Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Eliška Bucharová

Věty ekvivalentní s pátým Euklidovým postulátem

Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Lukáš Krump, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Matematika zaměřená na vzdělávání

Praha 2015

Na tomto místě bych ráda poděkovala svému vedoucímu bakalářské práce Mgr. Lukáši Krumpovi, Ph.D. za cenné rady a připomínky. Dále svojí rodině a příteli za podporu a trpělivost v průběhu celého studia.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 14. 7. 2015 Eliška Bucharová

Název práce: Věty ekvivalentní s pátým Euklidovým postulátem

Autor: Eliška Bucharová

Katedra / Ústav: Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Lukáš Krump,Ph.D., Matematický ústav UK

Abstrakt: Cílem této práce je rozšířit povědomí o existenci jiných geometriích, které nejsou běžně vyučovány na základních a středních školách. Práce by měla být srozumitelná pro nadanější středoškolské studenty a další zájemce o geometrii a matematiku. Konkrétně je zaměřena na hyperbolickou geometrii v rovině a věty ekvivalentní s pátým Euklidovým postulátem. Práce se snaží pracovat s představivostí čtenářů pro lepší pochopení dané problematiky. Nové poznatky jsou demonstrovány na vybraných modelech hyperbolické geometrie. Tento text může posloužit k uvedení studentů do problematiky předmětu neeuklidovská geometrie na vysokých školách.

Klíčová slova: axiomatika geometrie, pátý Euklidův postulát, modely neeuklidovské geometrie

Title: Theorems equivalent with the fifth Euclid's axiom

Author: Eliška Bucharová

Department: Mathematical Institute of Charles University

Supervisor: Mgr. Lukáš Krump,Ph.D., Mathematical Institute of Charles University

Abstract: The aim of this work is to increase awareness about the existence of another geometries which are not taught at secondary and high schools in common. The work should be understandable to talented high school students and others, who are interested in geometry and mathematics. Specifically it is focused on hyperbolic geometry in the plane and theorems equivalent with the fifth Euclid´s axiom. The thesis tries to work with the imagination of readers to understand better the issue. The new knowledge are illustrated on selected models of hyperbolic geometry. This text can help to introduce students to the subject of non-euclidian geometry at universities.

Keywords: axiomatics of geometry, fifth Euclid's axiom, models of the non-euclidian geometry

Obsah

Úvod

V této práci bylo mým cílem přiblížit žákům středních škol geometrii, která by vznikla, kdyby neplatil pátý Euklidův axiom. Pro zjednodušení zůstaneme převážně v rovině. Práce je členěna do několika částí. V první části má čtenář možnost nahlédnout, jakými způsoby by se dala geometrie vybudovat, pokud bychom měli vždy dané nějaké předpoklady, které by v ní měly platit. Dále jsou zde rozlišeny situace, kdy platí respektive neplatí pátý axiom. V druhé části je stručné nahlédnutí do historie neeuklidovské geometrie, které je zaměřeno na její objevitele. Případný zájemce si může dohledat v uvedené literatuře i období, které tomuto předcházelo. Jedná se hlavně o dobu, kdy se matematici pokoušeli dokázat nebo vyvrátit platnost pátého axiomu. V třetí části této práce jsou představeny modely neeuklidovské geometrie. Jsou zde uvedené vztahy mezi nimi a dva jsou částečně rozebrány. Opět zde jde spíše o vybudování představivosti čtenáře k dané problematice než precizní vysvětlení všech pojmů a matematických vztahů. V následující části jsou uvedeny věty ekvivalentní s pátým Euklidovým axiomem. Tyto věty jsou s důkazy a v důsledcích je uvedeno, jak by situace vypadala, kdyby naopak pátý axiom neplatil.

1 Budování geometrie

Existuje několik možností, jak nahlížet na geometrii. První z možností je vycházet z poznatků a vlastních zkušeností z běžného života. Touto cestou ovšem často mohou zaniknout souvislosti mezi poznatky a je snadné dostat se pouze k popisu a vnímání faktů. Tato metoda byla bohužel v minulosti často používána při výuce geometrie.

Další možností je geometrie vystavěná na geometrických pojmech a ne jen představách. Již dříve se mnoho matematiků pokoušelo o definování pojmů, na nichž by později celou geometrii vystavěli. Známým příkladem je Euklidovo dílo Stoicheia (v překladu Základy) ze 3. - 4. st.př.n.l. obsahující 13 svazků. Toto dílo bylo v historii prvním pokusem uceleně podat matematiku vystavěnou axiomaticky. To znamená pomocí axiomů od nichž se odvozují další vlastnosti. V prvním svazku se dozvídáme, že například: „Bod je to, co nemá části. Čára je délka bez šířky. Plocha je to, co má délku a šířku.“[1] Tato kniha nebyla do konce předminulého století překonána. K posunu v definování pojmů došlo až s Lobačevského objevem neeuklidovské geometrie. Postupně se došlo k tomu, že je potřeba definovat základní pojmy i se vztahy mezi nimi. Je dobré si uvědomit, že axiomatické vybudování geometrie není jediná cesta, která existuje. Pro zajímavost lze uvést, že jiný přístup zvolili matematici, kteří se zabývali otázkou logické výstavby geometrie.

Zůstaneme u axiomatické výstavby. Nabízí se otázka, co zvolit za základní pojmy a axiomy. Budeme požadovat, aby axiomy byly nezávislé, bezesporné a dostatečně bohaté pro danou oblast. Nezávislost nám zaručí, že žádný axiom nepůjde získat dedukcí z těch předchozích, čímž se sníží množství axiomů. Bezespornost je sice nesnadné dokázat, ale díky ní si žádné dva axiomy nebudou navzájem protiřečit. A dostatečná bohatost nám poskytne kompletní objasnění problému. Z těchto axiomů lze odvodit další věty a tvrzení s důkazy. Pokud budeme geometrii budovat tímto přístupem, pravděpodobně se nám podaří získat exaktní (nevyvratitelnou), byť trochu zdlouhavější teorii.

1.1 Abstraktní geometrie

Jako příklad bych uvedla tzv. abstraktní geometrii. Za základní pojmy zvolme bod, přímku a incidenci.[1] Dále vezmeme tři základní planimetrické axiomy: „1) Každými dvěma různými body prochází jediná přímka (tj. existuje jediná přímka, na níž dané dva body leží). 2) Na každé přímce leží alespoň dva navzájem různé body. 3) Existuje aspoň jedna trojice bodů, které neleží na žádné přímce.“ viz [2] Z nich lze odvodit geometrii, ve které přímo nedáváme slovům bod, přímka a bod ležící na přímce konkrétní význam. Potom tuto geometrii nazveme abstraktní.

1.2 Absolutní geometrie

V další části se zaměříme na geometrii opět vystavenou axiomaticky, ale prozatím zůstaneme u obecnějšího modelu v porovnání s geometrií vyučovanou na školách. Axiomy rozdělíme do čtyř skupin podle toho, jaké vztahy jsou v nich popisovány. Základní pojmy, za které budeme považovat bod, přímku, rovinu a být incidentní, budeme brát pouze jako zástupné symboly.

První skupina obsahuje axiomy incidence. Uveďme pouze pár příkladů axiomů, ostatní je možné dohledat v knize [3] na straně 43. “J1: Vztah incidence je reflexivní a symetrický. J3: Je-li přímka a incidentní s body A, B a body A, B jsou incidentní s rovinou α, pak je také přímka a incidentní s rovinou α. J6: Jsou-li roviny α, β takové, že existuje bod A incidentní s α i β, pak existuje ještě alespoň jeden bod B různý od A, který je také incidentní s α i β.“ Lepší náhled na situaci nám poskytnou konkrétní modely. V prvním modelu (označme ho M1[2]) budeme základní pojmy chápat běžným způsobem z geometrie. Je možné vidět, že axiomy incidence jsou splněny. Jiný model (označme ho M2) by tvořila množina čtyř prvků $\{U, V, W, X\}$. Její jednoprvkové podmnožiny jsou body, dvouprvkové jsou přímky a tříprvkové jsou roviny. Incidenci zde bereme jako množinovou inkluzi.[3]

1 Pojem incidence lze názorně pochopit na vztahu přímky a bodu. Je-li přímka incidentní s bodem, znamená to, že přímka daný bod obsahuje nebo daným bodem prochází, příp. bod leží na přímce a podobně.

2 Označení zavádíme, abychom se na tyto modely mohli později odkazovat.

3 Inkluze vyjadřuje vztah být podmnožinou.

Druhou skupinu tvoří axiomy rozmístění. „R1: Jsou-li A, B, C tři různé kolineární body, pro které bod B leží mezi body A, C, pak také bod B leží mezi body C, A. R2: Jsou-li A, B dva různé body, pak existuje alespoň jeden bod C na přímce $\overline{AB}$, který leží mezi body A, B. R3: Ze tří kolineárních bodů leží nejvýše jeden mezi ostatními dvěma. R4: Budiž dán trojúhelník ABC a nechť přímka a je incidentní s rovinou ABC, přičemž a není incidentní s žádným z vrcholů trojúhelníka ABC. Je-li a incidentní s bodem úsečky AB, pak je incidentní ještě buď s bodem úsečky BC nebo AC." [3] Vlastnosti z axiomů R1 až R4 si lze zavést na modelu M1. Bohužel na modelu M2 to nelze.

Třetí a čtvrtou skupinu je složitější rozebrat do podrobna a pro naše účely to není nezbytné, proto to zde záměrně nebudeme dopodrobna uvádět. Přesto si o ní alespoň pár informací řekneme. Ve třetí skupině nacházíme axiomy shodnosti. Ty nám říkají, že shodnost je tranzitivní a reflexivní. Je zde zmíněna shodnost úseček, úhlů mezi polopřímkami nebo v trojúhelníku. V případě zájmu je možné přesné znění dohledat v knize [3] na straně 60. Poslední skupina ukrývá axiomy spojitosti. Z nich plyne například věta, že součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je nejvýše roven dvěma pravým úhlům.

Pokud jsou dodrženy tyto čtyři skupiny axiomů, potom mluvíme o tzv. absolutní geometrii. Doposud jsme se však nezabývali vzájemným vztahem dvou přímek. To napravíme v následující podkapitole.

1.3 Vzájemná poloha dvou přímek v rovině

Začneme definicí. Dvě přímky nazveme různoběžnými, pokud budou mít společný právě jeden bod (jinými slovy se budou protínat). V opačném případě je označíme jako přímky rovnoběžné. Vezmeme přímku a bod na ní neležící. Zatím nevíme, zda je daným bodem k dané přímce možno vést jednu nebo více rovnoběžek. Tato otázka nás opět vrací k Euklidovi a jeho Základům. Objevuje se v nich tzv. pět postulátů geometrie.[4]

„1. Dva body lze vždy spojit právě jednou přímkou.

4 Dané postuláty jsou uvedeny ve zjednodušené formě.

2. Každou část přímky lze neomezeně prodloužit.

3. Z libovolného středu pro libovolný poloměr lze vždy sestrojit kružnici.

4. Všechny pravé úhly jsou si rovny.

5. K dané přímce lze bodem na ní neležícím vést právě jednu rovnoběžku.“[1]

Právě poslední axiom je klíčový. Pokud jsou všechny axiomy splněny, pak mluvíme o euklidovské geometrii[5]. Významní matematici se po celá století pokoušeli tento pátý axiom dokázat nebo vyvrátit. Příklady ekvivalentních vyjádření pátého axiomu si uvedeme ve čtvrté kapitole. Než opustíme Euklidovy axiomy, stojí za zamyšlení situace, ve které pátý postulát platit nebude. Dostaneme zcela nové a neobvyklé možnosti. Všechny geometrie, v nichž tento axiom neplatí, budeme nazývat neeuklidovské geometrie. K jejich bližším vlastnostem se také dostaneme později.

5 Euklidovská geometrie je běžně vyučována na základních a středních školách. Často se však její označení studentům zamlčí.

2 Malá exkurze do historie (Objevitelé neeuklidovské geometrie)

V této části bych se ráda zmínila o třech významných objevitelích neeuklidovské geometrie. Tito tři matematici došli ke svým závěrům nezávisle na sobě. Bohužel ani to neznamenalo, že by jejich objev byl brzy přijat společností nebo že by jim to přineslo nějaká privilegia. Více je uvedeno v následujícím textu. Případné dostudování doby předcházející těmto matematikům přenechávám na čtenáři.

2.1 Johann Carl Friedrich Gauss

Byl slavný německý matematik a fyzik. Narodil se v Brunšviku roku 1777 jako syn chudých rodičů. Studoval gymnázium a později i na přání matky a za podpory Karla III. technickou univerzitu v Brunšviku, později univerzitu v Göttingenu. V roce 1807 se stal profesorem astronomie a ředitelem hvězdárny v Göttingenu. V průběhu svého života se dvakrát oženil a měl šest dětí. (Jeho osobní život byl provázen smutnými událostmi.) Gauss byl všestranně zaměřený člověk. V dnešní době známe mnoho jeho významných objevů a počinů hlavně mimo neeuklidovskou geometrii. Jako příklad bych uvedla normální pravděpodobnostní rozdělení (tzv. Gaussova křivka viz obrázek 1). A nyní k neeuklidovské geometrii. Již na univerzitě si povšiml nedostatků u pokusů dokázat pátý Euklidův postulát. Sám nebral jeho platnost jako nutnost, protože znal spisy Saccheriho a Lamberta[6]. V roce 1816 anonymně zveřejnil v časopise *Göttingische gelehrte Anzeigen* recenze dvou důkazů pátého postulátu. Z neeuklidovské geometrie nikdy nic nepublikoval, protože se bál nepochopení v době, kdy byla uznávána euklidovská geometrie jako jedinečná. (Nasvědčovalo tomu i všeobecně uznávané kantovské pojetí prostoru.) Jako projev uznání za jeho činy po něm byla pojmenována CGS jednotka (předchůdce SI jednotek) matematické indukce Gauss. V letech 1989 – 2001 byl jeho

6 Matematici z období před Gaussem. Více informací lze dohledat například v knize [3] stranách 147 - 177.

portrét a křivka na desetimarkové bankovce. Jeho jméno nese jedna z fakult brunšvické univerzity.

Obr. 1: Desetimarková bankovka [5]

2.2 Jan Bolyai

Byl maďarský matematik. Nedochoval se nám žádný jeho autentický portrét. Žil v letech 1802 až 1860 v Uherském království. Již na gymnáziu byl nadaný na matematiku, a proto ho jeho otec chtěl poslat studovat na univerzitu k J. C. F. Gaussovi. Bohužel došlo k nedorozumění, a tak nakonec studoval vojenskou inženýrskou akademii ve Vídni. Kvůli zdravotnímu stavu odchází po deseti letech vojenské služby do penze. Byl to polyglot (hovořil devíti jazyky). Za jeho života zůstávaly jeho práce nepochopené a nedoceněné, nikdy se nestal profesionálním matematikem a v pozdější fázi svého života ani nepublikoval. Ve svých úvahách se věnoval problematice pátého postulátu. Nejprve se snažil dokázat, že ekvidistanta k přímce je opět přímka. Později přišel s myšlenkou nezávislosti pátého postulátu na ostatních. Jeho negace dala vzniku novým geometriím. Pracoval v izolaci, neznal Lobačevského ani jeho práci. Jeho jediná publikovaná práce vyšla jako dodatek k otcově učebnici matematiky v roce 1832. Zabýval se i jinými odvětvími matematiky. Například vyvinul geometrickou interpretaci komplexních čísel jako uspořádaných dvojic reálných čísel. Jako projev uznání je po něm pojmenována největší rumunská univerzita Babes - Bolyai nebo kráter na Měsíci.

2.3 Nikolaj Ivanovič Lobačevskij

Tento matematik byl studentem na Kazaňské univerzitě. Postupem času tam začal i vyučovat a věnovat se různým dalším činnostem (například založení knihovny, byl děkanem fyzikálně-matematické fakulty apod.). V matematice měl široké znalosti. Roku 1823 napsal rukopis *Geometrija*, který měl původně sloužit jako učebnice. Bohužel byl shledán příliš pokročilým a ani jeho výstavba se nepodobala klasickému učebnímu textu. Zajímavé je jeho členění. V prvních pěti kapitolách je soustředěna tzv. absolutní geometrie[7]. Pokud jde o neeuklidovskou geometrii, tak se nejprve pokoušel o dokázání teorie rovnoběžek. Až později vydává spis *O načalach geometrii,* v němž předkládá čtenářům vybudování nové geometrie. Tento spis nebyl v této době pochopen. Nezalekl se však neúspěchu a rozvíjel tuto geometrii dál. V průběhu svého života publikoval další spisy v různých jazycích a snažil se najít zastání aspoň mimo Rusko. Bohužel v jeho době zůstává jeho objev nepochopen a jeho díla nedoceněna. Jeho objevu se dostalo uznání až o několik desítek let později díky prácím Beltramiho, Kleina a dalších. Díky Riemanovi, Minkovskému a Einsteinovi dnes již víme, že Lobačevského geometrie, kterou také nazýváme hyperbolickou, je stejně vhodná k popisu reálné geometrie vesmíru jako geometrie euklidovská.

Obr. 2: Známka s N. I. Lobačevskim [6]

7 Absolutní geometrie nezávisí na pátém postulátu o rovnoběžkách.

3 Modely hyperbolické geometrie v rovině

V této kapitole se omezíme na hyperbolickou geometrii v rovině. Přiblížíme si ji na dvou konkrétních modelech, a protože funguje trošku jinak než jsme u euklidovské geometrie zvyklí, může její namodelování působit uměle. Uvedeme také jaké vztahy fungují mezi jednotlivými modely. Nepůjde nám o podání kompletního matematického odůvodnění u všech jevů, ale spíše o vytvoření představy o tom, jak se v dané geometrii zobrazují některé rovinné útvary.

3.1 Poincarého polorovinný model

Pohybujeme se v E^2 (euklidovské rovině). Máme pevně danou E-přímku (euklidovskou přímku) h^*, která rovinu rozděluje na dvě poloroviny λ („nad" přímkou h^*) a μ („pod" přímkou h^*).

Poznámka: V dalším textu budeme označením E- chápat euklidovskou variantu daného objektu tak, jak jsme zvyklí ze střední školy, a L- vnímat jako Lobačevského variantu daného objektu, jež bude pro lepší pochopení upřesněna případně doplněna obrázkem.

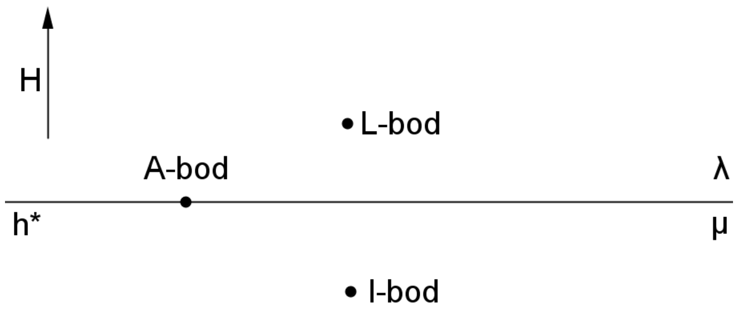
Dále existuje nevlastní bod[8] H, který je určen jako kolmý směr na h^* a zároveň nenáleží E^2[9]. Souhrnně budeme označovat sjednocení H a h^* jako h.

Obr. 3: Poincarého polorovinný model

8 Nevlastním bodem rozumíme směr.

9 Nevlastní bod patří až do tzv. rozšířené euklidovské roviny (právě o nevlastní body).

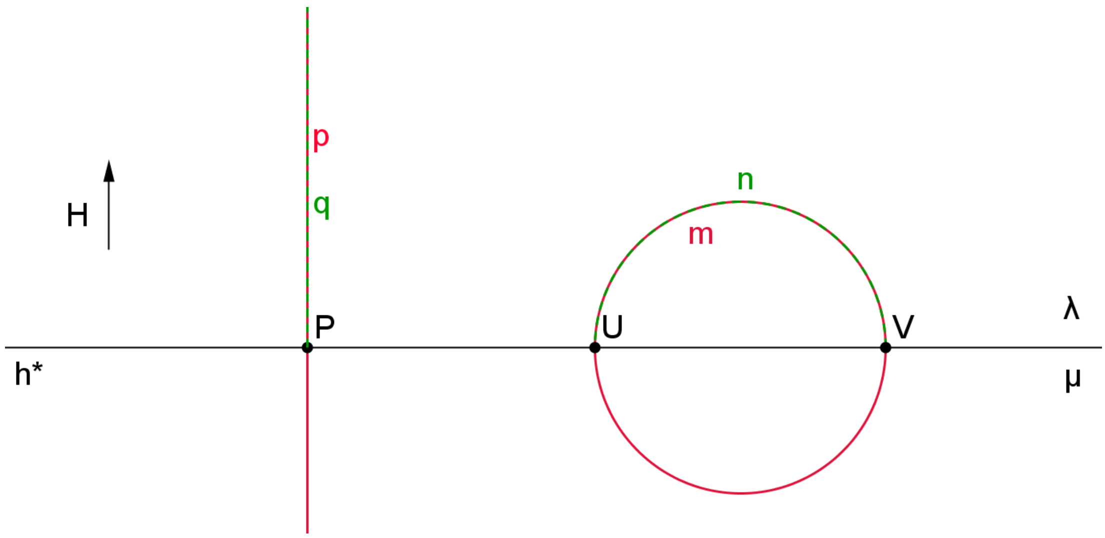
Budeme rozlišovat 3 druhy bodů. Tzv. L-bod (Lobačevského bod) bude náležet polorovině λ, A-bod (absolutní bod) ležící na h a I-bod (ideální bod) vyskytující se v polorovině μ.



Obr. 4: Druhy bodů

Tímto rozdělením bodů získáme nové pojmy: 1) Lobačevského rovina - pod tímto pojmem budeme rozumět množinu všech L-bodů, 2) absolut L-roviny λ - množina všech A-bodů, 3) ideál L-roviny λ - množina všech I-bodů.

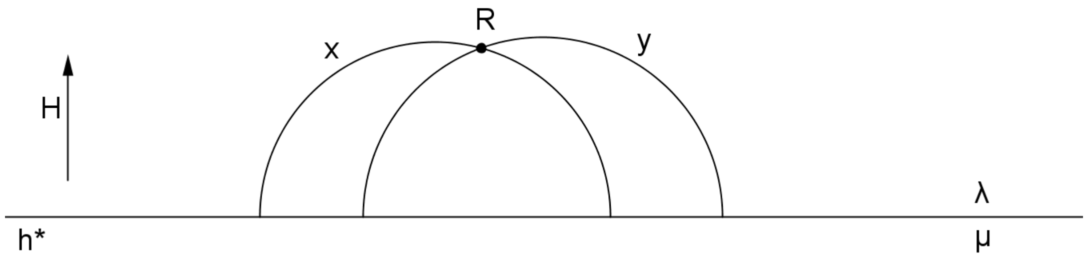
Definice: Nechť p je E-kružnice se středem na h^*, potom množinu L-bodů $\lambda \cap p$ nazveme L-přímkou prvního druhu. Za L-přímku druhého druhu budeme považovat část E-přímky kolmé na h^* nacházející se v Lobačevského rovině.



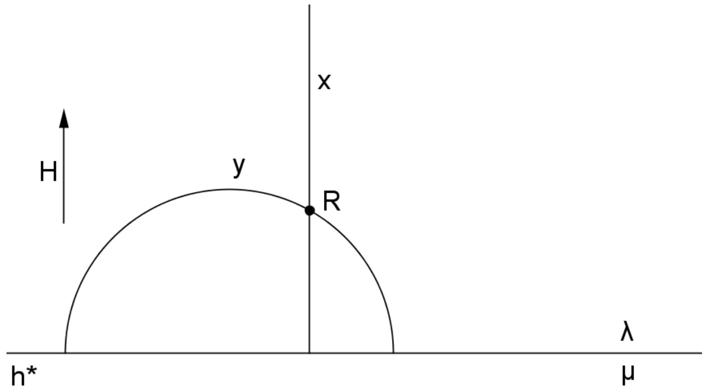
Obr. 5: L-přímka 1. a 2. druhu

Poznámka: Na obrázku 5 přímka p znázorňuje E-přímku, q je L-přímka 2. druhu obsahující absolutní body H, P. Kružnice m je E-kružnice, n je L-přímka 1. druhu obsahující absolutní body U, V.

Definice: Dvě různé L-přímky *x*, *y* nazýváme: 1) různoběžné právě tehdy, když jejich průnik je neprázdný (existuje společný L-bod).

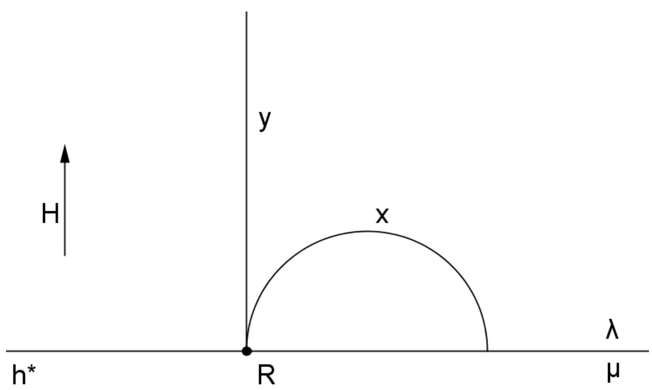


Obr. 6: Různoběžné L-přímky 1. druhu

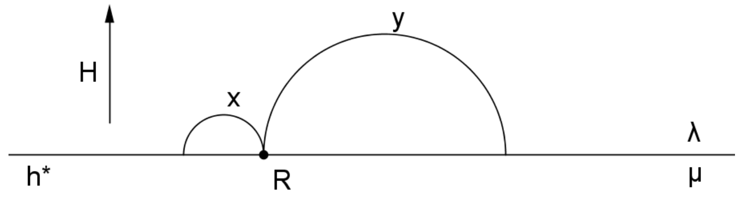


Obr. 7: Různoběžné L-přímky 1. a 2. druhu

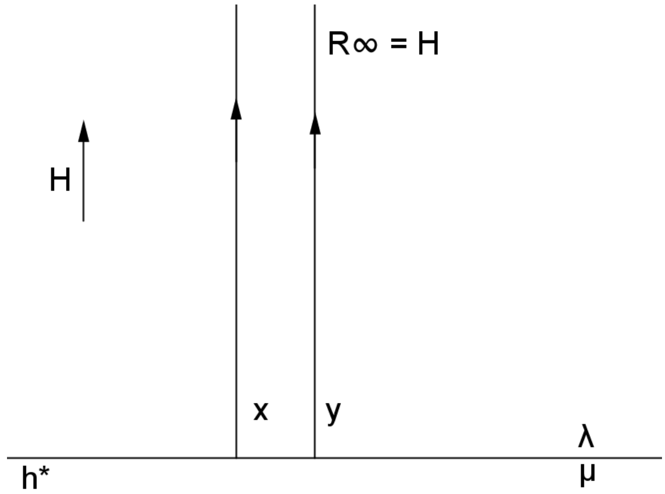
2) rovnoběžné právě tehdy, když mají společný absolutní bod



Obr. 8: Rovnoběžné L-přímky 1. a 2. druhu

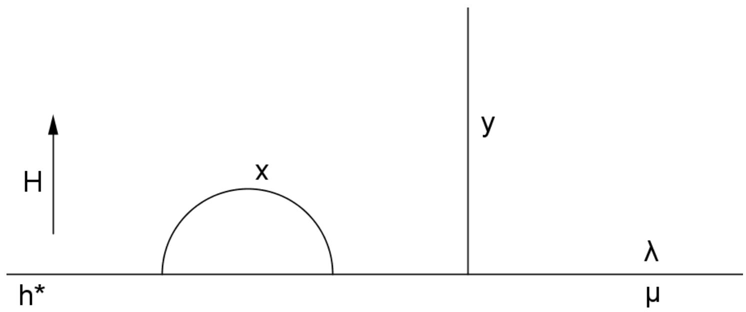


Obr. 9: Rovnoběžné L-přímky 1. druhu

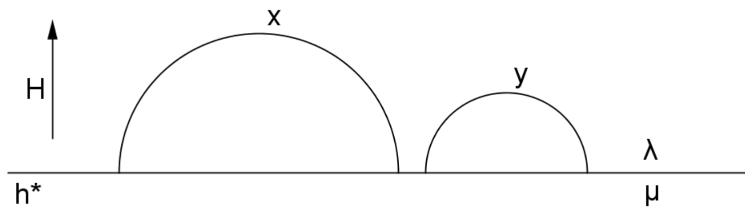


Obr. 10: Rovnoběžné L-přímky 2. druhu

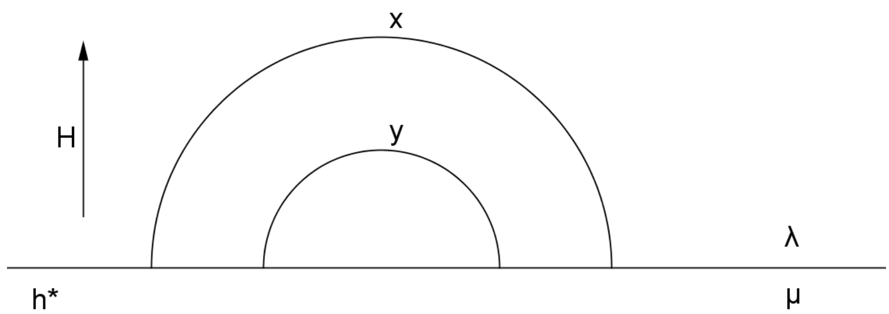
3) mimoběžné právě tehdy, když je jejich průnik prázdný (neexistuje společný ani L-bod ani A-bod)



Obr. 11: Mimoběžné L-přímky 1. a 2. druhu

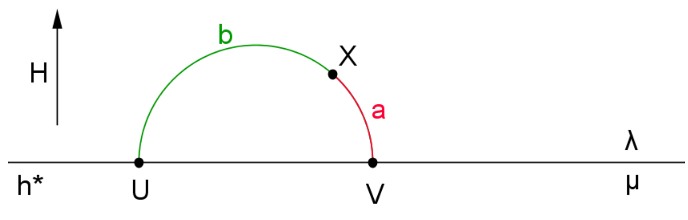


Obr. 12: Mimoběžné L-přímky 1. druhu („vně“)

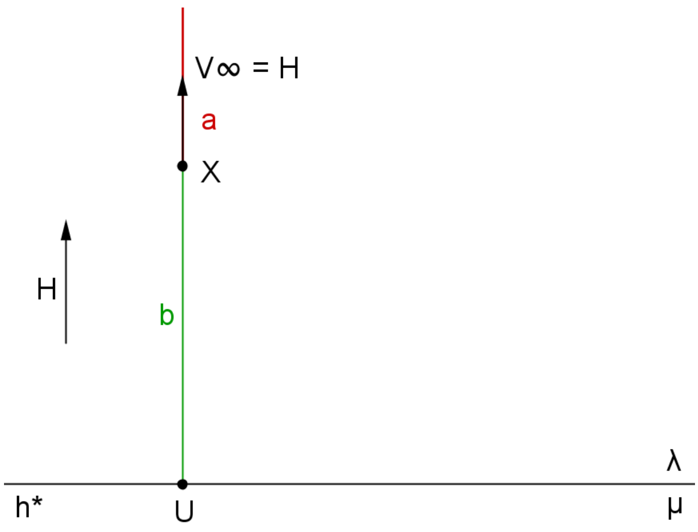


Obr. 13: Mimoběžné L-přímky 1. druhu („uvnitř“)

Definice: L-polopřímkou nazveme část L-přímky ohraničenou L-bodem *X* ležícím na L-přímce a nějakým jejím absolutním bodem.

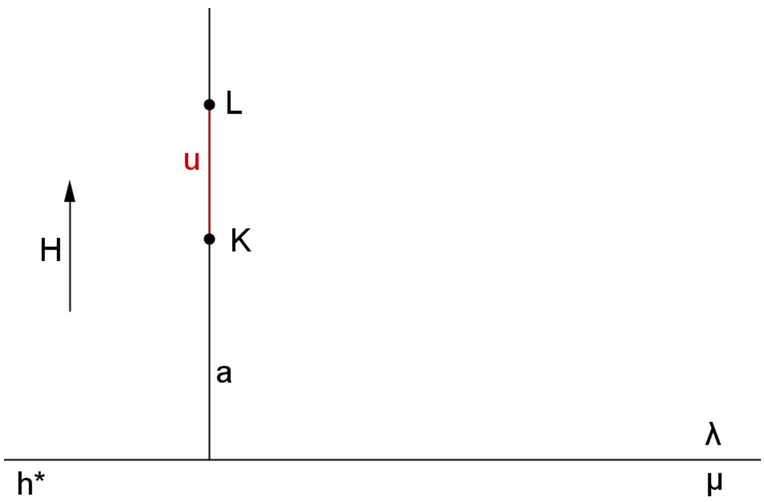


Obr. 14: L-polopřímky na L-přímce 1. druhu

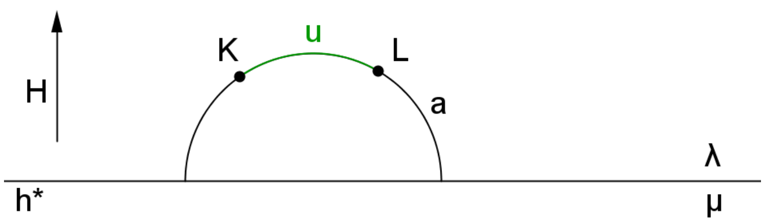


Obr. 15: L-polopřímky na L-přímce 2. druhu

Definice: L-úsečkou budeme rozumět část L-přímky ohraničenou dvěma L-body na ní ležícími.

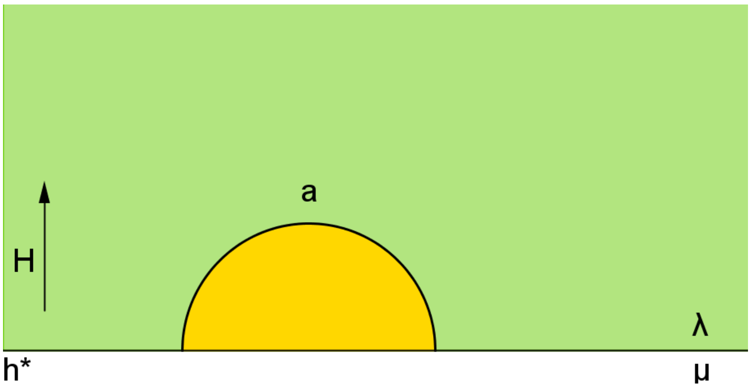


Obr. 16: L-úsečka na L-přímce 2. druhu



Obr. 17: L-úsečka na L-přímce 1. druhu

Definice: Je dána L-rovina. L-přímka a tuto L-rovinu rozděluje na dvě L-poloroviny.



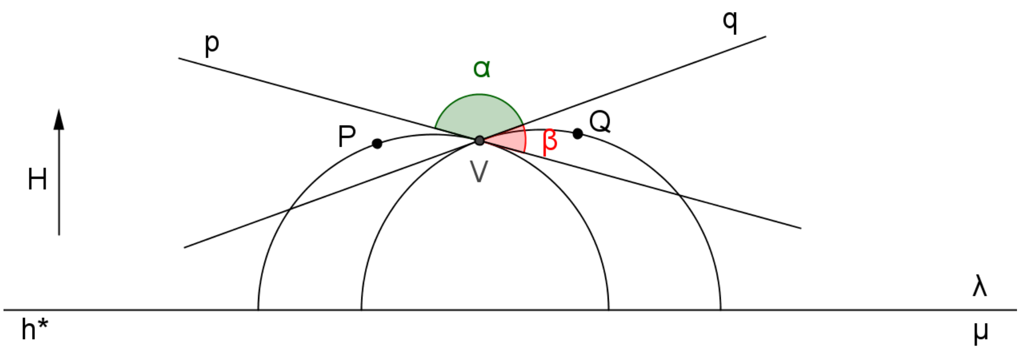
Obr. 18: L-poloroviny dělené L-přímkou 1. druhu

Obr. 19: L-poloroviny dělené L-přímkou 2. druhu

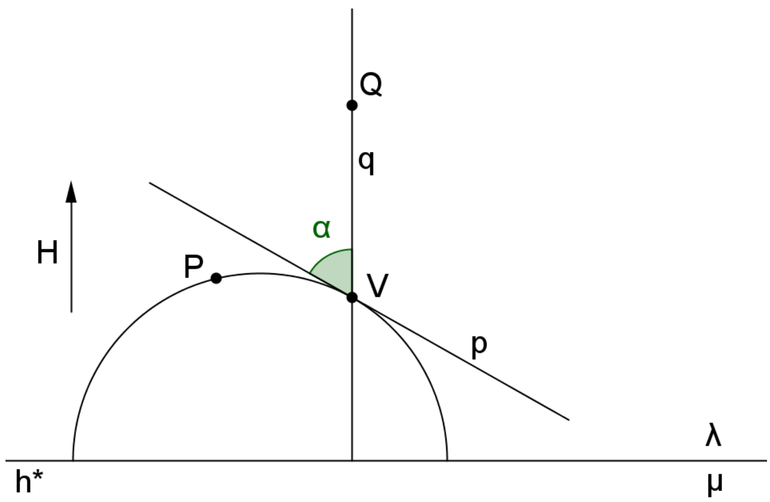
Definice: L-úhel vznikne jako průnik dvou L-polorovin.

Definice: L-míra L-úhlu je definována jako euklidovská míra úhlu mezi tečnami ve vrcholu úhlu.

Definice: Míru úhlu mezi různoběžnými nebo totožnými L-přímkami určujeme jako L-míru L-úhlu jimi sevřeného. Vždy vybíráme menší z úhlů. U rovnoběžných L-přímek bereme L-míru rovnou 0. Pro mimoběžné L-přímky se úhel neurčuje. L-přímka 2. druhu splývá se svojí tečnou v libovolném bodě.



Obr. 20: Určování míry úhlu mezi L-přímkami 1. druhu



Obr. 21: Určování míry úhlu mezi L-přímkami 1. a 2. druhu

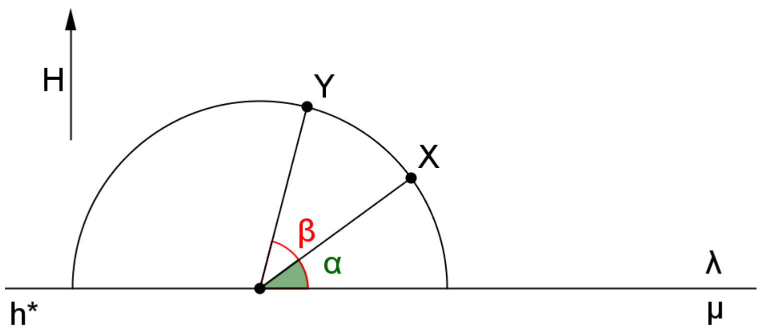
Definice: Každé dvojici L-bodů X, Y ležící na L-přímce 1. druhu přiřadíme číslo

$$\delta_{XY} = k \,.\, \log_{10}\left(\frac{\left(\tan\frac{1}{2}\beta\right)}{\left(\tan\frac{1}{2}\alpha\right)}\right)$$, kde úhly $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ mají obvyklý euklidovský význam a $k > 0$ je konstanta (viz obrázek 22).

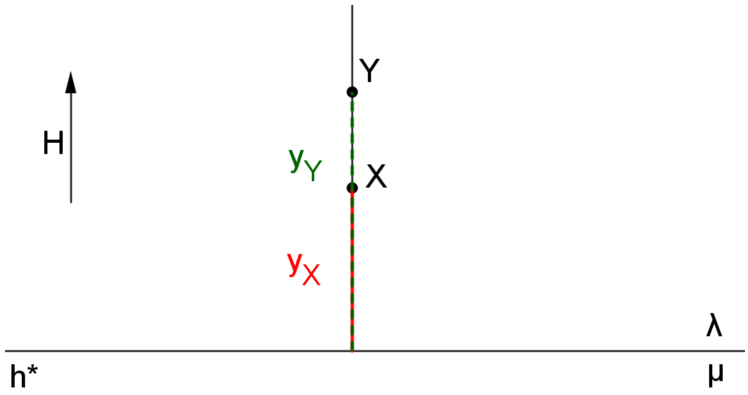
Každé dvojici L-bodů X, Y ležící na L-přímce 2. druhu přiřadíme číslo

$$\delta_{XY} = k \,.\, \log_{10}\left(\frac{y_Y}{y_X}\right)$$, kde y_X, y_Y jsou euklidovské y-ové souřadnice L-bodů X, Y a $k > 0$ je konstanta (viz obrázek 23). Číslo δ_{XY} nazveme vzdáleností L-bodů X a Y.

Znaménko logaritmu určuje pouze stejnou nebo opačnou orientaci L-úsečky *XY* vzhledem k L-přímce, na které leží. Konstanta *k* nám umožňuje zvolit libovolnou úsečku za jednotku měření.



Obr. 22: Vzdálenost L-bodů na L-přímce 1. druhu



Obr. 23: Vzdálenost L-bodů na L-přímce 2. druhu

Poznámka: Z této definice lze odvodit následující konstrukce. Je to složitější, a proto si na následujících obrázcích ukážeme, jak najdeme L-úsečku stejné velikosti, bez dalších vysvětlení.

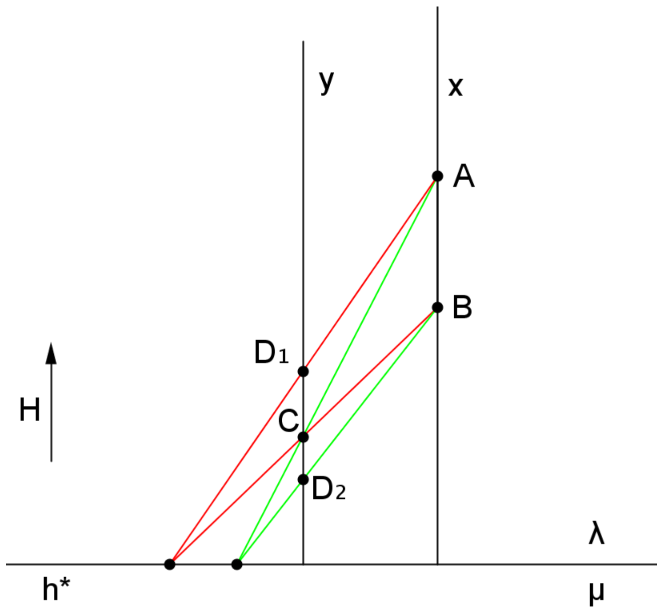
1) Máme dány L-přímky *x*, *y* 1. druhu. Na L-přímce *x* je úsečka *AB* pevné velikosti a na L-přímce *y* bod *C*. Naším úkolem je najít bod *D* na L-přímce *y* takový, aby L-velikost *CD* byla stejná jako L-velikost *AB*.

Postup: Nejprve spojíme *AC* a *BC*.

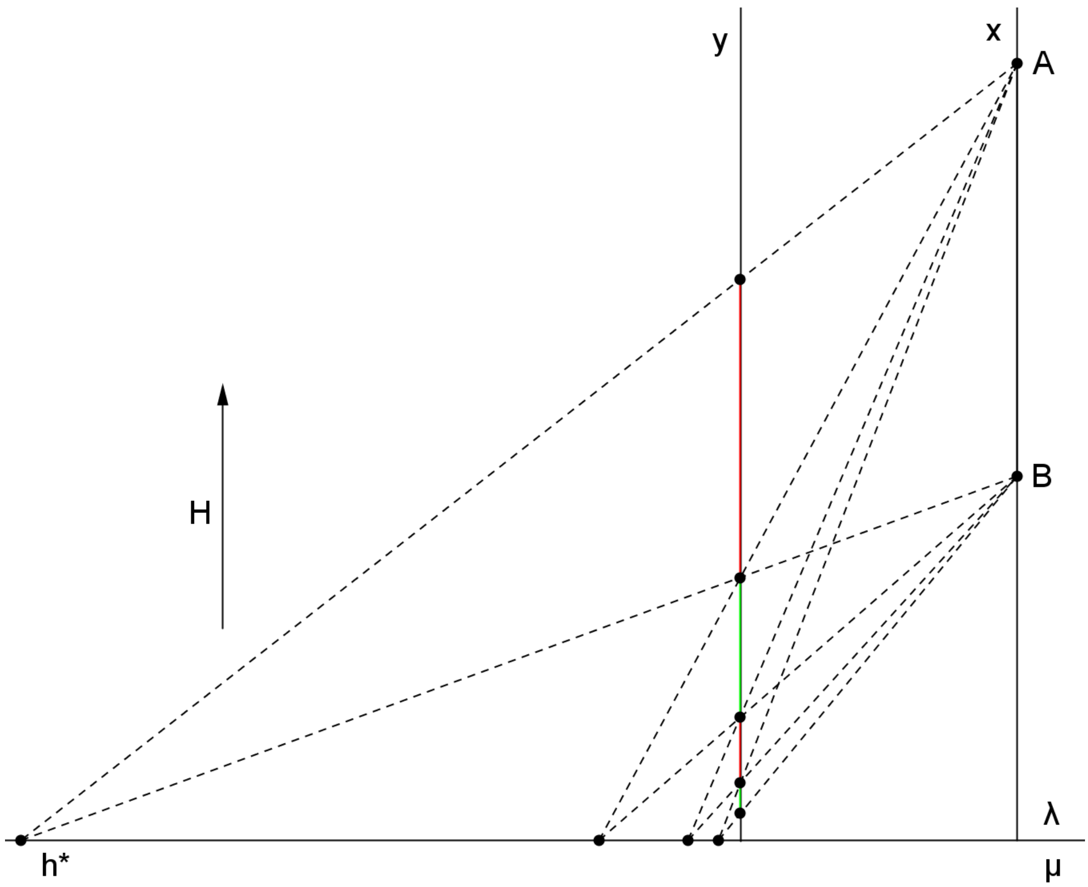
Poté najdeme průsečíky těchto spojnic s *h**.

Tyto průsečíky spojíme s *A*, *B* stejně jako na obrázku 24.

Dostaneme body D_1, D_2.

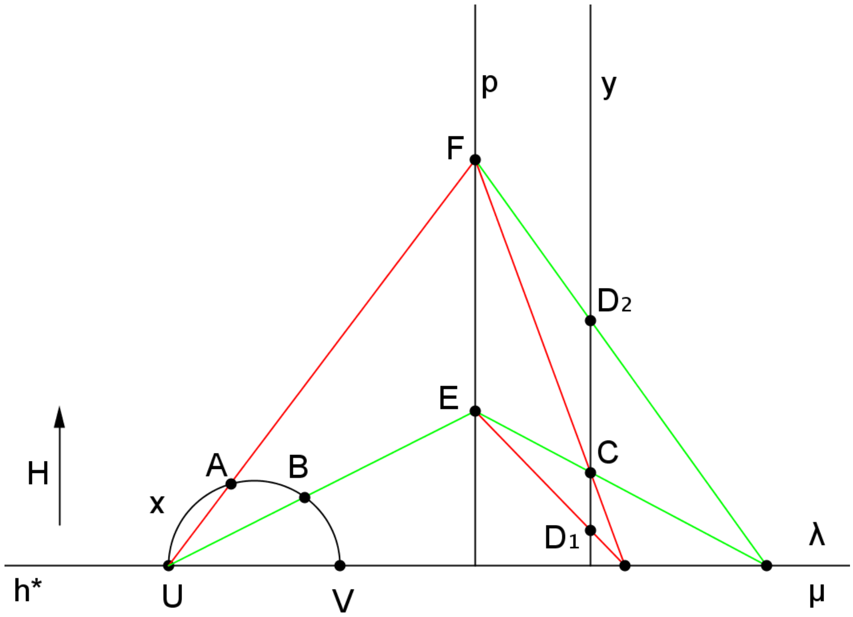


Obr. 24: Přenášení vzdálenosti na L-přímkách 1. druhu



Obr. 25: Úsečky stejné velikosti na L-přímce 2. druhu

Na obrázku 25 jsou zelené i červené L-úsečky stejně dlouhé jako L-úsečka *AB*.



Obr. 26: Přenášení délky úsečky mezi L-přímkami 1. a 2. druhu

2) Máme dány L-přímky *x* (1. druhu), *y* (2. druhu). Na L-přímce *x* je úsečka *AB* pevné velikosti a na L-přímce *y* bod *C*. Naším úkolem je najít bod *D* na L-přímce *y* takový, aby L-velikost *CD* byla stejná jako L-velikost *AB*.

Postup: Zvolíme pomocnou L-přímku *p* jako na obrázku 26.

Dále sestrojíme spojnice *UA* a *UB*.

Jejich průsečíky s *p* označíme jako body *F*, *E*.

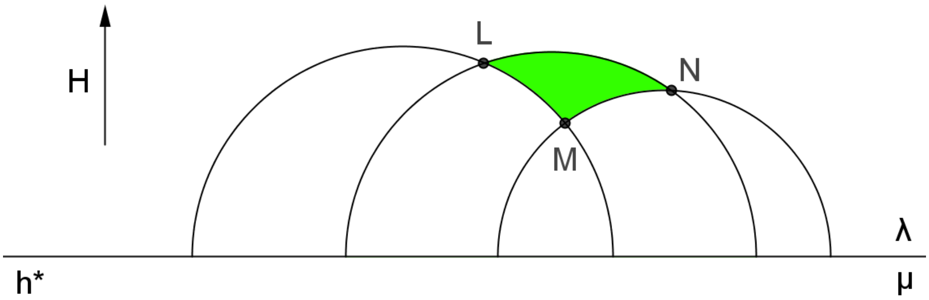
Nyní spojíme *EC* a *FC*, získáme průsečíky s *h**.

Tyto průsečíky spojíme s bodem *E* nebo *F* tak, jako tomu je na obrázku. Dostáváme body D_1, D_2.

Na obrázku je patrné, že se velikosti nezachovávají.

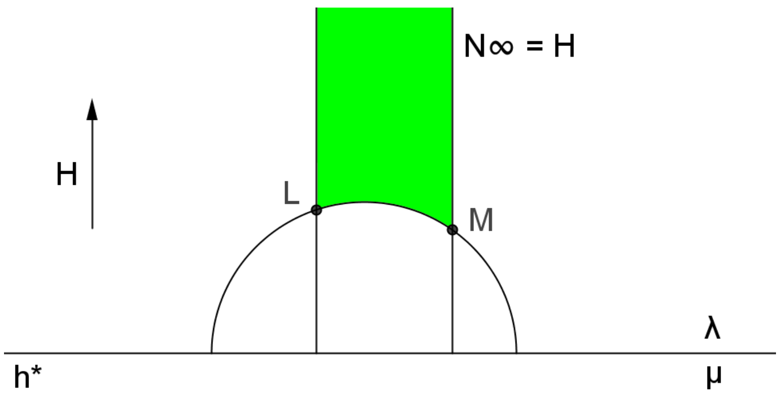
Důsledek: Víme, že se nezachovávají vzdálenosti. Je třeba si uvědomit, že E-střed L-úsečky je jinde než L-střed L-úsečky.

Definice: Pod pojmem L-trojúhelník budeme rozumět průnik tří L-polorovin. Jeho vrcholy budou tři body neležící na jedné přímce. U obecných L-trojúhelníků jsou to L-body, u asymptotických (viz níže) i A-body.

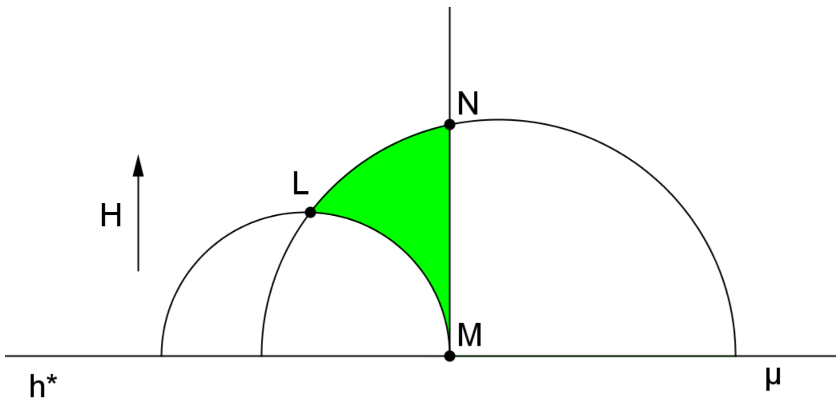


Obr. 27: „obyčejný" trojúhelník (jen L-přímky 1. druhu)

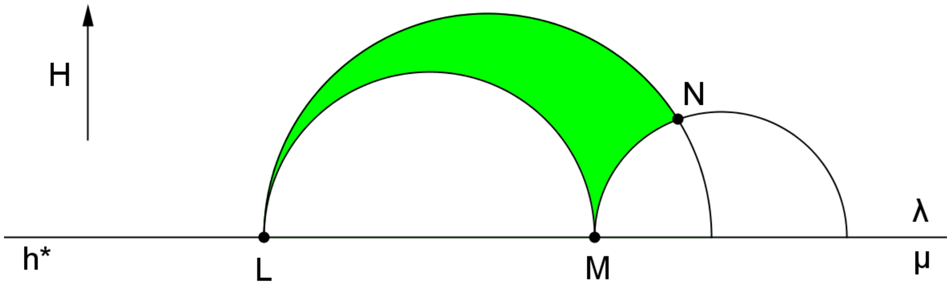
Rozlišujeme také „speciální" L-trojúhelníky: jednou asymptotický na Obr.28, 29 (dvě L-přímky jsou rovnoběžné), dvakrát asymptotický na obrázku 30 (dvě dvojice L-přímek jsou rovnoběžné) a třikrát asymptotický na obrázku 31, 32 (všechny dvojice L-přímek jsou rovnoběžné).



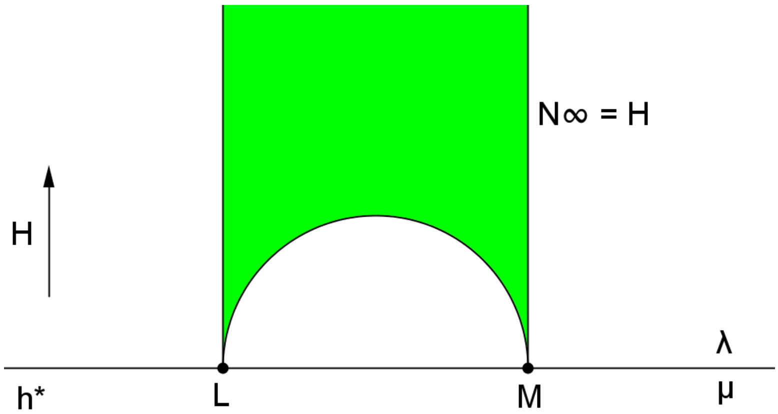
Obr. 28: Jednou asymptotický trojúhelník



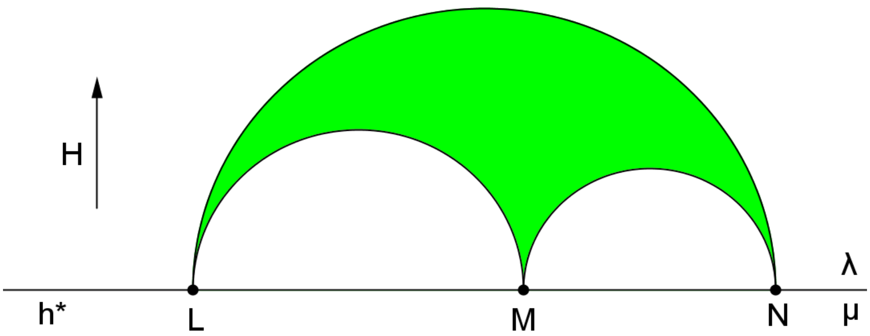
Obr. 29: Jednou asymptotický trojúhelník



Obr. 30: Dvakrát asymptotický trojúhelník (jen L-přímky 1. druhu)



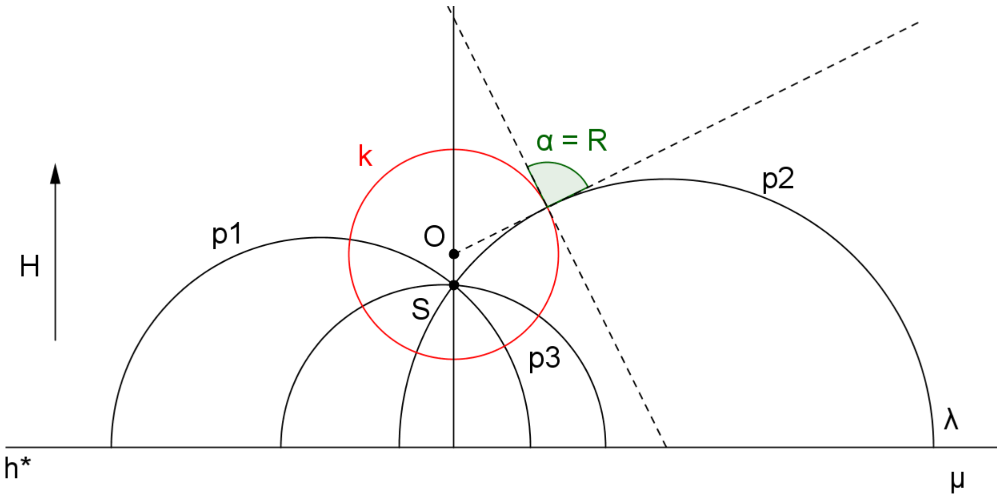
Obr. 31: Třikrát asymptotický trojúhelník



Obr. 32: Třikrát asymptotický trojúhelník (jen L-přímky 1. druhu)

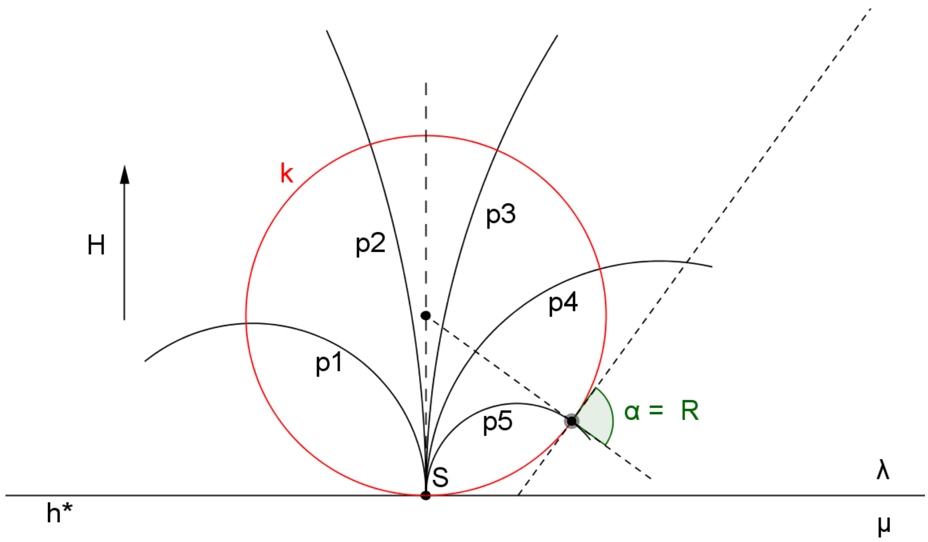
Definice: Kružnice je množina bodů mající od daného bodu *S* (nazvěme ho střed) vzdálenost *r* (poloměr).Tato definice se učí již na střední škole.

Zobecnění: Pro neeuklidovskou geometrii se však více hodí jiná definice. Kružnice je právě taková množina bodů se středem *S*, že v každém jejím bodě *Y* je poloměr *YS* kolmý na tuto množinu (křivku). Jinými slovy kružnice je ortogonální trajektorie svazku přímek procházejících bodem S. Poslední uvedená definice naznačuje, že budeme rozlišovat tři druhy kružnic podle toho, jakou vzájemnou polohu budou mít dané přímky ve svazku. Pokud se jedná o různoběžky, nazveme je cykly (resp. hypocykly), pro rovnoběžky horocykly a pro mimoběžky hypercykly. Pro cykly nám stačí původní definice.

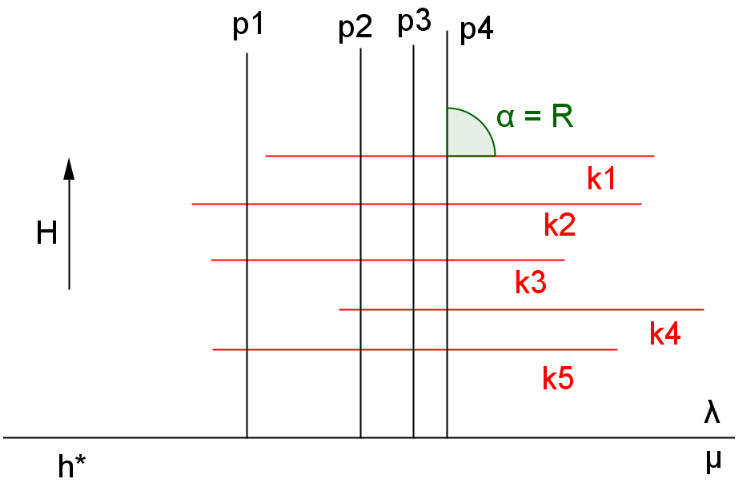


Obr. 33: Cykl k pro svazek různoběžek

Poznámka: Bod *S* je L-střed, bod *O* je E-střed cyklu *k*.

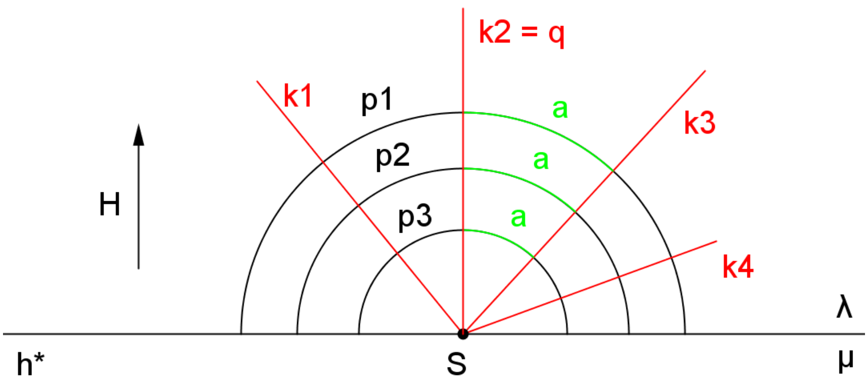


Obr. 34: Horocykl k pro svazek rovnoběžek 1. druhu



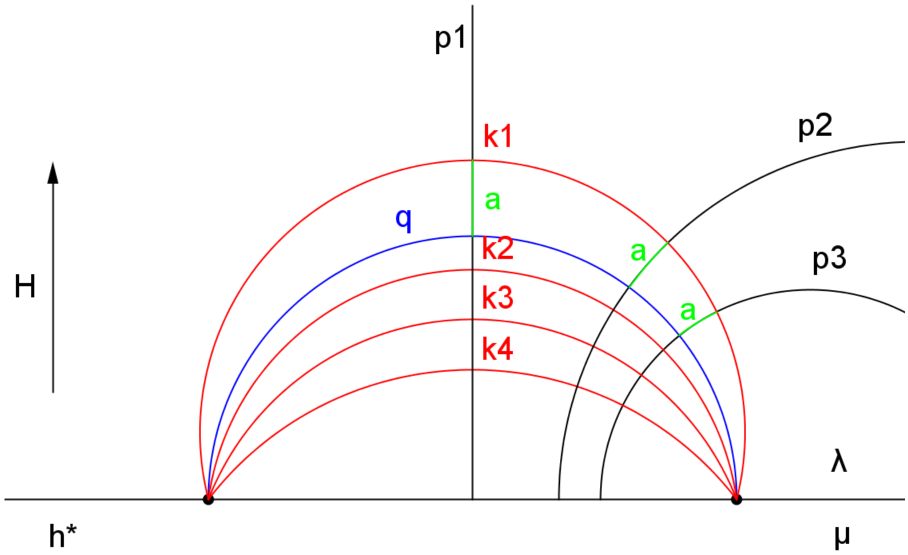
Obr. 35: Horocykly ki pro svazek rovnoběžek 2. druhu

Definice: Ekvidistanta k přímce je křivka, která je ve všech bodech stejně vzdálená od této přímky. V euklidovské geometrii je to rovnoběžka k původní přímce. V hyperbolické geometrii lze ukázat, že ekvidistantou k přímce je hypercykl.



Obr. 36: Hypercykly pro svazek mimoběžek 1.druhu = ekvidistanty k přímce 2. druhu

Poznámka: Pokud bychom vedli *k2* bodem *S* a kolmo na *h**, bude se zároveň jednat o L-přímku *q*. Ostatní hypercykly jsou ekvidistanty této přímky.

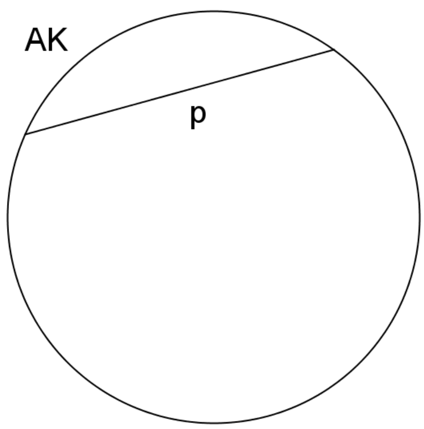


Obr. 37: Hypercykly ki = ekvidistanty přímky 1. druhu

3.2 Beltramiho-Kleinův model

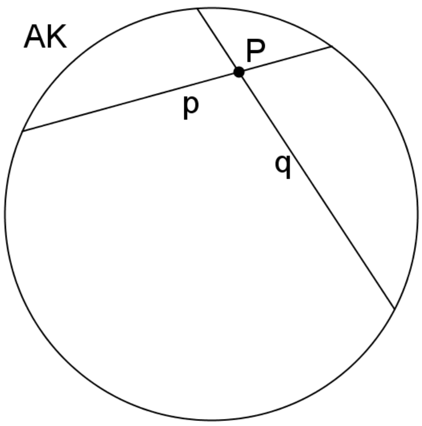
Opět se pohybujeme v E^2. Tentokrát budeme na hyperbolickou rovinu pohlížet jako na pevně daný kruh. Obvodová kružnice je tvořena absolutními body (nazveme ji absolutní kružnice). Na tomto modelu si opět postupně ukážeme, jak se budou zobrazovat přímky a jejich vzájemná poloha, trojúhelníky a kružnice. Nebudeme zde již uvádět definice, pokud se budou shodovat s definicemi v předchozím modelu.

L-přímky v tomto modelu budou pouze jednoho typu. Budeme je definovat jako E-úsečky, jejichž krajní body budou ležet na absolutní kružnici.

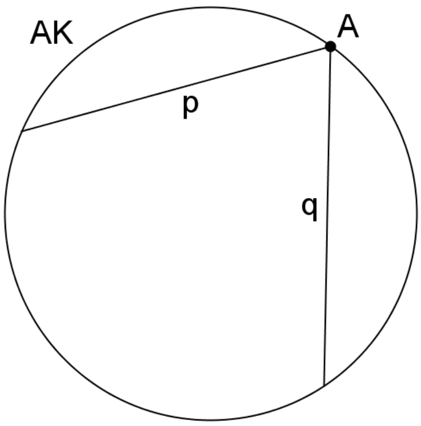


Obr. 38: L-přímka p

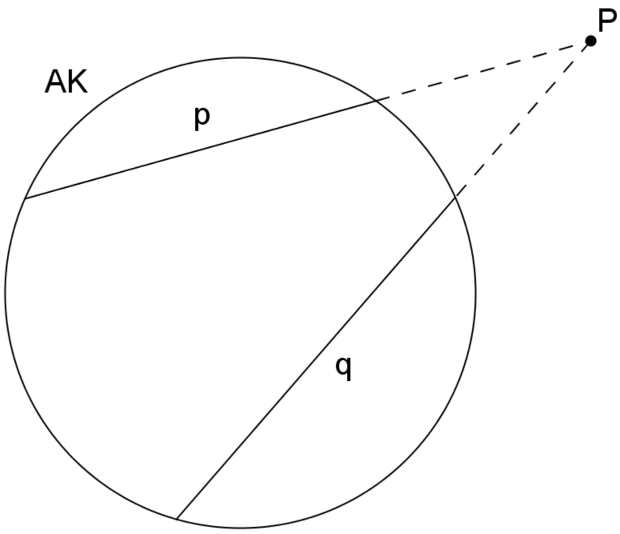
Opět budu existovat tři vzájemné polohy L-přímek. Dvě L-přímky nazveme různoběžné, pokud se budou protínat uvnitř absolutní kružnice (viz Obr. 39). Druhá možnost jsou rovnoběžné L-přímky (viz Obr. 40). Ta nastane, pokud 2 přímky budou mít společný absolutní bod, tj. bod na absolutní kružnici. Nesmíme zapomenout na mimoběžné L-přímky . Tyto přímky by se protnuly vně absolutní kružnice. (viz Obr. 41)



Obr. 39: Různoběžky p, q



Obr. 40: Rovnoběžky p, q

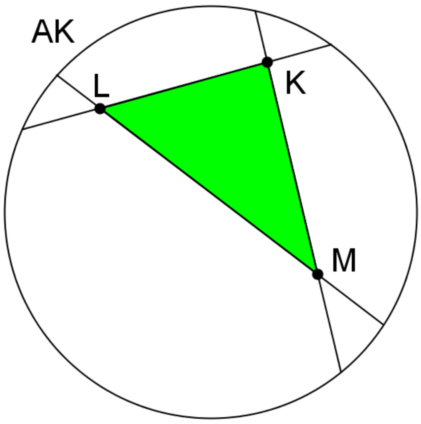


Obr. 41: Mimoběžky p, q

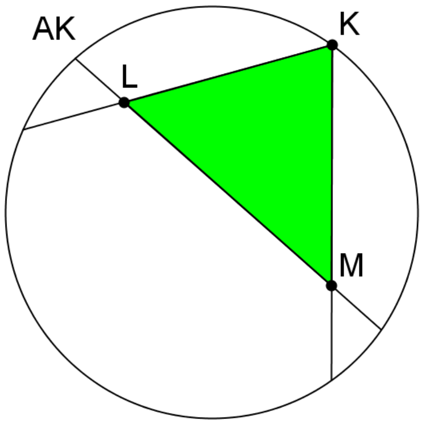
S úhly to není v tomto modelu snadné. Zobrazují se zkresleně. Jejich velikost se dá spočítat pomocí vzorečků, které zde nebudeme uvádět, ale hloubavější čtenář si je může dohledat v knize [4] na stranách 127 - 130. Můžeme zde doplnit alespoň úhel mezi dvěma rovnoběžkami, který bude mít velikost 0. (Jinými slovy dvě přímky protínající se v absolutním bodě v tomto bodě svírají úhel 0.)

Ani vzdálenostmi se v tomto modelu zabývat nebudeme, čtenář si je opět může dohledat v knize [4] na straně 126. Uvedeme pouze speciální případ. Vzdálenost dvou bodů ležících na absolutní kružnici bude rovna ∞.

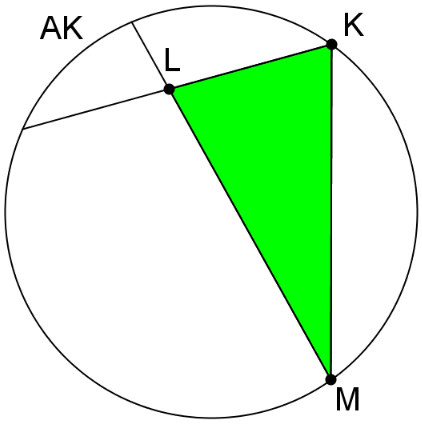
Nyní se podíváme na L-trojúhelníky. Zda se jedná o „obyčejný“ L-trojúhelník nebo jednou (dvakrát, třikrát) asymptotický nám určí vzájemné polohy L-přímek, které vzniknou jako průsečnice L-polorovin tvořících trojúhelník.



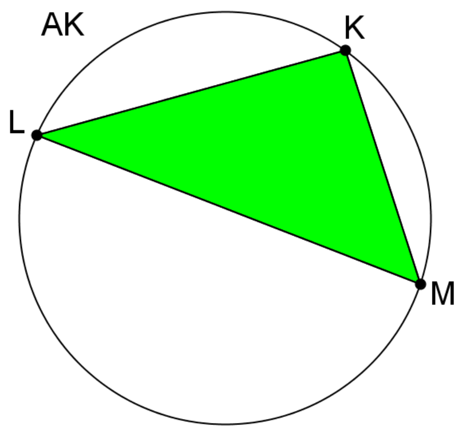
Obr. 42: „obyčejný" trojúhelník



Obr. 43: Jednou asymptotický trojúhelník

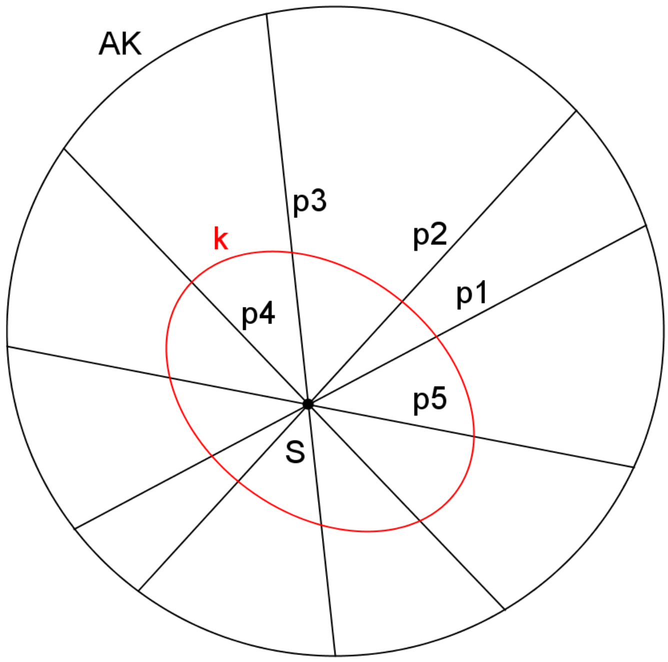


Obr. 44: Dvakrát asymptotický troúhelník

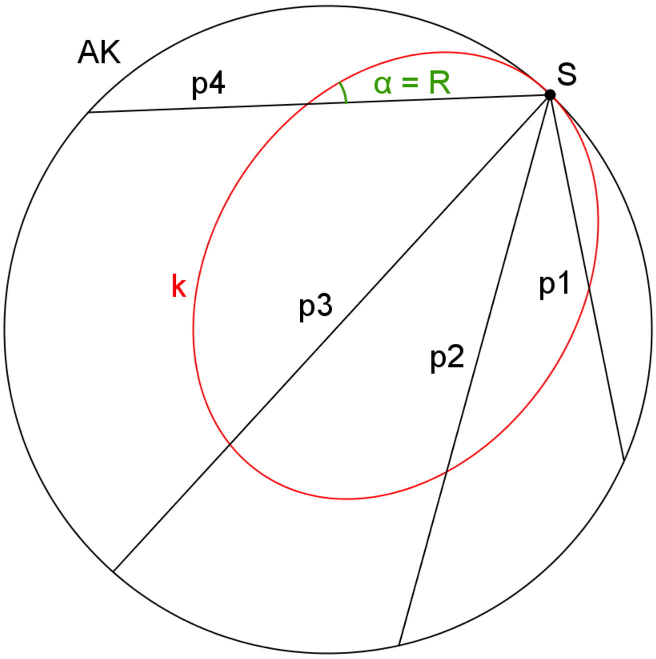


Obr. 45: Třikrát asymptotický trojúhelník

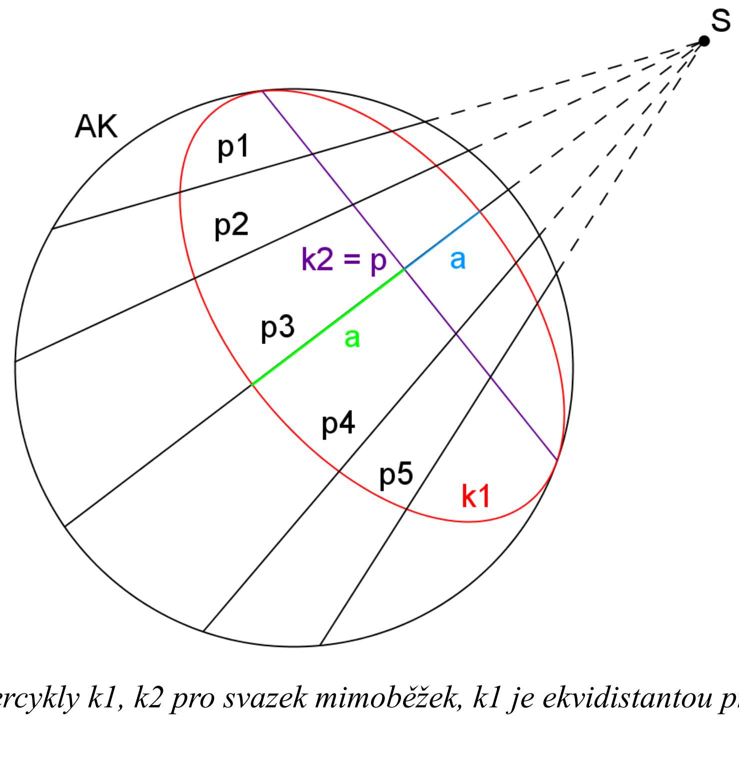
U kružnic využijeme stejnou definici jako u Poincarého polorovinného modelu, tj. kružnice bude ortogonální trajektorie svazku přímek procháyejících bodem *S*. Tudíž opět budeme rozlišovat tři typy kružnic podle vzájemné polohy L-přímek ve svazku. Bude se jednat o cykly pro svazek různoběžek (viz Obr. 46), horocykly pro svazek rovnoběžek (viz Obr. 47) a hypercykly pro svazek mimoběžek (viz Obr. 48). Platí, že tento model nezachovává úhly, a proto se kružnice zobrazují jako elipsy.



Obr. 46: Cykl k pro svazek různoběžek



Obr. 47: Horocykl k pro svazek rovnoběžek



Obr. 48: Hypercykly k1, k2 pro svazek mimoběžek, k1 je ekvidistantou přímky p

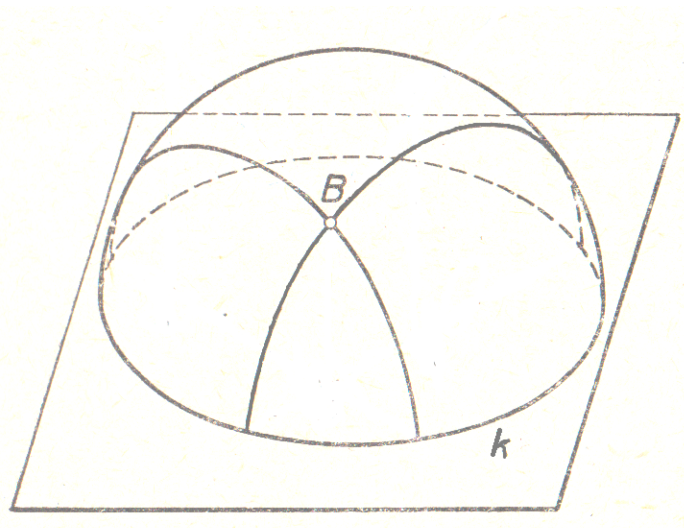
Poznámka: Na obrázku 48 jeden z hypercyklů *k2* k danému svazku degeneroval do L-přímky. Ekvidistantou k této L-přímce je hypercykl *k1*. Proto je jeho L-vzdálenost od této přímky po obou stranách stejná. (Zelená a modrá L-úsečka jsou stejně dlouhé.)

3.3 Další modely hyperbolické geometrie a vztahy mezi nimi

Na začátku této kapitoly jsme podrobně rozepsali Poincarého polorovinný model. Druhý model byl Beltramiho-Kleinův. Na první pohled je patrné, že modely zobrazují stejné věci různými způsoby. Existují i další modely hyperbolické geometrie. V této podkapitole si je zmíníme, případně naznačíme, jak vypadají. Také si uvedeme, jak i přes nápadnou odlišnost, lze dané modely mezi sebou převádět. V této podkapitole jsou využity obrázky z knihy [3] na stranách 90 – 91.

1) Polosférický model

Tento model je tvořen polosférou. Body na „rovníku“[10] ztotožníme s absolutními body. Přímky se v tomto modelu zobrazí jako řezy rovinami kolmými na rovinu „rovníku“.



Obr. 49: Polosférický model

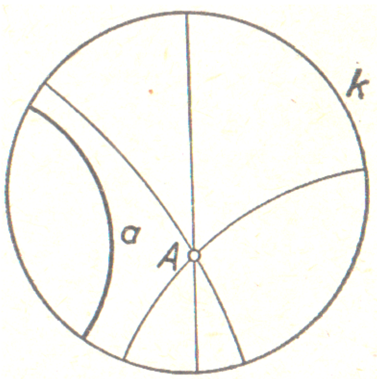
10 Význam slova rovník přeneseme ze zeměpisu. Budeme jím rozumět hlavní kružnici na sféře (polosféře), která vznikne jako průsečnice sféry s rovinou π. Tato rovina obsahuje střed sféry a je kolmá na spojnici severního a jižního pólu.

2) Beltramiho-Kleinův model

Stručné shrnutí k tomuto modelu. Vezměme kružnici k v euklidovské rovině. Tato kružnice je tvořena absolutními body a nazýváme ji absolutní kružnicí. Jako L-body budeme brát všechny body uvnitř této kružnice. L-přímky ztotožníme s tětivami této kružnice. Tento model nezachovává úhly.

3) Poincarého kruhový model

V tomto modelu se omezíme na kruh. Body obvodové kružnice budeme považovat za absolutní body. Tuto kružnici nazveme absolutní. Oblouky kolmé na absolutní kružnici nebo průměry budou přímky.



Obr. 50: Poincareho kruhový model

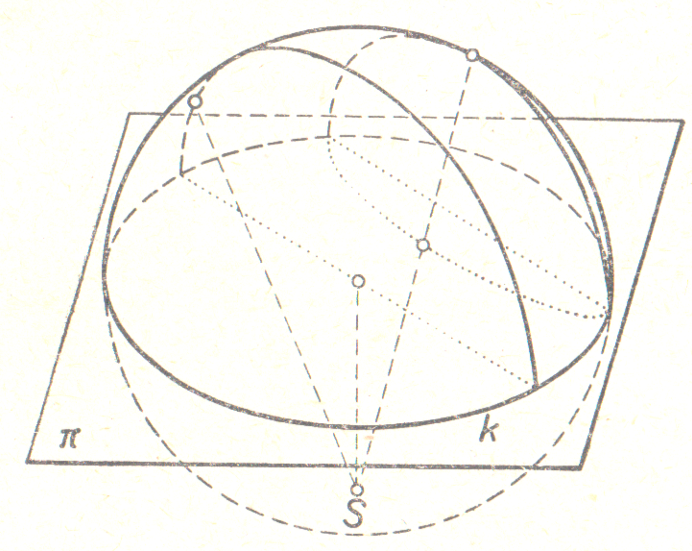
4) Poincarého polorovinný model

Tento model jsme si již podrobně popsali v podkapitole 4.1.

5) Hyperbolický model

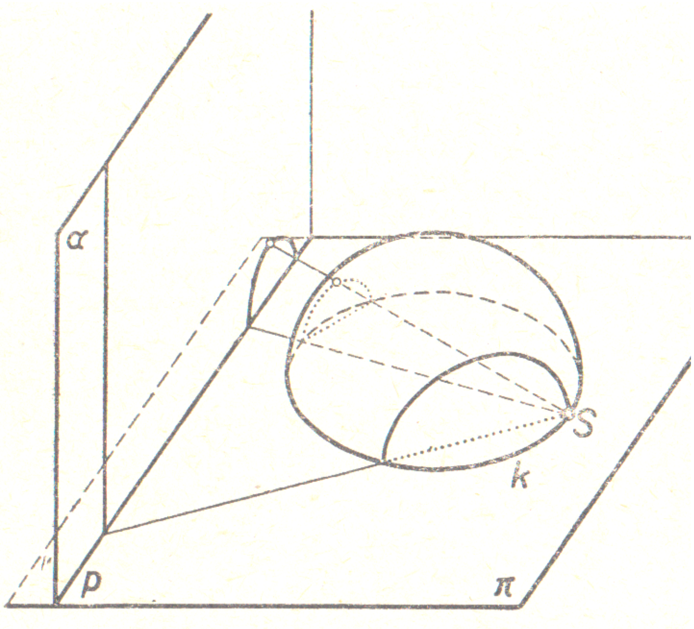
Pokud bychom chtěli model hyperbolické geometrie, který se bude zobrazovat jinam než do roviny či na polosféru, uveďme si jako příklad polovinu dvojdílného rotačního hyperboloidu. Vzniká projekcí polosférického modelu z jižního pólu sféry na hyperboloid.

Těchto pět modelů můžeme mezi sebou převádět. Lze si představit, že se naše geometrie děje na sféře (pro lepší názornost ji budeme v následujících odstavcích připodobňovat k zeměkouli). Pokud se omezíme na „horní polokouli“, dostaneme polosférický model. Z polosférického modelu získáme ortogonální projekcí (pohledem „shora“) Beltramiho-Kleinův model. Naopak středovou projekcí z jižního pólu vznikne Poincarého kruhový model. (viz Obr. 51)



Obr. 51

Dále si vezmeme na pomoc rovinu α, která je kolmá k rovině rovníku a nemá se sférou žádný společný bod. Najdeme průměr sféry, který leží v rovině rovníku a je kolmý na rovinu α. Bod S bude vzdálenějším krajním bodem tohoto průměru. Nyní dostaneme Poincarého polorovinný model jako projekci polosférického modelu z bodu S na rovinu α. (viz Obr. 52)



Obr. 52

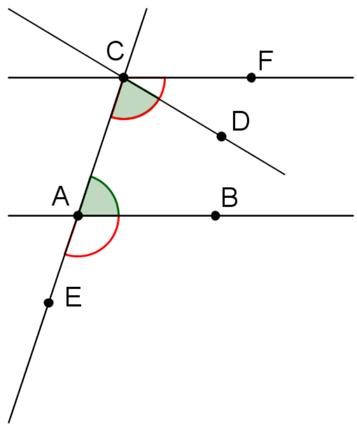
4 Věty ekvivalentní s V. postulátem

V této kapitole se podíváme na několik vět ekvivalentních s pátým postulátem. Znění vět využijeme s drobnými úpravami z knihy [3] ze stran 95 – 105. Řekneme, že rovina má vlastnost I. právě tehdy, když bude splněn pátý postulát (K dané přímce lze bodem na ní neležícím vést právě jednu rovnoběžku). Pokud splněn nebude a rovnoběžek bude možno vést více, pak budeme mluvit o rovině s vlastností II.[11] (Nutně tedy rovina má vlastnost I nebo II.) Situaci v rovině s vlastností II si budeme nejčastěji ilustrovat na modelech z předchozí kapitoly.

Věta 1: *Rovina má vlastnost I právě tehdy, když platí tvrzení: je-li součet vnitřních úhlů dvou přímek s příčkou po jedné její straně různý od 2R, pak se přímky protínají.*

Důkaz:

1) => Předpokládejme, že rovina má vlastnost I.



Obr. 53: Důkaz věty 1

Vezmeme dvě přímky $\overline{AB}$ a $\overline{CD}$ takové, že součet úhlů, které svírají s příčkou $\overline{AC}$ po jedné její straně, je různý od 2R.

Potřebujeme dokázat, že přímky $\overline{AB}$ a $\overline{CD}$ se protínají.

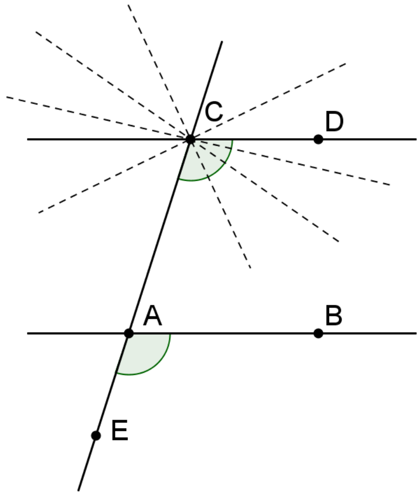
Přímku $\overline{AC}$ ztotožníme s přímkou $\overline{EC}$. Bodem C můžeme vést k přímce $\overline{AB}$ právě jednu rovnoběžku. (Plyne z vlastnosti I.) Zvolme bod F na této

11 Označení vlastnost I, II bylo převzato z knihy [3]

rovnoběžce jako je tomu na obrázku 53. (Úhly $\measuredangle EAB$ a $\measuredangle ACF$ jsou shodné.)

Vzhledem k tomu, že přímky $\overline{CD}$ a $\overline{CF}$ jsou různé a zároveň platí vlastnost I, musí se přímky $\overline{AB}$ a $\overline{CD}$ protínat.

2) <= Předpokládejme platnost tvrzení ve větě. Musíme dokázat, že potom má rovina vlastnost I.



Obr. 54: Důkaz věty 1

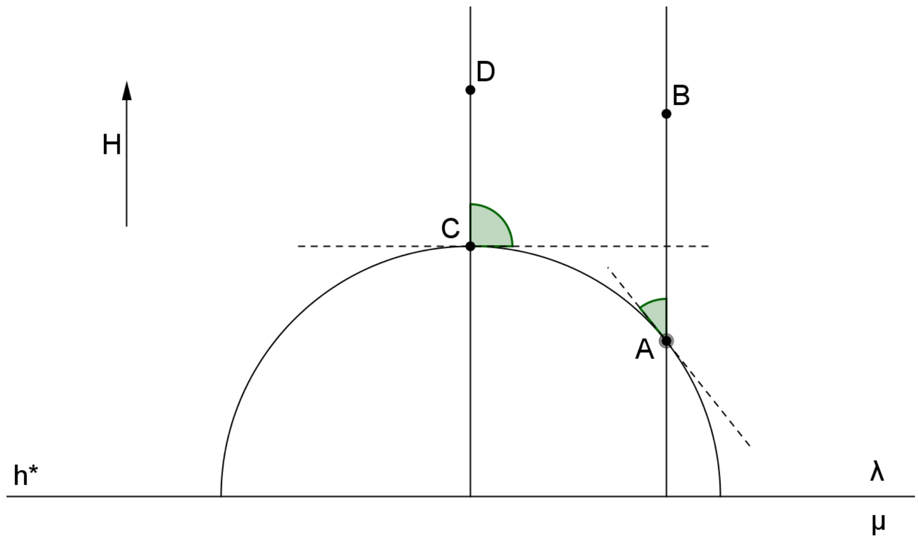
Vezmeme přímku $\overline{AB}$, bod C na ní neležící a bod E ležící na polopřímce CA za bodem A. Dále nechť je bod D umístěn jako na obrázku 54 a zároveň tak, aby platilo $|\measuredangle EAB| \equiv |\measuredangle ACD|$. Pak $\overline{AB}$ a $\overline{CD}$ jsou nutně rovnoběžky a také součet vnitřních úhlů s příčkou AC po jedné její straně je roven 2R.

Libovolná přímka p jdoucí bodem C různá od $\overline{CD}$ má s příčkou $\overline{AC}$ součet vnitřních úhlů různý od 2R. Z předpokladu plyne, že se tato přímka p s $\overline{AB}$ protíná. Zároveň jsme ukázali, že existuje právě jedna rovnoběžka k $\overline{AB}$ jdoucí bodem C. A tedy je splněn pátý postulát a rovina má vlastnost I.

Důsledek 1: *Rovina má vlastnost II právě tehdy, když existují dvě neprotínající se přímky, u nichž součet vnitřních úhlů s příčkou po jedné její straně je různý od 2R.*

Vysvětlení: V PP[12] modelu jsou L-přímky $\overline{AB}$ a $\overline{CD}$ rovnoběžné. Přesto tyto L-přímky svírají s příčkou $\overline{AC}$ úhly, jejichž součet je různý od 2R.

12 PP modelem budeme rozumět Poincarého polorovinný model.



Obr. 55: Důsledek 1

Věta 2: *Rovina má vlastnost I právě tehdy, když v ní existuje alespoň jeden trojúhelník, jehož úhly mají součet rovný 2R.*

Důkaz: (1) => Nechť je dán trojúhelník $\Delta\, ABC$ v rovině, jež má vlastnost I.

Dourčíme bod D, ležící v polorovině ($\overline{AB}$, C), aby platilo $|\measuredangle ABD| + |\measuredangle BAC| \equiv 2R$.

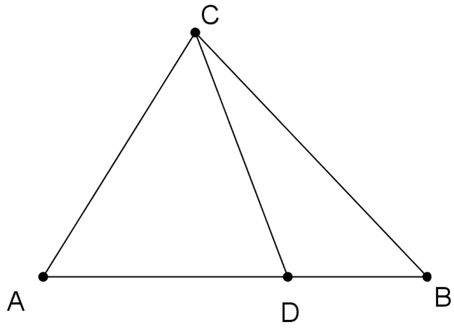
Přímky $\overline{BD}$ a $\overline{AC}$ se neprotínají. Z předpokladu a věty 1 plyne:

$|\measuredangle ACB| \equiv |\measuredangle CBD|$. Tedy $|\measuredangle ABC| + |\measuredangle BCA| + |\measuredangle CAB| = 2R$.

(2) <= Uvažujme trojúhelník $\Delta\, ABC$, jenž má součet úhlů 2R. Opět musíme dokázat, že potom má rovina vlastnost I. Mohou nastat tři situace:

1. *Leží-li bod $D \neq A$ na přímce $\overline{AB}$, potom i v trojúhelníku $\Delta\, ADC$ je součet úhlů 2R.*

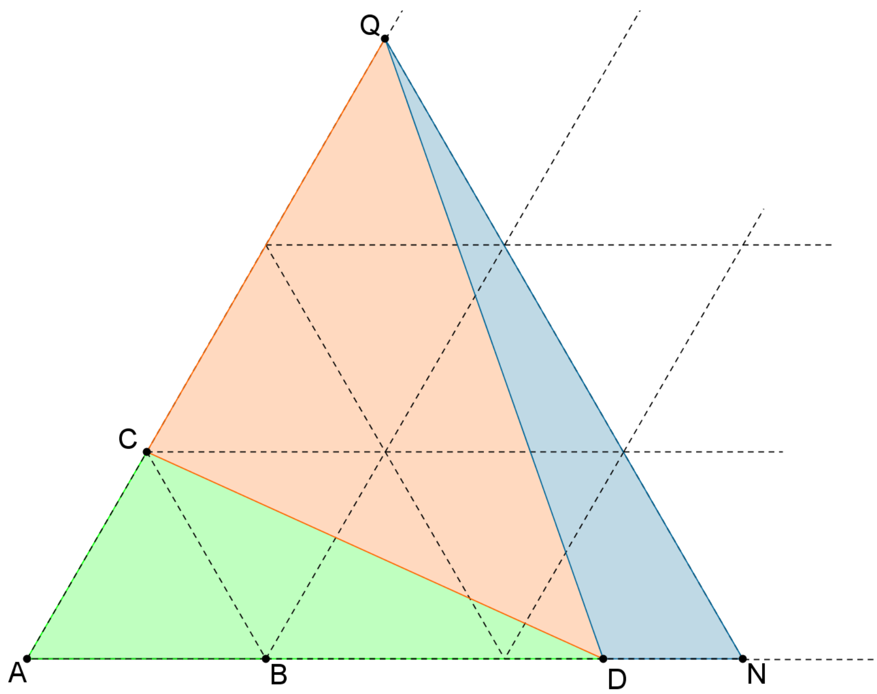
Pokud bod D umístíme na úsečku AB mezi body A a B, získáme součet úhlů v trojúhelnících $\Delta\, ADC$ a $\Delta\, DBC$ roven 4R. (Součet úhlů, jejichž jedno rameno splývá a zbylá dvě leží v přímce, je 2R.) Zároveň víme, že součet vnitřních úhlů v $\Delta\, ADC$ nemůže být větší než v $\Delta\, DBC$ a naopak. Tudíž je součet vnitřních úhlů v těchto trojúhelnících stejný a to 2R.



Obr. 56: Důkaz (2)1. věty 2

Naopak bychom mohli vzít bod D na polopřímce AB za bodem B. Archimédův axiom[13] nám říká, že na polopřímce AB existuje i bod N, tak aby $|AN| = n.|AB|$, kde n je přirozené číslo.

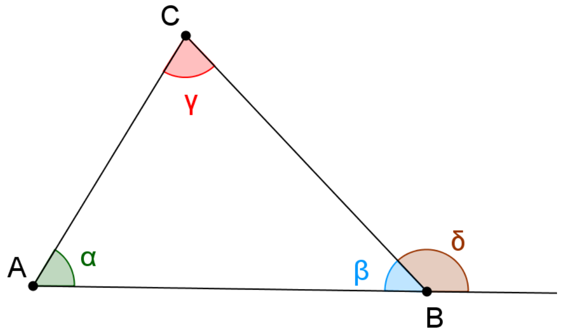
Podobně můžeme na polopřímce AC zvolit bod Q. (Platí $|AQ| = n.|AC|$, $|\measuredangle ABC| = |\measuredangle ANQ|$). Získáme $\Delta\, ANQ$ se součtem vnitřních úhlů 2R, protože je tvořen konečným počtem trojúhelníků shodných s $\Delta\, ABC$. Nyní je součet úhlů v $\Delta\, ADC$, $\Delta\, DCQ$ a $\Delta\, DQN$ roven 6R, který se opět rovnoměrně mezi tyto trojúhelníky rozdělí.



Obr. 57: Důkaz (2)1. věty 2

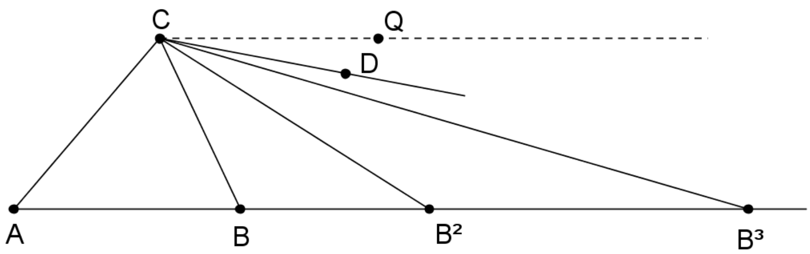
13 Archimédův axiom říká, že pokud máme na polopřímce AB bod Q, pak existuje přirozené číslo n takové, že vzdálenost $n.|AB| > |AQ|$.

2. *Velikost vnějšího úhlu δ v trojúhelníku se součtem vnitřních úhlů 2R se rovná součtu velikostí dvou vnitřních úhlů α a γ, které k němu nejsou vedlejší.*



Obr. 58: Důkaz (2)2. věty 2

3. *Mějme obecný trojúhelník ABC. Bod D nechť je jako na obrázku 59. Přímka $\overline{CD}$, pro kterou platí $|\measuredangle BCD| < \beta \equiv |\measuredangle ABC|$, protíná přímku $\overline{AB}$.*



Obr. 59: Důkaz (2)3. věty 2

Zvolme bod Q v polorovině ($\overline{BC}$, D) takový, aby platilo $|\measuredangle ABC| = |\measuredangle QCB|$. Na polopřímce AB dourčíme body B^2, B^3,..., aby $|BC| = |BB^2|$, $|CB^2| = |B^2B^3|$. Trojúhelníky $\Delta\ CBB^2$, $\Delta\ CB^2B^3$,… jsou rovnoramenné a součet jejich vnitřních úhlů je 2R. (Z 1. víme, že trojúhelníky $\Delta\ AB^2C$, $\Delta\ AB^3C$ mají součet vnitřních úhlů 2R.) Podle 2. platí $|\measuredangle CB^2B| = \frac{1}{2}\beta$, $|\measuredangle CB^3B| = \frac{1}{4}\beta$,.. Pro obecný bod B^i je $|\square CB^iB| = \beta/2^i$ a také $|\measuredangle QCB^i| = |\measuredangle CB^iB|$. Z Archimédova axiomu víme, že existuje přirozené číslo n takové, aby $\beta/2^n < |\measuredangle DCQ|$, tudíž $|\measuredangle B^iCQ| < |\measuredangle DQC|$. Polopřímky CB a CB^n protínají $\overline{AB}$. Polopřímka CD leží mezi nimi, a tudíž také musí protínat $\overline{AB}$.

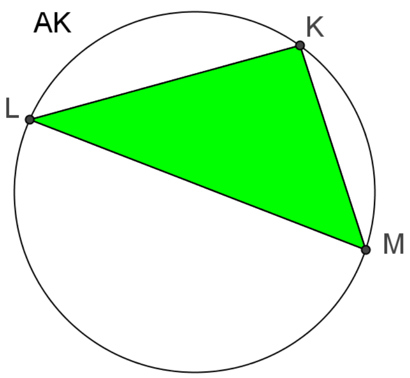
Věta: *Je-li aspoň v jednom trojúhelníku součet úhlů 2R, pak má tuto vlastnost každý trojúhelník.*

Důkaz: plyne z předchozí věty (část důkazu (2)1.)

> Vysvětlení: Podle předchozí věty existuje Δ *ABC* s vnitřními úhly α, β, γ, jejichž součet je 2R. Vezmeme jiný Δ *KLM*. Na polopřímce *KL* můžeme najít bod *D* takový, aby $|\measuredangle KDM| = \alpha$. Zbývá jen dourčit body *E*, *F* na polopřímkách *DK*, *DM*, aby součet úhlů při vrcholech Δ *DEF* byl roven 2R.

Důsledek 2: *Rovina má vlastnost II právě tehdy, když v ní existuje trojúhelník, jehož součet úhlů je menší než 2R.*

> Vysvětlení: V BK modelu vezmeme třikrát asymptotický trojúhelník. Součet jeho vnitřních úhlů je roven 0. (Jedná se o trojici rovnoběžek. Odchylka rovnoběžek je 0.)



Obr. 60: Důsledek 2

Definice: V rovině máme skupinu čtyř bodů *A*, *B*, *C*, *D*. Pokud úsečky *AB* a *CD* resp. *BC* a *AD* nemají společné body, zatímco úsečky *AC* a *BD* mají společný bod, pak část roviny ohraničenou úsečkami *AB*, *BC*, *CD*, *AD* nazveme čtyřúhelníkem. Budeme ho dále značit □ *ABCD*. Úsečky *AB*, *BC*, *CD*, *AD* jsou strany, úhly $\measuredangle ABC$, $\measuredangle BCD$, $\measuredangle CDA$, $\measuredangle DAB$ (označíme $\measuredangle B$, $\measuredangle C$ atd.) jsou úhly čtyřúhelníka[14].

14 Budeme uvažovat pouze konvexní čtyřúhelníky.

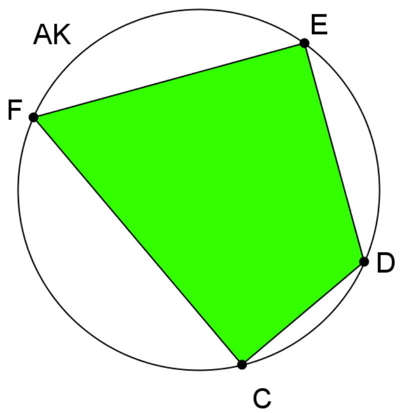
Poznámka: Dva čtyřúhelníky jsou shodné, symbolicky □ *ABCD* = □ *EFGH*, jestliže se shodují ve stranách i úhlech.

Věta 3: *Rovina má vlastnost I právě tehdy, když v ní existuje alespoň jeden čtyřúhelník se součtem úhlů 4R.*

Důkaz: Vezměme čtyřúhelník *ABCD*. □ *ABCD* lze rozdělit na dva trojúhelníky (Δ *ABC* a Δ *ADC*). Z předchozích dvou vět víme, že v rovině s vlastností I mají všechny trojúhelníky součet vnitřních úhlů roven 2R. Je tedy zřejmé, že součet úhlů v čtyřúhelníku musí být 4R.

Důsledek 3: *Rovina má vlastnost II právě tehdy, když existuje alespoň jeden čtyřúhelník se součtem úhlů menším než 4R.*

Vysvětlení: Vezmeme □ *CDEF* v BK modelu. Tento čtyřúhelník je tvořen dvěma třikrát asymptotickými trojúhelníky. Součet vnitřních úhlů čtyřúhelníku je tedy 0.



Obr. 61: Důsledek 3

Definice: Dva trojúhelníky, jejichž odpovídající si úhly jsou shodné, a jejichž odpovídající si strany nemusí být obecně shodné, se nazývají podobné.

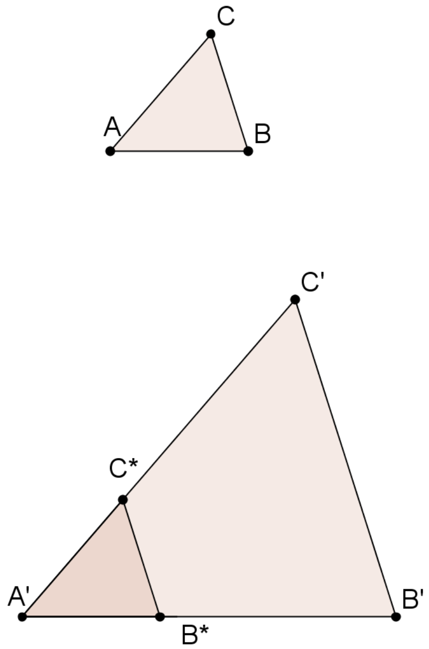
Poznámka: Trojúhelníky nazveme shodné, pokud jsou i odpovídající si strany shodné. Jsou-li dva trojúhelníky shodné, jsou nutně i podobné.

Věta 4: *Rovina má vlastnost I právě tehdy, když v ní existuje alespoň jeden pár neshodných podobných trojúhelníků.*

Důkaz: => Uvažujme trojúhelník Δ *ABC* v rovině s vlastností I.

Z části 2.1 důkazu věty 2 víme, že existuje Δ *ADE* se shodnými úhly s Δ *ABC* a zároveň $|AD| \equiv 2\,|AB|$ ($|DE| \equiv 2\,|BC|$, $|AE| \equiv 2\,|AC|$) .

<= Nechť máme trojúhelníky Δ *ABC* a Δ *A´B´C´* takové, že úhly u stejně označených vrcholech jsou shodné ($|\measuredangle A| = |\measuredangle A'|$, $|\measuredangle B| = |\measuredangle B'|$, $|\measuredangle C| = |\measuredangle C'|$) a zároveň $|AB| < |A'B'|$. Lze ukázat, že také $|BC| < |B'C'|$ a $|AC| < |A'C'|$.



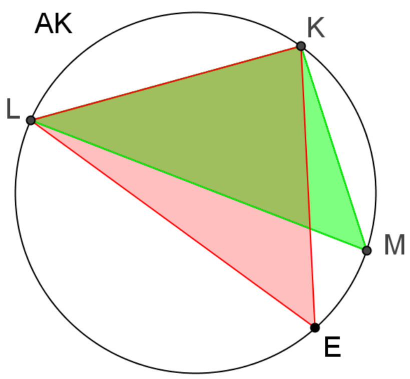
Obr. 62: Důkaz věty 4

Zvolme bod *C** (respektive *B**) tak jako na obrázku 62 a aby platilo

$|AC| \equiv |A'C^*|$ ($|AB| \equiv |A'B^*|$). Úhly $\measuredangle B^*C^*C'$ a $\measuredangle B'C'C^*$ ($\measuredangle C^*B^*B'$ a $\measuredangle C'B'B^*$) jsou vedlejší. Součet vedlejších úhlů je 2R. Současně body $B^*B'C'C^*$ tvoří čtyřúhelník o součtu vnitřních úhlů 4R. Z věty 3 plyne, že rovina má vlastnost I.

Důsledek 4: *Rovina má vlastnost II právě tehdy, když v ní neexistují neshodné podobné trojúhelníky. (Jinými slovy pokud v rovině s vlastností II jsou trojúhelníky podobné, pak už jsou nutně shodné, až na umístění.)*

Vysvětlení: Vezmeme 2 různé třikrát asymptotické trojúhelníky v BK modelu. Víme, že vnitřní úhel u každého vrcholu v těchto trojúhelnících má velikost 0. Tyto trojúhelníky jsou podle definice podobné. Zároveň vzdálenost dvou absolutních bodů je ∞. Tudíž všechny strany jsou shodné a trojúhelníky musí být shodné.

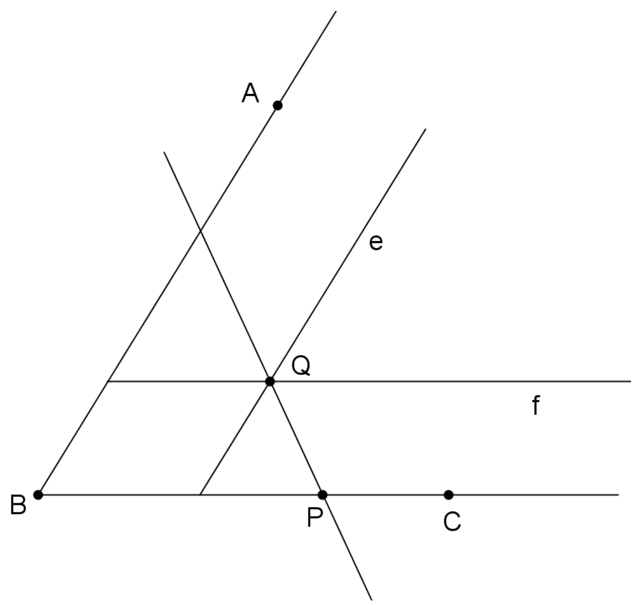


Obr. 63: Důsledek 4

Věta 5: *Rovina má vlastnost I právě tehdy, když lze každým vnitřním bodem úhlu vést alespoň jednu přímku protínající obě ramena mimo vrchol.*

Důkaz: => Předpokládáme, že rovina má vlastnost I.

Zvolme úhel $\measuredangle ABC$ a vnitřní bod Q tak jako na obrázku 64.

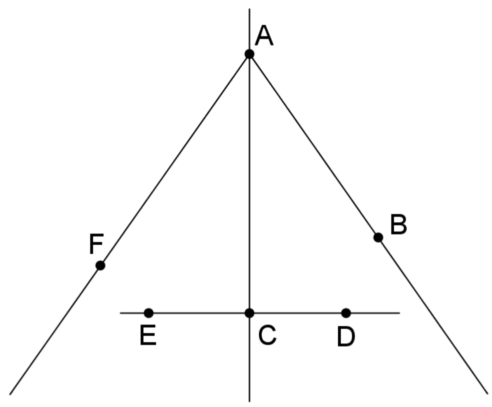


Obr. 64: Důkaz věty 5

Z vlastnosti I víme, že bodem Q můžeme vést právě jednu rovnoběžku e s $\overline{AB}$ a f s $\overline{BC}$. Nyní vezmeme bod P na $\overline{BC}$ na opačné straně od e než je bod B. Přímka $\overline{PQ}$ protíná i přímku $\overline{AB}$, protože je různá od e.

<= Předpokládáme, že platí tvrzení ve větě. Potřebujeme ukázat, že rovina má vlastnost I.

Vezmeme přímky $\overline{AB}$, $\overline{CD} \equiv \overline{CE}$, tak jako na obrázku 65. $|\measuredangle BAC| < R \equiv |\measuredangle ACD|$. Součet vnitřních úhlů, které svírají $\overline{AB}$ a $\overline{CD}$ s příčkou $\overline{AC}$ po jedné její straně různý od 2R.



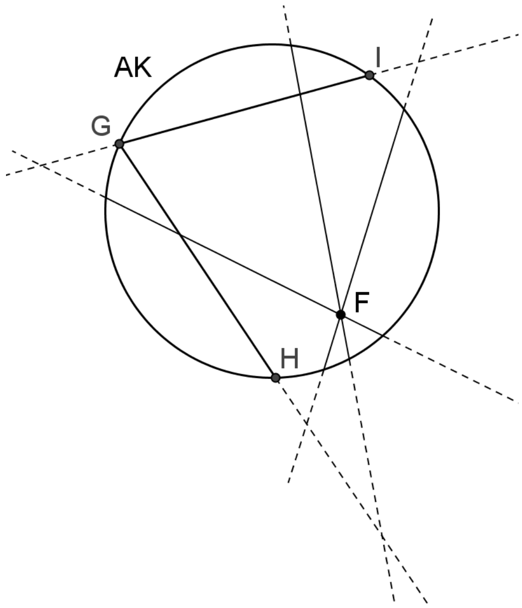
Obr. 65: Důkaz věty 5

Zvolme bod F v polorovině ($\overline{AC}$, E) tak, aby $|\measuredangle CAB| \equiv |\measuredangle FAC|$. Bod C leží uvnitř úhlu $\measuredangle FAB$.

Podle předpokladu lze bodem C vést přímku protínající $\overline{AB}$ i $\overline{AF}$. Lze ukázat, že přímka $\overline{CD}$ protíná přímky $\overline{AB}$ i $\overline{AF}$. Z věty 1 plyne, že rovina má vlastnost I.

Důsledek 5: *Rovina má vlastnost II právě tehdy, když alespoň jedním vnitřním bodem úhlu nelze vést přímku protínající obě ramena mimo vrchol.*

Vysvětlení: Na BK modelu jsme zobrazili úhel $\measuredangle HGI$ a jeho vnitřní bod F. Nepodaří se nám najít přímku vedoucí bodem F a protínající obě ramena úhlu.



Obr. 66: Důsledek 5

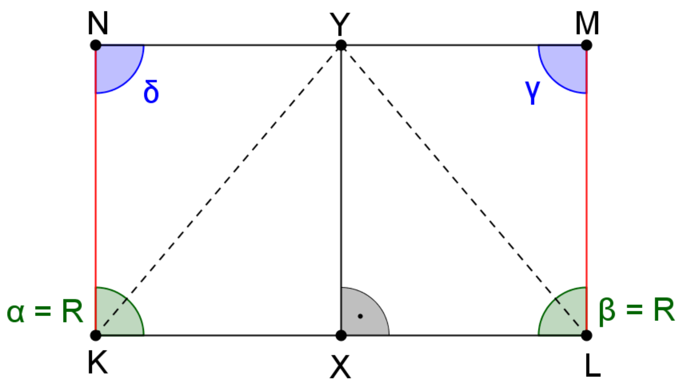
1. pomocná věta: *Jestliže ve čtyřúhelníku KLMN jsou úhly při vrcholech K a L pravé a |KN| = |LM|, pak úhly při vrcholech M a N jsou shodné.*

Důkaz: Nazvěme *X* střed strany *KL*.

Nyní veďme bodem *X* kolmici ke *KL*.

Označme *Y* průsečík této kolmice se stranou *MN*.

Potom Δ *KXY* je shodný s Δ *LXY* a tudíž i Δ *KNY* je shodný s Δ *LMY*. (|∡*KNY*| = |∡*LMY*|)



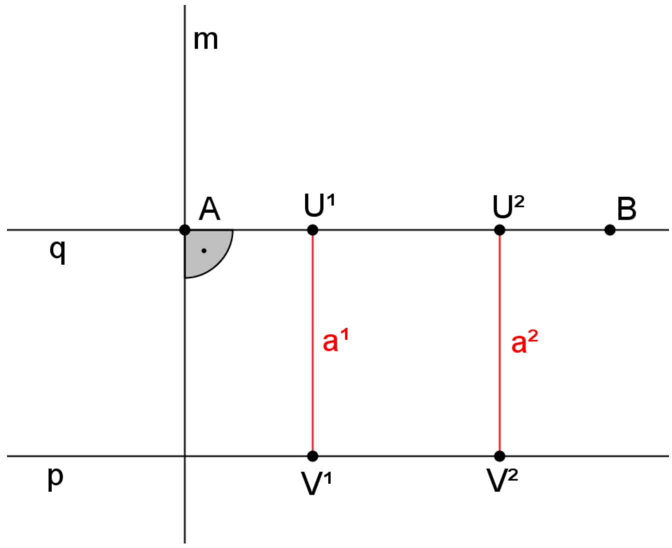
Obr. 67: Důkaz 1. pomocné věty

Věta 6: *Rovina má vlastnost I právě tehdy, když v ní existují alespoň tři body, které jsou stejně vzdáleny od přímky, leží po téže její straně a jsou kolineární.*

Důkaz: => Předpokládáme, že rovina má vlastnost I.

K přímce p lze bodem A vést právě jednu rovnoběžku q. Nechť bod B leží na přímce q.

Veďme bodem A příčku m k přímkám p, q tak, aby $|\measuredangle BAX|$, kde X vznikne jako průsečík m a p, byla rovna R.

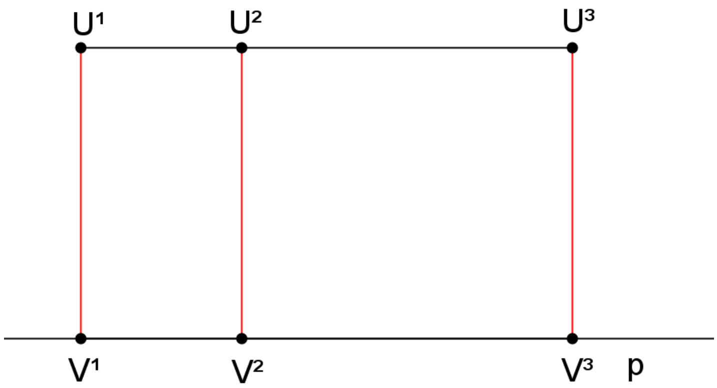


Obr. 68: Důkaz věty 6

K příčce m lze vést libovolným bodem U^i ležícím na q rovnoběžku a_i. Nechť bod V^i je průsečík přímek a_i a p. Pokud bychom nyní změřili vzdálenost bodů U^iV^i, zjistili bychom, že je konstantní pro všechna i. Jinými slovy přímka q je ekvidistantou k přímce p.

<= Předpokládejme, že platí znění věty a chceme ukázat, že rovina má vlastnost I.

Označme si body z věty U^1, U^2, U^3 a V^1, V^2, V^3 body ležící na přímce p takové, od nichž bereme vzdálenost bodů U^1, U^2, U^3 s p. Z pomocné věty víme, že velikosti $|\measuredangle V^1U^1U^2| = |\measuredangle V^2U^2U^1|$, $|\measuredangle V^1U^1U^2| = |\measuredangle V^3U^3U^2|$, $|\measuredangle V^3U^3U^2| = |\measuredangle V^2U^2U^3|$ a tudíž i $|\measuredangle V^2U^2U^1| = |\measuredangle V^2U^2U^3|$ jsou shodné a pravé. Tím je dokázáno, že existuje čtyřúhelník se součtem vnitřních úhlů rovným 4R. Dle věty 3 má rovina vlastnost I.

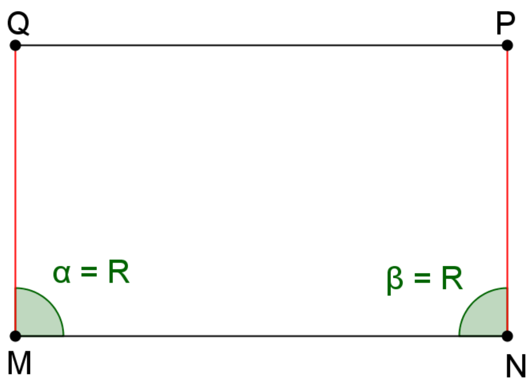


Obr. 69: Důkaz věty 6

Důsledek 6: *Rovina má vlastnost II právě tehdy, když všechny body, ležící po téže straně nějaké přímky ve stejných vzdálenostech od ní, neleží na přímce (ekvidistanta přímky není přímka).*

Vysvětlení: Stačí se vrátit k Obr. 36, 37 a 48.

Definice: Čtyřúhelník □ *MNPQ*, jehož úhly při vrcholech *M* a *N* jsou pravé a strany *MQ* a *NP* jsou shodné, se nazývá Saccheriho čtyřúhelník □ *MNPQ*.



Obr. 70: Saccheriho čtyřúhelník

2. pomocná věta : *V Saccheriho čtyřúhelníku MNPQ jsou úhly ∡P a ∡Q shodné a spojnice půlících bodů stran MN a PQ je společná kolmice přímek* $\overline{MN}$ *a* $\overline{PQ}$. (Tato věta platí bez ohledu na platnost vlastnosti I nebo II.)

Důkaz: Nazvěme *X* půlící bod strany *MN*.

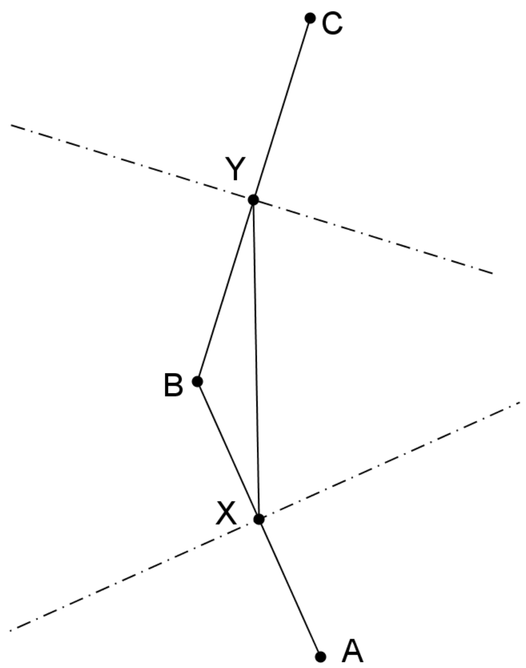
Nyní veďme bodem *X* kolmici ke *MN*.

Označme *Y* průsečík této kolmice se stranou *PQ*.

Podle důkazu 1. pomocné věty Δ *MQY* a Δ *NPY* jsou shodné. Tedy $|QY| = |YP|$ a bod *Y* je půlící bod strany *PQ*. Z toho plyne, že Δ *QYX* a Δ *PYX* jsou shodné. Přímka $\overline{XY}$ je kolmá i na stranu *PQ*.

Věta 7: *Rovina má vlastnost I právě tehdy, když ke každým třem nekolineárním bodům existuje stejně od nich vzdálený (když každé tři nekolineární body leží na kružnici).*

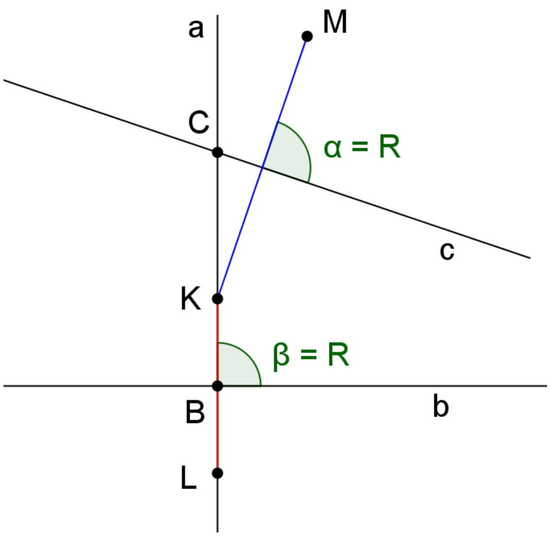
Důkaz: => Předpokládejme, že v rovině s vlastností I leží tři nekolineární body *A*, *B*, *C*. Množina bodů stejně vzdálených od bodů *A* a *B* je osa úsečky *AB* jdoucí jejím půlícím bodem *X*. Obdobně dostaneme pro úsečku *BC* její osu jdoucí bodem *Y*.



Obr. 71: Důkaz věty 7

To znamená, že bod stejně vzdálený od A, B i C dostaneme, pokud se protnou tyto osy úseček. Nyní si stačí uvědomit, že osy úseček svírají s příčkou XY úhly se součtem různým od 2R, tudíž se musí protnout a hledaný průsečík existuje.

<= Předpokládejme, že platí znění věty. Máme dokázat, že rovina má vlastnost I.



Obr. 72: Důkaz věty 7

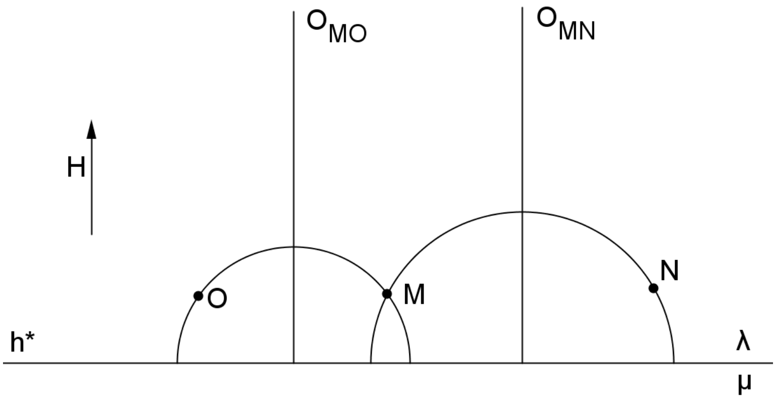
Nechť a, b, c jsou tři přímky jako na obrázku 72. Označme průsečík přímek a a b, které jsou na sebe kolmé, jako B a přímek a a c, jež nesvírají pravý úhel, jako C. (Součet vnitřních úhlů přímek b, c s příčkou BC je různý od 2R.)

Zvolme bod K na úsečce BC. Nyní dourčíme bod L na polopřímce CB, aby platilo $|KB| = |BL|$, a bod M ležící na kolmici vedené bodem K na přímku c, pro který $|Kc| = |Mc|$. Body K, L, M jsou nekolineární. Bod stejně vzdálený od těchto bodů existuje a leží v průsečíku přímek b a c. Podle věty 1 má rovina vlastnost I.

Důsledek 7: *Rovina má vlastnost II právě tehdy, když neleží žádné tři nekolineární body na kružnici. (Tato kružnice neexistuje.)*

Vysvětlení: Máme tři nekolineární body M, N, O. Pokud by kružnice existovala, jednalo by se o kružnici opsanou trojúhelníku $\Delta\, MNO$. Střed této kružnice by musel ležet v průsečíku os stran trojúhelníka. Na obrázku

73 je vidět, že osa *MO* a osa *MN* jsou rovnoběžné (Jejich průsečík je pouze absolutní bod. Ten jako střed kružnice neuvažujeme.)



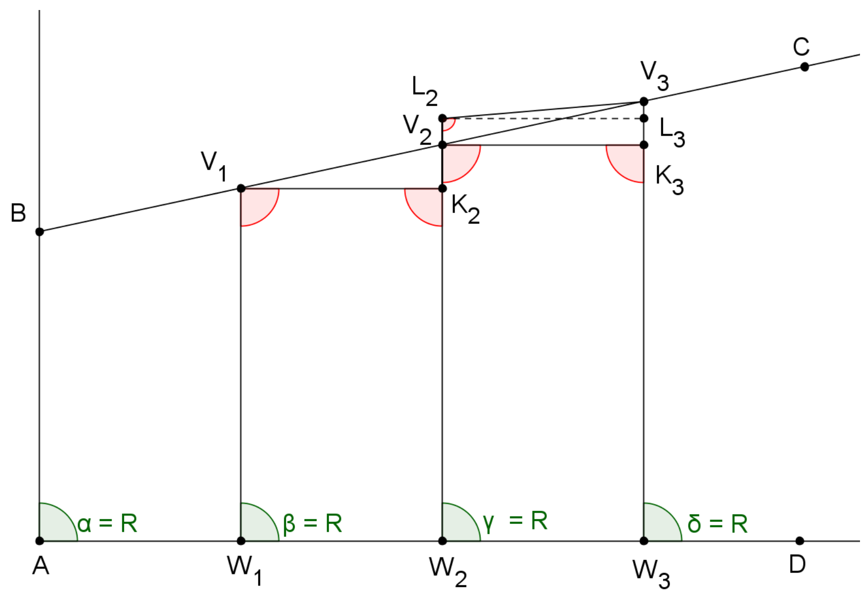
Obr. 73: Důsledek 7

Věta 8: *Rovina má vlastnost I právě tehdy, když v ní existuje alespoň jeden pár různých přímek té vlastnosti, že body jedné z nich mají od druhé vzdálenosti shora omezeny.*

Důkaz: => Má-li rovina vlastnost I, z věty 6 víme, že rovnoběžky jsou ekvidistantní.

<= *Pokud rovina nemá vlastnost I, pak lze dokázat, že neexistují přímky té vlastnosti, že body jedné z nich mají od druhé vzdálenosti shora omezené.*

Nechť úhel $\measuredangle BAD$ je pravý a bod C leží v polorovině ($\overline{AB}$, D). Situaci lze volit tak, aby úhel $\measuredangle ABC$ byl tupý nebo pravý (jinak bychom vzali opačné polopřímky). (viz Obr. 74)



Obr. 74: Důkaz věty 8

Nyní musíme ukázat, že k úsečce předem dané délky MN najdeme bod V_n ležící na BC a jeho kolmý průmět W_n ležící na AD takový, aby $|V_nW_n| > |MN|$.

Zvolme na polopřímce BC body V_1, V_2, V_3, takové aby $|V_1V_2| = |V_2V_3|$.

Najdeme jejich kolmé průměty W_1, W_2, W_3 na polopřímce AD.

Dourčíme body K_2 na V_2W_2 a K_3 na V_3W_3 splňující $|W_1V_1| = |W_2K_2|$, $|W_2V_2| = |W_3K_3|$.

Protože čtyřúhelník $W_1W_2K_2V_1$ je Saccheriho a v rovině s vlastností II je součet úhlů v čtyřúhelníku menší než 4R, jsou úhly $\measuredangle\ W_1V_1K_2$ a $\measuredangle\ W_2K_2V_1$ ostré. (Podobně dojdeme k tomu, že úhly $\measuredangle\ W_2V_2K_3$ a $\measuredangle\ W_3K_3V_2$ jsou ostré.)

Je třeba si uvědomit, že bod K_2 leží mezi W_2V_2, protože úhel $\measuredangle\ W_1V_1K_2$ je ostrý, zatímco úhel $\measuredangle\ W_1V_1V_2$ je tupý nebo pravý. (Úhel $\measuredangle\ W_1V_1V_2$ nemůže být ostrý, jinak by jeho doplňkový úhel $\measuredangle\ W_1V_1B$ byl tupý a součet úhlů v čtyřúhelníku ABV_1W_1 by byl větší než 4R.)

Tudíž existuje bod L_2 nad bodem V_2 takový, aby platilo $|K_2V_2| = |V_2L_2|$.

Bod L_3 získáme nanesením délky $|V_2L_2|$ nad bod K_3.

Nyní musíme ukázat, že $|K_3L_3| < |K_3V_3|$.

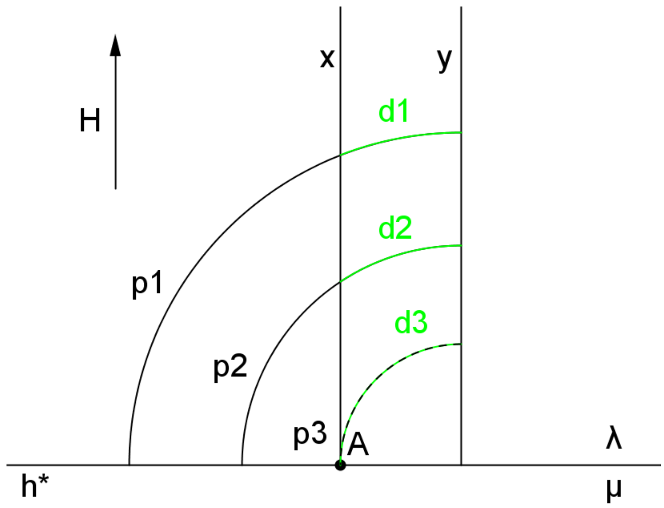
To platí, stačí si uvědomit, že úhel $\measuredangle\, V_2L_2V_3$ je tupý a úhel $\measuredangle\, V_2L_2L_3$ je ostrý.

$\measuredangle\, V_2L_2V_3$ je tupý, protože trojúhelníky $\Delta\, V_1K_1V_2$, $\Delta\, V_3L_3V_2$ jsou shodné a úhel $\measuredangle\, V_1K_2V_2$ je tupý (doplněk k ostrému úhlu $\measuredangle\, W_2K_2V_1$).

$\measuredangle\, W_2L_2L_3$ je ostrý, protože leží v čtyřúhelníku $W_2W_3L_3L_2$, který je Saccheriho.

Ukázali jsme, že posloupnost délek $|V_nW_n|$ roste do nekonečna, tj. platí vztah $|V_nW_n| > |V_1W_1| + (n - 1).|V_2K_2|$.

Důsledek 8: *Rovina má vlastnost II právě tehdy, když v ní neexistuje ani jedna dvojice různých přímek té vlastnosti, že body jedné z nich mají od druhé vzdálenosti shora omezeny.*



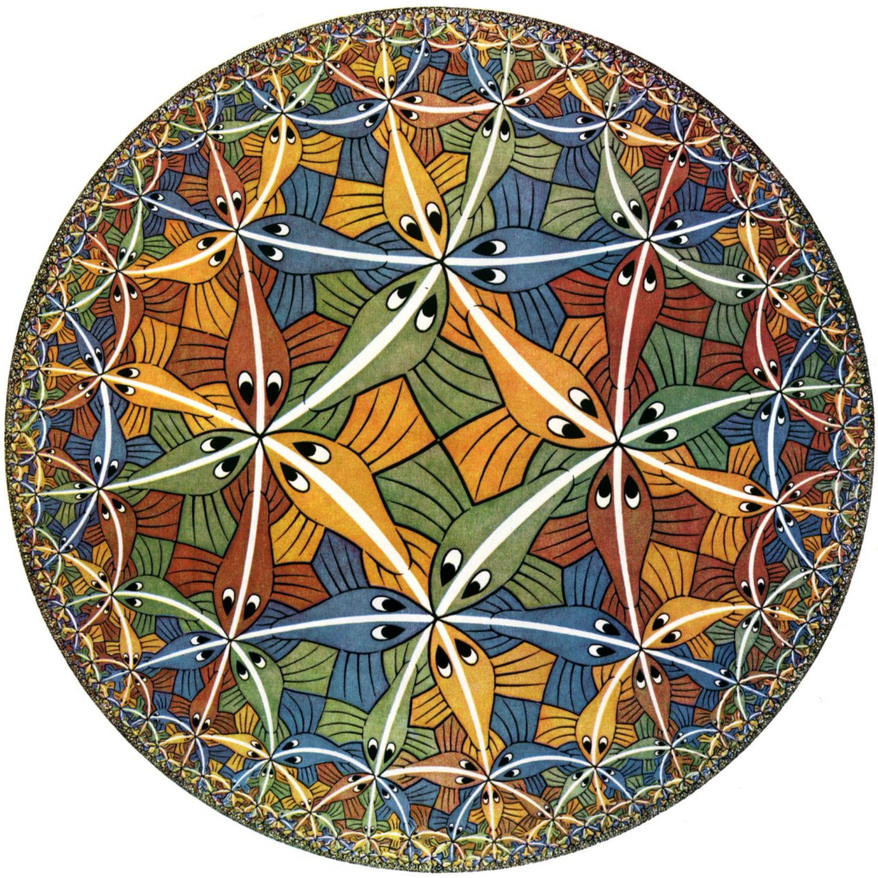
Obr. 75: Důsledek 8

Vysvětlení: Vzdálenosti *di* mezi dvěma L-přímkami *x*, *y* z obrázku 75 jsou s rostoucím *i* rostoucí, tj. $d1 < d2 < d3$ (Vzdálenosti měříme jinak než jsme v euklidovské geometrii zvyklí.) Vzdálenost *d3* je největší, protože vzdálenost L-bodu a A-bodu je rovna ∞.

5 Zajímavé využití na závěr

5.1 Maurits Cornelis Escher

Tento nizozemský umělec žil v letech 1898 – 1972. V mládí se učil truhlářem a později architektem. V té době jeho malířské schopnosti nebyly na příliš vysoké úrovni. S matematikou přišel do styku až později v průběhu svého života. Až kolem roku 1956 se začal zabývat ztvárněním tzv. hyperbolického mozaikování. Jinými slovy hyperbolická rovina je větší než euklidovská, tudíž pokud ji chceme zobrazit na stejně velkou plochu, tak dochází k překrývání. Jeho nejznámější díla z této oblasti jsou Circle Limit I, II, III, IV. Zabýval se i mnoha jinými neméně zajímavými kresbami, které nesouvisí s touto prací.



Obr. 76: Circle Limit III [8]

Poznámka: K zobrazení hyperbolické roviny je použit Poincarého kruhový model. Všechny ryby na obrázku 76 mají stejnou L-velikost.

Závěr

Cílem této práce bylo rozšířit obzory středoškolským studentům v oblasti geometrie. Nejprve je naznačeno, jakým stylem se dá geometrie vybudovat. Dále je ukázáno, že geometrie vyučovaná na základních a středních školách není jediná, která by se dala použít k popisu reálných věcí.

Tato práce obsahuje velké množství obrázků, na kterých je zachyceno, jak se konkrétně hyperbolická geometrie v rovině projevuje. Nejprve jsou čtenářům na modelech demonstrovány nové poznatky. Později jsou tyto poznatky využity v kapitole Věty ekvivalentní s V. Euklidovým postulátem.

Téma hyperbolické geometrie nebylo vyčerpáno. Bylo by možné ho rozšířit do prostoru nebo naopak do dimenze 1 (hyperbolická přímka). Doplnit by se daly i jiné neeuklidovské geometrie (parabolická, eliptická).

Seznam použité literatury

[1] EUKLEIDÉS,,. *Základy*. 1. vyd. Nymburk: Otevřeně prospěšná společnost, 2007-, ^^^sv. Prameny evropské vzdělanosti. ISBN 978-80-903773-6-3.

[2] VYŠÍN, Jan. *Elementární geometrie*. 1. vyd. Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952, 111 s. Knihovna, sv. 40.

[3] PAVLÍČEK, Jan B. *Základy neeukleidovské geometrie Lobačevského*. 1. vyd. Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1953, 221 s. Kruh.

[4] KUTUZOV, B. *Lobačevského geometrie a elementy základů geometrie*. 1. vyd. Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1953, 167 s.

[5] Desetimarková bankovka 1993. In: *Gauss Prize* [online]. 2013 Weierstrass Institute. [22.06.2015] Dostupné z:
http://www.mathunion.org/general/prizes/gauss/details/

[6]Známka SSSR 1956. In: *Aplikace matematiky* [online]. RNDr. Jiří KLAŠKA, Dr. [22.06.2015]. Dostupné z: http://learn-math.info/mathematicians/historyDetail.htm?id=Lobachevsky&menuH=wiki

[7] M. C. Escher. In: *Wikipedie.org* [online]. Nadace Wikipedia, 2015. [22.0.2015]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/M._C._Escher

[8] Circle Limit III. In: *WikiArt* [online]. Nadace Wikipedia. [22.06.2015]. Dostupné z: http://www.wikiart.org/en/m-c-escher/circle-limit-iii

Seznam ilustrací