Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Zavedení záporných čísel v dějinách algebry

Introduction of Negative Numbers in the History of Algebra

Jaroslav Daněk

Vedoucí práce:	prof. RNDr. Ladislav Kvasz, Dr.
Studijní program:	Specializace v pedagogice
Studijní obor:	Matematika a německý jazyk se zaměřením na vzdělávání

2015

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma Zavedení záporných čísel v dějinách algebry vypracoval pod vedením vedoucího bakalářské práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato bakalářská práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Souhlasím s trvalým uložením elektronické verze mé práce v databázi meziuniverzitního projektu Theses.cz za účelem soustavné kontroly podobnosti kvalifikačních prací.

V Praze dne 27. července 2015.

....

Jaroslav Daněk

Tímto bych chtěl poděkovat panu prof. RNDr. Ladislavu Kvaszovi, Dr. jak za vřelou nápomoc, ochotu a vstřícný přístup, tak za poskytnuté materiály a rady ke zpracování této bakalářské práce.

ANOTACE

Práci jsem rozdělil do čtyř kapitol podle nejvýznamnějších míst rozvoje matematiky a její symboliky a popisoval jsem v ní převážně historickou etapu a jejich matematiky, která byla v celosvětovém měřítku nejpokrokovější.

V první kapitole se zabývám čínskou matematikou, která uchovává nejstarší matematické poznatky už z druhého tisíciletí, proto je hned na prvním místě. Druhá kapitola pojednává o indické matematice, která nám zanechává poznatky indického matematika Brahmagupty ze 7. století n. l., který pravděpodobně navázal na čínskou matematiku. Následuje arabská matematika, která měla pravděpodobně největší vliv na evropskou matematiku, kde se znaménko mínus symbolicky definitivně zavedlo a ustálilo z dřívějších rétorických označení. Ústřední postavou, jak této kapitoly, tak celé práce, je německý matematik Michael Stifel a jeho dílo Arithmetica integra.

KLÍČOVÁ SLOVA

záporná čísla, rovnice, koeficient, řešení

ANNOTATION

I have divided this work in four chapters, according to the most important places of development of mathematics and his symbolism and I have described some specific historical period of progress of mathematics, which was in the global comparison the most attractive or developed.

In the first chapter I occupy with Chinese mathematics, which keep the oldest mathematical knowledge already since the second millennium, therefore immediately on the first place of my work. The second chapter deal with the Indian mathematics, which leaves us knowledge of Indian mathematician Brahmagupta from the 7th century AD, who probably continues in Chinese mathematics. After that it follows mathematics of the Arab world, which had the biggest influence on the European mathematics, where the minus sign was definitively established and stabilized from the earlier rhetorical markings. The central figure, as this chapter, so the whole work, is the German mathematician Michael Stifel and his piece of work the Arithmetica integra.

KEYWORDS

negative numbers, equations, coefficient, solutions

Obsah

1 Úvod

Znaménka plus a mínus patří mezi nejzákladnější matematické operace. Už i děti v nejútlejším věku si vytváří na základě pozorování kolem sebe intuitivní představy, jaký je rozdíl mezi tím, když se něco přidá (přibude) nebo když se něco odebere (ubude, zmizí). Tak, jak si děti v průběhu života osvojují matematiku v době, kde symbolika je už pevně vytvořena a definována předchozími generacemi, tak podobným způsobem taky lidstvo zaznamenávalo určitou matematickou realitu do nejrůznějších symbolů a značek na vyjádření nejrůznějších záležitostí, zprvu zemědělské či obchodní.

Nejdřív bylo třeba vymyslet pro určitý jev pojem (slovo), pro zjednodušení bylo zkráceno na zkratku a nakonec z toho byl symbol (značka), která byla nejrychleji a nejpřehledněji interpretována. S čím dál více přirozeně narůstajícími potřeby a vymoženostmi, je třeba taky vymýšlet a rozpracovávat nové objevy a věci. Na začátku však musí stát nějaká věc, která by byla třeba pojmenovat a až na konec, pro své časté opakování, vznikne symbol, který tuhle věc nebo význam zastoupí a zjednoduší.

Význam dané věci je tedy mnohem starší než jeho symbol či znak. To je jeden z důvodů, proč jsem se rozhodl zabývat znaménkem mínus a jeho chápání nejrůznějších matematiků v určitém období dějinách lidstva.

2 Teoretický úvod

Znaménka + [plus] a – [mínus] se obecně používají k označování kladných a záporných čísel, píší se před daným číslem nebo neznámou, v oboru přirozených čísel znaménko minus nemá smysl. Patří spolu se symboly * [krát] a / [děleno] mezi základní matematické symboly pro binární operace sčítání a odčítání. Můžeme je chápat taky jako negující unární operátory vytvářející z kladného čísla číslo záporné a opačně. Odčítání je obrácená operace ke sčítání, číslo x je opačné číslo k číslu $-x$. Absolutní hodnota nám dělá ze záporného čísla číslo kladné.

Ačkoliv se na první pohled zdá, že sčítání a odčítání jsou binární operace, které jsou si podobné, nemají tytéž vlastnosti. U binární operace sčítání nám nezávisí na pořadí operandů a taky nezáleží na tom, jak použijeme závorky u výrazu, kde je více operandů, v jakém pořadí budeme tedy tento výraz počítat. Operace sčítání je tedy komutativní a asociativní, u odčítání tomu tak není.

2.1 Historický náhled

Ačkoliv znaménka jsou nyní obecně známá stejně jako abeceda nebo indicko-arabské číslice, jejich použití není příliš staré. Do té doby byly vypisovány početní úkony slovy. Například v Euklidových Základech jsou veškeré úkony vyjádřeny slovy. Početní úkony na rozdíl od početních znamének, jsou daleko starší. Nejstarší jsou znaménka pro sčítání a odčítání, později se vyskytují značky pro rovnost, pro násobení, pro čísla lomená, pro dělení, pro umocňování, odmocňování, desetinná tečka, znak pro nerovnost a nekonečno. Nejstarší znaménko sčítání se vyskytuje ve 26. století př. Kr. v egyptském papirosu, jenž má název „Předpis ku dosažení znalosti všech temných věcí“. Autorem tohoto díla je egyptský ministr Ahmes a psán jest hieroglyfy. Sčítání se podobalo nohám kráčejícím ve směru psaní textu (v egyptštině se psalo různými směry), obrácený směr znamenal odčítání. Starší národy necítily potřeby zvláštního znamení pro sčítání a odčítání, protože měli svá mechanická počítadla, na kterých sčítání a odčítání prováděli. Tak např. Číňané již ve třetím tisíciletí př. Kr. sčítali a odčítali na počítadle zvaném *swán pan*. Později označovali čísla, která se měla sčítat červeně a která se měla odčítat černě. Indové a po nich Diophantes označovali sčítání psaním prostých číslic vedle sebe. Ještě ve 13. století Jordanus Nemorarius píše *abc* ve významu $a+b+c$. Vznik nynějšího znaménka pro sčítání + sahá dle H. C. Le Paigedo století čtrnáctého po

Kristu. V pojednání *Sur l'origine de certains signes d'opération* dokazuje, že za slůvko *et* se vyskytuje v rukopisech 14. a 15. století zkratek + (nad ním oblouček). Z této zkráceniny znamení + mohlo snadno vzniknouti vynecháním obloučku. Avšak tím není dosud dostatečně vysvětlen původ znamének + a –. Jisté je pouze to, že až v roce 1489 jsou poprvé užity ve spise Jana Wildmana z Chebu. (Fabinger 1904, str. 298)

3 Záporná čísla v čínské matematice

Ojedinělé zprávy o nejstarší čínské matematice nás zavádějí zpět až do poloviny 2. tisíciletí před n. l.; týkají se především zkoumání kalendáře, v astronomii, určování doby setby a sklizně prosa a jiných obilnin v zemědělství, jenž sehrávalo důležitou roli v hospodářství. Mnohá stará čínská matematická díla se nedochovala. (Juškevič 1961, str. 18)

Nejstarší a nejproslulejší dílo, věnované výhradně matematice, které bylo i přeloženo do několika evropských jazyků je *Matematika v devíti knihách*.[1]

V tomto traktátu byly shrnuty výsledky mnohaleté práce matematiků, kteří žili v 1. tisíciletí před n. l. Přesná doba vzniku, prameny a autoři tohoto díla nejsou známy. Údajně by to měl být jeden finanční úředník, který zemřel roku 152 před n. l., o sto let později mělo býti dále přepracováno.

Matematika v devíti knihách má pestrý obsah. Byla to vlastně encyklopedie matematických znalostí určená pro zeměměřiče a stavitele, finanční a hospodářské úředníky, obchodníky i řemeslníky atd. Mluví se zde o směně zboží, stavbě kanálů a přehrad, budování pevnostních zdí, o pracovních silách, daních, rozdělování kořisti atd. (Juškevič 1961, str. 31 – 34)

Ještě v sedmé knize se operuje pouze s kladnými čísly. V této knize je popsána metoda „přebytku a nedostatku“. Název metody souvisí s tím, že v úlohách se hovoří o přebytku nebo nedostatku určité peněžní částky. Pravidlo pro řešení je formulováno slovně.

V 8. knize *Matematiky v devíti knihách* se podle Juškeviče poprvé v dějinách vědy setkáváme s rozlišováním kladných a záporných čísel.

Záporná čísla byla pravděpodobně zavedena právě při rozšíření tzv. metody *fang čcheng* na libovolné systémy lineárních rovnic. Tahle metoda je bezesporu největším objevem čínských matematiků zabývajících se řešením lineárních úloh. Tato metoda udává algoritmus řešení systému *n* lineárních rovnic o *n* neznámých. Systém je pomocí

[1] Tato kniha existuje v českém překladě od Jiřího Hudečka, překládá ji jako *Matematika v deviti kapitolach*, na rozdíl od Juškeviče, který to překládal jako *Matematika v deviti knihach*. Je to sbírka početních metod z doby Han s komentářem Liu Huie z doby Wei a Li Chunfenga a dalších z doby Tang. Nás bude hlavně zajímat 7. kniha o přebytku a nedostatku a 8. kniha kde se poprvé rozlišují kladná a záporná čísla.

tabulky *fang čcheng* v jistém smyslu jednodušší, protože při něm není třeba vypisovat neznámé. Koeficienty jednotlivých rovnic se ale přenášejí do tabulky ze sloupců do řádků, a to v pořadí zdola nahoru.

Tuhle tabulku bychom dnes nazvali maticí soustavy. Záporná čísla byla třeba pro sestavování tabulky, protože ne vždy všechny neznámé stály na jedné straně rovnice. Pro rozlišení kladných a záporných koeficientů, ale také čísel vůbec, byly zavedeny speciální termíny a zvláštní tyčinky a později také symboly. Kladné prvky tabulky se nazývaly *čeng*, záporné *fu*. Slovo *čeng* znamená správný, spravedlivý atp. Slovo *fu* má význam dluh, nedostatek atp., ale také lživý. Podle Liou Chueje kladné hodnoty představovaly červené počítací tyčinky, zatímco záporné černé. Existovaly i jiné postupy. Tak třeba čísla *čeng* vyjadřovali tyčinkami s trojúhelníkovým průřezem a čísla *fu* s průřezem čtvercovým. Nebo také v prvém případě kladli tyčinky svisle a v druhém šikmo.

Jiří Hudeček však ve svých obchodních a zemědělských úlohách sedmé knihy pracuje, stejně jako Stifel, s kladným přebytkem nebo nedostatkem. Nedostatek (bu zu) definuje jako kladný rozdíl požadovaného výsledku nějaké operace a výsledku dosaženého pro nějaký předpoklad. Přebytek (ying) zase jako záporný rozdíl požadovaného výsledku operace a výsledku dosaženého pro nějaký předpoklad. Např. v úloze, kde při nákupu každý člověk vydá 8, je přebytek 3, když každý člověk vydá 7, je nedostatek 4. Ptáme se, jaká je cena věcí a množství lidí?

Úlohu bychom dnes zapsali pomocí soustavy dvou rovnic o dvou neznámých (x – počet lidí, y – cena věcí):

$8x - 3 = y$, kde 3 je přebytek

$7x + 4 = y$, kde 4 je nedostatek

Přebytek a nedostatek můžeme opravdu vyjádřit pomocí Hudečkových definic:

$-3 = y - 8x$ přebytek, y – požadovaná cena věcí,

$8x$ je výsledek pro předpoklad výdeje 8

$+4 = y - 7x$ nedostatek, y – požadovaná cena věcí,

$7x$ je výsledek pro předpoklad výdeje 7

Historicky nejrozsáhlejší a nejvýznamnější, jak píše Hudeček, je 8. kniha, je to jistě jedna z nejmladších kapitol celé knihy. Na druhou stranu je zřejmě spojená s předchozí kapitolou *Přebytek a nedostatek*. V této kapitole se poprvé používá rozlišení na kladná a záporná čísla. Kladnost a zápornost je vnímána pouze jako relativní vlastnost čísel u metody tzv. „Paralelní ohodnocení" a metody „Kladné a záporné". Vezměme si příklad od Hudečka:

Mějme 2 snopy lepšího obilí, 3 snopy středního obilí a 4 snopy horšího obilí, obsah žádného není plné dou. Když lepší vezme střední, střední vezme horší a horší vezme lepší vždy po jednom snopu, je obsah plné dou. Ptáme se, kolik je obsah snopu lepšího, středního a horšího obilí?

Podle metody paralelního ohodnocení sestavíme tabulku: „Položíme nahoru v pravém sloupci 2 snopy lepšího obilí, doprostřed ve středním sloupci 3 snopy středního obilí a dolů v levém sloupci 4 snopy horšího obilí, odebraný 1 snop a obsah 1 dou vždy přiřadíme na příslušnou pozici. Vždy, když si sloupce od sebe půjčují a berou věci, je to podle tohoto příkladu. Ačkoli původní zadání neobsahuje záporná čísla, vzniknou nevyhnutně v průběhu metody." (Hudeček 2008, str. 191)

Dostaneme tabulku o třech sloupcích a čtyřech řádcích, kterou budeme upravovat způsobem, který je vlastně totožný s dnešní Gaussovou eliminační metodou při řešení soustavy lineárních rovnic. Řádky jsou však u Hudečka psány svisle a ne vodorovně. V průběhu úprav se vyskytují záporná čísla.

Zisk a ztrátu, neboli kladnost a zápornost, značily tyčinky dvojího druhu: rudé tyčinky byly kladné a černé tyčinky byly záporné, byly taky odlišovány šikmostí a kolmostí. „V pozdějších čínských matematických knihách, kde máme vyobrazení tyčinkových číslic, se někdy záporná čísla označují šikmým přeškrtnutím." Z formulace *Liue Huiho*, jak uvádí Hudeček, avšak není příliš jasné, zda byly šikmo jen některé znaky nebo všechny tyčinky. „Běžné tyčinky v případě, kdy nebylo třeba rozlišovat kladná a záporná čísla, byly pravděpodobně nebarvené. Skrovné popisy tyčinek ve starých slovnících se o barvě nezmiňují, byly nejspíše vyráběny prostým naštípáním bambusu. Kladná a záporná čísla jsou chápána jen jako relativní označení, tzn. „přirozená" čísla nejsou vlastně ani kladná ani záporná. To je zřejmě také důvod, proč nikdy v historii čínské matematiky nebyly akceptovány záporné výsledky rovnic." Když červené mají za protějšek černé, eliminujeme do černých, když nemají protějšek, eliminujeme také do černých, když černé mají za protějšek červené, eliminujeme do červených, když nemají protějšek, eliminujeme také do černých.“ Podle Hudečka Liu Hui zde komentuje případ odčítání: když se odečítá kladné od záporného (červené mají za protějšek černé), je výsledek záporný, když se odečítá od nuly (není protějšek), je také záporný, naopak když se odečítá záporné od kladného nebo od nuly, je výsledek kladný. Přitom výsledek je součet, ne rozdíl.

V rozvoji matematických pojmů často není lehké určit hranice, mimo něž dostávají pojmy nový smysl. Tak také lze těžko stanovit, kdy se záporný koeficient začíná chápat nebo má právo být interpretován jako záporné číslo. Diofantos a snad i někteří jeho předchůdci znali pravidla pro operace s koeficienty odečítaných množství, která se vyskytovala v polynomech spolu s množstvím přičítanými a musela být zapisována teprve po kladných veličinách. Diafontos dokonce formuloval pravidlo, podle něhož odečítaná veličina násobená odečítanou veličinou dává veličinu přičítanou, zatímco odečítaná veličina násobená přičítanou dává znovu hodnotu, kterou je nutné odečíst. Nevěnuje tomu však hlubší pozornost, a tak nedochází k pojmu záporných čísel. Odečítaná čísla nepovažoval za samostatné objekty a pravidla operací se znaménky se vztahovala pouze na členy rozdílu, jako třeba na naše výrazy $a-b$ nebo ax^2-bx atd., s menšencem větším než menšitel. V staročínské matematice však odečítané koeficienty vystupují jako samostatné objekty. Tomu napomáhal i sám způsob jejich vyjadřování na počítací desce, kde byly chápány izolovaně od jiných čísel, nebo od množství, jimž byly přiřazeny jako koeficienty. Symbol typu $-a$ nevystupuje v čínské vědě jen jako součást rozdílu, v němž je menšenec větší než menšitel, ale také jako výsledek odečítání většího množství od množství vysloveně menšího. To byla zásadně nová, mimořádně důležitá myšlenka. (Juškevič 1961, str. 44)

Třetí úloha z osmé knihy vyžaduje poprvé zavedení záporných rozdílů, zde se také formulují nejjednodušší pravidla pro operace se zápornými čísly. V návodu je řečeno, že je třeba sestavit tabulku *fang čcheng*, která však v textu chybí, protože by asi pravděpodobně vedla k záporným číslům. Proto se dále doporučuje postupovat podle pravidla *čeng-fu*, formulovaného následovně:

„Jsou-li označení táž, pak se odečítá.“ V naší symbolice znamená první část pravidla:

$$(+a)-(+b)=+(a-b)$$
$$(-a)-(-b)=-(a-b)$$

„Jsou-li označení různá, pak se přičítá, je-li kladné samo, pak se stane záporným, je-li záporné samo, pak se stane kladným.“ Druhou část pravidla lze vyjádřit takhle:

$$(-a)-(+b)=-(a+b)$$
$$(+a)-(-b)=+(a+b)$$

Dále jsou zde zformulována pravidla pro sčítání různých a stejných „označení“ obdobně jako u odčítání uvedeno výše. Uvedený výraz „je-li záporné samo“ nám skutečně dokládá, že staročínští matematici opravdu odlišovali operace od daného koeficientu menšitele. Čili nejen, že znali výsledek menší než nula, ale dokázali pracovat (sčítat i odčítat) i s menšitelem či sčítancem menším než nula.

Odpovídající pravidla pro násobení a dělení nejsou v *Matematice v devíti knihách* uvedena a ani nejsou pro její úlohy nutná. Staročínští matematikové běžně používali záporná čísla. V úlohách z 8. knihy bývají záporné nejenom střední členy sloupců tabulky *fang čcheng*, ale i jejich počáteční prvky a dokonce i absolutní členy rovnic. Např. využíváme těchto záporných čísel v úloze, kde je třeba prodat 6 ovcí, 8 vepřů, je třeba koupit 5 buvolů a nedostává se nám 600 čchien. Staročínští matematici uvažovali 6 kladných ovcí, 8 kladných vepřů a pět záporných buvolů a nedostatek *čchien*, který je záporný. Tuhle podmínku bychom mohli zapsat do rovnice $8x+6y-5z=-600$.

Zavedení záporných čísel a pravidla pro jejich sčítání a odčítání patřilo k největším objevům čínských matematiků, přesto však záporná řešení rovnic na rozdíl od záporných koeficientů však nebyla v čínské matematice známa až do koce 15. století. Později se záporná čísla rozšířila i do indické matematiky, kde se s nimi poprvé setkáváme ve spisech Brahmagupty, tj. počátkem 7. století. První náznaky o zavedení záporných čísel v Evropě nacházíme na počátku 13. století u Leonarda Pisánského. Výslovně je však začal používat až koncem 15. století Nicolas Chuquet a v polovině následujícího století Michael Stifel.

4 Záporná čísla v indické matematice

Algebraický počet v Indii se opíral o poměrně dosti rozvinutou symboliku, která vznikala hlavně zkracováním příslušných termínů. V rukopise *Bakhšálí* se sčítání označuje *yu* (což je zkratka slova *yuta* – přičtený), odečítání se označuje křížkem (který může souviset se ksa, začátkem slova *ksaya* – odečtený). Sčítání se vyjadřovalo zápisem sčítanců vedle sebe. Při odečítání psali nad koeficientem odčítané hodnoty tečku nebo malý kroužek. (Juškevič 1961, str. 127)

Záporná čísla hrála v indické algebře důležitou roli. Není však známo, kdy se v Indii objevila. První nám známou zmínku o záporných číslech přináší Brahmagupta (598 – 668), jenž byl významný indický matematik a astronom, první, který užíval nulu a vyřešil množství matematických, astronomických a geometrických problémů. U něj se však už vyskytují všechna základní pravidla pro operaci s těmito čísly a je tedy velice pravděpodobné, že v tomto ohledu nevyšla iniciativa od něho. Jak už jsem výše zmiňoval, používala se v Číně záporná čísla k řešení lineárních rovnic ještě před začátkem našeho letopočtu. Jestliže mohli Indové převzít první znalosti o záporných číslech z Číny (což je docela možné, avšak nedoložené), potom je přinejmenším aplikovali originálním způsobem a rozpoznali jejich nové důležité vlastnosti.

Kladná čísla se nazývala *dhana* nebo sva (majetek), záporná *rina* nebo *kšaja* (snížení, dluh). Záporná čísla se označovala, jak už bylo zmíněno výše, tečkou nad číslicí. Početní pravidla pro kladná i záporná čísla obsahují 30. až 35. sloka 18. kapitoly Brahmaguptova traktátu, a přitom se zde neomezují jen na sčítání a odečítání jako v čínské *Matematice v devíti knihách*, ale jsou zde pravidla i pro násobení, dělení, umocňování dvěma a druhé odmocniny. Brahmagupta zde vysvětluje, že součet dvou kladných čísel je kladný, dvou záporných čísel je záporný a součet kladného a záporného čísla je jejich rozdíl. Přirozeně, že věděl, jak určit znaménko tohoto rozdílu, ale dostatečné vysvětlení tohoto rozdílu nacházíme mnohem později u Šrípatiho: „znaménko rozdílu se shoduje se znaménkem většího (čísla)“. Šrípati také speciálně poznamenává, že $+a+(-a)=0$, tj. součet dvou stejných čísel, kladného a záporného, je nula. (Juškevič 1961, str. 130)

Brahmaguptova pravidla pro odčítání: „Od většího je nutno odečíst menší, (výsledek) je kladný, jestliže odečítáme kladné od kladného a záporný, jestliže odečítáme záporné od záporného. Jestliže se odečítá větší od menšího, tento rozdíl co do znaménka se obrací, záporné se stává kladným a kladné se stává záporným. Jestliže se kladné odečítá od záporného nebo záporné od kladného, je nutné je sečíst.“ Jak je vidět z uvedeného citátu, pracoval Brahmagupta pouze s absolutními hodnotami. Pravidlo Bháskary II.: „Při odečítání se kladné stává záporným a záporné se stává kladným, potom se provede sečtení…“. Můžeme na to nahlížet dvojím způsobem. Buď odečítáme kladné číslo, nebo sčítáme záporné, popř. buď odčítáme záporné, nebo sčítáme kladné.

Když Brahmagupta vyložil pravidla pro určení znaménka při násobení, dělení a umocňování, tvrdí, že znaménko druhé odmocniny „je stejné, jaké bylo u toho čísla, ze kterého vznikl čtverec“.

Prithúdakasvámí napsal v komentáři k uvedenému citátu Brahmagupty, že druhou odmocninu je třeba brát buď kladnou, nebo zápornou s ohledem na to, co lépe vyhovuje dalším operacím. Bháskara II. nakonec podal formulaci: „druhá odmocnina z kladného čísla je jak kladná, tak záporná“.

Indové se zastavili před zavedením imaginárních čísel. Mahávíra říkal, že druhá odmocnina ze záporného čísla neexistuje, protože to svou podstatou není druhá mocnina, totéž soudil i Bháskara II.

5 Matematika v islámských zemích

5.1 Al-Chwárizmí

Abú Abdalláh Muhammad ibn Músá al-Chwárizmí al-Mádžusí (780 – 850) byl matematik a astronom žijící v Chwárizmu, což je území ve střední Asii, území dnešního Uzbekistánu a Turkmenistánu. Psal arabsky, jeho nejznámějším dílem byl „Algebraický traktát“, kde se zabývá řešením kvadratických a lineárních rovnic s celočíselnými koeficienty a s jejich geometrickou interpretací. Podobně jako Cardano klasifikuje šest typů lineárních a kvadratických rovnic a ukazuje způsoby jejich řešení. Na příkladech objasňuje možnosti úprav, pomocí kterých chce ostatní rovnice převést na jeden z těchto šesti normálních typů. V tzv. normálním tvaru musí být všechny členy rovnice kladné znaménko, nikoliv záporné, podle toho pak stojí na určité straně rovnice, tak aby nemělo záporný koeficient. Příklady, které nemají kladné řešení se ani neuvažují.

Používá zde dvě základní operace: al-džabr a al-muqábala. Operaci al-džabr používáme tehdy, pokud se v rovnici vyskytne člen se záporným koeficientem, pak přičteme tento koeficient, aby se nám dostal na druhou stranu rovnice s kladným koeficientem. Operace al-muqábala, která znamená porovnávání, „slučuje všechny členy stejného řádu“, jak píše Juškevič 1961, str. 204 neboli dělíme rovnici koeficientem u čtverce, tak aby u čtverce neznámé stála jednotka, neboť pravidla řešení zmíněných typů rovnic jsou formulována právě pro tento případ.

Řešení rovnice $x^2 + px = q$ vysvětluje al-Chwárizmí pomocí geometrické konstrukce tzv. „doplnění do čtverce“, jak píše Juškevič, z čehož mu po určitém sledu úprav vyjde vzorec pro jeden kladný kořen $x = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{p}{2}$. Pro kladné koeficienty je zřejmé, že tento kořen bude vždy kladný. Před odmocninou mu chybí varianta minus a taky má opačné pořadí menšitele a menšence, než ho známe dnes u vzorce pro výpočet kořenů kvadratické rovnice. Záporný kořen se zde, stejně jako v ostatních případech, neuvažuje. Nad geometrickým řešení hledat záporný kořen však nemá ani smysl, těžko může být strana čtverce záporná.

U rovnice typu $x^2 + q = px$ vyjdou oba dva kořeny kladné, z toho důvodu se al-Chwárizmímu naskytla možnost objevit, pomocí geometrické konstrukce, že před odmocninou pro výpočet kořenů má být jak plus, tak i minus, čímž vlastně dostal vzorec pro výpočet kvadratické rovnice, tak jak ho známe dnes, s tím, že koeficient u kvadratického členu musí být 1 a připuštěny jsou jen kladné kořeny. „Pouze v této kapitole ze tří kapitol, ve kterých musíš půlit kořeny, používej jak sčítání, tak i odečítání," jak cituje Juškevič ve svém díle Dějiny matematiky ve středověku na str. 206.

Al-Chwárizmí si byl taky vědom toho, že existují buď dva kladné kořeny nebo jeden kořen (dvojnásobný) nebo žádný kořen (imaginární kořeny). „Věz dále, že úloha je nemožná, když v této kapitole půlíš kořeny a násobíš je sebou samými a jejich součin je menší než dirhamy, které jsou přičítány ke dvojmoci, jestliže však je tento součin roven těmto dirhamům, je odmocnina z dvojmoci rovna polovině kořene bez přičítání a odečítání," jak cituje Juškevič na str. 206. Dirham znamená absolutní člen.

Na rozdíl od indických matematiků Al-Chwárizmí nepoužívá záporných čísel a symboliky. Kromě toho pravidlo pro řešení úplných kvadratických rovnic bylo v Indii formulováno hned pro libovolný koeficient u druhé mocniny neznámé a už Brahmagupta nerozlišoval kvadratické rovnice na jednotlivé typy rovnic, kde se některé členy vyskytovaly na různých stranách.

Umar Chajjám byl matematik žijící v jedenáctém století na území dnešního Iránu, jeho „Geometrická teorie kubických rovnic" tvoří klasifikace rovnic, geometrické konstrukce kořenů a určení počtu a podmínek existence kladných řešení. Ještě u Chajjáma v 11. století se rovnice vyšetřují s libovolnými pouze kladnými koeficienty. Do jeho klasifikace byly zahrnuty taktéž pouze rovnice, které mohou mít pouze kladná řešení.

Téměř všem dochovaným dílům islámských matematiků chybí algebraická symbolika, rovnice se vyjadřují slovně.

Matematika islámských zemí působila blahodárně na rozvoj evropské vědy a obohacovala ji nejen vlastními objevy, ale také objevy, které arabská kultura převzala od Řeků, Indů, Syřanů, Babyloňanů atd. Učenci středověké Evropy mohli tak začít stavět na pevném základě, aniž by museli opakovat celou cestu svých předchůdců. Evropští matematici mohli poměrně snadno a plně převzít díla orientálních učenců a dále je rozvíjet, neboť před nimi stály stejné úkoly jako před islámskými učenci. Evropští matematikové však studovali arabskou literaturu i později a nejen ve

Španělsku, kde velkého rozkvětu ve 12. století dosáhla činnost překladatelů arabských děl. Např. jeden z inspirátorů byl Leonardo Pisánský.(Juškevič 1961, str. 320)

6 Matematika v Evropě

Hospodářská, technická a kulturní úroveň ve velké části Evropy po pádu římské říše do 10. století zůstávala po dlouhou dobu velice nízká a celý společenský vývoj se děl velmi pomalu. V primitivní agrární společnosti převládalo extenzívní zemědělství a naturální směna. Obchodní a kulturní styky s Orientem byly na nějaký čas přerušeny. Úpadku kultury v mnohém napomáhalo ulpívání na nevědeckých dogmatech křesťanské církve, která stála nad světskou mocí.

Se zavedení těžkého pluhu a koní při orání, s všeobecným rozšířením nejprve vodních a potom i větrných mlýnů, došlo ve společnosti k určitému ulehčení fyzické práce a vznikaly přebytky potravin. To poskytlo možnost rozvíjet obchod, znovu stavět města, ve kterých se začaly budovat monumentální chrámové stavby a potom (v 11. až 13. století) zakládat univerzity.

Dříve než v jiných západoevropských zemích začal rozvoj řemesel a obchodu v Itálii. Již v 9. – 10. století se tvrze a biskupské rezidence začínají měnit na městská sídliště. V nich se soustřeďovalo textilní řemeslo, výroba zbraní i klenotů a také obchod. Města zprostředkovala styk mezi Západem a Východem.

Matematické znalosti, které se staly nutností, se čerpaly ze zbytků řecko-římské vzdělanosti zachované v klášterech. Jak nízká byla tehdy kulturní úroveň celé západní Evropy je vidět z toho, že jednu dobu byly knihy v klášterech tak vzácné, že je přikovávali řetězem. Přesto však právě klášterní školy dlouho byly nejdůležitějšími centry pro šíření vzdělání. (Juškevič 1961, str. 322, 332, 333)

Ve 12. – 13. století zaujala v Evropě v rozvoji řemesel, obchodu a peněžnictví první místo italská města Pisa, Miláno, Benátky, Janov a Florencie. Obchodníci z těchto měst podnikali daleké cesty, při nichž se snažili poznat umění i vědu jiných národů. Ve městech začaly vznikat manufaktury. Budovali se průplavy, přehrady, přístavy, nové lodě, monumentální gotické chrámy, vyžadující plán, výpočet a stavební stroje. Vzniká poptávka po architektech, umělcích, učitelích, účetních, lékařích a právnících. (Juškevič 1961, str. 362) Tyhle nové předpoklady a potřeby nahrávaly taky k tomu, aby se vytvořily v matematice různé symboly a značky pro zjednodušení komunikace mezi kupci a obchodníky.

6.1.1 Leonardo Pisánský zvaný Fibonacci (okolo 1180 – 1250)

Jako mladík přijel na otcovo přání do Bougie, aby se naučil aritmetickým postupům. Leonardova studia přesáhla hranice znalostí, nutných pro obchodníka nebo úředníka. Po svém cestování do jiných zemí své poznání ještě rozšířil. Jeho vynikající dílo „Kniha o abaku“ je jedna z nejdůležitějších nositelů nové aritmetiky i dalších matematických znalostí v Evropě. Leonardo v ní uspořádal ohromné množství poznatků, které načerpal z arabských prací, k nim přidal něco z Eukleidova geometrického umění a k tomu připojil také vlastní úlohy a metody. Kniha má 15 kapitol.

S vyšetřováním lineárních rovnic souvisí jiné vynikající zásluhy italského matematika. Při studiu některých úloh, které nemají řešení v oboru kladných čísel, přišel jako první v Evropě na myšlenku zavést záporná čísla a interpretovat je jako kladný dluh. Tam, kdy bychom my psali $-x$, mluví Leonardo o „dluhu *x*“ (debitum *x*). Podle Leonarda je daný problém s dnešními zápornými čísly neřešitelný, ale stává se řešitelným, jestliže budeme předpokládat, že třetí člověk má dluh. Tento příklad není jediný, kde se Leonardo přibližuje k myšlence záporného čísla a k jeho výkladu jako dluhu či nedostatku majetku. Úlohu se zápornými čísly můžeme ještě najít v jeho díle nazvaném „Květ“. Je možné, že se Leonardo nechal inspirovat od indických matematiků, kde se záporná čísla objevují jako důsledek rozšíření oboru působení určitého algoritmu. (Juškevič 1961, str. 370)

Fibonacci pracoval jako první v Evropě (po Diofantovi) se zápornými čísly, interpretoval je jako dluh. Také E. Scholz ve své knize Geschichte der Algebra uvádí, že ty případy u Leonarda, které vedou k záporným řešením, stávají se neřešitelnými, pokud je nepřijmeme jako kladný dluh.

Ve 4. kapitole v Liber Abaci Leonardo vysvětluje odčítání dvou čísel, pouze menších od větších. Používá ten samý postup tak, jak ho známe dnes, tj. napíše si dvě čísla pod sebe a výsledek daného rozdílu píše však nad těmito číslicemi, ne pod ně. Pokud však spodní číslice je větší než ta nad ní, přimyslíme si k menšenci pomyslnou jedničku, protože odčítat menší číslo od menšího „je nemožné“.

Jinak je to však u jedné provensálské desky od nějakého neznámého autora, kde se „Záporná hodnota (–10 a $\frac{3}{4}$ míň než nic) bez nějakého rozvážení uvádí jako správná.

To, že tento výsledek byl neobvyklý, můžeme vidět z toho, že pouze v téhle úloze byla nalezená hodnota do rovnice dosazena a provedena zkouška. Podle našich dnešních znalostí bylo poprvé připuštěno záporné řešení a to sice čistě z matematických důvodů.“

Z matematických důvodů číslo po dosazení dané rovnici vyhovovalo, avšak v praxi si lidé nedokázali pod touto hodnotou nic představit. (Scholz 1990, str. 142)[2]

6.2 Počátky symbolické algebry

Rozvoj písemného počítání a algebraických metod vedly v druhé polovině 15. století k vytvoření celé řady algebraických symbolů a základů algebraického kalkulu. Leonardo Pisánský se nedostal dále než k označení veličin písmeny, avšak s nedostatkem rozlišit známé a neznámé veličiny nebo jejich mocniny. Poté nastal v dějinách symboliky převrat, který souvisel především s vytvořením symbolů pro algebraické úkony. Teprve pak mohly být slovní poučky nahrazeny skutečnými vzorci a obecné algebraické výrazy se mohly stát předmětem počítání. Jiným rozhodujícím momentem bylo vytvoření diferencované symboliky pro různé kategorie algebraických veličin.

Důsledky těchto změn daleko přesáhly rámec samotné algebry. (Juškevič 1961, str. 407)

6.2.1 Johann Widmann (cca 1460 – 1498)

Český rodák přednášející na univerzitě v Lipsku algebru, je autorem díla „Hbité a pěkné počítání pro všechny kupce“ („Behende und hübsche Rechnung auf allen Kaufmannschaft“).

V tomto díle se projevil vliv Leonarda Pisánského. V knize se poprvé objevují + (plus) pro sčítání a – (mínus) pro odečítání. O původu těchto symbolů se dnes vedou spory. Jedni je odvozují ze značek, jež se používaly na bednách zboží a naznačovaly, že váha bedny nedosahuje či přesahuje určenou váhu, čili označení přebytku nebo nedostatku. Jiní se domnívají, že jsou indického původu. Je však docela možné, že to byly původně

[2] Den negativen Wert für x (–10 a $\frac{3}{4}$ weniger als nichts) nahm er anscheinend ohne allzuviel Bedenken an, jedenfalls wird als Gut des ersten $-10\frac{3}{4}$ angegeben. Dass dieses Ergebnis doch ungewöhnlich war, ersieht man daraus, dass in dieser (und nur in dieser) Aufgabe die tatsächliche Erfüllung der Gleichungen durch Einsetzen der gefundenen Werte nachgeprüft wird. Gemäss unseren heutigen Kenntnissen wird hier zum ersten male eine negative Lösung zugelassen – und zwar aus rein mathematischen Gründen.“

zkratky slov, například znak + by mohl vzniknout ze znaku & (ampersand) zkráceně psané latinské spojky „et“ (česky „a“).

Symboly + a – se brzy ujaly jako symboly pro sčítání a odčítání. Před rokem 1489 se symboly + a – objevily pouze v několika matematických německých a latinských algebraických rukopisech, jež byly uloženy v Drážďanech. (Juškevič 1961, str. 407) Jak vidíme, Widmann byl tedy prvním známým autorem užívající znaky + a –, ale pravděpodobně se mohl inspirovat ze starších anonymních textů.

V druhé polovině 15. století byl v Itálii, rozdrobené na množství jednotlivých knížectví, z nichž každé mělo svou vlastní univerzitu, byl rozšířen zvyk, že přenášející a mezi nimi i matematikové často přecházeli z jedné univerzity na druhou. Tyto styky napomáhaly postupnému obohacování matematických znalostí, jejichž stále větší potřeba byla vyvolána jak sílícími kapitalistickými vztahy, tak i celou ekonomikou a technikou té doby (přechod od řemesla k manufakturám, vynález knihtisku a stále větší množství děl psaných národními jazyky), kterou přinesla renesance. (Juškevič 1961, str. 411)

Z tohoto období známe dva významné italské matematiky: Leonarda da Vinciho, Lucu Pacioliho a jednoho Francouze žijícího v tehdejší italské provincii Nicolase Chuqueta.

6.2.2 Leonardo da Vinci (1452 – 1519)

Leonardo da Vince, nejvýznamnější italský umělec, který věnoval taky pozornost matematice a astronomii, poukazoval na těsnou spojitost praxe a vědy. Jedna složka nemůže existovat bez druhé. Své vědecké myšlenky nevyložil v uceleném díle, ale v jeho poznámkových sešitech. Matematická tématika je v nich zastoupena cvičeními a úlohami, které slouží praktickým účelům, dále jsou v nich zachyceny některé filosofické problémy související s matematickými pojmy. Jeho zápisníky obsahují také zavedení symbolů + a –. (Juškevič 1961, str. 411)

6.2.3 Luca Pacioli (1445 – 1514/1517)

Luca Pacioli pocházel z kupeckých kruhů, později se stal mnichem a přednášel matematiku na různých univerzitách. Mezi jeho nejznámější práce patří „Soubor aritmetiky, geometrie, poměrů a proporcí“ („Summa de Arithmetica geometria Proportioni et Proportionalita“) z roku 1494. V tomto díle seznamuje Pacioli čtenáře s algebraickými symboly – caratteri algebraici. Pro neznámé a jejich mocniny užívá latinské ekvivalenty: res, census, cubus, … Z těchto ekvivalentů tvořil zkratky pomocí počátečních písmen. Pro aritmetické operace používal termíny piú, meno. Sčítání označuje $\tilde{p}$, které se čte jako piu nebo plus, odčítání $\tilde{m}$, čtené jako meno nebo minus, např. $RV40\tilde{m}R320$ bychom dnes psali $\sqrt{40-\sqrt{320}}$.

Druhou odmocninu označuje znakem *R* (z latinského radix nebo italského radice, což znamená kořen), *V* je začátečním písmenem slova universale – všeobecný (tehdy se místo *u* psalo *v*). (Juškevič 1961, str. 414) Je velmi pravděpodobné, že početní znaménka plus a minus vznikla rychlým psaním a zkomolením těchto počátečních písmen *p* a *m* v nynější tvar.

„I když odečítané veličiny ještě nejsou chápány jako samostatná záporná čísla, přesto jsou pravidla násobení velmi přesně vypracována:

1) plus násobeno plus dává plus,
2) minus násobeno minus dává plus,
3) plus násobeno minus dává minus,
4) minus násobeno plus dává minus.“

Jak píše Juškevič, tak druhé pravidlo se mu zdálo zarážející, protože $\tilde{m}4$ je menší než nula. Pacioli v této době ještě neznal důkaz v rámci jedno zajímavého příkladu, a to že $10\tilde{m}2$ se rovná 8, tudíž $10\tilde{m}2$ krát $10\tilde{m}2$ se rovná 64, po vynásobení do kříže musí vyplynout, že $\tilde{m}2$ krát $\tilde{m}2$ musí být 4.

Údajně k tomuto zavedení záporných čísel by mohlo podstatně přispět rozvíjející se účetnictví, kdy bylo třeba pečlivě rozlišovat příjmy a výdaje, hotovost a dluhy.

6.2.4 Nicolas Chuquet (1455 – 1488)

Jeho nejvýznamnější francouzsky psané dílo je „Triparty en la science des nombres“ (Věda o číslech ve třech dílech). Stejně jako Pacioli uvádí i Chuquet pravidla operací se zápornými čísly a používá pro sčítání a odčítání symboly $\tilde{p}$ a $\tilde{m}$.

Symbol $\tilde{m}$ slouží i jako označení záporných čísel, která Chuquet nazývá „ung moins“ (tj. méně). (Juškevič 1961, str. 417)

Na místo rovnice $8x^3 \cdot 7x^{-1} = 56x^2$ píše „8^3 násobené $7^{\tilde{m}1}$ dává 56^2“. Směle přitom zavádí nejenom nulový, ale také záporný exponent. Záporný exponent je vlastně poprvé popsán jako jakési samostatné záporné číslo, nejedná se o dluh ani o odečítání dvou čísel jako u jeho předchůdců.

Zajímavé jsou Chuquetovy úlohy, při jejichž řešení se používají záporná čísla. Tak třeba kořen x dané rovnice, kde $x = -7\frac{3}{11}$ píše $20 - x = 27\frac{3}{11}$. O řešení se zde říká, že tento výpočet, kteří někteří považují za „nemožný“, je správný. V jiné úloze se záporné řešení vysvětluje jako peněžní dluh. (Juškevič 1961, str. 419). Používal taky záporná čísla uvnitř odmocnin, např. $\sqrt{7x-3}$ jako $R^2 7^1 \tilde{m} 3$.

Počátkem 16. století evropská matematika překračuje rámec znalostí, které tvořilo dědictví antického Řecka a orientálních národů. V aritmetice a algebře se krok za krokem vytvářela vyhovující symbolika, bez níž by nebyl možný další rozvoj teorie rovnic. Byly zavedeny lomené a záporné exponenty a záporná čísla.

6.2.5 Michael Stifel (1487 – 1522)

Michael Stifel byl jeden z nejvýznamnějších matematiků 16. století. Byl to taky významný teolog a reformátor. Jeho jméno se vyskytovalo v mnoha podobách: Styfel, Styffel, Stieffell, Stieffel nebo taky latinský ekvivalent Stifelius. Studoval jeden rok na tehdy nově založené univerzitě ve Wittenbergu, kde po jednom roce studia obdržel titul M. A. Po studiu vstoupil do augustinského kláštera v Esslingu, kde se z něho stal kněz. Měl soucit k chudým lidem, a tak nevybíral peníze za vyproštění lidí od hříchů. Později se stal farářem v Lochau, kde se intenzivně zabýval vlastnostmi čísel a snažil se pomocí nich vyložit skrytý význam textů v Bibli. V roce 1533 předpověděl konec světa, který se samozřejmě neuskutečnil. Později se Stifel stal profesorem matematiky na Univerzitě v Jeně.

K jeho dílům se řadí latinsky psaná *Arithmetica integra* (Nürnberg, 1544), ve které objevil podstatu záporných čísel, stanovil, že jsou menší než nula, nazývá je numeri absurdi a řadí je na stejnou úroveň k ostatním číslům. Jako první popsal standardní metodu pro řešení kvadratických rovnic, používal jak záporné tak kladné koeficienty na rozdíl od Cardana, dále se zabývá číselnými řady, odmocninami vyšších stupňů, zavedl exponent do matematiky a položil základ logaritmů.

„Používáme deset znaků k nezbytnému popsání číslic, totiž 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Prvních devět označujeme jako označující, každá z nich označuje číslo v pořadí, tak jak je vidíme sestaveny. Například 7 označuje číslo sedm, jak můžeme vidět, že tento znak stojí na sedmém místě, atd. Desátý znak se nazývá však nula, protože stojí samo nebo protože označuje nic na nejkrajnějším konci znaku čísla.

Nejkrajnější znak se však nazývá ten, který stojí na poslední levé straně v řadě znaku, které představuje jednotlivé číslo. První znak bude ten, který stojí na pravé straně jako poslední, jako zde u čísla 324. První znak je 4 a poslední znak je 3. Když avšak jednotlivé znaky představují jednotlivá čísla, jako zde 3, 2, 4, pak bude 3 první znak a 4 bude platit jako poslední.“ (Stifel 1544, str. 17)[3]

Stifel uvádí znak 0 (nula) jako plnohodnotnou číslici k základním číslicím jedna až devět. Může stát taky samo jako ostatní číslice, avšak nepíšeme ji na levý kraj daného čísla, kde je zbytečná, např. $0324 = 324$.

„Nulu nazýváme také cifrou, zabírá totiž pouze místo, tak jako např. zde: 304. Způsobuje, že poslední znak, totiž 3, znamená tři sta, bez nuly (jako 34) by to označovalo pouze třicet.“ (Stifel 1544, str. 17)[4]

Zde potvrzuje, že nula je opravdu plnohodnotná číslice, která ztrácí svou funkci jen v případě levého okraje u čísel, jak už bylo zmíněno výše. To, že není třeba psát nulu (nuly) v pravém okraji u desetinných čísel, Stifel nezmiňuje, i když pracuje s iracionálními čísly, pracuje zatím pouze se zlomky nebo s odmocninami.

Spolu se sčítáním, násobením a dělením jak přirozených čísel, tak i u zlomků popisuje Stifel odčítání následovně: „Prostřednictvím odčítáním je dosaženo toho, že u odčítání nějakého čísla od druhého, které je větší než to druhé, můžeme vidět, kolik zbyde…“.

[3] „Wir gebrauchen zehn Zeichen als notwendig zur Darstellung der Zahlen, nämlich 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Und die neun ersten nennt man bezeichnend, bezeichnet doch jede von ihnen die Zahl in ihrer Ordnung, wie du sie hingestellt siehst. Z. B. 7 bezeichnet die Siebenzahl, wie man ja auch sieht, dass das Zeichen an der siebten Stelle steht, usw. Das zehnte Zeichen aber wird Null genannt, weil es allein stehend oder, am äussersten Ende der Zeichen einer Zahl nichts bezeichnet.
Jenes Zeichen aber wird äussestes genannt, das als letztes auf der linken Seite in der Reihe der Zeichen steht, die eine einzelne Zahl darstellen. Jenes Zeichen aber wird das erste sein, das auf der rechten Seite als letztes steht, wie hier bei der Zahl 324. Das erste Zeichen ist 4 und das letzte ist 3. Wenn jedoch einzelne Zeichen einzelne Zahlen darstellen, wie hier 3, 2, 4, wird 3 das erste Zeichen sein und vier wird als letztes gelten.“

[4] „Das Zeichen Null (das man auch Ziffer nennt) bewirkt, es besetzt nämlich nur einen Platz, wie hier in 304. Es bewirkt aber, dass das letzte Zeichen, nämlich 3, dreihundert bedeutet, das ohne Null (wie etwa bei 34) nur dreissig bezeichnen würde, usw.“

(Stifel 1544, str. 18)[5] Dále popisuje postup při odčítání dvou čísel pod sebe, tak jak ho známe dodnes. Zajímavé na celé věci je spíše to, že zmiňuje pouze odčítání menšího čísla od většího, nezmiňuje se o opačné situaci, ale zároveň ji ani nevyvrací.

Velmi zajímavý je text Regula falsi. Je to algoritmus doplněný obrázky, jak najít hledané číslo takové, od kterého když odečteme 2, tak dostaneme číslo 3.

„Vezmi dvě libovolná čísla, menší a větší, a vyzkoušej, o jak moc se od každého z nich liší po odečtení dvojky tak, aby nevyšlo námi hledané číslo. Stále a všude si všímej toho, jestli je chybějící rozdíl nebo „nesprávnost“ větší nebo menší než hledané číslo. Jestli totiž u obou po každé vyjde plus nebo minus, pak bude následovat odčítání a ne sčítání. Pokud ale z jednoho čísla vyjde plus a u druhého vyjde minus, potom následuje sčítání a žádné odčítání. Následuje první sčítání (odčítání) těch falešných čísel…, pak následuje násobení do kříže…, pak následuje druhé sčítání (odčítání)… a nakonec dělení rozdílu chybějících rozdílů…“ (Stifel 1544, str. 159)[6]

To, jestli se budou čísla po vynásobení do kříže sčítat nebo odčítat, přichází Stifel postupným vylepšováním algoritmu a po postupném zkoušení ostatních možností. Boční strany čtverce značí nápisem Minus nebo Plus podle toho, jestli po odečtení dvojky, je třeba k číslu dolní zbytek přidat nebo ubrat. Pokud je třeba něco dodat, tak je strana označena nápisem Minus, což značí ve smyslu úbytek, pokud je označena nápisem Plus, je tím myšlena opačná analogie. Podle těchto nápisů pak z algoritmu vyplývá, jestli po násobení do kříže je třeba sčítat nebo odčítat. Při odčítání se opět automaticky odčítá menší od většího. O jiné možnosti není opět ani uvažováno, výsledek by nebyl stejně správný. Po tomto následuje řada podobných algoritmů s tabulkami a s nápisy Plus a Minus na různé příklady. Až do téhle kapitoly v knize

[5] „Durch die Substraktion wird bewirkt, dass beim Abziehen einer Zahl von einer anderen, die grösser ist als diese, man sehen kann, wie viel übrig bleibt, …“

[6] Text der Regula falsi: „Nimm zwei beliebige Zahlen, kleine oder grosse, und prüfe beide entsprechend dem Wortlaut des vorgelegten Beispiels, um zu sehen, wie weitgehend es bei jeder von beiden fehlt, so dass das Gesuchte nicht herauskommen kann. Du wirst aber immer und überall beachten, ob die fehlerhafte Differenz oder Falschheit grösser oder kleiner als die gesuchte Zahl ist. Wenn nämlich beide Male entweder ein Plus oder ein Minus herauskommt, dann erfolgt eine Substraktion, nicht aber eine Addition. Wenn aber aus einer Zahl ein Plus herauskommt und bei der anderen ein Minus, dann erfolgt eine Addition und keine Substraktion. Es erfolgt aber die erste Addition (oder Substraktion) zwischen falschen Zahlen, natürlich wird entweder die eine zur anderen addiert oder die eine von der anderen substrahiert. Sodann erfolgt die Multiplikation über Kreuz, wobei die eine der falschen Zahlen die dastehende andere falsche Zahl multipliziert… dann erfolgt die zweite Addition (oder Substraktion)… und schliesslich die Division, bei der entweder das Aggregat der Produkte oder deren Rest dividiert wird, und zwar entweder durch das Aggregat der falschen Zahlen oder durch deren Rest.“

Stifel vypisuje znaménka stále slovy Plus nebo Minus nikoliv značkami + a –, jak je známe dnes. To můžeme vidět až v dalším oddíle, v knize číslo II. o iracionálních číslech.

V oddíle o iracionálních číslech udává, že ne všechna čísla jdou sečíst nebo odečíst pod sebe na jeden tvar (číslo), ale sčítání je neúplné, tzn. ve výrazu zůstane znaménko plus nebo minus, aniž by šel dále sečíst nebo odečíst. Na tomto místě poprvé zavádí a používá symbol pro plus a minus, a to + a –. Jedná se o odmocniny, ze kterých nelze částečně odmocnit takový výraz, aby pod odmocninou zbylo stejné číslo, a dále se jedná o různá čísla, u kterých neznáme proporci (rozměr). Stifel tyhle druhy čísel nazývá jako „inkommensurable Zahlen und cossische Zahlen“. U sčítání těchto čísel píše: „položíme znak + ke sčítajícím číslům samotným a řekneme, že tak je sčítání kompletní. A odtud mluvíme o znaménku pro sčítání.“ Podobným způsobem vysvětluje odčítání. (Stifel 1544, str. 179)[7]

„O znacích plus a minus a o absurdních číslech z pohodlnosti.

Musíme přece vědět, že tyhle znaky používáme ze dvou nezbytností. Za prvé je používáme u takových čísel, jejichž proporce není přesně určena, a to u iracionálních čísel. Za druhé je používáme u takových čísel, jejichž proporce je neznámá a rádi bychom ji zjistili (jako u kossistických čísel), když hledáme čísla, která jsou nám skryta. Kromě této dvojité potřeby používáme je také z pohodlnosti…, takže ne z nezbytnosti, ale z pohodlnosti.“ (Stifel 1544, str. 379)[8]

Stifel chtěl říct, že znaménka plus a minus používáme u iracionálních čísel (převážně měl na mysli odmocniny) nebo u různých neznámých, které nelze sečíst (odečíst), tzn., kde nelze ze dvou operandů vytvořit jeden výsledek. Tato znaménka nesloužila jako označení korektní operace sčítání, kde ze dvou operandů dostaneme jeden výsledek, ale

[7] Wenn zwei inkommensurable Zahlen zu addieren sind oder irgend zwei zahlen, deren Proportion man nicht kennt (wie bei den cossischen Zahlen fast überall geschieht), dan setzen wir das Zeichen + zu den zu addierenden Zahlen selbst und sagen, so sei die Addition vollständig. Und daher spricht manauch vom Additionszeichen. In gleicher Weise nennen wir das Zeichen – das Zeichen der Subtarktion…

[8] „Von Plus- und Minus-Zeichen und von absurden Zahlen:
Diese Zeichen verwenden wir aus einer doppelten Notwendigkeit. Zuerst nämlich gebrauchen wir jene bei solchen Zahlen, deren Proportion nicht genau anzugeben ist, etwa bei irrationalen Zahlen. Zweitens gebrauchen wir sie bei solchen Zahlen, deren Proportion unbekannt ist, und möge sie auch genau sein (wie bei cossischen Zahlen), wenn wir Zahlen suchen, die uns verborgen sind. Doch ausser dieser doppelten Notwendigkeit verwenden wir sie auch aus Bequemlichkeit, um damit etwas darzustellen oder zu lehren, wie man mich hier gleich gebrauchen sehen wird, aso nicht aus Notwendigkeit, sondern aus Bequemlichkeit.“

jako značka, která vyjadřovala, že dva výrazy patří k sobě, aniž by šly sečíst nebo odečíst. Tady výrazy jsou důležité, tady je musíme použít. To, jestli se používají jako značení pro redukci dvou operandů na jeden výsledek, považuje Stifel za „pohodlnost“, jako nějaký mezivýpočet nebo pomocník k dosažení správného výsledku. Např. $10+8$ můžeme evidentně psát 18. Stifel zde zavádí počítáni s ***termy***, a to jako aritmetickými (z pohodlnosti), tak s algebraickými (to jsou ta kossistická čísla). Tedy z našeho pohledu přechází od aritmetiky (zaměřené na určení hodnoty výrazu $10+8$) k algebře, která spočívá v počítání s výrazy (a ne s čísly). Tedy to je zásadní posun, a proto je jeho knížka významným mezníkem v dějinách algebry. Systematicky se zde vyšetřují pravidla na počítání s algebraickými výrazy.

Tady jsou vybrány některé příklady: (Stifel 1544, str. 379)

1) Speciální případ:

$$\begin{array}{c} 8+5 \\ \underline{10+2} \\ 3-2 \end{array}$$

Tenhle případ se týká odečítání. Tedy od prvního termu odečítáme druhý term. Ukazuje, že stejný výsledek, tedy 1, dostaneme nejenom pomocí možnosti $13-12$, ale taky když odečteme od sebe jednotlivé členy v obou termech. Tzn. $8-10$ sečteme s $5-2$. Aby se ale vyhnul zápornému číslu na začátku termu, tak pořadí členů přehodí, kde 3 je rozdíl druhých termů a -2 je rozdíl prvních termů, místo $-2+3$ píše $3-2$.

2) Příklad na sčítání:

$$\begin{array}{c} 8+5 \\ \underline{10-4} \\ 18+1 \end{array}$$

Tady se nám poprvé vyskytuje rozdíl ve druhém termu. Sečte první členy a druhé členy termů a bez problému dostává požadovaný výsledek.

3) Příklad na odčítání:

$$\begin{array}{c} 18+5 \\ \underline{8-4} \\ 10+9 \end{array}$$

Na tomto příkladu si můžeme opravdu ověřit, že $5-(-4)$ je opravdu $+9$. $23-4$ je 19, $18-8$ dá 10, tudíž $5-(-4)$ musí nezbytně dát $+9$.

4) Příklady na násobení:

$$\begin{array}{c} 0+6 \\ 0+4 \\ \hline 0+24 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 0-6 \\ 0-4 \\ \hline 0+24 \end{array}$$

5) Příklady na dělení

$$\begin{array}{c} 0-24 \\ 0-6 \\ \hline 0+4 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 0+24 \\ 0-6 \\ \hline 0-4 \end{array}$$

Zvláštní, že i tam, kde jsou členy sčítány, kde by vůbec nebylo třeba psát 0, jsou přesto zapisována ve tvaru 0 + číslo.

Stifel nepracuje s izolovaným číslem, ale to číslo se zapíše pomoci aritmetického termu jako součet nebo rozdíl dvou čísel, a pak využije, že výsledek operace nezávisí na pořadí, v jakém uskutečňuje příslušné operace. Místo memorování pravidel pro počítání se zápornými čísly je asi vhodnější, stejně jako to udělal Stifel, záporná čísla zasadit do bohatší struktury (v jeho případě aritmetických termů) a experimentovat s nimi. Vidíme, že úlohy postupně komplikuje a postupně odhaluje pravidlo, že odečíst záporné číslo znamená přičíst opačné číslo, nebo vydělením či vynásobením vznikne kladné číslo. Zajímavé, že i před násobením či dělením kladných čísel, kde výsledek je taky kladný, zapisuje čísla jako term 0 + dané číslo. Pokud by nepotřebnou nulu vynechal, možná by ho to navedlo k tomu, že u i termu 0 – číslo, by použil samostatné znaménko u daného čísla bez nuly, tak jak ho známe dnes. K tomu se však dostane o kousek dál. Nedomyšleno zůstává taky to, jakou operaci vůbec provádí u jednotlivých příkladů. Proto uvádí vždy slovně ještě před danými příklady, o jakou operaci se bude jednat.

Až po výklad tohoto pravidla nepoužívá Stifel samostatná záporná čísla, pouze term v podobě rozdílu dvou čísel.

„Nejdřív odečtu 10 od 8 a nenajdu žádné číslo nad 0, které bych mohl najít podle správného pravidla pro odčítání. Když totiž číslo, od kterého je odečítáno, by bylo větší jak číslo, které odčítáme (když by tam stálo např. místo 8 číslo 12), pak bych mohl najít konečně skutečné číslo. A když ono číslo, od kterého musí být odečítáno, by bylo stejné číslo, které se odčítá (kdyby tam tedy stálo na místo 8 číslo 10), pak by zůstala přebytečná 0, takže nic (a ta stojí uprostřed mezi pravými a absurdními čísly). Když by avšak odčítající číslo bylo větší jak to, od kterého se odčítá, pak zůstane číslo pod nulou, takže pod nic, a tak musíme očividně psát $0-2$. Tak odčítám podobným způsobem potom $0-5$ od $0-2$ a obdržím $0+3$ totiž číslo nad nulou, takže pravé číslo." (Stifel 1544, str. 380)[9]

Velmi zajímavé pravidlo našel Stifel u geometrické posloupnosti. Jestliže vynásobíme, resp. vydělíme, umocněná čísla mezi sebou, dostaneme číslo, jehož mocnitel je součet, resp. rozdíl, původních mocnitelů při stejném mocněnci. Např. $\frac{1}{8}\cdot 64$ je 8, pak $-3+6$ dává 3, což je mocnitel dvojky, která nám po umocnění dává naši osmičku. Zde jsou už zapsány exponenty jako samostatná záporná čísla, v dalším výkladu je už používá tak, jak je známe dnes.

„Jak je možné, že při dělení čísla -24 číslem -6 nám vychází $+4$? Odpověď: Stejným způsobem jako z jedné minuty dělené „sextem" dostaneme 777 600 000 hodin, což je 88 716 let.

Stejně tak jako z důvodu, když $\frac{1}{2}$ dělená $\frac{1}{4}$ dostaneme číslo 2. Když budu dělit číslo -24 číslem -6, pak, říkáme, že číslo -6 je v číslu -24 čtyřikrát obsaženo. Tenhle kvocient musíme značit $+4$. Když totiž -6 od -24 odečtu, zůstane -18. A tak jsem jednou -6 od -24 odečetl. Tak odečtu -6 od -18 a zbyde mně -12, tak jsem dvakrát -6 od -24 odečetl. Za třetí odečítám -6 od -12, zbude mně -6. Takže jsem odečítal potřetí. U čtvrtého odečítání jsem vytvořil 4, kde zůstala 0. Takže lze vidět, že u absurdních čísel jde všechno absurdně nebo obráceně. Samozřejmě pravá čísla se skrze odčítání zmenšují a u absurdních čísel to jde tak, že se odčítáním zvětšují

[9] „Zuerst ziehe ich 10 von 8 ab und finde oberhalb von 0, als über Null, keine Zahl, die ich nach der richtigen Substraktionsregelnhinstellen könnte. Wenn nämlich die Zahl, von der abzuziehen ist, grösser wäre als die Zahl, die man abzieht (wenn z. B. anstelle von 8 die Zahl 12 dastünde), dann könnte ich schliesslich eine wirkliche Zahl hinsetzen. Und wenn jene Zahl, von der abgezogen werden muss, gleich der Zahl wäre, die abgezogen wird (wenn also anstelle von 8 die Zahl 10 dastünde), dann bliebe 0 übrig, also nichts (und dies steht in der Mitte zwischen echten und absurden Zahlen). Wenn jedoch die abzuziehenden Zahl grösser ist als jene, von der abgezogen wird, dann bleibt eine Zahl unter 0 übrig, also unter nichts, und so muss man offenbar 0 – 2 schreiben. So ziehe ich in ähnlicher Weise nachher 0 – 5 von 0 – 2 ab und erhalte 0 + 3, nämlich eine Zahl über Null, also eine echte Zahl."

a u sčítání se zmenšují, jako např. -6 přičteno k -4 nám dá -10, atd.“ (Stifel 1544, str. 381 – 382)[10]

Zde je vysvětlení proč -24 děleno -6 dá kladné číslo, a to $+4$. -6 je totiž v -24 čtyřikrát obsažena, tak jako je v jedné minutě obsažena hrozně malá část času, která vede k obrovskému výsledku, nebo tak jak je $\frac{1}{4}$ obsažena v $\frac{1}{2}$ dvakrát.

„Když totiž -24 vydělíme -6, pak vyjde $+4$, dělá potom $+4$ a -6 spolu vynásobeno -24. Platí totiž zcela obecně, že násobení je zkouška pro dělení a dělení je zkouška pro násobení, sčítání pro odčítání a odčítání pro sčítání.“ (Stifel 1544, str. 382)[11]

Stifel přirovnává tuhle situaci k dělení minuty hrozně malým číslem (mnohokrát menší než tisícina minuty), kde nám vyjde nějakých 88 716 let, nebo že $\frac{1}{2}$ děleno $\frac{1}{4}$ je 2.

Pokud dělíme např. $\frac{-24}{-6}$, pak říkáme, že -6 v -24 je čtyřikrát obsažena, proto je výsledek $+4$. Když totiž -6 odečteme od -24, dostaneme -18. Když -6 odečteme podruhé od -18, máme -12. Po dvou stejných krocích zjišťujeme, že -6 je obsažena v -24 právě čtyřikrát.

Stifel uvádí, že u absurdních čísel je všechno naopak. U pravých čísel se přirozeně při odečítání čísla zmenšují, u absurdních je to naopak, ta se při odečítání zvětšují a při sčítání se zmenšují. Např. -6 plus -4 dá -10. Násobení je zkouškou pro dělení a

---

[10] „Doch wie geschieht es, dass –24, durch –6 geteilt, +4 ergibt? Antwort: Auf die gleiche Weise, wie aus einer Minute, geteilt durch ein sextum (und dies ist unglaublich kleiner als der tausendste Teil einer Minute) 777600000 Stunden werden, die etwa 88716 Jahre ergeben.
Ebenso geschieht es aus dem Grund, aus dem $\frac{1}{2}$, geteilt durch $\frac{1}{4}$, die Zahl 2 ergibt. Wenn ich also –24 durch –6 dividiere, dann sage ich, dass –6 in –24 viermal enthalten sei. Und diesen Quotienten muss ich mit +4 notieren. Wenn ich nämlich –6 von –24 abziehe, bleibt –18 übrig. Und so habe ich einmal –6 von –24 abgezogen. Nun ziehe ich –6 von –18 ab, und es bleibt –12 übrig, so habe ich 2, also zweimal –6 von –24 abgezogen. Drittens ziehe ich –6 von –12 ab, und es bleibt –6 übrig. Also habe ich Dreiheit durch Substraktion erzeugt. Bei der vierten Subtraktion habe ich nun 4 hervorgebracht, wobei 0 übrig bleibt. Du siehst aber, dass bei absurden Zahlen alles absurd oder verkehrt vor sich geht. Natürlich geschieht es bei echten Zahlen, dass sie durch eine Substraktion vermindert werden, bei absurden Zahlen jedoch geht es so, dass sie durch Substraktion vergrössert werden. Da dies so ist, müssen sie auch durch Addition vermindert werden, wie z. B. –6 addiert zu –4 dann –10 ergibt. usw.

[11] „Wenn nämlich –24, geteilt durch –6, dann +4 ergibt, machen daher +4 und –6, miteinander multipliziert, –24. Es gilt nämlich ganz allgemein, dass die Multiplikation die Probe für die Division darstellt, und die Division für die Multiplikation, die Addition für die Subtraktion und die Subtraktion für die Addition.“

sčítání je zkouškou pro odečítání. Platí totiž, že -24 děleno -6 dává $+4$, potom $+4$ krát -6 dělá -24.

6.2.6 Girolamo Cardano (1501 – 1576)

Girolamo Cardano byl italský matematik, filosof, astronom a astrolog. Byl jedním z nejvýznamnějších představitelů rozvoje přírodních věd. V roce 1545 napsal spis zkráceně nazývaný Ars magna, ve kterém uveřejnil postupy na řešení rovnic 3. a 4. stupně, jejichž výsledkem jsou takzvané Cardanovy vzorce.

V úvodu knihy Cardano píše, že navazuje na Al-Chwárizmího na jeho tři typy kvadratických rovnic ($x^2 + ax = N$, $x^2 = ax + N$, $x^2 + N = ax$), dále na Lucu Paccioliho ($x^4 + N = bx^2$, $x^4 + bx^2 = N$, $x^4 = bx^2 + N$) a taky obdivuje Scipiona del Ferro, který vyřešil rovnice typu $x^3 + x = N$. Stejně jako jeho předchůdci a současníci i Cardano pracuje pouze s kladnými koeficienty.

Naproti tomu však pracuje bez problémů se zápornými čísly jako kořeny, vysvětluje, že každá sudá mocnina má jak kladný, tak ale i záporný kořen: „Pamatuj si, že odmocnina z 9 je rovna 3 a -3, protože mínus a mínus dává plus. Ale v případě liché mocniny, je držena vlastní přirozenost: není to plus, pokud to není odvozeno od kladného čísla a třetí mocnina, která je záporná nebo kterou nazýváme ‚debitum‘, nemůže být vytvořena nijak z kladného čísla.“ (Witmer 2007, str. 9 – 10)[12]

„Proto, jestli sudá mocnina je rovna číslu, její kořen má dvě řešení, jedno plus a jedno mínus, které jsou rovny sobě navzájem. Když $x^2 = 9$, x je 3 nebo -3.“ (Witmer 2007, str. 10)[13]

„Jestli čtvrtá mocnina a číslo jsou rovny druhé mocnině, jsou dvě řešení a zároveň jsou korespondující se zápornými výsledky. Např. $x^4 + 12 = 7x^2$, pak x je rovno 2, -2, $\sqrt{3}$ and $-\sqrt{3}$, tím pádem máme čtyři řešení, ale jestli jedno kladné řešení chybí, bude

[12] „It will be remembered also that 9 is derivable equally from 3 and –3, since a minus times a minus produces a plus. But in the case ofthe odd power, each keeps its own nature: it is not a plus unless it derives from a true number, and a cube whose value is minus, or what we call 'debitum', cannot be produced by any expansion of a true number. It behooves us to remember this very clearly.“

[13] „If, therefore, an even power is equal to a number, its root has two values, one plus, the other minus, which are equal to each other. As, if $x^2 = 9$, x is 3 or –3.“

chybět taky jedno záporné. Pokud není žádné kladné, nebude řešením ani žádné záporné.“ (Witmer 2007, str. 10 – 11)[14]

U některých typů rovnic se po výměně členů z jedné strany rovnice na druhou, může změnit znaménko kořene. Witmer uvádí, že se kořen stane záporným a zároveň falešným. (Witmer 2007, str. 20)

Zajímavé je, že Witmer uvádí kořen „záporný a zároveň falešný“, jako kdyby mezi tím byl nějaký rozdíl. Cardano tedy ve své knize uvádí pouze kladné koeficienty v rovnicích, za to kořeny připouští i záporné (falešné). Pozoruhodné je, že samostatná čísla (kořeny) si dokáže představit více než koeficienty u rovnic, které po dosažení kladného nebo i záporného kořene by daly nulu, tak jak to známe dnes. I když záporný koeficient naznačil už výše: „Třetí mocnina, která je záporná nebo kterou nazýváme ‚debitum‘, nemůže být vytvořena nijak z kladného čísla.“

Na počátku 16. století pracovali evropští matematici téměř výhradně s kladnými čísly. I když už můžeme pozorovat určité chápání dnešních záporných čísel v různých podobách, koeficienty algebraických rovnic i jejich řešeními musela být tehdy jen kladná čísla. Proto byly rozlišovány tři typy kubických rovnic bez kvadratického členu tak, že členy se vyskytovaly na levé či pravé straně, aby měly kladné znaménko. Italští matematici řešili každý ze tří výše uvedených typů kubických rovnic zvlášť. Popis algoritmů prováděných číselných operací byl pro jednotlivé typy rovnic modifikován tak, aby pokud možno nedocházelo k operování se zápornými čísly. Tento algoritmus dával jedno řešení dané rovnice. V některých případech však selhával. Bylo to v těch situacích, kdy bylo třeba odmocňovat záporná čísla. V takových situacích tyto rovnice ještě neměly pro matematiky 16. století žádné řešení.

6.2.7 François Viète (1540 – 1603)

Ve svém díle *In Artem Analytical Isagoge* nepřipouštěl v roli neznámých záporné veličiny, proto rozdíl dvou veličin. Například A planum (dimenze 2) – B quadratum

[14] „If the square of a square and a number are equal to a square, there are two true solutions and that there are, at the same time, corresponding and equal negative solutions. Thus, if I say $x^4 + 12 = 7x^2$, x equals 2, –2, $\sqrt{3}$ and $-\sqrt{3}$, and thus there are four solutions. But if a true solution is lacking, a negative one will also be lacking. Thus, if there is no true solution, a fictious one (for such we call that which is debitum or negative) is also lacking.“

(dimenze 4) označovalo to číslo, které dostaneme, když od většího odečteme menší, tedy v naší symbolice A – B nebo B – A. Každá neznámá byla kladná a měla dimenzi.

„Mějme dva rozměry, A a B, jeden větší a jeden menší. Menší je odčítán od většího." Jen stejně velké rozměry se dají odčítat, různě velké rozměry se sebou nic nedělají. Jen homogenní stupně (stupně o stejné velikosti) se mohou odčítat a dají opět výsledek daného stupně. Plus nebo mínus nedají žádné jiné dimenze, které se sčítaly nebo odčítaly. Pokud je třeba odečíst dvě různě dimenzionální výrazy, výraz se nezjednoduší, zůstane jen výraz mínus výraz druhé dimenze." (Viète 1591, str. 19)[15]

„Matematici obvykle záporná čísla značí symbolem –, přesto však, pokud není určeno, který z termů je větší a který menší, znak pro odčítání je =. Např. rozdíl mezi A a B by mohl být jak A = B, tak B = A." (Viète 1591, str. 19)[16]

6.2.8 René Descartes (1596 – 1650)

Francouzský filosof René Descartes sepsal knihu Geometria, která je rozdělena do třech částí. V roce 1649 byla přeložena z francouzštiny do latiny od jistého Francisce Schootena. Já budu pracovat s česko-latinskou verzí přeloženou od Jiřího Fialy vydanou 2010. V druhé knize „Geometrie" rozlišuje Descartes podle Fialy kořeny pravé [vrayes] a obrácené [renuersée] nebo menší než nic.

Ve třetí knize zaměřená na rovnice se uvádí: „Často se však stává, že některé z těchto kořenů jsou nepravé [fausses], čili menší než nic: např. když se předpokládá, že x označuje i nedostatek [le default] nějaké hodnoty, třeba $5x + 5 = 0$." Podle Descarta je kořenem téhle rovnice jeden nepravý kořen $+5$. Pod čarou Fiala taky vysvětluje, že „Descartes hovoří vždy o absolutní hodnotě, tj. říká-li, že 5 je nepravý, musíme rozumět -5". Tohle však platí pouze u označování kořenů rovnice, nikoliv u koeficientů rovnice, které nijak nerozlišuje, i když mají různá znaménka na rozdíl od Cardanova

[15] „Let there be two magnitudes, A and B, the former the greater, the latter the less. The smaller is to be subtracted from the greater. Since one magnitude is to be subtracted from another and homogeneous and heterogenous magnitudes do not affect one another, the two given magnitudes are homogeneous. Therefore the subtraction of the smaller from the larger is properly made by the sign of disjunction or substraction, and the disjoint terms will be A minus B if they are only simple lenghts or breadths. But if they are higher up in the series set out above or if, by their nature, they correspond to higher terms, they should be properly designated as, say $A^2 - B^p$ and so forth for the rest."

[16] „Usually analysts indicate a negative affection by the symbol –. If, however, it is not stated which term is greater and which smaller and yet a subtraction is to be made, the sign of difference is =, i. e., an undetermined negative. Thus supposing we had A and B, the difference would be A = B nebo B = A."

zápisu, z toho důvodu také přichází Descartes ještě před Sturmem na to, kolik může být v rovnici kořenů pravých a kolik nepravých. „Pravých kořenů v ní může být tolik, kolikrát se v ní změní znaménka + a –, a tolik nepravých, kolikrát se v ní objeví za sebou dva znaky + nebo dva znaky –. Navíc je snadné dosáhnout toho, aby se všechny kořeny jedné a téže rovnice, které jsou nepravé, staly pravými, a týmž prostředkem i toho, aby se kořeny, které byly pravé, staly nepravými: stačí změnit všechny znaky + nebo –, které jsou u druhého, čtvrtého, a šestého nebo dalších míst, odpovídajících číslům sudým, aniž bychom změnili znaménka u prvního, třetího, pátého a podobných, které odpovídají číslům lichým.“ (Fiala 2010, str. 10)

7 Závěr

Pojem záporných čísel, buď jako koeficient u rovnic, nebo jako rozdíl dvou čísel, byl chápán v různých částech světa, a následkem toho, rozvíjen velmi odlišně.

V čínském díle Matematika v devíti knihách, které bylo souhrnem matematického vědění celého tisíciletí př. n. l. se už rozlišovaly kladné a záporné koeficienty a také čísla, i když z počátku jen speciálními termíny, pak zvláštními tyčinkami a později také symboly. Tyhle termíny bychom mohli dnes přeložit do různých významů. Kladnost jako správnost nebo spravedlivost, záporná čísla jako lživá nebo jako dluh či nedostatek. Záporná čísla ve významu lživá však znamenala něco, o čem nemá smysl vůbec uvažovat, avšak naproti tomu význam nedostatek měl uplatnění v obchodnictví, a proto vznikala potřeba tenhle „nedostatek“ nějakým způsobem zapsat a poté zaznačit.

V Evropě se k myšlence záporných čísel dostává až Fibonacci na začátku 13. století ve formě kladného dluhu, tedy k tomu, co bylo v Číně samozřejmostí ještě před počátkem našeho letopočtu. Pacioli zavedl symbol pro odčítání, který pak Chuquet zavádí jako samostatné znaménko pro exponent. Michael Stifel zmiňuje znaménko mínus jako „neúplnou“ operaci (rozdíl) mezi dvěma operandy, které nejdou odečíst. Jedná se buď o neznámé různého stupně, nebo dvě různá iracionální čísla, na základě čehož pak přijde k zápisu záporných čísel, jako rozdíl 0 a daného čísla. Girolamo Cardano neuznává záporná čísla jako koeficienty rovnic a rozděluje rovnice na několik typů, kde všechny koeficienty jsou kladné, kořeny však připouští i záporné. Teprve René Descartes v první polovině 17. století uvádí rovnice se zápornými koeficienty, záporná řešení však zůstávají falešná.

Matematici byli dlouho opatrní, než zařadili záporná čísla na stejnou úroveň čísel kladných. Tomu napomohl až později Newton, který poukázal na fyzikální význam záporných čísel jako rychlost odpovídající pohybu v opačném směru.

Jak jsme se mohli přesvědčit, tak se záporná čísla objevovala matematikům už od pradávna. Narozdíl od kladných čísel, kde k významu byl přiřazen symbol, bylo z daných výpočtů vedoucích na záporná čísla, daleko problematičtější k nim objevit objektivní význam reality, ať už ve formě dluhu či opačného směru.

8 Seznam použitých informačních zdrojů

CARDANO, Girolamo a T WITMER. *The rules of algebra: Ars magna*. Mineola, N.Y.: Dover Publications, 2007, xxiv, 267 s. ISBN 0-486-45873-3.

DESCARTES, René. *Geometrie*. 1. vyd. Praha: Oikoymenh, 2010, 106 s. ISBN 978-80-7043-961-6.

FABINGER, František. O vývoji čísel, číslovek, číslic. [IV.]. In: *Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*. 3.vyd. 1904, (33), s. 297-307. Dostupné také z: http://dml.cz/dmlcz/123980

FIBONACCI, Leonardo a L. SIGLER. *Fibonacci's Liber abaci: a translation into modern English of Leonardo Pisano's Book of calculation*. New York: Springer, c2002, viii, 636 p. ISBN 0-387-95419-8.

HUDEČEK, Jiří. 7. Přebytek a nedostatek. In: *Sbírka početních metod z doby Han s komentářem Liu Huie z doby Wei a Li Chunfenga a dalších z doby Tang.: Překlad, vysvětlivky a úvod*. Praha: Katedra didaktiky matematiky MFF UK, 2008, s. 168-184. ISBN 978-80-7378-046-3. Dostupné také z: http://dml.cz/handle/10338.dmlcz/400844

JUŠKEVIČ, Adolf Pavlovič. *Dějiny matematiky ve středověku*. 1. vyd. Praha: Academia, 1978, 446 s.

KVASZ, Ladislav. *Historické aspekty vyučování algebry*.

O'CONNOR, J. J. a E. F. ROBERTSON. *Michael Stifel* [online]. 2012 [cit. 2015-07-13]. Dostupné z: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Stifel.html

SCHOLZ, Erhard. *Geschichte der Algebra: eine Einführung*. Mannheim: BI-Wissenschaftsverlag, 1990, 506 s. ISBN 3-411-14411-4.

STIFEL, Michael, Nachwort von Eberhard KNOBLOCH a deutsche Übersetzung von Eberhard Knobloch und Otto SCHÖNBERGER. *Vollständiger Lehrgang der Arithmetik*. Würzburg: Königshausen & Neumann, 2007. ISBN 978-3-8260-3561-6.

VIÈTE, François. *The analytic art: nine studies in algebra, geometry and trigonometry from the Opus restitutae mathematicae analyseos, seu Algebra nova*. Mineola, N.Y.: Dover Publications, 2006, 450 s. ISBN 0-486-45348-0