Posudek vedoucího diplomové práce

Miroslav Olšák: Součiny Fréchetovských prostorů

Nejprve připomeňme několik pojmů. Topologický prostor se nazývá *Fréchetův* (někdy také *Fréchet-Urysohnův* nebo zkráceně *FU-prostor*), je-li T_1 a každý bod z uzávěru jakékoli množiny je limitou konvergentní posloupnosti s hodnotami v dané množině. Je velice snadné nalézt dva Fréchetovské prostory, jejich součin Fréchetův není. Avšak pokud navíc chceme, aby oba prostory byly kompaktní, je problém mnohem těžší a první příklad byl nalezen teprve roku 1980. A pokud chceme sestrojit pro $n > 2$ kompaktní Fréchetovské prostory $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ tak, aby součin $\Pi_{i<n} X_i$ nebyl Fréchetův, ale pro každou vlastní podmnožinu $K \subset \{0, 1, \ldots, n-1\}$ součin $\Pi_{i \in K} X_i$ Fréchetův byl, máme co do činění s dosud otevřeným problémem. Konsistentní řešení je známo: Pro každé přirozené $n > 1$ taková n-tice existuje, předpokládáme-li Martinův Axiom (Ken-ichi Tamano, 1986).

Problém úzce souvisí s vlastnostmi skoro disjunktních (zkráceně AD) systémů na množině ω. Řekneme, že systém $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ je *skoro disjunktní*, jestliže každá dvojice různých prvků z $\mathcal{A}$ má konečný průnik, a skoro disjunktní systém takový, že každá nekonečná množina má nekonečný průnik s některou množinou ze systému, se nazývá *maximální skoro disjunktní, MAD*. Je-li dán AD systém $\mathcal{A}$, o nekonečné množině $M \subseteq \omega$ řekneme, že je $\mathcal{A}$-*velká*, pokud je množina $\{A \in \mathcal{A} : |A \cap M| = \omega\}$ nekonečná. Ze skoro disjunktního systému $\mathcal{A}$ snadno sestrojíme kompaktní Hausdorffův prostor $Y(\mathcal{A})$: Nosná množina je $\omega \cup \mathcal{A} \cup \{\omega\}$ a topologie je dána obojetnou bazí $\{\{x\} : x \in \omega\} \cup \{A \cup \{A\} : A \in \mathcal{A}\}$. Přitom platí, že prostor $Y(\mathcal{A})$ je Fréchetův právě když pro každou $\mathcal{A}$-velkou množinu M není systém $\{A \cap M : A \in \mathcal{A}, |A \cap M| = \omega\}$ MAD na M. Podaří-li se tedy nalézt nekonečný MAD $\mathcal{A}$ a jeho rozklad na ADy $\mathcal{A}_i, i < n$, tak, že každá $\mathcal{A}$-velká množina je $\mathcal{A}_i$-velká pro všechna $i < n$, získáme n-tici kompaktních Fréchetových prostorů, jejichž součin Fréchetův není. Avšak to nic neříká o menších podsoučinech, a zde je těžiště práce pana Olšáka.

Práce začíná úvodem, kde je prezentován jednoduchý příklad dvou (nekompaktních) Fréchetovských prostorů, nemajících Fréchetovský součin, a nastíněn plán dalšího výkladu, V kapitole 1 je zavedeno základní značení a diskutována Fréchetova vlastnost konečných součinů. Kapitola 2 se zabývá ideály a topologiemi jimi definovanými. Je zde zaveden kardinální invariant $\mathfrak{t}$, nalezena jeho hodnota za Martinova axiomu. Závěr kapitoly pak obsahuje jednoduchá tvrzení o součinech ideálů. V kapitole 3 je zaveden skoro disjunktní systém a typy podmnožin vůči tomuto AD systému. Později se ukáže, že práce s těmito typy mnohé usnadňuje; neznám obdobu této klasifikace z literatury. Posléze je dán alternativní důkaz existence příkladu pro $n = 2$.

Těžiště práce je v kapitolách 4 a 5. Kapitola 4 analyzuje vlastnosti konečných součinů AD systémů, ukazuje, za jakých okolností lze ukázat Fréchetovu vlastnost konečných podsoučinů a hlavní věta 4.23 ukazuje, jaký MAD je zapotřebí ke konstrukci hledaného příkladu, sestávajícího z k prostorů. Pan Olšák tento MAD nazývá *úplně k-separabilní*, respektive *silně úplně separabilní*. Tím se úloha redukuje na nalezení vhodného MADu, což je téma kapitoly 5.

V prvním odstavci kapitoly 5 jsou připomenuty kardinální invarianty $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}_{\omega,\omega}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$ a zavedeny invarianty $\mathfrak{a}_n$ pro $n \in \omega$ a $\mathfrak{a}_\omega$. Poté jsou bez důkazu uvedeny nerovnosti mezi nimi. Následuje konstrukce vhodného MADu a jeho rozkladu na $n + 1$ částí tak, jak je zapotřebí k existenci $(n+1)$-příkladu, za předpokladu $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{a}_n$. Zde je hlavním trikem využití Shelahovy technologie z "MAD families and SANE player" z roku 2009. Zde bych rád podotkl, že množinový předpoklad $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{a}_n$ je velice slabý, plyne z MA, plyne z $\mathfrak{s} = \omega_1$, plyne z $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$; a všechny tyto předpoklady zaručují existenci úplně separabilního MAD systému. Přitom každý úplně k-separabilní MAD je úplně separabilní.

Závěr práce obsahuje jednu otevřenou otázku: Musí nutně být všechna $\mathfrak{a}_k$ rovny $\mathfrak{a}$? Je to ta nejpřirozenější otázka, jakou bylo v kontextu práce možno položit.

Závěr. Předložená diplomová práce svědčí o tom, že pan Olšák kvalitně zvládl zvolenou problematiku, prokázal jak schopnost samostatné práce s literaturou, tak schopnost nalézt řešení problému a podat srozumitelný a logicky bezchybný výklad. Doporučuji tuto diplomovou práci klasifikovat stupněm

V Praze, 25. srpna 2015 Prof. RNDr Petr Simon, DrSc.