Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Jakub Šindelář

Tržně konzistentní oceňování závazků pojišťovny

Katedra pravděpodobnosti a metamatické statistiky

Vedoucí diplomové práce:	Mgr. Barbora Hrbková
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Finanční a pojistná matematika

Praha 2015

Na tomto místě bych chtěl poděkovat Mgr. Barboře Hrbkové za vedení, konzultace a pomoc při vytváření diplomové práce. Můj dík dále patří mé rodině a zejména Evě za podporu a trpělivost, kterou mi během psaní této práce věnovali.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Tržně konzistentní oceňování závazků pojišťovny

Autor: Jakub Šindelář

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Barbora Hrbková, KPMG Česká republika, s.r.o.

Abstrakt: Tržně konzistentní ocenění závazků pojišťovny je důležitým přístupem nejen v rámci regulatorního rámce Solvency II, ale obecně pří finančním a aktuárském modelování v pojištovnách. Proto se v práci zaměříme zejmená na odvození teorických základů, a to k ocenění cash flow ze závazků pomocí deflátorů při reálné pravděpodbnostní míře a pomocí diskontu bankovního účtu za rizikově neutrální míry (též ekvivalentní martingalové míry). Na ilustrativním příkladu ukážeme ekvivalenci obou přístupů k ocenění. Dále se věnujeme modelování spotových sazeb, a to pomocí Vašíčkova modelu s diskrétním časem. Vašíčkův model použijeme při ocenění pomocí oceňovacího portfolia, kdy pojistné závazky vyjádříme pomocí finančních instrumentů. Důležitým předpokladem pro nás bude nezávislé oddělení finančních a pojistně technických jevů při jejich modelování.

Klíčová slova: deflátory, stochastické diskontování, replikační portfolio, ekvivalentní martingalová míra

Title: Market consistent valuation of insurance liabilities

Author: Jakub Šindelář

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Mgr. Barbora Hrbková, KPMG Česká republika, s.r.o.

Abstract: Market-consistent actuarial valuation of insurance liabilities is important approach not only for regulatory framework Solvency II but also generally for financial and actuarial modeling in insurance companies. It is the reason why we will focus on derivation of basic theory for valuation of cash flow from insurance liabilities by real world probability measure with deflators and risk neutral measure with bank account numeraire (also called equivalent martingale measure). We will show on illustrative examples ekvivalence of both approaches. Further, we will focus on spot rate modeling using discrete time Vasicek model. We use discrete time Vasicek model in Valuation Portfolio theory, where we are trying to replicate insurance liabilities by financial instruments. In theory and also example we use important assumption about independent decoupling of financial events and insurance technical events for theirs modeling.

Keywords: deflators, stochastic discounting, replicating portfolio, equivalent martingale measure

Obsah

Úvod

Důležitým požadavkem z hlediska ocenění položek v rozvaze pojišťovny v připravované směrnici Solvency II je konzistence v oceňování aktiv a závazků. V práci jsem se zaměřil zejména na ocenění závazků pomocí stochastické diskontní míry, a to pro životní pojišťovny, kde je toto téma, díky velkému množství dlouhodobých závazků, nejaktuálnější.

Aktiva jsou většinou v rozvaze oceňována pomocí tržní ceny a závazky (vyplývající z pojistných smluv uzavřených pojišťovnou) pomocí zavedených aktuárských metod, čímž vzniká v jejich ocenění nesoulad. Tento rozpor se snaží řešit tržně konzistentní metody ocenění. V této práci se nebudu věnovat jiným závazkům než závazkům vyplývajícím z pojistých smluv. Zásadním problémem při oceňovaní je, že zatímco pro aktiva držená pojišťovnou většinou existuje aktivní trh a lze tak snadno určit jejich tržní hodnotu, pro pasiva (pojistné smlouvy) takovýto aktivní trh neexistuje. Je potom otázkou, jak správně určit teoretickou hodnotu závazku v případě existence takového trhu. V souvislosti s dalším důležitým pojmem, a to solventností pojišťoven, se pak dostáváme k aktuálně nejdůležitějším tématům pojišťovnictví, dohledu nad pojišťovnami a fungování regulátorů.

V první kapitole nejprve uvedeme několik základních informací k regulatornímu rámci Solvency II a obecnou definici tržně konzistentního ocenění. Půjde o principy a definice, zatím bez hlubšího matematického základu. Je důležité mít na paměti několik základních předpokladů jako je rozvinutost, likvidita a transparentnost na trhu aktiv. Stavíme na předpokladu neexistence arbitráže, abychom se vyvarovali možnosti „her“ s pojistnými závazky.

Ve druhé kapitole začneme pojmem diskontování, tedy časovou hodnotou peněz. Definujeme spotové a forwardové sazby, které tvoří výnosovou křivku. Pro modelování cash flow potřebujeme znát budoucí vývoj výnosových křivek, což nás vede k jejich stochastickému modelování. Z pozorovaných dat na trhu, která jsou ovšem dostupná pouze pro některé doby do splatnosti, odhadujeme současnou výnosovou křivku v čase $t = 0$. Její náhodný vývoj do budoucnosti budeme modelovat pomocí finančně matematického přístupu založeného na konzistentních a bezarbitrážních modelech. Uvedeme základní stochastický model s diskrétním časem a definici deflátorů, coby stochastických diskontních faktorů. Ukážeme, jak deflátory souvisí s klasickým finančním diskontováním a hodnotou bezrizikových bezkuponových dluhopisů. K ocenění cash flow použijeme pozitivní, spojitý a lineární funkcionál. Ukážeme martingalovou vlastnost diskontovaných náhodných procesů cen a význam pro výpočet rezerv. Přecházíme v podstatě od klasické aktuárské teorie, kde pracujeme s konstantní úrokovou mírou, k definici rezerv jako podmíněné střední hodnoty náhodných cash flow. Oceňovat cash flow můžeme buď pomocí deflátoru při reálné pravděpodobnostní míře $\mathbb{P}$, nebo pomocí diskontu bankovního účtu za rizikově neutrální míry $\mathbb{P}^*$. Rizikově neutrální míra se též nazývá ekvivalentní martingalová míra. Uvedeme vlastnosti ekvivalentní martingalové míry a základní větu oceňování aktiv. Společně s oceněním pomocí funkcionálu Q jsme uvedli tři způsoby ocenění cash flow $\boldsymbol{X}$. Kapitolu zakončíme definicí tržní ceny rizika, která je převodníkem mezi reálnou pravděpodobnostní mírou $\mathbb{P}$ a rizikově neutrální mírou $\mathbb{P}^*$. Základní myšlenka vychází ze span-deflátoru a určení jeho dynamiky podle obou pravděpodobnostních měr.

Ve třetí kapitole se již věnujeme konkrétnímu modelování spotových sazeb a deflátoru, a to pro Vašíčkův model s diskrétním časem. Jedná se o jednofaktorový model s afinní časovou strukturou a Normálně rozdělenými inovacemi. Uvedeme dynamiku spotových sazeb podle reálné pravděpodobnostní míry a na jejím základě odvodíme vyjádření deflátoru a ekvivalentní martingalové míry. Získáme logaritmicko-normální rozdělení cen bezrizikových bezkuponových dluhopisů $P(t, m)$. Kromě tohoto základního modelu, kde pracujeme s ročním časovým krokem ještě odvodíme Vašíčkův model s měsíčním krokem, který využijeme při odhadu paramterů modelu, protože pro měsíční krok budeme mít v numerické části k dispozici větší počet pozorování. V závěru kapitoly popíšeme odhad parametrů Vašíčkova modelu pomocí metody maximální věrohodnosti.

Naším hlavním cílem je modelovat a oceňovat aktiva i pasiva, která se vážou k pojistným smlouvám, ekonomicky a tržně konzistentně. Ve čtvrté kapitole tedy krátce uvedeme podstatu ocenění cash flow z aktiv a model finančního trhu, který se skládá z bazických finančních instrumentů. V třetí části kapitoly uvedeme vzorce pro ocenění finančních derivatů, tedy konkrétně Evropských opcí. Vzorce pro ocenění Evropské put opce potom použijeme v sedmé kapitole s numerickými příklady, a to pro garanci výnosu u pojistného produktu.

V páté kapitole uvedeme využití definic ze základního stochastického modelu druhé kapitoly pro aktuárské a finanční modelování. Začneme finančním trhem a finanční filtrací, která popisuje finanční informace na trhu. V základním aktuárském modelu rozdělíme filtraci $\mathbb{F}$ na dvě nezávislé filtrace $\mathbb{A}$ (modeluje finanční jevy) a $\mathbb{T}$ (modeluje pojistně technické jevy). Předpokládáme součinovou strukturu cash flow pojistných závazků a cash flow rozdělíme na zajistitelnou a nezajistitelnou část.

V šesté kapitole, kde pracujeme se základním aktuárským modelem, sestrojíme Valuation Portfolio (VaPo). Základní myšlenkou je vyjádřit pojistné závazky pomocí bazických finančních instrumentů finančního trhu. Snažíme se tedy pojistné závazky mapovat na vícerozměrné VaPo ve vektorovém prostoru bazických finančních instrumentů. Při konstrukci VaPo budeme postupovat ve třech krocích. Nejprve vyjádříme pojistné závazky pomocí finančních portfolií. Poté nahradíme pojistně technické proměnné, které vyjadřují počet finančních portfolií použitých k replikaci, jejich nejlepšími odhady. Nakonec určíme peněžní hodnotu VaPo. Pomocí VaPo definujeme nejlepší odhad rezerv. V druhé části kapitoly uvolníme předpoklad pro pojistně technický deflátor (tedy $\boldsymbol{\varphi} \equiv 1$) a definujeme VaPo zajištěné proti pojistně technickým rizikům. Rozdílem mezi těmito dvěma portfolii je přirážka za nezajistitelná rizika.

Použití uvedené teorie ukážeme na třech ilustrativních příkladech v sedmé kapitole. Nejprve oceníme put opci, která reprezentuje instrument obchodovaný na trhu. Srovnáme její ocenění pomocí Black-Scholesova vzorce, rizikově neutrálního ocenění a real world ocenění s deflátory. V druhé části ukážeme ekvivalenci ocenenění podle reálné pravděpodobnostní míry a rizikově neutrální míry na pojistném produktu, který již na trhu není aktivně obchodovaný a je tedy nutné použít marked-to-model přístup. Následně vezmeme pojištění pro případ smrti nebo dožití a na něm si ukážeme aplikaci teorie k Valuation Portfoliu.

1. Tržně konzistentní ocenění v rámci Solvency II

1.1 Solvency II

Regulatorní rámec Solvency II se snaží o přezkoumání současného obezřetného přístupu v pojišťovnictví a zavedení přístupu, který bude více odpovídat konkrétním rizikům, s nimiž přicházejí pojišťovny do kontaktu. Hlavním úkolem nové legislativy má být ochrana pojistníka (respektive pojištěného) před následky insolvence pojišťoven. Není tedy úkolem regulátora přímo předcházet insolvenci, ale v případě, že nastane, zajistit, aby všechny závazky vůči pojištěným byly v dostatečné míře kryty aktivy pojišťovny. Prevence finančních problémů či dokonce insolvence má být zejména úkolem managementu a představenstva společnosti. Z hlediska správného fungování pojišťovny není důležité pouze udržovat dostatečnou míru solventnosti, ale také mít kvalitní a dostatečně rozsáhlý risk management.

Nedávná finanční krize ještě více podpořila hlasy volající po změně přístupu k rizikům. Požadovaný kapitál, který by měla pojišťovna držet, aby zůstala solventní, by neměl být počítán čistě na základě jednoduchých regulatorních norem. Je třeba přijmout komplexnějších přístup, kdy se velikost kapitálového požadavku odvozuje od aktuálního rizika hrozícího pojišťovně a případně kvality jejího portfolia a zodpovědného přístupu k rizikům. Tento přístup zohledňující riziko je typickým pro mnoho iniciativ snažících se o větší uvědomění u finančních společností (kromě Solvency II ještě Basel II, Swiss Solvency Test, IFRS standardy, atd.).

Jako první krok byla Radou Evropské unie a Evropským parlamentem v roce 2009 přijata Direktiva 2009/138/EC (známá pod názvem Solvency II). Jedná se o tzv. Level 1 dokument, ve kterém jsou obecně definovány principy, kterými by se měly pojišťovny v EU řídit. Z pohledu dozoru nad pojišťovnami nejde o stanovení pevných pravidel, ale spíše o snahu zakotvit obezřetný přístup k rizikům v rámci řídicích kontrolních systémů jednotlivých pojišťoven.

Původně měla daná legislativa vstoupit v platnost již před několika lety, ale kvůli rozsáhlým konzultacím mezi EIOPA, EC, regulátory a samotnými zástupci pojišťoveň došlo k několika odkladům a plná platnost Solvency II se nyní očekává od 1.1.2016 (odklad původního termínu pomocí dokumentu Directive 2013/58/EU). Revize původní direktivy byla provedena pomocí dodatku Omnibus II (Directiva 2014/51/EU).

EIOPA a její předchůdce CEIOPS pomáhaly Evropské komisi na Solvency II již od počátku v roce 2004, a to zejména při vývoji Level 2 dokumentů, kterými jsou „Prováděcí opatření (Implementing Measures - delegated acts)“ a Technické standardy (Technical Standards)[1], a Level 3 Směrnice (Guidelines)[2].

[1] Prováděcí opatření a technické standardy jsou právně závazné a jejich cílem je zajistit jednotné uplatňování Solvency II Direktivy.

[2] Směrnice jsou nezbytné pro zaručení konzistentní implementace Solvency II k prvnímu dni její platnosti. Po vydání Směrnic ve všech úředních jazycích EU, jsou orgány dohledu poviny oznámit EIOPA během dvou měsíců, zda se daných Směrnic budou držet.

V další části táto kapitoly uvedeme definici tržní konzistence, která se vztahuje k ocenění závazků a je jedním z podstatných bodů Solvency II.

1.2 Tržní konzistence

Existuje poměrně velké množství definic „tržně konzistentní hodnoty“ a zajímavý přehled lze nalézt například v M. Kemp [1]. Kemp preferuje následující definici, kterou zde uvádím jako nejvhodnější příklad pro tuto práci:

„Tržně konzistentní hodnota aktiva nebo závazku je jeho tržní hodnota, pokud je snadno obchodovatelný na trhu v době ocenění, a pro jakékoliv jiné aktivum nebo závazek vhodný nejlepší odhad jeho tržní hodnoty, kterou by měl, pokud by byl snadno obchodovatelný v čase, kdy dochází k jeho ocenění.“

Z této definice vyplývá, že unikátní tržní hodnotu lze určit pouze v závislosti na míře „snadného obchodování“. Všeobecně se předpokládá, že trh pro takovéto aktivum nebo závazek musí být rozvinutý, likvidní a transparentní. Čím více daný trh vykazuje tyto vlastnosti, tím spolehlivěji funguje tržně konzistentní ocenění jeho aktiv či závazků. Naopak čím méně odpovídá daným charakteristikám, tím více úsudků a předpokladů je potřeba k získání tržně konzistentní hodnoty a zároveň vzniká širší prostor pro rozdílné názory na to, jaká by tato hodnota měla být. Přesnější definici výše uvedených podstatných vlastností trhu se budeme věnovat v práci později, a to v souvislosti se Solvency II.

Na trzích, které jsou rozvinuté a likvidní, účastníci neustále prodávají a kupují, čímž stanovují tržní ceny, které reflektují jejich shodná stanoviska na hodnoty např. cenných papírů. Tyto ceny mají mnoho dobrých vlastností, které je činí vhodnými k použití pro oceňování:

- rychle reagují na změny relevantních informací,
- hodnoty jsou aditivní (cena dvou cenných papírů je součtem jejich ceny),
- hodnota cenného papíru nezávisí na specifikách kupce ani prodávajícího,
- v daném okamžiku jsou hodnoty unikátní (jednoznačné).

Pokud máme rozvinutý, likvidní a transparentní trh, neexistuje možnost čisté arbitráže, tzn. takové obchodní strategie, kdy bychom s nulovými počátečními náklady mohli dosáhnout kladného zisku. Základním předpokladem likvidního trhu je existence pouze nepatrných transakčních nákladů (pro přiměřeně velké operace). Pokud nejsou na trhu zanedbatelné transakční náklady, je nutné přijmout nějakou konvenci, která by je efektivně odstranila, jako například k ocenění vždy používat mid (průměrné) ceny. Jinak by nebylo jasné, kde přesně v rozpětí ceny nabídky a poptávky (bid ask spread) je tržně konzistentní hodnota aktiva (či závazku). Můžeme tedy předpokládat, že na takovém trhu je splněn princip neexistence arbitráže (přesná definice například v F. Dalbean [5]) nebo též „zákon jedné ceny“. Více k teorii arbitráže lze nalézt např. v F. Dalbean [6] nebo v T. Björk [7]. Platí, že nejen identická aktiva nebo závazky by měly mít stejnou cenu, ale také, že téměř identická aktiva či závazky by měly mít téměř identickou cenu (M. Kemp v [1] o tomto hovoří jako o axiomu spojitosti současné hodnoty). Z principu neexistence arbitráže vyplývá, že tržně konzistentní hodnoty (na trzích s uvedenými vlastnostmi, kde jsou zanedbatelné transkační náklady) by měly splňovat následující axiomy:

- **existence** - v jakémkoli okamžiku by měla existovat hodnota pro jakékoli aktivum nebo závazek (nebo jejich kombinaci). Tedy pro jakoukoli výplatu $\mathbb{a}$ předpokládáme, že existuje její tržně konzistentní hodnota $V(\mathbb{a})$.

- **jednoznačnost** - aby byla hodnota $V(\mathbb{a})$ jednoznačná, předpokládáme navíc úplný trh. To znamená, že jakékoli aktivum či závazek lze replikovat nějakým aktivem či závazkem obchodovaným na tomto trhu.

- **aditivita a distributivita** - pro jakékoli dvě výplaty $\mathbb{a}$ a $\mathbb{b}$ a pro jakoukoli skalární hodnotu k musí pro tržně konzistentní hodnotu výplaty $k(\mathbb{a} + \mathbb{b})$ platit
$$V(k(\mathbb{a} + \mathbb{b})) = k(V(\mathbb{a}) + V(\mathbb{b})).$$

Jedním z hlavních úkolů pojistného matematika je modelovat a oceňovat cash flow z pojistných smluv. Tyto výpočty potom tvoří základ pro správný výpočet pojistného a také solventnostní pozice pojišťovny. Ve většině případů nejsou cash flow ze závazků obchodována na trzích. Proto současné učetní a solventnostní normy požadují, aby tato cash flow byla tržně-konzistentně oceněna s využitím vhodného modelu (marked-to-model přístup). K ocenění aktiv na druhou stranu většinou dochází pomocí marked-to-market přístupu, protože jejich tržní hodnoty jsou dostupné a věrohodné.

Podle toho, která cash flow budeme pro výpočet tržně konzistentní hodnoty brát v úvahu, rozlišujeme tři základní typy tržně konzistentního ocenění závazků, které jsou uvedeny v [3]:

1. **Current exit value.** Cílem této tržně konzistentní hodnoty je určit cenu závazku, kterou bychom získali převodem znalé třetí straně. Hodnota závisí na portfoliu, které se převádí, na složení portfolia kupujícího, kapitálové základně a nákladech na kapitál třetí strany přebírající závazek.

2. **Production cost.** Cílem je určit náklady pojišťovny na držení pojistných závazků ve svém portfoliu až do doby jejich dožití. Pokud se pohybujeme na rozvinutém a likvidním trhu, jsou „production cost“ a „current exit value“ stejné.

3. **Valuation in distress.** Tato hodnota slouží orgánům dohledu a risk managerům jako ukazatel v době finanční krize pojišťovny a zavisí na ní požadovaná solventnost. Předpokládá se, že neexistuje možnost vzniku nového obchodu a portfolio pojistných závazků buďto dožívá nebo je převedeno na třetí osobu.

Solvency II je příkladem přístupu, kde se závazky oceňují „current exit value“ a v *Článku 75* Směrnice 2009/138/EC je uvedeno:

„…závazky se oceňují částkou, za niž by se mohly převést nebo vypořádat mezi znalými partnery ochotnými uskutečnit transakci za obvyklých podmínek.“

Obecně se předpokládá, že cash flow z pojistných závazků bychom měli replikovat pomocí vhodných finančních instrumentů, které kryjí finanční rizika díky optimální alokaci aktiv. Zbylá rizika reprezentující rozdíl mezi očekávanými hodnotami závazků (nejlepším odhadem) a náhodnými proměnými vyžadují navíc rizikovou přirážku (risk margin), která kryje dožití těchto rizik v portfoliu (run-off). Součet nejlepších odhadů a rizikové přirážky potom odpovídá hodnotě technických rezerv pojišťovny. Toto je popsáno v *Článku 77* Směrnice 2009/138/EC následovně:

„Hodnota technických rezerv se rovná součtu nejlepšího odhadu a rizikové přirážky … Nejlepší odhad odpovídá pravděpodobnostmi váženému průměru budoucích peněžních toků s ohledem na časovou hodnotu peněz (očekávanou současnou hodnotu budoucích peněžních toků), přičemž se použije příslušná časová struktura bezrizikových úrokových měr. Výpočet nejlepšího odhadu se zakládá na aktuálních důvěryhodných informacích … Výše rizikové přirážky musí být taková, aby se zajistilo, že hodnota technických rezerv bude odpovídat očekávané částce, kterou potřebují pojišťovny a zajišťovny na vyrovnání pojistných a zajistných závazků.“

Jaké jsou přípustné finanční instrumenty pro replikaci očekávaných pojistných závazků? Cílem tržně konzistentního oceňení je spárovat očekávané peněžní toky z pojistných závazků s finančními instrumenty, které mají spolehlivou tržní hodnotu. Abychom mohli tvrdit, že finanční instrumenty, které použijeme k replikaci, mají spolehlivou tržní hodnotu, musí trh s aktivy, na kterém se vyskytují, splňovat následující kritéria:

- lze provést velké množství obchodů (operací) s aktivy, aniž by to významně ovlivnilo cenu finančních instrumentů použitých k replikaci (**rozvinutý trh**),
- aktiva lze snadno koupit a prodat, aniž bychom způsobili větší pohyb v ceně (**likvidní trh**),
- aktuální informace o obchodech a ceně jsou běžně přístupné účastníkům trhu, veřejnosti a zejména pojišťovnám (**transparentní trh**).

Pokud nejsou tyto podmínky splněny, neexistují spolehlivé tržní hodnoty pro finanční instrumenty.

Od obecných principů a definice tržní konzistence se nyní přesuneme k matematickým základům tržně konzistentního ocenění, a to stochastickému diskontování pomocí deflátorů.

2. Deflátory a stochastické diskontování

V této kapitole začneme se základními pojmy týkajícími se modelování úrokových měr jako jsou diskontování, spotové a forwardové sazby a výnosové křivky. Dále uvedeme teoretické základy tržně konzistentního oceňovaní a budeme se věnovat deflátorům, které použijeme jako stochastické diskontní faktory při ocenění náhodných cash flow. Pro zjednodušení budeme při odvozování teorie pracovat většinou s diskrétním časem. Konzistentní oceňovací rámec pro více období můžeme založit buď na deflátorech, nebo ekvivalentní martingalové míře a propojení těchto přístupů dosáhneme pomocí ceny za riziko.

2.1 Bezkuponové dluhopisy a časová struktura úrokových měr

Abychom mohli uvézt vztahy mezi odlišnými spotovými sazbami, budeme v této kapitole pracovat v prostředí se spojitým časem, ale dále v práci se příkloníme k odvozování v diskrétním čase. V první části krátce popíšeme koncept časové hodnoty peněz. Dále uvedeme základní definice jako bezrizikový bezkuponový dluhopis, spotové sazby a jejich vztahy a pojem výnosové křivky. V kapitole s numerickými příklady budeme výnosovou křivku tvořit na základě Vašíčkova modelu, který ovšem nemá dostatečně stupňů volnosti, aby lépe prokládal reálná data. Proto zde v třetí části krátce uvedeme způsoby odhadů výnosové křivky, které se v praxi používají častěji, i když v práci s nimi poté nebudeme pracovat.

2.1.1 Diskontování

Diskontování lze brát jako přiřazení časové hodnoty aktivům a závazkům. Obecně předpokládáme, že peníze rostou v čase. Pokud ukládáme peníze do banky, očekáváme, že dojde k jejich zhodnocení úrokovou sazbou, která je kladná. Kdyby banka nenabízela kladnou úrokovou sazbu, vyplatilo by se nám nechat si peníze uložené doma. V této práci se v podstatě budeme snažit modelovat růst budoucí hodnoty peněz, abychom mohli ocenit budoucí (náhodné) finanční toky. Pokud například uložíme na účet 100 Kč a banka garantuje pevnou (deterministickou) roční úrokovou sazbu $r = 2\%$, potom je konečná hodnota naší investice v čase 1 rok od současnosti rovna 102 Kč. Proto nazýváme 100 Kč diskontovanou hodnotou budoucích 102 Kč, a $(1 + r)^{-1} = 100/102 = 98,39\%$ nazýváme (deterministický) diskontní faktor. Diskontní faktory neznáme pro všechny budoucí okamžiky, protože jsou ovlivněny budoucími ekonomickými faktory, které jsou z pohledu našich současných znalostí náhodnými veličinami. Proto budeme budoucí úrokové sazby a diskontní faktory modelovat stochasticky. Dostáváme se tak ke stochastickému diskontování pomocí deflátorů, na něž lze nahlížet jako na ekonomické ukazatele časové hodnoty peněz ve stochastických modelech.

2.1.2 Spotové sazby a časová struktura úrokových sazeb

V této části definujeme základní pojmy ke spotovým sazbám a bezkuponovým dluhopisům, na které se následně v práci budeme odkazovat.

Definice 2.1.1. ***Bezrizikový bezkuponový dluhopis*** *se splatností $m \geq 0$ (ZCB z anglického „zero coupon bond") je kontrakt, který vyplácí jednu jednotku měny v čase m. Jeho cenu v čase $t \in [0, m]$ značíme $P(t, m)$.*

Stanovme rovnost $P(m, m) = 1$ a protože předpokládáme, že peníze rostou v čase, platí $P(t, m) < 1$ pro $t < m$. ZCB je tzv. bezrizikový finanční instrument, což znamená, že jeho emitent nemůže zkrachovat a vždy dostojí svému smluvnímu závazku. Ve skutečnosti neexistují na finančním trhu žádné bezrizikové dluhopisy a i u státních dluhopisů může dojít k nedodržení závazku ze strany emitenta. V takovém případě mluvíme o kreditním riziku, které je potřeba ohodnotit.

Definice 2.1.2. *Nechť $0 \leq t < m$.* ***Spojitě úročená spotová sazba*** *v čase t se splatností m $R(t, m)$ je definována jako*

$$R(t, m) = -\frac{1}{m - t} \log P(t, m).$$

Jednoduše úročená spotová sazba *v čase t se splatností m $L(t, m)$ je definována jako*

$$L(t, m) = \frac{1}{m - t} \frac{1 - P(t, m)}{P(t, m)} = \frac{1}{m - t}(P(t, m)^{-1} - 1).$$

Ročně úročená spotová sazba *v čase t se splatností m $Y(t, m)$ je definována jako*

$$Y(t, m) = P(t, m)^{-\frac{1}{m-t}} - 1.$$

Těmito výrazy můžeme popsat ZCB hodnoty $P(t, m)$ v čase $t \in [0, m)$. Platí rovnosti

$$P(t, m) = e^{-(m-t)R(t,m)} = (1 + (m - t)L(t, m))^{-1} = (1 + Y(t, m))^{-(m-t)}.$$

Z čehož vyplývají rovnosti mezi jednotlivými spotovými sazbami

$$R(t, m) = \frac{1}{m - t} \log(1 + (m - t)L(t, m)) = \log(1 + Y(t, m)).$$

Naším cílem je tyto spotové sazby modelovat v čase. Abychom toho byli schopni, musíme nejprve kalibrovat spotové sazby na aktuální data z finančních trhů a poté popsat jejich náhodný (stochastický) vývoj v budoucnosti.

Definice 2.1.3. ***Okamžitá spotová úroková míra*** *je pro $t \geq 0$ definována jako*

$$r(t) = \lim_{m \downarrow t} R(t, m).$$

Definice 2.1.4. *Časová struktura úrokových měr (**výnosová křivka**) v čase $t \geq 0$ je dána grafem funkce*

$$m \mapsto R(t, m), \quad m > t.$$

Výnosová křivka $m \mapsto R(t, m)$ v čase t určuje ZCB hodnoty $P(t, m)$ pro všechny doby do splatnosti $m > t$. V jakémkoli čase $u < t$ jsou budoucí ZCB hodnoty $P(t, m)$ náhodné a musíme je tedy modelovat stochasticky.

Definice 2.1.5. ***Forwardová úroková sazba*** *v čase t, pro $s \geq t$, je definována*

$$F(t, s+1) = -\log P(t, s+1) + \log P(t, s) = -\log \frac{P(t, s+1)}{P(t, s)}.$$

Okamžitá forwardová úroková míra *v čase t, se splatností $s > t$, je definována*

$$f(t, s) = -\frac{\partial \log P(t, s)}{\partial s}.$$

Pro spojitý čas získáme z okamžité forwardové úrokové míry $f(t, \cdot)$ integrováním pro $m > t$,

$$P(t, m) = exp\{-\int_t^m f(t, s)ds\}.$$

Poznamenejme, že $f(t, s)$, $s > t$ je pozorovatelné v čase t, což tedy platí i pro $P(t, m)$. Analogicky, pro diskrétní čas, získáme z forwardové úrokové sazby $F(t, \cdot)$, součtem pro $m = t + k$, $k \in \mathbb{N}$

$$P(t, m) = exp\{-\sum_{s=t+1}^{m} F(t, s)\}.$$

Okamžitá forwardová úroková míra $f(t, \cdot)$ se používá při modelování úrokových měr ve spojitém čase a forwardová úroková míra $F(t, \cdot)$ při modelování úrokových měr v diskrétním čase. Pro $s \geq t$ platí

$$F(t, s+1) = \int_s^{s+1} f(t, u)du.$$

2.1.3 Odhady výnosové křivky

Celou výnosou křivku nelze na finančních trzích pozorovat, a proto je nutné ji odhadovat. Oblíbenými metodami modelování výnosové křivky, které se v praxi k odhadu používají, jsou Nelson-Siegel[1] a Svensson, ale celkově existuje velké množství různých přístupů. Tyto metody jsou založeny na exponenciálně polynomické rodině funkcí a mají pouze několik parametrů, které je nutné odhadnout z pozorovatelných finančních instrumentů. Svenssonova metoda je rozšířením Nelson-Siegelovy metody. Definujme vektor parametrů

$$\boldsymbol{\beta} = (\beta^{(0)}, \beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \beta^{(3)}, \gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}).$$

[1]Například metodu Nelson-Siegel uvádí ve svém Odborném doporučení č.1 jako vhodnou pro odhad výnosové křivky Česká Společnost Aktuárů. Doporučení je k náhlédnutí z URL: http://www.actuaria.cz/doporuceni1.asp

Dále definujeme Svenssonovu okamžitou forwardovou úrokovou sazbu, pro $s \geq 0$, jako

$$f_S(0, s, \boldsymbol{\beta}) = \beta^{(0)} + \beta^{(1)} e^{-\gamma^{(1)} s} + \beta^{(2)} \gamma^{(1)} s e^{-\gamma^{(1)} s} + \beta^{(3)} \gamma^{(2)} s e^{-\gamma^{(2)} s}.$$

Pokud stanovíme $\beta^{(3)} = 0$ získáme Nelson-Siegelův vzorec

$$\begin{aligned} f_{NS}(0, s, (\beta^{(0)}, \beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \gamma^{(1)})) &= f_S(0, s, (\beta^{(0)}, \beta^{(1)}, \beta^{(2)}, 0, \gamma^{(1)}, 1)) \\ &= \beta^{(0)} + \beta^{(1)} e^{-\gamma^{(1)} s} + \beta^{(2)} \gamma^{(1)} s e^{-\gamma^{(1)} s}. \end{aligned}$$

Integrací po částech získáme Svenssonovu výnosovou křivku $m \mapsto R_S(0, m, \boldsymbol{\beta})$ v čase 0

$$\begin{aligned} R_S(0, m, \boldsymbol{\beta}) &= \frac{1}{m} \int_0^m f_S(0, s, \boldsymbol{\beta}) ds \\ &= \beta^{(0)} + (\beta^{(1)} + \beta^{(2)}) \frac{1 - e^{-\gamma^{(1)} m}}{\gamma^{(1)} m} - \beta^{(2)} e^{-\gamma^{(1)} m} \\ &+ \beta^{(3)} \frac{1 - e^{-\gamma^{(2)} m}}{\gamma^{(2)} m} - \beta^{(3)} e^{-\gamma^{(2)} m}. \end{aligned}$$

Svenssonova výnosová křivka $R_S(0, m, \boldsymbol{\beta})$ umožňuje při vhodné volbě parametrů $\boldsymbol{\beta}$ flexibilní tvary křivek. Pro $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)} > 0$ má křivka následující vlastnosti:

$$\lim_{m \to \infty} R_S(0, m, \boldsymbol{\beta}) = \beta^{(0)} \text{ a } \lim_{m \to 0} R_S(0, m, \boldsymbol{\beta}) = \beta^{(0)} + \beta^{(1)},$$

kde druhá limita vyplývá z l'Hôpitalova pravidla. Parametr $\beta^{(0)}$ je dlouhodobá sazba a $\beta^{(0)} + \beta^{(1)}$ je okamžitá spotová sazba $r(0)$ v čase 0. Parametr (krátkodobý) $\beta^{(1)}$ souvisí se sklonem křivky. Parametry (středbědobé) $\beta^{(2)}$ a $\beta^{(3)}$ se vztahují k zakřivení výnosové křivky s přirážkami určenými $\gamma^{(1)}$ a $\gamma^{(2)}$. K odhadům vektoru $\boldsymbol{\beta}$ se používá metody nejmenších čtverců pro kuponové dluhopisy s vysokým ratingem, např. spolehlivé státní dluhopisy. Statní a korporátní dluhopisy jsou kuponové dluhopisy, které vydávají vlády států nebo obchodní společnosti. Tyto dluhopisy mají typicky pevnou dobu do splatnosti m, pevnou nominální hodnotu v a obvykle vyplácejí roční kupon $c > 0$. Předpokládejme, že máme dva různé kuponové dluhopisy se stejnou dobou do splatnosti m, nominálními hodnotami v a kupony c. Jejich ceny v čase $t = 0$ označíme $\pi^{(1)}(0, m, c)$ a $\pi^{(2)}(0, m, c)$. Většinou pozorujeme, že $\pi^{(1)}(0, m, c) \neq \pi^{(2)}(0, m, c)$. Jedním z důvodů této nerovnosti může být fakt, že emitenti dluhopisů mají různé pravděpodobnosti defaultu. V případě defaultu může držitel dluhopisu ztratit jak kupon c, tak nominální hodnotu v. Pokud má tedy emitent (1) vyšší pravděpodobnost defaultu než emitent (2) a všechny ostatní charakteristiky stejné, očekáváme nerovnost $\pi^{(1)}(0, m, c) < \pi^{(2)}(0, m, c)$.

Chceme kalibrovat bezrizikové ZCB (a odpovídající výnosovou křivku), takže musíme vybrat kuponové dluhopisy, které mají vysoký rating. Jinými slovy hledáme dluhopisy, které mají zanedbatelnou pravděpodobnost defaultu. Další podmínkou je, že se dluhopisy obchodují na rozvinutých a likvidních trzích, což znamená, že mají transparentní a spolehlivé tržní ceny. Obvykle tato specifika splňují státní dluhopisy a proto se využívají ke kalibraci výnosové křivky. Avšak v poslední době se ukazuje, že i některé státní dluhopisy výše uvedené nesplňují (např. řecké, irské, španělské a portugalské dluhopisy v odbodí krize 2010-2012).

Nyní odvodíme odhad $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_S$ vektoru $\boldsymbol{\beta}$. Čas budeme počítat v jednotkách roků. Svenssonova hodnota pro bezrizikový kuponový dluhopis v čase $t = 0$ s dobou do splatnosti $m \in \mathbb{N}$, nominální hodnotou $v = 1$ a ročním kuponem $c > 0$ je dána jako

$$\pi_S(0, m, c, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{t=1}^{m} c \exp\{-tR_S(0, t, \boldsymbol{\beta})\} + \exp\{-mR_S(0, m, \boldsymbol{\beta})\}.$$

Z této Svenssonovy hodnoty určíme výnos do splatnosti $y_S(m, c, \boldsymbol{\beta})$, který je dán jednoznačným řešením rovnosti

$$\pi_S(0, m, c, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{t=1}^{m} \frac{c}{(1 + y_S)^t} + \frac{1}{(1 + y_S)^m},$$

za podmínky $y_S > -1$.Ve vektoru $\boldsymbol{\beta}$ máme celkem šest parametrů, takže vybereme $N > 6$ kuponových dluhopisů s vysokým ratingem a dobami do splatnosti m_i, nominální hodnotou 1, kupony c_i a pozorovanými tržními výnosy do splatnosti $y_M^{(i)}$ pro $i = 1, \ldots, N$. Odhad $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_S$ vektoru $\boldsymbol{\beta}$ metodou nejmenší čtverců založený na těchto pozorováních je dán řešením rovnosti

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_S = \arg\min_{\boldsymbol{\beta}} \sum_{i=1}^{N} (y_M^{(i)} - y_S(m_i, c_i, \boldsymbol{\beta}))^2.$$

Získáme tak odhadnutou Svenssonovu výnosovou křivku $m \mapsto R_S(0, m, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_S)$ pro odhad metodou nejmenších čtverců $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_S$ vektoru $\boldsymbol{\beta}$. [2]

Pokud provedeme stejný postup odhadu pro $\beta^{(3)} = 0$, získáme odhad Nelson-Siegelova parametru $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{NS}$ a odpovídající odhad Nelson-Siegelovy výnosové křivky $m \mapsto R_{NS}(0, m, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{NS})$. Popsali jsme jak lze odhadnout parametry pro Nelson-Siegelovu a Svenssonovu výnosovou křivku, ale mohli bychom samozřejmě zvolit jakoukoli jinou parametrickou křivku jako kubické spliny nebo exponenciálně polynomickou rodinu funkcí k fitování pozorovaných dat.

V aktuárské praxi je důležité mít také spolehlivé odhady pro dlouhý konec výnosové křivky (vysoké doby do splatnosti). Například u životních produktů modelujeme cash flow až na 50 let dopředu. V praxi takováto tržní data k dispozici nemáme, a proto je nutné použít metody extrapolace výnosové křivky na jejím dlouhém konci. V současnosti neexistuje obecně přijímaná metoda jak k tomuto přistupovat. Například v Solvency II se používá k interpolaci i extrapolaci Smith-Wilsonova metoda a forwardové sazby konvergují k UFR (Ultimate Forward Rate). Více k modelování bezrizikové křivky v Solvency II lze najít v [13].

Uvedli jsme základními pojmy týkajícími se modelování úrokových měr a v další kapitole se již podíváme na teoretické základy tržně konzistentního

[2]Mohli bychom také minimalizovat jinou l^2-vzdálenost nebo jinou ztrátovou funkci. Výpočet lze modifikovat použitím vah pro různé doby do splatnosti m_i. Dalším přístupem by bylo minimalizování l^2-vzdálenosti mezi jinými klíčovými hodnotami jako Svenssonovou hodnotou $\pi_S(0, m_i, c_i, \boldsymbol{\beta})$ a odpovídajícími pozorovanými tržními cenami $\pi_M^{(i)}$.

oceňovaní. Budeme se věnovat deflátorům, které použijeme jako diskontní faktory při ocenění náhodných cash flow ve stochastickém modelu s diskrétním časem.

2.2 Základní stochastický model s diskrétním časem

V předchozí kapitole jsme nakalibrovali výnosovou křivku $m \mapsto R(t, m)$ v pevně zvoleném čase t. Abychom mohli předpovídat budoucí hodnoty aktiv a závazků, potřebujeme vědět jak se výnosová křivka bude vyvíjet v čase. Existuje několik přístupů k modelování (stochastického) vývoje výnosové křivky:

- ekonomické přístupy, kdy modelujeme podkladové makroekonomické faktory (jako ekonomický růst, peněžní zásobu, měnovou politiku centrální banky, míru inflace, míru nezaměstnanosti, ad.) a vývoj výnosové křivky je potom spojen s těmito faktory,
- čistě statistické přístupy, které studují časové řady výnosových křivek,
- finančně matematické přístupy založené na konzistentních a bezarbitrážních oceňovacích modelech.

V práci zaměříme na poslední z přístupů a budeme modelovat chování výnosové křivky v diskrétním čase. Nejprve uvedeme teorii vztahující se k obecnému ocenění cash flow.

2.2.1 Ocenění cash flow v čase 0

Volme $n \in \mathbb{N}$, což je konečný časový horizont. Potom budeme bez újmy na obecnosti (BÚNO) předpokládat cash flow $\boldsymbol{X} = (X_0, \ldots, X_n)$ v diskrétních časech $t \in \mathfrak{T} = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Naším cílem je ocenit tato cash flow v libovolném čase $t \in \mathfrak{T}$. X_k můžeme interpretovat jako platbu provedenou v čase $k \in \mathfrak{T}$. Zavedeme ještě označení $\mathfrak{T}_- = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Vezměme pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a rostoucí posloupnost σ-algeber $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathfrak{T}}$ takovou, že

$$\{\emptyset, \Omega\} = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_n$$

a pro jednoduchost předpokládáme $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}$. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ se nazývá filtrovaný pravděpodobnostní prostor s filtrací $\mathbb{F}$. σ-algebra $\mathcal{F}_t$ vyjadřuje informaci dostupnou v čase t, což znamená například demografické údaje, pojistně-technické informace o pojistných smlouvách, finanční a ekonomické informace a jakékoli další (počasí, změna legislativy, politická situace, atd.).

Dále předpokládáme, že máme posloupnost $\mathbb{F}$-adaptovaných náhodných proměnných

$$\boldsymbol{X} = (X_0, X_1, \ldots, X_n)$$

na filtrovaném pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$, takže X_t jsou $\mathcal{F}_t$-měřitelné náhodné veličiny pro všechna $t \in \mathfrak{T}$. $\boldsymbol{X}$ je náhodné cash flow s jednotlivými platbami X_t v čase t. Pokud máme informaci $\mathcal{F}_t$, potom X_k jsou známé pro všechna $k \le t$, a ostatní mohou být náhodné. V podstatě nás zajímají dvě věci, a to předpověď budoucích plateb X_s, $s > t$, založená na dostupné informaci $\mathcal{F}_t$, a určení časové hodnoty cash flow $\boldsymbol{X}$ ve všech okamžicích $t \in \mathfrak{T}$.

Pravděpodobnostní míra $\mathbb{P}$ je reálná pravděpodobnostní míra (real world probability measure, objective probability measure nebo také physical probability measure). Jedná se o míru, pomocí které pozorujeme dané cash flow a náhodné procesy cen. Očekávanou hodnotu vzhledem k reálné pravděpodobnostní míře $\mathbb{P}$ budeme značit $\mathbb{E}$.

Nejprve uvedeme obecnější oceňovací rámec použitý v M. Wüthrich [2], který ovšem klade na cash flow $\boldsymbol{X}$ přísnější požadavky, a to kvadratickou integrovatelnost. Tento předpoklad je často pro oceňování pojistných cash flow příliš omezující a spokojíme se tedy s odvozením našeho oceňovacího rámce pouze za předpokladu integrovatelnosti.

Začněmě s několika technickými předpoklady:

Předpoklad 2.2.1. *Předpokládáme, že všechny prvky $\boldsymbol{X}$ jsou kvadraticky integrovatelné.*

Pro kvadraticky integrovatelné cash flow $\boldsymbol{X} = (X_0, X_1, \ldots, X_n)$ píšeme

$$\boldsymbol{X} = (X_0, X_1, \ldots, X_n) \in \mathrm{L}^2_{n+1}(\mathbb{P}),$$

kde $\mathrm{L}^2_{n+1}(\mathbb{P})$ je Hilbertův prostor (úplný prostor se skalárním součinem) a platí v něm

$$\mathbb{E}[\sum_{t=0}^{n} X_t^2] < \infty \qquad \text{pro všechna, } \boldsymbol{X} \in L^2_{n+1}(\mathbb{P}), \tag{2.1}$$

$$\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle = \mathbb{E}[\sum_{t=0}^{n} X_t Y_t] \qquad \text{pro všechna, } \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in L^2_{n+1}(\mathbb{P}), \tag{2.2}$$

$$\|\boldsymbol{X}\| = \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X} \rangle^{1/2} < \infty \qquad \text{pro všechna, } \boldsymbol{X} \in L^2_{n+1}(\mathbb{P}). \tag{2.3}$$

Pokud je cash flow $\boldsymbol{X} = (X_0, X_1, \ldots, X_n)$ $\mathbb{F}$-adaptované a kvadraticky integrovatelné, píšeme

$$\boldsymbol{X} = (X_0, X_1, \ldots, X_n) \in \mathrm{L}^2_{n+1}(\mathbb{P}, \mathbb{F}).$$

Pro stanovení hodnoty stochastického cash flow $\boldsymbol{X}$ použijeme pozitivní, spojitý a lineární funkcionál.

Definice 2.2.2. $(n+1)$*-rozměrný náhodný vektor* $\boldsymbol{X} = (X_0, \ldots, X_n)$ *se nazývá*

- ***nezáporný*** $\boldsymbol{X} \ge 0 \iff X_t \ge 0$, *$\mathbb{P}$-s.j., pro všechna* $t \in \mathfrak{T}$.
- ***pozitivní*** $\boldsymbol{X} > 0 \iff \boldsymbol{X} \ge 0$, *a existuje* $k \in \mathfrak{T}$ *takové, že* $X_k > 0$ *s kladnou pravděpodobností.*
- ***striktně pozitivní*** $\boldsymbol{X} \gg 0 \iff X_t > 0$, *$\mathbb{P}$-s.j., pro všechna* $t \in \mathfrak{T}$.

Předpokládáme, že $Q : L^2_{n+1}(\mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ je pozitivní, spojitý a lineární funkcionál na $L^2_{n+1}(\mathbb{P})$ a splňuje tedy:

1. Pozitivita: Z $\boldsymbol{X} > 0$ vyplývá $Q[\boldsymbol{X}] > 0$.
2. Spojitost: Pro jakoukoli posloupnost $\boldsymbol{X}^{(k)} \in L^2_{n+1}(\mathbb{P})$, pro kterou platí $\boldsymbol{X}^{(k)} \to \boldsymbol{X}$ v prostoru $L^2_{n+1}(\mathbb{P})$ pro $k \to \infty$, máme $Q[\boldsymbol{X}^{(k)}] \to Q[\boldsymbol{X}]$ na $\mathbb{R}$ pro $k \to \infty$.
3. Linearita: Pro všechna $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in L^2_{n+1}(\mathbb{P})$ a $a, b \in \mathbb{R}$ máme $Q[a\boldsymbol{X} + b\boldsymbol{Y}] = aQ[\boldsymbol{X}] + bQ[\boldsymbol{Y}]$.

Q přiřazuje jakémukoli $\boldsymbol{X} \in L^2_{n+1}(\mathbb{P})$ hodnotu, na kterou lze nahlížet jako na cenu cash flow $\boldsymbol{X}$ v čase 0. Z prvního a třetího předpokladu vyplývá, že můžeme zavést systém oceňování cash flow, který bude zabraňovat vzniku arbitráže.

Věta 2.2.3. *(Rieszova věta o reprezentaci) Pro každý spojitý lineární funkcionál $Q : L^2_{n+1}(\mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ na Hilbertově prostoru $L^2_{n+1}(\mathbb{P})$ existuje jediný vektor $\boldsymbol{\varphi} \in L^2_{n+1}(\mathbb{P})$ takový, že:*

$$Q[\boldsymbol{X}] = \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{\varphi} \rangle = \mathbb{E}[\sum_{t=0}^{n} X_t \varphi_t].$$

Na Hilbertově prostoru s kvadraticky integrovatelnými cash flow je tedy jednoznačná korespondence mezi oceňovacími funkcionály Q a náhodnými vektory $\boldsymbol{\varphi}$.

Nyní přejdeme k našemu zjednodušenému předpokladu:

Předpoklad 2.2.4. *Předpokládáme, že všechna cash flow $\boldsymbol{X} = (X_0, \ldots, X_n)$ jsou $\mathbb{F}$-adaptované náhodné vektory na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ se všemi prvky X_k integrovatelnými. Značíme $\boldsymbol{X} \in L^1_{n+1}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$.*

Značení $\boldsymbol{X} = (X_0, \ldots, X_n) \in L^1_{n+1}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ znamená, že X_k je $\mathcal{F}_k$-měřitelné pro všechna $k \in \mathfrak{T}$, tedy X_k je pozorovatelné vzhledem k informaci $\mathcal{F}_k$ dostupné v čase k, a očekávaná hodnota pro X_k podle $\mathbb{P}$ existuje pro všechna $k \in \mathfrak{T}$.

Definice 2.2.5. *Předpokládejme, že $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_0, \ldots, \varphi_n) \in L^1_{n+1}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ je striktně pozitivní náhodný vektor s normalizací $\varphi_0 \equiv 1$. Potom $\boldsymbol{\varphi}$ (a jeho prvky φ_k) se nazývá **deflátor**.*

V ekonomii se deflátory nazývají state price densities a ve finanční matematice stochastic interest rates.

Zvolme fixní deflátor $\boldsymbol{\varphi} \in L^1_{n+1}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$. Množina $\mathbb{F}$-adaptovaných cash flow $\mathcal{L}_\varphi$, které lze ocenit vzhledem k deflátoru $\boldsymbol{\varphi}$ je dána jako

$$\mathcal{L}_\varphi = \left\{ \boldsymbol{X} \in L^1_{n+1}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F}); \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{n} \varphi_k |X_k| \middle| \mathcal{F}_0 \right] < \infty \right\}.$$

Tato množina charakterizuje všechna rizika (cash flow), která lze pojistit vzhledem k volbě $\boldsymbol{\varphi}$. Definujeme tedy hodnotu cash flow $\boldsymbol{X} \in \mathcal{L}_\varphi$ v čase 0 vzhledem k deflátoru $\boldsymbol{\varphi}$

$$Q_0[\boldsymbol{X}] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{n} \varphi_k X_k \middle| \mathcal{F}_0 \right]. \tag{2.4}$$

Podívejme se na některé **vlastnosti deflátorů**:

1. Z pozitivity Q vyplývá $\boldsymbol{\varphi} \gg 0$.
2. Předpokládejme, že cash flow $\boldsymbol{X} \in L^1_{n+1}(\mathbb{P}, \mathbb{F})$ je $\mathbb{F}$-adaptované. Potom i deflátor φ lze volit $\mathbb{F}$-adaptovaný, a to nahrazením φ_t za $\widetilde{\varphi}_t = \mathbb{E}[\varphi_t | \mathcal{F}_t]$.
3. Existuje právě jeden $\mathbb{F}$-adaptovaný deflátor $\boldsymbol{\varphi}$ na $L^1_{n+1}(\mathbb{P}, \mathbb{F})$ pro daný funkcionál Q. Navíc předpokládáme, že je takový, že $\varphi_0 \equiv 1$. To znamená, že pro deterministickou platbu x_0 v čase 0 dává funkcionál Q čistě její nominální hodnotu.

Úkolem modelování je nalézt vhodný funkcionál Q nebo ekvivalentně najít vhodný $\mathbb{F}$-adaptovaný deflátor $\boldsymbol{\varphi}$. $\mathbb{F}$-adaptovanost v podstatě znamená, že deflátor φ_t (stochastický diskontní faktor) je znám v čase t a umožňuje tak propojit $\mathcal{F}_t$-meřitelné cash flow X_t s φ_t coby chováním finančního trhu v čase t. φ_t tak umožnuje modelovat vložené opce a garance pro X_t, které závisejí na ekonomických a finančních scénářích.

Nyní jsme definovali deflátory a ocenění cash flow v čase $t = 0$. Než se podíváme v další části na ocenění cash flow v čase $t > 0$, uvedeme ještě něco málo k významu deflátorů.

Význam deflátorů

Předpokládejme, že máme daný fixní deflátor $\boldsymbol{\varphi} \in L^1_{n+1}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$. Deflátor φ_t převádí hodnotu v čase t na odpovídající hodnotu v čase 0. Tento převod je náhodný (stochastický) a jedná se tedy o stochastické diskontování. Uvažujme cash flow $\boldsymbol{X}_t = (0, \ldots, 0, X_t, 0, \ldots, 0) \in \mathcal{L}_\varphi$. Jeho hodnota v čase 0 je dána

$$Q_0[\boldsymbol{X}_t] = \mathbb{E}[\varphi_t X_t \mid \mathcal{F}_0]$$

Obecně cash flow $\boldsymbol{X} \in \mathcal{L}_\varphi$ nemusí být nutně nezávislé (nebo nekorelované) na $\boldsymbol{\varphi}$, a platí

$$Q_0[\boldsymbol{X}] = \mathbb{E}[\sum_{t=0}^{n} \varphi_t X_t \mid \mathcal{F}_0] \neq \sum_{t=0}^{n} \mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_0]\mathbb{E}[\varphi_t \mid \mathcal{F}_0]. \tag{2.5}$$

Proto musíme oceňovat $Q_0[\boldsymbol{X}]$ obezřetně. Předpokládejme, že deflátor $\boldsymbol{\varphi}$ popisuje náhodné rizikové faktory finančního trhu a $\boldsymbol{X}$ je cash flow z pojištění, které popisuje výplaty pojištěnému. Potom oceňovací funkcionál Q_0 umožňuje modelovat finanční opce a garance v pojistných cash flow $\boldsymbol{X}$. Finanční opce a garance závisí na stejných rizikových faktorech jako deflátor, takže máme obvykle korelovanost mezi $\boldsymbol{X}$ a $\boldsymbol{\varphi}$, z čehož vyplývá výše uvedená nerovnost. Pokud je deflátor $\boldsymbol{\varphi}$ nekorelovaný s pojistným cash flow $\boldsymbol{X}$, lze provézt ocenění odděleně, jak to vidíme na pravé straně nerovnosti (2.5). Dostáváme se potom k replikačním portfoliům pro očekávané závazky, reprezentované pomocí ZCB hodnot daných jako $P(0, t) = \mathbb{E}[\varphi_t \mid \mathcal{F}_0]$, ke kterým se vrátíme později v této práci.

Standardně budeme předpokládat, že prvky φ_k deflátoru $\boldsymbol{\varphi}$ jsou integrovatelné. Obvykle začínáme s $(n+1)$-rozměrným $\mathbb{F}$-adaptovaným náhodným vektorem $\boldsymbol{\varphi}$ a podmínku integrovatelnosti dokážeme ověřením zda získáme konečné ZCB hodnoty $P(0,t)$.

Deflátor $\boldsymbol{\varphi}$ můžeme rozložit na tzv. **span-deflátory** (deflátory pro jednotlivé intervaly). Jelikož $\boldsymbol{\varphi} \gg 0$, můžeme definovat následující poměry pro všechna $t > 0$, $\mathbb{P}$-s.j.:

$$Y_t = \frac{\varphi_t}{\varphi_{t-1}}, \tag{2.6}$$

kde definujeme $Y_0 = 1$. Takže $\boldsymbol{Y} = (Y_t)_{t \in \mathfrak{T}}$ je $\mathbb{F}$-adaptovaný a splňuje

$$\varphi_t = Y_0 Y_1 \cdots Y_t = \prod_{k=0}^{t} Y_k.$$

$\boldsymbol{Y} = (Y_t)_{t \in \mathfrak{T}}$ se nazývá span-deflátor a pro $t \geq 1$ převádí částku v čase t na její hodnotu v čase $t-1$.

Mohli bychom si položit otázku jak souvisí deflátory s klasickým finančním diskontováním a bezkupónovými dluhopisy. Pokud označíme $\boldsymbol{Z}^{(t)} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ cash flow bezkuponového dluhopisu vyplácejícího v čase t částku 1, pak hodnota v čase 0 tohoto dluhopisu bude dána

$$D_{0,t} = Q[\boldsymbol{Z}^{(t)}] = \mathbb{E}[\varphi_t]. \tag{2.7}$$

V literatuře se $D_{0,t}$ často značí $P(0,t)$, což je hodnota v čase 0 nedefaultujícího kontraktu vyplácejícího 1 v čase t. Z tohoto vyplývá, že i $D_{0,t}$ převádí hodnotu v čase t na příslušnou hodnotu v čase 0. Rozdíl je v tom, že $D_{0,t}$ je $\mathcal{F}_0$-meřitelné zatímco φ_t je $\mathcal{F}_t$-meřitelná náhodná veličina. Takže deterministický diskontní faktor $D_{0,t}$ je znám na počátku časového intervalu $(0,t]$ zatímco φ_t je znám až na konci tohoto intervalu. Pokud pracujeme s deterministickými cash flow $\boldsymbol{X}$, můžeme buďto používat ceny bezkuponových dluhopisů $D_{0,t}$ nebo deflátory φ_t, abychom určili hodnotu $\boldsymbol{X}$ v čase 0. Jakmile jsou ovšem cash flow $\boldsymbol{X}$ stochastická, musíme pracovat s deflátory, protože X_t a φ_t mohou být ovlivněné stejnými faktory (být závislé). Poměrně často výplata v pojištění souvisí s vývojem ekonomických či finančních ukazatelů na trhu (které ovšem ovlivňují také φ_t).

Klasické aktuárské diskontování pracuje s konstantní úrokovou mírou i. V klasických aktuárských modelech má potom φ_t následující tvar

$$\varphi_t = (1+i)^{-t}.$$

Použití takového deflátoru vede ke konzistentní teorii, ale není příliš v souladu s pozorovanou ekonomickou praxí. Musíme být obezřetní, pokud takovýto model používame v přístupu k celé finanční rozvaze pojišťovny. Na straně závazků získáváme hodnoty, které mohou být daleko od reálných hodnot konzistentních s tržními hodnotami na straně aktiv.

2.2.2 Ocenění cash flow v čase $t > 0$

Zatím jsme definovali pouze ocenění v čase $t = 0$. Nyní rozšíříme oceňování na libovolný okamžik $t \in \mathfrak{T}$, což nás vede k náhodnému procesu $(Q_t[\boldsymbol{X}])_{t \in \mathfrak{T}}$ pro cash flow $\boldsymbol{X} \in \mathcal{L}_{\boldsymbol{\varphi}}$.

Definice 2.2.6. *Předpokládejme, že je dán fixní deflátor $\boldsymbol{\varphi} \in L^1_{n+1}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$. Definujeme **náhodný proces ocenění** $(Q_t[\boldsymbol{X}])_t$ pro cash flow $\boldsymbol{X} \in \mathcal{L}_{\boldsymbol{\varphi}}$ jako:*

$$Q_t[\boldsymbol{X}] = \frac{1}{\varphi_t}\mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{n} \varphi_k X_k \middle| \mathcal{F}_t\right]. \tag{2.8}$$

$Q_t[\boldsymbol{X}]$ značí hodnotu/cenu cash flow $\boldsymbol{X}$ v čase t. Ze striktní pozitivity $\boldsymbol{\varphi}$, předpokládané v Definici 2.2.5, a $\mathcal{F}_t$-měřitelnosti vyplývá, že proces $Q_t[\boldsymbol{X}]$ je dobře definován. Tento proces $(Q_t[\boldsymbol{X}])_{t\in\mathfrak{T}}$ závisí na dané volbě deflátoru $\boldsymbol{\varphi}$.

Pravou část vzorce (2.8) lze rozdělit na dvě složky, protože platby X_k (a deflátory φ_k) jsou $\mathcal{F}_t$-měřitelné pro $k \leq t$. Poznamenejme, že díky předchozím předpokladům máme $Q[\boldsymbol{X}] = Q_0[\boldsymbol{X}]$.

K obhájení naší definice procesu $(Q_t[\boldsymbol{X}])_{t=0,\ldots,n}$ použijeme „princip jedné ceny“ (též equilibrium principle) a argument neexistence arbitráže zmíněný v první kapitole. $\boldsymbol{Z}^{(t)}$ značí cash flow ze ZCB vyplácejícího 1 v čase t. Předpokládejme, že zaplatíme za cash flow $\boldsymbol{X}$ v čase t cenu $Q_t[\boldsymbol{X}]$. Máme tedy cash flow plateb

$$Q_t[\boldsymbol{X}]\boldsymbol{Z}^{(t)} = (0, \ldots, 0, Q_t[\boldsymbol{X}], 0, \ldots, 0),$$

pokud zaplatíme za $\boldsymbol{X}$ v čase t. Z dnešního pohledu má tento tok plateb hodnotu

$$Q_0[Q_t[\boldsymbol{X}]\boldsymbol{Z}^{(t)}],$$

protože máme pouze informaci $\mathcal{F}_0$ v čase 0 o ceně $Q_t[\boldsymbol{X}]$ cash flow $\boldsymbol{X}$ v čase t. Princip jedné ceny vyžaduje, aby platilo

$$Q_0[\boldsymbol{X}] = Q_0[Q_t[\boldsymbol{X}]\boldsymbol{Z}^{(t)}],$$

protože (na základě aktuální informace $\mathcal{F}_0$) by tyto dva toky plateb měly mít stejnou cenu. Což znamená, že dnes souhlasíme buď se zakoupením a zaplacením $\boldsymbol{X}$ dnes nebo se zakoupením a zaplacením $\boldsymbol{X}$ v čase t (za jeho aktuální hodnotu $Q_t[\boldsymbol{X}]$ v tom čase). Pracujeme se stejnou informací $\mathcal{F}_0$ pro oba kontrakty a získáme stejné cash flow $\boldsymbol{X}$, takže by oba kontrakty měly mít stejnou cenu.

Předpokládejme nyní, že bychom chtěli hrát následující hru. Rozhodneme se koupit a zaplatit cash flow $\boldsymbol{X}$ pouze pokud nastane událost $F_t \in \mathcal{F}_t$. Z dnešního pohledu netušíme, zda událost F_t nastane, měla by tedy platit následující rovnost

$$Q_0[\boldsymbol{X}1_{F_t}] = Q_0[Q_t[\boldsymbol{X}]\boldsymbol{Z}^{(t)}1_{F_t}],$$

kde 1_{F_t} značí indikátor toho, zda nastala událost F_t. 1_{F_t} je rovno 1 v případě, že událost F_t nastala, a 0 v případě, že nenastala. Poznamenejme, že $\boldsymbol{X}1_{F_t}$ není $\mathbb{F}$-adaptovaný. Vzorec lze za použití deflátorů přepsat na

$$\mathbb{E}[\sum_{k=0}^{n} \varphi_k X_k 1_{F_t}] = \mathbb{E}[\varphi_t Q_t[\boldsymbol{X}]1_{F_t}]. \tag{2.9}$$

Jelikož $(\varphi_t Q_t[\boldsymbol{X}])$ je $\mathcal{F}_t$-měřitelné a rovnost (2.9) musí platit pro všechna $F_t \in \mathcal{F}_t$, jedná se přesně o definici podmíněné střední hodnoty vzhledem k σ-algebře $\mathcal{F}_t$. Z rovnosti (2.9) vyplývá naše původní definice procesu ocenění (Definice 2.2.6), $\mathbb{P}$-s.j., a tato definice je tedy „ekonomicky rozumnou definicí“. Pokud bychom naši argumentaci chtěli založit více na finanční matematice, vyšli bychom z toho, že (pomocí deflátorů) diskontovaný náhodný proces cen musí být $(\mathbb{P}, \mathbb{F})$-martingal, abychom získali bezarbitrážní model.

Nyní se podíváme na forwardové diskontní faktory a souvislost se ZCB. Tradiční diskontní faktory jsme definovali ve vyjádření (2.7) jako

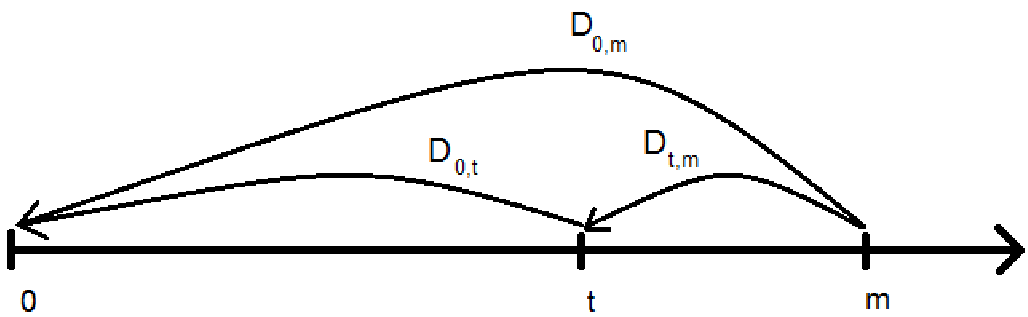
$$D_{0,m} = Q_0[\boldsymbol{Z}^{(m)}] = \mathbb{E}[\varphi_m]$$

v čase 0 pro bezkuponový dluhopis s maturitou m. Pro $t < m$, nechť $D_{t,m}$ značí diskontní faktor z času m zpět do času t, fixovaný v čase 0. Používaná terminologie „forward“ odkazuje na zafixování v dřívějším čase. Potom musí platit

$$D_{0,t} D_{t,m} = D_{0,m}. \tag{2.10}$$

Levá strana rovnosti (2.10) je cena v čase 0 za to, že obdržíme $D_{t,m}$ v čase t, a $D_{t,m}$ je cena za získání 1 v čase m (fixováno v čase 0 a placeno v čase t). Pravá strana rovnosti je cena v čase 0 za obdržení 1 v čase m. Můžeme tedy definovat **forwardové diskontní faktory** pro $t < m$:

$$D_{t,m} = \frac{D_{0,m}}{D_{0,t}}.$$



Obrázek 2.1: Forwardový diskontní faktor $D_{t,m}$ pro $t < m$

Toto je forwardová cena bezkuponového dluhopisu s maturitou m fixovaná do času 0 a zaplacená v čase t ($\mathcal{F}_0$-měřitelná). Na druhou stranu hodnota/cena v čase t bezkuponového dluhopisu s maturitou m je dána ($\mathcal{F}_t$-měřitelná)

$$Q_t[\boldsymbol{Z}^{(m)}] = \frac{1}{\varphi_t}\mathbb{E}[\varphi_m | \mathcal{F}_t] = E\left[\frac{\varphi_m}{\varphi_t} | \mathcal{F}_t\right].$$

Což je přesně naše definice procesu pro jednu deterministickou platbu o velikosti 1 v čase m.V literatuře týkající se finanční matematiky se často pro tuto hodnotu bezkuponového dluhopisu používá značení $P(t,m)$, které jsme uvedli v Definici 2.1.1, takže

$$P(t,m) = Q_t[\boldsymbol{Z}^{(m)}] = E\left[\frac{\varphi_m}{\varphi_t}|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}^*\left[\exp\{-\sum_{s=t}^{m-1} r_s\}|\mathcal{F}_t\right],$$

kde $(r_t)_{t\in\mathfrak{T}}$ značí proces spotových úrokových sazeb a $\mathbb{E}^*$ je střední hodnota podle rizikově neutrální míry $P^* \sim P$. Poznamenejme, že platí $D_{0,m} = P(0,m) = Q_0[\boldsymbol{Z}^{(m)}]$.

Nyní zformulujme důležité tvrzení, které je podstatné pro získání ekonomicky smysluplného systému náhodných procesů k ocenění cash flow.

Tvrzení 2.2.7. *Předpokládejme, že máme fixní deflátor $\boldsymbol{\varphi} \in L^1_{n+1}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ a že náhodný proces $(Q_t[\boldsymbol{X}])_{t\in\mathfrak{T}}$ pro cash flow $\boldsymbol{X} \in \mathcal{L}_{\boldsymbol{\varphi}}$ je definován pomocí Definice 2.2.6. Diskontované náhodné procesy $(\varphi_t Q_t[\boldsymbol{X}])_{t\in\mathfrak{T}}$ jsou $(\mathbb{P},\mathbb{F})$-martingaly.*

Důkaz. Využijeme-li $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$ a tzv. tower property pro podmíněnou střední hodnotu, kdy pro $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$ platí

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_{t+1}] \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_t] \mid \mathcal{F}_{t+1}], \tag{2.11}$$

máme potom

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\varphi_{t+1}Q_{t+1}[\boldsymbol{X}|\mathcal{F}_t]] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\sum_{k=0}^{n}\varphi_k X_k|\mathcal{F}_{t+1}]|\mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}[\sum_{k=0}^{n}\varphi_k X_k|\mathcal{F}_t] = \varphi_t Q_t[\boldsymbol{X}]. \end{aligned}\tag{2.12}$$

Čímž je tvrzení dokázáno. □

Tvrzení 2.2.7 říká, že diskontované náhodné procesy tvoří $(\mathbb{P},\mathbb{F})$-martingaly pro fixní deflátor $\boldsymbol{\varphi}$. Tyto martingalové vlastnosti pro daný deflátor jsou podstatnou a postačující podmínkou, aby byl systém ocenění bezarbitrážní, tedy eliminoval možnost jistých zisků bez rizika.

Nyní se podíváme, jak lze uvedenou teorii oceňovacích náhodných procesů použít pro výpočet matematických rezerv pojišťovny.

2.3 Význam pro výpočet technických rezerv

V předchozí kapitole jsme uvažovali ocenění cash flow $\boldsymbol{X} \in L^1_{n+1}(\mathbb{P},\mathbb{F})$ v jakémkoli čase $t \in \mathfrak{T}$, ale v pojišťovnictví nás hlavně zajímá ocenění budoucích cash flow $(0,\ldots,0,X_{t+1},\ldots,X_n)$ nacházíme-li se v čase t. Právě pro tyto finanční toky potřebujeme v naší účetní rozvaze vytvářet tzv. technické rezervy (dále jen rezervy). To znamená, že potřebujeme předpovědět X_k, $k > t$, a přiřadit jim tržně konzistentní hodnoty, založené na informaci $\mathcal{F}_t$.

Předpoklad 2.3.1. *Správně oceněné rezervy by měly eliminovat možnost her s pojistnými závazky (smlouvami).*

Předpokládejme, že pojistná smlouva je reprezentována náhodnými cash flow $\boldsymbol{X} \in L^1_{n+1}(\mathbb{P}, \mathbb{F})$. Pro $k \leq n$ definujeme budoucí závazky vyplývající ze smlouvy v čase $k-1$ jako

$$\boldsymbol{X}_{(k)} = (0, \dots, 0, X_k, \dots, X_n) \in L^1_{n+1}(\mathbb{P}, \mathbb{F}),$$

což jsou zbývající cash flow po čase $k-1$. $\boldsymbol{X}_{(k)}$ představuje velikost rezervy, kterou musíme vytvořit v čase $k-1$, abychom byli schopni dostát všem svým budoucím závazkům vyplývajícím ze smlouvy. Definujeme tedy rezervu $R_t^{(k)}$ v čase $t \leq k-1$ na budoucí závazky $\boldsymbol{X}_{(k)}$ následovně

$$R_t^{(k)} = R[\boldsymbol{X}_{(k)}|\mathcal{F}_t] = Q_t[\boldsymbol{X}_{(k)}] = \frac{1}{\varphi_t}\mathbb{E}[\sum_{s=k}^{n} \varphi_s X_s|\mathcal{F}_t]. \tag{2.13}$$

Na druhou stranu $R_t^{(k)}$ také odpovídá podmíněné střední hodnotě ceny cash flow $\boldsymbol{X}_{(k)}$, a to nahlížené z času t. Proto o $R_t^{(k)}$ také často mluvíme jako o diskontovaném nejlepším odhadu (best estimate) rezerv. Abychom ospravedlnili předchozí definici rezerv jako rozumnou, budeme pro $R_t^{(k)}$ postupovat podobně jako dříve pro náhodný proces cen $Q_t[\boldsymbol{X}]$. Chceme zabránit tomu, aby se s pojistnými smlouvami daly hrát hry. Uvažujme tedy nasledující hru, kdy máme dvě pojišťovny A a B s následujícími obchodními strategiemi:

- Společnost A drží kontrakt až do poslední platby.
- Společnost B se rozhodne (v čase 0) prodat run-off budoucích závazků v čase $t-1$ za cenu $R[\boldsymbol{X}_{(t)}|\mathcal{F}_{t-1}]$ pokud nastane událost $F_{t-1} \in \mathcal{F}_{t-1}$

Tyto dvě strategie generují následující cash flow:

		0	$\dots$	$t-1$	t	$\dots$	n
$\boldsymbol{X}^{(A)}$	$=$	$(X_0,$	$\dots,$	$X_{t-1},$	$X_t,$	$\dots,$	$X_n)$
$\boldsymbol{X}^{(B)}$	$=$	$(X_0,$	$\dots,$	$X_{t-1} + R[\boldsymbol{X}_{(t)}\vert\mathcal{F}_{t-1}]1_{F_{t-1}},$	$X_t 1_{F^c_{t-1}},$	$\dots,$	$X_n 1_{F^c_{t-1}})$

F^c_{t-1} značíme doplněk k události F_{t-1}, tedy jev kdy nenastane F_{t-1}. Hodnota rozdílu těchto dvou strategií v čase 0 je dána jako:

$$Q_0[\boldsymbol{X}^{(A)} - \boldsymbol{X}^{(B)}] = \mathbb{E}[-\varphi_{t-1} R[\boldsymbol{X}_{(t)}|\mathcal{F}_{t-1}]1_{F_{t-1}}] + \mathbb{E}[\sum_{s=t}^{n} \varphi_s X_s 1_{F_{t-1}}].$$

Strategie A a B by měly mít stejnou počáteční hodnotu, pokud pracujeme s informací $\mathcal{F}_0$, tedy $Q_0[\boldsymbol{X}^{(A)} - \boldsymbol{X}^{(B)}] = 0$. Z toho vyplývá, že pro všechny jevy $F_{t-1} \in \mathcal{F}_{t-1}$ potřebujeme, aby platila rovnost

$$\mathbb{E}[\varphi_{t-1} R[\boldsymbol{X}_{(t)}|\mathcal{F}_{t-1}]1_{F_{t-1}}] = \mathbb{E}[\sum_{s=t}^{n} \varphi_s X_s 1_{F_{t-1}}].$$

Pokud využijeme definici podmíněné střední hodnoty, získáváme z předchozího následující definici rezerv:

$$R_{t-1}^{(t)} = R[\boldsymbol{X}_{(t)}|\mathcal{F}_{t-1}] = \frac{1}{\varphi_{t-1}}\mathbb{E}[\sum_{s=t}^{n}\varphi_s X_s|\mathcal{F}_{t-1}] = Q_{t-1}[\boldsymbol{X}_{(t)}],$$

což dokazuje opodstatněnost vyjádření (2.13), a to pro $k = t$. Případ, kdy $k > t$, potom snadno získáme z předpokladu, že bychom měli mít martingalovou vlastnost pro diskontovaný (pomocí deflátorů) náhodný proces. Máme tedy

$$\begin{aligned}\varphi_{t-1}R_{t-1}^{(k)} &= \varphi_{t-1}Q_{t-1}[\boldsymbol{X}_{(k)}] \\ &= \mathbb{E}[\varphi_{k-1}Q_{k-1}[\boldsymbol{X}_{(k)}]|\mathcal{F}_{t-1}] = \mathbb{E}[\varphi_{k-1}R_{k-1}^{(k)}|\mathcal{F}_{t-1}]. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Vidíme, že jsme získali následující samo-financující vlastnost (self-financing property):

Důsledek 2.3.2. ***(Samo-financující vlastnost)*** *Platí následující rekurze*

$$\mathbb{E}[\varphi_t(R_t^{(t+1)} + X_t)|\mathcal{F}_{t-1}] = \varphi_{t-1}R_{t-1}^{(t)}.$$

Důkaz. Pokud využijeme $\mathcal{F}_t$-měřitelnosti X_t a tower property (2.11) podmíněné střední hodnoty, platí následující rovnost

$$\mathbb{E}[\varphi_t(R_t^{(t+1)} + X_t)|\mathcal{F}_{t-1}] = [\sum_{k=t}^{n}\varphi_k X_k|\mathcal{F}_{t-1}] = \varphi_{t-1}R_{t-1}^{(t)}.$$

Čímž je důsledek dokázán. □

Klasická aktuárská teorie s $\varphi_t = (1+i)^{-t}$ pro nějakou konstantní úrokovou míru i tvoří konzistentní teorii, ale takto zvolené deflátory nejsou tržně konzistentní, protože jsou často velmi odlišné od pozorovaných ekonomických veličin. Předchozí Důsledek 2.3.2 v podstatě říká, že pokud se chceme vyhnout arbitráži na trhu s rezervami, musíme je definovat jako podmíněnou střední hodnotu náhodých cash flow.

Zatím jsme se věnovalí ocenění podle reálné pravděpodobnostní míry s diskontováním cash flow pomocí deflátorů. V další kapitole se podíváme na ocenění podle ekvivalentní martingalové míry, kdy diskontujeme pomocí numeraire banokovního účtu.

2.4 Ekvivalentní martingalové míry

V této kapitole uvedeme základní teorii k ocenění pomocí ekvivalentní martingalové míry, kdy diskontujeme pomocí numeraire bankovního účtu. Ocenění pomocí ekvivalentní martingalové míry je ekvivalentní k ocenění pomocí reálné pravděpodobnostní míry, kdy diskontujeme pomocí deflátorů.

Předpokládejme, že máme dán fixní $\mathbb{F}$-adaptovaný deflátor $\boldsymbol{\varphi} \in L^1_{n+1}(\mathbb{P}, \mathbb{F})$. Dříve definovaný náhodný proces tvoří přirozený martingal (tzn. splňuje hypotézu o eficientním trhu ve své silné podobě). Ukážeme si, že změna pravděpodobnostní míry odpovídá změně diskontního faktoru, a to od deflátoru $\boldsymbol{\varphi}$ na diskont bankovního účtu $(B_t^{-1})_{t\in\mathfrak{T}}$.

Náhodné procesy $(Q_t[\boldsymbol{X}])_{t\in\mathfrak{T}}$ jsou vyjádřeny v pevně dané referenční měně, kterou zvolíme na začátku. Za předpokladu, že jsou procesy konzistentní vzhledem k danému deflátoru $\boldsymbol{\varphi}$, máme martingaly $(\varphi_t Q_t[\boldsymbol{X}])_{t\in\mathfrak{T}}$ podle reálné pravděpodobnostní míry $\mathbb{P}$. Teoreticky můžeme zvolit libovolný striktně pozitivní náhodný proces jako referenční jednotku. Takovou referenční jednotku nazýváme **numeraire**.

2.4.1 Numeraire bankovního účtu

Nevýhodou deflátoru $\boldsymbol{\varphi}$ popsaného v předchozích kapitolách je, že φ_t jsou pozorovatelné až v čase t. Často je výhodnější mít diskontní faktor, který je $\mathcal{F}_{t-1}$-měřitelný (předvídatelný).

Vyjděme z martingalové vlastnosti pro diskontované náhodné procesy $(\varphi_t Q_t[\boldsymbol{X}])_{t\in\mathfrak{T}}$ (Tvrzení 2.2.7), ze které vyplývá, že hodnota náhodného procesu $Q_t[\boldsymbol{X}]$ je

$$Q_t[\boldsymbol{X}] = \frac{1}{\varphi_t}\mathbb{E}[\varphi_{t+1} Q_{t+1}[\boldsymbol{X}]|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\frac{\varphi_{t+1}}{\varphi_t} Q_{t+1}[\boldsymbol{X}]|\mathcal{F}_t].$$

A pro span-deflátory máme tedy

$$Q_t[\boldsymbol{X}] = \mathbb{E}[Y_{t+1} Q_{t+1}[\boldsymbol{X}]|\mathcal{F}], \tag{2.15}$$

kde span-deflátor Y_{t+1} jsme definovali v (2.6). Náhodný (stochastický) span-deflátor Y_{t+1} je $\mathcal{F}_{t+1}$-měřitelný, což znamená, že je znám až na konci časového období $(t, t+1]$, nikoliv na jeho začátku. Definujme span-diskontní faktor, který je znám na začátku časového intervalu $(t, t+1]$, je tedy pozorovatelný na trhu v čase t:

$$D(\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}[Y_{t+1}|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}\left[\frac{\varphi_{t+1}}{\varphi_t}|\mathcal{F}_t\right].$$

Často je vhodné přepsat vzorce se span-deflátory Y_{t+1} pomocí span-diskontních faktorů $D(\mathcal{F}_t)$, protože tyto diskontní faktory jsou v příslušném čase pozorovatelné na trhu, kdežto deflátory jsou neustále náhodné proměnné. Základní myšlenkou této transformace je změna pravděpodobnostní míry $\mathbb{P}$ na $\mathbb{P}^*$ tak, abychom mohli zaměnit span-deflátory Y_{t+1} za pozorovatelné span-diskontní faktory $D(\mathcal{F}_t)$ v čase t.

Pokud máme roční interval $(t, t+1]$ potom $D(\mathcal{F}_t)$ je přesně cena bezkuponového bezrizikového dluhopisu s maturitou 1 rok v čase t, t.j.

$$D(\mathcal{F}_t) = P(t, t+1), \quad t \in \mathfrak{T}_-.$$

$D(\mathcal{F}_t)^{-1}$ pak popisuje vývoj hodnoty bankovního účtu, což znamená, že pokud investujeme 1 na bankovní účet v čase 0, potom bude hodnota této investice B_t v čase $t \geq 1$ dána jako

$$B_t = \prod_{s=0}^{t-1} D(\mathcal{F}_s)^{-1} = \prod_{s=0}^{t-1} \mathbb{E}[Y_{s+1}|\mathcal{F}_s]^{-1} = \exp\left\{\sum_{s=0}^{t-1} r_s\right\} > 0, \tag{2.16}$$

kde jsme definovali spotovou sazbu r_t jako

$$r_t \stackrel{\text{def.}}{=} -\log \mathbb{E}[Y_{t+1}|\mathcal{F}_t] = -\log P(t, t+1) = R(t, t+1) \tag{2.17}$$

a „prázdný součin“ (od 0 do -1 pro $t = 0$) je roven jedné, tedy $B_0 = 1$. Ve srovnání s okamžitou spotovou sazbou $r(t)$ ve spojitém čase značíme spojitě úročenou spotovou sazbu (v diskrétním čase na jedno období) pomocí dolního indexu r_t. Poznamenejme, že r_t jsou $\mathcal{F}_t$-meřitelné, tedy známé na počátku časového období $(t, t+1]$, a může se jednat o proces spotových sazeb založených např. na Vašíčkově modelu.

Definovali jsme numeraire bankovního účtu a v další kapitole se podíváme na jeho použití v souvislosti s ekvivalentní martingalovou mírou.

2.4.2 Ekvivalentní martingalová mírá

Nyní sestrojíme ekvivalentní martingalovou míru $\mathbb{P}^*$ pro numeraire bankovního účtu $(B_t)_{t\in\mathfrak{T}}$ a ukážeme, jak je její existence vztažena k základní větě oceňování aktiv.

Definujeme proces $\boldsymbol{\xi} = (\xi_t)_{t\in\mathfrak{T}}$, který použijeme při převodu mezi oceněním pomocí reálné pravděpodobnostní míry a pomocí ekvivalentní martingalové míry. Mějme tedy

$$\begin{aligned} \xi_0 &= 1 && \text{pro } t = 0 \\ \xi_t &= \prod_{s=0}^{t-1} \frac{Y_{s+1}}{D(\mathcal{F}_s)} = \varphi_t B_t && \text{pro } t = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

a formulujme následující tvrzení.

Tvrzení 2.4.1. *Předpokládejme pevnou volbu deflátoru $\boldsymbol{\varphi} \in L^1_{n+1}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$. Proces $(\xi_t)_{t\in\mathfrak{T}}$ definovaný jako $\xi_t = \varphi_t B_t$ je striktně pozitivní $(\mathbb{P}, \mathbb{F})$-martingal s očekávanou hodnotou 1.*

Důkaz. Dle Definice 2.2.5 máme $\boldsymbol{\varphi} \gg 0$ a $\boldsymbol{\varphi} \in L^1_{n+1}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$, z čehož vyplývá striktní pozitivita ξ_t pro včechna t. Poznamenejme, že B_{t+1} je $\mathcal{F}_t$-měřitelné. Odtud pro $t = 0, \ldots, n-1$ máme

$$\mathbb{E}[\xi_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = B_{t+1}\mathbb{E}[\varphi_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = B_{t+1}\varphi_t P(t, t+1) = \varphi_t B_t = \xi_t,$$

což dokazuje tvrzení martingalové vlastnosti. Navíc vyplývá pro všechna $t \in \mathfrak{T}_-$ (s ohledem k normalizaci $\varphi_0 \equiv 1$ a $P(0,1) = B_1^{-1}$)

$$\mathbb{E}[\xi_{t+1} \mid \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[\xi_1 \mid \mathcal{F}_0] = B_1\mathbb{E}[\varphi_1 \mid \mathcal{F}_0] = B_1 P(0,1) = 1 = \xi_0,$$

což dokazuje naše tvrzení.

□

Tvrzení 2.4.1 říká, že náhodný proces $(B_t)_{t\in\mathfrak{T}}$ bankovního účtu je konzistentní vzhledem k $\boldsymbol{\varphi}$ s počáteční hodnotou 1 (počáteční investice). Tento proces je navíc striktně pozitivní, z čehož vyplývá, že ho můžeme použít jako numeraire. Proces $(\xi_t)_{t\in\mathfrak{T}}$ je tedy proces hustot (density process) a můžeme ho použít, abychom definovali ekvivalentní pravděpodobnostní míru $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$ pomocí Radon-Nikodymovi derivace

$$\left.\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_n} = \xi_n = \varphi_n B_n > 0.$$

Očekávanou hodnotu vzhledem k $\mathbb{P}^*$ budeme značit $\mathbb{E}^*$. Pro $A \in \mathcal{F}_n$ platí $\mathbb{P}^*[A] = \mathbb{E}^*[1_A] = \mathbb{E}[\xi_n 1_A]$. Uveďme tedy následující tvrzení

Tvrzení 2.4.2. *Pro $\mathbb{P}^*$ platí následující tři body:*

1. $\mathbb{P}^*$ *je pravděpodobnostní míra na* $(\Omega, \mathcal{F}_n)$ *ekvivalentní s* $\mathbb{P}$.
2. *Platí*
$$\left.\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_s} = \xi_s, \qquad \mathbb{P}\text{-}s.j.$$
3. *Navíc pro $s \leq t$ a $A \in \mathcal{F}_t$ platí*
$$\mathbb{P}^*[A|\mathcal{F}_s] = \frac{1}{\xi_s}\mathbb{E}[\xi_t 1_A|\mathcal{F}_s] \qquad \mathbb{P}\text{-}s.j.$$

Důkaz. Důkaz prvního tvrzení vyplývá z toho, že náhodný proces $\boldsymbol{\xi}$ je striktně pozitivní $\mathbb{P}$-martingal s normalizací $\mathbb{E}[\xi_n] = 1$. Z normalizace vyplývá $\mathbb{P}^*[\Omega] = \mathbb{E}[\xi_n] = 1$, což znamená, že $\mathbb{P}^*$ je pravděpodobnostní míra na $(\Omega, \mathcal{F}_n)$. Z $\xi_n > 0$ $\mathbb{P}$-s.j. navíc vyplývá, že $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$, což znamená že se jedná o ekvivalentní míry.

Dále dokážeme druhé tvrzení. Poznamenejme, že pro jakoukoli $\mathcal{F}_s$-měřitelnou množinu C platí

$$\mathbb{P}^*[C] = \mathbb{E}[\xi_n 1_C] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\xi_n|\mathcal{F}_s]1_C] = \mathbb{E}[\xi_s 1_C],$$

s využitím martingalové vlastnosti $\boldsymbol{\xi}$ v poslední rovnosti. Takže ξ_s je hustota na $\mathcal{F}_s$.

Nakonec zbývá třetí tvrzení. Poznamenejme, že pro jakoukoli $\mathcal{F}_s$-měřitelnou množinu C platí

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^*[1_C 1_A] &= \mathbb{E}\left[1_C \xi_n 1_A\right] \\
&= \mathbb{E}\left[1_C \mathbb{E}[\xi_n 1_A|\mathcal{F}_s]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\xi_s \left(1_C \frac{1}{\xi_s}\mathbb{E}[\xi_n 1_A|\mathcal{F}_s]\right)\right] \\
&= \mathbb{E}^*\left[1_C \frac{1}{\xi_s}\mathbb{E}[\xi_n 1_A|\mathcal{F}_s]\right] \\
&= \mathbb{E}^*\left[1_C \frac{1}{\xi_s}\mathbb{E}[1_A \mathbb{E}[\xi_n|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_s]\right] \\
&= \mathbb{E}^*\left[1_C \frac{1}{\xi_s}\mathbb{E}[\xi_t 1_A|\mathcal{F}_s]\right] \\
&= \mathbb{E}^*\left[1_C \mathbb{P}^*[A|\mathcal{F}_s]\right],
\end{aligned} \tag{2.18}$$

podle definice podmíněné střední hodnoty vzhledem k $\mathbb{P}^*$. Čímž jsme dokončili důkaz tvrzení. $\square$

Z Tvrzení 2.4.2 bodu 3. okamžitě vyplývá následující důsledek:

Důsledek 2.4.3. *Pro $s < t$ platí*

$$\mathbb{E}^*[Q_t[\boldsymbol{X}]|\mathcal{F}_s] = \frac{1}{\xi_s}\mathbb{E}[\xi_t Q_t[\boldsymbol{X}]|\mathcal{F}_s].$$

Pokud použijeme vyjádření span-diskontované ceny a předchozí důsledek na $s = t - 1$, získáme

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^*[Q_t[\boldsymbol{X}]|\mathcal{F}_{t-1}] &= \frac{1}{\xi_{t-1}}\mathbb{E}[\xi_t Q_t[\boldsymbol{X}]|\mathcal{F}_{t-1}] \\
&= \frac{1}{\xi_{t-1}}\mathbb{E}[\xi_{t-1}\frac{Y_t}{D(\mathcal{F}_{t-1})}Q_t[\boldsymbol{X}]|\mathcal{F}_{t-1}] \\
&= \frac{1}{D(\mathcal{F}_{t-1})}\mathbb{E}[Y_t Q_t[\boldsymbol{X}]|\mathcal{F}_{t-1}] \\
&= \frac{1}{D(\mathcal{F}_{t-1})}Q_{t-1}[\boldsymbol{X}],
\end{aligned}$$

nebo také

$$D(\mathcal{F}_{t-1})\mathbb{E}^*[Q_t[\boldsymbol{X}]|\mathcal{F}_{t-1}] = Q_{t-1}[\boldsymbol{X}]. \tag{2.19}$$

Takže pro diskont bankovního účtu B_t^{-1}, který vyjádříme z numeraire bankovního účtu v (2.16) jako

$$B_t^{-1} = \prod_{s=0}^{t-1} D(\mathcal{F}_s),$$

máme za použití rovnosti (2.19)

$$\mathbb{E}^*[B_t^{-1}Q_t[\boldsymbol{X}]|\mathcal{F}_{t-1}] = B_t^{-1}\mathbb{E}^*[Q_t[\boldsymbol{X}]|\mathcal{F}_{t-1}] = B_{t-1}^{-1}Q_{t-1}[\boldsymbol{X}].$$

Poznamenejme, že diskontní faktor B_t^{-1} je nyní měřitelný vzhledem k $\mathcal{F}_{t-1}$. Takže v porovnání s φ_t máme nyní $\mathcal{F}_{t-1}$-měřitelný diskontní faktor. Numeraire bankovního účtu popisuje růst investice na bankovním účtu a je předvídatelný, tzv. lokálně bezrizikový. O ekvivalentní martingalové míře mluvíme také jako o rizikově neutrální míře. Nyní můžeme zformulovat následující tvrzení.

Tvrzení 2.4.4. *Předpokládejme fixní deflátor $\boldsymbol{\varphi} \in L^1_{n+1}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ a náhodné procesy $(Q_t[\boldsymbol{X}])_{t\in\mathfrak{T}}$ pro $\boldsymbol{X} \in \mathcal{L}_{\boldsymbol{\varphi}}$ definované pomocí Definice 2.2.6. Náhodné procesy diskontované pomocí numeraire bankovního účtu $(B_t^{-1}Q_t[\boldsymbol{X}])_{t\in\mathfrak{T}}$ jsou $(\mathbb{P}^*, \mathbb{F})$-martingaly.*

Pro hodnoty bankovního účtu $(B_t)_{t\in\mathfrak{T}}$ můžeme tedy sestrojit ekvivalentní pravděpodobnostní míru $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$ takovou, že $(B_t^{-1})_{t\in\mathfrak{T}}$ diskontované náhodné procesy jsou $(\mathbb{P}^*, \mathbb{F})$-martingaly.

Pokud vezmeme $\mathcal{F}_k$-měřitelnou podmíněnou škodu (výplatu) X_k, můžeme lehce spočítat její hodnotu v čase $t \leq k$ pomocí funkcionálu Q_t. To lze dělat buď podle reálné pravděpodobnostní míry $\mathbb{P}$ a stochasticky diskontovat pomocí $\mathbb{F}$-adaptovaného deflátoru $\boldsymbol{\varphi}$, nebo podle ekvivalentní martingalové míry $\mathbb{P}^*$ a diskontovat pomocí předvídatelného numeraire bankovního účtu $(B_t)_{t\in\mathfrak{T}}$, což zformalizujeme v následujících důsledcích.

Důsledek 2.4.5. *Hodnota ZCB se splatností $m \leq n$ v čase $t \leq m$ je dána jako*

$$P(t,m) = \frac{1}{\varphi_t}\mathbb{E}[\varphi_m \mid \mathcal{F}_t] = \frac{1}{B_t^{-1}}\mathbb{E}^*[B_m^{-1} \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^*\left[\exp\{-\sum_{s=t}^{m-1} r_s\} \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Důsledek 2.4.6. *Hodnota cash flow $\boldsymbol{X}_k = (0,\ldots,0,X_k,0,\ldots,0) \in \mathcal{L}_{\boldsymbol{\varphi}}$ v čase $t \leq k$ je dána jako*

$$Q_t[\boldsymbol{X}_k] = \frac{1}{\varphi_t}\mathbb{E}[\varphi_k X_k \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^*\left[\exp\{-\sum_{s=t}^{k-1} r_s\}X_k \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Pokud pracujeme pouze s finančními instrumenty, je často jednodušší používat pouze $\mathbb{P}^*$, kdy diskontujeme pomocí bezrizikových spotových sazeb. Pro použití v aktuárské praxi, kdy máme navíc i pojistné produkty, častěji volíme reálnou pravděpodobnostní míru $\mathbb{P}$, protože pojistná plnění a volby parametrů je vhodné modelovat podle $\mathbb{P}$. Je tedy důležité porozumět spojení mezi oběma mírami.

Pro ekvivalentní martingalovou míru $\mathbb{P}^*$ volíme pro diskontování numeraire bankovního účtu B_t^{-1}. Obecně, pokud vezmeme $(A_t)_{t\in\mathfrak{T}}$ jako striktně pozitivní, normalizovaný proces, pak můžeme zvolit A_t^{-1} jako numeraire a najít vhodnou ekvivalentní míru $\mathbb{P}^A \sim \mathbb{P}$ takovou, že oceňovací procesy $(A_t^{-1}Q_t[\boldsymbol{X}])_{t\in\mathfrak{T}}$ jsou $\mathbb{F}$-martingaly vzhledem k $\mathbb{P}^A$. V této práci volíme jako numeraire bankovní účet. V souvislosti s ekvivalentní martingalovou mírou ještě zmíníme jako poznámku základní větu oceňování aktiv, která je nutnou a postačující podmínkou pro trh, aby byl bezarbitrážní a úplný.

Poznámka 2.4.7. ***(Základní věta oceňování aktiv)***

- ***Hypotéza eficientního trhu ve své silné podobě*** *předpokládá, že diskontovaný náhodný proces*

  $$\tilde{Q}_t = \varphi_t Q_t[\boldsymbol{X}], \qquad t \in \mathfrak{T}$$

  tvoří $\mathbb{F}$-martingal podle $\mathbb{P}$. Odtud pro očekávané čisté zisky $(t > s)$ vyplývá

  $$\mathbb{E}[\tilde{Q}_t - \tilde{Q}_s|\mathcal{F}_s] = 0,$$

  což znamená že neexistuje žádná dobře definovaná arbitrážní strategie (toto vychází z myšlenky rizikově neutrálního ocenění).

- ***Hypotéza eficientního trhu ve své slabé podobě*** *předpokladá, že neexistuje žádný oběd zadarmo („there is no free lunch“). Neexistuje tedy žádná (dobře definovaná) samofinancující strategie s kladnými očekavanými zisky a bez jakéhokoli negativního rizika. V konečném modelu s diskrétním časem je tato podmínka ekvivalentní existenci ekvivalentní martingalové míry pro diskontovaný náhodný proces.*

Na úplných trzích existuje jen jedna ekvivalentní martingalová míra, z čehož vyplývá, že máme perfektní replikaci podřízených závazků a výpočet jejich ceny je přímočarý. Na neúplných trzích, kde máme více než jednu ekvivalentní martingalovou míru, potřebujeme ekonomický model, abychom rozhodli, kterou míru máme použít.
Definovali jsme ekvivalentní martingalovou míru a uvedli její použití při ocenění cash flow a ZCB. Nyní se datailněji podíváme na podstatu Důsledku 2.4.6, tedy spojení mezi deflátorem (pro ocenění podle reálné pravděpodobnostní míry) a bezrizikovou spotovou sazbou (pro ocenění podle rizikově neutrální míry).

2.5 Tržní cena rizika

V této kapitole popíšeme rozdíl mezi reálnou pravděpodobnostní mírou $\mathbb{P}$ a ekvivalentní martingalovou mírou $\mathbb{P}^*$, který bude reprezentován tržní cenou rizika. Základní myšlenka vychází ze span-deflátoru a identifikace jeho dynamiky podle obou pravděpodobnostních měr. Budeme pracovat se spojitě úročenou spotovou sazbou $(r_t)_{t\in\mathfrak{T}_-} = (R(t,t+1))_{t\in\mathfrak{T}_-}$. Budeme se zabývat rodinou modelů, které vedou k afinním strukturám, protože ty dovolují počítat ceny ZCB v uzavřeném tvaru (closed form solution). Pro vhodné funkce $A(\cdot,\cdot)$ a $B(\cdot,\cdot)$ vyjádříme ceny ZCB $P(t,m)$ jako

$$P(t,m) = \frac{1}{\varphi_t}\mathbb{E}[\varphi_m \mid \mathcal{F}_t] = \exp\{A(t,m) - r_t B(t,m)\}.$$

Dynamika spotových úrokových sazeb podle reálné pravděpodobnostní míry

Předpokládejme, že podle reálné pravděpodobnostní míry $\mathbb{P}$, splňuje spojitě úročený proces spotových sazeb $(r_t)_{t\in\mathfrak{T}_-}$, $r_0 > 0$ (fixní) a pro $t = 1,\dots,n-1$

$$r_t = f(t, r_{t-1}) + \boldsymbol{g}(t, r_{t-1})\boldsymbol{\varepsilon}_t, \tag{2.20}$$

kde f a $\boldsymbol{g}$ jsou dostatečně dobře se chovající funkce (reálné a $\mathbb{R}^N$-ocenitelné). Navíc $(\boldsymbol{\varepsilon}_t)_{t\in\mathfrak{T}}$ je N-rozměrný $\mathbb{F}$-adaptovaný proces a $\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}$ je nezávislé na $\mathcal{F}_t$ podle $\mathbb{P}$ pro $t \in \mathfrak{T}_-$. Poznamenejme, že $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ a $\boldsymbol{g}$ jsou N-rozměrné veličiny a jejich součin myslíme ve smyslu vnitřního součinu na $\mathbb{R}^N$. Množinu hodnot pro r_t označíme jako $\mathcal{Z}_t$, tedy pro všechna $t \in \mathfrak{T}_-$ platí $r_t \in \mathcal{Z}_t$, $\mathbb{P}$-s.j.

Vyjádření deflátoru na základě spotových sazeb

Dále zvolíme R^N-ocenitelnou funkci $\boldsymbol{\lambda}(t+1,z)$, která se chová dostatečně vhodně pro $t \in \mathfrak{T}_-$ a $z \in \mathcal{Z}$. Funkce $\boldsymbol{\lambda}$ hraje roli **tržní ceny rizika**. Modeluje agregovanou tržní averzi k riziku a vyjadřuje rozdíl mezi reálnou pravděpodobnostní mírou $\mathbb{P}$ a ekvivalentní martingalovou mírou $\mathbb{P}^*$. My provedeme exogenní volbu funkce $\boldsymbol{\lambda}$, ale v plnohodnotném ekonomickém modelu by měla být tržní cena rizika získána endogenně z podmínky tržní rovnováhy. Zvolme $\mathbb{F}$-adaptovaný N-rozměrný proces $(\boldsymbol{\delta}_t)_{t\in\mathfrak{T}}$ takový, že $\boldsymbol{\delta}_{t+1}$ je nezávislé na $\mathcal{F}_t$ podle $\mathbb{P}$. Proces $(\boldsymbol{\delta}_t)_{t\in\mathfrak{T}}$ se často nazývá „deflator innovation". Předpokládejme, že pro všechna $t \in \mathfrak{T}_-$ a $z \in \mathcal{Z}_t$ je očekávaná hodnota

$$\mathbb{E}[\exp\{\boldsymbol{\lambda}(t+1,z)\boldsymbol{\delta}_{t+1}\}]$$

konečná. Definujeme span-deflátor $Y_0 \equiv 1$ a pro $t \in \mathfrak{T}_-$ volíme

$$Y_{t+1} = c_t \exp\{-r_t + \boldsymbol{\lambda}(t+1, r_t)\boldsymbol{\delta}_{t+1}\},$$

pro vhodnnou $\mathcal{F}_t$-měřitelnou proměnnou $c_t > 0$ v $\mathbb{P}$-s.j. Poznamenejme, že pro vztah mezi span-deflátorem a spotovou sazbou platí z (2.15) a (2.17) následující rovnosti

$$r_t = -\log P(t,t+1) = -\log \mathbb{E}\left[\frac{\varphi_{t+1}}{\varphi_t} \mid \mathcal{F}_t\right] = -\log \mathbb{E}[Y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t].$$

Tím získáváme požadavek na normalizaci pro proměnnou c_t. Lze přímo spočíst

$$c_t = \mathbb{E}[\exp\{\boldsymbol{\lambda}(t+1,r_t)\boldsymbol{\delta}_{t+1}\} \mid \mathcal{F}_t]^{-1}.$$

To nás vede k následující definici

$$h(t+1,z) = \log \mathbb{E}[\exp\{\boldsymbol{\lambda}(t+1,z)\boldsymbol{\delta}_{t+1}\} \mid \mathcal{F}_t] < \infty, \qquad \mathbb{P}\text{-s.j.} \tag{2.21}$$

Potom definujeme $\mathbb{F}$-adaptovaný deflátor $\boldsymbol{\varphi}$ jako

$$\varphi_t = \prod_{s=0}^{t} Y_s = \exp\left\{-\sum_{s=1}^{t}[r_{s-1} + h(s, r_{s-1})] + \sum_{s=1}^{t} \boldsymbol{\lambda}(s, r_{s-1})\boldsymbol{\delta}_s\right\}. \tag{2.22}$$

Obecným předpokladem v modelu spotových sazeb je, že rozdělení pro $\boldsymbol{\delta}_t$ a $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ a funkce f, $\boldsymbol{g}$ a $\boldsymbol{\lambda}$ jsou zvoleny tak, že $\boldsymbol{\varphi}$ je deflátor na $L^1_{n+1}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$:

- $\mathbb{F}$-adaptovanost je jasná,
- normalizace $\varphi_0 \equiv 1$ vychází z toho, že prázdnou sumu, tj. $\sum_{s=1}^{0}$ definujeme jako 0,
- striktní pozitivita vychází z $h < \infty$ a $\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\delta}_s > -\infty$, $\mathbb{P}$-s.j.,
- L^1-vlastnost závisí na vhodné volbě funkcí f, $\boldsymbol{g}$ a $\boldsymbol{\lambda}$ a stochastických procesech $(\boldsymbol{\delta}_t)_{t\in\mathfrak{T}}$ a $(\boldsymbol{\varepsilon}_t)_{t\in\mathfrak{T}}$.

Definice (2.20) procesu spotových sazeb r_t a vyjádření (2.22) pro deflátor φ_t poskytují rámec pro explicitní modely pro deflátory $\boldsymbol{\varphi}$. Gaussovské předpoklady pro $(\boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\delta}_t)$ často vedou k „uzavřeným řešením", a proto se hojně využívají, nejsou však nutnou podmínkou. Často se předpokládá, že jsou náhodné procesy $\boldsymbol{\delta}_t$ a $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ identické, ale uvedená teorie platí i pro obecnější předpoklady. My se v práci přikloníme k předpokladu identičnosti obou procesů jak uvidíme v další kapitole.

Ekvivalentní martingalová míra

Nakonec spočteme ekvivalentní martingalovou míru $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$. Proces hustot $(\xi_t)_{t\in\mathfrak{T}}$ je dán jako

$$\begin{aligned}\xi_t = \varphi_t B_t = \prod_{s=1}^{t} Y_s \exp\{r_{s-1}\} &= \prod_{s=1}^{t} \exp\{-h(s, r_{s-1}) + \boldsymbol{\lambda}(s, r_{s-1})\boldsymbol{\delta}_s\} \\ = \prod_{s=1}^{t} \mathbb{E}[\exp\{\boldsymbol{\lambda}(s, r_{s-1})\boldsymbol{\delta}_s\} \mid \mathcal{F}_{s-1}]^{-1} &\exp\{\boldsymbol{\lambda}(s, r_{s-1})\boldsymbol{\delta}_s\}\,. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Tímto máme požadovaný $(\mathbb{P}, \mathbb{F})$-martingal $(\xi_t)_{t\in\mathfrak{T}}$ s $\mathbb{P}$-očekávanou hodnotou 1. Poznamenejme, že pro $\boldsymbol{\lambda} \equiv 0$ získáme $\xi_t \equiv 1$ a dvě pravděpodobnostní míry $\mathbb{P}$ a $\mathbb{P}^*$ splývají. Vidíme tedy, že tržní cena rizika $\boldsymbol{\lambda}$ popisuje „rozdíl“ mezi reálnou pravděpodobnostní mírou $\mathbb{P}$ a ekvivalentní martingalovou mírou $\mathbb{P}^*$. Z toho, že jsou $\mathbb{P}$ a $\mathbb{P}^*$ identické pro $\boldsymbol{\lambda} \equiv 0$ vyplývá, že v tomto případě $\varphi_t = B_t^{-1}$.

V této kapitole jsme uvedli celkem tři způsoby jak oceňovat cash flow $\boldsymbol{X}$:

1. pomocí pozitivního lineárního funkcionálu Q,
2. pomocí deflátorů $\boldsymbol{\varphi}$ podle míry $\mathbb{P}$,
3. pomocí numeraire bankovního účtu B_t^{-1} podle rizikově neutrální míry $\mathbb{P}^*$.

Výhodou použití rizikově neutrální míry je, že diskontní faktor je předem znám, což znamená, že náš diskontní faktor nezávisí na stavech, ve kterých se náhodný proces vyskytne. Hlavní nevýhodou používání rizikově neutrální míry je, že celkový koncept není příliš přímočarý (zejména odhady parametrů a modelování pojistných závazků), a že se rizikově neutrální míra mění se změnou měny. Na druhou stranu deflátory jsou spočteny pomocí reálné pravděpodobnostní míry (vyjadřující tržní averzi k riziku). Navíc přesně popisují závislosti (jak ukážeme níže). Z praktického hlediska deflátory umožňují modelování vložených (finančních) opcí a garancí v pojistných smlouvách, a jsou proto upřednostňovány zvláště pojistnými matematiky, kteří oceňují pojistné produkty.

V další kapitole práce se podíváme již na konkrétní model spotových sazeb $(r_t)_{t\in\mathfrak{T}_-}$, kterým bude jednofaktorový Vašíčkův model s diskrétním časem. Jeho zobecněnou verzi, ze které budeme vycházet, jsme uvedli ve vyjádření (2.20). Na základě dynamiky spotových sazeb odvodíme deflátor a ekvivalentní martingalovou míru jako jsme to provedli v závěru této kapitoly.

3. Modelování spotových sazeb

V této kapitole se podíváme na konkrétní model pro modelování deflátorů, který je založen na spotových sazbách. Bude se jednat o Vašíčkův model s diskrétním časem, který patří do rodiny afinních modelů. Jde o poměrně jednoduchý model, který je při použití v praxi často nevyhovující, ale pro odvození teorie a použití v ilustrativních příkladech je nejvhodnější. V podstatě se jedná o AR(1) proces (autoregresní proces prvního řádu). Při jeho odvození vyjdeme z obecného vícerozměrného modelu, pro který vezmeme potřebné parametry (a jejich strukturu). V první části kapitoly se seznámíme s obecnými principy Vašíčkova modelu s diskrétním časem. Definujeme dynamiku spotových sazeb podle reálné pravděpodobnostní míry a z ní pak odvodíme vyjádření pro deflátor. Uvedeme také ekvivalentní martingalovou míru a získáme vyjádření pro ZCB ceny $P(t, m)$. V druhé časti uvedeme Vašíčkův model s měsíčním časovým krokem a odvodíme pro něj také vyjádření cen ZCB. Tento model s měsíčním krokem využijeme potom v numerické části na reálná data, protože v případě měsíčního kroku máme k dispozici větší počet pozorování než v případě ročního časového kroku. Ukážeme si také jak trnasformovat parametry Vašíčkova modelu s měsíčním krokem na model s ročním krokem. V třetí části kapitoly se potom věnujeme odhadu parametrů Vašíčkova modelu.

3.1 Jednofaktorový Vašíčkův model s diskrétním časem

Jednofaktorový Vašíčkův model s diskrétním časem je nejjednodušším příkladem jedno-faktorového modelu s afinní časovou strukturou a Normálně (Gaussovsky) rozdělenými inovacemi. To, že je model jednofaktorový, v podstatě znamená, že pracujeme s jedním zdrojem nejistoty.

Dynamika spotových sazeb podle reálné pravděpodobnostní míry

Předpokládejme, že náhodný proces $(\boldsymbol{\epsilon}_t)_{t\in\mathfrak{T}}$ je $\mathbb{F}$-adaptovaný, $\boldsymbol{\epsilon}_{t+1}$ je nezávislé na $\mathcal{F}_t$ a má N-rozměrné Standardní normální rozdělení s nezávislými prvky pro všechna $t \in \mathfrak{T}_-$ podle $\mathbb{P}$. Takže inovace $\boldsymbol{\epsilon}_{t+1}$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodně veličiny s vícerozměrným Standardním normálním rozdělením podle reálné pravděpodobnostní míry $\mathbb{P}$ (nezávislé členy, střední hodnota 0 a rozptyl 1). Nyní s ohledem na (2.20) definujeme dynamiku spotových sazeb $(r_t)_{t\in\mathfrak{T}_-}$ podle reálné pravděpodobnostní míry $\mathbb{P}$ pro $r_0 > 0$ fixní a pro $t = 1, \ldots, n-1$ jako

$$r_t = f(t, r_{t-1}) + \boldsymbol{g}(t, r_{t-1})\boldsymbol{\epsilon_t}. \tag{3.1}$$

Pokud zvolíme $N = 1$ (jednofaktorový model) a funkce f a g následovně

$$f(t, z) = b_t + \beta_t z \qquad \text{a} \qquad g(t, z) = g_t,$$

kde navíc platí pro parametry $b_t \equiv b > 0$, $g_t \equiv g > 0$ a $\beta_t \equiv \beta > 0$, přejdeme z obecného Gaussovského modelu spotových sazeb k našemu Vašičkovu modelu:

$$r_t = b + \beta r_{t-1} + g\epsilon_t. \tag{3.2}$$

Volme nyní $\beta + \lambda g \equiv 1 - k$ pro $k \in \mathbb{R}$, kde λ je parametr tržní ceny rizika, potom získáme vyjádření

$$r_t = b + \beta r_{t-1} + g\epsilon_t = b + (1 - (k + \lambda g))\, r_{t-1} + g\epsilon_t. \tag{3.3}$$

Novou proměnnou k zavadíme proto, abychom pak získali jednodušší vyjádření pro ceny ZCB ve Větě 3.1.3. Náhodný proces $(\epsilon_t)_{t\in\mathfrak{T}}$ je $\mathbb{F}$-adaptovaný a ϵ_{t+1} je nezávislé na $\mathcal{F}_t$ a Standardně normálně rozdělené podle $\mathbb{P}$ pro všechna $t \in \mathfrak{T}_-$.

Z předpokladu o spotových sazbách, tedy rovnice (3.3), a Normálního rozdělení vyplývá pro spotové sazby následující tvrzení.

Tvrzení 3.1.1. *Rovnice(3.3) vede, při reálné pravděpodobnostní míře $\mathbb{P}$, k podmíněnému Normálnímu rozdělení spotových sazeb $(r_t)_{t\in\mathfrak{T}_-}$. Pro parametr $\beta \neq 1$ a čas $t > s$ platí*

$$r_t \mid \mathcal{F}_s \sim \mathcal{N}\left(\left(1 - \beta^{t-s}\right)\frac{b}{1-\beta} + \beta^{t-s} r_s \quad , \quad g^2 \frac{1 - \beta^{2(t-s)}}{1 - \beta^2}\right). \tag{3.4}$$

Znamená to, že v jedno-faktorovém Vašíčkově modelu je podmíněná střední hodnota $r_t \mid \mathcal{F}_s$ rovna váženému průměru mezi dlouhodobým průměrem $\frac{b}{1-\beta}$ a posledním pozorováním r_s pro $\beta \in (0, 1)$.

Odvodili jsme rozdělení spotových sazeb a na jejich základě nyní vyjádříme deflátor pro Vašíčkův model s diskrétním časem.

Vyjádření deflátoru na základě spotových sazeb

Předpokládejme, že pro deflátor $\boldsymbol{\varphi}$ jsou inovace $(\boldsymbol{\delta}_t)_{t\in\mathfrak{T}}$ $\mathbb{F}$-adaptované. Dvojice $(\boldsymbol{\epsilon}_{t+1}, \boldsymbol{\delta}_{t+1})$ je nezávislá na $\mathcal{F}_t$ a má vícerozměrné Standardní normální rozdělení pro všechny $t \in \mathfrak{T}_-$ podle $\mathbb{P}$. Prvky $\boldsymbol{\delta}_{t+1}$ jsou vzájemně nezávislé a podmíněná korelační matice mezi $\boldsymbol{\epsilon}_{t+1}$ a $\boldsymbol{\delta}_{t+1}$, je-li dáno $\mathcal{F}_t$, je diagonální matice Σ, tedy

$$Cov(\boldsymbol{\epsilon}_{t+1}, \boldsymbol{\delta}_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = \Sigma.$$

Z těchto požadavků na inovace $(\boldsymbol{\delta}_t)_{t\in\mathfrak{T}}$ pro deflátor vyplývá, jak jsme již definovali v rovnici (2.21),

$$h(t, z) = \log \mathbb{E}[\exp\{\boldsymbol{\lambda}(t, z)\boldsymbol{\delta}_t\} \mid \mathcal{F}_{t-1}] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \lambda_i(t, z)^2 = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\lambda}(t, z)\|^2,$$

kde tržní cena za riziko je dána $\boldsymbol{\lambda}(t, z) = (\lambda_1(t, z), \ldots, \lambda_N(t, z))' \in \mathbb{R}^N$. Tržní cenu za riziko $\boldsymbol{\lambda}$ často volíme exogenně, abychom získali analyticky sledovatelné modely, a to podle obou pravděpodobnostních měr (reálné $\mathbb{P}$ i rizikově neutrální $\mathbb{P}^*$). V praxi tedy často volíme

$$\boldsymbol{\delta}_t = \boldsymbol{\epsilon}_t \qquad \text{(a stanovíme } \Sigma = \boldsymbol{I}\text{)}, \tag{3.5}$$

což využijeme i pro účely této práce. $\boldsymbol{I}$ značí jednotkovou matici, která má na diagonále jedničky a mimo ni pouze nuly. Zvolíme-li navíc tržní cenu rizika jako $\lambda(t, z) = \lambda_t z \equiv \lambda z$ pro nějaký parametr $\lambda \in \mathbb{R}$, získáme deflátor

$\boldsymbol{\varphi} \in L^1_{n+1}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ vyjádřený následovně (obdobně definováno již v rovnici (2.22))

$$\varphi_t = \exp\left\{-\sum_{s=1}^{t}\left[r_{s-1} + \frac{1}{2}\lambda^2 r_{s-1}^2\right] + \sum_{s=1}^{t}\lambda r_{s-1}\epsilon_s\right\}. \tag{3.6}$$

Máme tedy definovaný deflátor ve Vašíčkově modelu s diskrétním časem a nyní se podíváme ekvivalentní martingalovou míru a rozdělení spotových sazeb dle této míry.

Ekvivalentní martingalová míra

Radon-Nikodymova derivace pro ekvivalentní martingalovou míru $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$ je dána jako $\xi_n = \varphi_n B_n$, viz Tvrzení 2.4.1, kde náhodný proces $(\xi_t)_{t\in\mathfrak{T}}$ splňuje pro $t \in \mathfrak{T}$ následující rovnost, uvedenou již ve vzorci (2.23),

$$\xi_t = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{t}\|\boldsymbol{\lambda}(s, r_{s-1})\|^2 + \sum_{s=1}^{t}\boldsymbol{\lambda}(s, r_{s-1})\boldsymbol{\delta}_s\right\}. \tag{3.7}$$

Máme-li naší exogenní volbu tržní ceny rizika $\lambda(t, z) = \lambda_t z \equiv \lambda z$, můžeme přepsat rovnici 3.7 následovně:

$$\xi_t = \exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda^2\sum_{s=1}^{t} r_{s-1}^2 + \lambda\sum_{s=1}^{t} r_{s-1}\epsilon_s\right\}. \tag{3.8}$$

Z předchozích předpokladů získáme pro $t \in \mathfrak{T}_-$

$$\epsilon^*_{t+1} = \epsilon_{t+1} - \lambda r_t, \tag{3.9}$$

je-li dáno $\mathcal{F}_t$, se Standardním normálním rozdělením podle ekvivalentní martingalové míry $\mathbb{P}^*$. Navíc podle ekvivalentní martingalové míry $\mathbb{P}^*$ je náhodný proces spotových sazeb $(r_t)_{t\in\mathfrak{T}_-}$ pro $r_0 > 0$ (fixní) a pro $t = 1, \ldots, n-1$

$$r_t = b + (1-k)r_{t-1} + g\epsilon^*_t. \tag{3.10}$$

Stejně jako jsme v předchozí části práce odvodili rozdělení spotových sazeb za reálné pravděpodobnostní míry $\mathbb{P}$ v Tvrzení 3.1.1, tak nyní pro ekvivalentní martingalovou míru odvodíme odbdobné tvrzení:

Tvrzení 3.1.2. *Z předpokladů (3.9) a (3.10), podle ekvivalentní martingalové míry $\mathbb{P}^*$ získáváme model spotových sazeb $(r_t)_{t\in\mathfrak{T}_-}$ s podmíněným Normálním rozdělením. Pro parametr $k \neq 0, 2$ a čas $t > s$ máme*

$$r_t \mid \mathcal{F}_s \sim \mathcal{N}\left(\left(1-(1-k)^{t-s}\right)\frac{b}{k} + (1-k)^{t-s} r_s \quad , \quad g^2\frac{1-(1-k)^{2(t-s)}}{2k-k^2}\right). \tag{3.11}$$

Při exogenní volbě parametru tržní ceny rizika λz získáme Normálně rozdělené spotové sazby $(r_t)_{t\in\mathfrak{T}_-}$, a to jak podle reálné pravděpodobnostní míry $\mathbb{P}$ (odvozeno v Tvrzení 3.1.1) tak podle ekvivalentní martingalové míry $\mathbb{P}^*$ (odvozeno v Tvrzení 3.1.2).

Nyní vyjádříme náhodné procesy pro ceny ZCB, které lze také popsat pomocí afinních struktur, a využijeme je v numerické části této práce.

Věta 3.1.3. *Pro Vašíčkův model s diskrétním časem, kde máme tržní cenu rizika definovanou parametrem $\lambda \in \mathbb{R}$ a parametr $k \neq 0$ ($k\ in\mathbb{R}$), získáme následující model s afinní strukturou pro $t < m \leq n$*

$$P(t,m) = \exp\left\{A(t,m) - r_t B(t,m)\right\},$$

kde $A(m-1,m) = 0$ a $B(m-1,m) = 1$ a platí

$$\begin{aligned} A(t,m) &= A(t+1,m) - bB(t+1,m) + \frac{g^2}{2} B(t+1,m)^2 \\ &= -\frac{b}{k}\left[(m-t) - B(t,m)\right] + \frac{g^2}{2} \sum_{s=t+1}^{m-1} B(s,m)^2, \\ B(t,m) &= \frac{1}{k}\left[1 - (1-k)^{m-t}\right] \end{aligned} \tag{3.12}$$

pro $0 \leq t < m-1$.

Důkaz. Viz Wüthrich [9] Theorem 3.5. □

Jelikož spotové sazby r_t mají normální rozdělení, získáme logaritmicko-normální rozdělení ZCB cen $P(t,m)$. Poznamenejme, že $A(t,m)$ i $B(t,m)$ v podstatě závisí pouze na rozdílu $m-t$, takže bychom mohli psát $A(m-t)$ a $B(m-t)$.

3.2 Jednofaktorový Vašíčkův model s měsíčním krokem

V předchozí kapitole jsme předpokládali roční časový krok, ale často se hodí odhadovad parametry v modelu s měsíčními spotovými sazbami, kdy máme k dispozici více dat pro odhad parametrů, a přejít pak na roční, což uděláme i my v praktické části. Předpokládejme tedy nyní měsiční krok $\delta = 1/12$. Dynamika spotových sazeb je tedy $(r_{t_k})_{k\in\mathfrak{T}_-} = (R(t_k, t_{k+1}))_{k\in\mathfrak{T}_-}$ s $t_{k+1} - t_k = \delta$ a za reálné pravděpodobnostní míry $\mathbb{P}$ máme pro $r_0 > 0$ fixní a $k = 1, \ldots, n-1$

$$r_{t_k} = b_\delta + \beta_\delta r_{t_{k-1}} + g_\delta \varepsilon_{t_k}, \tag{3.13}$$

kde ε_{t_k} je $\mathcal{F}_{t_k}$-měřitelné, nezávislé na $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$ a má standardní normální rozdělení. Pro $\beta_\delta \neq 1$ a $t_t < t_l$ tedy platí

$$r_{t_l} \mid \mathcal{F}_{t_k} \sim N\left(\left(1 - \beta_\delta^{l-k}\right)\frac{b_\delta}{1-\beta_\delta} + \beta_\delta^{l-k} r_{t_k} \quad , \quad g_\delta^2 \frac{1-\beta_\delta^{2(l-k)}}{1-\beta_\delta^2}\right). \tag{3.14}$$

Předpokládáme $\beta_\delta > 0$. Analogicky k Větě 3.1.3 máme následující Větu pro ZCB ceny s měsíčním krokem.

Věta 3.2.1. *Pro Vašíčkův model s diskrétním časem, kde máme tržní cenu rizika $\lambda_\delta \in \mathbb{R}$ a $\beta_\delta + \lambda_\delta g_\delta \neq 1$, získáme následující model s afinní strukturou pro $t_k < t_K \leq t_n$*

$$P(t_k, t_K) = \exp\left\{A(t_k, t_K) - r_{t_k} B(t_k, t_K)\right\},$$

kde $A(t_{K-1}, t_K) = 0$ *a* $B(t_{K-1}, t_K) = \delta$ *a platí*

$$
\begin{aligned}
A(t_k, t_K) &= A(t_{k+1}, t_K) - b_\delta B(t_{k+1}, t_K) + \frac{g_\delta^2}{2} B(t_{k+1}, t_K)^2, \\
B(t_k, t_K) &= \frac{\delta}{1-(\beta_\delta + \lambda_\delta g_\delta)} \left[1 - (\beta_\delta + \lambda_\delta g_\delta)^{K-k}\right]
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

pro $0 \leq k < K - 1$.

Pokud odhadneme parametry modelu s využitím měsíčního kroku, lze je potom transformovat na roční, a to následujícím způsobem, kdy využijeme konzistence procesu spotových sazeb v čase. Díky vyjádření (3.14) můžeme spočítat rozdělení procesu ročních spotových sazeb z procesu měsíčních spotových sazeb. Zvolme $l = k+1/\delta = k+12$, potom pro $\beta_\delta \neq 1$ a podle reálné pravděpodobnoatní míry $\mathbb{P}$ máme

$$
r(t_{k+12}) \mid \sqcup_{\|} \sim N\left(\left(1-\beta_\delta^{12}\right)\frac{b_\delta}{1-\beta_\delta} + \beta_\delta^{12} r_{t_k} \quad , \quad g_\delta^2 \frac{1-\beta_\delta^{24}}{1-\beta_\delta^2}\right).
$$

Jestliže z měsíčních dat odhadneme parametry b_δ, β_δ a g_δ lze je potom následovně konvertovat, abychom získali parametry procesu ročních spotových sazeb

$$
\beta = \beta_\delta^{12}, \qquad \frac{b}{1-\beta} = \frac{b_\delta}{1-\beta_\delta} \qquad \text{a} \qquad g^2 = g_\delta^2 \frac{1-\beta_\delta^{24}}{1-\beta_\delta^2}. \tag{3.16}
$$

Je zachována konzistence procesu spotových sazeb v čase, tedy předpoklady Normálního rozdělení zajišťují, že se procesy spotových sazeb chovají stejně při různých velikostech kroku δ. Nevýhodou tohoto přístupu je, že ceny ZCB nejsou konzistentní v čase, tedy jednoleté ZCB mají rozdílné ceny pro roční krok a měsíční krok, což vede ke vzniku arbitráže, pokud bychom uvažovali oba modely najednou.

3.3 Odhad parametrů v jednofaktorovém Vašíčkově modelu

Pro použití v praxi je důležité znát parametry Vašíčkova modelu b, β, g a λ. Ty lze odhadnout několika možnými způsoby založenými na pozorovaných spotových sazbách nebo ZCB cenách. My v této kapitole popíšeme odhad metodou maximální věrohodnosti (MLE z anglického maximum likelihood estimate).

Uvažujme dynamiku spotových sazeb $(r_t)_{t\in\mathfrak{T}}$ podle reálné pravděpodobnostní míry $\mathbb{P}$. Vezmeme-li v úvahu pouze jedno období, platí podle Tvrzení 3.1.1 pro rozdělení spotové sazby $r_t \mid \mathcal{F}_{t-1} \sim \mathcal{N}(b + \beta r_{t-1}, g^2)$. Dlouhodobý průměr b^* definujeme jako

$$
b^* = \frac{b}{1-\beta}.
$$

Pokud přepíšeme rozdělení pomocí parametru b^* dlouhodobého průměru, pak dostáváme

$$
r_t \mid \mathcal{F}_{t-1} \sim \mathcal{N}\left((1-\beta)b^* + \beta r_{t-1}, g^2\right). \tag{3.17}
$$

Z toho plyne, že očekávaná hodnota r_t je váženým průměrem posledního pozorování r_{t-1} a dlouhodobého průměru b^* s váhou β.

Pozorované hodnoty spotových sazeb $(r_t)_{t\in\mathfrak{T}}$ označíme $r_{0:T} = \{r_0, \ldots, r_T\}$. Věrohodnostní funkce $l_{r_{0:T}}$ pro pozorování $r_{0:T}$, je-li dáno $\mathcal{F}_0$, je pak

$$l_{r_{0:T}}(\beta, b^*, g) \propto \sum_{t=1}^{T} \left(-\log g - \frac{1}{2g^2} \left(r_t - \beta r_{t-1} - b^*(1-\beta) \right)^2 \right),$$

kde $\propto$ znamená rovnost až na konstantu. Abychom maximalizovali předchozí věrohodnostní funkci pro parametry β, b^* a g, musíme vyřešit následující systém rovnic, čímž získáme maximálně věrohodné odhady

$$\frac{\partial l_{r_{0:T}}}{\partial \beta}(\beta, b^*, g) \overset{!}{=} 0, \qquad \frac{\partial l_{r_{0:T}}}{\partial b^*}(\beta, b^*, g) \overset{!}{=} 0 \qquad \text{a} \qquad \frac{\partial l_{r_{0:T}}}{\partial g}(\beta, b^*, g) \overset{!}{=} 0.$$

Máme tedy následující systém rovnic

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{T} (b^* - r_{t-1}) \left(r_t - \beta r_{t-1} - b^*(1-\beta) \right) &= 0, \\ \sum_{t=1}^{T} \left(r_t - \beta r_{t-1} - b^*(1-\beta) \right) &= 0, \\ -T + \frac{1}{g^2} \sum_{t=1}^{T} \left(r_t - \beta r_{t-1} - b^*(1-\beta) \right)^2 &= 0. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Řešením tohoto systému rovnic získáme maximálně věrohodné odhady. Výsledek zformulujeme v následujícím tvrzení:

Tvrzení 3.3.1. *Maximálně věrohodné odhady pro pozorování $r_{0:T} = \{r_0, \ldots, r_T\}$ ve Vašíčkově modelu s diskrétním časem, podle reálné pravděpodobnostní míry $\mathbb{P}$, jsou dány jako*

$$\begin{aligned} \widehat{\beta} &= \frac{T \sum_{t=1}^{T} r_t r_{t-1} - \sum_{t=1}^{T} r_t \sum_{t=1}^{T} r_{t-1}}{T \sum_{t=1}^{T} r_{t-1}^2 - \left(\sum_{t=1}^{T} r_{t-1} \right)^2}, \\ \widehat{b^*} &= \frac{1}{T(1-\widehat{\beta})} \sum_{t=1}^{T} (r_t - \widehat{\beta} r_{t-1}), \\ \widehat{g^2} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \left(r_t - \widehat{\beta} r_{t-1} - \widehat{b^*}(1-\widehat{\beta}) \right)^2. \end{aligned}$$

Důkaz. Pro dané β vychází odhady pro b^* a g^2 přímo z posledních dvou rovnic v (3.18), takže zbývá dokázat odhad pro β. Z druhé rovnice v (3.18) máme

$$\sum_{t=1}^{T} b^* \left(r_t - \beta r_{t-1} - b^*(1-\beta) \right) = 0.$$

Odtud vyplývá, že pro první rovnici v (3.18) musíme vyřešit

$$\sum_{t=1}^{T} r_{t-1} \left(r_t - \beta r_{t-1} - b^*(1-\beta) \right) = 0.$$

Nahrazením b^* jeho odhadem $\widehat{b^*} = \widehat{b^*}(\beta)$ získáme

$$\sum_{t=1}^{T} r_{t-1} \left(r_t - \beta r_{t-1} - \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} (r_t - \beta r_{t-1}) \right) = 0.$$

Vyřešení této rovnice získáme MLE pro β, čímž je trvzení dokázáno. □

Předchozí Tvrzení 3.3.1 poskytuje pro $k + \lambda g$ a parametr b následující maximálně věrohodné odhady

$$\widehat{k + \lambda g} = 1 - \widehat{\beta} \qquad \text{a} \qquad \widehat{b} = (1 - \widehat{\beta})\widehat{b^*}.$$

Pravděpodobnostní rozdělení $(r_t)_{t \in \mathfrak{T}_-}$ podle reálné míry $\mathbb{P}$ lze tedy nakalibrovat pomocí MLE. Parametr tržní ceny rizika λ nemůžeme ovšem získat z pozorování $r_{0:T} = \{r_0, \dots, r_T\}$. Abychom získali rozdělení $(r_t)_{t \in \mathfrak{T}_-}$ podle ekvivalentní martingalové míry $\mathbb{P}^*$ a ceny ZCB, musíme nakalibrovat k, g a b. Parametry b a g jsme již odhadli výše, avšak pro odhad k potřebujeme znát parametr tržní ceny rizika λ. Ke kalibrování λ lze přistoupit různými způsoby. My se pokusíme fitovat na skutečnou křivku forwardových sazeb. Uvažujme, že pro parametr k (jako funkci λ) platí

$$k = k(\lambda) = 1 - \beta - \lambda g.$$

S vyzužitím jedno-faktorového Vašíčkova modelu s diskrétním časem potom oceníme ZCB v čase $T < m \leq n$ $P(T, m, r_T)(\lambda)$ jako funkci λ pomocí následujících vzorců, které vycházejí z Věty 3.1.3,

$$P(T, m, r_T)(\lambda) = \exp \left\{ A(T, m, \lambda) - r_T B(T, m, \lambda) \right\},$$

s $A(m-1, m, \lambda) = 0$ a pro $0 \leq t < m - 1$

$$\begin{aligned} A(t, m, \lambda) &= A(t+1, m, \lambda) - bB(t+1, m, \lambda) + \frac{g^2}{2} B(t+1, m, \lambda)^2, \\ B(t, m, \lambda) &= \frac{1}{k(\lambda)} \left[1 - (1 - k(\lambda))^{m-t} \right]. \end{aligned}$$

Tyto hodnoty srovnáme s reálnými tržními forwardovými sazbami v čase T, které označíme $F_M(T, m)$. Zvolíme λ takové, aby forwardové úrokové sazby $F(T, m, r_T)(\lambda)$ z Vašíčkova modelu cen $P(T, m, r_T)(\lambda)$ seděly na reálnou tržní křivku $F_M(T, m)$ co nejpřesněji, tedy vzhledem k metodě nejmenších čtverců.

Poznámka 3.3.2. *Parametry volatility g a g^* jsou shodné podle reálné pravděpodobnostní míry $\mathbb{P}$ i ekvivalentní martingalové míry $\mathbb{P}^*$. To nám umožnuje provádět jejich odhady na základě historických pozorování $r_{0:T} = \{r_0, \dots, r_T\}$ podle $\mathbb{P}$. Proto o MLE $\widehat{g}$ mluvíme jako o „historickém odhadu volatility“. Alternativním přístupem k odhadu parametru volatility je vycházet z aktuálních tržních cen derivátů se ZCB jako podkladovým aktivem. Například Evropská call opce má parametr volatility g jako vstup do výpočtu své ceny. Můžeme se tedy podívat na aktuální tržní ceny Evropských call opcí na ZCB a z nich vyčíst g, protože bylo použito jako vstup pro výpočet jejich ceny. Tomuto postupu se říká „odhad implikované volatility“, protože ji implikují aktuální tržní ceny.*

V této kapitole jsme se věnovali konkrétnímu modelu pro spotové sazby a deflátor, a to Vašíčkovu modelu s diskrétním časem. Také jsme si ukázali jaký je vztah mezi spotovými sazby a modely cen ZCB. V druhé části kapitoly jsme uvedli jak parametry Vašíčkova modelu odhadnout. V další kapitole přejdeme k definici modelu finančního trhu, na kterém se budou vyskytovat aktiva, kterými budeme později replikovat pojistné závazky. Ukážeme jak pomocí Vašíčkova modelu z této kapitoly ocenit cash flow aktiv a také finanční derivaty, které jsou od aktiv odvozené.

4. Oceňování finančních aktiv

Hlavním cílem této práce je modelovat a oceňovat položky rozvahy (na straně aktiv i na straně závazků) ekonomicky a tržně konzistentně. Pro některé položky jsme schopni rovnou určit jejich tržní cenu (je dostupná na trhu), takže se již jen snažíme tuto cenu modelovat do budoucnosti. Pro jiné položky tržní hodnoty nemáme a musíme použít marked-to-model metody, abychom získali tržně konzistentní hodnoty v současnosti a potom ještě navíc modelujeme jejich vývoj v budoucnosti. V této kapitole se budeme krátce věnovat ocenění levé části rozvahy (aktivům), protože tyto finanční modely využijeme dále v práci při oceňování závazků pomocí oceňovacího portfolia. Pokud zde mluvíme o finančních aktivech, máme na mysli aktiva, u kterých lze identifikovat jejich cash flow, což nám umožňuje využít v práci definované ocenění pomocí deflátorů. Všechny takto specifikované finanční instrumenty, kterými se budeme zabývat, mají společné to, že jejich náhodné procesy by měly být konzistentní pro pevně daný deflátor $\boldsymbol{\varphi}$, což uvádíme v Definici 4.1.1. Znamená to tedy, že pracujeme za předpokladu neexistence arbitráže uvedené v Poznámce 2.4.7 k základní větě oceňování aktiv.

Při modelování deflátoru budeme pracovat s jednofaktorovým Vašíčkovým modelem s diskrétním časem, který jsme si představili včetně odvození odhadu parametrů v předchozí kapitole. V praxi modelujeme deflátory většinou jiným způseb (například Heath-Jarrow-Morton framework nebo vícefaktorový Vašíčkův model) a jednofaktorový Vašíčkův model není vhodnou volbou, protože nepopisuje data dostatečně přesně. Problémem u složitějších modelů je, že mají pouze numerické nebo na simulacích založené řešení, takže pro odvození teorie je vhodnější jednofaktorový Vašíčkův model s diskrétním časem, kterého se držíme v této práci.

4.1 Model finančního trhu

Doposud jsme se bavili o konzistentních náhodných procesech $(Q_t[\boldsymbol{X}])_{t\in\mathfrak{T}}$ pro cash flow $\boldsymbol{X} \in \mathcal{L}_{\boldsymbol{\varphi}}$ a daný deflátor $\boldsymbol{\varphi}$. Nyní zavedeme **finanční trh** $\mathcal{I}$, který se skládá z bazických finančních instrumentů $\mathcal{U}^{(i)}$, $i \in \mathcal{I}$. Těmito bazickými finančními instrumenty mohou být jakákoli obchodovaná aktiva jako akcie, dluhopisy, atd. $\mathbb{F}$-adaptovaný náhodný proces cen bazických finančních instrumentů $\mathcal{U}^{(i)}$ označíme $(A_t^{(i)})_{t\in\mathfrak{T}}$. Při oceňování obvykle začínáme popisem náhodných procesů $(A_t^{(i)})_{t\in\mathfrak{T}}$ pro obchodované finanční instrumenty $\mathcal{U}^{(i)}$. Na základě těchto procesů sestavíme deflátor tak, abychom získali konzistentní systém pro oceňování.

Budeme pracovat za předpokladu neexistence arbitráže, k čemuž lze přistupovat dvěma rozdílnými způsoby.

V prvním přístupu nejprve stochasticky popíšeme náhodné procesy $(A_t^{(i)})_{t\in\mathfrak{T}}$ bazických finančních instrumentů $\mathcal{U}^{(i)}$, $i \in \mathcal{I}$. Za použití náhodných procesů sestrojíme deflátory $\boldsymbol{\varphi}$, tak aby diskontované náhodné procesy byly $(\mathbb{P}, \mathbb{F})$-martingaly (obecně je takových deflátorů nekonečně mnoho). Nakonec zvolíme jeden z deflátorů $\boldsymbol{\varphi}$ a oceníme všechna „ocenitelná“ cash flow $\boldsymbol{X} \in \mathcal{L}_{\boldsymbol{\varphi}}$, čímž máme konzistentní systém oceňování vzhledem k $\boldsymbol{\varphi}$.

Druhým přístupem je jít z opačné strany, kdy předpokládáme, že máme dán deflátor $\boldsymbol{\varphi}$ a integrovatelné konečné hodnoty $A_n^{(i)}$ bazických finančních instrumentů $\mathcal{U}^{(i)}$, $i \in \mathcal{I}$. Prodejem těchto bazických finančních instrumentů v konečném čase n získáme cash flow $\boldsymbol{X}^{(i)} = (0, \ldots, 0, A_n^{(i)})$. Náš oceňovací rámec potom přináší náhodné procesy $(A_t^{(i)})_{t \in \mathfrak{T}} = (Q_t[\boldsymbol{X}^{(i)}])_{t \in \mathfrak{T}}$, které jsou konzistentní vzhledem k $\boldsymbol{\varphi}$.

V obou přístupech získáme $\boldsymbol{\varphi}$-konzistentní systém oceňování, což zformulujeme v následující definici.

Definice 4.1.1. *Zvolme deflátor* $\boldsymbol{\varphi} \in L^1_{n+1}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$. *Náhodný proces* $(A_t^{(i)})_{t \in \mathfrak{T}} \in L^1_{n+1}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ *se nazývá konzistentní vzhledem k* $\boldsymbol{\varphi}$ *(nebo také* $\boldsymbol{\varphi}$*-konzistentní), jestliže* $(\varphi_t A_t^{(i)})_{t \in \mathfrak{T}}$ *je* $(\mathbb{P}, \mathbb{F})$*-martingal.*

Předpokládejme, že máme dán fixní deflátor $\boldsymbol{\varphi} \in L^1_{n+1}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$. Potom obecně předpokládáme, že všechny bazické finanční instrumenty $\mathcal{U}^{(i)}$, $i \in \mathcal{I}$, mají konzistentní procesy cen vzhledem k $\boldsymbol{\varphi}$. To znamená, že pro všechna $i \in \mathcal{I}$ a $t \in \mathfrak{T}_-$ požadujeme martingalovou vlastnost

$$\mathbb{E}\left[\varphi_{t+1} A_{t+1}^{(i)} \mid \mathcal{F}_t\right] = \varphi_t A_t^{(i)},$$

pro daný deflátor $\boldsymbol{\varphi}$, filtraci $\mathbb{F}$ a reálnou pravděpodobnostní míru $\mathbb{P}$. Máme tedy bezarbitrážní systém oceňování pro finanční trh $\mathcal{I}$, který lze rozšířit pro všechna ocenitelná cash flow $\boldsymbol{X} \in \mathcal{L}_{\boldsymbol{\varphi}}$.

4.2 Ocenění cash flow Vašíčkovým modelem

Předpokládejme pevně zvolený deflátor $\boldsymbol{\varphi} \in L^1_{n+1}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$. Máme-li dán deflátor, můžeme ocenit všechna cash flow $\boldsymbol{X} \in \mathcal{L}_{\boldsymbol{\varphi}}$ v jakémkoli čase t, a to podle Definice 2.2.6. Výsledná struktura ocenění je konzistentní vzhledem k $\boldsymbol{\varphi}$.

Ocenění cash flow založíme na jedno-faktorovém Vašíčkově modelu spotových sazeb s diskrétním časem, takže předpokládáme, že pro deflátor $\boldsymbol{\varphi}$ v čase $t \in \mathfrak{T}$ platí

$$\varphi_t = \exp\left\{\sum_{s=1}^{t}\left[r_{s-1} + \frac{1}{2}\lambda^2 r_{s-1}^2\right] + \sum_{s=1}^{t} \lambda r_{s-1}\epsilon_s\right\},$$

viz rovnice (3.6). Proces spotových sazeb $(r_t)_{t \in \mathfrak{T}_-}$ za reálné pravděpodobnostní míry $\mathbb{P}$ je pro $r_0 > 0$ fixní a pro $t = 1, \ldots, n-1$ dán jako

$$r_t = b + \beta r_{t-1} + g\epsilon_t = b + (1 - (k + \lambda g))\, r_{t-1} + g\epsilon_t,$$

pro $\mathbb{F}$-adaptovaný náhodný proces $(\epsilon_t)_{t \in \mathfrak{T}}$ takový, že ϵ_{t+1} je nezávislé na $\mathcal{F}_t$ a se Standardnním normálním rozdělením podle $\mathbb{P}$ pro všechna $t \in \mathfrak{T}_-$. Cena ZCB $P(t, m)$ s maturitou $m \leq n$ v čase $t < m$ má afinní časovou strukturu, tedy

$$P(t, m) = \exp\{A(t, m) - r_t B(t, m)\},$$

viz Věta 3.1.3.

Budeme předpokládat, že $\mathbb{F}$-adaptované náhodné procesy cen bazických finančních instrumentů $\mathcal{U}^{(i)}$, $i \in \mathcal{I}$, mají exponenciální růst, takže pro $A_0^{(i)}$ fixní a pro $t \in \mathfrak{T}_-$ platí

$$A_{t+1}^{(i)} = A_t^{(i)} \exp\left\{a_{t+1}^{(i)} - \sigma^{(i)}\delta_{t+1}^{(i)},\right\} \tag{4.1}$$

kde $(\delta_t^{(i)})_{t\in\mathfrak{T}}$ je $\mathbb{F}$-adaptovaný proces takový, že $\delta_{t+1}^{(i)}$ je nezávislé na $\mathcal{F}_t$ a $(\varepsilon_{t+1}, \delta_{t+1}^{(i)})$ má dvourozměrné standardní normální rozdělení s kovariancí $Cov(\varepsilon_{t+1}, \delta_{t+1}^{(i)} \mid \mathcal{F}_t) = c^{(i)} \in (-1, 1)$ podle $\mathbb{P}$ pro $t \in \mathfrak{T}_-$. Navíc předpokládáme, že $a_{t+1}^{(i)}$ je $\mathcal{F}_t$-měřitelné pro všechna $t \in \mathfrak{T}_-$, tedy předvídatelné. Z podmínky konzistence vyplývá tvar předvídatelného driftu $a_{t+1}^{(i)}$, což vyjádříme v následujícím tvrzení.

Věta 4.2.1. *Předpokládejme, že $\boldsymbol{\varphi}$ je deflátor z jednofaktorového Vašíčkova modelu s diskrétním časem a že náhodný proces $(A_t^{(i)})_{t\in\mathfrak{T}}$ je vyjádřen pomocí rovnosti (4.1) s inovacemi $(\delta_t^{(i)})_{t\in\mathfrak{T}}$, které mají standardní normální rozdělení. Z konzistence vzhledem k $\boldsymbol{\varphi}$ vyplývá následující struktura pro náhodné procesy cen*

$$A_{t+1}^{(i)} = A_t^{(i)} \exp\left\{(1 + \lambda\sigma^{(i)}c^{(i)})r_t - \frac{1}{2}(\sigma^{(i)})^2 - \sigma^{(i)}\delta_{t+1}^{(i)}\right\}, \tag{4.2}$$

pro $t \in \mathfrak{T}_-$.

Důkaz. Viz Wüthrich [9] Proposition 5.5. □

Vidíme, že předvídatelný drift $a_{t+1}^{(i)}$ musí mít specifickou formu, aby pomocí deflátorů diskontovaný náhodný proces $(\varphi_t A_t^{(i)})_{t\in\mathfrak{T}}$ byl $(\mathbb{P}, \mathbb{F})$-martingal. Očekávaná ($\boldsymbol{\varphi}$ konzistentní) cena v čase $t+1$ je v čase t rovna

$$\mathbb{E}\left[A_{t+1}^{(i)} \mid \mathcal{F}_t\right] = \exp\left\{(1 + \lambda\sigma^{(i)}c^{(i)})r_t\right\} A_t^{(i)}.$$

4.3 Ocenění finančních derivátů

Díky vzorci pro ocenění ZCB z Věty 3.1.3 a vzorci pro ostatní finanční instrumenty z Věty 4.2.1 jsme schopni ocenit také finanční deriváty. Deriváty jsou finanční instrumenty, jejichž hodnoty jsou odvozeny od cen jednoho nebo více podkladových aktiv. My si ukážeme ceny Evropských put a call opcí se ZCB jako podkladovým aktivem a také pokladovým aktivem, které má procesy cen definované pomocí exponenciálního růstu (viz Věta 4.2.1), a to v jednofaktorovém Vašíčkově modelu s diskrétním časem.

Evropská put opce na bazický finanční instrument $\mathcal{U} = \mathcal{U}^{(i)}$, $i \in \mathcal{I}$, je smlouva, která umožňuje prodat podkladový instrument $\mathcal{U}$ v čase splatnosti $T \in \mathfrak{T}$ za konkrétní realizační cenu K. Cenu této Evropské put opce v čase $t \leq T$ označíme $Put_t(\mathcal{U}, K, T)$ a cenu Evropské call opce (která dává právo koupit ve splatnosti T za realizační cenu K) jako $Call_t(\mathcal{U}, T, K)$.

Jelikož náhodné procesy pro cash flow a bazické finanční instrumenty musejí být konzistentní vzhledem ke zvolenému deflátoru $\boldsymbol{\varphi}$, získáváme následující vzorec pro ocenění Evropské put opce

$$Put_t(\mathcal{U}, K, T) = \frac{1}{\varphi_t}\mathbb{E}\left[\varphi_T(K - A_T)_+ \mid \mathcal{F}_t\right],$$

kde A_T je cena podkladového aktiva $\mathcal{U}$ v čase T. Ekvivalentně můžeme pro odpovídající diskont bankovního účtu $(B_t)_{t\in\mathfrak{T}}$ a podle ekvivalentní martingalové míry $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$ cenu put opce vyjádřit jako

$$Put_t(\mathcal{U}, K, T) = \frac{1}{B_t^{-1}}\mathbb{E}^*\left[B_T^{-1}(K - A_T)_+ \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Cena Evropské call opce v čase $t \leq T$ je

$$Call_t(\mathcal{U}, K, T) = \frac{1}{\varphi_t}\mathbb{E}\left[\varphi_T(A_T - K)_+ \mid \mathcal{F}_t\right] = \frac{1}{B_t^{-1}}\mathbb{E}^*\left[B_T^{-1}(A_T - K)_+ \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Užitečným tvrzením je tzv. put-call parita, která dává jednoduchý vztah pro výpočty cen opcí nezávislý na předpokladech o rozdělení pravděpodobností.

Tvrzení 4.3.1. *Předpokládejme, že všechny náhodné procesy cen jsou $\boldsymbol{\varphi}$-konzistentní. Pro $t \leq T$ platí*

$$Call_t(\mathcal{U}, K, T) - Put_t(\mathcal{U}, K, T) = A_t K P(t, T),$$

kde A_t je cena bazického finančního instrumentu $\mathcal{U}$ v čase t a $P(t, T)$ je cena ZCB se splatností T v čase $t \leq T$.

Důkaz. Platí $(A_T - K)_+ - (K - A_T)_+ = A_T - K$, z čehož vyplývá

$$\begin{aligned} &Call_t(\mathcal{U}, K, T) - Put_t(\mathcal{U}, K, T) \\ &\quad = \frac{1}{B_t^{-1}}\mathbb{E}^*\left[B_T^{-1}(A_T - K)_+ \mid \mathcal{F}_t\right] - \frac{1}{B_t^{-1}}\mathbb{E}^*\left[B_T^{-1}(K - A_T)_+ \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &\quad = \frac{1}{B_t^{-1}}\mathbb{E}^*\left[B_T^{-1}A_T \mid \mathcal{F}_t\right] - \frac{1}{B_t^{-1}}\mathbb{E}^*\left[B_T^{-1}K \mid \mathcal{F}_t\right] = A_t - KP(t, T). \end{aligned}$$

Čímž je tvrzení dokázáno. $\square$

Nejprve vyjádříme ceny Evropských opcí na ZCB $\mathcal{Z}^{(m)}$ se splatností ZCB $m \leq n$ a splatností opce $T < m$. Definujeme

$$(\sigma_{T|t}^{\mathcal{Z}^{(m)}})^2 = g^2\frac{1 - (\beta + \lambda g)^{2(T-t)}}{1 - (\beta + \lambda g)^2}B(T, m)^2$$

a uvedeme následující tvrzení.

Věta 4.3.2. *Zvolme diskrétní jednofaktorový Vašíčkův model. $\boldsymbol{\varphi}$-konzistentní cena Evropské call opce v čase $t < T < m \leq n$ se ZCB jako podkladovým aktivem je*

$$Call_t(\mathcal{Z}^{(m)}, K, T) = P(t, m)\phi(d_1) - P(t, T)K\phi(d_1 - \sigma_{T|t}^{\mathcal{Z}^{(m)}}),$$

se standardním normálním rozdělením $\phi(\cdot)$ a

$$d_1 = d_1(m, T, K, t, r_t) = -\frac{1}{\sigma_{T|t}^{\mathcal{Z}^{(m)}}}\log\left(\frac{P(t, T)K}{P(t, m)}\right) + \frac{1}{2}\sigma_{T|t}^{\mathcal{Z}^{(m)}}.$$

$\boldsymbol{\varphi}$-konzistentní cena Evropské put opce je

$$Put_t(\mathcal{Z}^{(m)}, K, T) = P(t, T)K\phi(-d_1 + \sigma_{T|t}^{\mathcal{Z}^{(m)}}) - P(t, m)\phi(-d_1).$$

Důkaz. Viz Wüthrich [9] Theorem 5.12. □

Předchozí Tvrzení lze použít k tzv. odhadu implikované volatility, jestliže se podíváme na současné tržní hodnoty Evropských call/put opcí. Obdobně k ceně Evropských opcí na ZCB můžeme spočítat cenu Evropských opcí na jakékoli jiné náhodné procesy cen $(A_t^{(i)})_{t\in\mathfrak{T}}$, $i \in \mathcal{I}$. Předpokládejme, že bazický finanční instrument $\mathcal{U}^{(i)}$ má striktně pozitivní náhodný proces cen pro fixní $A_0^{(i)} > 0$, s exponenciálním růstem vyjádřeným vzorcem (4.2) a Vašíčkovým finančním modelem. Definujeme

$$(\sigma_{T|t}^{\mathcal{U}^{(i)}})^2 = g^2 \sum_{s=t+1}^{T-1} B(s,T)^2 - 2g\sigma^{(i)}c^{(i)} \sum_{s=t+1}^{T-1} B(s,T) + (T-t)\left(\sigma^{(i)}\right)^2.$$

Věta 4.3.3. *Předpokládejme diskrétní jednofaktorový Vašíčkův model a pro bazický finanční instrument $\mathcal{U}^{(i)}$ striktně pozitivní proces cen s fixním $A_0^{(i)} > 0$ a exponenciálním růstem vyjásřeným vzorcem (4.2). $\boldsymbol{\varphi}$-konzistentní cena Evropské call opce v čase je*

$$Call_t(\mathcal{U}^{(i)}, K, T) = A_t^{(i)}\phi(d_1) - P(t,T)K\phi(d_1 - \sigma_{T|t}^{\mathcal{U}^{(i)}}),$$

kde

$$d_1 = -\frac{1}{\sigma_{T|t}^{\mathcal{U}^{(i)}}} \log\left(\frac{P(t,T)K}{A_t^{(i)}}\right) + \frac{1}{2}\sigma_{T|t}^{\mathcal{U}^{(i)}}.$$

$\boldsymbol{\varphi}$-konzistentní cena Evropské put opce je

$$Put_t(\mathcal{U}^{(i)}, K, T) = P(t,T)K\phi(-d_1 + \sigma_{T|t}^{\mathcal{U}^{(i)}}) - A_t^{(i)}\phi(-d_1).$$

Důkaz. Viz Wüthrich [9] Theorem 5.13. □

Tyto vzorce pro Evropskou opci využijeme v praktické části při ocenění garantovaného zhodnocení u pojistného produktu.

5. Aktuárské a finanční modelování

5.1 Finanční trh a finanční filtrace

Zvolme pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ a deflátor $\boldsymbol{\varphi} \in L^1_{n+1}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$. S tímto pevně daným deflátorem budeme pracovat. Cílem této kapitoly je analyzovat filtraci $\mathbb{F}$ a deflátor $\boldsymbol{\varphi}$. Oba pojmy rozdělíme na finanční část a pojistně technickou část. Finanční část bude modelovat ekonomické a finanční informace, které jsou veřejně přístupné, jako například ceny dluhopisů, akcii, inflace, atd. Pojistně technická část bude modelovat proměnné vázané na pojistné závazky a pojistně technický tok informací, kam patří předpoklady o úmrtnosti, stornovosti, atd.

Model finančního trhu

Nejprve si popíšeme model finančního trhu, který jsme definovali již v předchozí kapitole, a jeho předpokládané vlastnosti. Nechť $\mathcal{I}$ popisuje finanční trh všech bazických finanční instrumentů $\mathcal{U}^{(i)}$, $i \in \mathcal{I}$. Předpokládáme, že tyto bazické finanční instrumenty $\mathcal{U}^{(i)}$ mají integrovatelné $\boldsymbol{\varphi}$-konzistentní náhodné procesy, které budeme značit $(A_t^{(i)})_{t \in \mathfrak{T}}$, takže splňují předpoklady Definice 4.1.1 pro daný deflátor $\boldsymbol{\varphi} \in L^1_{n+1}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$. Uveďmě ještě tři důležité předpoklady:

- Finanční trh $\mathcal{I}$ popisuje dostupné bazické finanční instrumenty. Tyto instrumenty se používají k popsání zajistitelné části cash flow z pojistných závazků.
- Předpokládáme, že finanční trh $\mathcal{I}$ je dostatečně pestrý a obsahuje alespoň včechny ZCB $\mathcal{Z}^{(m)}$ s maturitami $m \in \mathfrak{T}$ (a tedy i numeraire bankovního účtu $\mathcal{B}$).
- Předpokládáme, že náhodné procesy všech bazických finančních instrumentů jsou $\boldsymbol{\varphi}$-konzistentní. Této $\boldsymbol{\varphi}$-konzistence lze dosáhnout různými způsoby, ale měla by odrážet tvorbu cen na finančním trhu $\mathcal{I}$.

Poznámka k likviditě

Ve finanční praxi a v pojišťovnictví by měla mít aktiva, použitá k replikaci pojistných závazků, spolehlivé tržní hodnoty. Měla by se tedy obchodovat na aktivních finančních trzích. To znamená, že trh s přípustnými finančními instrumenty by měl splňovat požadavky na rozvinutost, likviditu a transparentnost.

Během finanční krize v letech 2008-2011 se mezi aktuáry hodně diskutovalo o aspektu likvidity na finančních trzích. Například ceny dvou různých korporátních dluhopisů, které mají stejné marginální rozdělení kreditního rizika, se mohou výrazně lišit, protože jeden se obchoduje na úplném a likvidním trhu zatímco ten druhý je nelikvidní. Lze potom říci, že cena druhého obsahuje přirážku (spread) za likviditu. V současnosti většinou nerozlišujeme jednotlivé prvky spreadů (kreditní, likvidní a další rizika). Budeme předpokládat, že tyto rizikové faktory jsou správně zahrnuty v deflátoru $\boldsymbol{\varphi}$ a ceny odpovídají rovnováze mezi nabídkou a poptávkou pro dané aktivum.

Je nutné zdůraznit, že mohou existovat dluhopisy s nenulovou pravděpodobností selhání, které mají stejný rizikový profil. Tyto dluhopisy mají tedy stejné marginální rozdělení selhání podle reálné pravděpodobnostní míry, ale jejich tržní ceny se liší. V budoucnosti se ovšem nemohou chovat identicky (mají pouze stejné marginální rozdělení), protože jinak by to odporovalo zákonu jedné ceny, což by znamenalo vznik arbitráže.

My v této práci předpokládáme model finančního trhu bez arbitráže.

Finanční filtrace

Abychom popsali finanční informace na trhu, předpokládáme, že existuje druhá filtrace $\mathbb{A} = (\mathcal{A}_t)_{t\in\mathfrak{T}}$ na filtrovaném pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ s $\mathcal{A}_t \subset \mathcal{F}_t$ pro všechna $t \in \mathfrak{T}$. Filtrace $\mathbb{A}$ obsahuje ekonomické a finanční informace na trhu. Předpokládáme tedy, že náhodný proces $(A_t^{(i)})_{t\in\mathfrak{T}}$ je $\mathbb{A}$-adaptovaný pro všechny bazické finanční instrumenty $\mathcal{U}^{(i)}$, $i \in \mathcal{I}$. Z toho výplývá, že

$$\mathcal{A}_t^{(\mathcal{I})} = \sigma\{A_s^{(i)}; s \leq t, i \in \mathcal{I}\} \subset \mathcal{A}_t.$$

Pokud máme $\mathcal{A}_t^{(\mathcal{I})} = \mathcal{A}_t$, potom bazické finanční instrumenty $\mathcal{U}_i$ popisují celý tok ekonomických a finančních informací na trhu. Tuto rovnost ovšem nemusíme nutně předpokládat, protože mohou existovat dodatečné ekonomické informace, které nejsou přímo odraženy na finančním trhu $\mathcal{I}$.

5.2 Základní aktuárský model

Předpokládejme, že můžeme rozdělit finanční filtraci $\mathbb{A}$ a pojistně technickou filtraci $\mathbb{T}$ tak, aby byly nezávislé. Tohle nezávislé rozdělení má tu výhodu, že můžeme studovat finanční proměnné a pojistně technické proměnné odděleně, takže dále v práci je potom modelujeme zvlášť.

Předpoklad 5.2.1. *Předpokládejme, že máme tři filtrace* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathfrak{T}}$, $\mathbb{A} = (\mathcal{A}_t)_{t\in\mathfrak{T}}$ *a* $\mathbb{T} = (\mathcal{T}_t)_{t\in\mathfrak{T}}$ *na daném pravděpodobnostním prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *s* $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ *a*

1. $\mathcal{F}_t$ *je generováno* $\mathcal{A}_t$ *a* $\mathcal{T}_t$ *pro všechna* t
2. $\mathbb{A}$ *a* $\mathbb{T}$ *jsou nezávislé vzhledem k pravděpodobnostní míře* $\mathbb{P}$.

Filtrace $\mathbb{A}$ modeluje finanční jevy a filtrace $\mathbb{T}$ modeluje pojistně technické jevy. Platí $\mathcal{A}_t, \mathcal{T}_t \subset \mathcal{F}_t$ pro všechna $t \in \mathfrak{T}$, takže jsou finanční informace a pojistně technické informace pozorovatelné v čase t vzhledem k $\mathcal{F}_t$. Z výše uvedeného Předpokladu 5.2.1 vyplývá, že se finanční a pojistně technické proměnné vyvíjejí v čase nezávisle na sobě.

Pro výpočty náhodných procesů cash flow $\boldsymbol{X} \in \mathcal{L}_{\boldsymbol{\varphi}}$ zavedeme součinovou strukturu pro daný deflátor $\boldsymbol{\varphi}$ a cash flow $\boldsymbol{X}$. Prvním krokem je rozdělení deflátoru $\boldsymbol{\varphi} \in L^1_{n+1}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ na finanční deflátor (financial deflator) $\boldsymbol{\varphi}^A$ a pojistně technický deflátor (probability distortion) $\boldsymbol{\varphi}^T$.

Předpokládejme pro tyto deflátory nasledující tři vlastnosti:

1. Deflátor $\boldsymbol{\varphi}$ by měl mít součinovou strukturu, tedy pro všechna $t \in \mathfrak{T}$ platí
$$\varphi_t = \varphi_t^A \varphi_t^T.$$
2. Finanční deflátor $\boldsymbol{\varphi}^A = (\varphi_t^A)_{t\in\mathfrak{T}}$ by měl být $\mathbb{A}$-adaptovaný.
3. Pojistně technický deflátor $\boldsymbol{\varphi}^T = (\varphi_t^T)_{t\in\mathfrak{T}}$ by měl být $\mathbb{T}$-adaptovaný a normalizovaný $(\mathbb{P}, \mathbb{T})$-martingal.

Součinová struktura nám usnadňuje výpočty. Deflátor $\boldsymbol{\varphi}^A$ by měl vysvětlovat tvorbu cen na finančním trhu a $\boldsymbol{\varphi}^T$ by měl být náhodný proces, který poskytuje rizikovou přirážku za nezajistitelná pojistně technická rizika. Z předchozích tří vlastností a Předpokladu 5.2.1 lze očekávanou hodnotu deflátoru přepsat jako finanční deflátor v čase t:
$$\mathbb{E}[\varphi_t \mid \mathcal{A}_t] = \mathbb{E}[\varphi_t^A \varphi_t^T \mid \mathcal{A}_t] = \varphi_t^A \mathbb{E}[\varphi_t^T \mid \mathcal{A}_t] = \varphi_t^A \mathbb{E}[\varphi_t^T] = \varphi_t^A.$$
Tedy při oceňování podle finanční filtrace $\mathbb{A}$ je releventní pouze finanční deflátor $\boldsymbol{\varphi}^A$ z deflátoru $\boldsymbol{\varphi}$. Pokud navíc předpokládáme, že $\boldsymbol{\varphi}$-konzistentní náhodný proces $(A_t^{(i)})_{t\in\mathfrak{T}}$ bazických finančních instrumentů $\mathcal{U}^{(i)}$ je $\mathbb{A}$-adaptovaný, získáme
$$\begin{aligned}\varphi_t A_t^{(i)} &= \mathbb{E}[\varphi_{t+1} A_{t+1}^{(i)} \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\varphi_{t+1}^T \varphi_{t+1}^A A_{t+1}^{(i)} \mid \mathcal{T}_t, \mathcal{A}_t] \\ &= \mathbb{E}[\varphi_{t+1}^T \mid \mathcal{T}_t] \mathbb{E}[\varphi_{t+1}^A A_{t+1}^{(i)} \mid \mathcal{A}_t] = \varphi_t^T \mathbb{E}[\varphi_{t+1}^A A_{t+1}^{(i)} \mid \mathcal{A}_t].\end{aligned}$$
Z Předpokladu 5.2.1 a tří výše předpokládaných vlastností máme $\boldsymbol{\varphi}$-konzistentní a $\mathbb{A}$-adaptované náhodné procesy $(A_t^{(i)})_{t\in\mathfrak{T}}$, pro které platí následující vztah
$$A_t^{(i)} = \frac{1}{\varphi_t^A} \mathbb{E}[\varphi_{t+1}^A A_{t+1}^{(i)} \mid \mathcal{A}_t]. \tag{5.1}$$
To nám říká, že finanční trh $\mathcal{I}$ je charakterizován filtrovaným pravděpodobnostním prostorem $(\Omega, \mathcal{A}_n, \mathbb{P}, \mathbb{A})$ s $\boldsymbol{\varphi}^A$-konzistentními náhodnými procesy.

Předchozí odvození shrneme v následujícím předpokladu.

Předpoklad 5.2.2. *Tři filtrace $\mathbb{F}$, $\mathbb{A}$ a $\mathbb{T}$ splňují předpoklad 5.2.1. Daný deflátor $\boldsymbol{\varphi} \in L^1_{n+1}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ má součinovou strukturu s $\mathbb{A}$-adaptovaným finančním deflátorem $\boldsymbol{\varphi}^A$ a $\mathbb{T}$-adaptovaným pojistně technickým deflátorem $\boldsymbol{\varphi}^T$, který je normalizovaný $(\mathbb{P}, \mathbb{T})$-martingal. Náhodné procesy $(A_t^{(i)})_{t\in\mathfrak{T}}$ všech bazických finančních instrumentů $\mathcal{U}^{(i)}$, $i \in \mathcal{I}$, jsou $\mathbb{A}$-adaptované, integrovatelné a $\boldsymbol{\varphi}$-konzistentní.*

Na pojistně technický deflátor $(\varphi_t^T)_{t\in\mathfrak{T}}$ lze nahlížet jako na proces hustot na filtrovaném pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{T}_n, \mathbb{P}, \mathbb{T})$, který umožňuje transformaci míry tak, abychom mohli pracovat s konstantním pojistně technickým deflátorem rovným 1. Takže definujeme pravděpodobnostní míru $\mathbb{P}^T \sim \mathbb{P}$ pomocí Radon-Nikodymovy derivace
$$\frac{d\mathbb{P}^T}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{T}_n = \varphi_n^T.$$
Potom φ_n^T mění (zkresluje) $\mathbb{P}$ na ekvivalentní pravděpodobnostní míru $\mathbb{P}^T$. Tato změna se používá k výpočtu přirážky na část nezajistitelných pojistně technických

rizik. Nejjednodušší volbou pojistně technického deflátoru splňující Předpoklad 5.2.2 je $\boldsymbol{\varphi}^T \equiv 1$. Je to vhodná volba, pokud chceme určit čisté rizikové pojistné a nejlepší odhad rezerv jak si ukážeme níže v práci.

Nyní na základě vztahu 5.1 a Předpokladu 5.2.2 uvedeme následující důsledek.

Důsledek 5.2.3. *Za Předpokladu 5.2.2 získáme pro libovolné náhodné procesy* $(A_t^{(i)})_{t\in\mathfrak{T}}$, $i \in \mathcal{I}$, $(\mathbb{P}, \mathbb{A})$*-martingalovou vlastnost*

$$\varphi_t^A A_t^{(i)} = \mathbb{E}[\varphi_{t+1}^A A_{t+1}^{(i)} \mid \mathcal{A}_t].$$

Znamená to tedy, že náhodné procesy $(A_t^{(i)})_{t\in\mathfrak{T}}$ bazických finančních instrumentů $\mathcal{U}^{(i)}$ jsou nejenom konzistentní vzhledem k $\boldsymbol{\varphi}$ a $\mathbb{F}$, ale také vzhledem k $\boldsymbol{\varphi}^A$ a $\mathbb{A}$.

Cash flow pojistných závazků

Naším cílem je analyzovat zajistitelné a nezajistitelné části cash flow z pojistných závazků $\boldsymbol{X}$. Předpokládáme, že tyto cash flow mají součinovou strukturu. Dále předpokládejme, že cash flow $\boldsymbol{X} = (X_0, \dots, X_n) \in \mathcal{L}_{\boldsymbol{\varphi}}$ lze pro všechna $k \in \mathfrak{T}$ vyjádřit jako

$$X_k = \Lambda^{(k)} U_k^{(k)}, \tag{5.2}$$

kde náhodná proměnná $\Lambda^{(k)}$ je $\mathcal{T}_k$-měřitelná a náhodný proces $U_k^{(k)}$ je $\mathcal{A}_k$-měřitelný. Takže cash flow z pojistných závazků X_k se skládají ze zajistitelné $\mathcal{A}_k$-měřitelné části a z nezajistitelné $\mathcal{T}_k$-měřitelné části. Tyto dvě složky nyní popíšeme.

Předpokládáme, že $(U_t^{(k)})_{t\in\mathfrak{T}}$ popisuje $\mathbb{A}$-adaptovaný náhodný proces finančního portfolia $\mathcal{U}^{(k)}$ dostupný na finančním trhu $\mathcal{I}$. Horní index k v $U_t^{(k)}$ značí skutečnost, že finanční portfolio $\mathcal{U}^{(k)}$ kryje cesh flow X_k a dolní index t v $U_t^{(k)}$ značí fakt, že se jedná o cenu portfolia $\mathcal{U}^{(k)}$ v čase t. Finanční portfolia $\mathcal{U}^{(k)}$ jsou lineární kombinace podkladových bazických finančních instrumentů $\mathcal{U}^{(i)}$, $i \in \mathfrak{I}$, takže pro vhodnou volbu $\boldsymbol{y}^{(k)} = (y_i^{(k)})_{i\in\mathfrak{I}} \in \mathbb{R}^{|\mathfrak{I}|}$ je finanční portfolio $\mathcal{U}^{(k)}$ dáno jako

$$\mathcal{U}^{(k)} = \sum_{i\in\mathfrak{I}} y_i^{(k)} \mathcal{U}^{(i)},$$

a jeho cena v čase t ja dána jako (s využitím linearity)

$$U_t^{(k)} = \sum_{i\in\mathfrak{I}} y_i^{(k)} A_t^{(i)}.$$

Z Předpokladu 5.2.2 víme, že náhodné procesy $(A_t^{(i)})_{t\in\mathfrak{T}}$ jsou $\boldsymbol{\varphi}$-konzistentní, takže také náhodný proces $(U_t^{(k)})_{t\in\mathfrak{T}}$ je $\boldsymbol{\varphi}$-konzistentní (vyplývá to z linearity).

Náhodná proměnná $\Lambda^{(k)}$ značí počet jednotek těchto finančních portfolií $\mathcal{U}^{(k)}$, které musíme pořídit, abychom byli schopni dostát cash flow z pojistných závazků X_k v čase k. Abychom generovali cash flow X_k, finanční portfolia $\mathcal{U}_k$ musíme prodat v čase k, což značí horní index k v $\mathcal{U}^{(k)}$ a $(U_t^{(k)})_{t\in\mathfrak{T}}$.

Pro jednodušší odvození některých tvrzení v dalších částech této práce definujme nasledující cash flow z pojistných závazků

$$\boldsymbol{X}_k = X_k \boldsymbol{Z}_k = (0, \ldots, 0, \Lambda^{(k)} U_k^{(k)}, 0, \ldots, 0) \in \mathcal{L}_{\boldsymbol{\varphi}}, \tag{5.3}$$

kde $\Lambda^{(k)}$ je $\mathcal{T}_k$-měřitelné a $(U_t^{(k)})_{t \in \mathfrak{T}}$ je $\mathbb{A}$-adaptovaný, $\boldsymbol{\varphi}$-konzistentní náhodný proces finančního portfolia $\mathcal{U}^{(k)}$.

Pro námi definové cash flow nyní uvedeme následující větu:

Věta 5.2.4. *Za Předpokladu 5.2.2 je $\boldsymbol{\varphi}$-konzistentní náhodný proces cen cash flow z pojistných závazků $\boldsymbol{X}_k \in \mathcal{L}_{\boldsymbol{\varphi}}$ ve tvaru 5.3 definován jako*

$$Q_t[\boldsymbol{X}_k] = \frac{1}{\varphi_t^T} \mathbb{E}[\varphi_k^T \Lambda^{(k)} \mid \mathcal{T}_t] U_t^{(k)} \stackrel{\text{def.}}{=} \Lambda_t^{(k)} U_t^{(k)},$$

v čase $t \leq k$.

Důkaz. Z $\boldsymbol{\varphi}$-konzistence vyplývá, že $(\varphi_t Q_t[\boldsymbol{X}_k])_{t \in \mathfrak{T}}$ je $(\mathbb{P}, \mathbb{F})$-martingal. Takže z $Q_k[\boldsymbol{X}_k] = X_k$ získáme

$$\begin{aligned}
\varphi_t Q_t[\boldsymbol{X}_k] &= \mathbb{E}[\varphi_k X_k \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\varphi_k^T \Lambda^{(k)} \varphi_k^A U_k^{(k)} \mid \mathcal{T}_t, \mathcal{A}_t] \\
&= \mathbb{E}[\varphi_k^T \Lambda^{(k)} \mid \mathcal{T}_t] \mathbb{E}[\varphi_k^A U_k^{(k)} \mid \mathcal{A}_t] = \mathbb{E}[\varphi_k^T \Lambda^{(k)} \mid \mathcal{T}_t] \varphi_t^A U_t^{(k)},
\end{aligned}$$

kde jsme ve druhém kroku od konce použili nezávislost finančních a pojistně technických proměnných a v posledním kroku Důsledek 5.2.3 a linearitu náhodných procesů finančních portfolií. Tímto je věta dokázána.

□

Nyní jsme odvodili základní aktuárský model a jak v něm oceňujeme cash flow pojistných závazků. Ještě před koncem kapitoly uvedeme několik poznámek k aktuárskému a finančnímu oceňování.

Poznámky:

- Věta 5.2.4 říká, že pro cash flow z pojistných závazků $\boldsymbol{X}_k \in \mathcal{L}_{\boldsymbol{\varphi}}$ ve tvaru $X_k = \Lambda^{(k)} U_k^{(k)}$ můžeme uvažovat dva nezávislé procesy za Předpokladu 5.2.2:

  - $\mathbb{A}$-adaptovaný náhodný proces $(U_t^{(k)})_{t \in \mathfrak{T}}$ finančního portfolia $\mathcal{U}^{(k)}$ na finančním pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}_n, \mathbb{P}, \mathbb{A})$ a je $\boldsymbol{\varphi}$-konzistentní;

  - pojistně technický náhodný proces

  $$\Lambda_t^{(k)} = \frac{1}{\varphi_t^T} \mathbb{E}[\varphi_k^T \Lambda^{(k)} \mid \mathcal{T}_t], \tag{5.4}$$

  na pojistně technickém pravděpodobnostním prostoru $(\Lambda, \mathcal{T}_n, \mathbb{P}, \mathbb{T})$ pro $\mathcal{T}_k$-měřitelné $\Lambda^{(k)}$.

- Poznamenejme, že $(\varphi_t^T \Lambda_t^{(k)})_{t \in \mathfrak{T}}$ je $(\mathbb{P}, \mathbb{T})$-martingal a pro $t < k$ můžeme psát

$$\Lambda_t^{(k)} = \frac{1}{\varphi_t^T} \mathbb{E}[\varphi_k^T \Lambda^{(k)} \mid \mathcal{T}_t] = \mathbb{E}^T[\Lambda^{(k)} \mid \mathcal{T}_t],$$

což značí zkreslující charakter deflátoru $\boldsymbol{\varphi}^T$. Toto zkreslení je nelineární. Z toho vyplývá, že náhodné procesy mají součinovou strukturu

$$Q_t[\boldsymbol{X}_k] = \Lambda_t^{(k)} U_t^{(k)}.$$

Můžeme tedy odděleně studovat náhodné procesy $(U_t^{(k)})_{t\in\mathfrak{T}}$ finančních portfolií $\mathcal{U}^{(k)}$ na finančním trhu $\mathcal{I}$ a pravděpodobnostně zkreslené pojistně technické procesy $(\Lambda_t^{(k)})_{t\in\mathfrak{T}}$.

- Pokud pracujeme s obecnými cash flow z pojistných závazků, využíváme linearitu $\boldsymbol{X} = \sum_{k\in\mathfrak{T}} \boldsymbol{X}_k$.

- Výraz $(U_t^{(k)})_{t\in\mathfrak{T}}$ odráží zajistitelnou část pojistných závazků X_k a $\Lambda^{(k)}$ nezajistitelnou část. Zajistitelná část je modelována s příslušným finančním deflátorem $\boldsymbol{\varphi}^A$ pro finanční trh $\mathcal{I}$. Pojistně technický deflátor $\boldsymbol{\varphi}^T$ se používá k výpočtu rizikové přirážky za nezajistitelnou část.

- Poté co nakalibrujeme $\boldsymbol{\varphi}^A$ na finanční trh, máme ještě volnost ve volbě pojistně technického zkreslení $\boldsymbol{\varphi}^T$. Nejjednodušší volbou je $\varphi_t^T \equiv 1$ pro všechna $t \in \mathfrak{T}$. V tomto případě získáme pro $\boldsymbol{X}_k$ cenu v čase $t \leq k$ (tento speciální případ označíme $Q_t^0[\cdot]$)

$$Q_t^0[\boldsymbol{X}_k] = \mathbb{E}[\Lambda^{(k)} \mid \mathcal{T}_t] U_t^{(k)}, \tag{5.5}$$

  což znamená, že koupíme očekávaný počet jednotek $\mathbb{E}[\Lambda^{(k)} \mid \mathcal{T}_t]$ finančních portfolií $\mathcal{U}^{(k)}$ v čase $t \leq k$ pro replikaci. Pojistně technické riziko $\Lambda^{(k)}$ je tedy oceněno jeho podmíněnou střední hodnotou. V pojistné praxi je $Q_t^0[\boldsymbol{X}_k]$ nazýváno nejlepší odhad (best estimate) diskontovaných závazků, kde nejlepší odhad znamená podmíněnou střední hodnotu $\mathbb{E}[\Lambda^{(k)} \mid \mathcal{T}_t]$. Pro $\varphi_t^T \equiv 1$ držíme tedy v čase $t \leq k$ finanční portfolio

$$\mathbb{E}[\Lambda^{(k)} \mid \mathcal{T}_t] \mathcal{U}^{(k)}, \tag{5.6}$$

  abychom replikovali pojistné závazky $X_k = \Lambda^{(k)} U_k^{(k)}$.

- Pokud by $\Lambda^{(k)}$ bylo $\mathcal{T}_t$-měřitelné, potom by (5.6) dávalo perfektní replikační portfolio pro $\boldsymbol{X}_k$ v čase t. Obecně $\Lambda^{(k)}$ není $\mathcal{T}_t$-měřitelné a my čelíme pojistně technickým rizikům kvůli možnému negativnímu vývoji v $\Lambda^{(k)}$ v čase k. Tato pojistně technická rizika nejsou zajistitelná na finančním trhu ($\mathbb{A}$ a $\mathbb{T}$ jsou nezávislé) a je tedy nutné za ně zahrnout přirážku. Přirážka je cenou za riziko nad očekávanou hodnotu 5.5 a měla by odrážet marked-to-model odměnu za nesení rizik z pojistných závazků, jejichž život v našem portfoliu dobíhá. Pokud chytře zvolíme pojistně technický deflátor φ_k^T, získáme takovouto marži na pojistně technická rizika.

  Předpokládejme, že φ_k^T a $\Lambda^{(k)}$ jsou striktně pozitivně korelované, máme dáno $\mathcal{T}_t$ pro $t < k$. Potom platí

$$\frac{1}{\varphi_t^T}\mathbb{E}[\varphi_k^T \Lambda^{(k)} \mid \mathcal{T}_t] > \frac{1}{\varphi_t^T}\mathbb{E}[\varphi_k^T \mid \mathcal{T}_t]\mathbb{E}[\Lambda^{(k)} \mid \mathcal{T}_t] = \mathbb{E}[\Lambda^{(k)} \mid \mathcal{T}_t],$$

kde využíváme $(\mathbb{P}, \mathbb{T})$-martingalovou vlastnost $\boldsymbol{\varphi}^T$ v posledním kroku. Odtud máme pro striktně pozitivní ceny $U_t^{(k)} > 0$ v čase $t < k$

$$Q_t[\boldsymbol{X}_k] = \frac{1}{\varphi_t^T} \mathbb{E}[\varphi_k^T \Lambda^{(k)} \mid \mathcal{T}_t] U_t^{(k)} > \mathbb{E}[\Lambda^{(k)} \mid \mathcal{T}_t] U_t^{(k)} = Q_t^0[\boldsymbol{X}_k].$$

Takže rizikově upravená cena $Q_t[\boldsymbol{X}_k]$ v čase $t < k$ za nesení rizik z run-offu pojistných závazků X_k je striktně větší než nejlepší odhad ceny $Q_t^0[\boldsymbol{X}_k]$. Rozdíl

$$Q_t[\boldsymbol{X}_k] - Q_t^0[\boldsymbol{X}_k] > 0$$

představuje přirážku za (na finančním trhu) nezajistitelná rizika. Tato rizikově upravená hodnota odráží rizikovou averzi nositele rizika vyjádřenou pomocí $\boldsymbol{\varphi}^T$ (v našem marked-to-model světě).

V této kapitole jsme uvedli základy aktuárského a finančního oceňování, kdy filtraci $\mathbb{F}$ a deflátor $\boldsymbol{\varphi}$ rozdělujeme na finanční část a pojistně technickou část. Toto rozdělení využijeme při sestavování oceňovacího portfolia pro replikaci pojistných závazků v další kapitole této práce.

6. Valuation portfolio v životním pojištění

V předchozích kapitolách jsme popsali ocenění cash flow $\boldsymbol{X} \in \mathcal{L}_{\boldsymbol{\varphi}}$ pro daný deflátor $\boldsymbol{\varphi} \in L^1_{n+1}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ a uvedli jsme finanční trh $\mathcal{I}$ bazických finančních instrumentů $\mathcal{U}^{(i)}$, $i \in \mathcal{I}$. Nyní budeme předpokládat, že tento finanční trh je dostatečně bohatý, tzn. obsahuje alespoň všechny ZCB $\mathcal{Z}^{(m)}$ se splatnostmi v $m \in \mathfrak{T}$, tedy i bankovní účet $\mathcal{B}$. V této kapitole se pokusíme podívat na celou rozvahu pojišťovny, takže definujeme **oceňovací portfolio** (budeme značit **VaPo** z anglického Valuation Portfolio) uvedené například v Wüthrich [2] nebo Bühlmann [8].

Panuje obecný názor, že obě strany rozvahy pojišťovny bychom měli oceňovat konzistentně. Aktiva většinou oceňujeme tržní hodnotou (pokud existuje) nebo pomocí marked-to-model přístupu, jestliže nemáme dostatečně rozvinutý a likvidní trh. Ocenění závazků je složitější, protože neexistuje žádný trh, kde by se pojistné závazky aktivně obchodovaly. Pro pojistné závazky tedy nemáme tržní hodnoty. Z tohoto důvodu se pro ně snažíme spočítat tržně konzistentní hodnoty pomocí marked-to-model přístupu, který uvedeme níže. Základní myšlenkou je vyjádřit pojistné závazky (pasivní část rozvahy) pomocí bazických finančních instrumentů $\mathcal{U}^{(i)}$, $i \in \mathcal{I}$. Snažíme se tedy v podstatě namapovat pojistné závazky na vícerozměrné VaPo ve vektorovém prostoru bazických finančních instrumentů $\mathcal{U}^{(i)}$, $i \in \mathcal{I}$, které je jeho bází. Toto VaPo poté porovnáme s reálným portfoliem pojišťovny $\mathcal{S}$, které máme na aktivní straně rozvahy. Pojistné závazky vyjádřené pomocí VaPo a existující portfolio aktiv $\mathcal{S}$ jsou definovány na stejném vektorovém prostoru, takže je možné obě strany rozvahy porovnávat a můžeme je konzistentně ocenit.

K oběma stranám rozvahy se stavíme pomocí stejné metody, mluvíme tedy o tzv. full balance sheet approach. Při tomto přístupu používáme dostupné tržní hodnoty a v případech kdy nejsou dostupné, potom tržně konzistentní hodnoty (tak, aby celý systém oceňování byl konzistentní).

V první podkapitole ukážeme 3 základní kroky, které vedou ke konstrukci oceňovacího portfolia. V podstatě nejprve určíme finanční instrumenty použité k replikaci, poté jejich „množství“ a nakonec peněžní hodnotu oceňovacího portfolia. V druhé podkapitole se podíváme na vztah oceňovacího portfolia a nejlepšího odhadu rezerv. Ve třetí definujeme oceňovací portfolio zajištěné proti pojistně technickým rizikům, což nám umožní definovat přirážku za nezajistitelná rizika ve čtvrté podkapitole.

6.1 Konstrukce valuation portfolia

Nejprve uvedeme předpoklady, se kterými budeme v této kapitole pracovat, a stanovíme model finančního trhu. To nám umožní v následujících krocích popsat konstrukci VaPo. Naším cílem je replikovat cash flow z pojistných závazků $\boldsymbol{X}$ pomocí finančních instrumentů $\mathcal{U}^{(i)}$.

V této kapitole budeme pracovat s Předpokladem 5.2.2 (základní aktuárský model) a pojistně technickým deflátorem

$$\boldsymbol{\varphi}^T \equiv 1 \tag{6.1}$$

pro sestavení VaPo. Tento předpoklad pro pojistně technický deflátor jsme již uvedli dříve v práci a představuje jeho nejjedodušší volbu. Funkcionál v čase t při této volbě pojistně technického deflátoru budeme značit $Q_t^0[\cdot]$, viz (5.5). V další kapitole, kde uvedeme VaPo zajištěné proti pojistně technickým rizikům, uvolníme předpoklad (6.1) pro pojistně technický deflátot $\boldsymbol{\varphi}^T$ a získáme obecný funkcionál $Q_t[\cdot]$.

Předpokládáme finanční trh $\mathcal{I}$ skládající se z bazických finančních instrumentů $\mathcal{U}^{(i)}$, $i \in \mathcal{I}$, jejichž ceny lze popsat náhodnými procesy $(A_t^{(i)})_{t\in\mathfrak{T}}$. O těchto náhodných procesech předpokládáme, že jsou $\mathbb{A}$-adaptované, integrovatelné a konzistentní vzhledem k $\boldsymbol{\varphi}$.

Při konstrukci VaPo předpokládáme, že cash flow z pojistných závazků $\boldsymbol{X} \in \mathcal{L}_{\boldsymbol{\varphi}}$ lze vyjádřit pomocí bazických finančních instrumentů $\mathcal{U}^{(i)}$, $i \in \mathcal{I}$. Uvažujeme tedy finanční portfolia $\mathcal{U}$, která jsou dána lineárními kombinacemi bazických finančních instrumentů $\mathcal{U}^{(i)}$. Pro $\boldsymbol{y} = (y_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{I}|}$ je finanční portfolio $\mathcal{U}$ definováno jako

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\boldsymbol{y}) = \sum_{i\in\mathcal{I}} y_i \mathcal{U}^{(i)}. \tag{6.2}$$

Náhodný proces cen $(U_t)_{t\in\mathfrak{T}}$ tohoto finančního portfolia $\mathcal{U}$ je dán (pomocí linearity) jako $U_t = \sum_{i\in\mathcal{I}} y_i A_t^{(i)}$ a platí pro něj nasledující vlastnost (konzistence):

Důsledek 6.1.1. *Za Předpokladu 5.2.2 náhodný proces cen pro $\mathcal{U}$ splňuje pro $t \in \mathfrak{T}_-$*

$$U_t = \frac{1}{\varphi_t}\mathbb{E}[\varphi_{t+1}U_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = \frac{1}{\varphi_t^A}\mathbb{E}\left[\varphi_{t+1}^A U_{t+1} \mid \mathcal{A}_t\right].$$

Tato finanční portfolia $\mathcal{U}$ použijeme k reprezentaci cash flow $\boldsymbol{X}$ z pojistných závazků a musíme je volit obezřetně. Hodně bazických finančních instrumentů negeneruje přímo cash flow. Pokud například koupíme akcii (která nevyplácí dividendy) $\mathcal{U}^{(i)}$, potom se cena této akcie vyvíjí podle $(A_t^{(i)})_{t\in\mathfrak{T}}$, ale negeneruje žádné cash flow, pokud akcii v určitém čase neprodáme. Abychom tedy popsali cash flow generované finančním portfoliem $\mathcal{U}$, musíme nejen určit bazické finanční instrumenty $\mathcal{U}^{(i)}$, které budeme v našem finančním portfoliu držet, ale také kdy je prodáme za jejich aktuální ceny $A_t^{(i)}$. Okamžik, kdy prodáme finanční portfolio $\mathcal{U}$, budeme značit horním indexem k, tedy finanční portfolio $\mathcal{U}^{(k)}$ je prodáno v čase $k \in \mathfrak{T}$.

Krok 1 při sestavení VaPo

Zvolíme vhodnou bázi finančních portfolií $\mathcal{U}^{(k)}$, $k \in \mathfrak{T}$ a vyjádříme cash flow $\boldsymbol{X} \in \mathcal{L}_{\boldsymbol{\varphi}}$ z pojistných závazků pomocí finanční báze, tedy cash flow $\boldsymbol{X}$ vyjádříme jako

$$\boldsymbol{X} = \left(\Lambda^{(0)}U_0^{(0)}, \dots, \Lambda^{(n)}U_n^{(n)}\right), \tag{6.3}$$

kde

- $\boldsymbol{\Lambda} = (\Lambda^{(0)}, \dots, \Lambda^{(n)})$ jsou $\mathbb{T}$-adaptované pojistně technické proměnné, reprezentující počet finančních portfolií

- náhodné procesy $(U_t^{(k)})_{t\in\mathfrak{T}}$ finančních portfolií $\mathcal{U}^{(k)}$, $k \in \mathfrak{T}$, jsou $\mathbb{A}$-adaptované, integrovatelné a konzistentní vzhledem k $\boldsymbol{\varphi}$

a finanční portfolio $\mathcal{U}^{(k)}$ prodáme v čase k. Získáváme tedy následující mapování

$$\boldsymbol{X} \mapsto \sum_{k=0,\ldots,n} \Lambda^{(k)} \mathcal{U}^{(k)}. \tag{6.4}$$

Mapovaní (6.4) vyjadřuje pojistné závazky pomocí finančních portfolií $\mathcal{U}^{(k)}$, tedy mapuje cash flow $\boldsymbol{X}$ na několika rozměrný vektorový prostor s finanční bází $\mathcal{U}^{(k)}$, $k \in \mathfrak{T}$.

Krok 2 při sestavení VaPo

Pro pevně zvolený okamžik $t \in \mathfrak{T}$ nahradíme pojistně technické závazky $\Lambda^{(k)}$ jejich nejlepšími odhady v čase t. Dostaneme tedy pro cash flow $\boldsymbol{X}$ a jeho valuation portfolio $VaPo_t(\boldsymbol{X})$ v čase t následující mapování

$$\boldsymbol{X} \mapsto VaPo_t(\boldsymbol{X}) = \sum_{k\in\mathfrak{T}} \mathbb{E}\left[\Lambda^{(k)} \mid \mathcal{T}_t\right] \mathcal{U}^{(k)}. \tag{6.5}$$

Ještě než přistoupíme k třetímu kroku, kde již vyjádříme peněžní hodnotu valuation portfolia, uvedeme několik poznámek k předchozímu vajádření a sladění cash flow z aktiv a pasiv v rámci pojišťovny.

Poznámky:

- Mapování (6.5) přiřazuje cash flow $\boldsymbol{X}$ z pojistných závazků $\mathcal{T}_t$-měřitelné finanční portfolio $VaPo_t(\boldsymbol{X})$. Toto finanční portfolio replikuje očekávané pojistně technické závazky pomocí finančních portfolií $\mathcal{U}^{(k)}$, respektive bazických finančních instrumentů $\mathcal{U}^{(i)}$. Můžeme ho tedy srovnat s jakýmkoli jiným portfoliem aktiv $\mathcal{S}$.
- Z integrovatelnosti $\Lambda^{(k)}$ vyplývá, že $VaPo_t(\boldsymbol{X})$ v (6.4) je dobře definováno.
- Jestliže finanční portfolio $\mathcal{U}^{(k)}$ je dáno následující lineární kombinací bazických finančních instrumentů $\mathcal{U}^{(i)}$, $i \in \mathcal{I}$,

  $$\mathcal{U}^{(k)} = \mathcal{U}^{(k)}\left(\boldsymbol{y}^{(k)}\right) = \sum_{i\in\mathcal{I}} y_i^{(k)} \mathcal{U}^{(i)},$$

  kde $\boldsymbol{y}^{(k)} = (y_i^{(k)})_{i\in\mathcal{I}} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{I}|}$, potom získáme v čase t vyjádření

  $$\begin{aligned} VaPo_t(\boldsymbol{X}) &= \sum_{k\in\mathfrak{T}} \left\{ \mathbb{E}\left[\Lambda^{(k)} \mid \mathcal{T}_t\right] \sum_{i\in\mathcal{I}} y_i^{(k)} \mathcal{U}^{(i)} \right\} \\ &= \sum_{i\in\mathcal{I}} \left(\sum_{k\in\mathfrak{T}} \mathbb{E}\left[\Lambda^{(k)} \mid \mathcal{T}_t\right] y_i^{(k)} \right) \mathcal{U}^{(i)}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Tohle VaPo můžeme nyní přímo srovnat s portfoliem $\mathcal{S}^{(t)}$, které držíme v rozvaze na straně aktiv. Předpokládejme, že v čase t je dáno jako

$$\mathcal{S}^{(t)} = \sum_{i \in \mathcal{I}} w_i^{(t)} \mathcal{U}^{(i)}. \tag{6.7}$$

Potom máme špatně sladěná aktiva a pasiva, jestliže se $\mathcal{S}^{(t)}$ a $VaPo_t(\boldsymbol{X})$ liší, tedy pro nějaké $i \in \mathcal{I}$ platí

$$\sum_{k \in \mathfrak{T}} \mathbb{E}\left[\Lambda^{(k)} \mid \mathcal{T}_t\right] y_i^{(k)} \neq w_i^{(t)}. \tag{6.8}$$

- Ve vzorci (6.6) vidíme dvě různá vyjádření pro VaPo: první řádek dává vyjádření pomocí cash flow, kde se soustředíme na to kdy jsou odpovídající bazické finanční instrumenty prodány, aby generovaly cash flow; druhý řádek dává vyjádření pomocí instrumentů, kde nás zajímá kolik bazických finančních instrumentů musíme koupit, abychom replikovali očekávané závazky.

- Zatím jsme se nevěnovali peněžním hodnotám a očekáváné závazky jsme vyjádřili pouze pomocí finančních portfolií. V dalším kroku se jim budeme věnovat a definujeme nejlepší odhad cash flow $\boldsymbol{X}$ rovný hodnotě VaPo v čase t.

Krok 3: Peněžní hodnota pro VaPo

V posledním kroku mapujeme VaPo na peněžní hodnotu v čase t pomocí

$$VaPo_t(\boldsymbol{X}) \mapsto Q_t^0[\boldsymbol{X}] = \sum_{k \in \mathfrak{T}} \mathbb{E}\left[\Lambda^{(k)} \mid \mathcal{T}_t\right] U_t^{(k)}. \tag{6.9}$$

Poznámky:

- Konstrukce našeho mapování je lineární, může být tedy potřeba oddělit cash flow $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2$, abychom našli vhodná finanční portfolia $\mathcal{U}$.

- Mapování (6.9) přiřazuje peněžní hodnotu očekávaným pojistným závazkům v čase t. Pomocí (6.6) můžeme tuto peněžní hodnotu přepsat jako

$$\begin{aligned} Q_t^0[\boldsymbol{X}] &= \sum_{k \in \mathfrak{T}} \mathbb{E}\left[\Lambda^{(k)} \mid \mathcal{T}_t\right] U_t^{(k)} = \sum_{k \in \mathfrak{T}} \left\{ \mathbb{E}\left[\Lambda^{(k)} \mid \mathcal{T}_t\right] \sum_{i \in \mathcal{I}} y_i^{(k)} A_t^{(i)} \right\} \\ &= \sum_{i \in \mathcal{I}} \left(\sum_{k \in \mathfrak{T}} \mathbb{E}\left[\Lambda^{(k)|\mathcal{T}_t}\right] y_i^{(k)} \right) A_t^{(i)}, \end{aligned}$$

což je nejlepší odhad diskontovaných závazků v čase t. Na prvním řádku je vyjádření pomocí cash flow a na druhém pomocí finančních instrumentů. Nyní můžeme tuto hodnotu srovnat s hodnotou portfolia aktiv $\mathcal{S}^{(t)}$ v čase t, které je dáno jako

$$S_t^{(t)} = \sum_{i \in \mathcal{I}} w_i^{(t)} A_t^{(i)}.$$

Pokud platí

$$S_t^{(t)} \geq Q_t^0[\boldsymbol{X}],$$

potom jsou očekávané pojistné závazky kryty hodnotou aktivy.

6.2 Nejlepší odhad rezerv

V předchozí kapitole jsem definovali VaPo v čase t pro cash flow $\boldsymbol{X} \in \mathcal{L}_\varphi$ vyjádřené (6.3). Nachází-li se pojišťovna v čase t a už uskutečnila platby X_s pro $s \leq t$, potom je hodnota zbylých závazků

$$\boldsymbol{X}_{(t+1)} = (0, \dots, X_{t+1}, \dots, X_n) \in \mathcal{L}_{\boldsymbol{\varphi}}. \tag{6.10}$$

Proto tvoříme rezervy pouze pro tyto zbylé závazky $\boldsymbol{X}_{(t+1)}$ v čase t. VaPo pro zbylé závazky v čase t je dáno

$$VaPo_t(\boldsymbol{X}_{(t+1)}) = \sum_{k=t+1}^{n} \mathbb{E}\left[\Lambda^{(k)} \mid \mathcal{T}_t\right] \mathcal{U}^{(k)} = \sum_{i \in \mathcal{I}} \left(\sum_{k=t+1}^{n} \mathbb{E}\left[\Lambda^{(k)} \mid \mathcal{T}_t\right] y_i^{(k)} \right) \mathcal{U}^{(i)}.$$

Nejlepší odhad rezerv $\mathcal{R}_t^0$ na budoucí závazky $\boldsymbol{X}_{(t+1)}$ v čase t je definován jako

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_t^0(\boldsymbol{X}_{(t+1)}) = Q_t^0[\boldsymbol{X}_{(t+1)}] &= \sum_{k=t+1}^{n} \mathbb{E}\left[\Lambda^{(k)} \mid \mathcal{T}_t\right] U_t^{(k)} \\ &= \sum_{i \in \mathcal{I}} \left(\sum_{k=t+1}^{n} \mathbb{E}\left[\Lambda^{(k)} \mid \mathcal{T}_t\right] y_i^{(k)} \right) A_t^{(i)}.\end{aligned}$$

Pro definici nejlepšího odhadu rezerv jsme tedy zvolili podmíněnou střední hodnotu. Nyní se podíváme na sestavení valuation portfolia zajištěného proti pojistně technickým rizikům.

6.3 Valuation portfolio zajištěné proti pojistně technickým rizikům

VaPo sestavené v předchozích kapitolách kryje očekávané pojistné závazky a vede k nejlepšímu odhadu rezerv na budoucí závazky. Abychom ocenili run-off pojistných závazků, nestačí zohlednit pouze očekávané pojistné závazky. Nositel rizika (rizikově averzní) zbývajících závazků bude vyžadovat přirážku, aby se mohl vypořádat s (nezajistitelnými) pojistně technickými riziky a pokryl negativní dopady během run-offu. Součet nejlepšího odhadu rezerv a této přirážky na nezajistitelná rizika tvoří tzv. rizikově upravené rezervy. Vytvoříme tedy zajištěné oceňovací portfolio, což bude VaPo zajištěné proti pojistně technickým rizikům. Budeme pracovat s pojistně technickým deflátorem $\boldsymbol{\varphi}^T \neq 1$.

V pojišťovnictví se (riziková) přirážka na nezajistitelná pojistně technická rizika počítá pomocí marked-to-model přístupu tak, aby rizikově upravené rezervy naplňovali tržně konzistentní přístup. Rizikově upravené rezervy by měly tedy splňovat následující definici (viz *Článek 75* Směrnice 2009/138/EC):

„...závazky se oceňují částkou, za niž by se mohly převést nebo vypořádat mezi znalými partnery ochotnými uskutečnit transakci za obvyklých podmínek.“

V této kapitole předpokládáme platnost Předpokladu 5.2.2 (základní aktuárský model) s obecným pojistně technickým deflátorem $\boldsymbol{\varphi}^T$ pro zajištěné VaPo. V tomto obecném případě budeme oceňovací funkcionál značit $Q_t[\cdot]$.

Zajištěné portfolio sestavíme ve dvou krocích a ve třetím mu přiřadíme peněžní hodnotu, což bude obdobné jako u nezajištěného portfolia.

Krok 1 při sestavení zajištěného VaPo

První krok je stejný jako pro nezajištěné VaPo, platí tedy (6.3)-(6.5). Zvolíme vhodnou bázi finančních portfolií $\mathcal{U}^{(k)}$, $k \in \mathfrak{T}$, a vyjádříme cash flow z pojistných závazků $\boldsymbol{X} \in \mathcal{L}_{\boldsymbol{\varphi}}$ pomocí finanční báze, tedy cash flow $\boldsymbol{X}$ je dáno jako

$$\boldsymbol{X} = \left(\Lambda^{(0)} U_0^{(0)}, \dots, \Lambda^{(n)} U_n^{(n)}\right), \tag{6.11}$$

kde

- $\boldsymbol{\Lambda} = (\Lambda^{(0)}, \dots, \Lambda^{(n)})$ jsou $\mathbb{T}$-adaptované pojistně technické proměnné,
- náhodné procesy $(U_t^{(k)})_{t \in \mathfrak{T}}$ finančních portfolií $\mathcal{U}^{(k)}$, $k \in \mathfrak{T}$, jsou $\mathbb{A}$-adaptované, integrovatelné a konzistentní vzhledem k $\boldsymbol{\varphi}$,

a finanční portfolio $\mathcal{U}^{(k)}$ prodáme v čase k. Získáváme tedy následující mapování

$$\boldsymbol{X} \mapsto \sum_{k \in \mathfrak{T}} \Lambda^{(k)} \mathcal{U}^{(k)}. \tag{6.12}$$

Mapovaní (6.12) vyjadřuje pojistné závazky pomocí finančních portfolií $\mathcal{U}^{(k)}$, tedy mapuje cash flow $\boldsymbol{X}$ na několika rozměrný vektorový prostor s finanční bází $\mathcal{U}^{(k)}$, $k \in \mathfrak{T}$.

Krok 2 při sestavení zajištěného VaPo

Pro pevně zvolené t nahradíme pojistně technické závazky $\Lambda^{(k)}$ jejich diskontovanými (pojistně technickým deflátorem) podmíněnými středními hodnotami v čase t. Získáme následující mapování pro zajištěné VaPo

$$\boldsymbol{X} \mapsto VaPo_t^{\text{prot}}(\boldsymbol{X}) = \sum_{k \in \mathfrak{T}} \frac{1}{\varphi_t^T} \mathbb{E}\left[\varphi_k^T \Lambda^{(k)} \mid \mathcal{T}_t\right] \mathcal{U}^{(k)} = \sum_{k \in \mathfrak{T}} \Lambda_t^{(k)} \mathcal{U}^{(k)}. \tag{6.13}$$

$\mathbb{T}$-adaptovaný diskontovaný pojistně technický náhodný proces $(\Lambda_s^{(k)})_{s \in \mathfrak{T}}$ jsme zavedli v (5.4).

Krok 3: peněžní hodnota zajištěného VaPo

V posledním kroku namapujeme zajištěné VaPo na peněžní hodnotu v čase t

$$VaPo_t^{\text{prot}}(\boldsymbol{X}) \mapsto Q_t[\boldsymbol{X}] = \sum_{k \in \mathfrak{T}} \Lambda_t^{(k)} U_t^{(k)}. \tag{6.14}$$

Stejně jako v první podkapitole, i zde uvedeme několik poznámek na závěr:

Poznámky:

- Oceňovací funkcionál $Q_t[\cdot]$ v (6.14) nemá žádný dodatečný předpoklad o pojistně technickém deflátoru $\boldsymbol{\varphi}^T$. Liší se tak od $Q_t^0[\cdot]$ v (6.9), kde jsme použili specifický pojistně technický deflátor $\boldsymbol{\varphi}^T \equiv 1$.

- Výsledný oceňovací proces $(Q_t[\boldsymbol{X}])_{t\in\mathfrak{T}}$ je $\boldsymbol{\varphi}$-konzistentní, viz Věta 5.2.4.

- Mapování (6.14) přiřazuje peněžní hodnotu diskontovaným očekávaným pojistným závazkům v čase t. Tuto peněžní hodnotu lze přepsat jako

$$\begin{aligned} Q_t[\boldsymbol{X}] &= \sum_{k\in\mathfrak{T}} \Lambda_t^{(k)} U_t^{(k)} = \sum_{k\in\mathfrak{T}} \left\{ \Lambda_t^{(k)} \sum_{i\in\mathcal{I}} y_i^{(k)} A_t^{(i)} \right\} \\ &= \sum_{i\in\mathcal{I}} \left(\sum_{k\in\mathfrak{T}} \Lambda_t^{(k)} y_i^{(k)} \right) A_t^{(i)}. \end{aligned}$$

  Na prvním řádku je vyjádření pomocí cash flow a na druhém pomocí instrumentů.

- Při rizikové averzi předpokládáme, že $\Lambda^{(k)}$ je striktně pozitivně korelované s φ_k^T, je-li dáno $\mathcal{F}_t$. Z martingalové vlastnosti pojistně technického deflátoru pro $t < k$, získáme

$$\Lambda_t^{(k)} = \frac{1}{\varphi_t^T} \mathbb{E}\left[\varphi_k^T \Lambda^{(k)} \mid \mathcal{T}_t\right] > \mathbb{E}\left[\Lambda^{(k)} \mid \mathcal{T}_t\right]. \tag{6.15}$$

  Odtud potom pro striktně pozitivní procesy $U_t^{(k)} > 0$ v čase $t < k$ máme

$$Q_t[\boldsymbol{X}_{(t+1)}] = \sum_{k=t+1}^{n} \Lambda_t^{(k)} U_t^{(k)} > \sum_{k=t+1}^{n} \mathbb{E}\left[\Lambda^{(k)} \mid \mathcal{T}_t\right] U_t^{(k)} = Q_t^0[\boldsymbol{X}_{(t+1)}].$$

  Rozdíl $Q_t[\boldsymbol{X}_{(t+1)}] - Q_t^0[\boldsymbol{X}_{(t+1)}] > 0$ je **tržní přirážka za riziko** (risk margin nebo market-value margin), kterou nositel rizika vyžaduje za vystavení se nezajistitelným pojistně technickým rizikům ze závazků. Blíže se mu budeme věnovat v další kapitole v kontextu rezerv.

6.4 Přirážka za nezajistitelná rizika

V této kapitole definujeme rizikově upravené rezervy na pojistné závazky $\boldsymbol{X}_{(t+1)} = (0, \ldots, 0, X_{t+1}, \ldots, X_n)$ v čase $t \in \mathfrak{T}_-$ pro cash flow $\boldsymbol{X} \in \mathcal{L}_{\boldsymbol{\varphi}}$ vyjádřené jako (6.11). Zajištěné VaPo pro pojistné závazky $\boldsymbol{X}_{(t+1)}$ je dáno jako, (viz 6.13),

$$VaPo_t^{\text{prot}}(\boldsymbol{X}_{(t+1)}) = \sum_{k=t+1}^{n} \Lambda_t^{(k)} \mathcal{U}^{(k)}.$$

Rizikově upravené rezervy na pojistné závazky v čase t jsou potom definované hodnotou zajištěného VaPo, tedy

$$\mathcal{R}_t(\boldsymbol{X}_{(t+1)}) = Q_t[\boldsymbol{X}_{(t+1)}] = \sum_{k=t+1}^{n} \Lambda_t^{(k)} U_t^{(k)}. \tag{6.16}$$

Nyní zformulujme následující důsledek:

Důsledek 6.4.1. *Předpokládejme 5.2.2 a zvolme $\boldsymbol{X} \in \mathcal{L}_{\boldsymbol{\varphi}}$ vzhledem k (6.11). Dále předpokládejme, že náhodné procesy $(U_t^{(k)})_{t\in\mathfrak{T}}$ jsou nezáporné, $\mathbb{P}$-s.j., pro všechna $k \in \mathfrak{T}$. Pokud je $\Lambda^{(k)}$ nezáporně korelovaný s φ_k^T pro všechna $k > t$, máme-li dáno $\mathcal{F}_t$, platí*

$$\mathcal{R}_t(\boldsymbol{X}_{(t+1)}) \geq \mathcal{R}_t^0(\boldsymbol{X}_{(t+1)}).$$

Důkaz. Jedná se o přímy důsledek (6.15). □

Důsledek 6.4.1 říká, že za vhodných předpokladů jsou rizikově upravené rezervy $\mathcal{R}(\boldsymbol{X}_{(t+1)})$ větší než nejlepší odhad rezerv $\mathcal{R}_t^0(\boldsymbol{X}_{(t+1)})$. Rozdíl

$$MVM_t^{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{X}_{(t+1)}) = \mathcal{R}_t(\boldsymbol{X}_{(t+1)}) - \mathcal{R}_t^0(\boldsymbol{X}_{(t+1)}) \geq 0 \tag{6.17}$$

vyjadřuje přirážku tržního rizika v marked-to-model přístupu, tedy **přirážku za nezajistitelná rizika**. Tato přirážka je založena na explicitní volbě pojistně technického deflátoru $\boldsymbol{\varphi^T}$, který modeluje vlastní averzi k riziku.

Poznámky:

- Rizikově upravené rezervy s vhodnou volbou deflátoru $\boldsymbol{\varphi}$, hlavně tedy pojistně technické části $\boldsymbol{\varphi}^T$, splňují požadavky formulované v *Článku 75* Směrnice 2009/138/EC.
- V aktuárské praxi se pro přirážku tržního rizika používají rozdílné terminologie a také metodologie jejího výpočtu. Obecně se jedná o bezpečnostní nebo také rizikovou přirážku na nezajistitelná rizika. Například v Solvency II mluvíme o SCR (Solvency Capital Requirement) a při výpočtu tržně konzistentní implicitní hodnoty (MCEV) o nákladech na kapitál CoC (Cost of Capital) nebo také CRNHR (Cost of Residual Non-Hedgeable Risk). Obecně v daných metodách pracujeme se zkreslením pravděpodobnostní míry (pojistně technickým deflátorem), teorií užitku, rizikovými mírami a kvantilovými metodami. Všechny mají společné to, že rizikovou přirážku určujeme pomocí marked-to-model přístupu, protože neexistuje žádný likvidní trh, kde by se odchodovalo s pojistnými závazky (přirážku tedy nelze pozorovat na trhu).
- Použitá terminologie rizikově upravených rezerv odpovídá technickým nebo také matematickým rezervám.
- Finanční trh určuje model pro finanční deflátor $\boldsymbol{\varphi}^A$ (a finanční filtraci $\mathbb{A}$). Z předpokladu, že je finanční trh bezarbitrážní a úplný vyplývá, že existuje právě jeden finanční deflátor $\boldsymbol{\varphi}^A$ a ceny bazických finančních instrumentů $\mathcal{U}^{(i)}$ jsou jednoznačné. Avšak náš model pro ocenění je z celkového pohledu neúplný, protože máme nekonečně mnoho možností, jak zvolit pojistně technický deflátor $\boldsymbol{\varphi}^T$, což znamená, že ceny pro cash flow z pojistných závazků $\boldsymbol{X}$ nejsou jednoznačné a zavisí na volbě averze k riziku pomocí $\boldsymbol{\varphi}^T$.

7. Numerické příklady

Nyní v numerické části práce uvedeme celkem tři příklady, které budou na sobě vzájemně nezávislé a každý z nich ukáže část toho, v čem vlastně spočívá pojem tržně konzistentního ocenění a použití deflátorů. Nejdříve se podíváme na ocenění instrumentu obchodovaného na trzích, tedy put opce. Srovnáme tři druhy výpočtu, a to pomocí Black-Scholesova vzorce, rizikově neutrální míry a real world míry za použití deflátorů. Ukážeme si, že při použití dostatečně velkého počtu simulací jsou tyto výsledky téměř stejné, což dokazuje ekvivalenci použitých přístupů k ocenění.

V druhé části oceníme jednoduché pojistné produkty, který již na trhu obchodované nejsou. Nejdříve půjde o odložený důchod s jednorázově placeným pojistným, garantovaným zhodnocením a podíly na zisku. Na něm si ukážeme ekvivalenci ocenění pomocí rizikově neutrální míry a real world míry s deflátory. Spočteme tržně konzistentní hodnotu závazků a současnou hodnotu budoucích zisků. Jde o čistě ilustrativní příklad, takže sami zvolíme jednoduchý ekonomický model, jeho parametry a parametry pojistného produktu. Poté oceníme pojištění pro případ smrti nebo dožití a na něm si ukážeme aplikaci teorie k replikačnímu portfoliu. Zde již k ocenění použijeme částečně reálná tžní data, na kterých si ukážeme alespoň náznak možného použití v praxi. Musíme však zdůraznit, že námi zvolený jednofaktorový Vašíčkův model s diskrétním časem, není pro praxi nejvhodnější. My s ním počítáme kvůli jeho jednoduchosti, která umožňuje lepší odvození teoretických základů. Výpočty provedeme v matematickém softwaru R, kde naprogramujeme potřebné funkce. Kód programu je součástí této práce na přiloženém DVD.

7.1 Ocenění put opce

Nejdříve srovnáme tržní hodnotu evropské put opce, a to pro výpočet pomocí tří metod:

1. Black-Scholesův vzorec
2. ocenění pomocí rizikově neutrální míry $\mathbb{P}^*$
3. ocenění pomocí reálné míry $\mathbb{P}$ s deflátory

Evropská put opce dává jejímu držiteli právo prodat podkladové aktivum za předem určenou cenu (realizační cena) v určité datum. Oceníme put opci na akcii, která je v pozici at-the-money, takže jako příklad vezmeme put opci s následujícími charakteristikami:

- $S(0) = K = 100$ současná hodnota akcie a realizační cena (rovnost je důsledkem at-the-money předpokladu)
- T let je maturita opce a my uvedeme výpočty pro $T \in \{1, 5, 10\}$
- $r = 0,02$ bezriziková úroková míra

- $\mu = 0,03$ očekávaný výnos akcie v real world prostředí
- $\sigma = 0,25$ volatilita akciového výnosu

Výplata put opce s maturitou v čase T je dána vzorcem:

$$\max(K - S(T), 0).$$

7.1.1 Ekonomický model

Budeme předpokládat, že v našem světě se výnosy akcií řídí geometrickým Brownovým pohybem. Znamená to, že v libovolném budoucím čase t platí pro rozdělení náhodného procesu konečné hodnoty akcie $S(t)$ při pravděpodobnostní míře $\mathbb{P}^*$

$$\log(S(t)) - \log(S(0)) \sim N\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right); \sigma\sqrt{t}\right),$$

kde r je roční bezriziková úroková míra a σ je roční volatilita akciového výnosu.

Při reálné míře $\mathbb{P}$ bereme pro proces $S(t)$ v úvahu také tržní cenu rizika λ podkladové akcie. Máme tedy:

$$\log(S(t)) - \log(S(0)) \sim N\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right); \sigma\sqrt{t}\right),$$

kde $\mu = r + \lambda$.

V příkladu budeme předpokládat konstantní úrokové sazby během platnosti smlouvy. Deflátory, coby stochastické diskontní faktory, zajištují, abychom v real world modelování dodrželi bezarbitrážnost a tržní konzistenci.

7.1.2 Black-Scholesův vzorec

K výpočtu použijeme vrozec

$$p = N(-d_2)Ke^{-rT} - N(-d_1)S(0),$$

kde

$$\begin{aligned} d_1 =& \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right] \\ d_2 =& \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) - \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right] \\ =& d_1 - \sigma\sqrt{T} \end{aligned}$$

a $N(\cdot)$ je distribuční funkce standardního normálního rozdělení. Vzorec lze nalézt například v Dupačová, Hurt, Štěpán [4].

7.1.3 Rizikově neutrální ocenění put opce

Předchozí formule je založena na rizikově neutrálním procesu pro konečnou cenu akcie. Pokud budeme tento proces simulovat v rizikově neutrálním světě a spočteme výplatu derivátu pro každou ze simulovaných hodnot, měli bychom dostat stejnou hodnotu jako při použití Black-Scholesova vzorce. Vezmeme tedy:

$$p = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} e^{-rT} \max(K - \widehat{S^i_{\mathbb{P}*}}(T), 0),$$

kde $\widehat{S^i_{\mathbb{P}*}}(T)$ je rizikově neutrální konečná hodnota akcie v i-té simulaci. Tu pro jednotlivé simulace spočteme pomocí

$$\widehat{S^i_{\mathbb{P}*}}(T) = S(0) \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \sigma\sqrt{T}\varepsilon\right),$$

kde ε má standardní normální rozdělení.

7.1.4 Real world ocenění s deflátory

Nyní oceníme put opci pomocí real world simulací a deflátorů. Simulujeme reálnou distribuční funkci finální ceny akcie (zahrnuje tržní cenu za riziko). Každou simulovanou hodnotu lze pokládat za stav, který může v budoucnosti nastat. Při oceňování opce budeme postupovat podle následujících kroků:

1. Simulujeme N konečných cen akcie, které mohou nastat za použití procesu dle míry $\mathbb{P}$. Předpokládáme, že výnos akcií je real world výnos $\mu = r + \lambda$. Získáme tak N budoucích stavů.

2. Pro každou simulovanou cenu akcie $(S^i_P(t))$ spočteme výplatu opce $\max(K - S^i_P(t))$, kde

$$S^i_P(t) = S(0) \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma\varepsilon\sqrt{t}\right)$$

   a ε má standardní normální rozdělení.

3. Spočteme specifické deflátory $\boldsymbol{\varphi^i}$ pro všech N možných budoucích stavů (scénářů).

4. Všechny simulované výplaty put opce diskontujeme příslušnými deflátory.

5. Vezmeme průměr všech diskontovaných výplat.

Tržní cenu put opce lze tedy vyjádřit jako

$$p = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \varphi^i_t \max(K - S^i_P(t), 0).$$

Deflátory by měly splňovat následující martingalové podmínky:

1. Pomocí deflátorů by mělo být možné ocenit podkladové aktivum:

$$S(0) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varphi_t^i S_P^i(t) \tag{7.1}$$

2. Pomocí deflátorů by mělo být možné ocenit bezrizikový bezkuponový dluhopis:

$$e^{-rt} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varphi_t^i. \tag{7.2}$$

Pokud předpokládáme Black-Scholesův ekonomický model, získáme vyjádření Black-Scholesova deflátoru, tedy:

$$\varphi_t^i = \exp\left\{-\left(r + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2\right)t - \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)\varepsilon_t\sqrt{t}\right\},$$

kde ε_t má standardní normální rozdělení. Odvození Black-Scholesova deflátoru lze nalézt například v [10].

Ověřili jsme zda námi napočítané deflátory φ_T pro opce s maturitou $T \in \{1, 5, 10\}$ splňují martingalovou podmínku (7.2) a koncové hodnoty podkladového aktiva diskontované pomocí deflátorů splňují (7.1). V Tabulce 7.1 a Tabulce 7.2 vidíme, že obě podmínky jsou splněny s dostatečnou přesností, a to zejména, pokud máme větší počet pozorování (naše výpočty jsme provedli pro počet pozorování $N \in \{1000, 5000, 10000\}$).

		$T = 1$	$T = 5$	$T = 10$
risk free		0,980	0,905	0,819
deflátor φ_T	$N = 1000$	0,984	0,902	0,814
	$N = 5000$	0,980	0,903	0,819
	$N = 10000$	0,980	0,905	0,819

Tabulka 7.1: Martingalový test pro deflátory

		$T = 1$	$T = 5$	$T = 10$
$S(0)$		100	100	100
Diskontovaný nahodný proces	$N = 1000$	97,70	102,14	103,72
	$N = 5000$	100,08	100,62	99,83
	$N = 10000$	100,04	100,18	99,33

Tabulka 7.2: Martingalový test náhodného procesu podkladového aktiva

Z výsledků v Tabulce 7.3 vidíme, že pokud máme dostatečné množství pozorování získáváme blízké výsledky pro rizikově neutrální ocenění i real world ocenění, a to i pro opce s delší dobou do splatnosti.

Nyní od Evropské put opce, která je finančním instrumentem obchodovaným na trhu, přejdeme k ocenění pojistných smluv, které se již na trhu neobchodují.

$T = 10$ let	$S(0) = K = 100$, $r = 0,02$, $\sigma = 0,25$		
	$N = 1000$	$N = 5000$	$N = 10000$
Black-Scholes	$19,73$	$19,73$	$19,73$
RN ocenění	$19,01$	$19,71$	$19,86$
RW ocenění	$18,87$	$19,68$	$19,87$
RN/RW rozdíl	$0,70\%$	$0,12\%$	$-0,04\%$

$T = 5$ let	$S(0) = K = 100$, $r = 0,02$, $\sigma = 0,25$		
	$N = 1000$	$N = 5000$	$N = 10000$
Black-Scholes	$16,53$	$16,53$	$16,53$
RN ocenění	$15,82$	$16,25$	$16,66$
RW ocenění	$15,96$	$16,23$	$16,68$
RN/RW rozdíl	$-0,90\%$	$0,10\%$	$-0,15\%$

$T = 1$ rok	$S(0) = K = 100$, $r = 0,02$, $\sigma = 0,25$		
	$N = 1000$	$N = 5000$	$N = 10000$
Black-Scholes	$8,89$	$8,89$	$8,89$
RN ocenění	$9,90$	$8,84$	$8,92$
RW ocenění	$9,94$	$8,86$	$8,93$
RN/RW rozdíl	$-0,36\%$	$-0,16\%$	$-0,11\%$

Tabulka 7.3: Výsledky ocenění put opce pomocí Black-Scholesova vzorce, rizikově neutrálního ocenění a real world ocenění

7.2 Ocenění pojistného produktu

Nejdříve se podíváme na jednoduchý příklad odloženého důchodu s jednorázově placeným pojistným, garantovaným zhodnocením a podíly na zisku. Na něm si ukážeme ekvivalenci ocenění pomocí rizikově neutrální míry a real world míry s deflátory. Spočteme tržně konzistentní hodnotu závazků a současnou hodnotu budoucích zisků.

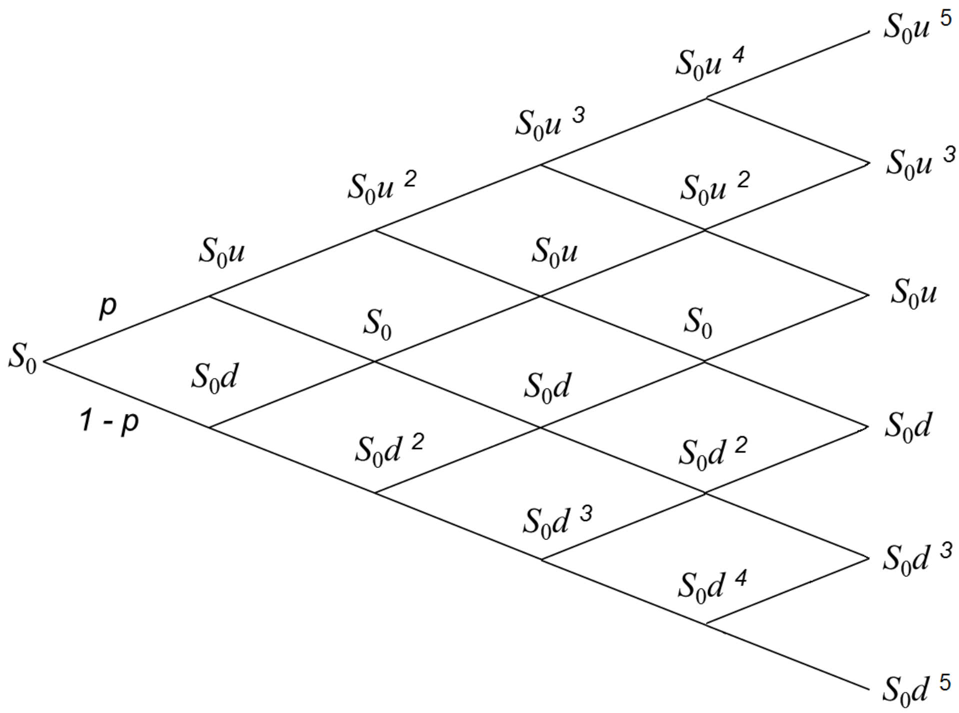
7.2.1 Ekvivalence rizikově neutrálního a real world ocenění

Uvažujme jednoduchý ekonomický model, takže náš trh se skládá pouze z bezrizikového dluhopisu a akcie. Akcie obsahuje tržní riziko a její vývoj popíšeme pomocí pěti-krokového binomického stromu s Cox-Ross-Rubinstein podmínkou

$$u \cdot d = 1, \tag{7.3}$$

kde u je faktor pohybu ceny akcie nahoru a d pohybu ceny dolů. Tato podmínka platí pro real world projekci. Vývoj ceny akcie vidíme na Obrázku 7.2. Výsledky si ukážeme na jednoduchém příkladu.

Zvolme real world pravděpodobnost pohybu ceny akcie nahoru jako $p = 0,6$ a pravděpodobnost pohybu dolů je potom $1 - p = 0,4$. Předpokládejme, že jestliže dojde k růstu hodnoty akcie, potom se v jednom období její cena navýší o $13,5\%$. Volíme tedy $u = 1,135$ a z podmínky 7.3 potom máme $d = 0,881$ pro pokles ceny akcie. Bezrizikovou úrokovou sazbu předpokládáme $r = 2\%$. Na základě



Obrázek 7.1: Vývoj ceny akcie v pěti-krokovém binomickém stromu

těchto předpokladů spočteme očekáváný roční real world výnos akcie μ a rizikově neutrální pravděpodobnost pohybu ceny akcie nahoru p^*:

$$p = \frac{e^{\mu} - d}{u - d} \quad \rightarrow \quad \mu = 3,288\%$$

$$p^* = \frac{e^{r} - d}{u - d} \quad \rightarrow \quad p^* = 0,548$$

Dále předpokládejme, že pojišťovna investuje pojistné od klientů do aktiv dostupných na námi definovaném trhu, a to v poměru 60% do akcií a 40% do bezrizikových dluhopisů. Klientům pojišťovna garantuje minimální výnos $v = 0,008$, tedy roční výnos z pojistného alespoň 0,8% . Jinak klientům připisuje 60% podílů na zisku z investičního výnosu portfolia aktiv. Budeme předpokládat, že celkové pojistné zaplacené klienty je $\Pi = 100000$, což je i počáteční hodnota aktiv, kterou investujeme.

Nyní vygenerujeme real world scénáře v našem ekonomickém prostředí. Máme pěti-krokový binomický strom pro výnoj ceny akcie, takže získáme celkem 32 možných ekonomických scénářů, které odpovídají cestám ve stromu. V programu R jsme tak v podstatě vytvořili zjednodušený generátorů ekonimických scénářu pro real world prostředí.

Poté napočteme real world a rizikově neutrální pravděpodobnosti jednotlivých scénářů. Například pravděpodobnost scénáře 32 (5 nárůstů hodnoty akcie) dle pravděpodobnostní míry $\mathbb{P}$ je

$$p * p * p * p * p = 0,0613$$

a obdobně podle rizikově neutrální míry $\mathbb{P}^*$ máme

$$p^* * p^* * p^* * p^* * p^* = 0,0778.$$

Ze spočtených pravděpodobností rizikově neutrálních a real world scénařů můžeme nyní vyjádřit deflátory pro jednotlivé scénáře a časové kroky, a to pomocí vzorce

$$\varphi_t^i = \frac{p_i^*}{p_i} \cdot \left(\frac{1}{(1+r)^t} \right), \tag{7.4}$$

kde φ_t^i je deflátor pro čas t a scénář i a r je roční bezriziková úroková sazba. Důkaz vzorce (7.4) lze nalézt v [11].

Přehled deflátorů pro jednotlivé scénáře a časy vidíme v Tabulce 7.11. Všimněme si, že v řadě scénářů jsou deflátory větší než 1. Jedná se o scénáře s negativním vývojem na našem trhu, tzn. takové kde dochází k poklesu cen akcie.

Dále bychom měli ověřit martingalovou vlastnost pro deflátory, a to tedy že platí:

1. očekávané hodnoty deflátorů odpovídají bezrizikové diskontní míře

$$\mathbb{E}[\varphi_t] = \sum_{i=1}^{32} \varphi_t^i p_i = e^{-rt} \qquad \text{pro } t = 1, \dots, 5$$

2. deflátory diskontované procesy cen akcie jsou rovny ceně v čase $t = 0$

$$S_0 = \sum_{i=1}^{32} \varphi_t^i S_t p_i \qquad \text{pro } t = 1, \dots, 5$$

	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$	$t=5$
$\mathbb{E}[\varphi_t]$	0,9804	0,9612	0,9423	0,9238	0,9057
e^{-rt}	0,9802	0,9608	0,9418	0,9231	0,9048

Tabulka 7.4: Ověření martingalové vlastnosti pro deflátory

	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$	$t=5$
$\mathbb{E}[\varphi_t S_t]$	100,020	100,040	100,059	100,079	100,099
S_0	100	100	100	100	100

Tabulka 7.5: Ověření martingalové vlastnosti pro diskontované procesy cen akcie

Z Tabulky 7.4 vidíme, že deflátory splňují martingalovou vlastnost s dostatečnou přesností. Martingalovou vlastnost pro proces cen akcie ověříme pro počáteční hodnotu akcie $S_0 = 100$. Z Tabulky 7.5 vidíme, že náhodný proces cen diskontovaný deflátory splňuje martingalovou vlastnost.

Nyní spočteme současnou hodnotu budoucích zisků (Present Value of Future Profits, PVFP) za reálné pravděpodobnostní míry $\mathbb{P}$ s pomocí deflátorů a také za rizikově neutrální míry $\mathbb{P}^*$, kdy diskontujeme bezrizikovou diskontní mírou. Pro real world $PVFP_{RW}$ platí

$$PVFP_{RW} = \sum_{t=1}^{5} \sum_{i=1}^{32} V_t^i p_i D_{t,i},$$

kde $V_{t,i}$ značí výnos z portfolia aktiv pro pojišťovnu v čase t ve scénáři i, který nepřipíšeme klientům. Pro rizikově neutrální $PVFP_{RN}$ máme

$$PVFP_{RN} = \sum_{t=1}^{5} \frac{1}{(1+r)^t} \sum_{i=1}^{32} V_t^i p_i.$$

Vidíme, že v případě rizikově neutrálního ocenění diskontujeme všechny scénáře stejnou diskontní mírou, narozdíl od deflátorů, které jsou specifické pro jednotlivé scénáře. Nyní budeme modelovat cash flow z pojistné smlouvy, abychom spočetli V_t^i.

Nejprve vyjádříme investiční výnos našeho portfolia aktiv v jednotlivých letech a pro dané scénáře, který můžeme vidět v Tabulce 7.12. Potom máme cash flow z pojistných závazků, kde zohledňujeme výnos portfolia, minimální garanci v a podíly na zisku připsané klientům. Cash flow z pasiv, které jsou výplatami klientům vidíme v Tabulce 7.13 a výnosy z portfolia V_t^i, které zůstávají pojišťovně v Tabulce 7.14 . Tyto hodnoty jsou již očištěné o daň 19%.

Nyní už můžeme vyjádřit PVFP podle obou pravděpodobnostních měr a získáváme

$$PVFP_{RW} = -4869,9 = PVFP_{RN}.$$

Vidíme, že ohodnocení s pravděpodobnostní mírou $\mathbb{P}$ dává stejné PVFP jako ohodnocení s mírou $\mathbb{P}^*$ pro naši jednoduchou pojistnou smlouvu a ekonomické prostředí, které jsme si definovali v úvodu kapitoly. Vidíme, že například v tomto případě by byla smlouva pro pojišťovnu ztrátová a nevyplatilo by se jí smlouvu za takovýchto podmínek uzavírat. To je způsobeno tím, že jsme parametry smlouvy a investiční strategii zvolili bez vazby na reálná data. V praxi pojišťovny při naceňování produktů provádějí testy ziskovovsti, z kterých se stanovuje pojistné pro klienta tak, aby byl daný produkt ziskový.

Tržní cenu aktiv označíme MV_A (z anglického market value of assets) a vidíme, že je stejná v real world prostředí s mírou $\mathbb{P}$ i rizikově neutrálním prostředí s $\mathbb{P}^*$

$$MV_A = \sum_{t=1}^{5} \sum_{i=1}^{32} y_{t,i}^{\mathbb{P}} p_i \varphi_t^i = 9483,9 = \sum_{t=1}^{5} \frac{1}{(1+r)^t} \sum_{i=1}^{32} y_{t,i}^{\mathbb{P}^*} p_i^*,$$

kde $y_{t,i}^{\mathbb{P}}$ značí absolutní výnos z portfolia aktiv v real world prostředí a $y_{t,i}^{\mathbb{P}^*}$ v rizikově neutrálním prostředí. Nakonec můžeme vyjádřit tržně konzistentní hodnotu závazků jako

$$MV_L = MV_A - PVFP = 14353,8$$

Hlavním rozdílem v obou přístupech k ocenění je hodnota očekávaného výnosu z aktiv. V real world prostředí s pravděpodobnostní mírou $\mathbb{P}$ mají aktiva rozdílné očekávané výnosy dle jejich rizikovosti, zatímco v rizikově neutrálním prostředí s mírou $\mathbb{P}^*$ mají všechna aktiva očekávaný výnos roven rizikově neutrálnímu výnosu. Zajímá-li nás tedy pouze tržně konzistentní hodnota rezerv, je jedno zda k ocenění použijeme real world nebo rizikově neutrální prostředí. Pokud bychom chtěli zkoumat rozdělení PVFP a relevantní rizikové míry, musíme pracovat s pravděpodobnostní mírou $\mathbb{P}$.

7.2.2 Valuation portfolio

Nyní se podíváme na aplikaci teorie z Kapitoly 6 a pojistné závazky oceníme pomocí oceňovacího portfolia. Nejdříve si definujeme základní parametry našeho produktu a toho jak ho budeme modelovat.

Poté sestavíme ve třech krocích oceňovací portfolio, kdy definujeme jaká cash flow budeme modelovat jakými instrumenty, kolik budeme daných instrumentů k replikaci potřebovat a jak jednotlivé instrumenty ocenit. Uvedeme vyjádření pojistného a nejlepšího odhadu rezerv.

Kromě nejlepšího odhadu vyjádříme také odhad zajištěný proti pojistně technickým rizikům, což pro nás bude riziko týkající se úmrtnosti. Nejprve musíme sestavit pojistně technický deflátor, abychom poté mohli provést stejné kroky výpočtu jako u nejlepšího odhadu. Ukážeme si důležitou podmínku, kterou je nutno vzít v potaz při volbě pravděpodobností úmrtnostích tabulek prvního řádu.

Ve třetí části příkladu již doplníme konkrétní hodnoty do našich obecných vzorců a spočteme ceny našich finančních instrumentů, tedy portfolia $\mathcal{U}$ a Evropské put opce $\mathcal{P}$. Vývoj spotových sazeb budeme modelovat Vašíčkovým modelem na základě měsíčních sazeb pro CHF LIBOR a tržní cenu rizika λ odhadneme z tržních sazeb reprezentovaných Švýcarskými státními dluhopisy. Švýcarská data volíme zejména kvůli jejich dobré dostupnosti a stabilnějšímu vývoji oproti např. sazbě PRIBOR.

Uvažujme jednoduchou pojistnou smlouvu pro případ smrti nebo dožití a homogenní portfolio L_x pojištěných se stejným vstupním věkem $x = 50$. Těchto L_x osob podepsalo v čase 0 následující smlouvu na 5 let:

- jednorázová platba pojistného ve výši Π v čase 0;
- (roční) pojistné plnění v případě smrti je finanční portfolio $\mathcal{U}$ s minimálním garantovaným výnosem $v > 0$;
- pojistné plnění v případě dožití je rovno hodnotě finančního portfolia $\mathcal{U}$.

Jako konečný časový horizont zvolíme $n = 5$, takže uvažujeme model s diskrétním časem, a to pro $t = 0, \ldots, 5$. Předpokládejme, že máme základní aktuárský model z Předpokladu 5.2.2 s pevně zvoleným deflátorem $\boldsymbol{\varphi}$. Pro sestavení VaPo navíc předpokládáme, že $\boldsymbol{\varphi}^T \equiv 1$. Oceňovací proces pro finanční portfolio $\mathcal{U}$ je $(U_t)_{t\in\mathfrak{T}}$ (s počáteční hodnotou $U_0 = 1$). Tento proces je $\mathbb{A}$-adaptovaný, integrovatelný a $\boldsymbol{\varphi}$-konzistentní. L_{x+t} značí počet pojištěných, kteří jsou na živu v čase t. Posloupnost $(L_{x+t})_{t\in\mathfrak{T}}$ je $\mathbb{T}$-adaptovaná a nerostoucí (tedy omezená a integrovatelná). Definujeme:

$$
\begin{aligned}
D_{x+t+1} = L_{x+t} - L_{x+t+1} &\text{ počet osob, které zemřou v intervalu } (t, t+1] \\
p_{x+t+1} &\text{ pravděpodobnost přežití pro } (t, t+1], \\
q_{x+t+1} = 1 - p_{x+t+1} &\text{ pravděpodobnost úmrtí pro } (t, t+1), \\
\mathbb{E}[L_{x+t+1} \mid \mathcal{T}_t] = p_{x+t+1} L_{x+t} &\text{ očekávaný počet těch, kteří přežijí interval } (t, t+1], \\
\mathbb{E}[D_{x+t+1} \mid \mathcal{T}_t] = q_{x+t+1} L_{x+t} &\text{ očekávaný počet těch,} \\
&\text{ kteří zemřou v intervalu } (t, t+1].
\end{aligned}
$$

L_x počátečních smluv generuje cash flow $\boldsymbol{X}$ (pro věk $x = 50$), které vidíme v Tabulce 7.6. Příchozí cash flow (pojistné) je modelováno se záporným znaménkem, odchozí cash flow (pojistná plnění pojistníkům) modelujeme s kladným znaménkem a $y \vee z = \max\{y, z\}$.

čas	cash flow	pojistné	plnění při úmrtí	plnění při dožití
0	X_0	$-L_x\Pi$		
1	X_1		$D_{x+1}(U_1 \vee (1+v)^1)$	
2	X_2		$D_{x+2}(U_2 \vee (1+v)^2)$	
3	X_3		$D_{x+3}(U_3 \vee (1+v)^3)$	
4	X_4		$D_{x+4}(U_4 \vee (1+v)^4)$	
5	X_5		$D_{x+5}(U_5 \vee (1+v)^5)$	$L_{x+5}U_5$

Tabulka 7.6: Rozpad cash flow z L_x pojistných smluv

Oceňovací portfolio

Nyní sestavíme valuation portfolio pro námi definované portfolio smluv a budeme postupovat ve třech krocích jako v Kapitole 6.

Krok 1 při sestavení VaPo

Potřebujeme zvolit finanční portfolia, která budou replikovat cash flow z pojistných závazků:

- Cash flow z pojistného jsou jednoduše peníze v čase $t = 0$. Jednotky označíme $\mathcal{U}^{(0)}$ (což je v podstatě ZCB s maturitou $m = 0$).
- Pojistné plnění při dožití modelujeme finančním portfoliem $\mathcal{U}$.
- Pojistné plnění v případě úmrtí pro $t = 1, \ldots, 5$ je maximum z U_t a $(1+v)^t$ (předpokládáme počáteční hodnotu $U_0 = 1$). Toto maximum modelujeme pomocí

  - podkladového finančního portfolia $\mathcal{U}$ a

  - derivátu na podkladové portfolio $\mathcal{U}$ modelovaného put opcí $\mathcal{P}^{(t)}$, která umožňuje prodat podkladové finanční portfolio $\mathcal{U}$ v čase t za cenu $(1+v)^t$ kdykoli nastane $U_t < (1+v)^t$.

Z této volby finančních portfolií vyplývá, že studujeme 7-dimensionální vektorový prostor, který lze popsat finančními portfolii

$$(\mathcal{U}^{(0)},\mathcal{U},\mathcal{P}^{(1)},\ldots,\mathcal{P}^{(5)}).$$

Předpokládáme, že finanční trh $\mathcal{I}$ je dostatečně pestrý, takže obsahuje všechna tato portfolia. Dostaneme tedy následující mapování (cash flow vyjádření a vyjádření pomocí instrumentů)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X} \mapsto &- L_x \Pi \mathcal{U}^{(0)} + \sum_{k=1}^{5} D_{x+k}(\mathcal{U} + \mathcal{P}^{(k)}) + L_{x+5}\mathcal{U} \\ &= L_x(-\Pi\mathcal{U}^{(0)} + \mathcal{U}) + \sum_{k=1}^{5} D_{x+k}\mathcal{P}^{(k)}.\end{aligned}$$

Z vyjádření pomocí instrumentů vyplývá, že počet podkladových finanční portfolií $\mathcal{U}$, které potřebuje pojišťovna koupit, je pevně daný (neobsahuje žádný prvek náhodnosti), protože každý pojistník dostane právě jedno finanční portfolio bez ohledu na to zda zemře nebo se dožije konce smlouvy. Jediný prvek náhody je v počtu put opcí $\mathcal{P}^{(1)},\ldots,\mathcal{P}^{(5)}$, které potřebuje pojišťovna nakoupit.

Krok 2 v sestavení VaPo

Musíme určit kolik finančních instrumentů potřebujeme držet v čase t. VaPo v čase t je dáno pomocí

$$VaPo_t(\boldsymbol{X}) = L_x(-\Pi\mathcal{U}^{(0)} + \mathcal{U}) + \sum_{k=1}^{5} \mathbb{E}[D_{x+k} \mid \mathcal{T}_t]\mathcal{P}^{(k)},$$

a pro budoucí závazky v čase $t = 0,\ldots,4$ získáváme

$$\begin{aligned} VaPo_t(\boldsymbol{X}_{(t+1)}) &= L_{x+t}\mathcal{U} + \sum_{k=t+1}^{5} \mathbb{E}[D_{x+k} \mid \mathcal{T}_t]\mathcal{P}^{(k)} \\ &= L_{x+t}\mathcal{U} + \sum_{k=t+1}^{5} q_{x+k}\left(\prod_{s=t+1}^{k-1} p_{x+s}\right) L_{x+t}\mathcal{P}^{(k)} \\ &= L_{x+t}\left[\mathcal{U} + \sum_{k=t+1}^{5} q_{x+k}\left(\prod_{s=t+1}^{k-1} p_{x+s}\right)\mathcal{P}^{(k)}\right]. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Druhá rovnost vyplývá z tower property (2.11) pro podmíněnou střední hodnotu $\mathbb{E}[L_{x+s+1} \mid \mathcal{T}_s] = p_{x+s+1}L_{x+s}$ a $\mathbb{E}[D_{x+s+1} \mid \mathcal{T}_s] = q_{x+s+1}L_{x+s} = (1 - p_{x+s+1})L_{x+s}$. Poznamenejme, že $VaPo_0(\boldsymbol{X}_{(1)})$ jsou celkové pojistné závazky z L_x pojistníků, poté co zaplatili počáteční splátku pojistného Π.

Krok 3: Peněžní hodnota VaPo

V posledním kroku vyjádříme peněžní hodnotu VaPo. V našem příkladě je v čase $t = 0$ dána jako

$$
\begin{aligned}
Q_0^0[\boldsymbol{X}] &= L_x(-\Pi + U_0) + \sum_{k=1}^{5} \mathbb{E}[D_{x+k} \mid \mathcal{T}_0] Put_0(\mathcal{U}, (1+v)^k, k) \\
&= L_x \left[-\Pi + U_0 + \sum_{k=1}^{5} q_{x+k} \left(\prod_{s=1}^{k-1} p_{x+s} \right) Put_0(\mathcal{U}, (1+v)^k, k) \right], \qquad (7.6)
\end{aligned}
$$

kde U_t je cena finančního portfolia $\mathcal{U}$ v čase t a $Put_t(\mathcal{U}, (1+v)^m, m)$ značí cenu put opce $\mathcal{P}^{(m)}$ v čase t s realizační cenou $(1+v)^m$ v čase m. Tento oceňovací proces pro put opci musí být také konzistentní vzhledem k $\boldsymbol{\varphi}$, takže je pro $t \leq m$ dán jako

$$
Put_t(\mathcal{U}, (1+v)^m, m) = \frac{1}{\varphi_t} \mathbb{E}[\varphi_m((1+v)^m - U_m)_+ \mid \mathcal{F}_t].
$$

Z vyjádření (7.6) můžeme vyjádřit čisté rizikové pojistné Π^0. Musíme zvolit Π v (7.6) tak, aby platil princip rovnováhy $Q_0^0[\boldsymbol{X}] = 0$. Získáme tedy

$$
\Pi^0 = U_0 + \sum_{k=1}^{5} q_{x+k} \left(\prod_{s=1}^{k-1} p_{x+s} \right) Put_0(\mathcal{U}, (1+v)^k, k).
$$

Čisté rizikové pojistné Π^0 přesně odpovídá očekávané hodnotě pojistných plnění.

Nejlepší odhad rezerv na budoucí pojistné závazky v čase $t = 0, \ldots, 4$ je dán jako

$$
\mathcal{R}_t^0(\boldsymbol{X}_{(t+1)}) = L_{x+t} \left[U_t + \sum_{k=t+1}^{5} q_{x+k} \left(\prod_{s=t+1}^{k-1} p_{x+s} \right) Put_t(\mathcal{U}, (1+v)^k, k) \right].
$$

Tato rovnost popisuje peněžní run-off budoucích pojistných závazků.

Zajištěné oceňovací portfolio

Nyní se podíváme jak určit portfolio zajištěné proti pojistně technickým rizikům. O nich občas mluvíme jako o nezajistitelných rizicích, ale tato nezajistitelnost se vztahuje k instrumentům aktiv dostupným na trhu. Na našem příkladu L_x pojištěných ukážeme aplikaci torie z Kapitoly 6.3.

Pro $\mathbb{T}$-adaptovanou posloupnost $(L_{x+t})_{t=0,\ldots,5}$ chceme najít rizikové faktory $\boldsymbol{R}$, které nám umožní sestavit $\mathbb{T}$-adaptovaný pojistně technický deflátor $\boldsymbol{\varphi}^T$. Nejdříve uvažujme očekávaný počet osob, které přežijí období $(t, t+1]$

$$
\mathbb{E}[L_{x+t+1} \mid \mathcal{T}_t] = p_{x+t+1} L_{x+t},
$$

kde $p_{x+t+1} \in (0, 1)$ je pravděpodobnost přežití jednoho člověka. Pro všechny pojištěné předpokládáme stejný věk $x + t$ (a stejné pohlaví), takže máme homogenní portfolio s pravděpodobnostmi přežití p_{x+t+1} pro všechny pojištěné. Navíc předpokládáme, že všichni pojištění jsou nezávislí. Předpoklad nezávislosti je často rozumný, ale například pro pojištění, kde by bylo hodně manželských páru, je potřeba zvážit jeho správnost. Za těchto předpokladů můžeme upravit výše uvedenou rovnost na

$$\mathbb{E}[L_{x+t+1} \mid \mathcal{T}_t] = \sum_{i=1}^{L_{x+t}} \mathbb{E}[R_{x+t+1}^{(i)} \mid \mathcal{T}_t] = p_{x+t+1} L_{x+t},$$

kde $R_{x+t+1}^{(i)}$ je $\mathcal{T}_{t+1}$-měřitelný indikátor zda osoba i z portfolia L_{x+t} přežije období $(t, t+1]$. Předpokládáme, že $R_{x+t+1}^{(i)}$, $i = 1, \ldots, L_{x+t}$, jsou i.i.d. (nezávislé a stejně rozdělené náhodné veličiny) s Bernoulliho rozdělením s pravděpodobností přežití p_{x+t+1}, za podmínky, že máme dáno $\mathcal{T}_t$. Naším cílem je zvolit tyto indikátory jako risk drivery, takže uvažujme $\mathcal{T}_{t+1}$-měřitelný risk driver

$$\boldsymbol{R}_{t+1} = (R_{x+t+1}^{(1)}, \ldots, R_{x+t+1}^{(L_{x+t})}).$$

Poznamenejme, že $\boldsymbol{R}_{t+1}$ má i.i.d. prvky, pokud je dáno $\mathcal{T}_t$. Nyní sestrojíme pojistně technický deflátor φ_{t+1}^T. Začneme od pojistně technického span-deflátoru, který označíme jako

$$Y_{t+1}^T = \frac{\varphi_{t+1}^T}{\varphi_t^T}.$$

O jednotlivých životech předpokládáme, že jsou i.i.d., za podmínky $\mathcal{T}_t$, takže modelujeme span-deflátor jako následující součin

$$Y_{t+1}^T = Y_{t+1}^T(\boldsymbol{R}_{t+1}) = \prod_{i=1}^{L_{x+t}} Y_{t+1}^T(R_{x+t+1}^{(i)}),$$

s funkcí $Y_{t+1}^T(\cdot) : \{0,1\} \to \mathbb{R}_+$ tak, že každý faktor v součinu má podmíněnou střední hodnotu rovnu 1. Takže platí

$$\mathbb{E}[Y_{t+1}^T \mid \mathcal{T}_t] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{L_{x+t}} Y_{t+1}^T(R_{x+t+1}^{(i)}) \mid \mathcal{T}_t\right] = \prod_{i=1}^{L_{x+t}} \mathbb{E}[Y_{t+1}^T(R_{x+t+1}^{(i)}) \mid \mathcal{T}_t] = 1,$$

kde jsme ve druhém kroku využili nezávislosti jednotlivých životů. Nyní zvolíme následující span-deflátory, které pro $p_{x+t+1}^+ \in (0,1)$ definujeme jako

$$\begin{aligned} Y_{t+1}^T(1) &= \frac{p_{x+t+1}^+}{p_{x+t+1}} > 0 \\ Y_{t+1}^T(0) &= \frac{1 - p_{x+t+1}^+}{1 - p_{x+t+1}} = \frac{q_{x+t+1}^+}{q_{x+t+1}} > 0, \end{aligned} \tag{7.7}$$

pro $q_{x+t+1}^+ = 1 - p_{x+t+1}^+ \in (0,1)$. Potom získáme požadovanou normalizaci

$$\mathbb{E}[Y_{t+1}^T(R_{x+t+1}^{(i)}) \mid \mathcal{T}_t] = p_{x+t+1} \frac{p_{x+t+1}^+}{p_{x+t+1}} + q_{x+t+1} \frac{q_{x+t+1}^+}{q_{x+t+1}} = 1.$$

Očekávaný počet přeživších v intervalu $(t, t+1]$ diskontovaný pojistně technickými span-deflátory je potom (použijeme rozdělení span-deflátorů, normalizaci a nezávislost jednotlivých životů)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y^T_{t+1} L_{x+t+1} \mid \mathcal{T}_t] &= \sum_{i=1}^{L_{x+t}} \mathbb{E}[Y^T_{t+1} R^{(i)}_{x+t+1} \mid \mathcal{T}_t] \\
&= \sum_{i=1}^{L_{x+t}} \mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{L_{x+t}} Y^T_{t+1}(R^{(j)}_{x+t+1}) R^{(i)}_{x+t+1} \middle| \mathcal{T}_t \right] \\
&= \sum_{i=1}^{L_{x+t}} \mathbb{E}\left[Y^T_{t+1}(R^{(i)}_{x+t+1}) R^{(i)}_{x+t+1} \middle| \mathcal{T}_t \right] \\
&= \sum_{i=1}^{L_{x+t}} p_{x+t+1} \frac{p^+_{x+t+1}}{p_{x+t+1}} = p^+_{x+t+1} L_{x+t}.
\end{aligned}
$$

Analogicky máme pro očekávaný počet úmrtí v $(t, t+1]$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y^T_{t+1} D_{x+t+1} \mid \mathcal{T}_t] &= L_{x+t} \mathbb{E}[Y^T_{t+1} L_{x+t+1} \mid \mathcal{T}_t] \\
&= L_{x+t} - p^+_{x+t+1} L_{x+t} = q^+_{x+t+1} L_{x+t}.
\end{aligned}
$$

Pojistně technický span-deflátor Y^T_{t+1} umožňuje změnu z pravděpodobnosti přežití p_{x+t+1} (a pravděpodobnosti úmrtí q_{x+t+1}) na pravděpodobnost přežití p^+_{x+t+1} (a pravděpodobnost úmrtí q^+_{x+t+1}). V životním pojištění se $(p_{x+t})_{t,x}$ nazývá úmrtnostní tabulka druhého řádu a odpovídá očekávaným hodnotám, zatímco $(p^+_{x+t})_{t,x}$ je úmrtnostní tabulka prvního řádu, která zahrnuje obezřetnostní přirážku. Jaké má tato přirážka znaménko zavisí na podkladovém pojistném produktu. Například pro doživotní důchod volíme $p^+_{x+t+1} > p_{x+t+1}$ pro všechna t. Pokud se podíváme na technické rezervy, které musí tvořit pojišťovny v ČR dle zákona o pojišťovnictví, potom například v případě výpočtu rezervy na splnění závazků z použité technické úrokové míry a ostatních početních parametrů používáme úmrtnostní tabulky prvního řádu.

Pojistně technický deflátor je tedy definován jako

$$
\varphi^T_t = \prod_{s=1}^{t} Y^T_s = \prod_{s=1}^{t} \prod_{i=1}^{L_{x+s-1}} Y^T_s(R^{(i)}_{x+s}). \tag{7.8}
$$

Nyní sestavíme VaPo zajištěné proti pojistně technickým rizikům. **Krok 1**, kdy musíme zvolit finanční portfolia pro replikaci závazků, je stejný jako u nezajištěného VaPo.

Krok 2: Zajištěné VaPo Musíme určit kolik finančních instrumentů z kroku 1 potřebujeme držet v čase t. Pro pojistně technický deflátor (7.8) máme

$$
VaPo^{prot}_t(\boldsymbol{X}) = L_x(-\Pi\mathcal{U}^{(0)}) + \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{\varphi^T_t} \mathbb{E}[\varphi^T_k D_{x+k} \mid \mathcal{T}_t] \mathcal{P}^{(k)},
$$

a pro očekávané pojistné závazky v čase $t = 0, \ldots, 4$ máme

$$
VaPo^{prot}_t(\boldsymbol{X}_{(t+1)}) = L_{x+t}\mathcal{U} + \sum_{k=t+1}^{5} \frac{1}{\varphi^T_t} \mathbb{E}[\varphi^T_k D_{x+k} \mid \mathcal{T}_t] \mathcal{P}^{(k)}.
$$

Zvolíme-li úmrtnostní tabulku prvního řádu $p^+_{x+t} \in (0,1)$, máme pravděpodobnosti úmrtí $q^+_{x+t} = 1 - p^+_{x+t}$. Odtud vyplývá rovnost

$$\frac{1}{\varphi_t^T}\mathbb{E}[\varphi_k^T D_{x+k} \mid \mathcal{T}_t] = q^+_{x+k}\left(\prod_{s=t+1}^{k-1} p^+_{x+s}\right) L_{x+t}.$$

Takže pro zajištěné portfolio máme

$$VaPo_t^{prot}(\boldsymbol{X}_{(t+1)}) = L_{x+t}\left[\mathcal{U} + \sum_{k=t+1}^{5} q^+_{x+k}\left(\prod_{s=t+1}^{k-1} p^+_{x+s}\right)\mathcal{P}^{(k)}\right]. \qquad (7.9)$$

Abychom získali přirážku za nezajistitelná rizika MVM_t pro výplatu v čase $k = t+1$ musí platit $q^+_{x+t+1} > q_{x+t+1}$. Abychom získali přirážku pro výplatu v čase $k = t+2$ musí platit $q^+_{x+t+2}p^+_{x+t+1} > q_{x+t+2}p_{x+t+1}$, ale z výplaty v čase $k = t+1$ jíž máme $p^+_{x+t+1} < p_{x+t+1}$, takže volba q^+_{x+t+2} musí vykompenzovat i první periodu $t+1$.

Krok 3: Peněžní hodnota zajištěného VaPo

V posledním kroku spočteme peněžní hodnotu zajištěného VaPo. V čase $t = 0$ je dána rovností

$$Q_0[\boldsymbol{X}] = L_x\left[-\Pi + U_0 + \sum_{k=1}^{5} q^+_{x+k}\left(\prod_{s=1}^{k-1} p^+_{x+s}\right) Put_0(\mathcal{U}, (1+v)^k, k)\right],$$

kde U_t je cena finančního portfolia $\mathcal{U}$ v čase t a $Put_t(\mathcal{U}, (1+v)^m, m)$ značí cenu put opce $\mathcal{P}^{(m)}$ v čase t. Pokud použijeme princip ekvivalence pojistného $Q_0[\boldsymbol{X}] = 0$, získáme vyjádření pro rizikově upravené pojistné Π

$$\Pi = U_0 + \sum_{k=1}^{5} q^+_{x+k}\left(\prod_{s=1}^{k-1} p^+_{x+s}\right) Put_0(\mathcal{U}, (1+v)^k, k).$$

Poznamenejme, že vzhledem k averzi k riziku by mělo být toto rizikově upravené pojistné Π větší než čisté rizikové pojistné Π^0. Máme tedy následující podmínku na úmrtnostní tabulku prvního řádu p^+_{x+t}

$$\sum_{k=1}^{5} q^+_{x+k}\left(\prod_{s=1}^{k-1} p^+_{x+s}\right) Put_0(\mathcal{U}, (1+v)^k, k) > \sum_{k=1}^{5} q_{x+k}\left(\prod_{s=1}^{k-1} p_{x+s}\right) Put_0(\mathcal{U}, (1+v)^k, k).$$

Rizikově upravené rezervy na budoucí pojistné závazky jsou v čase $t = 0, \ldots, 4$

$$\mathcal{R}_t(\boldsymbol{X}_{(t+1)}) = L_{x+t}\left[U_t + \sum_{k=t+1}^{5} q^+_{x+k}\left(\prod_{s=t+1}^{k-1} p^+_{x+s}\right) Put_t(\mathcal{U}, (1+v)^k, k)\right].$$

Předpokládejme, že pro všechna $t = 0, \ldots, 4$ platí

$$\sum_{k=t+1}^{5} q^+_{x+k}\left(\prod_{s=t+1}^{k-1} p^+_{x+s}\right) Put_t(\mathcal{U}, (1+v)^k, k) > \sum_{k=t+1}^{5} q_{x+k}\left(\prod_{s=t+1}^{k-1} p_{x+s}\right) Put_t(\mathcal{U}, (1+v)^k, k). \qquad (7.10)$$

Odvození předpokladu je uvedeno v příloze práce a získáme z něj vhodnou volbu pro p^+_{x+t}, a to

$$p^+_{x+t} \in \left(\max_{k=t+1,\dots,5} \frac{h_{t+1}(k)}{h^+_{t+1}(k)} p_{x+t}, p_{x+t} \right), \tag{7.11}$$

kde $h^+_{t+1}(k) = q^+_{x+k} \prod_{s=t+1}^{k-1} p^+_{x+s}$ a $h_{t+1}(k) = q_{x+k} \prod_{s=t+1}^{k-1} p_{x+s}$. Z volby (7.11) pro všechna $t+1 = 1, \dots, 5$ vyplývá, že máme kladnou přirážku za nezajistitelná rizika pro $L_{x+t} > 0$, která je

$$\begin{aligned} MVM^{\varphi}_t(\boldsymbol{X}_{(t+1)}) &= \mathcal{R}_t(\boldsymbol{X}_{(t+1)}) - \mathcal{R}^0_t(\boldsymbol{X}_{(t+1)}) \\ &= L_{x+t} \sum_{k=t+1}^{5} \left[q^+_{x+k} \left(\prod_{s=t+1}^{k-1} p^+_{x+s} \right) - q_{x+k} \left(\prod_{s=t+1}^{k-1} p_{x+s} \right) \right] \\ &\quad \times Put_t(\mathcal{U}, (1+r)^k, k) > 0. \end{aligned}$$

V podstatě část pravděpodobnosti přežití $\prod_{s=1}^{k-1} p_{x+s}$ alokujeme k pravděpodobnostem úmrtí prvního řádu, tedy posuneme úmrtností tabulky tak, že zemře více lidí než se očekává, což vede k vyšším výplatám pojistného plnění.

Numerické výsledky

Ve vyjádření (7.5) pro VaPo a (7.9) pro zajištěné VaPo máme předpoklad normalizace pro finanční portfolio $\mathcal{U}$, tedy $U_0 = 1$. To by v podstatě znamenalo, že každý klient zaplatil pojistné 1, které se poté investovalo do finančního portfolia. Abychom pracovali s rozumnými výsledky, zvolíme parametr $a = 10000$, kterým přenásobíme obě rovnice. Získáváme vyjádření

$$VaPo_t(\boldsymbol{X}_{(t+1)}) = L_{x+t} a \left[\mathcal{U} + \sum_{k=t+1}^{5} q_{x+k} \left(\prod_{s=t+1}^{k-1} p_{x+s} \right) \mathcal{P}^{(k)} \right],$$

$$VaPo^{prot}_t(\boldsymbol{X}_{(t+1)}) = L_{x+t} a \left[\mathcal{U} + \sum_{k=t+1}^{5} q^+_{x+k} \left(\prod_{s=t+1}^{k-1} p^+_{x+s} \right) \mathcal{P}^{(k)} \right],$$

kde a lze považovat za výši investice v jednotkách např. určité měny pro každého z L_{x+t} klientů. Nyní musíme vyjádřit náhodné procesy pro finanční portfolio $\mathcal{U}$ a Evropskou put opci $\mathcal{P}^{(k)}$ a zvolit pravděpodobnosti pro úmrtnostní tabulky prvního a druhého řádu p_{x+t} a p^+_{x+t}. Jako pravděpodobnosti z úmrtností tabulky druhého řádu p_{x+t} zvolíme data z populačních úmrtnostích tabulek Českého Statistického Úřadu. Jedná se o úmrtností tabulky z roku 2013 a budeme předpokládat, že naše pojištění uzavřeli pouze muži. Data jsou dostupná z [12]. Získáme tedy úmrtnosti druhého řádu q_{x+t}, které vidíme v Tabulce 7.7.

t	1	2	3	4	5
q_{50+t}	0,51%	0,55%	0,64%	0,72%	0,81%

Tabulka 7.7: Pravděpodobnosti úmrtí druhého řádu q_{x+t} pro muže ve věku $x = 50$

Abychom získali správné pravděpodobnosti p^+_{x+t} pro úmrtnostní tabulky prvního řádu, musíme zvolit takové, které splňují podmínku (7.11). Pokud zdvojnásobíme pravděpodobnosti úmrtí pro jednotlivé roky, tedy $q^+_{x+t} = 2q_{x+t}$, bude tato podmínka splněna jak vidíme v Tabulce 7.8.

t	0	1	2	3	4
p_{50+t}	99,54%	99,49%	99,45%	99,36%	99,28%
p^+_{50+t}	99,08%	98,99%	98,90%	98,56%	98,38%
$\max_{k=t+1,\ldots,5} \frac{h_{t+1}(k)}{h^+_{t+1}(k)} p_{50+t}$	51,00%	50,72%	50,41%	50,05%	49,64%

Tabulka 7.8: Ověření podmínky (7.11) pro pravděpodobnosti přežití

Máme tedy následující volbu pravděpodobností úmrtnosti q^+_{50+t} z úmrtnostní tabulky prvního řádu:

t	1	2	3	4	5
q^+_{50+t}	1,02%	1,10%	1,28%	1,44%	1,62%

Tabulka 7.9: Pravděpodobnosti úmrtí prvního řádu q^+_{x+t} pro muže ve věku $x = 50$

Nyní určíme náhodné procesy finančních instrumentů, tedy portfolia $\mathcal{U}$ a Evropské put opce $\mathcal{P}$. Pro finanční portfolio $\mathcal{U}$ předpokládáme oceňovací proces $(U_t)_{t\in\mathfrak{T}}$ s exponenciálním růstem a $U_0 = 1$, takže pro $t \in \mathfrak{T}_-$ máme

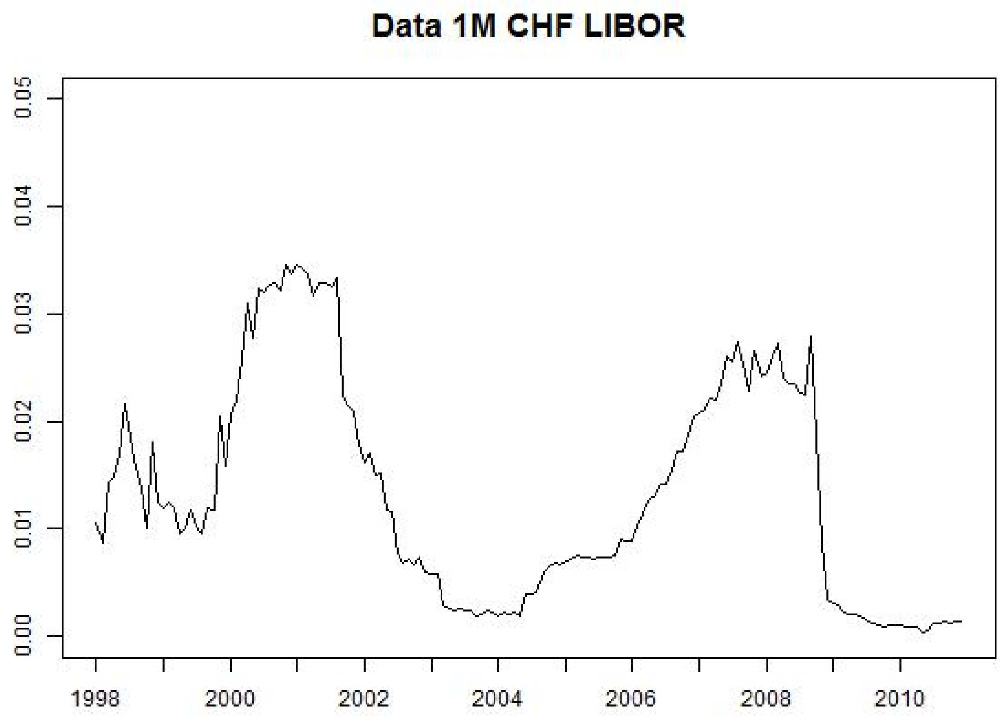
$$U_{t+1} = U_t \exp\{(1 + \lambda\sigma c)r_t - \frac{1}{2}\sigma^2 - \sigma\delta_{t+1}\},$$

viz Věta 4.2. Pro parametr $Cov(\varepsilon_{t+1}, \delta_{t+1} \mid \mathcal{A}_t) = c \in (-1, 1)$ předpokládáme $c = 1$ jak jsme uvedli v (3.5). Parametr tržní ceny rizika λ odhadneme z dat níže v této kapitole a volatilitu finančního portfolia $\mathcal{U}$ zvolíme $\sigma = 15\%$. Dále předpokládáme, že finanční deflátor $\boldsymbol{\varphi}^A$ je modelován diskrétním jednofaktorovým Vašíčkovým modelem, který jsme uvedli v Kapitole 3, a náhodný proces $(U_t)_{t\in\mathfrak{T}}$ je $\boldsymbol{\varphi}$-konzistentní. Abychom mohli spočíst deflátory φ_t a hodnoty finančního portfolia U_t, potřebujeme namodelovat spotové sazby r_t.

Jelikož v našem příkladu použijeme jednofaktorový Vašíčkův model, který není příliš robustní při použití na reálná data, zvolíme jako referenční sazbu švýcarský CHF LIBOR, kde jsou data dobře dostupná z [14] a časová řada je dostatečně dlouhá a nevykazuje tolik výkyvů jako například PRIBOR. K odhadu parametrů Vašíčkova modelu použijeme metodu maximální věrohodnosti popsanou v Kapitole 3.2. Vzorce z Tvrzení 3.3.1 naprogramujeme v softwaru R a kód je k nahlednutí na přiloženém DVD.

Nejprve musíme vybrat dostupná pozorování $r_{0:T} = \{r_0, \ldots, r_T\}$. Mělo by se jednat o krátkodobé bezrizikové sazby s malým časovým krokem δ. Pokud se pohybujeme v prostředí s diskrétním časem, záleží na volbě δ. Spotové sazby $(r_t)_{t\in\mathfrak{T}}$ a odpovídající numeraire bankovního účtu $(B_t)_{t\in\mathfrak{T}}$ se mohou značně lišit v závislosti na volbě časového kroku $\delta = 1$ (roční časový interval) nebo $\delta = 1/12$ (měsíční časový interval). Pro odhad parametrů spotových sazeb zvolíme měsíční data a potom je transformujeme na roční krok, zejména proto abychom měli větší počet pozorování. V jednofaktorovém Vašíčkově modelu to provedeme pomocí vzorců (3.16) z Kapitoly 3.2.

Jak už jsme uvedli výše, pro kalibraci bezrizikových sazeb použijeme jednoměsíční CHF LIBOR, takže máme měsíční časový krok $\delta = 1/12$. Je nutné poznamenat, že zanedbáme kreditní riziko a riziko likvidity. Pozorované hodnoty jsou z období od 01/1998 do 12/2010, které vidíme na Obrázku 7.2.



Obrázek 7.2: Data pro CHF LIBOR z období 01/1998 až 12/2010

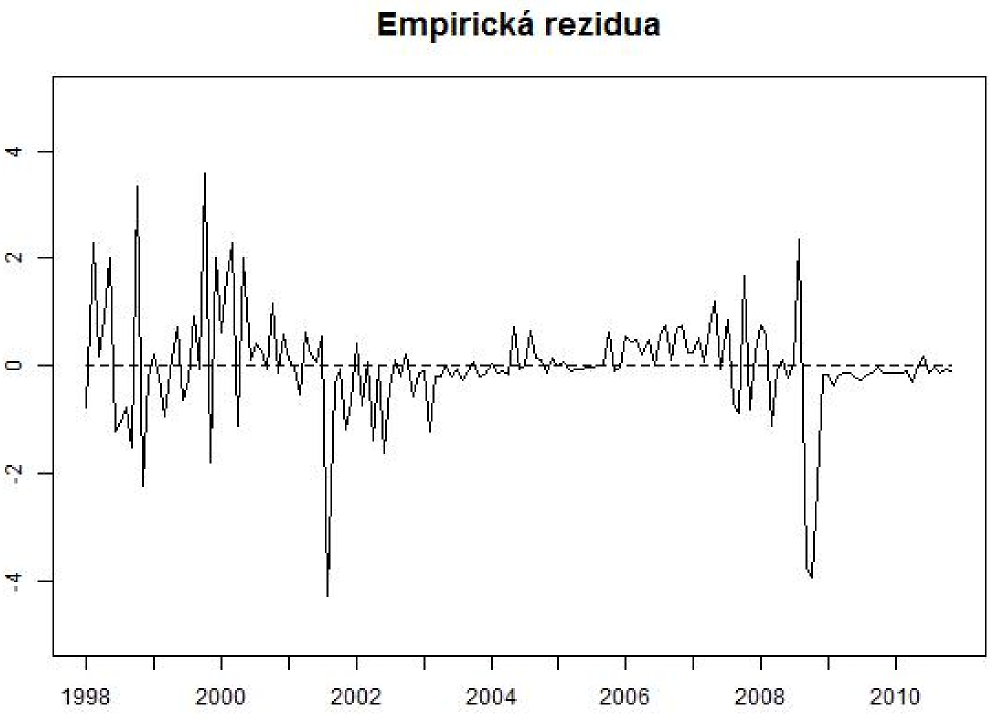
Nejprve odhadneme parametry pro měsíční data a získáme následující odhady

$$\widehat{\beta_\delta} = 0,9759, \quad \widehat{b_\delta^*} = 0,0110 \quad \text{a} \quad \widehat{g_\delta^2} = 5,92 \cdot 10^{-6}.$$

S použitím těchto odhadů předpokladů můžeme na základě vyjádření (3.13) spočítat empirická rezidua definovaná jako

$$\widehat{\varepsilon_t} = \frac{r_t - \widehat{\beta_\delta} r_{t-1} - (1 - \widehat{\beta_\delta})\widehat{b_\delta^*}}{\widehat{g_\delta}} \qquad \text{pro } t = 1, \dots, T.$$

Tato empirická rezidua by měla přibližně vypadat jako posloupnost i.i.d. Z grafu 7.3 vidíme, že je tento předpoklad pravděpodobně porušen. Pokud spočteme empirickou korelaci mezi po sobě jdoucími rezidui získáme $-0,03$, což je pořád celkem rozumná hodnota. Pokud spočteme empirickou korelaci pro absolutní hodnoty empirických reziduí $|\widehat{\varepsilon_t}|$, které vidíme v grafu 7.4, získáme hodnotu $+0,42$, z čehož vyplývá relativně velká závislost (negativní) mezi po sobě jdoucími empirickými rezidui. Pozorování s vysokou zápornou hodnotou zvyšuje pravděpodobnost vysoké kladné hodnoty v dalším období. Znamená to tedy, že



Obrázek 7.3: Empirická rezidua $\widehat{\varepsilon_t}$ pro 1M CHF LIBOR

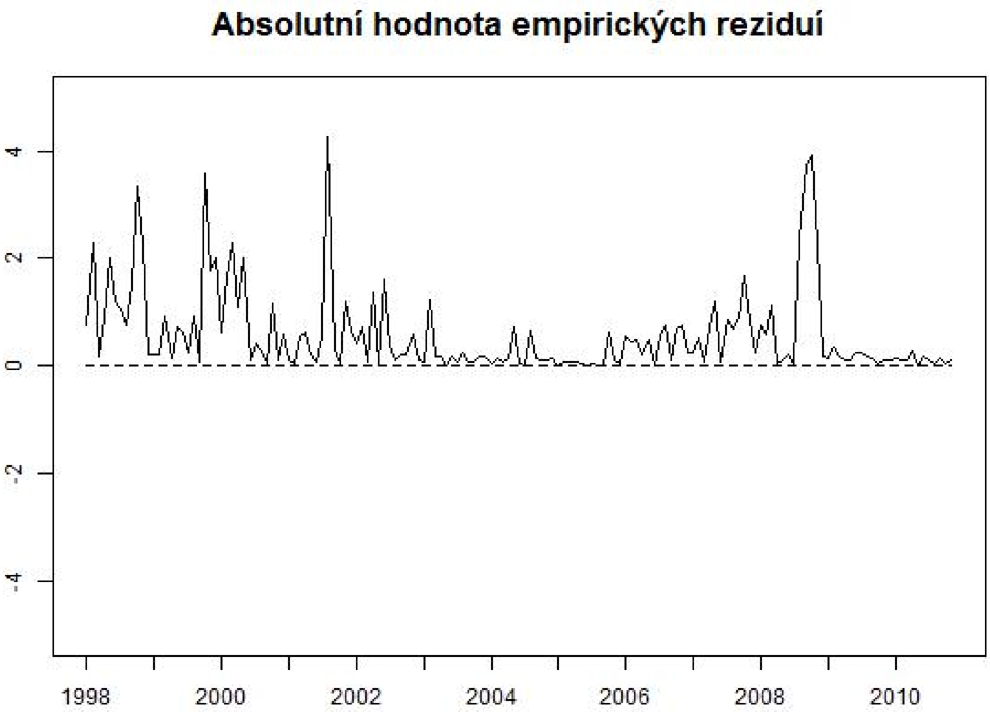
bychom měli pravděpodobně použít jiné rozdělení pravděpodobností nebo bychom měli zavislost v čase modelovat jinak. Jelikož nám jde jen o ilustrativní příklad, zůstaneme u námi zvoleného rozdělení.

Odhadli jsme hodnoty parametrů pro měsíční krok $\delta = 1/12$ a nyní je pomocí vzorců (3.16) transformujeme na parametry pro roční krok. Získáváme hodnoty

$$\widehat{\beta} = 0,7462, \quad \widehat{b^*} = 0,0110 \quad \text{a} \quad \widehat{g^2} = 5,51 \cdot 10^{-5}.$$

Dlouhodobý průměr $\widehat{b^*_\delta} = \widehat{b^*}$. Na grafu 7.5 vidíme výsledné výnosové křivky pro odhady parametrů $\widehat{\beta_\delta}$, $\widehat{b^*_\delta}$, $\widehat{g^2_\delta}$ (měsíční krok) a $\widehat{\beta}$, $\widehat{b^*}$, $\widehat{g^2}$ (roční krok). Pro oba časové kroky jsme stanovili tržní cenu rizika $\lambda \equiv 0$ a počáteční spotovou sazbu $r_0 = 0,1425\%$, která odpovídá 1M CHF LIBOR v 12/2010. Vidíme, že se obě křivky liší, přičemž ta s měsíčním krokem je vyšší, protože umožňuje větší množství investičních příležitostí. Obě křivky konvergují ke stejnému dlouhodobému průměru $1,10\%$.

Pokud nyní nakalibrujeme ročně úročený jednofaktorový Vašíčkův model s diskrétním časem na tržní sazby Švýcarských státních dluhopisů s $r_T = 0,44\%$ k 12/2010, získáme pomocí metody nejmenších čtverců odhad parametru tržní ceny rizika $\widehat{\lambda} = 24,8$. Na grafu 7.6 vidíme, že spotové sazby $Y(T, m, r_T)(\widehat{\lambda})$ pro námi odhadnuté parametry nesedí na data úplně přesvědčivě, což je způsobeno tím, že Vašíčkův model nemá dostatečné množství stupňů volnosti, aby lépe kopíroval naše data. Jelikož se data z let 2008-2010 vztahují na období finanční krize, získáváme poměrně vysoký parametr tržní ceny za riziko. Pokud bychom pozorování z let 2008-2010 odstranili, získáme odhad parametru tržní ceny rizika



Obrázek 7.4: Absolutní hodnota empirických reziduí $|\widehat{\varepsilon_t}|$ pro 1M CHF LIBOR

$\widehat{\lambda} = 8,2$.

Cena Evropské put opce $\mathcal{P}^{(T)}$ v čase t se splatností T a realizační cenou $K = (1+v)^T$ na podkladové aktivum $\mathcal{U}$ je dána (viz Tvrzení 4.3.3) vzorcem

$$Put_t(\mathcal{U}, (1+v)^T, T) = P(t,T)(1+v)^T \Phi(-d_1 + \sigma^{\mathcal{U}}_{T|t}) - U_t \Phi(-d_1),$$

s Vašíčkovou cenou pro ZCB $P(t,T)$ v čase $t \leq T$ a

$$d_1 = -\frac{1}{\sigma^{\mathcal{U}}_{T|t}} \log\left(\frac{P(t,T)(1+v)^T}{U_t}\right) + \frac{1}{2}\sigma^{\mathcal{U}}_{T|t},$$

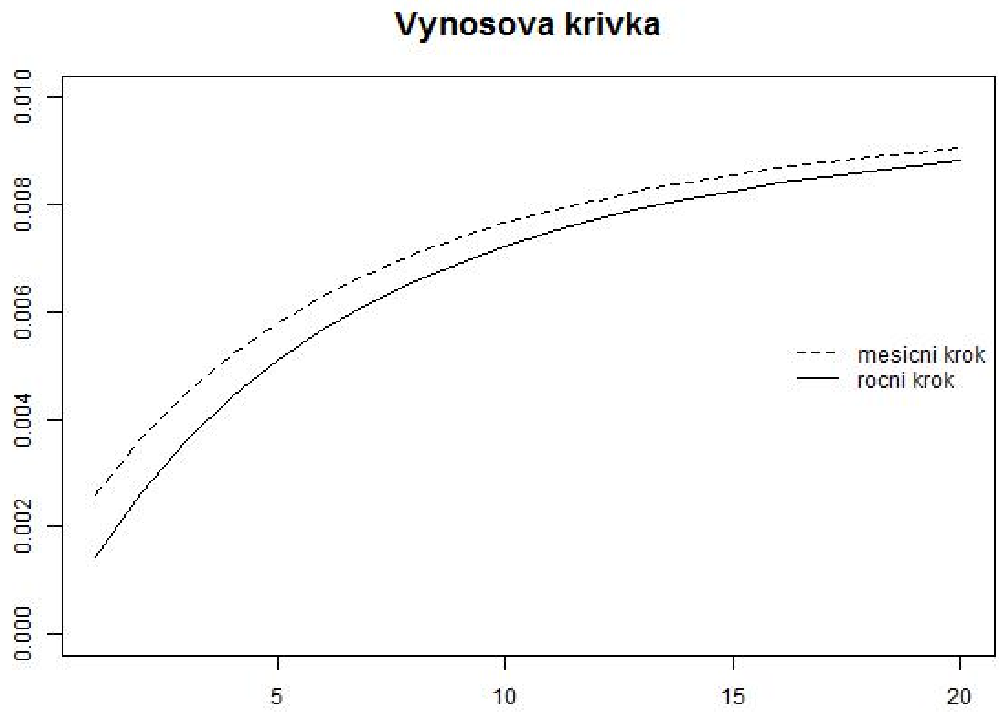
$$(\sigma^{\mathcal{U}}_{T|t})^2 = g^2 \sum_{s=t+1}^{T-1} B(s,T)^2 - 2g\sigma c \sum_{s=t+1}^{T-1} B(s,T) + (T-t)\sigma^2.$$

Spočteme tedy ceny Evropských put opcí $\mathcal{P}^{(T)}$ pro minimální garantovanou úrokovou sazbu $v = 1\%$. Ceny vidíme v následující tabulce:

Splatnost T	1	2	3	4	5
$Put_0(\mathcal{U}, (1+r)^T, T)$	0,0598	0,0872	0,1038	0,1157	0,1243

Tabulka 7.10: Ceny Evropských put opcí v čase 0: $Put_0(\mathcal{U}, (1+r)^T, T)$ pro minimální garanci $v = 1\%$

Nejlepší odhad rezerv v čase 0 pro $L_x = 100$ je dán jako (volíme parametr



Obrázek 7.5: Výnosová křivka $m > T \mapsto R(T, m)$ pro měsíční a roční krok

$a = 10000$, abychom dostali výsledek v rozumných jednotkách)

$$\mathcal{R}_0^0(\boldsymbol{X}_{(1)}) = L_x a \left[U_0 + \sum_{k=1}^{5} q_{x+k} \left(\prod_{s=1}^{k-1} p_{x+s} \right) Put_0(\mathcal{U}, (1+r)^k, k) \right] = 1003237.$$

Cena $\mathcal{R}_0^0(\boldsymbol{X}_{(1)}) - L_x a U_0 = 3237$ za garanci minimální úrokové míry je relativně malá, protože pravděpodobnosti úmrtí $q_{x+1}, \ldots, q_{x+5}$ jsou malé pro $x = 50$. Pokud bychom zvolili $x = 65$, pak by nás tato garance stála 13185.

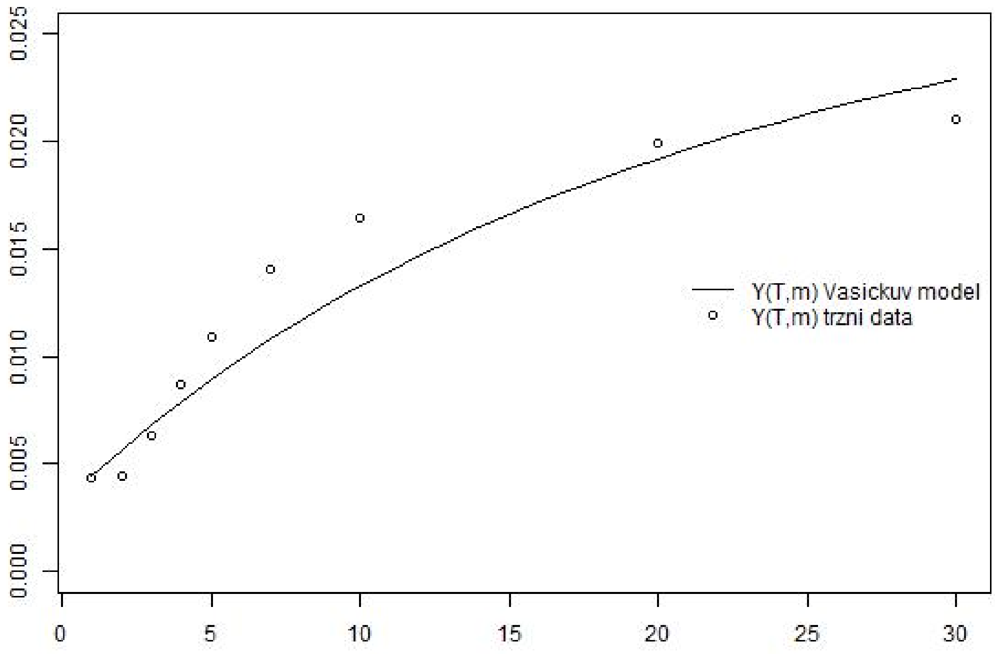
Nakonec spočteme rizikově upravené rezervy $\mathcal{R}_0(\boldsymbol{X}_{(1)})$ s pravděpodobnostmi z úmrtnostní tabulky prvního řádu p_{x+t}^{+} a přirážku za nezajistitelná rizika $MVM_0^{\varphi}(\boldsymbol{X}_{(1)})$ v čase $t = 0$. Nejprve pro rizikově upravené rezervy máme

$$\mathcal{R}_0(\boldsymbol{X}_{(1)}) = L_x a \left[U_0 + \sum_{k=1}^{5} q_{x+k}^{+} \left(\prod_{s=1}^{k-1} p_{x+s}^{+} \right) Put_0(\mathcal{U}, (1+r)^k, k) \right] = 1006375,$$

takže vidíme, že se zvýšením pravděpodobnosti úmrtí nám roste hodnota rezerv. Nyní vyjádříme hodnotu přirážky za nezajistitelná rizika MVM podle (6.17)

$$MVM_0^{\varphi}(\boldsymbol{X}_{(1)}) = \mathcal{R}_0(\boldsymbol{X}_{(1)}) - \mathcal{R}_0^0(\boldsymbol{X}_{(1)}) = 3138.$$

Vidíme tedy, že abychom v praxi ocenili závazky pojišťovny vyplývající z pojistných smluv tržně konzistentně, můžeme využít replikace podle oceňovacího



Obrázek 7.6: Tržní ročně úročené spotové sazby $Y_M(T,m)$ k 12/2010 a ročně úročené spotové sazby $Y(T,m,r_T)(\widehat{\lambda})$ z jednofaktorového Vašíčkova modelu s diskrétním časem.

portfolia. Nejprve je nutné určit finanční instrumenty, kterými budeme pojistné závazky replikovat, a to na základě cash flow, které vyplývají z pojistných smluv. Vývoj sazeb do budoucna můžeme buď modelovat na základě spotových sazeb, jako jsme to provedli v této práci, nebo přistoupit k modelování celé výnosové křivky v čase, což je v praxi častějším přístupem.

Deflátory jsou závislé na scénáři a čase					
	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5
Scénář 1	1,808	1,772	1,737	1,703	1,670
Scénář 2	1,461	1,432	1,404	1,376	1,349
Scénář 3	1,461	1,432	1,404	1,376	1,349
Scénář 4	1,180	1,157	1,134	1,112	1,090
Scénář 5	1,461	1,432	1,404	1,376	1,349
Scénář 6	1,180	1,157	1,134	1,112	1,090
Scénář 7	1,180	1,157	1,134	1,112	1,090
Scénář 8	0,954	0,935	0,917	0,899	0,881
Scénář 9	1,461	1,432	1,404	1,376	1,349
Scénář 10	1,180	1,157	1,134	1,112	1,090
Scénář 11	1,180	1,157	1,134	1,112	1,090
Scénář 12	0,954	0,935	0,917	0,899	0,881
Scénář 13	1,180	1,157	1,134	1,112	1,090
Scénář 14	0,954	0,935	0,917	0,899	0,881
Scénář 15	0,954	0,935	0,917	0,899	0,881
Scénář 16	0,771	0,756	0,741	0,726	0,712
Scénář 17	1,461	1,432	1,404	1,376	1,349
Scénář 18	1,180	1,157	1,134	1,112	1,090
Scénář 19	1,180	1,157	1,134	1,112	1,090
Scénář 20	0,954	0,935	0,917	0,899	0,881
Scénář 21	1,180	1,157	1,134	1,111	1,090
Scénář 22	0,954	0,935	0,917	0,899	0,881
Scénář 23	0,954	0,935	0,917	0,899	0,881
Scénář 24	0,771	0,756	0,741	0,726	0,712
Scénář 25	1,180	1,157	1,134	1,112	1,090
Scénář 26	0,954	0,935	0,917	0,899	0,881
Scénář 27	0,954	0,935	0,917	0,899	0,881
Scénář 28	0,771	0,756	0,741	0,726	0,712
Scénář 29	0,954	0,935	0,917	0,899	0,881
Scénář 30	0,771	0,756	0,741	0,726	0,712
Scénář 31	0,771	0,756	0,741	0,726	0,712
Scénář 32	0,623	0,611	0,598	0,587	0,575

Tabulka 7.11: Deflátory pro real world scénáře

Investiční výnos v daných letech (v %)					
	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5
Scénář 1	-6,34%	-6,34%	-6,34%	-6,34%	-6,34%
Scénář 2	-6,34%	-6,34%	-6,34%	-6,34%	8,90%
Scénář 3	-6,34%	-6,34%	-6,34%	8,90%	-6,34%
Scénář 4	-6,34%	-6,34%	-6,34%	8,90%	8,90%
Scénář 5	-6,34%	-6,34%	8,90%	-6,34%	-6,34%
Scénář 6	-6,34%	-6,34%	8,90%	-6,34%	8,90%
Scénář 7	-6,34%	-6,34%	8,90%	8,90%	-6,34%
Scénář 8	-6,34%	-6,34%	8,90%	8,90%	8,90%
Scénář 9	-6,34%	8,90%	-6,34%	-6,34%	-6,34%
Scénář 10	-6,34%	8,90%	-6,34%	-6,34%	8,90%
Scénář 11	-6,34%	8,90%	-6,34%	8,90%	-6,34%
Scénář 12	-6,34%	8,90%	-6,34%	8,90%	8,90%
Scénář 13	-6,34%	8,90%	8,90%	-6,34%	-6,34%
Scénář 14	-6,34%	8,90%	8,90%	-6,34%	8,90%
Scénář 15	-6,34%	8,90%	8,90%	8,90%	-6,34%
Scénář 16	-6,34%	8,90%	8,90%	8,90%	8,90%
Scénář 17	8,90%	-6,34%	-6,34%	-6,34%	-6,34%
Scénář 18	8,90%	-6,34%	-6,34%	-6,34%	8,90%
Scénář 19	8,90%	-6,34%	-6,34%	8,90%	-6,34%
Scénář 20	8,90%	-6,34%	-6,34%	8,90%	8,90%
Scénář 21	8,90%	-6,34%	8,90%	-6,34%	-6,34%
Scénář 22	8,90%	-6,34%	8,90%	-6,34%	8,90%
Scénář 23	8,90%	-6,34%	8,90%	8,90%	-6,34%
Scénář 24	8,90%	-6,34%	8,90%	8,90%	8,90%
Scénář 25	8,90%	8,90%	-6,34%	-6,34%	-6,34%
Scénář 26	8,90%	8,90%	-6,34%	-6,34%	8,90%
Scénář 27	8,90%	8,90%	-6,34%	8,90%	-6,34%
Scénář 28	8,90%	8,90%	-6,34%	8,90%	8,90%
Scénář 29	8,90%	8,90%	8,90%	-6,34%	-6,34%
Scénář 30	8,90%	8,90%	8,90%	-6,34%	8,90%
Scénář 31	8,90%	8,90%	8,90%	8,90%	-6,34%
Scénář 32	8,90%	8,90%	8,90%	8,90%	8,90%

Tabulka 7.12: Investiční výnos portfolia aktiv

Platby klientům (RW cash flow)					
	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5
Scénář 1	800	800	800	800	800
Scénář 2	800	800	800	800	5340
Scénář 3	800	800	800	5340	800
Scénář 4	800	800	800	5340	5340
Scénář 5	800	800	5340	800	800
Scénář 6	800	800	5340	800	5340
Scénář 7	800	800	5340	5340	800
Scénář 8	800	800	5340	5340	5340
Scénář 9	800	5340	800	800	800
Scénář 10	800	5340	800	800	5340
Scénář 11	800	5340	800	5340	800
Scénář 12	800	5340	800	5340	5340
Scénář 13	800	5340	5340	800	800
Scénář 14	800	5340	5340	800	5340
Scénář 15	800	5340	5340	5340	800
Scénář 16	800	5340	5340	5340	5340
Scénář 17	5340	800	800	800	800
Scénář 18	5340	800	800	800	5340
Scénář 19	5340	800	800	5340	800
Scénář 20	5340	800	800	5340	5340
Scénář 21	5340	800	5340	800	800
Scénář 22	5340	800	5340	800	5340
Scénář 23	5340	800	5340	5340	800
Scénář 24	5340	800	5340	5340	5340
Scénář 25	5340	5340	800	800	800
Scénář 26	5340	5340	800	800	5340
Scénář 27	5340	5340	800	5340	800
Scénář 28	5340	5340	800	5340	5340
Scénář 29	5340	5340	5340	800	800
Scénář 30	5340	5340	5340	800	5340
Scénář 31	5340	5340	5340	5340	800
Scénář 32	5340	5340	5340	5340	5340

Tabulka 7.13: Cash flow ze závazků (pojistných smluv)

Výnosy z aktiv po dani					
	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5
Scénář 1	-5781	-5781	-5781	-5781	-5781
Scénář 2	-5781	-5781	-5781	-5781	2884
Scénář 3	-5781	-5781	-5781	2884	-5781
Scénář 4	-5781	-5781	-5781	2884	2884
Scénář 5	-5781	-5781	2884	-5781	-5781
Scénář 6	-5781	-5781	2884	-5781	2884
Scénář 7	-5781	-5781	2884	2884	-5781
Scénář 8	-5781	-5781	2884	2884	2884
Scénář 9	-5781	2884	-5781	-5781	-5781
Scénář 10	-5781	2884	-5781	-5781	2884
Scénář 11	-5781	2884	-5781	2884	-5781
Scénář 12	-5781	2884	-5781	2884	2884
Scénář 13	-5781	2884	2884	-5781	-5781
Scénář 14	-5781	2884	2884	-5781	2884
Scénář 15	-5781	2884	2884	2884	-5781
Scénář 16	-5781	2884	2884	2884	2884
Scénář 17	2884	-5781	-5781	-5781	-5781
Scénář 18	2884	-5781	-5781	-5781	2884
Scénář 19	2884	-5781	-5781	2884	-5781
Scénář 20	2884	-5781	-5781	2884	2884
Scénář 21	2884	-5781	2884	-5781	-5781
Scénář 22	2884	-5781	2884	-5781	2884
Scénář 23	2884	-5781	2884	2884	-5781
Scénář 24	2884	-5781	2884	2884	2884
Scénář 25	2884	2884	-5781	-5781	-5781
Scénář 26	2884	2884	-5781	-5781	2884
Scénář 27	2884	2884	-5781	2884	-5781
Scénář 28	2884	2884	-5781	2884	2884
Scénář 29	2884	2884	2884	-5781	-5781
Scénář 30	2884	2884	2884	-5781	2884
Scénář 31	2884	2884	2884	2884	-5781
Scénář 32	2884	2884	2884	2884	2884

Tabulka 7.14: Výnosy z aktiv pro pojišťovnu (po dani)

Závěr

V práci jsme uvedli základní teorii tržně konzistentního ocenění společně s numerickými příklady, z kterých lze vycházet při aplikaci teorie v praxi. V současné době většina pojišťoven pracuje s poměrně komplexními aktuárskými modely pro oceňování závazků a modelování aktiv a vývoje úrokových sazeb. Ať už používá k určení nejlepšího odhadu rizikově neutrální nebo real world ocenění, je důležíte pochopit spojení obou principů. V práci jsme na ilustativním příkladu ukázali, že v případě dodržení předpokladů a správné kalibrace modelu, kterou většinou v praxi ověřujeme hlavně martingalovými testy, jsou oba přístupy k ocenění ekvivalentní.

Kromě těchto dvou obecných přístupů k ocenění cash flow, mohou pojišťovny k ocenění pojistných závazků využít ještě replikačního portfolia. Zde jsme na reálných datech kalibrovali jednofaktorový Vašíčkův model s diskrétním časem pro spotové sazby. U tohoto modelu se ukázalo, že pro potřeby aplikace na reálná data není zcela vyhovující. Nám šlo ovšem především o odvození teorie, k čemuž je naopak díky své relativní jednoduchosti nejvhodnější.

Zejména s nástupem nového regulatorního rámce Solvency II a jeho platnosti od 1.1.2016 je pro pojišťovny důležité porozumět základům tržně konzistentního ocenění, k čemuž může, doufejme, přispět i tato práce.

Na závěr je dobré ještě zmínit, že během psaní této práce došlo k razantnímu poklesu sazeb na trzích, a to zejména u státních dluhopisů. Většina bank nyní nabízí sazby blízké nule a Evropská centrální banka (ECB) se dokonce v červnu 2014 odhodlala ke stanovení záporné depozitní sazby, což znamená že komerční banky platí za peníze uložené u ECB. Je tedy nutné dodat, že předpoklad růstu peněz v čase v kapitolách 2.1.1 a 2.1.2 nemusí být vždy naplněn. V souvislosti s téměř nulovými a až zápornými sazbami vyvstává zásadní otázka pro pojišťovny, a to zda diskontovat závazky vůči klientům zápornou sazbou a jak se s tímto stavem ekonomiky vyrovnat například u produktů s garantovaným výnosem. Pokud bychom na problém nahlíželi čistě z matematického hlediska, měli bychom záporné sazby brát bez ohledu na jejich negativní dopad do rozvah pojišťoven. Takto jednoznačně ovšem k problému určitě nepřistoupí management pojišťoven kvůli negativnímu dopadu na kapitál, a tedy i solventnost.

Seznam použité literatury

[1] Kemp, Malcolm H.D. *Market Consistency: Model Calibration in Imperfect Markets*. 1. vydání. Wiley, 2009. ISBN 978-0-470-77088-7.

[2] Wüthrich, Mario V., Bühlmann, Hans, Furrer, Hansjörg. *Market-Consistent Actuarial Valuation*. 2. vydání. Springer, 2010. ISBN 978-3-642-14851-4.

[3] Ernst & Young. *The meaning of market consistency in Europe*. EYGM Limited, 2008. Dostupné z: http://www.treasury.nl/files/2008/04/671.pdf

[4] Dupačová, Jitka, Hurt, Jan, Štěpán, Josef *Stochastic modeling in economics and finance*. Kluwer Academic Publishers, 2002. ISBN 1-4020-0840-6.

[5] Dalbean, Freddy, Schachermayer, Walter. *A general version of the fundamental theorem of asset pricing*. Mathematische Annalen 300, s. 463-520. Springer-Verlag, 1994.

[6] Dalbean, Freddy, Schachermayer, Walter. *Tha Mathematics of Argitrage*. Springer-Verlag, 2006. ISBN 978-3-540-21992-7.

[7] Björk, Tomas. *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford University Press, 2009. ISBN 978-0199574742.

[8] Bühlmann, Hans, Merz, Michael. *The Valuation Portfolio*. Bull Swiss Assoc Actuar 2007(1), s. 69-84.

[9] Wüthrich, Mario V., Merz, Michael. *Financial Modeling, Actuarial Valuation and Solvency in Insurance*. Springer-Verlag, 2013. ISBN 978-3-6542-31392-9.

[10] Röman, Jan R. M. *Lecture notes in Analytical Finance I*. Department of Mathematics and Physics Mälardalen University, Sweden, 2009. Dostupné z: http://prosoftware.se/doc/lnotes/AFI/Deflators.pdf

[11] Ouelega, B. F. *State-Price Deflators and Risk-Neutral valuation of life insurance liabilities*. AAYE PR Working Paper Series, N°11, Association of African Young Economists, October 2014.

[12] Populační úmrtnostní tabulky ČR. Český Statistický Úřad, 2013. Dostupné z: http://notes.czso.cz/csu/redakce.nsf/i/umrtnostni_tabulky

[13] EIOPA. *Consultation Paper on a Technical document regarding the risk free interest rate term structure*. EIOPA, 2014. Dostupné z: https://eiopa.europa.eu/

[14] 1 Month CHF LIBOR, Swiss Government Bonds. The Swiss National Bank. Dostupné z: http://www.snb.ch/en/iabout/stat/id/statdata

Seznam tabulek

Seznam použitých zkratek

- **EU** - Evropská unie je politická a ekonomická unie Evropských států, které je Česká republika členem.
- **EIOPA** - European Insurance and Occupational Pensions Authority je instituce, která má na starost regulaci a dohled nad pojistným trhem v rámci Evropské unie.
- **CEIOPS** - Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors byla instituce dohledu na pojistným trhem v rámci EU, kterou v roce 2011 nahradila EIOPA.
- **EC** - Evropská komise (European Commission) je výkonný orgán Evropské unie zodpovědný za legistativu.
- **ZCB** - z anglického „zero coupon bond“ značí bezrizikový bezkuponový dluhopis.
- **VaPo** - oceňovací portfolio (Valuation Portfolio) je teoretické portfolio finančních instrumentů sestavené ke krytí pojistných závazků.
- **UFR** - Ultimate Forward Rate je pojem pro forwardovou sazbu, ke které by měly konvergovat dlouhodobé bezrizikové sazby používané pro výpočty v rámci Solvency II.
- **MLE** - odhad metodou maximalní věrohodnosti (maximum-likelihood estimation) je metoda odhadu parametrů ve statistickém modelu.
- **MVM** - market value margin vyjadřuje tržní přirážku za nezajistitelná rizika v makred-to-model přístupu k ocenění.
- **SCR** - solventnostní kapitálový požadavek (Solvency Capital Requirement) je hodnota kapitálu, který musí pojišťovna držet, aby byla schopna dostát svým budoucím závazkům vůči pojistníkům.
- **MCEV** - Market Consistent Embedded Value nebo též „Tržně konzistentní implicitní hodnota“ pojišťovny je současná hodnota budoucích zisků a čisté hodnoty vlastního kapitálu.
- **PVFP** - současná hodnota budoucích zisků (Present Value of Future Profits)
- **LIBOR** - London InterBank Offered Rate je průměrná úroková sazba, za niž jsou si banky navzájem ochotny půjčit na londýnském mezibankovním trhu peníze.
- **PRIBOR** - Prague InterBank Offered Rate je průměrná úroková sazba, za niž jsou si banky navzájem ochotny půjčit na českém mezibankovním trhu peníze.

Přílohy

Příloha 1: Důkaz předpokladu (7.10) k pravděpodobnostem úmrtí prvního řádu

V Kapitole 7.2.2 jsme při výpočtech VaPo zajištěného proti nezajistitelným rizikům předpokládali, že pro všechna $t = 0, \dots, 4$ platí

$$\sum_{k=t+1}^{5} q^+_{x+k} \left(\prod_{s=t+1}^{k-1} p^+_{x+s} \right) Put_t(\mathcal{U}, (1+r)^k, k) > \sum_{k=t+1}^{5} q_{x+k} \left(\prod_{s=t+1}^{k-1} p_{x+s} \right) Put_t(\mathcal{U}, (1+r)^k, k).$$

Pojďme se nyní pomocí indukce podívat na daný předpoklad.

První krok

Pro $t = 4$ zvolme

$$q^+_{x+5} > q_{x+5},$$

což je požadavek (7.10) a platí $p^+_{x+5} < p_{x+5}$, tzn. chceme menší pravděpodobnost přežití v posledním období.

Indukční krok $t + 1 \to t$

Předpokládejme, že pro pevné $t + 1 \in \{2, \dots, 5\}$ máme indukční předpoklad

$$h^+_{t+1}(k) \overset{\text{def.}}{=} q^+_{x+k} \prod_{s=t+1}^{k-1} p^+_{x+s} > q_{x+k} \prod_{s=t+1}^{k-1} p_{x+s} \overset{\text{def.}}{=} h_{t+1}(k),$$

pro všechna $k = t + 1, \dots, 5$. Potom bychom chtěli dokázat, že můžeme zvolit $q^+_{x+t} \in (0, 1)$ takové, že

$$h^+_t(k) = q^+_{x+k} \prod_{s=t}^{k-1} p^+_{x+s} > q_{x+k} \prod_{s=t}^{k-1} p_{x+s} = h_t(k),$$

pro všechna $k = t, \dots, 5$. Pro $k = t$ požadujeme

$$h^+_t(t) = q^+_{x+t} > q_{x+t} = h_t(t),$$

což nám dává nutné omezení

$$q^+_{x+t} > q_{x+t} \quad \text{nebo} \quad p^+_{x+t} < p_{x+t}.$$

Pro $k > t$ získáme

$$h^+_t(k) = q^+_{x+k} \prod_{s=t}^{k-1} p^+_{x+s} = q^+_{x+k} \left(\prod_{s=t+1}^{k-1} p^+_{x+s} \right) p^+_{x+t} = h^+_{t+1}(k) p^+_{x+t},$$

$$h_t(k) = q_{x+k} \prod_{s=t}^{k-1} p_{x+s} = q_{x+k} \left(\prod_{s=t+1}^{k-1} p_{x+s} \right) p_{x+t} = h_{t+1}(k) p_{x+t}.$$

Takže, pokud zvolíme

$$p^+_{x+t} > h_{t+1}(k) \frac{p_{x+t}}{h^+_{t+1}(k)},$$

získáme $h^+_t(k) > h_t(k)$ pro $k > t$. Z indukčního předpokladu $h^+_{t+1}(k) > h_{t+1}(k)$ vyplývá, že $h_{t+1}(k) \frac{p_{x+t}}{h^+_{t+1}(k)} < p_{x+t}$ pro všechna $k = t+1, \ldots, 5$. Pokud tedy zohledníme všechna omezení získáme volbu

$$p^+_{x+t} \in \left(\max_{k=t+1,\ldots,5} \frac{h_{t+1}(k)}{h^+_{t+1}(k)} p_{x+t}, p_{x+t} \right),$$

což je neprázdný otevřený interval díky našemu indukčnímu předpokladu. Navíc vyplývá, že

$$h^+_t(k) = q^+_{x+k} \prod_{s=t}^{k-1} p^+_{x+s} > q_{x+k} \prod_{s=t}^{k-1} p_{x+s} = h_t(k),$$

pro všechna $k = t, \ldots, 5$, z čehož vyplývá, že můžeme iterovat indukci.
Pro kladné ceny put opcí potom získáme

$$\sum_{k=t+1}^{5} h^+_{t+1}(k) Put_t(\mathcal{U}, (1+r)^k, k) > \sum_{k=t+1}^{5} h_{t+1}(k) Put_t(\mathcal{U}, (1+r)^k, k),$$

což je přesně předpoklad (7.10).