

Autor: Mgr. Michal Garlík

Název práce: Model constructions for bounded arithmetic

Širším tématem disertační práce jsou souvislosti matematické logiky a teorie výpočetní a důkazové složitosti, specifickým tématem pak konstrukce modelů teorií omezené aritmetiky. Od osmdesátých let minulého století je známo – zejména díky práci M.Ajtaie – že úkol dokázat spodní odhad pro výpočetní či důkazovou složitost lze často převést na úkol sestavit nestandardní model pro vhodnou teorii aritmetiky. Příkladem takových důkazů jsou spodní odhady na velikost  $AC_0$  obvodů pro paritu či na délku důkazů PHP principu ve Fregeho systémech konstantní hloubky (oba od Ajtaie). Pan Garlík ve své disertaci studuje jednak obecné vlastnosti těchto konstrukcí a jednak předkládá novou konstrukci nestandardních modelů, kterou se mu i podařilo aplikovat na otevřený problém a dokázat novou separaci systémů omezené aritmetiky.

Disertace má tři hlavní části, které tvoří dva samostatné články autora a jedna pracovní verze budoucího článku. Tyto části jsou doplněny o předmluvu a o závěrečné poznámky o dalším možném směru výzkumu. První část (kap.2) je tvořena článkem, který již vyšel v Archive for Mathematical Logic. V něm pan Garlík podává nový důkaz Ajtaiovy „věty o úplnosti“ pro pseudo-konečné struktury, což je určitá obecná charakterizace situací, v nichž lze problémy složitosti převést na teorii modelů. Původní Ajtaiův důkaz byl založen na ad hoc konstrukci, byl zatížen řadou technických podmínek a některé jeho části byly méně explicitní, než běžný čtenář očekává. Důkaz pana Garlíka je jasný, kratší a úplný.

Druhá část (kap.3) je tvořena článkem t.č. recenzovaným v Archive for Mathematical Logic. V něm autor předkládá novou konstrukci modelů teorie omezené aritmetiky, které splňují určitou formu indukce pro omezené Sigma1-formule. Toto je velmi zajímavý počín, protože takových konstrukcí je známo málo a indukci typicky zařídí jen pro menší třídu formulí. Navíc byl pan Garlík schopen tuto novou metodu aplikovat na otevřený problém a dokázal, že teorie  $sR_{12}$  a  $R_{12}$  jsou různé, existuje-li jednosměrná permutace.

Ve třetí části práce (kap.4) jsou prezentovány dvě další použití konstrukce definované v kap.3, např. důkaz separace relativizovaných teorií  $sR_{12}$  a  $R_{12}$  bez použití předpokladu z teorie složitosti.

Pan Garlík píše matematické texty velmi pečlivě, ale také velmi kompaktně: nic, co lze odvodit z již napsaného, se nevysvětluje a čtenář musí projít i detaily, aby pochopil celkovou ideu. Pár slov navíc by, myslím, celé prezentaci výrazně prospělo.

Téma disertace pana Garlíka patří, dle mého názoru, k těm nejobtížnějším v oblasti mezi logikou a složitostí. Nedává moc prostoru pro vylepšování výsledků jiných autorů a je nutné přijít s opravdu novou ideou. Podle mého názoru disertace pana Garlíka obsahuje nové zajímavé myšlenky i konkrétní výsledky a jasně prokazuje jeho schopnost k samostatné tvůrčí práci v matematice. Doporučuji, aby svoji disertaci úspěšně obhájil.

Jan Krajíček  
(školitel, KA)

23.6.2015