Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DISERTAČNÍ PRÁCE

Eduard Omasta

Choquetova teorie a Dirichletova úloha

Katedra matematické analýzy

Vedoucí disertační práce: prof. RNDr. Jaroslav Lukeš, DrSc.

Studijní program: matematika
Studijní obor: matematická analýza

Praha 2016

Ďakujem prof. RNDr. Jaroslavovi Lukešovi, DrSc. za odborné vedenie pri vypracovávaní dizertačnej práce, za jeho cenné rady, pripomienky a podnety. Ďakujem za venovaný čas a trpezlivosť.

Ďakujem tiež prof. RNDr. Ivanovi Netukovi, DrSc. a prof. RNDr. Jánovi Malému, DrSc. za pripomienky a vylepšenia k práci.

Prohlašuji, že jsem tuto disertační práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V __________ dne ________

____
Eduard Omasta

Název práce: Choquetova teorie a Dirichletova úloha

Autor: Mgr. Eduard Omasta

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí disertační práce: prof. RNDr. Jaroslav Lukeš, DrSc., Katedra matematické analýzy

Abstrakt:

V práci se zabýváme prostorem $\mathbf{H}(K)$ funkcí harmonických na kompaktu v klasické i abstraktní teorii potenciálu. Nejdříve v klasické teorii uvádíme několik ekvivalentních charakterizací tohoto prostoru, z nichž vnitřní charakterizace, jako podprostoru těch funkcí na kompaktu K, které jsou jemně harmonické na jemném vnitřku K, nám později slouží jako definice $\mathbf{H}(K)$ v abstraktní teorii potenciálu.

Dále se zabýváme řešením Dirichletovy úlohy pro otevřenou množinu a pro kompakt především s ohledem na podtřídy funkcí první Baireovy třídy. Výsledky dokázané nejdříve v klasické teorii potenciálu pak zobecňujeme do abstraktní teorie potenciálu, a to najdříve s využitím elementárnějších prostředků do harmonických prostorů s axiomem dominance a pak s využitím silnějších prostředků i do harmonických prostorů s axiomem polarity.

Věnujeme se taky abstraktnějšímu problému aproximace rozdíly zdola polospojitých funkcí v obecnějším kontextu binormálních topologických prostorů.

Klíčová slova: Choquetova teorie, Dirichletova úloha, harmonické funkce na kompaktu, podtřídy funkcí první Baireovy třídy

Title: Choquet Theory and Dirichlet Problem

Author: Mgr. Eduard Omasta

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: prof. RNDr. Jaroslav Lukeš, DrSc., Department of Mathematical Analysis

Abstract:

In our dissertation we deal with the space $\mathbf{H}(K)$ of harmonic functions on a compact space in classical and abstract potential theory. Initially, we prove several equivalent characteristics of this space in classical potential theory. The internal characterization, which describes $\mathbf{H}(K)$ as a subspace of those continuous functions on a compact space K which are finely harmonic on the fine interior of K, is then used as the definition of $\mathbf{H}(K)$ in abstract potential theory.

Further we concentrate on the solution of the Dirichlet problem for open and compact sets mainly with regards to its relation to subclasses of Baire class one functions. The results, proved at first in classical potential theory, are later generalized to abstract potential theory. With a use of more elementary tools we initially prove these results in harmonic spaces with the axiom of dominance and, subsequently, using stronger tools we generalize them to harmonic spaces with the axiom of polarity.

We engage also in a more abstract problem of approximation by differences of lower semicontinuous functions in a more general context of binormal topological spaces.

Keywords: Choquet theory, Dirichlet problem, harmonic functions on compact set, subclasses of Baire class one functions

Názov práce: Choquetova teória a Dirichletova úloha

Autor: Mgr. Eduard Omasta

Katedra: Katedra matematickej analýzy

Vedúcí dizertačnej práce: prof. RNDr. Jaroslav Lukeš, DrSc., Katedra matematickej analýzy

Abstrakt:

V práci sa zaoberáme priestorom $\mathbf{H}(K)$ funkcií harmonických na kompakte v klasickej aj v abstraktnej teórii potenciálu. Najprv v klasickej teórii podávame niekoľko ekvivalentných charakterizácii tohto priestoru, z ktorých vnútorná charakterizácia, ako podpriestor tých spojitých funkcií na kompakte K, ktoré sú jemne harmonické na jemnom vnútri K, nám neskôr slúži ako definícia $\mathbf{H}(K)$ v abstraktnej teórii potenciálu.

Ďalej sa zaoberáme riešením Dirichletovej úlohy pre otvorenú množinu a pre kompakt hlavne s ohľadom na vlastnosti tohto riešenia vzhľadom k podtriedam funkcií prvej Baireovej triedy. Výsledky dokázané najprv v klasickej teórii potenciálu potom zovšeobecňujeme do abstraktnej teórie potenciálu, a to najprv s použitím elementárnejšícj prostriedkov do harmonických priestorov s axiómou dominancie a potom s použitím silnejších prostriedkov aj do harmonických priestorov s axiómou polarity.

Venujeme sa tiež abstraktnejšiemu problému aproximácie rozdielmi zdola polospojitých funkcií vo všeobecnejšom kontexte binormálnych topologických priestorov.

Klúčové slová: Choquetova teória, Dirichletova úloha, harmonické funkcie na kompakte, podtriedy funkcií prvej Baireovej triedy

Obsah

1 Úvod

V práci sa zaoberáme niektorými vlastnosťami harmonických funkcií na otvorenej množine a na kompakte v klasickej a v abstraktnej teórii potenciálu.

Po zavedení základných označení uvádzame v kapitole 3 základné pojmy a tvrdenia z klasickej teórie potenciálu, funkčných priestorov a Baireovych tried funkcií potrebné v ďalších kapitolách. Posledný článok tejto kapitoly je venovaný abstraktnej teórii potenciálu.

V poslednej dobe sa v článkoch venovaných Choquetove teórii funkčných priestorov skúmali predovšetkým dva hlavné príklady – harmonický a konvexný. V harmonickom prípade pre otvorenú, relatívne kompaktnú množinu U je funkčný priestor $\mathbf{H}(U)$ tvorený všetkými spojitými funkciami na $\overline{U}$, ktoré sú harmonické v U. V konvexnom prípade pre kompaktnú konvexnú podmnožinu X lokálne konvexného topologického priestoru je funkčný priestor $A^c(X)$ tvorený všetkými spojitými afinnými funkciami na X. V našej práci venujeme pozornosť predovšetkým ďalšiemu priestoru $\mathbf{H}(K)$, pričom niektoré tvrdenia sú inšpirované priestorom $\mathbf{H}(U)$.

Kapitola 4 obsahuje ekvivalentné charakterizácie priestoru $\mathbf{H}(K)$ v klasickej teórii potenciálu: vonkajšiu charakterizáciu ako uniformný uzáver funkcií harmonicky rozšíriteľných na nejaké okolie kompaktu K, vnútornú charakterizáciu ako podpriestor tých spojitých funkcií na kompakte K, ktoré sú jemne harmonické na jemnom vnútri K, ako aj charakterizácie pomocou $\mathbf{H}(K)$-reprezentujúcich, $\mathbf{H}_0(K)$-reprezentujúcich a Jensenovych mier a pomocou množiny ich extremálnych bodov. Vnútornú charakterizáciu priestoru $\mathbf{H}(K)$ neskôr používame ako definíciu $\mathbf{H}(K)$ v abstraktnej teórii potenciálu v 7. kapitole.

Tieto ekvivalentné charakterizácie priestoru $\mathbf{H}(K)$ sú známe, avšak pôvodný dôkaz ekvivalencie vnútornej a vonkajšej charakterizácie v [DG] využíva pravdepodobnostné metódy, kým náš dôkaz je analytický.

V 5. kapitole sa venujeme vlastnostiam PWB-riešenia Dirichletovej úlohy pre otvorenú množinu a pre kompakt. Analogicky k práci [HOR] definujeme podtriedu $B_{1/2}(\mathcal{H})$ triedy $B_1(\mathcal{H})$ funkcií prvej Baireovej triedy pre funkčný priestor $\mathcal{H}$ a následne dokazujeme, že PWB-riešenia Dirichletovej úlohy ležia v tejto podtriede.

Tvrdenie 5.1 je zovšeobecnením tvrdenia z [LMNSS, Theorem 3.2], ako ukazujeme v Príklade 5.3. Navyše dôkaz podaný v tejto práci je elementárnejší ako dôkazy uvádzané v [LMNSS]. Novým výsledkom je tiež Tvrdenie 5.4 týkajúce sa PWB-riešenia Dirichletovej úlohy pre kompakt.

Vo Vete 6.7 ďalšej kapitoly vyšetrujeme aproximáciu rozdielmi zdola polospojitých funkcií vo všeobecnejšom kontexte binormálnych topologických priestorov. Ako ukazujeme v Tvrdení 6.10, ohraničenosť aproximovanej funkcie nezaručuje možnosť aproximácie ohraničenými funkciami. V prípade reálnych funkcií uvádzame v Tvrdení 6.12 mierne zosilnenie známeho tvrdenia o existencii ohraničenej funkcie prvej Baireovej triedy, ktorú nemožno aproximovať rozdielmi ohraničených, zdola polospojitých funkcií.

V kapitole 7 zovšeobecňujeme výsledky z Tvrdenia 5.1 a Tvrdenia 5.4 do abstraktnej teórie potenciálu, a to najprv do harmonických priestorov s axiómou dominancie (Tvrdenie 7.1 a Tvrdenie 7.2) a s použitím silnejších prostriedkov (smearing lema) aj do harmonických priestorov s axiómou polarity (Tvrdenie 7.9 a Poznámka 7.10).

2 Základné označenia

Všetky topologické priestory, ktoré budeme uvažovať, budú Hausdorffove.

Množinu prirodzených, celých, racionálnych a reálnych čísel budeme označovať $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$.

Pre ľubovoľnú podmnožinu M topologického priestoru X označíme symbolmi M°, $\overline{M}$, ∂M a M^c jej vnútro, uzáver, topologickú hranicu a doplnok.

Pre ľubovoľný kompaktný topologický priestor K označíme symbolom $\mathbf{C}(K)$ priestor všetkých funkcií spojitých na K so suprémovou normou

$$\|f\|_\infty := \sup f(K).$$

Symbolom $\mathcal{M}(K)$ označíme Banachov priestor všetkých Radonovych mier na K s normou danou vzťahom $\|\mu\| = |\mu|(K)$. Množinu všetkých nezáporných Radonovych mier na K označíme $\mathcal{M}^+(K)$ a $\mathcal{M}^1(K)$ bude označovať množinu všetkých pravdepodobnostných Radonovych mier na K. Symbolom ε_x označíme Diracovu mieru v bode x. Lebesguovu mieru v $\mathbb{R}^d$ označujeme λ.

Pre reálnu funkciu f na množine X bude $[f > \alpha]$ označovať množinu $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ a analogicky definujeme $[f \geq \alpha]$, $[f = \alpha]$ a podobne. Reštrikciu funkcie f na množinu M budeme označovať $f|_M$.

Ak $(X, \mathscr{M}, \mu)$ je priestor s mierou a f je μ-integrovateľná funkcia na X, označíme

$$\mu(f) := \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Funkciu s oborom hodnôt v $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ budeme nazývať *numerickou funkciou*. Numerická funkcia sa nazýva *zdola konečná*, ak nenadobúda hodnotu $-\infty$. Zdola konečná numerická funkcia sa nazýva *zdola polospojitá*, ak vzor množiny $(c, +\infty)$ je otvorená množina pre každé $c \in \mathbb{R}$. Analogicky definujeme zhora konečné a zhora polospojité funkcie. Pre ľubovoľnú numerickú funkciu definujeme jej *kladnú* a *zápornú časť* vzťahmi $f^+ := \max\{f, 0\}$, $f^- := \max\{-f, 0\}$.

Pre ľubovoľnú množinu funkcií $\mathcal{F}$ označíme symbolom $\mathcal{F}^+$ množinu všetkých nezáporných funkcií z $\mathcal{F}$.

3 Základné pojmy a tvrdenia

3.1 Klasická teória potenciálu

V celej tejto časti pracujeme v priestore $\mathbb{R}^d$, kde $d \geq 3$.

Definícia 3.1. Nech $G \subset \mathbb{R}^d$ je otvorená množina. Hovoríme, že dvakrát spojite diferencovateľná funkcia u je *harmonická* na G, ak spĺňa na G *Laplaceovu rovnicu*

$$\triangle u := \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0.$$

Priestor všetkých harmonických funkcií na množine G označíme $\mathscr{H}(G)$ a symbolom $\mathbf{H}(G)$ označíme priestor všetkých funkcií spojitých na $\overline{G}$ a harmonických v G. Ďalej pre kompaktnú $K \subset \mathbb{R}^d$ označíme

$$\mathbf{H}_0(K) := \bigcup_{G \supset K} \big\{ f|_K : f \in \mathscr{H}(G), G \text{ je otvorená} \big\}$$

priestor všetkých funkcií spojitých na K a harmonicky rozšíriteľných na nejaké okolie K a symbolom $\mathbf{H}(K)$ označíme uzáver $\mathbf{H}_0(K)$ v priestore $\mathbf{C}(K)$.

Definícia 3.2. Nech $G \subset \mathbb{R}^d$ je otvorená množina. Zdola polospojitá numerická funkcia f sa nazýva *hyperharmonická na* G, ak pre každú guľu $B(x,r) \subset G$ spĺňa *podmienku nadpriemeru*

$$f(x) \geq \frac{1}{\lambda\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} f \,\mathrm{d}\lambda.$$

Funkcia g sa nazýva *hypoharmonická na* G, ak $-g$ je hyperharmonická na G. Množinu všetkých hyperharmonických funkcií na G označíme ${}^*\mathscr{H}(G)$. Množinu všetkých hypoharmonických funkcií na G označíme $\mathscr{H}_*(G)$.

Definícia 3.3. Hyperharmonická funkcia na otvorenej množine $G \subset \mathbb{R}^d$ sa nazýva *superharmonická na* G, ak je konečná na hustej podmnožine G. Funkcia f sa nazýva *subharmonická na* G, ak $-f$ je superharmonická na G.

Množinu všetkých funkcií superharmonických na G budeme označovať $\mathscr{S}(G)$ a $\mathbf{S}(G)$ bude množina všetkých funkcií spojitých na $\overline{G}$ a superharmonických v G. Ďalej označíme

$$\mathbf{S}_0(K) := \bigcup_{G \supset K} \big\{ f|_K : f \in \mathbf{S}(G), G \text{ je otvorená} \big\}$$

množinu všetkých funkcií spojitých na K a superharmonicky rozšíriteľných na nejaké okolie K a symbolom $\mathbf{S}(K)$ označíme uzáver $\mathbf{S}_0(K)$ v priestore $\mathbf{C}(K)$.

Definícia 3.4. *Jemnou topológiou* na $\mathbb{R}^d$ nazývame najhrubšiu topológiu, v ktorej sú všetky superharmonické funkcie spojité. Symbolom $M^{\circ f}$ budeme označovať *jemné vnútro* množiny M, teda vnútro vzhľadom k jemnej topológii. Symbolom $\overline{M}^f$ budeme označovať *jemný uzáver* množiny M, teda uzáver vzhľadom k jemnej topológii. Symbolom $\partial_f M$ budeme označovať *jemnú hranicu* množiny M, teda hranicu vzhľadom k jemnej topológii.

Prívlastkom *jemný* budeme označovať aj ďalšie topologické pojmy vzťahujúce sa k jemnej topológii, napríklad jemná spojitosť, jemne otvorená množina a podobne.

Definícia 3.5. Nech $M \subset \mathbb{R}^d$ je ľubovoľná množina. Pre ľubovoľnú numerickú funkciu f na množine M definujeme jej *zdola polospojitú regularizáciu* vzťahom

$$\hat{f}(x) := \min\big\{f(x), \liminf_{y\to x} f(y)\big\}, \quad x \in M.$$

Definícia 3.6. Pre ľubovoľnú množinu $M \subset \mathbb{R}^d$ a $u \in {}^*\!\mathscr{H}^+(\mathbb{R}^d)$ definujeme *redukovanú funkciu* u vzhľadom k M vzťahom

$$R_u^M(x) = \inf\big\{v(x) : v \in {}^*\!\mathscr{H}^+(\mathbb{R}^d), v \geq u \text{ na } M\big\}$$

a jej zdola polospojitú regularizáciu

$$\hat{R}_u^M(x) := \widehat{R_u^M}(x) = \liminf_{y\to x} R_u^M(y)$$

budeme nazývať *výmetom* funkcie u na množinu M.

Poznámka 3.7. Funkcia $\hat{R}_u^M$ je hyperharmonická na $\mathbb{R}^d$ ([LMNS, Proposition A.189]) a je zrejmé, že $0 \leq \hat{R}_u^M \leq R_u^M \leq u$ na $\mathbb{R}^d$.

Tvrdenie 3.8. *Nech $x \in \mathbb{R}^d$ a nech $A \subset \mathbb{R}^d$. Potom existuje jediná miera ε_x^A na $\mathbb{R}^d$ taká, že*

$$\int_{\mathbb{R}^d} u \,\mathrm{d}\varepsilon_x^A = \hat{R}_u^A(x)$$

pre všetky $u \in {}^*\!\mathscr{H}^+(\mathbb{R}^d)$. Navyše $\varepsilon_x^A(\overline{A}^c) = 0$.

Dôkaz. [BH, Proposition VI.2.1]. □

Definícia 3.9. Miera ε_x^A z predchádzajúceho tvrdenia sa nazýva *výmetom miery* ε_x na množinu A.

Definícia 3.10. Funkcia u sa nazýva *jemne hyperharmonická* na jemne otvorenej množine U, ak je zdola konečná a zdola jemne polospojitá na U a pre všetky relatívne kompaktné, jemne otvorené množiny V také, že $\overline{V} \subset U$, a každé $x \in V$ integrál

$$\int_U u \,\mathrm{d}\varepsilon_x^{V^c}$$

existuje a spĺňa nerovnosť

$$\int_U u \,\mathrm{d}\varepsilon_x^{V^c} \leq u(x). \tag{1}$$

Funkcia u sa nazýva *jemne harmonická* na jemne otvorenej množine U, ak funkcie u a $-u$ sú jemne hyperharmonické na U.

Poznámka 3.11. V predchádzajúcej definícii stačí, ak je nerovnosť (1) splnená pre všetky *borelovské*, relatívne kompaktné, jemne otvorené množiny V také, že $\overline{V} \subset U$ ([LMZ, Remark 12.1 (b)].

Definícia 3.12. Hovoríme, že množina $A \subset \mathbb{R}^d$ je *tenká* v bode $x \in \mathbb{R}^d$, ak $\varepsilon_x^A \neq \varepsilon_x$. Množinu

$$b(A) := \left\{x \in \mathbb{R}^d : \varepsilon_x^A = \varepsilon_x\right\}$$

tých bodov, v ktorých množina A nie je tenká, nazývame *báza* množiny A.

Definícia 3.13. Nezáporná superharmonická funkcia p na $\mathbb{R}^d$ sa nazýva *potenciál*, ak $h = 0$ je jediná harmonická funkcia na $\mathbb{R}^d$ spĺňajúca $0 \leq h \leq p$. Množinu všetkých spojitých potenciálov na $\mathbb{R}^d$ označíme $\mathcal{P}^c$.

Poznámka 3.14. Z definície okamžite vyplýva, že ak p je potenciál a φ je hyperharmonická funkcia spĺňajúca $0 \leq \varphi \leq p$, tak φ je potenciál.

Definícia 3.15. Potenciál $p \in \mathcal{P}^c$ sa nazýva *striktný*, ak ľubovoľné dve nezáporné Radonove miery μ, ν na $\mathbb{R}^d$ sú totožné, za predpokladu, že

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} p \,\mathrm{d}\mu &= \int_{\mathbb{R}^d} p \,\mathrm{d}\nu,\\
\int_{\mathbb{R}^d} q \,\mathrm{d}\mu &\leq \int_{\mathbb{R}^d} q \,\mathrm{d}\nu \quad \text{pre každé } q \in \mathcal{P}^c.
\end{aligned}$$

Lema 3.16. *Nech $A \subset \mathbb{R}^d$ je borelovská množina a nech $x \notin A$, $\varepsilon_x^A \neq \varepsilon_x$. Potom existuje jemne uzavretá množina F typu G_δ taká, že*

$$A \subset F \subset \overline{A} \setminus \{x\} \;\text{ a }\; \varepsilon_x^A = \varepsilon_x^F.$$

Dôkaz. (Porov. tiež [HN, (1.1) na str. 81] a [BH, VI.2.2 a VI.4.1 – VI.4.4].) Podľa [LMNS, Proposition A.168] existuje $q \in \mathcal{P}^c$, $q > 0$ na $\mathbb{R}^d$. Podľa [BH, Proposition I.1.5 a Proposition III.6.3] existuje striktný potenciál $p \in \mathcal{P}^c$. Podľa Choquetovej lemy ([BH, Lemma I.1.8]) existuje postupnosť $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ funkcií z ${}^*\mathscr{H}^+(\mathbb{R}^d)$ taká, že

$$\widehat{\inf u_n} = \hat{R}_p^A,$$

pričom môžeme predpokladať, že postupnosť $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ je neklesajúca, nakoľko ${}^*\mathscr{H}^+(\mathbb{R}^d)$ tvorí min-stabilný kužeľ. Nahradením funkcií u_n funkciami $u_n + \frac{q}{n}$ navyše dosiahneme, že $u_n > p$ na A. Potom množina

$$B := \left(\overline{A} \setminus \{x\}\right) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{R}^d : u_n(x) > p(x)\right\}$$

je typu G_δ, pričom $A \subset B \subset \overline{A} \setminus \{x\}$ a pre každé $n \in \mathbb{N}$ je $u_n \geq R_p^B \geq R_p^A$. Máme teda

$$\hat{R}_p^A = \widehat{\inf u_n} \geq \hat{R}_p^B \geq \hat{R}_p^A,$$

a teda $\hat{R}_p^B = \hat{R}_p^A$. Navyše pre každú $u \in {}^*\mathscr{H}^+(\mathbb{R}^d)$ je

$$\int_{\mathbb{R}^d} u \,\mathrm{d}\varepsilon_x^A = \hat{R}_u^A(x) \leq \hat{R}_u^B(x) = \int_{\mathbb{R}^d} u \,\mathrm{d}\varepsilon_x^B.$$

Zo striktnosti potenciálu p teda máme $\varepsilon_x^A = \varepsilon_x^B$. Podľa [BH, Lemma VI.4.3] platí $R_u^{\overline{B}^f} = R_u^B$ pre všetky $u \in {}^*\mathscr{H}^+(\mathbb{R}^d)$. Máme teda $\varepsilon_x^A = \varepsilon_x^{\overline{B}^f}$, pričom podľa [BH, Proposition VI.4.1] je $b(B)$ jemne uzavretá G_δ-množina, a teda podľa [BH, Proposition VI.4.4] je aj $\overline{B}^f = B \cup b(B)$ jemne uzavretá G_δ-množina. Navyše platí $A \subset B \subset \overline{B}^f \subset \overline{B} \subset \overline{A}$. Nakoľko $\varepsilon_x^{\overline{B}^f} = \varepsilon_x^A \neq \varepsilon_x$, tak $x \notin b(\overline{B}^f)$. Podľa [BH, Proposition VI.4.1] je $b(B) \subset b(\overline{B}^f)$, a teda tiež $x \notin \overline{B}^f = B \cup b(B)$. Máme teda $A \subset \overline{B}^f \subset \overline{A} \setminus \{x\}$ a za množinu F môžeme voliť $\overline{B}^f$. □

3.2 Funkčné priestory a Choquetova teória

Definícia 3.17. Nech K je kompaktný topologický priestor. *Funkčným priestorom na K* nazývame ľubovoľný podpriestor $\mathcal{H}$ priestoru $\mathbf{C}(K)$ obsahujúci konštanty a oddeľujúci body množiny K, čiže pre každé x, $y \in K$, $x \neq y$ existuje $f \in \mathcal{H}$ taká, že $f(x) \neq f(y)$.

Poznámka 3.18. Príkladmi funkčných priestorov na kompakte $K \subset \mathbb{R}^d$ sú priestory $\mathbf{C}(K)$, $\mathbf{H}_0(K)$ a $\mathbf{H}(K)$. Pre otvorenú, relatívne kompaktnú množinu $G \subset \mathbb{R}^d$ je priestor $\mathbf{H}(G)$ funkčným priestorom na $\overline{G}$.

Definícia 3.19. Nech $\mathcal{H}$ je funkčný priestor na K. Miera $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ sa nazýva *$\mathcal{H}$-reprezentujúca miera pre $x \in K$*, ak

$$f(x) = \int_K f \,\mathrm{d}\mu \qquad \text{pre všetky } f \in \mathcal{H}.$$

Množinu všetkých $\mathcal{H}$-reprezentujúcich mier pre $x \in K$ označíme $\mathcal{M}_x(\mathcal{H})$.

Definícia 3.20. Funkcia $f : K \to \mathbb{R}$ sa nazýva *$\mathcal{H}$-afinná*, ak

$$f(x) = \int_K f \,\mathrm{d}\mu \qquad \text{pre všetky } x \in K \text{ a } \mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H}).$$

Množinu všetkých $\mathcal{H}$-afinných funkcií označíme $\mathcal{A}(\mathcal{H})$. Množinu všetkých spojitých $\mathcal{H}$-afinných funkcií označíme $\mathcal{A}^c(\mathcal{H})$.

Definícia 3.21. Nech C je konvexná podmnožina vektorového priestoru V. Bod $x \in C$ sa nazýva *extremálnym bodom* množiny C, ak množina $C \setminus \{x\}$ je konvexná. Množinu všetkých extremálnych bodov množiny C označíme $\operatorname{ext} C$.

Definícia 3.22. Nech $\mathcal{H}$ je funkčný priestor na K. Potom množinu

$$\mathrm{Ch}_{\mathcal{H}}(K) := \big\{x \in K : \mathcal{M}_x(\mathcal{H}) = \{\varepsilon_x\}\big\}.$$

nazývame Choquetovou hranicou funkčného priestoru $\mathcal{H}$.

Definícia 3.23. Nech $\mathcal{H}$ je funkčný priestor na K. Funkcia $f : K \to \mathbb{R}$ sa nazýva *$\mathcal{H}$-konvexná*, ak

$$f(x) \leq \int_K f \,\mathrm{d}\mu \qquad \text{pre všetky } x \in K \text{ a } \mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H}).$$

Množinu všetkých *spojitých* $\mathcal{H}$-konvexných funkcií označíme $\mathcal{K}^c(\mathcal{H})$.

Definícia 3.24. Nech $\mathcal{H}$ je funkčný priestor na K. Na množine $\mathcal{M}^+(K)$ definujeme *Choquetovo usporiadanie* vzťahom

$$\mu \prec_{\mathcal{H}} \nu \Leftrightarrow \int_K f \,\mathrm{d}\mu \leq \int_K f \,\mathrm{d}\nu \qquad \text{pre všetky } f \in \mathcal{K}^c(\mathcal{H}).$$

Maximálne prvky vzhľadom k Choquetovmu usporiadaniu nazývame *$\mathcal{H}$-maximálne miery.*

Definícia 3.25. Funkčný priestor $\mathcal{H}$ na kompakte K sa nazýva *simpliciálny*, ak pre každé $x \in K$ existuje jediná maximálna miera $\delta_x \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$.

Definícia 3.26. (Abstraktný Dirichletov problém). Nech $\mathcal{H}$ je simpliciálny funkčný priestor na kompakte K. Pre ľubovoľnú ohraničenú, univerzálne merateľnú funkciu (čiže merateľnú vzhľadom k ľubovoľnej Radonovej miere na kompakte K) definujeme

$$Tf : x \mapsto \int_K f \,\mathrm{d}\delta_x, \quad x \in K.$$

(Ak je f definovaná len na univerzálne merateľnej množine $A \subset K$, dodefinujeme ju na $K \setminus A$ nulou.) Funkcia Tf sa nazýva *(abstraktným) riešením Dirichletovho problému* pre funkciu f.

Tvrdenie 3.27. *Ak $\mathcal{H}$ je simpliciálny funkčný priestor, tak pre každú funkciu $f \in \mathbf{C}(K)$ je Tf prvej Baireovej triedy.*

Dôkaz. [LMNS, Theorem 6.8]. □

Definícia 3.28. Podmnožina vektorového priestoru sa nazýva *kužeľ*, ak je uzavretá na súčet a násobky nezápornými skalármi. *Funkčným kužeľom* nazveme konvexný kužeľ $\mathcal{S} \subset \mathbf{C}(K)$ obsahujúci konštantné funkcie a oddeľujúci body K. Pre bod $x \in \mathcal{S}$ označíme

$$\mathcal{M}_x(\mathcal{S}) := \left\{ \mu \in \mathcal{M}^+(K) : s(x) \geq \int_K s \,\mathrm{d}\mu \quad \text{pre všetky } s \in \mathcal{S} \right\}$$

množinu všetkých *$\mathcal{S}$-reprezentujúcich mier pre x* a definujeme *Choquetovu hranicu* $\mathrm{Ch}_{\mathcal{S}}(K)$ funkčného kužeľa $\mathcal{S}$ vzťahom

$$\mathrm{Ch}_{\mathcal{S}}(K) := \big\{ x \in K : \mathcal{M}_x(\mathcal{S}) = \{\varepsilon_x\} \big\}.$$

Poznámka 3.29. Príkladmi funkčných kužeľov na kompakte K sú kužele $\mathbf{S}_0(K)$ a $\mathbf{S}(K)$. Kužeľ $\mathbf{S}(G)$ je funkčným kužeľom na $\overline{G}$.

Definícia 3.30. Nech G je otvorená množina v $\mathbb{R}^d$ a $x \in G$. *Jensenovou mierou pre x na G* nazývame pravdepodobnostnú borelovskú mieru μ s kompaktným nosičom obsiahnutým v G takú, že pre každú superharmonickú funkciu u na G platí

$$u(x) \geq \int_G u \,\mathrm{d}\mu.$$

Množinu všetkých Jensenovych mier pre x na G označíme $\mathcal{J}_x(G)$. Ďalej pre kompaktnú množinu $K \subset \mathbb{R}^d$ definujeme $\mathcal{J}_x(K)$.

$$\mathcal{J}_x(K) := \bigcap_{G \supset K} \mathcal{J}_x(G),$$

kde prienik berieme cez všetky otvorené nadmnožiny kompaktu K.

Poznámka 3.31. Mohli by sme definovať Jensenove miery $\mathcal{J}_x^c(G)$ vzhľadom ku spojitým superharmonickým funkciám, avšak pre otvorenú, relatívne kompaktnú $G \subset \mathbb{R}^d$ je $\mathcal{J}_x(G) = \mathcal{J}_x^c(G)$ ([Per, Theorem 2.1]).

3.3 Funkcie prvej Baireovej triedy

Definícia 3.32. Pre metrický priestor M označíme symbolom $B_1(M)$ množinu všetkých funkcií $f : M \to \mathbb{R}$ *prvej Baireovej triedy*, teda funkcií, ktoré sú bodovou limitou postupnosti funkcií spojitých na M. Ohraničené funkcie prvej Baireovej triedy na množine M označíme $B_1^b(M)$ a symbolom $B_1^{bb}(M)$ budeme označovať množinu všetkých funkcií, ktoré sú bodovou limitou rovnomerne ohraničenej postupnosti funkcií spojitých na množine M.

Predchádzajúcu definíciu môžeme zovšeobecniť pre postupnosti funkcií z funkčného priestoru.

Definícia 3.33. Nech $\mathcal{H}$ je funkčný priestor na kompakte K. Symbolom $B_1(\mathcal{H})$ označíme množinu všetkých funkcií $f : K \to \mathbb{R}$, ktoré sú bodovou limitou postupnosti funkcií z $\mathcal{H}$. Symbolom $B_1^b(\mathcal{H})$ označíme množinu všetkých ohraničených funkcií z $B_1(\mathcal{H})$ a symbolom $B_1^{bb}(\mathcal{H})$ označíme množinu všetkých funkcií, ktoré sú bodovou limitou rovnomerne ohraničenej postupnosti funkcií z $\mathcal{H}$.

Poznámka 3.34. Je zrejmé, že $B_1(K) = B_1(\mathbf{C}(K))$, $B_1^b(K) = B_1^b(\mathbf{C}(K))$ a $B_1^{bb}(K) = B_1^{bb}(\mathbf{C}(K))$. Navyše pre ľubovoľný funkčný priestor $\mathcal{H}$ platí $B_1^{bb}(\mathcal{H}) \subset B_1^b(\mathcal{H}) \subset B_1(\mathcal{H})$ a z podmienky $\mathcal{H} \subset \mathbf{C}(K)$ taktiež vyplýva $B_1(\mathcal{H}) \subset B_1(K)$, $B_1^b(\mathcal{H}) \subset B_1^b(K)$ a $B_1^{bb}(\mathcal{H}) \subset B_1^{bb}(K)$.

Poznámka 3.35. Pre ľubovoľnú kompaktnú množinu K je $B_1^b(K) = B_1^{bb}(K)$. Ak totiž $f_n \in \mathbf{C}(K)$ sú funkcie konvergujúce ku f bodovo na K, tak stačí položiť $g_n := \min\big(\max(f_n, m), M\big)$, kde $m = \min f(K)$, $M = \max f(K)$ a $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ bude postupnosť rovnako ohraničených funkcií z $\mathbf{C}(K)$ konvergujúca ku f bodovo na K.

V práci [HOR] autori definujú podtriedy prvej Baireovej triedy na kompaktnom metrickom priestore K. Nech $DBSC(K)$ je množina všetkých funkcií $f : K \to \mathbb{R}$ takých, že existuje postupnosť $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ funkcií spojitých na K a číslo $C < +\infty$ také, že $f_0 \equiv 0$, f_n konvergujú bodovo ku f a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq C \tag{2}$$

pre všetky $x \in K$. Priestor $DBSC(K)$ obsahuje práve tie funkcie, ktoré sú rozdielom dvoch ohraničených, zdola polospojitých funkcií na K. Skutočne, ak postupnosť $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ spĺňa vzťah (2), stačí položiť $f := u - v$, kde funkcie $u := \sum_{n=0}^{\infty}(f_{n+1} - f_n)^+$ a $v := \sum_{n=0}^{\infty}(f_{n+1} - f_n)^-$ sú vďaka vzťahu (2) ohraničené a pritom zdola polospojité, lebo sú limitami neklesajúcich postupností spojitých funkcií. Naopak, ak $f = u - v$, kde u, v sú ohraničené a zdola polospojité, tak u aj v sú limitami neklesajúcich postupností spojitých funkcií $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ a stačí položiť $f_0 \equiv 0$, $f_n := u_n - v_n$.

Autori v práci definovali podtriedu $B_{1/2}(K)$ priestoru $B_1(K)$:

$$B_{1/2}(K) := \big\{f \in B_1^b(K) : \text{existuje postupnosť } \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ funkcií} \\ \text{z } DBSC(K) \text{ konvergujúca uniformne ku } f\big\}.$$

Je zrejmé, že platí $B_{1/2}(K) \subset B_1^{bb}(K) \subset B_1^b(K) \subset B_1(K)$ pre ľubovoľný kompaktný metrický priestor. Podľa [HOR, Proposition 5.1], ak K je navyše nespočítateľná, tak platí dokonca $\mathbf{C}(K) \subsetneqq DBSC(K) \subsetneqq B_{1/2}(K) \subsetneqq B_1^{bb}(K)$.

Analogickým spôsobom teraz definujeme podtriedu $B_{1/2}(\mathcal{H})$ priestoru $B_1(\mathcal{H})$.

Definícia 3.36. Nech $\mathcal{H}$ je funkčný priestor na kompakte K. Označme $F(\mathcal{H})$ množinu všetkých funkcií $f : K \to \mathbb{R}$ takých, že existuje postupnosť $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ funkcií z $\mathcal{H}$ a číslo $C < +\infty$ také, že $f_0 \equiv 0$, f_n konvergujú bodovo ku f a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \le C \tag{3}$$

pre všetky $x \in K$. Ďalej definujeme podtriedu $B_{1/2}(\mathcal{H})$ priestoru $B_1(\mathcal{H})$:

$$B_{1/2}(\mathcal{H}) := \big\{f \in B_1^b(\mathcal{H}) : \text{existuje postupnosť } \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \\ \text{funkcií z } F(\mathcal{H}) \text{ konvergujúca uniformne ku } f\big\}.$$

Poznámka 3.37. Ľahko vidno, že $B_{1/2}(\mathcal{H}) \subset B_1^{bb}(\mathcal{H}) \subset B_1^b(\mathcal{H}) \subset B_1(\mathcal{H})$.

3.4 Dirichletov problém pre otvorené množiny v $\mathbb{R}^d$

Klasickým Dirichletovym problémom na otvorenej množine $G \subset \mathbb{R}^d$ nazývame úlohu, nájsť ku funkcii $f \in \mathbf{C}(\partial G)$ funkciu $h \in \mathbf{C}(\overline{G}) \cap \mathscr{H}(G)$ takú, že $h|_{\partial G} = f$. Ako ukazuje príklad otvoreného kruhu bez jedného bodu, klasický Dirichletov problém nemusí byť riešiteľný pre každú spojitú funkciu na topologickej hranici ∂G.

Definícia 3.38. Otvorená, relatívne kompaktná množina $G \subset \mathbb{R}^d$ sa nazýva *regulárna*, ak Dirichletov problém na G je riešiteľný pre každú $f \in \mathbf{C}(\partial G)$.

Poznámka 3.39. Vzhľadom na princíp maxima je pre regulárnu otvorenú, relatívne kompaktnú množinu $G \subset \mathbb{R}^d$ priestor $\mathbf{C}(\partial G)$ izometricky izomorfný s priestorom $\mathbf{H}(G) = \mathbf{C}(\overline{G}) \cap \mathscr{H}(G)$ funkcií spojitých na $\overline{G}$ a harmonických na G.

Pre všeobecnú otvorenú, relatívne kompaktnú množinu $G \subset \mathbb{R}^d$ má zmysel riešiť *zovšeobecnený Dirichletov problém*, ktorý spočíva v priradení funkcie harmonickej na G spojitej funkcii na topologickej hranici ∂G. Cieľom je nájsť lineárny nezáporný operátor $L : \mathbf{C}(\partial G) \to \mathscr{H}(G)$ taký, že pre každú $h \in \mathscr{H}(G) \cap \mathbf{C}(\overline{G})$ je $L(h|_{\partial G}) = h|_G$. Rozličné spôsoby konštrukcie tohto *Keldyšovho operátora* vedú k rovnakému výsledku, nakoľko z Keldyšovej vety ([LMNS, Theorem 13.116]) vyplýva jeho jednoznačnosť.

Definícia 3.40. Nech f je numerická funkcia definovaná na topologickej hranici ∂G otvorenej, relatívne kompaktnej množiny $G \subset \mathbb{R}^d$. Označme

$$\begin{aligned}\overline{\mathscr{H}}_f^G &:= \Big\{u \in {}^*\mathscr{H}(G) : u \text{ je zdola ohraničená a} \\ &\qquad \liminf_{x\to y} u(x) \geq f(y) \text{ pre všetky } y \in \partial G\Big\}, \\ \underline{\mathscr{H}}_f^G &:= \Big\{u \in \mathscr{H}_*(G) : u \text{ je zhora ohraničená a} \\ &\qquad \limsup_{x\to y} u(x) \leq f(y) \text{ pre všetky } y \in \partial G\Big\}.\end{aligned}$$

Funkcie

$$\begin{aligned}\overline{H}_f^G(x) &:= \inf\ \{u(x) : u \in \overline{\mathscr{H}}_f^G\}, \\ \underline{H}_f^G(x) &:= \sup\ \{u(x) : u \in \underline{\mathscr{H}}_f^G\},\end{aligned}$$

nazývame *horným* a *dolným PWB riešením* Dirichletovho problému. Funkcia f sa nazýva *rezolutívna*, ak $\overline{H}_f^G = \underline{H}_f^G$ na G a $\overline{H}_f^G$ je konečná na G; v tom prípade ich spoločnú hodnotu označujeme H_f^G a nazývame ju *PWB riešením* Dirichletovho problému.

Poznámka 3.41. Metóda riešenia Dirichletovho problému z predchádzajúcej definície pochádza od Perrona, Wienera a Brelota. Wiener dokázal rezolutívnosť spojitých funkcií na hranici.

Veta 3.42. (Wiener). *Nech $G \subset \mathbb{R}^d$ je otvorená, relatívne kompaktná množina. Potom každá funkcia spojitá na ∂G je rezolutívna.*

Dôkaz. [LMNS, Theorem 13.60]. □

Veta 3.43. *Nech $G \subset \mathbb{R}^d$ je otvorená, relatívne kompaktná množina a nech funkcia $f : \partial G \to \mathbb{R}$ je rezolutívna. Potom $H_f^G \in \mathscr{H}(G)$.*

Dôkaz. [LMNS, Theorem 13.66]. □

Poznámka 3.44. Ak $G \subset \mathbb{R}^d$ je ľubovoľná otvorená, relatívne kompaktná množina, tak pre každé $x \in G$ zodpovedá zobrazeniu $f \mapsto H_f^G(x)$, kde $f \in \mathbf{C}(\partial G)$, podľa Rieszovej vety o reprezentácii ([LMNS, Theorem A.72]) jediná Radonova miera μ_x^G na ∂G taká, že

$$H_f^G(x) = \int_{\partial G} f \, \mathrm{d}\mu_x^G \quad \text{pre všetky } f \in \mathbf{C}(\partial G).$$

Definícia 3.45. Mieru μ_x^G nazývame *harmonickou mierou* v bode x.

Tvrdenie 3.46. *Pre otvorenú, relatívne kompaktnú množinu $G \subset \mathbb{R}^d$ a ľubovoľný bod $x \in G$ je $\mu_x^G = \varepsilon_x^{G^c}$.*

Dôkaz. Podľa [Pra, str. 385, vlastnosť H_5] je $H_u^G = R_u^{G^c}$ pre všetky nezáporné superharmonické funkcie u, a teda aj pre všetky spojité potenciály. Podľa [BH, Proposition VI.2.3] je $\hat{R}_p^{G^c} = R_p^{G^c}$ na G pre ľubovoľný spojitý potenciál p. Máme teda $H_p^G = \hat{R}_p^{G^c}$ na G pre ľubovoľný spojitý potenciál p. Nakoľko reštrikcie rozdielov spojitých potenciálov na ∂G sú uniformne husté v $\mathbf{C}(\partial G)$ ([LMNS, Proposition A.169]), máme z Lebesguovej vety $H_f^G = \hat{R}_f^{G^c}$ na G pre ľubovoľnú spojitú funkciu $f \in \mathbf{C}(\partial G)$. Rovnosť $\mu_x^G = \varepsilon_x^{G^c}$ teraz vyplýva z jednoznačnosti Rieszovej reprezentácie nezáporného lineárneho funkcionálu na $\mathbf{C}(\partial G)$. □

Poznámka 3.47. Na základe predchádzajúceho tvrdenia teraz pre ľubovoľnú $f \in \mathbf{C}(\partial G)$ definujeme funkciu

$$f^{G^c} : x \mapsto \int_{\partial G} f \, \mathrm{d}\varepsilon_x^{G^c}$$

pre všetky $x \in \overline{G}$. V porovnaní s H_f^G je teda f^{G^c} definovaná aj na ∂G.

Riešenie f^{G^c} zovšeobecneného Dirichletovho problému nemusí byť spojité na hranici.

Definícia 3.48. Nech $G \subset \mathbb{R}^d$ je otvorená, relatívne kompaktná množina. Bod $z \in \partial G$ sa nazýva *regulárny*, ak

$$\lim_{G \ni x \to z} H_f^G(x) = f(z) \quad \text{pre všetky } f \in \mathbf{C}(\partial G).$$

Množinu všetkých regulárnych bodov ∂G označíme $\partial_{\mathrm{reg}} G$. Bod $z \in \partial G$ sa nazýva *iregulárny*, ak nie je regulárny. Množinu všetkých iregulárnych bodov topologickej hranice ∂G označíme $\partial_{\mathrm{irr}} G$.

Poznámka 3.49. Bod $z \in \partial G$ je teda regulárny práve vtedy, keď $\mu_x^G \overset{w^*}{\to} \varepsilon_z$ pre $x \to z$, $x \in G$.

Veta 3.50. *Nech $G \subset \mathbb{R}^d$ je ohraničená otvorená množina. Funkčný priestor $\mathbf{H}(G)$ je simpliciálny. Pre každé $z \in \overline{G}$ je miera $\delta_z = \varepsilon_z^{G^c}$ jediná maximálna $\mathbf{H}(G)$-reprezentujúca miera pre bod z a*

$$\mathrm{Ch}_{\mathbf{H}(G)}(\overline{G}) = \partial_{\mathrm{reg}} G.$$

Dôkaz. [LMNS, Theorem 13.35]. □

3.5 Dirichletov problém pre kompaktné množiny v $\mathbb{R}^d$

Zovšeobecnený Dirichletov problém môžeme riešiť aj pre kompaktnú množinu.

Definícia 3.51. Nech $K \subset \mathbb{R}^d$ je kompaktná množina. Označme

$$\overline{\mathscr{K}}_f^K = \bigcup_{G \supset K} \Big\{ u \in {}^*\mathscr{H}(G) : u \text{ je zdola ohraničená a } \liminf_{G \setminus K \ni x \to y} u(x) \geq f(y) \text{ pre všetky } y \in \partial G \Big\},$$

$$\underline{\mathscr{K}}_f^K = \bigcup_{G \supset K} \Big\{ u \in \mathscr{H}_*(G) : u \text{ je zhora ohraničená a } \limsup_{G \setminus K \ni x \to y} u(x) \leq f(y) \text{ pre všetky } y \in \partial G \Big\},$$

kde zjednotenia berieme cez všetky otvorené nadmnožiny kompaktu K. Pre ľubovoľné $x \in K$ položme

$$\overline{K}_f^K(x) = \inf \big\{ u(x) : u \in \overline{\mathscr{K}}_f^K \big\},$$
$$\underline{K}_f^K(x) = \sup \big\{ u(x) : u \in \underline{\mathscr{K}}_f^K \big\}.$$

Funkcia f sa nazýva *rezolutívna*, ak $\overline{K}_f^K = \underline{K}_f^K$ na K; v tom prípade ich spoločnú hodnotu označujeme K_f^K.

Veta 3.52. *Nech $K \subset \mathbb{R}^d$ je kompaktná množina. Potom každá funkcia $f \in \mathbf{C}(\partial K)$ je rezolutívna. Ďalej nech F označuje spojité a ohraničené rozšírenie funkcie $f \in \mathbf{C}(\partial K)$ na $\mathbb{R}^d$ a nech $\{G_i\}_{i=1}^\infty$ je postupnosť otvorených nadmnožín kompaktu K taká, že*

$$\bigcap_{i=1}^\infty G_i = K.$$

Potom

$$K_f^K = \lim_{i \to \infty} H_{F|_{\partial G_i}}^{G_i}.$$

Dôkaz. [Pra, Théorème 2]. $\square$

Definícia 3.53. Zobrazenie $L : f \mapsto K_f^K$, kde $f \in \mathbf{C}(\partial K)$, sa nazýva *Keldyšov operátor* na kompakte K.

Poznámka 3.54. Ak $K \subset \mathbb{R}^d$ je ľubovoľná kompaktná množina, tak pre každé $x \in K$ zodpovedá operátoru $f \mapsto K_f^K(x)$, kde $f \in \mathbf{C}(\partial K)$, podľa Rieszovej vety o reprezentácii ([LMNS, Theorem A.72]) jediná Radonova miera ν_x^K na ∂K taká, že

$$K_f^K(x) = \int_{\partial K} f \, \mathrm{d}\nu_x^K \quad \text{pre všetky } f \in \mathbf{C}(\partial K).$$

Definícia 3.55. Mieru ν_x^K nazývame *Keldyšovou mierou* v bode x.

Tvrdenie 3.56. *Pre kompaktnú množinu $K \subset \mathbb{R}^d$ a $x \in K$ je $\nu_x^K = \varepsilon_x^{K^c}$.*

Dôkaz. Podľa [Pra, str. 386, vlastnosť K_5] je $K_p^K = R_p^{K^c}$ pre ľubovoľný potenciál p. Podľa [BH, Proposition VI.2.3] je $\hat{R}_p^{K^c} = R_p^{K^c}$ na K pre ľubovoľný spojitý potenciál p. Máme teda $K_p^K = \hat{R}_p^{K^c}$ na K pre ľubovoľný spojitý potenciál p a s využitím uniformnej hustoty rozdielov reštrikcií spojitých potenciálov na ∂K v $\mathbf{C}(\partial K)$ ([LMNS, Proposition A.169]) a Lebesguovej vety dostávame platnosť $K_f^K = \hat{R}_f^{K^c}$ na K pre ľubovoľnú spojitú funkciu $f \in \mathbf{C}(\partial K)$. Rovnosť $\nu_x^K = \varepsilon_x^{K^c}$ teraz vyplýva z jednoznačnosti Rieszovej reprezentácie nezáporného lineárneho funkcionálu na $\mathbf{C}(\partial K)$. $\square$

Tvrdenie 3.57. *Nech funkcia f je spojitá na topologickej hranici kompaktnej množiny $K \subset \mathbb{R}^d$. Potom K_f^K je jemne spojitá na K a prvej Baireovej triedy.*

Dôkaz. Z Tvrdenia 3.56 a [LMNS, Proposition A.209] vyplýva jemná spojitosť. Zvyšná časť tvrdenia vyplýva z [LMZ, Theorem 10.30]. $\square$

Definícia 3.58. Nech $K \subset \mathbb{R}^d$ je kompaktná množina. Bod $z \in \partial K$ sa nazýva *stabilný*, ak

$$\lim_{K \ni x \to z} K_f^K(x) = f(z) \quad \text{pre všetky } f \in \mathbf{C}(\partial K).$$

Množinu všetkých stabilných bodov ∂K označíme $\partial_{\mathrm{st}} K$.

Poznámka 3.59. Bod $z \in \partial K$ je teda stabilný práve vtedy, keď $\nu_x^K \xrightarrow{w^*} \varepsilon_z$ pre $x \to z$, $x \in K$ a tiež práve vtedy, keď $\nu_z^K = \varepsilon_z$.

Tvrdenie 3.60. *Pre kompaktnú množinu $K \subset \mathbb{R}^d$ je ekvivalentné:*

(i) x je stabilný bod pre K.

(ii) x leží v jemnom uzávere K^c.

(iii) Existuje otvorená, relatívne kompaktná množina G taká, že $x \in \partial G$ je regulárny bod pre G a $K \subset G \cup \{x\}$.

Dôkaz. [EK, Theorem 4.3]. □

Veta 3.61. *Nech $K \subset \mathbb{R}^d$ je kompaktná množina. Funkčný priestor $\mathbf{H}(K)$ je simpliciálny. Pre každý bod $z \in K$ je miera $\delta_z = \varepsilon_z^{K^c}$ jediná maximálna $\mathbf{H}(K)$-reprezentujúca miera pre bod z. Funkčný kužeľ $\mathbf{S}(K)$ je simpliciálny. Pre každé $z \in K$ je miera $\delta_z = \varepsilon_z^{K^c}$ jediná maximálna $\mathbf{S}(K)$-reprezentujúca miera pre bod z. Navyše platí*

$$\mathrm{Ch}_{\mathbf{H}(K)}(K) = \mathrm{Ch}_{\mathbf{S}(K)}(K) = \partial_f K = \partial_{\mathrm{st}} K.$$

Dôkaz. Podľa [LMNS, Theorem 13.35] je $\mathrm{Ch}_{\mathbf{H}(K)}(K) = \partial_{\mathrm{st}} K$, lebo vzhľadom k [LMNS, Definition 13.26, 13.27 a úvod časti 13.3.A], môže byť množina U z [LMNS, Theorem 13.35] kompaktnou podmnožinou $\mathbb{R}^d$ a množina $\partial_{\mathrm{reg}} U$ je totožná s množinou $\partial_{\mathrm{st}} K$ ([LMNS, Definition 13.4]). Podľa [LMNS, Theorem 13.33] je $\mathrm{Ch}_{\mathbf{S}(K)}(K) = \partial_{\mathrm{st}} K$ a podľa [Per, Lemma 5.1] je $\mathrm{Ch}_{\mathbf{S}(K)}(K) = \partial_f K$. Z [LMNS, Theorem 13.33 a Theorem 13.35] vyplýva tiež simplicialita $\mathbf{H}(K)$ aj $\mathbf{S}(K)$ ako aj charakterizácia maximálnych reprezentujúcich mier. □

Poznámka 3.62. Predchádzajúca veta spolu s tvrdeniami 3.56 a 3.27 dáva iný dôkaz tvrdenia, že pre ľubovoľnú $f \in \mathbf{C}(\partial K)$ je K_f^K prvej Baireovej triedy.

3.6 Abstraktná teória potenciálu

Definícia 3.63. Nech X je topologický priestor. Označme $\mathcal{U} = \mathcal{U}(X)$ systém všetkých neprázdnych otvorených podmnožín X a $\mathcal{U}_c = \mathcal{U}_c(X)$ systém všetkých neprázdnych otvorených, relatívne kompaktných podmnožín X. *Zväzkom numerických funkcií* na topologickom priestore X nazývame zobrazenie $\mathcal{G}$, ktoré každej množine $U \in \mathcal{U}(X)$ priradí množinu $\mathcal{G}(U)$ numerických funkcií na U tak, že platí:

a) $U_1 \subset U_2 \Rightarrow \{f|_{U_1}\,;\, f \in \mathcal{G}(U_2)\} \subset \mathcal{G}(U_1)$,

b) pre každý systém $\{U_i\}_{i\in I}$ množín z $\mathcal{U}(X)$ a každú numerickú funkciu f na $U = \bigcup \{U_i\,;\, i \in I\}$ platí

$$f|_{U_i} \in \mathcal{G}(U_i) \quad \forall i \in I \quad \Rightarrow \quad f \in \mathcal{G}(U).$$

Definícia 3.64. Nech X je lokálne kompaktný topologický priestor so spočítateľnou bázou a $\mathscr{H}$ zväzok numerických funkcií na X. Množina $V \subset X$ sa nazýva *regulárna*, ak sú splnené nasledujúce podmienky:

a) $V \in \mathcal{U}_c$ a $\partial V \neq \emptyset$,

b) pre každú funkciu $f \in \mathbf{C}(\partial V)$ existuje funkcia $F \in \mathbf{C}(\overline{V})$ taká, že $F = f$ na ∂V a $H_f^V := F|_V \in \mathscr{H}(V)$,

c) ak $f \geqq 0$ na ∂V, tak $H_f^V \geqq 0$ na V.

Ak V je regulárna množina a $\overline{V} \subset U$ pre nejakú množinu $U \in \mathcal{U}$, tak hovoríme, že množina V je *regulárna v* U.

Definícia 3.65. Nech $U \in \mathcal{U}$. Numerická funkcia u na množine U sa nazýva *hyperharmonická* na U, ak je zdola polospojitá a pre každú množinu V regulárnu v U a každú funkciu $f \in \mathbf{C}(\partial V)$ platí

$$f \leqq u \text{ na } \partial V \Rightarrow H_f^V \leqq u \text{ na } V.$$

Funkcia u sa nazýva *hypoharmonická* na U, ak $-u$ je hyperharmonická na U. Množinu všetkých hyperharmonických funkcií na U označíme ${}^*\mathscr{H}(U)$. Množinu všetkých hypoharmonických funkcií na U označíme $\mathscr{H}_*(U)$.

Poznámka 3.66. V prípade klasických hyperharmonických funkcií v $\mathbb{R}^d$ je táto definícia ekvivalentná s Definíciou 3.2 ([Bau2], str. 19).

Definícia 3.67. Funkcia s definovaná na množine $U \in \mathcal{U}(X)$ sa nazýva *superharmonická* na U, ak je hyperharmonická na U a konečná na hustej podmnožine U. Symbolom $\mathscr{S}(U)$ budeme označovať množinu všetkých superharmonických funkcií na $U \in \mathcal{U}$. Funkcia s sa nazýva *subharmonická* na U, ak $-s \in \mathscr{S}(U)$.

Definícia 3.68. Dvojica $(X, \mathscr{H})$, kde X je lokálne kompaktný priestor so spočítateľnou bázou a $\mathscr{H}$ je zväzok numerických funkcií na X, sa nazýva *harmonický priestor*, ak sú splnené nasledujúce axiómy:

1. Pre každú množinu $U \in \mathcal{U}$ je $\mathscr{H}(U)$ lineárny podpriestor priestoru všetkých spojitých funkcií na U,

2. regulárne množiny tvoria bázu topológie na X,

3. pre každú neklesajúcu postupnosť funkcií z $\mathscr{H}(U)$, kde $U \in \mathcal{U}$, platí

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} h_n(x) < +\infty \text{ na hustej podmnožine } U \;\Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} h_n \in \mathscr{H}(U),$$

4. pre každé dva rôzne body x, $y \in X$ existuje funkcia $s \in \mathscr{S}^+(X)$ taká, že $s(x) \neq s(y)$,

5. ak f je konštantná na $U \in \mathcal{U}_c$, tak $f \in \mathscr{H}(U)$.

Potom pre každú množinu $U \in \mathcal{U}(X)$ nazývame prvky množiny $\mathscr{H}(U)$ *harmonickými funkciami* na U.

Poznámka 3.69. Axióma (3) sa nazýva *Doobova konvergenčná axióma.* V práci [Bau2] je namiesto axiómy (5) slabšia axióma

5'. pre každú množinu $U \in \mathcal{U}_c$ existuje funkcia $h \in \mathscr{H}(U)$, $h > 0$ na U.

a namiesto axiómy (4) axióma

4'. pre každé dva rôzne body x, $y \in X$ existujú funkcie f, $g \in {}^*\mathscr{H}(X)$ také, že $f(x)g(y) \neq f(y)g(x)$,

Poznámka 3.70. Keďže máme definované harmonické aj superharmonické funkcie, máme rovnakým spôsobom ako v klasickej teórii potenciálu definované pre otvorenú množinu $G \subset X$ a kompakt $K \subset X$ priestory $\mathbf{H}(G)$, $\mathbf{H}_0(K)$ a $\mathbf{H}(K)$ ako aj kužele $\mathbf{S}(G)$, $\mathbf{S}_0(K)$ a $\mathbf{S}(K)$.

Definícia 3.71. Nezáporná superharmonická funkcia definovaná na X sa nazýva *potenciál*, ak jej najväčší subharmonický minorant je rovný nule. Množinu všetkých spojitých potenciálov na X označíme $\mathcal{P}^c(X)$.

Poznámka 3.72. Rovnako ako v klasickej teórii potenciálu môžeme definovať redukovanú funkciu, výmet funkcie na množinu ako aj výmet Diracovej miery na množinu. Aj v abstraktnej teórii budeme pre tieto pojmy používať rovnaké označenie ako v klasickej teórii potenciálu. Ďalej môžeme rovnako definovať aj jemnú topológiu, tenkosť či bázu množiny a s nimi súvisiace pojmy. Aj pre tieto pojmy budeme používať rovnaké označenie ako v klasickej teórii potenciálu.

Poznámka 3.73. Nech $(X, \mathscr{H})$ je harmonický priestor. Ak $V \subset X$ je ľubovoľná otvorená, relatívne kompaktná množina, tak pre každé $x \in V$ zodpovedá zobrazeniu $f \mapsto H_f^V(x)$, $f \in \mathbf{C}(\partial V)$, podľa Rieszovej vety o reprezentácii ([LMNS, Theorem A.72]) jediná Radonova miera μ_x^V na ∂V taká, že

$$H_f^V(x) = \int_{\partial V} f \, \mathrm{d}\mu_x^V \quad \text{pre všetky } f \in \mathbf{C}(\partial V).$$

Definícia 3.74. Mieru μ_x^V nazývame *harmonickou mierou* v bode x.

Tvrdenie 3.75. *Nech $(X, \mathscr{H})$ je harmonický priestor. Pre otvorenú, relatívne kompaktnú množinu $G \subset X$ a $x \in G$ je $\mu_x^G = \varepsilon_x^{G^c}$.*

Dôkaz. Rovnako ako dôkaz Tvrdenia 3.46. □

Poznámka 3.76. Rovnako ako v klasickej teórii potenciálu môžeme definovať Keldyšov operátor aj Keldyšovu mieru ν_x^K.

Tvrdenie 3.77. *Nech $(X, \mathscr{H})$ je harmonický priestor. Pre kompaktnú množinu $K \subset X$ a $x \in K$ je $\nu_x^K = \varepsilon_x^{K^c}$.*

Dôkaz. Rovnako ako v dôkaze Tvrdenia 3.56. □

Definícia 3.78. Hovoríme, že harmonický priestor $(X, \mathscr{H})$ spĺňa *axiómu dominancie*, ak platí:

(D) Pre každý lokálne ohraničený potenciál p na X a každú relatívne kompaktnú otvorenú množinu $V \subset X$ je H_p^V najväčším harmonickým minorantom potenciálu p na V.

Tvrdenie 3.79. *Nech $(X, \mathscr{H})$ je harmonický priestor spĺňajúci axiómu dominancie. Nech p je spojitý potenciál na X a $A \subset X$ nech je ľubovoľná množina. Potom existujú spojité potenciály q_n také, že na X platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n = \hat{R}_p^{A^c}.$$

Dôkaz. Nech $p \in \mathcal{P}^c(X)$ a nech $x \in X$. Potom

$$0 \leq \int_{\partial A} p \, \mathrm{d}\varepsilon_x^{A^c} = \hat{R}_p^{A^c}(x) \leq R_p^{A^c}(x) \leq p(x)$$

a keďže funkcia $\hat{R}_p^{A^c}$ je hyperharmonická, je to dokonca potenciál. Zo spojitosti p navyše máme lokálnu ohraničenosť $\hat{R}_p^{A^c}$. Podľa [CC, Theorem 9.2.1 a Proposition 8.3.1] existuje množina $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}^c$ taká, že

$$\sum_{q \in \mathcal{F}} q = \hat{R}_p^{A^c}.$$

Keďže harmonický priestor X má spočítateľnú bázu, je aj separabilný, takže má hustú spočítateľnú podmnožinu B. Nakoľko každý nenulový potenciál $q \in \mathcal{F}$ je spojitý, je $q > 0$ na nejakej otvorenej množine, a teda $q(z) > 0$ pre nejaký bod $z \in B$. Keby bola množina $\mathcal{F}$ nespočítateľná, tak by pre nejaké $z \in B$ existovalo nespočítateľne veľa potenciálov $q \in \mathcal{F}$ takých, že $q(z) > 0$ a existovalo by teda prirodzené číslo m také, že $q(z) > \frac{1}{m}$ pre nespočítateľne veľa $q \in \mathcal{F}$. To by však znamenalo $p(z) = +\infty$, čo je spor. Množina $\mathcal{F}$ je teda spočítateľná, takže existujú $q_n \in \mathcal{P}^c(X)$ také, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n = \hat{R}_p^{A^c}.$$

□

Poznámka 3.80. V článku [BCC] bola zavedená množina $\mathscr{M}$ tých potenciálov na X, ktoré sú špecifickým suprémom ich spojitých minorantov. Podľa [CC, Theorem 9.2.1] je axióma dominancia ekvivalentná s tvrdením, že každý lokálne ohraničený potenciál leží v $\mathscr{M}$ a podľa [CC, Proposition 8.3.1] je každý potenciál z $\mathscr{M}$ sumou množiny spojitých potenciálov na X.

Definícia 3.81. Nech $(X, \mathscr{H})$ je harmonický priestor. Množina $A \subset X$ sa nazýva *polárna*, ak existuje $v \in \mathscr{S}^+(X)$ taká, že $A \subset \{x \in X : v(x) = +\infty\}$.

Tvrdenie 3.82. *Nech $(X, \mathscr{H})$ je harmonický priestor. Množina $A \subset X$ je polárna práve vtedy, keď $\hat{R}_p^A = 0$ pre všetky $p \in \mathcal{P}^c$.*

Dôkaz. [LMNS, Proposition A.211]. □

Definícia 3.83. Nech $(X, \mathscr{H})$ je harmonický priestor. Množina $A \subset X$ sa nazýva *totálne tenká*, ak je tenká v každom bode $x \in X$, čiže ak $b(A) = \emptyset$. Množina $B \subset X$ sa nazýva *semipolárna*, ak je spočítateľným zjednotením totálne tenkých množín.

Definícia 3.84. Nech $(X, \mathscr{H})$ je harmonický priestor a nech $A \subset X$. *Esenciálnou bázou* množiny A nazveme množinu $\beta(A)$ všetkých bodov $x \in X$ takých, že pre každé jemné okolie V bodu x množina $A \cap V$ nie je semipolárna.

Definícia 3.85. Hovoríme, že harmonický priestor $(X, \mathscr{H})$ spĺňa *axiómu polarity*, ak platí:

(C) Každá semipolárna množina je polárna.

Definícia 3.86. Hovoríme, že harmonický priestor $(X, \mathscr{H})$ spĺňa *axiómu tenkosti*, ak platí:

(T) Každá semipolárna množina je totálne tenká.

Tvrdenie 3.87. *Nech $(X, \mathscr{H})$ je harmonický priestor. Uvažujme nasledujúce výroky:*

a) *$(X, \mathscr{H})$ spĺňa axiómu dominancie.*

b) *$(X, \mathscr{H})$ spĺňa axiómu polarity.*

c) *Pre každú množinu $A \subset X$ je $A \setminus b(A)$ polárna.*

d) *$(X, \mathscr{H})$ spĺňa axiómu tenkosti.*

e) *$\beta = b$.*

Potom platí

$$(a) \Rightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Rightarrow (d) \Leftrightarrow (e).$$

Dôkaz. $(a) \Rightarrow (b)$: [CC, Corollary 9.2.3].

$(b) \Leftrightarrow (c)$: [BH, Proposition VI.5.21].

$(c) \Rightarrow (d)$: Za predpokladu (c) je každá totálne tenká množina polárna. Podľa [BH, Proposition VI.5.3] je potom každá semipolárna množina polárna a podľa [BH, Proposition VI.5.7] teda aj totálne tenká.

$(d) \Leftrightarrow (e)$: [BH, Remark VI.6.3.2, str. 298].

□

4 Harmonické funkcie na kompakte v $\mathbb{R}^d$

V tejto kapitole predpokladáme, že K je kompaktná podmnnožina $\mathbb{R}^d$ pre $d \geq 3$. Nasledujúca veta podáva rozličné charakterizácie priestoru $\mathbf{H}(K)$.

Veta 4.1. *Nech $f \in \mathbf{C}(K)$. Je ekvivalentné:*

(i) $f \in \mathbf{H}(K)$.

(ii) f *je jemne harmonická na* $K^{\circ f}$.

(iii) f *je* $\mathbf{H}_0(K)$*-afinná, teda*

$$f(x) = \int_K f \,\mathrm{d}\mu \qquad \text{pre všetky } x \in K \text{ a } \mu \in \mathcal{M}_x(\mathbf{H}_0(K)).$$

(iii')

$$f(x) = \int_K f \,\mathrm{d}\mu \qquad \text{pre všetky } x \in K \text{ a } \mu \in \operatorname{ext} \mathcal{M}_x(\mathbf{H}_0(K)).$$

(iv) f *je* $\mathbf{H}(K)$*-afinná, teda*

$$f(x) = \int_K f \,\mathrm{d}\mu \qquad \text{pre všetky } x \in K \text{ a } \mu \in \mathcal{M}_x(\mathbf{H}(K)).$$

(iv')

$$f(x) = \int_K f \,\mathrm{d}\mu \qquad \text{pre všetky } x \in K \text{ a } \mu \in \operatorname{ext} \mathcal{M}_x(\mathbf{H}(K)).$$

(v)

$$f(x) = \int_K f \,\mathrm{d}\mu \qquad \text{pre všetky } x \in K \text{ a } \mu \in \mathcal{J}_x(K).$$

(v')

$$f(x) = \int_K f \,\mathrm{d}\mu \qquad \text{pre všetky } x \in K \text{ a } \mu \in \operatorname{ext} \mathcal{J}_x(K).$$

Dôkaz. *(i)* $\Rightarrow$ *(iii')*: Ak $x \in K$ a $\mu \in \operatorname{ext} \mathcal{M}_x(\mathbf{H}_0(K)) \subset \mathcal{M}_x(\mathbf{H}_0(K))$, tak

$$f(x) = \int_K f \,\mathrm{d}\mu$$

pre všetky $f \in \mathbf{H}_0(K)$ a podľa Lebesguovej vety aj pre všetky $f \in \mathbf{H}(K)$.

(iii') $\Rightarrow$ *(iii)*: Na priestore $\mathcal{M}(K)$ budeme uvažovať w^*-topológiu, s ktorou je tento priestor lokálne konvexný. Podľa vety Alaoglu-Bourbaki je množina $\mathcal{M}^1(K)$ w^*-kompaktnou podmnožinou priestoru $\mathcal{M}(K)$ a zo zrejmej w^*-uzavretosti množiny $\mathcal{M}_x(\mathbf{H}_0(K)) \subset \mathcal{M}^1(K)$ vyplýva jej w^*-kompaktnosť. Množina $\mathcal{M}_x(\mathbf{H}_0(K))$ je tiež zrejme konvexná, a teda podľa Krejn-Milmanovej vety

$$\mathcal{M}_x(\mathbf{H}_0(K)) = \overline{\operatorname{conv}} \operatorname{ext} \mathcal{M}_x(\mathbf{H}_0(K)).$$

Z platnosti integrálnej reprezentácie pre extremálne miery vyplýva okamžite jej platnosť aj pre ich konvexné kombinácie a nakoľko uzavretý konvexný obal je uzáverom konvexného obalu, dostávame limitným prechodom integrálnu reprezentáciu aj pre všetky miery z $\mathcal{M}_x(\mathbf{H}_0(K))$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$: Nech f je $\mathbf{H}_0(K)$-afinná, teda

$$f(x) = \int_K f \, \mathrm{d}\mu \tag{4}$$

pre všetky $x \in K$ a $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathbf{H}_0(K))$. Každá funkcia $h \in \mathbf{H}_0(K)$ je harmonická a ohraničená na nejakom okolí U kompaktu K, čiže aj jemne harmonická na tomto okolí ([LMZ, Theorem 12.2]), a teda aj jemne harmonická na $K^{\circ f} \subset U$. Pre každú jemne otvorenú, relatívne kompaktnú množinu V takú, že $\overline{V} \subset K^{\circ f}$ a každé $x \in V$ teda platí

$$\int_K h \, \mathrm{d}\varepsilon_x^{V^c} = \int_{K^{\circ f}} h \, \mathrm{d}\varepsilon_x^{V^c} = h(x),$$

nakoľko podľa [LMZ, 11.B (str. 351)] je miera $\varepsilon_x^{V^c}$ nesená každou borelovskou množinou obsahujúcou $\overline{V} \setminus V$, teda aj množinou $K^{\circ f}$, lebo $\overline{V} \subset K^{\circ f}$ a jemné vnútro borelovskej množiny je borelovská množina podľa [Doob, 1.XI.6 (str. 177)]. To ale znamená, že $\varepsilon_x^{V^c} \in \mathcal{M}_x(\mathbf{H}_0(K))$ pre všetky jemne otvorené množiny V také, že $x \in V \subset \overline{V} \subset K^{\circ f}$. Potom ale zo vzťahu (4) dostávame

$$f(x) = \int_K f \, \mathrm{d}\varepsilon_x^{V^c} = \int_{K^{\circ f}} f \, \mathrm{d}\varepsilon_x^{V^c}.$$

Nakoľko funkcia f je spojitá na K, je aj konečná a jemne spojitá na $K^{\circ f}$, čím je jej jemná harmonicita na $K^{\circ f}$ dokázaná.

$(ii) \Rightarrow (v')$: Podľa [HN, (5.1) na str. 88 a (5.2) na str. 89] je

$$\operatorname{ext} \mathcal{J}_x(K) = \{\varepsilon_x\} \cup \left\{\varepsilon_x^{B^c} : B \text{ je borelovská}, x \in B \subset K\right\}.$$

Ak B je borelovská množina taká, že $x \in B \subset K$ a $\varepsilon_x^{B^c} \neq \varepsilon_x$, tak množina $A = B^c$ spĺňa predpoklady Lemy 3.16. Ak F je množina z tvrdenia Lemy 3.16, tak množina $V = F^c$ je jemne otvorená množina typu F_σ taká, že

$$x \in V \subset B \quad \text{a} \quad \varepsilon_x^{B^c} = \varepsilon_x^{V^c}.$$

Z toho dostávame

$$\operatorname{ext} \mathcal{J}_x(K) = \{\varepsilon_x\} \cup \left\{\varepsilon_x^{V^c} : x \in V \subset K,\ V \text{ jemne otvorená typu } F_\sigma\right\}.$$

Reprezentácia v (v') je okamžite zrejmá pre ε_x a z jemnej harmonicity na $K^{\circ f}$ aj pre $\varepsilon_x^{V^c}$, kde $V \subset K$ je jemne otvorená množina typu F_σ, ak je navyše

$\overline{V} \subset K^{\circ f}$. Ak teraz $V \subset K$ je ľubovoľná jemne otvorená množina typu F_σ a $x \in V$, tak reprezentácia (v') pre $\mu = \varepsilon_x^{V^c}$ vyplýva z [LMZ, Lemma 12.18].

$(v') \Rightarrow (v)$: Priestor $\mathbb{R}^d$ je separabilný, a teda každá borelovská pravdepodobnostná miera na K je Radonova. Je teda $\mathcal{J}_x(K) \subset \mathcal{M}^1(K)$ a ďalej možno pokračovať rovnako ako v $(iii') \Rightarrow (iii)$.

$(v) \Rightarrow (i)$: Nech $f \in \mathbf{C}(K)$ a nech

$$\int_K f \,\mathrm{d}\mu = f(x)$$

pre každé $x \in K$ a pre každú $\mu \in \mathcal{J}_x(K)$. Označme $\tilde{f}$ nejaké spojité rozšírenie f na $\mathbb{R}^d$. Nech D_j je j^{-1}-okolie K a μ_x^j nech je harmonická miera na D_j pre x. Funkcia

$$u_j(x) = \int_{\partial D_j} \tilde{f} \,\mathrm{d}\mu_x^j$$

je harmonická na D_j.

Predpokladajme, že existuje $\delta > 0$ a body $z_j \in K$ také, že pre všetky $j \in \mathbb{N}$ je $|u_j(z_j) - f(z_j)| > \delta$. Prípadným prechodom k vybranej podpostupnosti môžeme dosiahnuť, že $\lim z_j = z$ a že miery $\mu_j = \mu_{z_j}^j$ w^*-konvergujú k miere μ. Ak v je spojitá superharmonická funkcia na nejakom okolí K, tak v je superharmonická na D_j pre dostatočne veľké j, a teda

$$v(z_j) \geq \int_{\partial D_j} v \,\mathrm{d}\mu_j,$$

z čoho dostávame

$$v(z) \geq \int_K v \,\mathrm{d}\mu,$$

a teda $\mu \in \mathcal{J}_z(K)$. Keďže miery μ_j w^*-konvergujú k μ, postupnosť

$$u_j(z_j) = \int_{\partial D_j} \tilde{f} \,\mathrm{d}\mu_j$$

konverguje ku

$$\int_K \tilde{f} \,\mathrm{d}\mu = f(z).$$

Ku $f(z)$ však konverguje aj postupnosť $\{f(z_j)\}_{j=1}^{\infty}$, čo je spor s predpokladom. Postupnosť u_j teda konverguje ku f rovnomerne na K, a teda $f \in \mathbf{H}(K)$.

$(iii) \Leftrightarrow (iv)$: Nakoľko $\mathbf{H}_0(K) \subset \mathbf{H}(K)$, je $\mathcal{M}_x(\mathbf{H}_0(K)) \supset \mathcal{M}_x(\mathbf{H}(K))$, a teda každá $\mathbf{H}_0(K)$-afinná funkcia je $\mathbf{H}(K)$-afinnou funkciou. Nech teraz

$\mu \in \mathcal{M}_x(\mathbf{H}_0(K))$ a nech $f \in \mathbf{H}(K)$. Potom existuje postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ funkcií z $\mathbf{H}_0(K)$ konvergujúca ku f rovnomerne na K a z platnosti

$$\int_K f_n \,\mathrm{d}\mu = f_n(x)$$

dostávame

$$\int_K f \,\mathrm{d}\mu = f(x),$$

čiže $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathbf{H}(K))$. Máme teda $\mathcal{M}_x(\mathbf{H}_0(K)) = \mathcal{M}_x(\mathbf{H}(K))$, a teda aj každá $\mathbf{H}(K)$-afinná funkcia je $\mathbf{H}_0(K)$-afinná.

$(iv) \Leftrightarrow (iv')$: Implikácia $(iv) \Rightarrow (iv')$ je zrejmá a v opačnom smere možno postupovať analogicky ako v $(iii') \Rightarrow (iii)$. $\square$

Poznámka 4.2. Ekvivalencia (i) a (ii) je dokázaná v [DG, Théorème 1], používa však pravdepodobnostné metódy, zatiaľ čo náš dôkaz je analytický. Ekvivalencia (i) a (v) je dokázaná v [Pol, Theorem 3.1], pričom vyššie uvedený dôkaz implikácie $(v) \Rightarrow (i)$ je práve z tohto článku.

Poznámka 4.3. Z ekvivalencie (i) a (iv) vyplýva $\mathcal{A}^c(\mathbf{H}(K)) = \mathbf{H}(K)$. Toto tvrdenie platí aj všeobecne v prípade harmonických priestorov ([LMNS, Theorem 13.34]), ale dôkaz využíva hlbšie výsledky.

5 Podtriedy prvej Baireovej triedy v klasickej teórii potenciálu

V tejto kapitole pracujeme v klasickej teórii potenciálu v $\mathbb{R}^d$ pre $d \geq 3$.

Tvrdenie 5.1. *Nech U je otvorená, relatívne kompaktná množina a nech $f \in \mathbf{C}(\partial U)$. Potom $f^{U^c} \in B_{1/2}(\mathbf{H}(U))$.*

Dôkaz. Nech $p \in \mathcal{P}^c(X)$ a nech $x \in X$. Potom z nerovností $0 \leq \hat{R}_p^{U^c}(x) \leq$ $\leq R_p^{U^c}(x) \leq p(x)$ a z hyperharmonicity $\hat{R}_p^{U^c}$ dostávame, že $\hat{R}_p^{U^c}$ je lokálne ohraničený potenciál. Podľa [Doob, Theorem 1.V.9, str. 66] existujú $q_n \in \mathcal{P}^c$ také, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n = \hat{R}_p^{U^c}. \tag{5}$$

Keďže potenciály q_n sú superharmonické na $\mathbb{R}^d \supset U$, spĺňajú podľa [LMNS, Theorem A.173] podmienku nadpriemeru pre každú guľu $B(x,r) \subset U$. Podľa [LMNS, Theorem A.196] je funkcia $\hat{R}_p^{U^c}$ harmonická v U a teda spĺňajúca podmienku priemeru pre každú guľu $B(x,r) \subset U$. Zo vzťahu (5) teraz vyplýva podmienka priemeru pre všetky potenciály q_n, a teda ich harmonicita v U.

Položme $p_n = \sum_{i=1}^{n} q_i|_{\overline{U}}$. Potom $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií z $\mathbf{H}(U)$ bodovo konvergujúca ku $\hat{R}_p^{U^c}$ v $\overline{U}$, pričom vzťah (5) zabezpečuje splnenie podmienky (3) zo strany 11 pre $C = \max p(\overline{U})$. Ukázali sme teda, že pre každý spojitý potenciál p je $\hat{R}_p^{U^c} \in F(\mathbf{H}(U))$.

Nech teraz $f \in \mathbf{C}(\partial U)$. Podľa [LMNS, Proposition A.169] existujú postupnosti $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ spojitých potenciálov také, že $p_n - q_n$ konverguje rovnomerne ku f na ∂U. Potom však

$$\hat{R}_{p_n}^{U^c}(x) - \hat{R}_{q_n}^{U^c}(x) = \int_{\partial U} (p_n - q_n)\, \mathrm{d}\varepsilon_x^{U^c} \to \int_{\partial U} f\, \mathrm{d}\varepsilon_x^{U^c} = f^{U^c}(x),$$

pričom konvergencia je rovnomerná, nakoľko podľa [LMNS, Theorem A.198] je $\varepsilon_x^{U^c}$ pravdepodobnostná miera pre každé $x \in \overline{U}$. Takže $f^{U^c} \in B_{1/2}(\mathbf{H}(U))$. □

Poznámka 5.2. V [LMNSS, Theorem 3.2] je ukázané, že $f^{U^c} \in B_1^{bb}(\mathbf{H}(U))$ pre každú $f \in \mathbf{C}(\partial U)$, pričom sú ukázané tri rozličné metódy dôkazu: pomocou Anconovej vety, s využitím smearing lemy a s využitím simpliciality $\mathbf{H}(U)$. Vyššie podaný dôkaz Tvrdenia 5.1 je elementárnejší, pričom toto tvrdenie je zosilnením výsledku z [LMNSS, Theorem 3.2], ako ukazuje nasledujúci príklad.

Príklad 5.3. Nech U je otvorená, relatívne kompaktná podmnožina $\mathbb{R}^d$ taká, že množina $\partial_{\mathrm{reg}}U$ je uzavretá (za U možno vziať napríklad guľu alebo guľu bez stredu). Keby množina $\partial_{\mathrm{reg}}U$ bola spočítateľná, tak by bola polárna, lebo jednobodové množiny sú polárne a spočítateľné zjednotenia polárnych množín sú tiež polárne. Nakoľko podľa [AG, Theorem 6.6.8] je množina $\partial_{\mathrm{irr}}U$ polárna, bola by polárna aj množina $\partial U = \partial_{\mathrm{reg}}U \cup \partial_{\mathrm{irr}}U$, čiže $\hat{R}_p^{\partial U} = 0$ pre všetky $p \in \mathcal{P}^c$, a teda $\varepsilon_x^{\partial U} = 0$ pre všetky $x \in U$.

Množina $\partial_{\mathrm{reg}}U$ je teda nespočítateľná a pritom kompaktná, takže podľa [HOR, Proposition 5.1] je $B_{1/2}(\partial_{\mathrm{reg}}U) \subsetneqq B_1^{bb}(\partial_{\mathrm{reg}}U)$. (Nakoľko autori v práci používajú symbol $B_1(K)$ na označenie našej množiny $B_1^b(K)$ a pre ľubovoľný kompakt K je $B_1^b(K) = B_1^{bb}(K)$.)

Zvoľme ľubovoľne $f \in B_1^{bb}(\partial_{\mathrm{reg}}U) \setminus B_{1/2}(\partial_{\mathrm{reg}}U)$. Potom existujú rovnako ohraničené funkcie $f_n \in \mathbf{C}(\partial_{\mathrm{reg}}U)$ konvergujúce ku f bodovo na $\partial_{\mathrm{reg}}U$. Pomocou Tietzeho vety môžeme funkcie f_n spojite rozšíriť (so zachovaním minima a maxima) na ∂U. Označme tieto rozšírené funkcie opäť f_n a ich bodovú limitu na ∂U označme opäť f. Podľa [Bau1, Satz 13] (porov. [Spu, str. 196]) je $f_n^{U^c} \in \mathbf{C}(\overline{U})$, a teda $f_n^{U^c} \in \mathbf{H}(U)$. Funkcie f_n sú rovnako ohraničené na ∂U, takže pre každé $x \in \overline{U}$ máme z Lebesguovej vety

$$f_n^{U^c}(x) = \int_{\partial U} f_n \,\mathrm{d}\varepsilon_x^{U^c} \to \int_{\partial U} f \,\mathrm{d}\varepsilon_x^{U^c} = f^{U^c}(x),$$

čiže $f^{U^c} \in B_1(\mathbf{H}(U))$. Z princípu maxima máme rovnakú ohraničenosť funkcií $f_n^{U^c}$ na $\overline{U}$, a teda $f^{U^c} \in B_1^{bb}(\mathbf{H}(U))$.

Pre $h \in \mathbf{H}(U)$ je $h|_{\partial_{\mathrm{reg}}U} \in \mathbf{C}(\partial_{\mathrm{reg}}U)$, a teda zo vzťahu $h \in B_{1/2}(\mathbf{H}(U))$ máme $h|_{\partial_{\mathrm{reg}}U} \in B_{1/2}(\partial_{\mathrm{reg}}U)$. Keďže na $\partial_{\mathrm{reg}}U$ je $f^{U^c} = f \notin B_{1/2}(\partial_{\mathrm{reg}}U)$, tak $f^{U^c} \notin B_{1/2}(\mathbf{H}(U))$. Máme teda $f \in B_1^{bb}(\mathbf{H}(U)) \setminus B_{1/2}(\mathbf{H}(U))$.

Tvrdenie 5.4. *Nech $K \subset \mathbb{R}^d$ je kompaktná množina a nech $f \in \mathbf{C}(\partial K)$. Potom $K_f^K \in B_{1/2}(\mathbf{H}(K))$.*

Dôkaz. Nech $p \in \mathcal{P}^c(X)$ a nech $x \in X$. Potom z nerovností $0 \le \hat{R}_p^{K^c}(x) \le$ $\le R_p^{K^c}(x) \le p(x)$ a z hyperharmonicity $\hat{R}_p^{K^c}$ dostávame, že $\hat{R}_p^{K^c}$ je lokálne ohraničený potenciál. Podľa [Doob, Theorem 1.V.9, str. 66] existujú $q_n \in \mathcal{P}^c$ také, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n = \hat{R}_p^{K^c}. \tag{6}$$

Potenciály q_n sú superharmonické na $\mathbb{R}^d$, takže podľa [LMZ, Theorem 12.2] sú jemne hyperharmonické na $\mathbb{R}^d$, a teda aj jemne hyperharmonické na $K^{\circ f}$. Pre všetky relatívne kompaktné, jemne otvorené množiny V také, že $\overline{V} \subset K^{\circ f}$, a pre všetky $x \in V$ teda platí

$$\int_{K^{\circ f}} q_n \, \mathrm{d}\varepsilon_x^{V^c} \leq q_n(x). \tag{7}$$

Podľa [LMZ, Lemma 12.7] je funkcia

$$p^{(K^{\circ f})^c} : x \mapsto \int_K p \, \mathrm{d}\varepsilon_x^{(K^{\circ f})^c}$$

jemne harmonická na $K^{\circ f}$. (Podľa [LMZ, 11.B, str. 351], je miera $\varepsilon_x^{(K^{\circ f})^c}$ nesená každou borelovskou podmnožinou $\mathbb{R}^d$ obsahujúcou $\overline{K^{\circ f}} \setminus K^{\circ f}$, a teda aj množinou K.) Keďže $K^c \subset (K^{\circ f})^c = \overline{K^c}^f$, tak podľa [BH, Lemma 4.3] je $R_p^{K^c} = R_p^{(K^{\circ f})^c}$, a teda aj $\hat{R}_p^{K^c} = \hat{R}_p^{(K^{\circ f})^c} = p^{(K^{\circ f})^c}$ a máme teda jemnú harmonicitu $\hat{R}_p^{K^c}$ na $K^{\circ f}$.

Keby vo vzťahu (7) platila pre nejakú množinu V a nejaké $x \in V$ ostrá nerovnosť, platila by pre túto množinu V a toto x ostrá nerovnosť aj pre $\hat{R}_p^{K^c}$, a to by bol spor s jemnou harmonicitou $\hat{R}_p^{K^c}$. Vo vzťahu (7) platia teda rovnosti a potenciály q_n sú jemne harmonické na $K^{\circ f}$. Keďže sú q_n súčasne spojité na $\mathbb{R}^d \supset K$, je $q_n \in \mathbf{H}(K)$.

Položme $p_n = \sum_{i=1}^n q_i|_K$. Potom $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ je postupnosť funkcií z $\mathbf{H}(K)$ bodovo konvergujúca ku $\hat{R}_p^{K^c}$ na K, pričom vzťah (6) zabezpečuje splnenie podmienky (3) zo strany 11 pre $C = \max p(K)$. Ukázali sme teda, že pre každý spojitý potenciál p je $\hat{R}_p^{K^c} \in F(\mathbf{H}(K))$.

Nech teraz $f \in \mathbf{C}(\partial K)$. Podľa [LMNS, Proposition A.169] existujú postupnosti $\{p_n\}_{n=1}^\infty$, $\{q_n\}_{n=1}^\infty$ spojitých potenciálov také, že $p_n - q_n$ konverguje rovnomerne ku f na ∂K. Potom však

$$\hat{R}_{p_n}^{K^c}(x) - \hat{R}_{q_n}^{K^c}(x) = \int_{\partial K} (p_n - q_n) \, \mathrm{d}\varepsilon_x^{K^c} \to \int_{\partial K} f \, \mathrm{d}\varepsilon_x^{K^c} = K_f^K(x),$$

pričom konvergencia je rovnomerná, nakoľko podľa [LMNS, Theorem A.198] je $\varepsilon_x^{K^c}$ pravdepodobnostná miera pre každé $x \in K$. Takže $K_f^K \in B_{1/2}(\mathbf{H}(K))$. $\square$

6 Podtriedy prvej Baireovej triedy v topologických priestoroch

Okrem priestoru $DBSC(K)$, tvoreného rozdielmi ohraničených, zdola polospojitých funkcií, skúmajú autori v článku [HOR] aj priestor $DSC(K)$ tvorený rozdielmi zdola polospojitých, nie nutne ohraničených, funkcií. V ďalšom budeme aproximáciu rozdielmi zdola polospojitých funkcií skúmať vo všeobecnejšom kontexte bitopologických priestorov.

Definícia 6.1. Priestor X s dvoma ľubovoľnými topológiami ϱ a τ budeme nazývať *bitopologický priestor* a označovať (X, ϱ, τ).

Ďalej teda budeme uvažovať topologické priestory s dvoma rozličnými topológiami ϱ a τ, pričom predponami ϱ- resp. τ- budeme rozlišovať topologické pojmy vzťahujúce sa k jednotlivým topológiám.

Definícia 6.2. Bitopologický priestor (X, ϱ, τ) sa nazýva *binormálny*, ak pre ľubovoľnú ϱ-uzavretú množinu A a ľubovoľnú τ-uzavretú množinu B spĺňajúcu $A \cap B = \emptyset$ existuje τ-otvorená množina U a ϱ-otvorená množina V taká, že $A \subset U$, $B \subset V$ a $U \cap V = \emptyset$.

Nasledujúca veta je zovšeobecnením Urysohnovej lemy.

Veta 6.3. *Nech (X, ϱ, τ) je binormálny topologický priestor. Potom pre každú τ-uzavretú množinu F a ϱ-uzavretú množinu H spĺňajúcu $F \cap H = \emptyset$, existuje funkcia g na X taká, že*

(a) $g \equiv 0$ na F, $g \equiv 1$ na H a $0 \leq g \leq 1$ na X,

(b) g je zhora ϱ–polospojitá a zdola τ–polospojitá.

Dôkaz. [Kel, Theorem 2.7]. □

Budeme potrebovať jej jednoduchý dôsledok.

Lema 6.4. *Nech (X, ϱ, τ) je binormálny topologický priestor, nech G je množina typu G_δ v topológii ϱ a nech F_τ je τ-uzavretá množina. Ak $F_\tau \subset G$, tak existuje nezáporná zdola τ-polospojitá a zhora ϱ-polospojitá funkcia f na X taká, že*

$$F_\tau \subset [f = 0] \subset G.$$

Dôkaz. Nech $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť ϱ-otvorených množín taká, že

$$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$$

a pre každé $n \in \mathbb{N}$ nech je f_n funkcia z Vety 6.3 pre $F = F_\tau$ a $H = X \setminus G_n$. Potom funkcia $f := \sum 2^{-n} f_n$ spĺňa naše tvrdenie. □

Definícia 6.5. Nech (X, ϱ) je topologický priestor. *Jemnou topológiou na topologickom priestore* (X, ϱ) nazveme ľubovoľnú topológiu τ, ktorá je jemnejšia než pôvodná topológia ϱ.

Poznámka 6.6. Predchádzajúca definícia je širokým zovšeobecnením pojmu klasickej jemnej topológie z teórie potenciálu.

Veta 6.7. *Nech τ je jemná topológia na topologickom priestore (X, ϱ) a nech priestor (X, ϱ, τ) je binormálny. Potom ľubovoľná reálna funkcia prvej Baireovej triedy vzhľadom k topológii ϱ, ktorá je súčasne τ-spojitá na X, môže byť rovnomerne aproximovaná rozdielmi nezáporných zdola ϱ-polospojitých a súčasne τ-spojitých funkcií.*

Dôkaz. Nech f je reálna funkcia prvej Baireovej triedy vzhľadom k topológii ϱ, ktorá je súčasne τ-spojitá na X a nech $k \in \mathbb{Z}$. Keďže f je prvej Baireovej triedy vzhľadom k ϱ, množina $[k-1 < f < k+1]$ je typu F_σ v topológii ϱ a nakoľko funkcia f je τ-spojitá, množina $[k-2 < f < k+2]$ je τ-otvorená. Použitím Lemy 6.4 na doplnky týchto množín dostaneme existenciu τ-spojitých a zhora ϱ-polospojitých funkcií w_k takých, že

$$[k-1 < f < k+1] \subset [w_k > 0] \subset [k-2 < f < k+2],$$

pričom vynásobením funkcií w_k vhodnými konštantami dosiahneme navyše splnenie nerovností

$$0 \leq w_k \leq \frac{1}{3}e^{-k^2}.$$

Položme

$$u(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} w_k(x) \quad \text{a} \quad v(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^k w_k(x).$$

Sumy sú konečné pre každé $x \in X$, nakoľko $w_k(x) = 0$ pre k mimo intervalu $\big(f(x)-2, f(x)+2\big)$. Funkcie u, v sú teda τ-spojité a zhora ϱ-polospojité a pre každé $x \in X$ je $0 < u(x) < 1$ a $0 < v(x) < 1$. Navyše

$$\mathrm{e}^{f(x)-2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} w_k(x) < \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^k\, w_k(x) < \mathrm{e}^{f(x)+2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} w_k(x),$$

a teda

$$\mathrm{e}^{f(x)-2} < \frac{v(x)}{u(x)} < \mathrm{e}^{f(x)+2}$$

pre každé $x \in X$. Funkcie

$$s(x) := -\log u(x) \quad \text{a} \quad t(x) := -\log v(x)$$

sú nezáporné, τ-spojité a zdola ϱ-polospojité, pričom

$$\big|f(x) - \big(s(x) - t(x)\big)\big| < 2$$

pre všetky $x \in X$. Keďže túto úvahu možno zopakovať pre funkciu $m \cdot f$ namiesto f pre vhodné $m \in \mathbb{N}$, je tým veta dokázaná. $\square$

Poznámka 6.8. Ak (X, ϱ) je ľubovoľný topologický priestor a ak τ je diskrétna topológia na X, tak (X, ϱ, τ) je zjavne binormálny topologický priestor, nakoľko každá ϱ-uzavretá množina je τ-otvorená. V tomto prípade predchádzajúca veta dáva známe tvrdenie o rovnomernej aproximácii funkcií prvej Baireovej triedy rozdielmi nezáporných zdola polospojitých funkcií.

Poznámka 6.9. Ak $(X, \mathscr{H})$ je harmonický priestor, tak X je σ-kompaktný, pretože je to lokálne kompaktný priestor so spočítateľnou bázou. Potom jemná (v zmysle definície z teórie potenciálu) topológia v $(X, \mathscr{H})$ tvorí s pôvodnou topológiou binormálny topologický priestor ([LMZ, Theorem 10.25 a Theorem 3.11]).

Analogicky k tomu, že množina $B_1^{bb}(\mathcal{H})$ môže byť vlastnou podmnožinou $B_1^b(\mathcal{H})$, aj v našom prípade binormálnych topologických priestorov nemožno vo všeobecnosti ohraničenú τ-spojitú funkciu prvej Baireovej triedy (v eukleidovskej topológii ϱ na $\mathbb{R}$) aproximovať rozdielmi ohraničených zdola ϱ-polospojitých funkcií, ako ukazuje nasledujúce tvrdenie.

Tvrdenie 6.10. ([Oma, Proposition 3.4]) *Nech ϱ je eukleidovská metrická topológia na $\mathbb{R}$ a nech τ je jemná topológia na $(\mathbb{R}, \varrho)$ taká, že priestor $(\mathbb{R}, \varrho, \tau)$ je binormálny a každá spočítateľná podmnožina $\mathbb{R}$ je τ-uzavretá. Potom existuje ohraničená τ-spojitá funkcia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prvej Baireovej triedy v topológii ϱ taká, že ak f, g sú zdola ϱ-polospojité funkcie a $\|h - (f - g)\| < 1$ pre uniformnú normu $\|\cdot\|$ na $\mathbb{R}$, tak f a g sú neohraničené.*

Dôkaz. Nech

$$A_1 := \left\{ n + \frac{1}{2} : n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Pre každé $x \in A_1$ existuje $\varepsilon_x > 0$ také, že $(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \cap A_1 = \{x\}$. Definujme

$$A_2 := \bigcup_{x \in A_1} \left\{ x - \frac{\varepsilon_x}{2n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Nakoľko každý bod množiny A_2 je izolovaným bodom, môžeme v definícii analogicky pokračovať indukciou. Takže pre každé $n \in \mathbb{N}$ bude množina A_n pozostávať z hromadných bodov množiny A_{n+1}. Definujme

$$B_{n,i} := A_i \cap (n, n+1) \quad \text{pre } n \in \mathbb{N} \text{ a } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Množiny

$$X := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{1 \le 2i-1 \le n} B_{n,2i-1}\,,$$
$$Y := \bigcup_{n=2}^{\infty} \bigcup_{2 \le 2i \le n} B_{n,2i}$$

sú spočítateľné a teda τ-uzavreté. Navyše sú rozprášené, a teda triedy G_δ podľa [Tho, Theorem A.3]. Použitím Lemy 6.4 dostaneme existenciu τ-spojitých a zhora ϱ-polospojitých funkcií φ_1 a φ_2 takých, že $\varphi_1(x) = 0$ pre $x \in X$, $\varphi_1(x) > 0$ inak a $\varphi_2(x) = 0$ pre $x \in Y$, $\varphi_2(x) > 0$ inak. Takže pre τ-spojitú funkciu prvej Baireovej triedy v topológii ϱ

$$h(x) := \frac{5\,\varphi_2(x)}{\varphi_1(x) + \varphi_2(x)}$$

máme vzhľadom k disjunktnosti množín X a Y

$$h(x) = \begin{cases} 5 & \text{pre} \quad x \in X, \\ 0 & \text{pre} \quad x \in Y, \end{cases}$$

a $0 < h(x) < 5$ inak.

Nech f, g sú zdola ϱ-polospojité funkcie také, že $||h - (f - g)|| < 1$. Zvoľme ľubovoľné $n \in \mathbb{N}$ a vyberme $x \in B_{2n,1}$. Potom $h(x) = 5$, takže $4 < f(x) - g(x) < 6$, a teda $f > g(x) + 4$ na nejakom okolí bodu x. Z toho máme $f(y) > g(x) + 4$ pre nejaké $y \in B_{2n,2}$. Nakoľko $h(y) = 0$, máme $g(y) > f(y) - 1 > g(x) + 3$ a teda $g > g(x) + 3$ na nejakom okolí bodu y. Máme teda $g(z) > g(x) + 3$ pre nejaké $z \in B_{2n,3}$. Dostali sme teda

$$f(z) > g(z) + 4 > g(x) + 7 > f(x) + 1$$

a opakovaním tohto postupu dostaneme existenciu $w \in B_{2n,2n-1}$ takého, že $f(w) > f(x) + n - 1$. Z toho vyplýva, že funkcia f je neohraničená, a to isté potom platí aj pre funkciu g. $\square$

Poznámka 6.11. Je všeobecne známe, že existuje ohraničená funkcia prvej Baireovej triedy, ktorá nemôže byť aproximovaná rozdielmi ohraničených, zdola polospojitých funkcií. Je to bezprostredný dôsledok predchádzajúceho tvrdenia (stačí za τ zvoliť diskrétnu topológiu na $\mathbb{R}$), ale v prípade reálnych funkcií možno tvrdenie zosilniť. Nasledujúce tvrdenie ukazuje jednoduchý príklad ohraničenej reálnej funkcie prvej Baireovej triedy, ktorá je dokonca rozdielom dvoch zdola polospojitých funkcií, pritom však nemôže byť aproximovaná rozdielmi zdola polospojitých *ohraničených* funkcií.

Tvrdenie 6.12. ([Oma, Proposition 4.3]) *Existuje ohraničená funkcia h prvej Baireovej triedy na $\mathbb{R}$, ktorá je rozdielom dvoch zdola polospojitých funkcií taká, že ak f, g sú zdola polospojité funkcie na $\mathbb{R}$ a $\|h - (f - g)\| < 1$ pre uniformnú normu $\|\cdot\|$ na $\mathbb{R}$, tak f a g sú neohraničené.*

Dôkaz. Nech $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ je postupnosť množín definovaná rovnako ako v dôkaze Tvrdenia 6.10. Keďže pre každé $n \in \mathbb{N}$ je množina A_n tvorená práve hromadnými bodmi množiny A_{n+1}, sú množiny

$$K_0 := \emptyset \quad \text{a} \quad K_n := \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

uzavreté pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

Pre $n \in \mathbb{N}$ označme

$$X_n := A_n \setminus \langle -n, n \rangle$$

a

$$Y_n := \langle -n, n \rangle \setminus \Big(\big\langle -(n-1), n-1 \big\rangle \cup K_{n-1} \Big).$$

Potom

$$\mathbb{R} = \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n \cup Y_n),$$

pričom všetky množiny v tomto zjednotení sú po dvoch disjunktné.

Teraz definujme funkciu φ nasledovne: pre dané $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, existuje práve jedno $n \in \mathbb{N}$ také, že $x \in X_n \cup Y_n$. Položme $\varphi(x) := n$. Navyše definujeme $\varphi(0) := 1$.

Analogicky, pre $n \in \mathbb{N}$ položíme

$$U_n := (A_{2n-1} \cup A_{2n}) \setminus \langle -2n, 2n \rangle$$

a

$$V_n := \langle -2n, 2n \rangle \setminus \Big(\big\langle -(2n-2), 2n-2 \big\rangle \cup K_{2n-2} \Big).$$

Potom

$$\mathbb{R} = \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (U_n \cup V_n),$$

pričom všetky množiny v tomto zjednotení sú po dvoch disjunktné.

Definujme funkciu ψ nasledovne: pre dané $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, existuje práve jedno $n \in \mathbb{N}$ také, že $x \in U_n \cup V_n$. Položme $\psi(x) := 2n$. Navyše definujeme $\psi(0) := 2$.

Funkcie φ a ψ sú zrejme zdola polospojité a funkcia $h := 5(\psi - \varphi)$ je ohraničená a prvej Baireovej triedy na $\mathbb{R}$.

Nech f, g sú zdola polospojité funkcie také, že $||h-(f-g)|| < 1$. Zvoľme ľubovoľné $n \in \mathbb{N}$ a vyberme $x \in A_1 \cap (2n+1, 2n+2)$. Keďže $h(x) = 5$, máme $4 < f(x) - g(x) < 6$, a teda $f > g(x) + 4$ na nejakom okolí bodu x. Nakoľko bod $x \in A_1$ je hromadným bodom množiny A_2, existuje taký bod $y \in A_2 \cap (2n+1, 2n+2)$, že $f(y) > g(x) + 4$. Keďže $h(y) = 0$, máme $g(y) > f(y) - 1 > g(x) + 3$ a teda $g > g(x) + 3$ na nejakom okolí bodu y. Teda existuje $z \in A_3 \cap (2n+1, 2n+2)$ spĺňajúce $g(z) > g(x) + 3$. Platí teda

$$f(z) > g(z) + 4 > g(x) + 7 > f(x) + 1.$$

Indukciou dostávame existenciu $w \in A_{2n+1} \cap (2n+1, 2n+2)$ takého, že $f(w) > f(x) + n$. Funkcie f a g sú teda neohraničené. $\square$

7 Podtriedy prvej Baireovej triedy v abstraktnej teórii potenciálu

V tejto kapitole budeme pracovať v harmonickom priestore $(X, \mathcal{H})$. Pre kompaktnú množinu $K \subset X$ definujeme $\mathbf{H}(K)$ ako priestor všetkých funkcií spojitých na K, ktoré sú jemne harmonické na jemnom vnútri K.

Tvrdenie 7.1. *Nech $(X, \mathscr{H})$ je harmonický priestor spĺňajúci axiómu dominancie. Nech U je otvorená, relatívne kompaktná množina a nech $f \in \mathbf{C}(\partial U)$. Potom $f^{U^c} \in B_{1/2}(\mathbf{H}(U))$.*

Dôkaz. Nech $p \in \mathcal{P}^c(X)$. Potom podľa Tvrdenia 3.79 existujú $q_n \in \mathcal{P}^c(X)$ také, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n = \hat{R}_p^{U^c}. \tag{8}$$

Keďže potenciály q_n sú superharmonické na X, pre každú množinu V regulárnu v U a každú $g \in \mathbf{C}(\partial V)$ platí

$$g \leqq q_n \text{ na } \partial V \Rightarrow H_g^V \leqq q_n \text{ na } V,$$

špeciálne teda

$$H^V_{q_n|\partial V} \leqq q_n \text{ na } V.$$

Podľa [LMNS, Theorem A.196] je funkcia $\hat{R}_p^{U^c}$ harmonická v U, a teda pre každú množinu V regulárnu v U a funkciu $h := \hat{R}_p^{U^c}|_{\partial V}$ je $H_h^V = \hat{R}_p^{U^c}$ na V. Zo vzťahu (8) teraz vyplýva harmonicita q_n v U pre každé $n \in \mathbb{N}$.

Položme $p_n = \sum_{i=1}^n q_i|_{\overline{U}}$. Potom $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií z $\mathbf{H}(U)$ bodovo konvergujúca ku $\hat{R}_p^{U^c}$ v $\overline{U}$, pričom vzťah (8) zabezpečuje splnenie podmienky (3) zo strany 11 pre $C = \max p(\overline{U})$. Ukázali sme teda, že pre každý spojitý potenciál p je $\hat{R}_p^{U^c} \in F(\mathbf{H}(U))$.

Nech teraz $f \in \mathbf{C}(\partial U)$. Podľa [LMNS, Proposition A.169] existujú postupnosti $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ spojitých potenciálov také, že $p_n - q_n$ konverguje rovnomerne ku f na ∂U. Potom však

$$\hat{R}_{p_n}^{U^c}(x) - \hat{R}_{q_n}^{U^c}(x) = \int_{\partial U} (p_n - q_n)\, \mathrm{d}\varepsilon_x^{U^c} \to \int_{\partial U} f \, \mathrm{d}\varepsilon_x^{U^c} = f^{U^c}(x),$$

pričom konvergencia je rovnomerná, nakoľko podľa [LMNS, Theorem A.198] je $\varepsilon_x^{U^c}$ pravdepodobnostná miera pre každé $x \in \overline{U}$. Takže $f^{U^c} \in B_{1/2}(\mathbf{H}(U))$. $\square$

Tvrdenie 7.2. *Nech $(X, \mathscr{H})$ je harmonický priestor spĺňajúci axiómu dominancie. Nech $K \subset X$ je kompaktná množina a nech $f \in \mathbf{C}(\partial K)$. Potom $K_f^K \in B_{1/2}(\mathbf{H}(K))$.*

Dôkaz. Nech $p \in \mathcal{P}^c(X)$. Potom podľa Tvrdenia 3.79 existujú $q_n \in \mathcal{P}^c(X)$ také, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n = \hat{R}_p^{K^c}. \tag{9}$$

Potenciály q_n sú superharmonické na X, takže podľa [LMZ, Theorem 12.2] sú jemne hyperharmonické na X, a teda aj jemne hyperharmonické na $K^{\circ f}$. Pre všetky relatívne kompaktné, jemne otvorené množiny V také, že $\overline{V} \subset K^{\circ f}$, a pre všetky $x \in V$ teda platí

$$\int_{K^{\circ f}} q_n \, \mathrm{d}\varepsilon_x^{V^c} \leq q_n(x). \tag{10}$$

Podľa [LMZ, Lemma 12.7] je funkcia

$$p^{(K^{\circ f})^c} : x \mapsto \int_K p \, \mathrm{d}\varepsilon_x^{(K^{\circ f})^c}$$

jemne harmonická na $K^{\circ f}$. (Podľa [LMZ, 11.B, str. 351], je miera $\varepsilon_x^{(K^{\circ f})^c}$ nesená každou borelovskou podmnožinou X obsahujúcou $\overline{K^{\circ f}} \setminus K^{\circ f}$, a teda aj množinou K.) Keďže $K^c \subset (K^{\circ f})^c = \overline{K^c}^f$, tak podľa [BH, Lemma 4.3] je $R_p^{K^c} = R_p^{(K^{\circ f})^c}$, a teda aj $\hat{R}_p^{K^c} = \hat{R}_p^{(K^{\circ f})^c} = p^{(K^{\circ f})^c}$ a máme teda jemnú harmonicitu $\hat{R}_p^{K^c}$ na $K^{\circ f}$.

Keby vo vzťahu (10) platila pre nejakú množinu V a nejaké $x \in V$ ostrá nerovnosť, platila by pre túto množinu V a toto x ostrá nerovnosť aj pre $\hat{R}_p^{K^c}$, a to by bol spor s jemnou harmonicitou $\hat{R}_p^{K^c}$. Vo vzťahu (10) platia teda rovnosti a potenciály q_n sú jemne harmonické na $K^{\circ f}$. Keďže sú q_n súčasne spojité na $X \supset K$, je $q_n \in \mathbf{H}(K)$.

Položme $p_n = \sum_{i=1}^{n} q_i|_K$. Potom $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií z $\mathbf{H}(K)$ bodovo konvergujúca ku $\hat{R}_p^{K^c}$ na K, pričom vzťah (9) zabezpečuje splnenie podmienky (3) zo strany 11 pre $C = \max p(K)$. Ukázali sme teda, že pre každý spojitý potenciál p je $\hat{R}_p^{K^c} \in F(\mathbf{H}(K))$.

Nech teraz $f \in \mathbf{C}(\partial K)$. Podľa [LMNS, Proposition A.169] existujú postupnosti $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ spojitých potenciálov také, že $p_n - q_n$ konverguje rovnomerne ku f na ∂K. Potom však

$$\hat{R}_{p_n}^{K^c}(x) - \hat{R}_{q_n}^{K^c}(x) = \int_{\partial K} (p_n - q_n) \, \mathrm{d}\varepsilon_x^{K^c} \to \int_{\partial K} f \, \mathrm{d}\varepsilon_x^{K^c} = K_f^K(x),$$

pričom konvergencia je rovnomerná, nakoľko podľa [LMNS, Theorem A.198] je $\varepsilon_x^{K^c}$ pravdepodobnostná miera pre každé $x \in K$. Takže $K_f^K \in B_{1/2}(\mathbf{H}(K))$. □

Predchádzajúce tvrdenie dokážeme za slabšieho predpokladu axiómy polarity. Najskôr budeme potrebovať niekoľko pojmov.

Definícia 7.3. Nech $\mathcal{B}(X)$ označuje množinu všetkých borelovských podmnožín X. Zobrazenie $V : X \times \mathcal{B}(X) \to \langle 0, +\infty \rangle$ sa nazýva *jadro* na X, ak

a) funkcia $x \mapsto V(x, B)$ je borelovsky merateľná pre každú $B \in \mathcal{B}(X)$,

b) funkcia $B \mapsto V(x, B)$ je miera na $(X, \mathcal{B}(X))$ pre každé $x \in X$.

Pre jadro V a nezápornú borelovskú funkciu f definujeme numerickú funkciu Vf na X vzťahom

$$Vf(x) := \int_X f \,\mathrm{d}V(x, \cdot)$$

Definícia 7.4. Jadro D na X sa nazýva *dilatácia*, ak $Dp \leq p$ pre všetky $p \in \mathcal{P}^c$. Dilatácia D sa nazýva $\mathcal{P}^c$-dilatácia, ak $D(\mathcal{P}^c) \subset \mathcal{P}^c$.

Tvrdenie 7.5. *Nech U je neprázdna, otvorená, relatívne kompaktná podmnožina harmonického priestoru $(X, \mathscr{H})$. Pre každú $f \in \mathbf{C}(\partial U)$ je funkcia*

$$x \mapsto \int_{\partial U} f \,\mathrm{d}\varepsilon_x^{U^c}$$

harmonická v U.

Dôkaz. Vyplýva z [Bau2, Satz 4.1.1] a Tvrdenia 3.75. □

Dôsledok 7.6. *Nech U je neprázdna, otvorená, relatívne kompaktná podmnožina harmonického priestoru $(X, \mathscr{H})$. Potom $h \in \mathscr{H}(U)$ práve vtedy, keď pre každú otvorenú množinu $V \subset \overline{V} \subset U$ a každé $y \in V$ platí*

$$\int_{\partial V} h \,\mathrm{d}\varepsilon_y^{V^c} = h(y). \tag{11}$$

Dôkaz. Ak $h \in \mathscr{H}(U)$, tak platnosť (11) vyplýva z Tvrdenia 3.75. Naopak, z platnosti (11) podľa Tvrdenia 7.5 je $h \in \mathscr{H}(V)$ pre každú otvorenú množinu $V \subset \overline{V} \subset U$, a teda $h \in \mathscr{H}(U)$. □

Definícia 7.7. Nech K je kompaktná podmnožina harmonického priestoru $(X, \mathscr{H})$. Hovoríme, že nezáporný lineárny operátor $T : \mathbf{C}(\partial K) \to \mathbf{H}(K)$ je *K-operátor na K*, ak $T1 \leq 1$. Postupnosť $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ K-operátorov na K sa nazýva K-postupnosť na K, ak $T_n f \to K_f^K$ bodovo na K pre každú $f \in \mathbf{C}(\partial K)$.

Tvrdenie 7.8. *Nech $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť K-operátorov. Ak pre všetky body $x \in K$ a všetky $p \in \mathcal{P}^c(X)$ je $T_n p(x) \to \hat{R}_p^{K^c}(x)$, tak postupnosť $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ je K-postupnosť.*

Dôkaz. Podľa Rieszovej vety o reprezentácii pre každé $x \in K$ a každé $n \in \mathbb{N}$ existuje jediná nezáporná Radonova miera τ_n^x na ∂K taká, že

$$T_n f(x) = \int_{\partial K} f \, \mathrm{d}\tau_n^x, \quad \text{pre všetky } f \in \mathbf{C}(\partial K).$$

Keďže $T_n 1 \leq 1$, je $\tau_n^x(\partial K) \leq 1$. Nech $f \in \mathbf{C}(\partial K)$ je ľubovoľná funkcia a nech $\varepsilon > 0$. Potom existujú $p, q \in \mathcal{P}^c(X)$ také, že $\|f - (p-q)\|_\infty < \varepsilon$, a teda pre každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in K$ je

$$\Big| T_n f(x) - \big(T_n p(x) - T_n q(x)\big) \Big| \leq \int_{\partial K} \big| f - (p-q) \big| \, \mathrm{d}\tau_n^x < \varepsilon$$

a vzhľadom k tomu, že $\varepsilon_x^{K^c}$ je pravdepodobnostná miera, tak je tiež

$$\Big| \varepsilon_x^{K^c}(f) - \big(\varepsilon_x^{K^c}(p) - \varepsilon_x^{K^c}(q)\big) \Big| \leq \int_{\partial K} \big| f - (p-q) \big| \, \mathrm{d}\varepsilon_x^{K^c} < \varepsilon.$$

Máme teda

$$\begin{aligned} \big| T_n f(x) - K_f^K(x) \big| &= \big| T_n f(x) - \varepsilon_x^{K^c}(f) \big| \leq \\ &= 2\varepsilon + \big| T_n p(x) - \varepsilon_x^{K^c}(p) \big| + \big| T_n q(x) - \varepsilon_x^{K^c}(q) \big| \end{aligned}$$

a keďže $T_n p(x) \to \hat{R}_p^{K^c}(x) = \varepsilon_x^{K^c}(p)$ a $T_n q(x) \to \hat{R}_q^{K^c}(x) = \varepsilon_x^{K^c}(q)$, dostávame $T_n f(x) \to K_f^K(x)$. □

Tvrdenie 7.9. *Nech $(X, \mathscr{H})$ je harmonický priestor spĺňajúci axiómu polarity a nech $K \subset X$ je kompaktná množina. Potom pre každú $f \in \mathbf{C}(\partial K)$ je $K_f^K \in B_{1/2}(\mathbf{H}(K))$.*

Dôkaz. Podľa [BH, Theorem VI.6.13] existuje systém $\{A_t\}_{0<t<1}$ uzavretých množín obsiahnutých v $K^c \cap \beta(K^c)$ taký, že $A_s \subset A_t$ pre všetky $0 < s < t < 1$,

$$\beta(K^c) = \beta\left(\bigcup_{0<t<1} A_t \right)$$

a

$$A_s \subset \beta(A_t) \quad \text{pre všetky } 0 < s < t < 1.$$

Označme

$$D_n(x,B) := 2^n \int_{1-2^{-n+1}}^{1-2^{-n}} \varepsilon_x^{A_t}(B)\,\mathrm{d}t$$

Podľa [BH, str. 314] je D_n $\mathcal{P}^c$-dilatácia, takže pre každý $p \in \mathcal{P}^c$ je funkcia $D_n p$ daná vzťahom

$$D_n p(x) = \int_X p\,\mathrm{d}D_n(x,\cdot) = 2^n \int_{1-2^{-n+1}}^{1-2^{-n}} \varepsilon_x^{A_t}(p)\,\mathrm{d}t$$

spojitý potenciál.

Nech $p \in \mathcal{P}^c$ a nech $y \in V \subset \overline{V} \subset K^{\circ f}$, kde V je otvorená množina. Nakoľko podľa [LMNS, Theorem A.196] je funkcia $x \mapsto \varepsilon_x^{A_t}(p) = \hat{R}_p^{A_t}(x)$ harmonická na A_t^c, je podľa Dôsledku 7.6

$$\int_{\partial V} \varepsilon_x^{A_t}(p)\,\mathrm{d}\varepsilon_y^{V^c}(x) = \varepsilon_y^{A_t}(p).$$

Potom z Fubiniovej vety (p je nezáporná funkcia a miery sú σ-konečné) dostávame

$$\begin{aligned}
\int_{\partial V} D_n p\,\mathrm{d}\varepsilon_y^{V^c} &= \int_{\partial V} \left(2^n \int_{1-2^{-n+1}}^{1-2^{-n}} \varepsilon_x^{A_t}(p)\,\mathrm{d}t\right) \mathrm{d}\varepsilon_y^{V^c}(x) = \\
&= 2^n \int_{1-2^{-n+1}}^{1-2^{-n}} \left(\int_{\partial V} \varepsilon_x^{A_t}(p)\,\mathrm{d}\varepsilon_y^{V^c}(x)\right) \mathrm{d}t = \\
&= 2^n \int_{1-2^{-n+1}}^{1-2^{-n}} \varepsilon_y^{A_t}(p)\,\mathrm{d}t = D_n p(y)
\end{aligned}$$

a keďže miera $\varepsilon_y^{V^c}$ je nesená množinou $\partial V \subset K^{\circ f}$ ([LMNS, Theorem A.198]), máme

$$\int_{K^{\circ f}} D_n p\,\mathrm{d}\varepsilon_y^{V^c} = D_n p(y),$$

takže $D_n p$ je jemne harmonická v $K^{\circ f}$, pričom zo spojitosti $D_n p$ máme $D_n p \in \mathbf{H}(K)$. Keďže pre všetky $x \in K$ je podľa [LMNS, Theorem A.198] $\varepsilon_x^{A_t}$ pravdepodobnostná miera, tak $\varepsilon_x^{A_t}(1) = 1$, a teda aj $D_n 1 = 1$. D_n sú tiež zjavne nezáporné lineárne operátory. Nech teraz $f \in \mathbf{C}(\partial K)$ je ľubovoľná funkcia a nech $\varepsilon > 0$. Podľa [LMNS, Proposition A.169] existujú p, $q \in \mathcal{P}^c$ také, že $\|f - (p-q)\|_\infty < \varepsilon$. Z nezápornosti D_n máme $\|D_n f - (D_n p - D_n q)\|_\infty < < D_n \varepsilon = \varepsilon$. Keďže $D_n p$, $D_n q \in \mathbf{H}(K)$ a priestor $\mathbf{H}(K)$ je uniformne uzavretý, je $D_n f \in \mathbf{H}(K)$. Ukázali sme teda, že D_n sú K-operátory.

Podľa [BH, str. 314] je $D_n p \nearrow R_p^{\beta(K^c)}$, takže podľa Tvrdenia 3.87 máme $D_n p \nearrow R_p^{b(K^c)}$. Keďže $D_n p$ sú spojité, je ich neklesajúca limita zdola polospojitá, a teda $D_n p \nearrow \hat{R}_p^{b(K^c)}$. Podľa [BH, Proposition VI.4.4] je $\overline{K^c}^f = K^c \cup b(K^c)$, takže podľa [BH, Proposition VI.4.3] je $R_p^{K^c \cup b(K^c)} = R_p^{K^c}$. Podľa Tvrdenia 3.87 je množina $K^c \setminus b(K^c)$ polárna. Pre množiny $A := K^c \cup b(K^c)$ a $B := b(K^c)$ je teda $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ polárna množina a podľa [CC, Corollary 6.2.1] je $\hat{R}_p^{K^c \cup b(K^c)} = \hat{R}_p^{b(K^c)}$. Máme teda $\hat{R}_p^{b(K^c)} = \hat{R}_p^{K^c}$, takže $D_n p \nearrow \hat{R}_p^{K^c}$.

Podľa Tvrdenia 7.8 je $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ K-postupnosť, teda pre každé $f \in \mathbf{C}(\partial K)$ je $D_n f \to K_f^K$ bodovo na K. Špeciálne, pre $p \in \mathcal{P}^c$ je $D_n p \nearrow K_p^K$. Keďže $D_n p \le p$, máme (pri dodefinovaní $D_0 \equiv 0$) pre každé $x \in K$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} |D_{n+1}p(x) - D_n p(x)| &= \sum_{n=0}^{\infty} \big(D_{n+1}p(x) - D_n p(x)\big) = \\ &= \lim_{n\to\infty} D_n p(x) \le p(x) \le \max p(K).\end{aligned}$$

Pre každý $p \in \mathcal{P}^c$ máme teda $K_p^K \in F(\mathbf{H}(K))$. Nech teraz $f \in \mathbf{C}(\partial K)$. Podľa [LMNS, Proposition A.169] existujú postupnosti $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ spojitých potenciálov také, že $p_n - q_n$ konverguje rovnomerne ku f na ∂K. Potom však

$$K_{p_n}^K(x) - K_{q_n}^K(x) = \int_{\partial K} (p_n - q_n)\, \mathrm{d}\varepsilon_x^{K^c} \to \int_{\partial K} f \,\mathrm{d}\varepsilon_x^{K^c} = K_f^K(x),$$

pričom konvergencia je rovnomerná, nakoľko podľa [LMNS, Theorem A.198] je $\varepsilon_x^{K^c}$ pravdepodobnostná miera pre každé $x \in K$. Takže $K_f^K \in B_{1/2}(\mathbf{H}(K))$. $\square$

Poznámka 7.10. Analogicky možno dokázať, že pre každú otvorenú, relatívne kompaktnú množinu U v harmonickom priestore $(X, \mathscr{H})$ spĺňajúcom axiómu polarity a pre každú $f \in \mathbf{C}(\partial U)$ je $f^{U^c} \in B_{1/2}(\mathbf{H}(U))$.

Literatúra

[AG] Armitage, D. H. – Gardiner, S. J.: *Classical Potential Theory*, Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, 2001.

[Bau1] Bauer, H.: *Silovscher Rand und Dirichletsches Problem*, Ann. Inst. Fourier **11** (1961), 89 – 136.

[Bau2] Bauer, H.: *Harmonische Räume und ihre Potentiatheorie*, Lecture Notes in Math. 22, Springer-Verlag, 1966.

[BCC] Boboc, N. – Constantinescu, C. – Cornea, A.: *Axiomatic Theory of Harmonic Functions. Nonnegative superharmonic Functions*, Ann. Inst. Fourier **15** (1965), 283 – 312.

[BH] Bliedtner, J. – Hansen, W.: *Potential Theory – An Analytic and Probabilistic Approach to Balayage*, Universitext, Springer-Verlag, 1986.

[CC] Constantinescu, C. – Cornea, A.: *Potential Theory on Harmonic Spaces*, Springer-Verlag, 1972.

[DG] Debiard, A. – Gaveau, B.: *Potentiel Fin et Algèbres de Fonctions Analytiques I*, J. Funct. Anal. **16** (1974), 289 – 304.

[Doob] Doob, J. L.: *Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart*, Springer-Verlag, 1984.

[EK] Effros, E. G. – Kazdan, J. L.: *Applications of Choquet Simplexes to Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems*, J. Differential Equations **8** (1970), 95 – 134.

[HN] Hansen, W. – Netuka, I.: *Jensen Measures in Potential Theory*, Potential Anal. **37** (2012), 79 – 90.

[HOR] Haydon, R. – Odell, E. – Rosenthal, H.: *On Certain Classes of Baire-1 Functions with Applications to Banach Space Theory*, In: Lecture Notes in Math. 1470, 1 – 35, Springer-Verlag, 1991.

[Kel] Kelly, J. C.: *Bitopological Spaces*, Proc. Lond. Math. Soc. **13** (1963), 71 – 89.

[LMNS] Lukeš, J. – Malý, J. – Netuka, I. – Spurný, J.: *Integral Representation Theory. Applications to Convexity, Banach Spaces and Potential Theory*, Walter de Gruyter, 2010.

[LMNSS] Lukeš, J. – Malý, J. – Netuka, I. – Smrčka, M. – Spurný, J.: *On Approximation of Affine Baire-one Functions*, Israel J. Math. **134** (2003), 255 – 287.

[LMZ] Lukeš, J. – Malý, J. – Zajíček, L.: *Fine topology methods in real analysis and potential theory*, Lecture Notes in Math. 1189, Springer-Verlag, 1986.

[Oma] Omasta, E.: *Approximations by differences of lower semicontinuous functions*, Tatra Mt. Math. Publ. **62** (2015), 183 – 190.

[Per] Perkins, T. L.: *The Dirichlet Problem for Harmonic Functions on Compact Sets*, Pacific J. Math. **254** (2011), 211 – 226.

[Pol] Poletsky, E. A.: *Approximation by Harmonic Functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997), 4415 – 4427.

[Pra] Pradelle, A. de la: *Approximation et Caractère de quasi-analyticité dans la théorie axiomatique des fonctions harmoniques*, Ann. Inst. Fourier **17** (1967), 383 – 399.

[Spu] Spurný, J.: *On Lattice Structure of the Space of Pointwise Limits of Harmonic Functions*, Potential Anal. **24** (2006), 195 – 203.

[Tho] Thomson, B. S.: *Symmetric Properties of Real Functions*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics 183, CRC Press, 1994.

Zoznam symbolov

ε_x	Diracova miera v bode x	3
ε_x^A	výmet Diracovej miery ε_x na množinu A	5
$\hat{f}$	zdola polospojitá regularizácia funkcie f	5
f^+	kladná časť numerickej funkcie f	3
f^-	záporná časť numerickej funkcie f	3
$f\|_M$	reštrikcia funkcie f na množinu M	3
f^{G^c}	rozšírenie PWB riešenia Dirichletovho problému na $\overline{G}$	13
$F(\mathcal{H})$	funkcie, ktorých rovnomerné limity tvoria $B_{1/2}(\mathcal{H})$	11
$\mathcal{H}$	funkčný priestor na kompakte K	7
$\mathscr{H}(G)$	funkcie harmonické na otvorenej množine G	4
${}^*\mathscr{H}(G)$	hyperharmonické funkcie na G v $\mathbb{R}^d$	4
$\mathscr{H}_*(G)$	hypoharmonické funkcie na G v $\mathbb{R}^d$	4
${}^*\mathscr{H}(U)$	hyperharmonické funkcie na U v abstraktnej teórii	17
$\mathscr{H}_*(U)$	hypoharmonické funkcie na U v abstraktnej teórii	17
H_f^G	PWB riešenie Dirichletovho problému	12
$\mathbf{H}(G)$	funkcie spojité na $\overline{G}$ a harmonické v G	4
$\mathbf{H}_0(K)$	funkcie harmonické na nejakom okolí kompaktu K	4
$\mathbf{H}(K)$	uzáver priestoru $\mathbf{H}_0(K)$ v priestore $\mathbf{C}(K)$	4
$\mathcal{J}_x(G)$	Jensenove miery pre x na otvorenej množine G	9
$\mathcal{J}_x(K)$	Jensenove miery pre x na kompakte K	9
$\mathcal{K}^c(\mathcal{H})$	množina všetkých spojitých $\mathcal{H}$-konvexných funkcií	8
K_f^K	PWB riešenie Dirichletovho problému pre kompakt	14
λ	Lebesguova miera v $\mathbb{R}^d$	3
$\mathcal{M}(K)$	Banachov priestor všetkých Radonovych mier na K	3