveme po řadě symetrickou a antisymetrickou částí  $f$*

**Věta 4.5.** *Nechť  $X \sim N(0, I_d)$  a  $Y = f(X)$ , pak platí*

$$\text{Var}(f(X)) = \text{Var}(f_0(X)) + \text{Var}(f_1(X)).$$



*Důkaz.* Platí, že  $f = f_0 + f_1$ , a tvrzení věty plyne z  $Cov(f_0(X), f_1(X)) = 0$ , což ukazuje [4] str. 33 nebo také [2] str. 208. □

Při použití antitetického páru  $(X, -X)$ , jak je z definice a s použitím věty vidět, dojde k úplné redukci rozptylu v případě, kdy  $f = f_1$ , naopak v případě, kdy  $f = f_0$ , nedojde k redukci rozptylu.

V prvním případě máme  $\forall x : f(x) + f(-x) = 0$ , což je pro antisymetrickou funkci zřejmě hledaná střední hodnota, pokud existuje.

### 4.3 Stratifikovaný výběr (oblastní výběr)

Nyní chceme odhadnout  $E[Y] \in \mathbb{R}$ . Začneme obecným případem.

**Definice 4.5** (Stratifikace). *Mějme  $X$  náhodnou veličinu s hodnotami v  $\mathbb{R}^d$  (tedy náhodný vektor). Dále vezměme oblasti  $A_i \subset \mathbb{R}^d$ ,  $i = 1, \dots, K$  po dvou disjunktní takové, že:  $P(X \in \bigcup_{i=1}^K A_i) = 1$ . Označme  $p_i = P(X \in A_i)$ , uvažujme případ, kdy platí  $p_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, K$ .*

*Takové dělení na množiny  $A_i$  nazveme stratifikací.*

Dále dostaneme z vlastností podmíněné střední hodnoty:

$$E[Y] = \sum_{i=1}^K p_i E[Y|X \in A_i]. \quad (4.3)$$

Jako nestranný odhad  $E[Y|X \in A_i]$  dobře poslouží  $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}$ , kde  $(Y_{i1}, \dots, Y_{in_i})$  je náhodný výběr z rozdělení  $(Y|X \in A_i)$ . Což lze pro praktické účely interpretovat jako použití náhodného výběru  $((X_{i1}, Y_{i1}), \dots, (X_{in_i}, Y_{in_i}))$  z rozdělení  $((X, Y)|X \in A_i)$ . Neboť toto se bude snáze generovat v případě netriviálních závislostí mezi  $X$  a  $Y$ .

Uvažujme také, že takové výběry umíme generovat pro různé oblasti nezávisle. Tedy dostaneme sdruženě nezávislé náhodné veličiny  $Y_{ij}$ .

Zbývá podotknout, že  $n_i$  samozřejmě volíme tak, aby  $n_1 + \dots + n_K = n$ . A již můžeme definovat odhad pomocí stratifikovaného výběru.

**Definice 4.6** (Odhad metodou stratifikovaného výběru). *Mějme nějakou stratifikaci ve smyslu definice 4.5, pak odhadem metodou stratifikovaného výběru nazveme:*

$$\bar{Y} = \sum_{i=1}^K \left( p_i \frac{1}{n_i^*} \sum_{j=1}^{n_i^*} Y_{ij} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^K \left( \frac{p_i}{q_i} \sum_{j=1}^{n_i^*} Y_{ij} \right),$$

kde  $(Y_{i1}, \dots, Y_{in_i}) \stackrel{iid}{\sim} (Y|X \in A_i)$  nazýváme stratifikovaný výběr.

Značíme  $n_i^* = \lfloor q_i n \rfloor$  a platí  $n_1^* + \dots + n_K^* = n$ .

Upozorníme, že budeme používat zjednodušené značení  $n_i = q_i n$  pro teoretická  $n_i$  a následně značit teoretické relativní četnosti  $q_i = n_i/n$  simulací z  $i$ -té oblasti. Věty odvodíme na teoretické rovině, neboť to bude snazší a přehlednější a zároveň pro rostoucí  $n$  se stane chyba zaokrouhlením bezvýznamná.

Půjde nám o to, najít vhodnou stratifikaci a vhodná  $n_i$ , respektive zvolit  $q_i$  tak, aby odhad touto metodou dosahoval lepších kvalit než klasický odhad.

Zavedená definice na první pohled nemusí být intuitivní. Proto ukážeme konkrétnější případ. Pro lepší představu dostaneme při volbě stratifikace  $A_i \subset \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, K$  po dvou disjunktní takové, že  $P(Y \in \bigcup_{i=1}^K A_i) = 1$ . Dále se vzorec 4.3 zjednoduší na:

$$E[Y] = \sum_{i=1}^K p_i E[Y|Y \in A_i]. \quad (4.4)$$

Jako nestranný odhad  $E[Y|Y \in A_i]$  dobře poslouží  $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}$ , kde  $n_i$  volíme tak, aby  $n_i = \lfloor p_i n \rfloor$ , to jest proporcionálně, a dále  $(Y_{i1}, \dots, Y_{in_i})$  je náhodný výběr z rozdělení  $(Y|Y \in A_i)$ . Pak lze přepsat výraz z definice 4.6 jako

$$\bar{Y} = \sum_{i=1}^K p_i \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}. \quad (4.5)$$

Pro úplně jasnou ilustraci předvedeme popsanou teorii na elementárním příkladu.

*Příklad.* Stratifikovaný výběr z  $R(0,1)$ . Mějme  $U \sim R(0,1)$ .

Veźměme  $A_i = (\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Každá oblast (interval) má vlastnost, že  $P(U \in A) = 1/n$ . Tedy je-li  $(U_1, \dots, U_n) \stackrel{iid}{\sim} R(0,1)$ , pak:

$$V_i = \frac{i-1}{n} + \frac{U_i}{n} \sim R\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right).$$

Platí, že  $V_i$  je náhodný výběr o rozsahu 1 z podmíněného rozdělení  $(U|U \in A_i)$ . Náznak výpočtu, který ukazuje platnost výroku:  $f_{U|[U \in A_i]}(x) = \frac{1}{P(U \in A_i)} f_U(x) \mathbb{I}_{A_i}(x) = n \mathbb{I}_{A_i}(x)$ , což je zřejmě hustota  $V_i$ .

Chceme odhadnout  $E[Y]$ , kde  $Y = f(U)$ . Použijeme odhad:

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(V_i).$$

Poznamenejme, že v našem případě se  $E[Y]$  zjednoduší na  $\int_0^1 f$ . Výhodou této metody je, že dostaneme  $\bar{Y}$  nestranný, což plyne ze zmíněných vlastností podmíněné střední hodnoty.

Příklad byl převzat a upraven z [2] strana 211.

Pro další analýzu vlastností této metody zavedme následující značení pro  $Y_{ij} \sim (Y|X \in A_i)$ , označme korektně díky vlastnostem podmíněného rozdělení a podmíněné střední hodnoty:

$$\begin{aligned} \mu_i &= E[Y_{ij}] = E[Y|X \in A_i] \\ \sigma_i^2 &= \text{Var}(Y_{ij}) = \text{Var}(Y|X \in A_i). \end{aligned}$$

**Věta 4.6.** *Při zavedeném značení platí:*

$$E[\bar{Y}] = E[Y] = \mu \quad (4.6)$$

$$\text{Var}(\bar{Y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^K \frac{p_i^2}{q_i} \sigma_i^2 = \sigma^2(q)/n, \quad (4.7)$$

kde poslední rovností definujeme  $\sigma^2(q)$ ,  $q = (q_1, \dots, q_K)$  a značíme  $q_i = n_i/n$ .

*Důkaz.* Počítejme s využitím nezávislosti a vlastností podmíněné střední hodnoty. První část tvrzení:

$$E[\bar{Y}] = E\left[\sum_{i=1}^K p_i \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}\right] = \sum_{i=1}^K p_i \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} E[Y_{ij}] = \sum_{i=1}^K p_i \mu_i = \mu.$$

Druhá část tvrzení:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\bar{Y}) &= \text{Var}\left(\sum_{i=1}^K p_i \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}\right) = \sum_{i=1}^K p_i^2 \text{Var}\left(\frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}\right) = \\ &= \sum_{i=1}^K p_i^2 \frac{\sigma_i^2}{n_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^K p_i^2 \frac{\sigma_i^2}{q_i} = \sigma^2(q)/n, \end{aligned}$$

neboť  $n_i = q_i n$ . □

Zafixujeme-li  $K$ , můžeme odvodit asymptoticky normální chování odhadu  $\bar{Y}$ , i přesto, že v tomto případě odhad netvoříme na základě stejně rozdělených veličin. Veličiny  $Y_{ij}$  jsou zřejmě pro různá  $i$  různě rozdělené. Naopak pro pevné  $i$  platí, že  $Y_{ij}$   $j = 1, \dots, n_i$  tvoří náhodný výběr.

**Věta 4.7.** *Platí*

$$\sqrt{n}(\bar{Y} - \mu) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2(q)).$$

*Důkaz.* Pro každé  $i = 1, \dots, K$  pomocí jednoduché aplikace CLV platí, že

$$\frac{1}{\sqrt{[nq_i]}} \sum_{j=1}^{[nq_i]} (Y_{ij} - \mu_i) \xrightarrow{D} N(0, 1),$$

dále podle [2] str. 216 můžeme provést aproximaci

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(\bar{Y} - \mu) &= \sqrt{n} \sum_{i=1}^K p_i \left( \frac{1}{[nq_i]} \sum_{j=1}^{[nq_i]} (Y_{ij} - \mu_i) \right) \\ &\approx \sum_{i=1}^K \frac{p_i}{\sqrt{q_i}} \left( \frac{1}{\sqrt{[nq_i]}} \sum_{j=1}^{[nq_i]} (Y_{ij} - \mu_i) \right). \end{aligned}$$

Poslední výraz říká, že  $\sqrt{n}(\bar{Y} - \mu)$  se asymptoticky chová jako lineární kombinace nezávislých veličin s  $N(0, \sigma_i^2)$ . Teď už je díky vlastnostem normálního rozdělení tvrzení zřejmé. □

Jako v předchozích případech tedy můžeme odvodit asymptotický intervalový odhad

$$IS = \left( \bar{Y} - u_{1-\alpha/2} \frac{\sigma(q)}{\sqrt{n}}, \bar{Y} + u_{1-\alpha/2} \frac{\sigma(q)}{\sqrt{n}} \right). \quad (4.8)$$

Pro praktické použití budeme muset  $\sigma(q)$  nahradit nějakým odhadem. K problému odhadu můžeme přistoupit dvěma způsoby.

## Odhad rozptylu 1

První způsob je založený na provedení série odhadů  $\bar{Y}_r$ ;  $r = 1, \dots, R$ , kde tyto odhady jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny, a snadno pak určíme

$$IS_1 = \left( \bar{Y}_R - u_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}_1(q)}{\sqrt{R}}, \bar{Y}_R + u_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}_1(q)}{\sqrt{R}} \right), \quad (4.9)$$

kde máme

$$\hat{\sigma}_1(q) = \sqrt{\frac{1}{R-1} \sum_{r=1}^R (Y_r - \bar{Y}_R)^2}.$$

Můžeme zvolit  $R = n = m k$  a pro lepší porovnání vyjádřit  $\frac{1}{\sqrt{R}} = \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{m}}$ .

## Odhad rozptylu 2

Druhou možností je odhadnout interval spolehlivost jako

$$IS_2 = \left( \bar{Y} - u_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}_2(q)}{\sqrt{n}}, \bar{Y} + u_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}_2(q)}{\sqrt{n}} \right), \quad (4.10)$$

kde za odhad rozptylu zvolíme

$$\hat{\sigma}_2^2(q) = \sum_{i=1}^K \frac{p_i^2}{q_i} \left( \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_{i\bullet})^2 \right),$$

se zavedením značení  $\bar{Y}_{i\bullet} = 1/n_i \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}$ .

## Volba optimální stratifikace

Budeme-li uvažovat volbu proporcionální stratifikace, dosáhneme vždy rozptylu, který nebude větší než rozptyl klasické metody. Rozptyl odhadu bez použití stratifikace lze vyjádřit jako  $\text{Var}(Y)/n$ .

**Věta 4.8.** *V kontextu dříve zavedeného značení platí:*

$$\text{Var}(Y) = \sum_{i=1}^K p_i \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^K p_i \mu_i^2 - \left( \sum_{i=1}^K p_i \mu_i \right)^2.$$

*Důkaz.* Připomeňme vlastnost podmíněné střední hodnoty  $E[E[Y|Z]] = E[Y]$  (v našem případě  $Z = I_{A_i}(X)$ ), kterou jsme již používali, a můžeme dále počítat.

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &= E[Y^2] - \mu^2 = \sum_{i=1}^K p_i E[Y^2 | X \in A_i] - \left( \sum_{i=1}^K p_i \mu_i \right)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^K p_i (\sigma_i^2 + \mu_i^2) - \left( \sum_{i=1}^K p_i \mu_i \right)^2 = \sum_{i=1}^K p_i \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^K p_i \mu_i^2 - \left( \sum_{i=1}^K p_i \mu_i \right)^2. \end{aligned}$$

□

Nyní můžeme vyslovit avizovanou větu o proporcionální stratifikaci.

**Věta 4.9.**  $Var(\bar{Y}) \leq Var(\bar{Y}_o)$ , kde  $\bar{Y}$  je odhad za pomoci proporcionální stratifikace a  $\bar{Y}_o$  je odhad klasickou metodou.

*Důkaz.* Pro proporcionální stratifikaci platí  $\sigma^2(q) = \sum_{i=1}^K p_i \sigma_i^2$ , neboť pro takovou volbu máme  $q_i = p_i$ . Chceme tedy porovnat  $\sum_{i=1}^K p_i \sigma_i^2$  a  $Var(Y)$  z předchozí věty. Tvrzení pak dostaneme z Jensenovy nerovnosti pro

$$\left( \sum_{i=1}^K p_i \mu_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^K p_i \mu_i^2.$$

Tedy je zřejmé že  $Var(Y) \geq \sum_{i=1}^K p_i \sigma_i^2 = \sigma^2(q)$ . □

Tento výsledek dává jistotu v tom, že má smysl uvažovat stratifikaci jako metodu redukující rozptyl. Chceme-li minimalizovat rozptyl této metody musíme uvažovat minimalizaci  $\sigma(q)$  vzhledem ke  $q$ , za podmíněk  $\sum q_i = 1$ ,  $q_i > 0$ . Optimální řešení je  $q^*$ , kde :

$$q_i^* = \frac{p_i \sigma_i}{\sum_{k=1}^K p_k \sigma_k}.$$

Optimální hodnota rozptylu tedy je:

$$\sigma^2(q^*) = \sum_{i=1}^K p_i^2 \frac{\sigma_i^2}{q_i^*} = \left( \sum_{i=1}^K p_i \sigma_i \right)^2.$$

Bohužel parametry  $\sigma_i^2$  jsou ve většině aplikací neznámé, a proto není možné exaktně dopočítat optimální hodnoty. V [2] kapitola 4.3 je navrženo použití prvotních simulací s menším rozsahem pro odhadnutí těchto parametrů. V [3] je navrženo případné využití nějakých dalších apriorních informací o konkrétní simulované situaci.

## 4.4 Metoda latinské krychle

V angličtině se tato metoda nazývá "Latin hypercube sampling" z toho zavedeme zkratku LHS. Na začátek uveďme, že jako latinský čtverec označujeme čtvercové schéma  $n \times n$  sestavené z  $n$  různých prvků takové, že každý řádek i sloupec obsahuje všechny vzájemně různé prvky. Obecněji lze tuto vlastnost přenést do více dimenzí. Po následujícím výkladu bude zřejmé, proč metoda, kterou představíme, nese právě tento název.

K vlastní metodě. Metoda Stratifikace, jak byla popsána, funguje i pro vícedimenzionální problémy. Nicméně metoda, kterou teď popíšeme, může být považována za efektivnější hlavně z pohledu časové složitosti, neboť oproti klasické vícedimenzionální stratifikaci potřebuje výrazně méně simulací. Někdo by mohl tvrdit, že při současných výpočetních možnostech přestává být tato metoda zajímavá. Podle mého osobního názoru může být metoda stále dobře použitelná pro finanční simulace, kde je často dimenze problému velká a zároveň je důležité dosažení relevantních výsledků v co možná nejkratším čase.

Dále budeme uvažovat pevnou dimenzi  $d$  a pevný rozsah výběru  $K$ . Pro aplikaci této metody musíme být schopni dělat náhodné permutace. Potřebnou teorii poskytne například [3] str. 73. Program *Mathematica* poskytuje přímo funkci `RandomPermutation`, o které se více dočteme v dokumentaci programu.

## Latinská stratifikace krychle

Metodu předvedeme na stratifikaci jednotkové  $d$ -dimenzionální krychle. Vezmeme rovnoměrnou stratifikaci v každé souřadnici a generujeme  $V_i^1, \dots, V_i^K$  pro  $i = 1, \dots, d$  stratifikované výběry o rozsahu 1. Uvědomme si, že vezmeme-li vektor  $(V_1^1, V_2^1, \dots, V_{d-1}^1, V_d^1)^\top$ , dostaneme souřadnice jednoho bodu v  $d$  dimenzionální krychli.

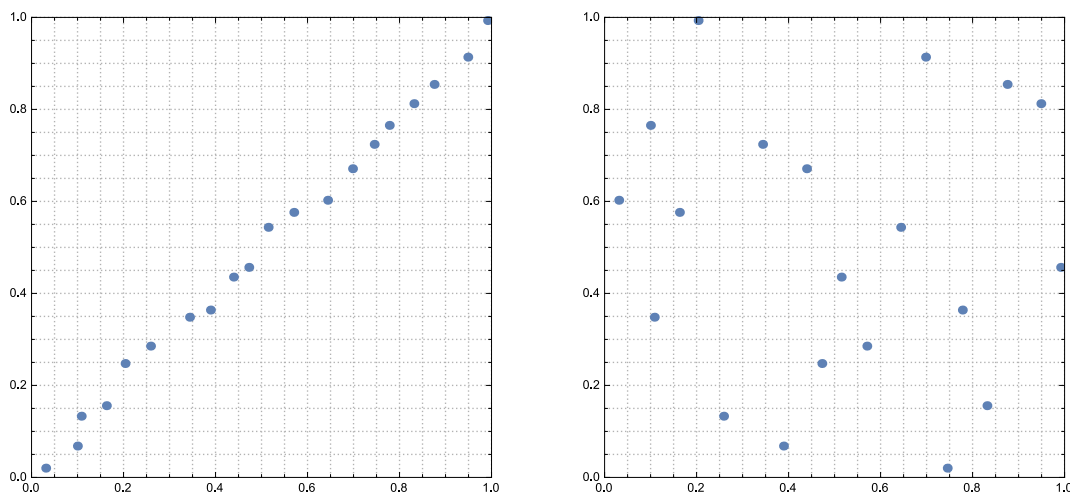
Takto získané body jsou uspořádány na diagonále. Nyní provedeme náhodnou permutaci na každou ze souřadnic tj. (Přehledné uspořádání převzato z [2]).

$$\begin{array}{cccc} V_1^{\pi_1(1)} & V_2^{\pi_2(1)} & \dots & V_d^{\pi_d(1)} \\ V_1^{\pi_1(2)} & V_2^{\pi_2(2)} & \dots & V_d^{\pi_d(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ V_1^{\pi_1(K)} & V_2^{\pi_2(K)} & \dots & V_d^{\pi_d(K)} \end{array}$$

Dostali jsme tedy  $K$  bodů (řádky tvoří souřadnice bodů) nějak "náhodně" rozmístěných v  $d$  dimenzionální krychli.

Body jsou rozmístěny tak, že v každém řádku i v každém sloupci je právě jeden bod. Na názorné ukázce je dobře vidět analogie s latinským čtvercem (nehledejme přesné splnění definice, intuitivní přístup postačí).

Nyní již můžeme přistoupit k samotné ukázce. Na následujícím obrázku pro  $d = 2$  je zvoleno  $K = 20$ .



Obrázek 4.1: Ilustrace metody LHS pro  $d = 2$

Volba jednotkové krychle tj.  $[0,1]^d$  se ukazuje být prakticky relevantní, neboť podle poznatků z [3], [4] a [2] jde velká část problémů převést na odhad  $Y = \int_{[0,1]^d} f(u) du$  pomocí výběru z  $R([0,1]^d)$  (například metoda inverzní transformace).

**Definice 4.7** (Odhad metodou latinské krychle, LHS). *V kontextu předchozího značení definujeme odhad:*

$$\bar{Y} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K f(V^i)$$

Pro některé případy (jak uvádí [2] str. 241) lze odvodit kvalitnější intervalový odhad, než použijeme my. To však vyžaduje komplikovanější teorii. Námí zavedený odhad je jednodušší a univerzálnější. Provedme  $n$  nezávislých odhadů  $\bar{Y}_j$ ;  $j = 1, \dots, n$  ve smyslu předchozí definice. Jednoduše podle CLV dostaneme

$$IS_{LHS} = \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \bar{Y}_j - u_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \bar{Y}_j + u_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \right), \quad (4.11)$$

kde  $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y}_n)^2}$  při označení  $\bar{Y}_n = 1/n \sum_{j=1}^n \bar{Y}_j$ .

Jedná se o prakticky snadno použitelný výsledek.

## 4.5 Výběr podle důležitosti

Opět, jako v předchozích kapitolách, bude naším cílem odhad střední hodnoty. Nejprve prezentujeme několik obecných teoretických poznatků, které následně aplikujeme na konkrétnější případ. Pro přehlednost použijeme následující značení:

$$Y = E[h(X)] = \int_{\Omega} h(X) dP = \int_S h(x) dP_X(x),$$

kde  $X$  je nějaká náhodná veličina s hodnotami v měřitelném prostoru  $(S, \mathcal{S})$  a  $h$  měřitelná reálná funkce. Podotkneme, že  $Y$  v tomto značení není náhodná veličina.

**Věta 4.10.** *Mějme  $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (S, \mathcal{S}, P_X)$ .*

*Nechť  $h$  je měřitelná funkce, pro kterou má  $E[h(X)]$  smysl. Dále mějme  $P_Q$  pravděpodobnostní míru na  $(S, \mathcal{S})$  takovou, že  $P_X$  je absolutně spojitá vzhledem k  $P_Q$  ( $P_X \ll P_Q$ ) tj.  $\forall A \in \mathcal{S} : P_Q(A) = 0 \Rightarrow P_X(A) = 0$ , pak existuje funkce  $\frac{dP_X}{dP_Q}$  taková, že platí:*

$$Y = \int_S h(x) dP_X(x) = \int_S h(x) \frac{dP_X}{dP_Q}(x) dP_Q(x).$$

*Důkaz.* Pravděpodobnostní míry jsou konečné, proto s použitím věty 19.4. v [7] dostaneme, že existuje Radon-Nikodýmova derivace míry  $P_X$  vzhledem k  $P_Q$ , kterou označíme  $\frac{dP_X}{dP_Q}$ . Dále použijeme větičku 19.3. v [7] a tím je tvrzení dokázáno. □

**Definice 4.8** (Odhad pomocí změny pravděpodobnostní míry). *Takovým odhadem  $Y = E[h(X)]$  rozumíme*

$$\bar{Y}_Q = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(Q_i) \frac{dP_X}{dP_Q}(Q_i),$$

kde  $(Q_1 \dots Q_n) \stackrel{iid}{\sim} Q$ . A funkce  $\frac{dP_X}{dP_Q}$  je funkce z věty 4.10.

Ukážeme obecně nějaké dobré vlastnosti takového odhadu. Je dobré mít dokázány obecný případ.

**Věta 4.11.** *Odhad z definice 4.8 je nevychýlený, tj.  $E[\bar{Y}_Q] = Y$ .*

$$\text{Důkaz. } E[\bar{Y}_Q] = \frac{n}{n} E[h(Q) \frac{dP_X}{dP_Q}(Q)] = \int_{\Omega} h(Q) \frac{dP_X}{dP_Q}(Q) dP = \int_S h(q) \frac{dP_X}{dP_Q}(q) dP_Q(q) \stackrel{4.10}{=} \int_S h(q) dP_X(q) = Y.$$

□

Tímto zakončíme výklad obecné teorie a přejdeme k vlastnímu použití metody.

## Metoda

Nyní budeme konkrétnější pro názornost a praktickou použitelnost výsledků.  $(S, \mathcal{S}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ . Připomínáme, že odhadujeme  $Y = E[h(X)] = \int h(x) f_X(x) dx$ . Pro zpřehlednění označme  $f = f_X$  hustotu  $X$ . Mějme  $g(x)$  hustotu  $G$  takovou, že platí

$$\forall x \in \mathbb{R}^d : g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0. \quad (4.12)$$

Můžeme přepsat:

$$Y = \int_{\mathbb{R}^d} h(x) f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} h(x) \frac{f(x)}{g(x)} g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} h(x) \frac{f(x)}{g(x)} dP_G(x) = E[h(G) \frac{f(G)}{g(G)}]$$

Povšimněme si zřejmé analogie s obecným případem.  $P_X(A) = \int_A f(x) dx = 0 \Rightarrow 0 = \int_A g(x) dx = P_G(A)$ , tj. platí, že  $P_X \ll P_G$ . Můžeme tedy zavést prakticky snadno použitelnou definici.

**Definice 4.9** (Odhad pomocí výběru podle důležitosti, Importance Sampling). *Při označení zavedeném výše rozumíme odhadem  $Y$  takový odhad  $\bar{Y}_g$*

$$\bar{Y}_g = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i) \frac{f(X_i)}{g(X_i)},$$

kde  $(X_1, \dots, X_n) \stackrel{iid}{\sim} G$ , tj. náhodný výběr z rozdělení s hustotou  $g$ .

**Věta 4.12.** *Odhad je nevychýlený, tj.  $E[\bar{Y}_g] = Y$ .*

*Důkaz.* Viz věta 4.11, neboť v tomto případě  $\frac{dP_X}{dP_G} = \frac{f}{g}$ .

□

Zkoumejme rozptyl odhadu získaného definovanou metodou. Jelikož je odhad nevychýlený, stejně jako odhad klasickou metodou MC, tak pro rozhodnutí o tom, zda došlo k redukci rozptylu, stačí porovnání druhých necentrálních momentů.

$$E[(h(G) \frac{f(G)}{g(G)})^2] = \int h^2(x) \frac{f^2(x)}{g^2(x)} dP_G(x) = \int h^2(x) \frac{f^2(x)}{g^2(x)} g(x) dx = E[h^2(X) \frac{f(X)}{g(X)}],$$

kde  $X$  má hustotu  $f$  a  $G$  má hustotu  $g$ . Je tedy vidět, že výsledný rozptyl bude záležet na volbě  $g$ , a nemusí tedy obecně dojít k redukci rozptylu.

Odpověď na otázku, jak volit optimální  $g$ , nám napoví následující příklad.



*Příklad.* Nechť je  $h \geq 0$ . Pak můžeme  $f(x)h(x)$  znormovat na hustotu, kterou označíme  $g(x) = c f(x)h(x)$ , kde  $c = 1/\int f(x)h(x)dx$  je normovací konstanta. Budeme-li následně počítat:

$$\begin{aligned} E\left[\left(h(G)\frac{f(G)}{g(G)}\right)^2\right] &= \int h^2(x)\frac{f^2(x)}{c^2 f^2(x)h^2(x)}dP_G(x) = \\ &= \int h^2(x)\frac{f^2(x)}{c^2 f^2(x)h^2(x)}c f(x)h(x)dx = \int \frac{1}{c} f(x)h(x)dx = \frac{1}{c^2}. \end{aligned}$$

Spolu s obdobně provedeným výpočtem

$$E\left[h(G)\frac{f(G)}{g(G)}\right] = \int h(x)\frac{f(x)}{c f(x)h(x)}c f(x)h(x)dx = \int f(x)h(x)dx = \frac{1}{c}.$$

Je již zřejmé, že dostaneme odhad s nulovým rozptylem. Tento postup bohužel ale není prakticky použitelný, neboť pro určení  $c$  jsme museli znát  $\int f(x)h(x)dx$ , který jsme chtěli odhadnout. Zkonstruovali jsme odhad s nulovým rozptylem za předpokladu, že známe výsledek.

Příklad nám dává ale náhled na to, že bude dobré volit  $g$  blízko  $f g$ . Dále můžeme objasnit název metody na dalším příkladu.

*Příklad.* Nechť je  $M \subset \mathbb{R}^d$  a funkce  $h(x) = \mathbb{I}_M(x)$  jsou takové, že platí

$$Y = \int h(x)f(x)dx = \int \mathbb{I}_M(x)f(x) dx = P(X \in M) > 0.$$

Zvolíme  $g$  podle předchozího příkladu, tj.  $g(x) = h(x)f(x)/Y$ , a uvědomíme si, že

$$f_{[X|X \in M]}(x) = \frac{1}{P(X \in M)} f_X(x)\mathbb{I}_M(x) = g(x).$$

Tímto příkladem dostává název metody jasný význam, neboť příklad ukazuje, že pro odhad  $P(X \in M)$  je dobré volit pro naši metodu hustotu, která je blízka podmíněné hustotě  $f_{[X|X \in M]}$ . Tedy přiřazení větší důležitosti jevům  $[X \in M]$ . Jak říká [2]: "This means choosing  $g$  to make events  $[X \in M]$  more likely, especially if  $M$  is rare set under  $f$ ."

Je tedy jasné, že záleží na konkrétním řešeném problému a obecně lze teoreticky efektivnost této metody ve srovnání s ostatními jen těžko hodnotit. Empiricky získané poznatky jsou však vzhledem k charakteru řešených úloh mnohdy cennější.

Interval spolehlivosti lze snadno založit na CLV, neboť zmiňovanou transformací  $h(X_i)f(X_i)/g(X_i)$  se zachová nezávislost. Glasserman v [2] kapitola 4.6 ale upozorňuje na důležitost dostatečně velkého  $n$  pro získání relevantního výsledku.

$$IS = \left( \bar{Y}_g - u_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \bar{Y}_g + u_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \right), \quad (4.13)$$

kde  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (h(X_i)\frac{f(X_i)}{g(X_i)} - \hat{Y}_g)^2$ .

## 4.6 Regresní metoda

Ve [3] str. 123 je popsán přístup k redukci rozptylu využívající teorii lineární regrese. Pro úplnost uvedeme definici modelu lineární regrese, ale důkazy následně zmíněných poznatků již nebudeme provádět, neboť základní teorii lze najít například v [1] a uvedené výsledky jsou přímo převzaty z [3].

**Definice 4.10** (Obecný model lineární regrese). *Mějme  $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, \dots, X_{id})^\top$ . Řekneme, že data  $(Y_i, \mathbf{X}_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  pro  $n > d$  splňují obecný model lineární regrese jestliže:*

$$\mathbf{Y} = X \beta + \epsilon,$$

kde  $X = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)^\top$  je matice  $n \times d$  s plnou hodnotí  $d$ . Dále  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^\top$  a chybový vektor  $\epsilon$  splňuje  $E[\epsilon] = \mathbf{0}$ ,  $Var(\epsilon) = V$ .

*Poznámka.*  $\mathbf{Y}$  považujeme za náhodné,  $X$  nikoli.  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d)$  je vektor neznámých konstant, které chceme odhadnout.

**Věta 4.13** (Odhad metodou nejmenší čtverců). *Odhad metodou nejmenších čtverců lze psát ve tvaru*

$$\hat{\beta} = (X^\top V^{-1} X)^{-1} X^\top V^{-1} \mathbf{Y}.$$

*Je to nejlepší nevychýlený odhad pro  $\beta$  (ve smyslu metody nejmenších čtverců), platí*

- $E[\hat{\beta}] = \beta$
- $Var(\hat{\beta}) = (X^\top V^{-1} X)^{-1}$

**Definice 4.11** (Odhad Monte Carlo regresní metodou). *Mějme  $N$  nezávislých replikací vektoru  $\mathbf{Y}$ , tj. náhodný výběr  $(\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_N) \stackrel{iid}{\sim} \mathbf{Y}$ , pak definujeme takový odhad jako:*

$$\tilde{\beta} = (X^\top \tilde{V}^{-1} X)^{-1} X^\top \tilde{V}^{-1} \tilde{\mathbf{Y}}_N, \quad (4.14)$$

kde máme  $\tilde{\mathbf{Y}}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{Y}_i$  a také odhad kovarianční matice:

$$\tilde{V} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\mathbf{Y}_i - \tilde{\mathbf{Y}}_N)(\mathbf{Y}_i - \tilde{\mathbf{Y}}_N)^\top.$$

*Poznámka.* Zdůrazněme, že v této sekci jsme používali vektory sloupcové. Na jiných místech této práce byly výjimečně použity pro úsporu značení i vektory řádkové. V ostatních situacích však nehrozilo nedorozumění.

Takto definovaný odhad je sice vychýlený, ale vychýlení není velké a podle [3] str. 125 platí

$$Var(\tilde{\beta}) \approx \frac{1}{N} (X^\top \tilde{V}^{-1} X)^{-1} = \overline{Var(\tilde{\beta})}.$$

Položme nyní  $X = (1, \dots, 1)^\top$ . Budeme odhadovat jednorozměrný  $\beta$  (tj.  $d = 1$ ). Můžeme odvodit odhadnutý interval pro parametr  $\beta$

$$\mathcal{IS} = \left( \tilde{\beta} - \sqrt{Var(\tilde{\beta})}, \tilde{\beta} + \sqrt{Var(\tilde{\beta})} \right), \quad (4.15)$$

kde se zřejmě výraz  $\sqrt{\text{Var}(\tilde{\beta})}$  zjednoduší na empirickou směrodatnou odchylku. Tento Interval  $\mathcal{IS}$  nemůžeme označit za interval spolehlivosti v pravém smyslu definice, neboť zde nebylo diskutováno pravděpodobnostní rozdělení odhadu. Prakticky se však ukazuje býti použitelný a pro některé případy až překvapivě přesný (viz [3] str. 125 př. 5.4). Ukázku implementace obdobného příkladu v *Mathematice* nalezneme v [4].

# Kapitola 5

## Quasi-Monte Carlo, QMC

Metody odhadů ze skupiny Quasi-Monte Carlo (QMC) využívají namísto náhodných (pseudonáhodných) simulací deterministicky volené posloupnosti s nízkou diskrepancí, které dále popíšeme.

Pro použití těchto metod je tedy nutné opustit náhodné simulace a převést úlohy na numerický výpočet integrálu. Metodu definujeme a popíšeme pro výpočet  $\int_{[0,1]^d} f(x)dx$ , neboť existují různé metody (například inverzní transformace), pomocí kterých můžeme transformovat  $(Q_1, \dots, Q_d) \stackrel{iid}{\sim} R[0,1]$  na  $Y = f(Q_1, \dots, Q_d)$ , kde  $Y$  může mít téměř každé v praxi používané rozdělení.

Chceme-li například diskontovanou hodnotu výplatní funkce opce, máme k dispozici sérii transformací (označíme jako funkci  $f$ ) zmíněných v 2. kapitole a podrobněji popsanych v [4], která nám umožní problém takto formulovat.

Převedením úlohy na výpočet integrálu ztratí některé dobré vlastnosti náhodných simulací (např. většinou jednoduchou tvorbu  $IS$ ). Na druhou stranu, jak bude ukázáno, tím získáme řádově přesnější odhady (místo  $\bar{Y} \pm \frac{c_1}{\sqrt{n}}$  dostaneme téměř  $\bar{Y} \pm \frac{c_2}{n}$ ). Formulujme řešený problém odhadu  $E[Y]$  jako numerický výpočet integrálu:

$$E[Y] = E[f(Q_1, \dots, Q_d)] = \int_{[0,1]^d} f(q) dq.$$

**Definice 5.1** (Odhad QMC). *Odhadem  $\int_{[0,1]^d} f(x)dx$  pomocí QMC rozumíme*

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(q_i),$$

kde  $q_i \in [0,1]^d$  jsou deterministicky zvolené body tvořící posloupnost s nízkou diskrepancí (definice 5.4).

*Poznámka.* Předešle, že volba bodů  $q_i$  je specificky závislá na dimenzi problému. Dimenzi  $d$  problému tedy musíme předem znát.

Vyložíme potřebnou teorii a následně konkrétní způsoby volení bodů  $q_i$  (dále značeno  $x_i$ ).

**Definice 5.2** (Diskrepance). *Mějme  $\mathcal{A}$  systém Lebesgueovskými ( $\lambda$ ) měřitelných podmnožin  $[0,1]^d$ , pak diskrepancí množiny bodů  $\{x_1, \dots, x_n\} \subset [0,1]^d$  vzhledem k  $\mathcal{A}$  rozumíme*

$$D(x_1, \dots, x_n; \mathcal{A}) = \sup_{A \in \mathcal{A}} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(x_i \in A) - \lambda(A) \right|.$$

Podle toho, jaký systém  $\mathcal{A}$  zvolíme, dostaneme různé druhy diskrepance:

**Definice 5.3** (Druhy diskrepance). *Diskrepanci vzhledem k  $\mathcal{A}$  nazveme, je-li  $\mathcal{A}$  systém obsahující všechny množiny tvaru*

- $\prod_{j=1}^d [u_j, v_j)$   $0 \leq u_j < v_j \leq 1$  : ordinální (značíme  $D$ ).
- $\prod_{j=1}^d [0, v_j)$   $0 \leq v_j \leq 1$  : hvězdovitá (anglicky *star* a značíme  $D^*$ ).
- konvexní podmnožiny  $[0,1)^d$ : isotopická.

Kniha [2] str. 284 odkazuje na publikaci, jejímž autorem je Niederreiter, ve které je důkaz následující věty:

**Věta 5.1.** *Nechť je dimenze problému  $d$ , pak platí:*

- $D^* \leq D \leq 2^d D^*$ ,
- pokud navíc  $d = 1$ , pak  $\frac{1}{2n} \leq D^*$ ;  $\frac{1}{n} \leq D$ , kde minimum dosáhneme pro volbu  $x_i = \frac{2i-1}{2n}$ .

Zřejmě pro různou volbu  $n$  dostaneme obecně různé optimální posloupnosti. Vystává otázka, jak se bude chovat diskrepance pro prvních  $n$  prvků pevně dané nekonečné posloupnosti, neboť tento přístup je dynamičtější vzhledem k volbě  $n$ , protože chceme-li místo  $n$  vzít  $n+1$  bodů, stačí dopočítat jeden bod. To šetří čas, neboť nemusíme celou posloupnost definovat znovu. Ukazuje se, že pro prvních  $n$  členů nekonečné posloupnosti platí:

$$c \frac{\log(n)}{n} \leq D^* \leq D$$

pro nějakou konstantu  $c$ . Vlastnosti ve větší dimenzi berme s rezervou, podle citovaných zdrojů se je neodvážím vyslovit jako větu. Považuje se za možné, že pro každou množinu bodů  $\{x_1, \dots, x_n\}$ , platí

$$c_d \frac{\log(n)^{d-1}}{n} \leq D^*,$$

a pro prvních  $n$  prvků nekonečné posloupnosti

$$c_d \frac{\log(n)^d}{n} \leq D^*.$$

Konstanty jsou závislé pouze na  $d$ . Je vidět, že pro rostoucí  $d$  roste dolní mez pro diskrepanci  $D^*$ . Dále s touto intuicí, převzatou z [2] str. 285, můžeme zadefinovat:

**Definice 5.4** (Posloupnost s nízkou diskrepancí). *Konečná posloupnost bodů  $M_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ ;  $x_i \in [0,1)^d$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Má nízkou diskrepanci, jestliže:*

$$D^*(M_n) = \mathcal{O}\left(\frac{\log(n)^d}{n}\right).$$

*Poznámka.* Definice platí bez ohledu na to, jestli je  $M_n$  prvních  $n$  členů nekonečné posloupnosti, nebo pro různá  $n$  obecně různá posloupnost.

## Teorie odhadu chyby QMC

Nechť je nyní  $f$  definována na uzavřené krychli  $[0,1]^d$  taková, že:  $|f| < \infty$ . V takovém případě můžeme odvodit přesnou horní hranici chyby metody QMC. Za tímto účelem začneme s definicí:

**Definice 5.5** (Rozptýlenost funkce, Hardy-Krause variation). *Nechť  $f$  splňuje výše uvedené předpoklady.*

Dále konstruktivně definujeme pro  $J = \prod_{i=1}^d [u_i, v_i]$ ,  $0 \leq u_j < v_j \leq 1$  funkci:

$$\Delta(f, J) = \sum_{r \in \mathcal{J}} (-1)^{\sum_{j=1}^d \mathbb{1}(r_j = u_j)} f(r),$$

kde  $\mathcal{J} = \prod_{i=1}^d \{u_i, v_i\}$  a vektor  $r = (r_1, \dots, r_d)^\top$ .

Dále mějme dělení krychle  $\mathcal{P} = \{J_1, J_2, \dots\}$ , tj.  $J_i$  jsou po dvou disjunktní takové, že  $\bigcup_i J_i = [0,1]^d$ . Nechť  $\Omega$  je množina všech takových dělení, pak definujeme:

$$V^{(d)}(f) = \sup_{\mathcal{P} \in \Omega} \sum_{J_i \in \mathcal{P}} |\Delta(f, J_i)|.$$

Dále uvažme funkce  $f|_{M(i_1, \dots, i_k)} : [0,1]^k \rightarrow \mathbb{R}$ , kde:

$$M(i_1, \dots, i_k) = \{(r_1, \dots, r_d) \in [0,1]^d : r_j = 1 \text{ jestliže } j \notin \{i_1, \dots, i_k\}; \\ 1 \leq k \leq d; 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d\}.$$

To zřejmě znamená, že  $(r_{i_1}, \dots, r_{i_k})^\top \in [0,1]^k$ . Pro funkci  $f$  konečně s použitím  $f|_{M(i_1, \dots, i_k)}$  definujeme:

$$V(f) = \sum_{k=1}^d \left( \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d} V^{(k)}(f|_{M(i_1, \dots, i_k)}) \right).$$

$V(f)$  je definovaná Hardy-Krauseova variance funkce  $f$ .

Tím jsme připravili dobrý teoretický základ pro další větu:

**Věta 5.2** (Koksman-Hlawka). *Nechť je funkce  $f$  definována na  $[0,1]^d$  taková, že:  $|f| < \infty$ . Označme  $\mu = \int_{[0,1]^d} f(x) dx$ . Je-li  $V(f) < \infty$ , pak:  $\forall x_1, \dots, x_n \in [0,1]^d$  platí:*

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) - \mu \right| \leq V(f) D^*(x_1, \dots, x_n). \quad (5.1)$$

Tento výsledek je sice zajímavý teoreticky, ale prakticky moc použitelný není. Výpočet  $V(f)$  a  $D^*$  může být v praxi mnohem komplikovanější než výpočet samotného integrálu ([2] str. 288-289, kde je také odkaz na důkaz této věty). Využijeme tedy IS založený na základě klasické metody Monte Carlo.

$$IS = \left( \bar{Y} - u_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \bar{Y} + u_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \right). \quad (5.2)$$

$\hat{\sigma}^2$  je odhad  $Var(f(Q)) = \sigma^2$  ( $Q \sim R[0,1]^d$ ) empiricky spočtený z  $f(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

## 5.1 Konstrukce posloupností s nízkou diskrepancí

### 5.1.1 Příklady posloupností

Aby ukázaná teorie nebyla samoúčelná, musíme být schopni takové posloupnosti prakticky zkonstruovat. Proto převezmeme do tohoto textu konstrukce a vlastnosti posloupností z [2] kap. 5.

#### Van der Corputova posloupnost

Tato posloupnost je založená na využití zápisu přirozeného čísla  $k$  v nějaké soustavě o základu  $b$ . Přesněji, nechť  $b \geq 2$  přirozené je základ číselné soustavy. Pro  $k \in \mathbb{N}$  pak máme vyjádření v této soustavě jako:  $k = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(k)b^j$ , kde  $a_j(k) \neq 0$  pouze pro  $j \in J \subset \mathbb{N}_0$ ;  $J$  konečná.

**Definice 5.6** (Van der Corput). *V situaci popsané výše definujme funkci:*

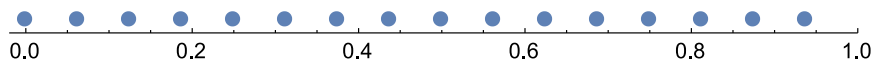
$$\psi_b(k) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j(k)}{b^{j+1}} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(k)b^{-(j+1)},$$

pak definujme Van der Corputovu posloupnost o základu  $b$  jako:  $\{\psi_b(k)\}_{k=0}^{\infty}$ .

Jedná se tedy o nekonečnou posloupnost, ze které budeme používat prvních  $n$  členů. Tedy se jedná o méně efektivní (ve smyslu diskrepance) typ volby posloupnosti. Následuje ilustrativní příklad:

```
ClearAll["Global`*"]
F[k_, d_] := FromDigits[{Reverse[IntegerDigits[k, d]], 0}, d]
Table[F[k, 2], {k, 0, 15}]
Sort[%]
ListPlot[Map[Append[#, 0.1] &, %],
  PlotRange -> {{-0.02, 1}, {0, 0.2}}, AspectRatio -> 1/15,
  Axes -> {True, False}, PlotMarkers -> {Automatic, 5}]
```

```
{0, 1/2, 1/4, 3/4, 1/8, 5/8, 3/8, 7/8, 1/16, 9/16, 5/16, 13/16, 3/16, 11/16, 7/16, 15/16}
{0, 1/16, 1/8, 3/16, 1/4, 5/16, 3/8, 7/16, 1/2, 9/16, 5/8, 11/16, 3/4, 13/16, 7/8, 15/16}
```



Obrázek 5.1: Grafické znázornění Van der Corputovy posloupnosti

#### Halton-Hammersleyho posloupnost

Jedná se o nejjednodušší konstrukci. Konstrukce je založená na poznatku z předchozí sekce.

**Definice 5.7** (Halton). *Mějme libovolnou dimenzi  $d$  a mějme  $b_1, \dots, b_d$  nesoudělná čísla větší než 1. Definujme posloupnost bodů z  $\mathbb{R}^d$ :*

$$x_k = (\psi_{b_1}(k), \dots, \psi_{b_d}(k))^{\top} \quad k = 0, 1, \dots,$$

kde  $\psi$  je funkce z definice 5.6.

Toto je opět méně efektivní způsob volby. Označme  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_d)$ . Pro prvních  $n$  členů takto definované posloupnosti platí:

$$D^*(x_0, \dots, x_{n-1}) \leq C_d(\mathbf{b}) \frac{\log(n)^d}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{\log(n)^{d-1}}{n}\right),$$

kde funkce  $C_d$  nezávisí na  $n$ .

**Definice 5.8** (Hammersley). *Nechť je  $n$  předem známé pevné, pak definujeme*

$$H_n = \left\{ \left( \frac{k}{n}, \psi_{b_1}(k), \dots, \psi_{b_d}(k) \right)^\top ; k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}.$$

Pro Hammersleyho posloupnost (respektive množinu)  $H_n$  platí:

$$D^*(x_0, \dots, x_{n-1}) \leq C_{d-1}(b_1, \dots, b_{d-1}) \frac{\log(n)^{d-1}}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{\log(n)^{d-2}}{n}\right).$$

Z uvedených výrazů pro  $D^*$  je zřejmě patrné, že se skutečně jedná o posloupnosti s nízkou diskrepancí tak, jak jsme definovali. Poslední poznatek, který převezmeme z [2]: Nejlepšího výsledku ve smyslu nejmenšího  $C_d$  dosáhneme, když za  $\mathbf{b}$  zvolíme prvních  $d$  prvočísel. I pro tuto optimální volbu platí fakt, že

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\log(C_d)}{d \log(d)} = 1.$$

Což je pro praktické použití ve vyšších dimenzích  $d$  nepříjemné, neboť z výrazu je patrné, že  $C_d$  pro rostoucí  $d$  roste velmi rychle.

### Faureho posloupnost

Konstrukce této posloupnosti je částečně založena na modifikaci definice 5.6. Mějme opět dimenzi  $d$ . Pro zápis  $k$  zvolíme soustavu o prvočíselném základu  $b \geq d$ . Dostaneme tedy:

$$k = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(k) b^i.$$

Vlastnosti tohoto zápisu jsme již uváděli.

**Definice 5.9** (Faure). *Definujme posloupnost  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  následovně:*

$$x_k = \left( \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j^{(1)}(k)}{b^j}, \dots, \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j^{(d)}(k)}{b^j} \right)^\top,$$

kde máme

$$y_j^{(i)}(k) = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{l}{j-1} (i-1)^{l-j+1} a_l(k) \pmod{b}.$$

Tato posloupnost má nízkou diskrepanci, neboť má vlastnost:

$$D^*(x_1, \dots, x_n) \leq F_d \frac{\log(n)^d}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{\log(n)^{d-1}}{n}\right),$$

kde  $\lim_{d \rightarrow \infty} F_d = 0$ . Což je úplně opačné chování než představuje Halton, Hammersley.



## Sobol' sequence

Odkážeme na sekci 5.2.3 v [2]. A pro praktické použití na help v *Mathematica*, neboť jak říká i [4]:”Program *Mathematica* nabízí možnost generování *Niederreiterových* a *Sobolovských* sekvencí jako jedno z možných nastavení funkce *RandomReal*.” Pro ilustrační ukázkou odkážeme na stejný text str. 43, nebo na programovou ukázkou přiloženou k této práci.

## 5.2 Lattice Rules

Na rozdíl od předchozích postupů, které byly principiálně koncipovány jako použití prvních  $n$  členů nekonečné posloupnosti, bude tato metoda používat přístup, kdy musíme  $n$  mít předem určené.

**Definice 5.10** (Lattice Rule). *Dimenze  $d$ , řádu  $r$ , tvořené pomocí  $n$  bodů definujeme jako množinu bodů:*

$$L(r, n, d) = \left\{ \sum_{i=1}^r \frac{k_i}{n_i} \mathbf{v}_i - \left\lfloor \sum_{i=1}^r \frac{k_i}{n_i} \mathbf{v}_i \right\rfloor; \quad k_i = 0, 1, \dots, n_i - 1, \quad i = 1, \dots, r \right\},$$

kde jsou

- $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$   $d$ -dimenzionální, lineárně nezávislé, celočíselné vektory,
- $n_{i+1}$  dělitelné  $n_i$ . Takové, že  $\prod_{i=1}^r n_i = n$ . Přirozená čísla  $n_i > 1$ ,
- $\forall j = 1, \dots, d: \gcd(n_i, \mathbf{v}_i^{(j)}) = 1$ .

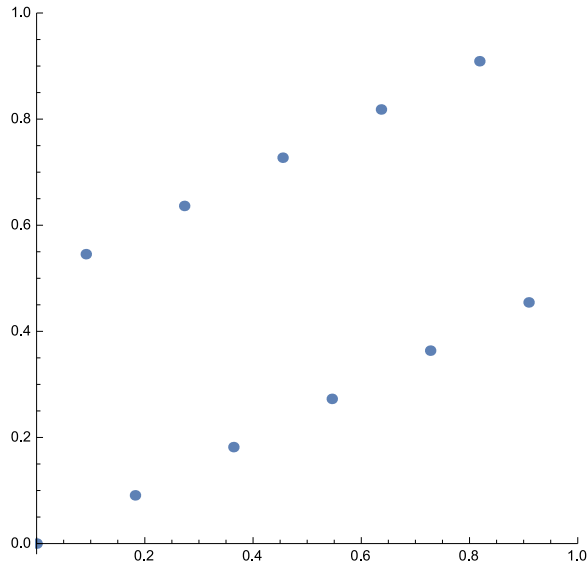
Uvedme pro názornost konkrétní jednodušší situaci pro řád  $r = 1$ :

$$L(1, n, d) = \left\{ \frac{k}{n} \mathbf{v} - \left\lfloor \frac{k}{n} \mathbf{v} \right\rfloor; \quad k_i = 0, 1, \dots, n - 1, \right\}. \quad (5.3)$$

*Příklad* (Korobov). Množinu řádu  $r = 1$  můžeme při volbě  $\mathbf{v} = (1, a, a^2, a^3, \dots, a^{d-1})^\top$  pro nějaké celé  $a$  konstruovat následovně:

```
a = 6; n = 11; d = 2; x = Array[0 # &, d]; L = Array[0 # &, n];
For[k = 0, k <= n - 1, k++,
  y = k;
  u = y/n;
  x[[1]] = u;
  For[i = 1, i <= d - 1, i++,
    y = Mod[a y, n];
    u = y/n;
    x[[i + 1]] = u;
  ];
  L[[k + 1]] = x
]
ListPlot[L, PlotRange -> {{0, 1}, {-0.02, 1}}, AspectRatio -> 1]
```

V příkladu jsme rovnou zvolili konkrétní hodnoty parametrů. Přiložíme graf.



Obrázek 5.2: Korobovova posloupnost

Tento způsob volby posloupnosti odpovídá použití sekvence délky  $n$  kongruenčního generátoru pseudonáhodných čísel s periodou  $n$  a ostatními parametry zvolenými analogicky podle příkladu. Proto není náhodou, že graf uvedený výše je velmi podobný grafu na straně 7 v [4].

*Poznámka.* V *Mathematice* jistě existuje efektivnější způsob zápisu. Například:

```
a = 6; n = 11; d = 2;
Table[y = k; {y/n, Table[y=Mod[a y, n]; y/n, {i,1,d-1}]}//Flatten, {k,0,n-1}];
```

### Chyba metody Lattice Rules

Pro chybu odhadu integrálu s použitím posloupnosti vytvořené postupem výše platí obecná věta 5.2. Specifický přístup, který lze pro tuto metodu použít, popisuje [2] str. 318-319. Tento přístup je založený na teorii Fourierovy transformace. V knize jsou také odvozeny další poznatky týkající se kvality odhadu v závislosti na funkci  $f$  a volbě vektoru  $\mathbf{v}$ .

## 5.3 Známěné QMC

V této části představíme pouze jednu z možností jak převést QMC na známěné QMC (RQMC). Další možnosti najdeme v [2] kapitola 5.4. Nejprve představíme známěné pomocí posunutí.

### Posunutí

Nechť pro pevné  $n$  je deterministicky dána množina bodů s nízkou diskrepancí:

$$P_n = \{x_1, \dots, x_n\} \quad x_i \in [0,1]^d.$$

Pak nejnázornější způsob známěné je náhodné posunutí pomocí rovnoměrného náhodného vektoru  $Q$ . Takové posunutí můžeme definovat následovně:

**Definice 5.11** (Náhodné posunutí). *Nechť je  $Q \sim R([0,1]^d)$  a chceme odhadnout  $\int_{[0,1]^d} f(x)dx$ , pak definujeme odhad metodou RQMC konstruovaný pomocí posunutí:*

$$\bar{Y}(Q) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i + Q - \lfloor x_i + Q \rfloor).$$

Výhoda takové metody spočívá hlavně v následující konstrukci:

Nechť je  $(Q_1, \dots, Q_m) \stackrel{iid}{\sim} Q$ , pak také platí, že  $\bar{Y}(Q_j)$ ,  $j = 1, \dots, m$  jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny. Vezměme nový odhad:

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \bar{Y}(Q_j).$$

Můžeme tedy zkonstruovat interval spolehlivosti:

$$IS = \left( \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \bar{Y}(Q_j) - u_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{m}}, \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \bar{Y}(Q_j) + u_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{m}} \right), \quad (5.4)$$

kde  $\hat{\sigma}^2$  je výběrový rozptyl počítaný z  $(\bar{Y}(Q_1), \dots, \bar{Y}(Q_m))$ .

Výhodou této metody je, že konstrukce takového  $IS$  je teoreticky zcela korektní (na rozdíl od konstrukce intervalu 5.2, o které se toto neodvážím zcela bez obav tvrdit). Tento  $IS$  by tedy měl poskytnout relevantní informaci o chování chyby odhadu.

Touto konstrukcí jsme právě ospravedlnili znáhodnění, které se mohlo na první pohled zdát v rozporu s princem QMC.

## 5.4 Zhodnocení QMC

Došlo použitím metod QMC opravdu k redukcí rozptylu? Na teoretické úrovni jistě. Nerovnost ve větě 5.2, která platí obecně pro jakoukoli posloupnost, spolu s definicí 5.4 říká, že chyba odhadu metodou QMC bude:

$$\mathcal{O} \left( \frac{\log(n)^d}{n} \right).$$

V metodách MC, jsme dosahovali intervalu o přesnosti  $\mathcal{O}(1/\sqrt{n})$ . I přes redukce rozptylu, které jsme popsali, jsme nebyli schopni ovlivnit řád chyby. Provedme porovnání:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n)^d n^{-1}}{1/\sqrt{n}} = \overset{L'H}{\dots} = 0.$$

Můžeme tedy metody QMC obecně považovat za téměř řádově lepší než všechny metody Monte Carlo. Prakticky je však obtížné přesné určení chyby metod QMC.

Závěrem této kapitoly budeme ještě jednou citovat [2]: "The preponderance of the experimental evidence amassed to date point to Sobol' sequence as the most effective quasi-Monte Carlo method for applications in financial engineering."

# Kapitola 6

## Praktické aplikace

Zde ukážeme, jak lze pro aplikace popsaných metod použít program *Mathematica*. Nejprve rozebereme, jaké jsou možnosti volby náhodných generátorů.

Přiložíme také ukázky ocenění evropských a asijských opcí. Pro teorii amerických opcí odkážeme na [2] kapitola 8. Praktickou programovou ukázkou nalezneme například v [4] kapitola 6.4.

### 6.1 Generátory v programu *Mathematica*

Pro praktické použití popsaných metod není nutné programovat vlastní generátory náhodných čísel. Program *Mathematica* nabízí rozsáhlé možnosti generování pseudonáhodných čísel prostřednictvím nastavení `SeedRandom`.

V *Mathematice* jsou předprogramované i generátory náhodných procesů. Bylo by nejspíše efektivnější používat nějaký takový generátor, než se snažit optimalizovat vlastní konstrukci. Pro názornost jsme však v ukázkách raději zvolili metody popsané v kapitole 2.

Následující informace pocházejí z help programu *Mathematica*, konkrétně strana: `tutorial/RandomNumberGeneration#185956823`.

Tabulka 6.1: Možnosti nastavení metody pro `SeedRandom`

"Congruential"	linear congruential generator (low-quality randomness)
"ExtendedCA"	extended cellular automaton generator (default)
"Legacy"	default generators prior to Mathematica 6.0
"MersenneTwister"	Mersenne Twister shift register generator
"MKL"	Intel MKL generator (Intel-based systems)
"ParallelGenerator"	for initializing and seeding generators for parallel computations.
"ParallelMersenneTwister"	set of 1024 Mersenne Twister generators of period $2^{4423-1}$
"Rule30CA"	Wolfram rule 30 generator

Tyto možnosti volby metody dále obsahují možnosti podrobnějšího nastavení. Některé z nich, které jsme použily pro programové ukázky, podrobněji přiblížíme. Všechny simulace budeme provádět s volbou `SeedRandom[36317759]`, aby bylo možné srovnání jednotlivých metod. Zůstane také zachována možnost replikovat výsledky.

## Sobol

Jedná se o možnost, která je zahrnuta pod metodou "MKL". Nastavíme: `SeedRandom[ Method->{"MKL", Method -> {"Sobol", "Dimension"-> d}}]`. Pomocí tohoto nastavení nezískáme generátor pseudonáhodných čísel, ale generátor posloupnosti s nízkou diskrepancí, která je zmíněna v kapitole 5.

Tato volba nemusí na některých počítačích fungovat (viz [4] str. 42). V případě problémů s programovou ukázkou doporučuji tuto volbu odstranit z kódu.

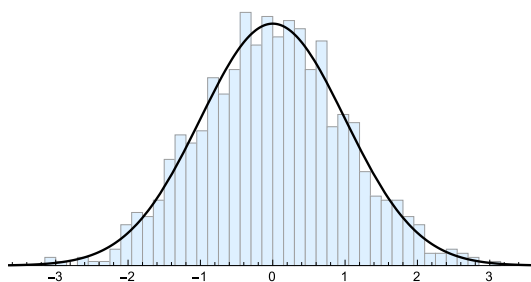
## ExtendedCA

Většina simulací proběhla s použitím tohoto generátoru, protože jsme neprováděli specificky volbu metody a tento generátor je primárně v *Mathematice* zvolen jako default.

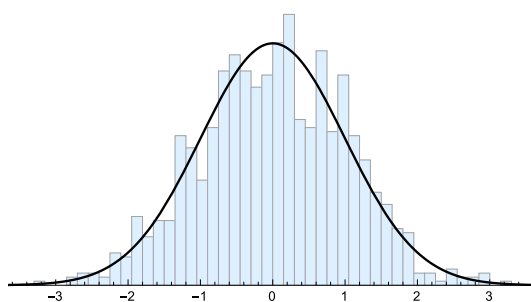
Tento generátor je založen na použití celulárních automatů. Podle údajů z Mathematica help se jedná o generátor, který náhodnost generovaných čísel napodobuje velmi dobře. Doslovně: "The cellular automaton used by "ExtendedCA" produces an extremely high level of randomness."

## Stratifikace $N(0,1)$

Než přistoupíme ke konkrétním příkladům na oceňování opcí, ukážeme, jak můžeme pomocí stratifikace ovlivnit generování náhodného výběru z normálního rozdělení. Následuje histogram stratifikovaného výběru z  $N(0,1)$  o celkovém rozsahu 1000 s volbou  $K = 11$ , oblasti zvolíme podle kvantilů a v každé oblasti provedeme výběr o rozsahu  $\lfloor 1000/11 \rfloor = 90$  (equiprobable stratifikation).



Obrázek 6.1: Histogram náhodného výběru z  $N(0,1)$  s použitím stratifikace



Obrázek 6.2: Histogram náhodného výběru z  $N(0,1)$  bez použití stratifikace

Na druhém obrázku je provedení simulace klasického náhodného výběru. V obou případech volíme stejně `SeedRandom[36317759]`. Z obrázků je dobře patrný hladší výsledek v případě použití stratifikace.

## 6.2 Evropské opce

Jako první provedeme ocenění evropské call opce. Tento problém lze řešit exaktně a *Mathematica* nabízí vestavěnou funkci implementující Black-Scholes.

Máme parametry: doba splatnosti  $T$ , aktuální cena podkladového aktiva  $S(0)$ , realizační cena  $K$ , úroková míra  $r$  a volatilita  $\sigma$ .

Výplatní funkce je  $(S(T) - K)^+$ . Předpokládáme, že  $\{S(t), 0 \leq t \leq T\}$  se chová jako  $GWP(r, \sigma^2)$  s počáteční hodnotou  $S(0)$ .

Cílem je spočítat

$$E[e^{-rT}(S(T) - K)^+],$$

což jde v tomto případě i dobře analyticky (viz kapitola 2.4.1), čehož využijeme pro kontrolu výsledku.

Následuje grafika znázorňující výsledek použití některých dříve popsaných metod. V příloze k této práci je možné nalézt zdrojový kód. V přiloženém souboru standardního formátu programu *Mathematica* (\*.nb) můžeme snadno změnit nastavení parametrů.



Obrázek 6.3: Ocenění evropské call opce

V tomto konkrétním případě se ukázaly všechny metody redukující rozptyl jako účinné. Podle očekávání jsme dosáhli nejlepšího výsledku s použitím Sobol' posloupnosti s nízkou diskrepancí. Interval spolehlivosti pro tuto metodu musíme brát s rezervou, je pouze orientační, viz kapitola 5.

Pro stratifikovaný výběr s volbou 7 oblastí byla zvolena 2. popsaná možnost pro tvorbu IS.

Bohužel je nutné konstatovat, že pro některé extrémní volby parametrů může docházet ke značným chybám v odhadech.

Z náhledu na grafiku pro různé volby parametrů se zdálo možné považovat metodu řídicí proměnné za poměrně stále kvalitní. Řídicí proměnnou byla zvolena cena podkladového aktiva. Naopak stratifikovaný výběr se zdál býti citlivý na volbu počtu oblastí v závislosti na ostatních parametrech.

Žádnou z uvedených domněnek nemohu podložit exaktní simulační studií, jedná se pouze o intuitivní zhodnocení pohledu na výsledky pro různé volby parametrů. Proto zdůrazňuji, že je nutné je brát s rezervou.

*Poznámka.* V příkladech jsme neporovnávali relativní eficienci ani časovou složitost jako takovou, neboť kód pro tvorbu simulací nebyl nijak optimalizován, a proto by takové porovnání nemuselo být vypovídající. Stejná poznámka platí i pro ostatní ukázky.

Pro praktické porovnání některých metod z hlediska časové složitosti odkážeme na text [4].

## 6.3 Asijské opce

Komplikovanější příklad je ocenění asijské aritmetické opce. Takové opce jsou opce na průměrnou cenu podkladového aktiva ve sledovaných časových bodech. Opět budeme uvažovat variantu call opce.

Přesněji řečeno výplatní funkce je  $(\bar{S} - K)^+$ , kde

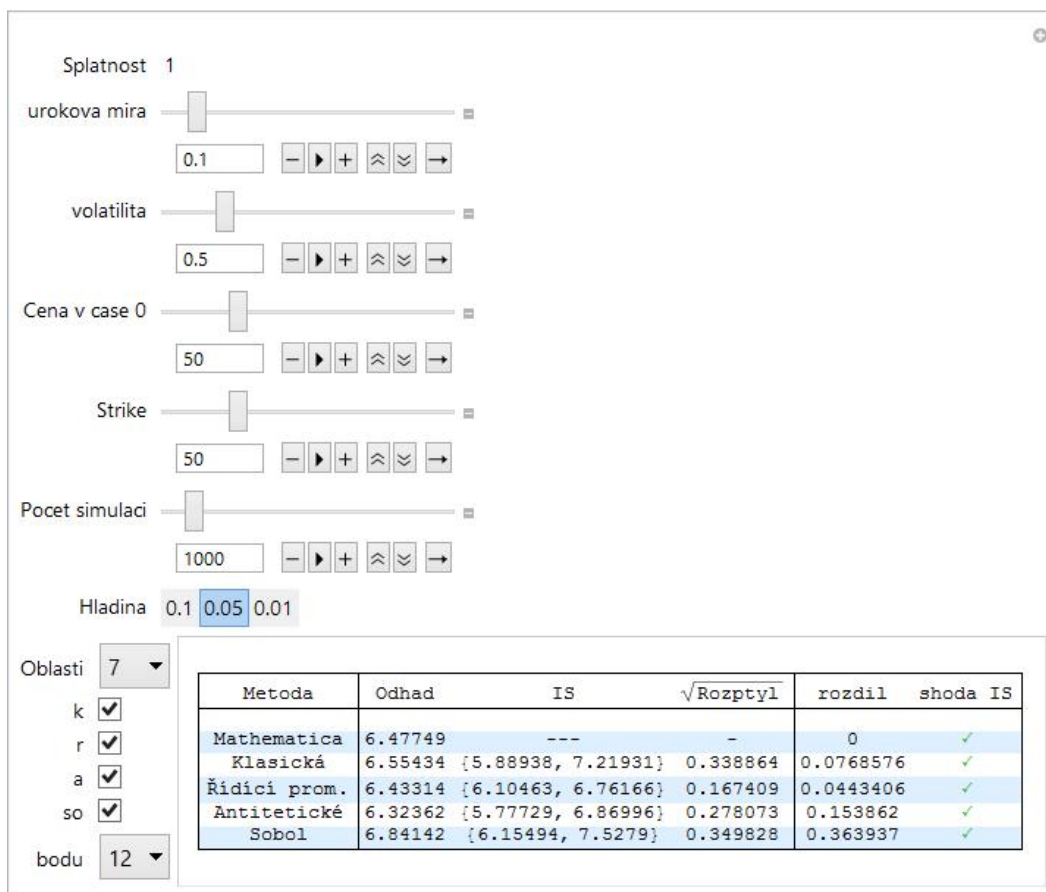
$$\bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^m S(t_i).$$

A opět máme parametry: doba splatnosti  $T = 1$ , aktuální cena podkladového aktiva  $S(0)$ , realizační cena  $K$ , úroková míra  $r$ , volatilita  $\sigma$ , a navíc počet sledovaných časových bodů  $m$ . V našem případě jsme zvolili ekvidistantně  $m = 12$  bodů a do průměru započteme i aktuální cenu.

Opět předpokládám, že  $\{S(t), 0 \leq t \leq T\}$  se chová jako  $GW P(r, \sigma^2)$  s počáteční hodnotou  $S(0)$ . Cílem je spočítat

$$E[e^{-rT}(\bar{S} - K)^+].$$

Spočítat tuto střední hodnotu již nelze triviálně pomocí Black-Scholes vzorce. Modifikujeme tedy implementaci některých metod pro použití v tomto případě.



Obrázek 6.4: Ocenění asijské call opce

Po porovnání výsledků s výsledkem, který obdržíme použitím vestavěné funkce programu *Mathematica*, můžeme říci, že výsledky se pro tuto konkrétní volbu parametrů nijak výrazně neliší.

Vestavěná funkce `FinancialDerivative` je pro asijské opce také založena na použití simulací, bohužel i po použití příkazu `SeedRandom` dává pokaždé lehce jiné výsledky, a proto je porovnání komplikované a ne zcela replikovatelné.

### Alternativa v podobě vestavěných funkcí

V *Mathematice* je vestavěná funkce `FinancialDerivative` která nabízí široké možnosti nastavení. Obecně nejjednodušší způsob pro ocenění finančních derivátů je tedy použití této funkce.

Pro zobrazení odkazu na help použijme: `?FinancialDerivative`. Pro získání úplného přehledu podporovaných derivátů použijme: `FinancialDerivative[]`. Pro tento text byly využity následující funkce:

```
FinancialDerivative[{"European", "Call"},...]
```

```
FinancialDerivative[{"AsianArithmetic", "European", "Call"},...]
```



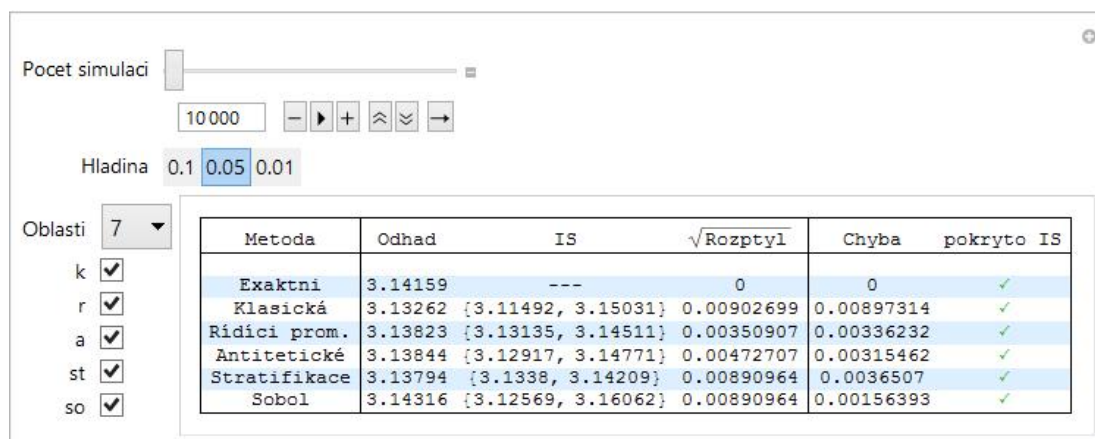
# Kapitola 7

## Závěr

### Aproximace $\pi$

Na závěr se vraťme k úvodnímu motivačnímu příkladu. Převědeme numerickou aproximaci  $\pi$  na úlohu o výpočtu  $\int_0^1 4\sqrt{1-x^2} dx$ . V pravděpodobnostním pojetí chceme odhadnout  $E[4\sqrt{1-U^2}]$ , kde  $U \sim R[0,1]$ .

V následující grafice je možné porovnat výsledky při použití různých metod.



Obrázek 7.1: Aproximace  $\pi$  pomocí Monte Carlo

Je vidět, že všechny použité metody dosáhly lepších výsledků než naivní přístup předvedený v úvodní motivaci.

Přístup k tomuto problému pomocí metod Monte Carlo je sice prakticky použitelný, ale podle [2] existují efektivnější metody pro numerické výpočty jednorozměrných integrálů.

### Shrnutí

Teoreticky by se dalo říci, že metody Monte Carlo jsou využitelné velmi univerzálně. Nicméně v praxi je dobré problémy detailněji analyzovat a podle charakteru problému rozhodnout zda je použití MC vhodné, či nikoliv. U některých aplikací metod redukujících rozptyl odhadu metodou MC (např. výběr podle důležitosti) je hlubší apriorní analýza problému nezbytná.

# Literatura

- [1] ANDĚL, J. (2011). *Základy matematické statistiky*. Matfyzpress, Praha. ISBN 978-80-7378-162-0.
- [2] GLASSERMAN, P. (2004). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer, New York. ISBN 978-0-387-00451-8.
- [3] HURT, J. (1982). *Simulační metody*. SPN, Praha.
- [4] KUBETTA, A. (2009). Simulace ve financích. Bakalářská práce, MFF UK.
- [5] KULICH, M. (2014). NMF301 Statistika pro finanční matematiky. [http://www.karlin.mff.cuni.cz/~pesta/NMF301/statistika\\_fm.pdf](http://www.karlin.mff.cuni.cz/~pesta/NMF301/statistika_fm.pdf). Přehledový větník.
- [6] LACHOUT, P. (2004). *Teorie pravděpodobnosti*. Karolinum, Praha. ISBN 80-246-0872-3.
- [7] MALÝ, J. Učební text pro NMMA203. <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~maly/tmi13a.pdf>. Teorie míry a integrálu.
- [8] PRÁŠKOVÁ, Z. A LACHOUT, P. (2012). *Základy náhodných procesů I*. Matfyzpress, Praha. ISBN 978-80-7378-210-8.

# Seznam obrázků

1.1	Ilustrace odhadu $\pi$ . . . . .	3
4.1	Ilustrace metody LHS pro $d = 2$ . . . . .	27
5.1	Grafické znázornění Van der Corputovy posloupnosti . . . . .	36
5.2	Korobovova posloupnost . . . . .	39
6.1	Histogram náhodného výběru z $N(0,1)$ s použitím stratifikace . . . . .	42
6.2	Histogram náhodného výběru z $N(0,1)$ bez použití stratifikace . . . . .	42
6.3	Ocenění evropské call opce . . . . .	43
6.4	Ocenění asijské call opce . . . . .	45
7.1	Aproximace $\pi$ pomocí Monte Carlo . . . . .	46

# Seznam tabulek

2.1	Možnosti generování náhodných čísel v <i>Mathematice</i> . . . . .	6
6.1	Možnosti nastavení metody pro <code>SeedRandom</code> . . . . .	41