Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Iva Pecinová

Měření délek

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: PhDr. Alena Šarounová, CSc.

Studijní program: Matematika (B1101)

Studijní obor: MDUZV (7504R178)

Praha 2015

Děkuji všem, kteří mě při psaní této práce podporovali a poskytovali cenné rady. Zvláště chci poděkovat vedoucí mé práce paní PhDr. *Aleně Šarounové, CSc.* za *trpělivost a odborné vedení a mému bratrovi Tadeáši Pecinovi za nakreslení „Metříka“ a dalších obrázků, které jsem využila v příloze této práce, v Příručce malého měřiče.*

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 5. května 2015 *Iva Pecinová*

Název práce: Měření délek
Autor: Iva Pecinová
Katedra / Ústav: Katedra didaktiky matematiky
Vedoucí bakalářské práce: PhDr. Alena Šarounová, CSc., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Bakalářská práce Měření délek se zabývá eukleidovským měřením vzdáleností. Věnuje se historii měření délek v Českých zemích, vzniku základní jednotky délky – metru a zejména pak délce kružnice. Práce je určena zejména pro učitele matematiky na středních školách a milovníky měření, u kterých se předpokládá alespoň středoškolské znalosti matematiky. Práci využijí i učitelé matematiky na základních školách, pro něž je určena příloha Příručka malého měřiče. Součástí práce je i CD, které obsahuje práci v elektronické podobě a již zmíněnou Příručku malého měřiče ve verzi pro tisk.

Klíčová slova: měření, délka, úsečka, kružnice, křivka

Title: Length measurement
Author: Iva Pecinová
Department: Department of Mathematics Education
Supervisor: PhDr. Alena Šarounová, CSc., Department of Mathematics Education

Abstract: My bachelor thesis Length measurement deals with the euclidean length measurement. It deals with the history of the length measurement in the Czech country, the emergence of the basic unit of length - meter and especially the circumference. The work is intended primarily for high school teachers of mathematics and lovers of measurements which are expected to at least high school knowledge of mathematics. This text is good for primary schools teachers of mathematics which is intended Handbook for small meter. The component part of my bachelor thesis is an enclosed CD, where is found the bachelor thesis in an electronic form and the already mentioned Handbook for small meter - a version for printing.

Keywords: a measurement, a length, a segment, a circle, a curve

Obsah

Úvod

Bakalářská práce Měření délek si klade za cíl stručně obeznámit čtenáře s historií měření délek a ukázat mu, jak snadno a zajímavě se dá toto téma využít ve výuce matematiky.

Rozvržení práce je následující. První kapitola se zabývá axiomy eukleidovské geometrie.

Druhá kapitola je stručnou historií vývoje měření délek v Českých zemích a historií vzniku základní jednotky délky – metru.

Třetí kapitola pojednává o kružnici. Dozvíme se, jak počítal obvod kruhu Archimédés a jak odvodil číslo π. Součástí práce je i využití Archimédova měření na středních školách. Dozvíme se, co je to rektifikace, a tři nejznámější postupy jsou zde uvedeny (Kochaňského, Sobotkova a D'Ocagneova rektifikace). U Kochaňského a Sobotkovy rektifikace je uveden i výpočet velikosti chyby s použitím pouze středoškolské matematiky.

Čtvrtá kapitola popisuje křivky v rovině i v prostoru. Najdeme tady konkrétní příklady zajímavých křivek i příklady na výpočet jejich délky na daném intervalu.

Pátá kapitola je přehledem starých i nových učebnic, kde se téma měření délek vyskytuje. Kapitola obsahuje i zajímavé úlohy, které jsou v uvedených učebnicích.

Dále následuje příloha – Příručka malého měřiče. Jedná se o nápady, jak si jednoduše vyrobit měřidla a kde a jak je použít. Najdeme v ní i jednoduché úkoly na měření délky. Tato příručka je určená zejména pro děti na prvním stupni základních škol.

Součástí práce je CD, na němž se nachází elektronická verze celé bakalářské práce a také příloha Příručka malého měřiče ve verzi pro tisk a návod, jak příručku správně vytisknout a složit z ní knížku.

1. Axiomy

Geometrie je nauka o vlastnostech a vzájemných vztazích prostorových útvarů. Už 3 000 let př. n. l. byly ve starověkém Řecku známy nejjednodušší poznatky geometrie. Název *GEOMETRIE*, odvozený z řeckých slov *GE* = země a *METREIN* = měřiti, pochází přibližně z 6. století př. n. l. (př. n. l. = před naším letopočtem), kdy se geometrie začala rozvíjet jako věda. Ze starověkých matematiků jsou nejznámější například Thalés z Mílétu, Pýthagorás ze Samu a v neposlední řadě Eukleidés z Alexandrie.

Eukleidés byl autorem díla Stoicheia (v překladu Základy), které ovlivnilo geometrii na tisíciletí a po více než 2000 let bylo základem učebnic elementární geometrie po celém světě.

Eukleidovy Základy se skládají ze 13 knih. V úvodu každé knihy jsou definovány základní pojmy, o kterých se v knize píše. Dále následují postuláty, axiomy a poučky. (Postuláty a axiomy v dnešní době již nerozlišujeme, jsou to základní poučky, z nichž deduktivně odvozujeme další.)
V úvodu první knihy Základů Eukleidés popisuje 23 definic základních pojmů, jako například:

1. *Bod jest, co nemá dílu.*
2. *Čára pak délka bez šířky.*
3. *Hranice čáry jsou body.*
4. *Přímá jest čára (přímka), která svými body táhne se rovně.* ([7], strana 1)

(Ovšem tato tvrzení v dnešní době nelze považovat za definice.)

Pak následují „úkoly prvotné“ (postuláty):

1. *Budiž úkolem od kteréhokoli bodu ke kterémukoli bodu vésti přímku.*
2. *A přímku omezenou nepřetržitě rovně prodloužiti.*
3. *A z jakéhokoli středu a jakýmkoli poloměrem narýsovati kruh.*
4. *A že všecky pravé úhly sobě rovny jsou.*
5. *A když přímka protínajíc dvě přímky tvoří na téže straně vnitřní (přilehlé) úhly menší dvou pravých, ty dvě přímky prodlouženy jsouce do nekonečna že se sbíhají na té straně, kde jsou úhly menší dvou pravých.* ([7], str. 2)

Dnes bychom postuláty formulovali asi takto:

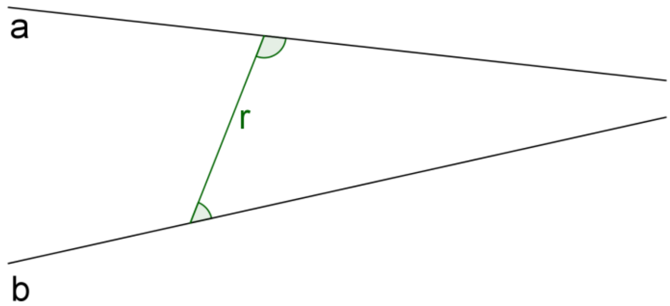
I. *Dva různé body A, B lze spojit vždy jen jedinou přímkou.*

II. *Úsečku AB lze vždy neomezeně prodloužit.*

III. *Z libovolného středu S lze vždy sestrojit kružnici k s libovolným poloměrem r.*

IV. *Všechny pravé úhly R jsou vždy stejné (shodné).*

V. *Tvoří-li příčka r dvou přímek a, b na některé straně dva vnitřní přilehlé úhly o součtu menším než dva pravé úhly, pak se dané přímky a, b na této straně příčky protínají.* ([6], str. 230) Viz obrázek 1.1.



Obrázek 1.1: Příčka dvou různoběžných přímek.

Přestože Eukleidova soustava axiomů byla nedokonalá, stačila k důkazům převážné většiny vět elementární geometrie až do 19. století, kdy se mnoho významných matematiků pokoušelo soustavu doplnit. Až v roce 1899 vydal německý matematik Hilbert dílo Grundlagen der Geometrie, kde uvádí úplnou soustavu axiomů, z níž dnes odvozujeme všechny věty elementární geometrie.

Eukleidova geometrie splňuje všech pět Eukleidových postulátů.

Soustava axiomů tzv. eukleidovské geometrie:

V knize *Elementární geometrie* od Jana Vyšína [9], jsou axiomy eukleidovské geometrie rozděleny do pěti skupin podle obsahu. První skupinou jsou tzv. axiomy spojování neboli axiomy incidence. Týkají se základních pojmů: bod, přímka, rovina, a jejich vzájemných vztahů, například „přímka prochází bodem“, „bod leží na přímce“, „bod leží v rovině“, „rovina prochází bodem“, a tak dále. Všechny uvedené vztahy lze pro stručnost vyjádřit jediným slovem „incidence“. Například „přímka inciduje s bodem“, to znamená, že přímka prochází bodem. Proto jsou axiomy spojování často nazývány výstižněji jako axiomy incidence.

1.1 Axiomy incidence

1. *Každými dvěma navzájem různými body prochází jediná přímka.*
2. *Na každé přímce leží aspoň dva navzájem různé body.*
3. *Existuje aspoň jedna trojice bodů, které neleží na (žádné) přímce.*
4. *Jestliže dva navzájem různé body leží na přímce p i v rovině α, pak přímka p leží v rovině α.*
5. *Třemi body, které neleží v (žádné) přímce, prochází jediná rovina.*
6. *Mají-li dvě různé roviny společný bod, pak mají společný aspoň jeden další bod. (Lze vyslovit i „silnější“ trzení: Mají-li dvě různé roviny společný bod, pak mají společnou přímku.)*
7. *V každé rovině leží aspoň jeden bod.*
8. *Existuje aspoň jedna čtveřina bodů, které neleží v (žádné) rovině.* ([9], str. 14)

Pomocí těchto axiomů zavádíme pojmy přímka a rovina. První tři jsou axiomy planimetrické.

Dále z těchto axiomů plynou poučky:

Přímkou a bodem prochází aspoň jedna rovina.

Jestliže body *A, B, C, D* neleží v rovině, pak žádné tři z nich neleží v přímce.

V každé rovině existuje alespoň jedna trojice bodů, které neleží v přímce.

1.2 Axiomy uspořádání

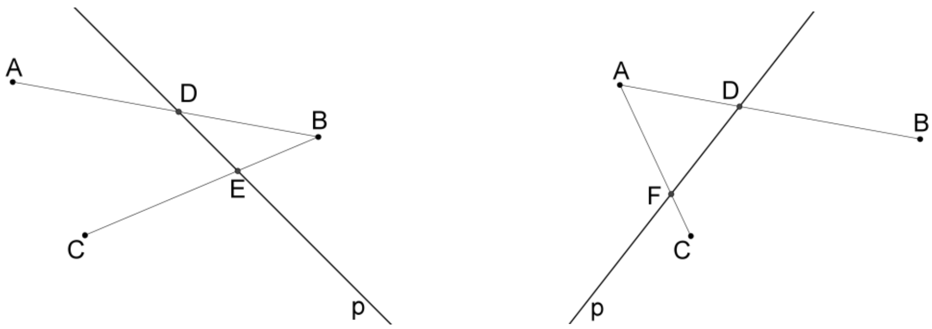
Další skupinou jsou tzv. axiomy uspořádání. Zabývají se polohovými úlohami elementární geometrie. Polohové úlohy se týkají incidence a uspořádání bodů, které se zakládá na vztahu „mezi". (Daný bod leží mezi jinými dvěma body.)

Tyto axiomy zajišťují existenci racionálních čísel.

Axiomy uspořádání:

1. *Leží-li bod B mezi body A, C, jsou body A, B, C tři různé body na přímce a platí také, že bod B leží také mezi body C, A.*
2. *Jsou-li A, B dva navzájem různé body, pak existuje na přímce AB aspoň jeden bod C takový, že bod B leží mezi body A, C.*
3. *Ze tří různých bodů A, B, C ležících na téže přímce leží nejvýše jeden mezi ostatními dvěma.*
4. *Axiom Paschův: Jsou-li A, B, C tři body, které neleží v přímce, a p přímka roviny ABC, která neprochází žádným z bodů A, B, C a která obsahuje jistý bod D ležící mezi body A, B, pak obsahuje přímka p jistý bod E ležící mezi body B, C nebo jistý bod F ležící mezi body C, A. (Nastane aspoň jedna z obou možností.)* ([9], str. 23)

   Viz obrázek 1.2.



Obrázek 1.2: Grafické znázornění Paschova axiomu.

Pomocí těchto axiomů definujeme pojmy úsečka a polopřímka:

Definice úsečky:

Buďte body P, Q dva navzájem různé body. Vnitřkem úsečky PQ nazýváme množinu všech bodů, které leží mezi body P, Q. Vnitřek úsečky PQ doplněný body P, Q nazýváme úsečkou PQ. ([9], str. 29)

Definice polopřímky:

Nechť PQ je úsečka. Pak prodloužení úsečky PQ za bod Q je množina všech takových bodů X, pro něž Q leží mezi body P, X. Bod P je tzv. počátek polopřímky.

([9], str. 29)

1.3 Axiomy shodnosti

Třetí skupinou axiomů jsou axiomy shodnosti, pomocí nichž jsou zaváděny do geometrie tzv. metrické vlastnosti – vlastnosti vycházející z pojmu shodnosti úseček.

Pro zapsání vztahu shodnosti mezi úsečkami používáme znak rovnosti (=). Tento vztah má skutečně všechny základní vlastnosti rovnosti dvou čísel.

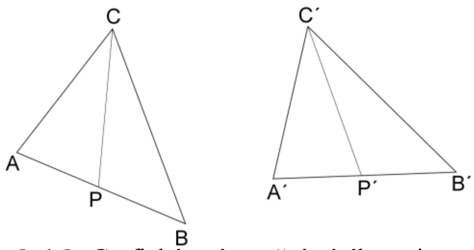
Z druhého axiomu shodnosti (je uveden níže) vyplývá, že tento vztah je transitivní. Reflexivnost a symetrii lze snadno dokázat:

Reflexivnost: Podle prvního axiomu platí $AB=BA$ a zároveň platí (zaměníme-li body A, B) $BA=AB$. Z druhého axiomu potom vyplývá ze shodností $AB=BA$ a $BA=AB$, že $AB=AB$. Tím je reflexivnost dokázána.

Souměrnost/symetrie: Nechť $AB=CD$. Podle prvního axiomu shodnosti leží na polopřímce AB jen jediný bod E takový, že $CD=AE$. Z druhého axiomu a ze vztahů $AB=CD$, $CD=AE$ plyne vztah $AB=AE$. Ale podle prvního axiomu leží na polopřímce AB jen jediný takový bod, pro který platí, že $AB=AE$, a proto $B\equiv E$. A z toho plyne $CD=AB$. Tak je dokázána symetrie.

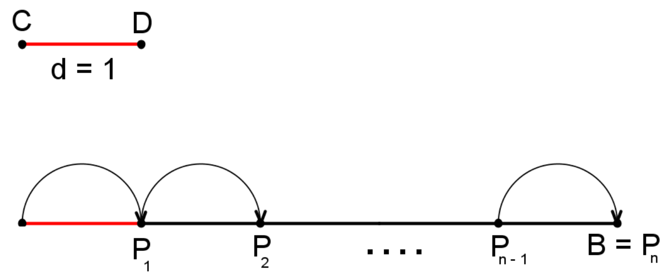
Axiomy shodnosti:

1. *Budiž dána úsečka AB a polopřímka CD. Na polopřímce CD leží jediný bod E různý od C takový, že úsečky AB a CE jsou shodné. Úsečky AB a BA jsou shodné.*
2. *Nechť platí AB = CD, CD = EF, pak je také AB = EF.*
3. *Buď B bod ležící mezi body A, C a B´ bod ležící mezi body A´, C´ a nechť platí AB = A´B´, BC = B´C´. Pak je také AC = A´C´.*
4. *Buďte dány body A, B, C, které neleží v jedné přímce, a body A´, B´, M, které také nejsou kolineární. Nechť je AB = A´B´. Pak v polorovině A´B´M leží jediný bod C´ takový, že A´C´ = AC, B´C´ = BC.*
5. *Buďte A, B, C a A´, B´, C´ dvě trojice různých bodů neležících v přímce a nechť platí A´B´ = AB, B´C´ = BC, C´A´ = CA. Budiž P bod ležící mezi body A, B; P´ bod ležící mezi body A´, B´tak, že A´P´ = AP. Pak je také C´P´ = CP.* ([9], str. 42) Viz obrázek 1.3



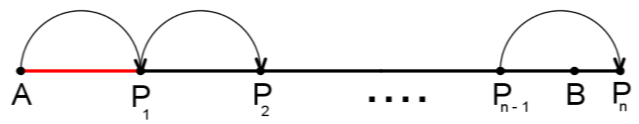
Obrázek 1.3: Grafické znázornění pátého axiomu shodnosti.

Při shodném zobrazení je obrazem každé úsečky *AB* úsečka *A´B´* shodná s *AB*. Pojem shodnosti úseček nám umožňuje srovnávat úsečky a zjistit, které jsou shodné (tj. mají stejnou délku) a která z dvojice neshodných úseček je větší (resp. menší). Ale nedovoluje nám měřit úsečky. Pokud chceme změřit délku úsečky *AB*, potřebujeme si nejprve zvolit jednotku míry. Tedy určitou úsečku *CD*, o které řekneme, že má délku jedna. Tu pak nanášíme na polopřímku *AB* od bodu *A* stále ve stejném smyslu. Tak dostáváme postupně body P_1, P_2, P_3,… Pokud se stane, že nějaký bod P_n splyne s bodem *B* (obrázek 1.4), pak říkáme, že velikost úsečky *AB* je *n* jednotek (úseček míry jedna).



Obrázek 1.4: Úsečka o délce *n* jednotek (úseček míry jedna)

Většinou se tak nestane a bod P_{n-1} leží uvnitř úsečky *AB* a P_n vně (Obrázek 1.5). Pak říkáme, že velikost úsečky *AB* je mezi *n-1* a *n* jednotkami (obrázek 1.5). $|AP_{n-1}| < |AB| < |AP_n|$.

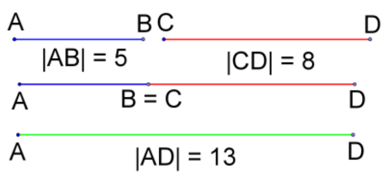


Obrázek 1.5: Úsečka, jejíž velikost je mezi *n-1* a *n* jednotkami.

Přibližná velikost úsečky je v tomto případě určena dvěma kladnými celými čísly.

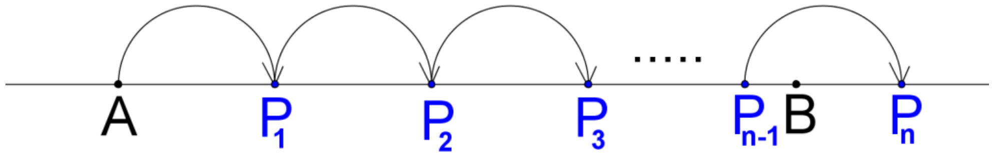
Cílem našeho měření je přiřadit každé úsečce kladné číslo, které nazýváme její velikostí a které splňuje tyto vlastnosti:

- Shodné úsečky mají stejné velikosti.
- Velikost součtu dvou úseček je rovna součtu jejich velikostí (obrázek 1.6).
- Určitá předem daná úsečka má velikost jedné jednotky.



Obrázek 1.6: Grafické znázornění součtu úseček *AB* a *CD*.

1.4 Axiomy spojitosti



Obrázek 1.7: Bod P_n je vně úsečky *AB*.

Aby bylo možné provést popsaný postup měření, musí platit, že po *n* krocích bod P_n padne vně měřené úsečky *AB* (obrázek 1.7). Toto tvrzení se nedá odvodit z předešlých axiomů, proto musíme vyslovit další axiomy.

Axiomy spojitosti:

1. Archimedův axiom: *Buďte dány dvě úsečky AB, CD. Na polopřímce AB sestrojme body P_1, P_2, P_3... tak, aby platilo $AP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = ... = CD$, $P_{n-1} \neq P_{n+1}$. Pak existuje jisté přiřazené číslo n takové, že příslušný bod P_n neleží mezi body A, B.* ([9], str. 73)
2. Cantorův axiom úplnosti: *Budiž dána posloupnost úseček G_1H_1, G_2H_2, G_3H_3..., z nichž každá následující leží v předchozí. Pak existuje aspoň jeden bod, který leží ve všech úsečkách G_nH_n naší posloupnosti.* ([9], str. 81)

Oba axiomy spojitosti se často nahrazují jediným axiomem:

3. Dedekindův axiom spojitosti: *Budiž dána libovolná úsečka AB. Její body nechť jsou rozděleny do dvou skupin, tzv. tříd, těchto vlastností:*

a) Každý bod úsečky AB náleží do jediné z obou tříd.

b) Bod A náleží do třídy I, bod B do třídy II.

c) Náleží-li bod $X \neq A$ do třídy I, náleží také každý bod Y ležící mezi body A, X do třídy I.

Za těchto předpokladů platí: existuje bod H úsečky AB takový, že – je-li $H \neq A$ – pak každý bod ležící mezi body B, H náleží do třídy II. ([9], str. 86)

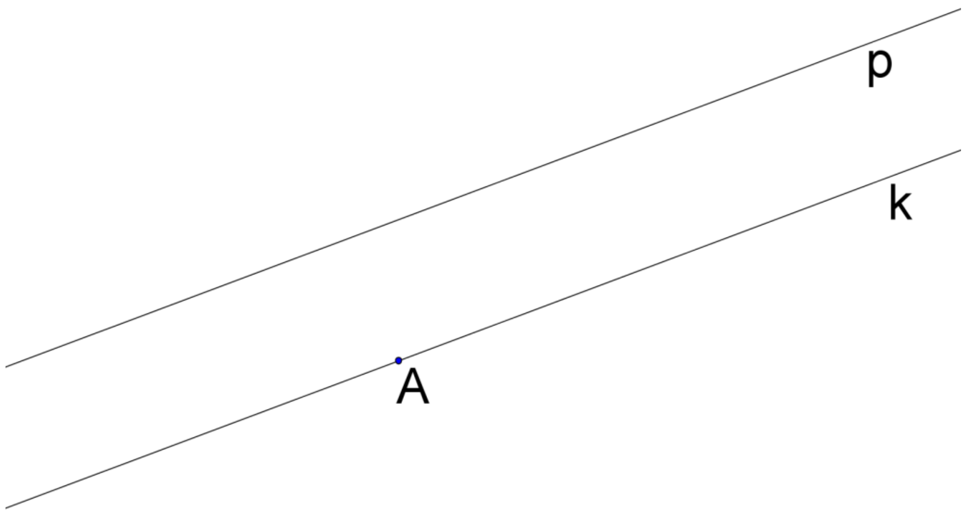
Axiomy spojitosti zajišťují, že na úsečce leží hustě nekonečně mnoho bodů. Z této vlastnosti pak plyne, že existují iracionální čísla.

1.5 Axiom rovnoběžnosti

Do poslední skupiny patří pouze jediný axiom rovnoběžnosti:

Budiž dána libovolná přímka p a libovolný bod A neležící na přímce p. Pak existuje nejvýše jedna přímka k, která je rovnoběžná s danou přímkou p, a zároveň prochází bodem A. Tyto přímky p, k se nazývají rovnoběžky. ([9], str. 91, přeformulované znění) Viz obrázek 1.8.

Tento axiom je ekvivalentní s pátým Eukleidovým postulátem.
Jeho historie je všeobecně známa. Bylo mnoho neúspěšných pokusů dokázat jej z předchozích axiomů. Tuto sérii neúspěchů zakončil až Lobačevskij, který objevil tzv. hyperbolickou geometrii. Hyperbolická geometrie vychází ze stejných axiomů (incidence, uspořádání, shodnosti a spojitosti) jako eukleidovská geometrie, jenom axiom rovnoběžnosti je nahrazen jiným axiomem. Lobačevského geometrie tedy dává jasný důkaz, že axiom rovnoběžnosti nelze odvodit z předešlých axiomů.



Obrázek 1.8: Bodem *A* lze vést pouze jednu přímku *k*, která je rovnoběžná s přímkou *p*.

2. Historie měření délek

2.1 Měření délky v Českých zemích

Následující text vychází z knih s názvem *Pojďte s námi měřit zeměkouli I* a *Pojďte s námi měřit zeměkouli II* ([3], [4]).

Měření je činnost, která lidstvo provází již od jeho nejstarších dějin. Potřeba měřit vznikla společně se vznikem směnného obchodu, který je u mnoha druhů zboží možno uskutečnit jen na základě měření. Kromě toho měli panovník i duchovní zájem na tom, aby znali rozlohu pozemků svých poddaných, aby mohli určovat výši daní a další břemena.

S měřením samozřejmě souvisí i měřicí jednotky. V České republice, stejně jako ve většině zemí celého světa, platí Mezinárodní soustava jednotek – Systéme International d'Unités, označovaná mezinárodně přijatou zkratkou SI.

Co ale bylo předtím?

Názvy slovanských měřicích jednotek se vyskytují už i v pamětech psaných latinsky. Starými známými jednotkami byly například hon, záhon, brázda. Doklady o měření v Českých zemích máme až ze 13. století z doby velkého osidlování.

V dobách velkého osidlování bylo potřeba vyměřit pozemky pro stavění usedlostí a rozdělit půdu pro přistěhovalce. Tuto činnost prováděl tzv. „lokátor“. Měření při těchto pracích bylo zcela běžné. Přesvědčuje nás o tom i listina královny Jitky z roku 1291, ve které svěřuje svému sluhovi k osídlování panství Lysou nad Labem. A píše mu, aby pozemky provazem vyměřil na lány tak, jak to dělá každý lokátor.

Ale uvědomme si, že tehdy se měřilo na lány a lán byl v každém kraji jinak velký. Takže toto měření bylo značně nepřesné.

Postupem času se měření zdokonalovala a zpřesňovala. Proto dávali králové původně vyměřené pozemky přeměřit a pak určovali výši daní a desátků.

První sjednocení jednotek v Čechách proběhlo zřejmě v roce 1268 na příkaz Přemysla Otakara II. Způsob odvození jednotek délky byl: čtyři ječná zrna vedle sebe položená se rovnala jednomu prstu, šířka čtyř prstů položených vedle sebe byla dlaň, deset prstů vedle sebe bylo nazváno píď a tři pídě dávaly loket.

Základní jednotkou byl stanoven tzv. pražský loket, který se používal již dříve, ale až v roce 1268 se stal královskou jednotkou závaznou pro měření v celém Českém království.

Tak byl položen základ české délkové míry. Za vlády Karla IV. byly jednotky délky znovu stanoveny a zapsány do zemských desek, ale bohužel v roce 1541 zachvátil Pražský hrad požár a vše shořelo.

Kolem roku 1620 za vlády Ferdinanda II. proběhla druhá měrová reforma a za základní jednotku délkové míry byl opět zvolen pražský loket.

Popis všech starých českých měr se nám zachoval ve spisu „Knížky o měrách zemských“ z roku 1617 od zemského měřiče Šimona Podolského z Podolí.

Podolský zde píše o tom, že bylo v Praze zazděno několik vzorových železných měřidel délky pražského lokte, aby byla jeho délka přístupná každému. Jedno takové vzorové měřidlo bylo zazděno na Staroměstské radnici, další bylo vsazeno do věže novoměstské radnice a jsou tam dodnes (obrázek 2.1).

Obrázek 2.1: Fotografie Pražského loktu na věži Novoměstské radnice

(zdroj: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Prazsky_loket.JPG, obrázek byl stažen dne 29.4.2015).

O těchto dobách, o měření, měřičích a o pražském loktu zasazeném do novoměstské věže vypráví veršování nazvané: „Poctivý loket na novoměstské věži“. (Autorem byl jakýsi básník, jehož jméno není známo.)

„*Tam na Karlově náměstí – jest známo vám to stěží –*
poctivý loket zazděn jest na novoměstské věži.

Dnes nevšímán tam rezaví – dřív každému zde sloužil,
kdo míru látek koupených si zkontrolovat toužil.

Byl zazděn trochu vysoko, a proto měřič stával
tam na podiu o trzích a za plat zprávy dával.

Měřič být musil čiperný – sta loket denně změřil.
Když řekl: „Míra dobrá jest,“ každý mu kupec věřil.

To hbité jeho měření, žel vedlo mnohdy k zlému,
neb vedle kupců platili i prodavači jemu.

Duch poctivosti tehdy již zde nejedenkrát klesl,
kdo deset loket zaplatil, pět mnohdy domů nesl.

Kdo poctivý ten loket zříš, každý si v duchu řekni:
„Tak bylo, jest a bude dál,“ a v uctivosti smekni.

Neb loket *– ten je poctivý, zaslouží úcty přeci.*
Co tropili *s tím měřiči, to není jeho věcí.“* ([3], str. 37)

V roce 1756, za vlády Marie Terezie, byl podle jejího nařízení úřední jednotkou délky zaveden vídeňský loket. A ten platil až do dob, kdy Rakousko – Uhersko zavedlo metrickou soustavu v Čechách i na Moravě. Stalo se tak v roce 1871 s platností až od roku 1876.

Tabulka (2.1) převodů starých jednotek délky do dnešní metrické soustavy je pouze orientační. Jak už bylo řečeno, určení takových jednotek bylo velmi nepřesné.

jednotky:	**převod na menší jednotku**		**převod na metry**
ječné zrno			4,9 mm
prst	šířka 4 ječných zrn		19,7 mm
palec	šířka 5 ječných zrn		24,6 mm
dlaň	šířka 15 ječných zrn	3 palce	73,8 mm
čtvrtlokte	šířka 30 ječných zrn	6 palců	147,7 mm
píď	šířka 40 ječných zrn	10 prstů	197,0 mm
stopa	šířka 60 ječných zrn	12 prstů	295,5 mm
loket	šířka 120 ječných zrn	2 stopy	0,591 m
sáh	6 stop	3 lokty	1,733 m
látro	8 stop	4 lokty	2,364 m
prut	16 stop	8 loktů	4,728 m
rybnikářský provazec	44 stop	22 loktů	13,002 m
provazec	104 stop	52 loktů	30,732 m
viničný provazec	128 stop	64 loktů	37,824 m
teneto	240 stop	120 loktů	70,920 m
míle	365 provazců	18.980 loktů	11.217,180 m
méně užívané jednotky:			
čárka	1/12 palce		2,05 mm
tečka	1/12 čárky		0,17 mm
škrup	šířka vlasu		0,32 mm
druhý škrup			0,032 mm
třetí škrup			0,0032 mm

Tabulka 2.1: Převody starých jednotek do dnešní metrické soustavy.

2.2 Metr

Metr je jednou ze sedmi základních jednotek Mezinárodní soustavy jednotek SI.

Definice metru:

Metr (m) je délka dráhy, kterou urazí ve vakuu světlo za $^{1}/_{299\,792\,458}$ sekundy.

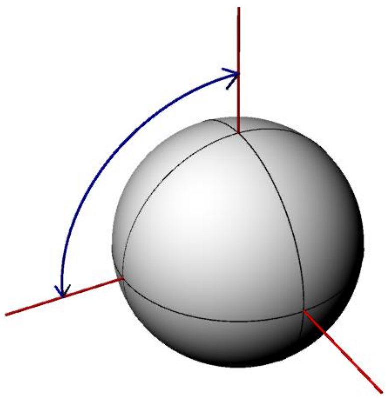
([6], str. 308)

Historie vzniku metru:

Nejednotnost měřidel délky byla velkým problémem zejména při mezistátních obchodních a vědeckých stycích. Až v 17. století se začala projevovat výraznější snaha o jednotné stanovení délkové jednotky, ale první kroky k naplnění této myšlenky byly uskutečněny ve Francii o sto let později. Nejtěžší bylo zvolit základní jednotku délky, kterou by se měřilo ve všech zemích a se kterou by všechny státy souhlasily. Každá země chtěla prosadit své délkové jednotky jako ty všeobecné. Proto bylo zapotřebí zvolit úplně novou jednotku, se kterou by souhlasily všechny země. (Bohužel dodnes ještě několik zemí na jednotnou míru nepřistoupilo.)

Na novou základní jednotku bylo několik návrhů. Fyzik a matematik Huygens navrhoval délku vteřinového kyvadla, Böhm zase dráhu, kterou proběhne volně padající těleso ve vakuu za jednu vteřinu, další vědci navrhovali průměr Slunce, jak ho vidíme, nebo délku buňky ve včelí plástvi.

Koncem 18. století se konvent Francouzské republiky rozhodl zvolit za základní jednotku délky délku vteřinového kyvadla pařížské hvězdárny, ale pařížská Akademie věd to nedoporučila a v květnu roku 1790 přijalo Národní shromáždění Francie dekret o reformě soustavy měr a za délkovou jednotku byla skupinou matematiků navržena deseti miliontá část zemského kvadrantu (obrázek 2.2), tj. deseti miliontá část poloviny délky zemského poledníku.



Obrázek 2.2: Znázornění zemského kvadrantu.

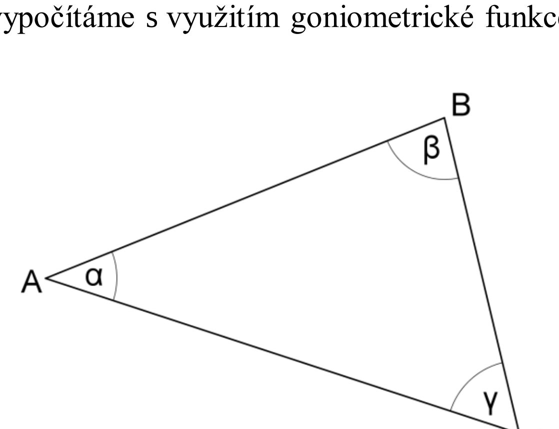
Tento návrh byl přijat v březnu 1791.

Aby bylo možné zavést metr jako všeobecnou základní délkovou jednotku, bylo zapotřebí nejdříve přesně stanovit její délku a k tomu bylo nutné znát délku poloviny zemského poledníku. Tímto důležitým úkolem francouzská Akademie věd pověřila dva významné pracovníky. Byli jimi rytíř Delambre Jean Baptist a Pierre Francois André Méchain. Koncovými body měření byly stanoveny Barcelona a Dunkerque. Vyměřovací práce byly zahájeny v červnu roku 1792. Práci si měřiči rozdělili tak, že od Barcelony až k Rodeze vykonával měření Méchain a od Rodezy k Dunkerque měřil Delambre.

Měření ovšem nebyla vůbec jednoduchá. Ve Francii tou dobou probíhala Velká revoluce a tak Delambre musel často nejdříve svolat lid, vysvětlit jim co, jak a proč měří a teprve po souhlasu shromáždění se mohl pustit do práce. Ale Méchain na tom nebyl o mnoho lépe. Jeho zdraví bylo oslabeno velkou námahou a častými horečkami. Navíc nejistota doby v něm vyvolávala deprese.
Přes všechny útrapy se podařilo oblouk změřit.
Měřilo se pomocí triangulačních sítí. Co to znamená? Vysvětlíme si to na obecném příkladu.

Nechť jsou dány dva body *A, B* takové, že alespoň jeden z nich je dostupný (pro nás nechť to je bod *A*) a z jednoho bodu je vidět na druhý. My chceme změřit jejich vzdálenost, ale mezi nimi je překážka, takže nemůžeme změřit jejich vzdálenost přímo. Využijeme tedy třetího bodu *C* takového, že mezi body *A, C* není žádná překážka a jejich vzdálenost se dá bez problémů změřit, a zároveň je z bodu *C* vidět na bod *B* (obrázek 2.3). Potom změříme vzdálenost mezi body *A, C* a zjistíme velikost úhlů *CAB*, který označíme α, a *ACB*, jenž označíme γ. Potom hledanou vzdálenost mezi body *A, B* vypočítáme s využitím goniometrické funkce sinus (dále jen sin) podle vzorce:

$$|AB| = \frac{|AC| \cdot \sin\gamma}{\sin(180° - \alpha - \gamma)}$$



Obrázek 2.3: Měření vzdálenosti nepřístupného bodu.

Tento postup se využívá při geodetických měřeních, v kartografii při vytváření map, při vyměřování pozemků, projektování dopravních komunikací apod.
A byl použit i zde. Mezi Barcelonou a Dunkerquem byla vytvořena triangulační síť ze 120 trojúhelníků.
Pomocí této triangulační sítě byla vzdálenost mezi koncovými městy vypočtena na 551 584,72 toisy (tois je francouzský sáh). Pokud budeme měřit ve stupních zeměpisné šířky, zjistíme, že vzdálenost těchto dvou zeměpisných bodů činí 9°40'24,75''.

A délka poloviny poledníku byla spočítána na 5 130 739,8 toisu. Nicméně většina učenců nebyla s tímto výsledkem spokojena. Matematické důvody přiměly Méchaina navrhnout, aby bylo měření prodlouženo až na ostrov Formentera v Baleárském souostroví východně od Španělska. Chtěl totiž, aby 45. rovnoběžka vedla středem měřeného oblouku. Francouzská Akademie věd tento návrh schválila a roku 1803 se Méchian vydal na měření do Španělska. Druhé měření bylo ještě nebezpečnější než první, protože vztahy mezi Franciíí a Španělskem byly hodně vyhrocené. Bohužel Méchain neustál velkou námahu jak fyzickou tak i psychickou a roku 1804 ve Valencii zemřel. Ovšem jeho myšlenky žily dál.

A tak dokončením tohoto velkého plánu byli pověřeni Jean Baptiste Biot a Francois Dominik Arago. A zároveň dostali další úkol, a to prodloužit měření až do Alžíru.
Přes všechny útrapy se nakonec měření povedlo a délka zemského čtvrtkruhu byla spočítána. Bylo to 5 130 740 francouzských sáhů. Teprve teď mohla začít realizace myšlenky o jednotné mezinárodní délkové míře.
Deseti miliontá část byla vypočtena přibližně na 0,513 toisu a byla zvolena za obecnou základní jednotku a ta byla pojmenována „metr". Její název byl odvozen od řeckého slova „metron", což znamená v překladu „měřit".
Dne 10. prosince 1799 byl ve Francii oficiálně zaveden metr jako zákonná jednotka délky (ale staré jednotky délky byly definitivně zrušeny až v roce 1840). A zároveň byla zhotovena platinová tyč ve tvaru obdélníku s průřezem 25x4 mm jako prototyp metru, který udával přesnou délku metru při teplotě tajícího ledu, tj. při 0 °C. Tento prototyp byl uložen ve Státním archivu Francouzské republiky v Louvru, a proto dostal přízvisko „archivní".

V letech 1803 až 1866 byl metr postupně zaveden i v Itálii, Holandsku, Belgii, Řecku, Španělsku a užívání metru bylo povoleno i Anglii a Americe.

Teprve v roce 1875 byl metr přijat osmnácti státy jako základ délkové, objemové i plošné míry.

Byly to: Argentina, Belgie, Brasilie, Dánsko, Francie, Itálie, Německo, Norsko, Petru, Portugalsko, Rakousko - Uhersko, Rusko, Spojené státy severoamerické, Španělsko, Švédsko, Švýcarsko, Turecko a Venezuela. Tyto státy podepsaly tzv. Metrickou konvenci (Convention du Metre) a byl zřízen Mezinárodní ústav měr a vah v Paříži. ([3], str. 54)

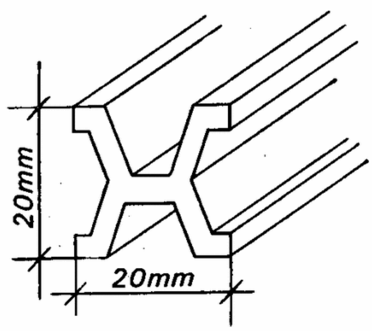
Jediná Anglie metrickou soustavu nepřijala. Důvodem měl být příliš velký zásah do průmyslové výroby, která se řídí odlišnou mírou.

Archívní metr byl v roce 1899 nahrazen tzv. mezinárodním prototypem metru, který byl zhotoven ze slitiny platiny a iridia v poměru 9:1, měl tvar tyče s profilem velkého písmene X (obrázek 2.4), *aby měl co největší odolnost proti ohybu a metr byl definován jako vzdálenost dvou tenkých vrypů na platiniridiové tyči uložené v Mezinárodním úřadu pro váhy a míry v Sèvres u Paříže.* ([6], str. 309)

Následně byla dána kopie mezinárodního prototypu každému státu, který přistoupil na metrickou soustavu, a podle něj se pak přeměřovala všechna délková měřidla v zemi.

Pro zajímavost – Československo používalo jako základní délkový etalon náhradní invarový metru až do roku 1929, kdy se podařilo získat platiniridiový etalon varobený v roce 1874. Tento etalon stál 250 000 Kčs, byl uložen v tehdejším Úřadu pro míry a váhy a je v současném Úřadu pro normalizaci a měření uložen dodnes.

([6], str. 309)



Obrázek 2.4: Tzv. mezinárodní prototyp metru.

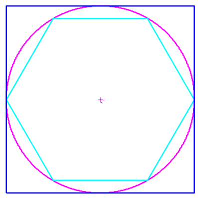
(zdroj: http://gis.zcu.cz/studium/gen1/html/ch06.html, obrázek stažen dne 29.4.2015)

3. Kruh a kružnice

3.1 Obvod kruhu

Do kružnice k o poloměru $r > 0$ vepišme pravidelný šestiúhelník. Jak jistě víme, jeho strana je rovna délce poloměru kružnice jemu opsané, proto se jeho obvod rovná 6r. Pak kružnici opišme čtverec. Délka jeho strany je rovna průměru kružnice vepsané. Tudíž je jeho obvod roven 4 · 2r = 8r.

Z obrázku 3.1 je patrné, že obvod šestiúhelníku je menší než délka kružnice mu opsané a naopak obvod čtverce je větší než délka kružnice. Proto pro obvod o kružnice platí 6r < o < 8r.



Obrázek 3.1: Kružnici opsaný čtverec a kružnici vepsaný šestiúhelník.

Podobný postup využil k výpočtu obvodu kruhu i Archimédés ze Syrákús (viz následující podkapitola *Měření délky kružnice podle Archiméda*), který odhadl číslo π (číslo π udává poměr obvodu kruhu o k jeho průměru d, $\pi = o/d$) s přesností na dvě desetinná místa.

Archimédův výpočet inspiroval řadu matematiků. Za zmínku stojí Leonardo Pisánský (zvaný též Fibonacci, asi 1170 – 1250), který zopakoval Archimédův výpočet ve svém díle *De practica geometriae* asi z roku 1220, kde dospěl k přibližné hodnotě čísla π ≐ 3,141818…

Z mnoha úspěšných pokusů o výpočet čísla π připomeňme ještě dva. Perský matematik a astronom al-Kāshī (14. až 15. stol.), který působil v Samarkandu, vypočetl roku 1429 hodnotu čísla π na 16 desetinných míst a holandský matematik Ludolf van Ceulen (1540 – 1610) vypočítal roku 1596 číslo π podle Archimédova vzoru na dvacet desetinných míst (došel k $15 \cdot 2^{37}$*- úhelníku) a roku 1603 na 32 desetinných míst. Při svých výpočtech dospěl až k* 2^{62}*-úhelníku.* ([1], str. 56)

Po něm se nazývá π číslem Ludolfovým.

V roce 2011 určil francouzský matematik Fabrice Bellard s pomocí osobního počítače číslo π na téměř 2,7 bilionu desetinných míst. ([19], str. 28)

Ale pro praktické použití se využívá přibližných hodnot, jako jsou 3,14159; 3,14 nebo $\frac{22}{7}$.

3.2 Měření délky kružnice podle Archiméda

Následující text vychází z knihy od Jindřicha Bečváře a kolektivu autorů [1].

Jedním z Archimédových děl je spis *Měření kruhu*, který na počátku 20. století přeložil do češtiny Miloslav Valouch (1878 – 1952).

Tento spis obsahuje tři matematické věty, které bychom dnes formulovali asi takto:

Věta 1: *Obsah kruhu je roven obsahu pravoúhlého trojúhelníku, jehož odvěsnami jsou poloměr a obvod tohoto kruhu.* ([1], str. 52)

$$S = \frac{1}{2} \cdot r \cdot o$$

(Tvrzení této věty Archimédés dokázal exhaustivní metodou a exaktně tak ukázal vztah obvodu a obsahu kruhu.)

Věta 2: *Obsah kruhu je přibližně roven jedenácti čtrnáctinám obsahu čtverce, jehož stranou je průměr kruhu.* ([1], str. 53)

(V důkazu využívá první větu a také výsledek následující třetí věty. Pořadí druhé a třetí věty bylo snad při nějakém pozdějším přepisu omylem zaměněno.)

Věta 3: *Pro obvod o kruhu o poloměru r platí:* $3\frac{10}{71} \cdot 2r < o < 3\frac{1}{7} \cdot 2r$. ([1], str. 53)

(V důkazu této věty vypočítal horní i dolní odhad obvodu *o* kruhu ještě přesněji, ale horní mez potom zaokrouhlil nahoru a dolní dolů.

$$3\frac{10}{71} \cdot 2r < \frac{6336}{2017\frac{1}{4}} \cdot 2r < O < \frac{14688}{4673\frac{1}{2}} \cdot 2r < 3\frac{1}{7} \cdot 2r$$

Po převedení na desetinná čísla bude přesnost Archimédových odhadů zřejmější:

$$3{,}140845\ldots \cdot 2r < 3{,}140909\ldots \cdot 2r < O < 3{,}142826\ldots \cdot 2r < 3{,}142857\ldots \cdot 2r)$$

Můžeme také říci, že Archimédés odhadl číslo π s přesností na dvě desetinná místa.

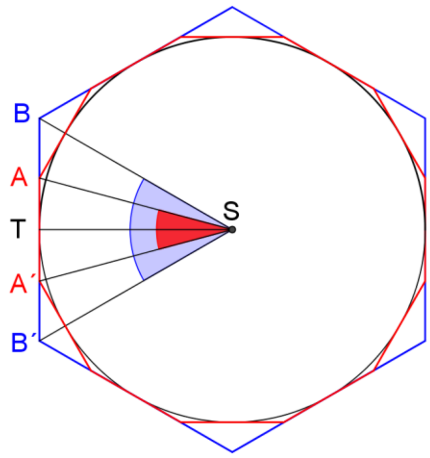
$$3{,}140909\ldots < \pi < 3{,}142826\ldots$$

Už pro vyčíslení první věty potřeboval Archimédés znát délku kružnice (tj. obvod kruhu). Proto se na důkaz třetí věty a zároveň na výpočet délky kružnice podíváme podrobněji.

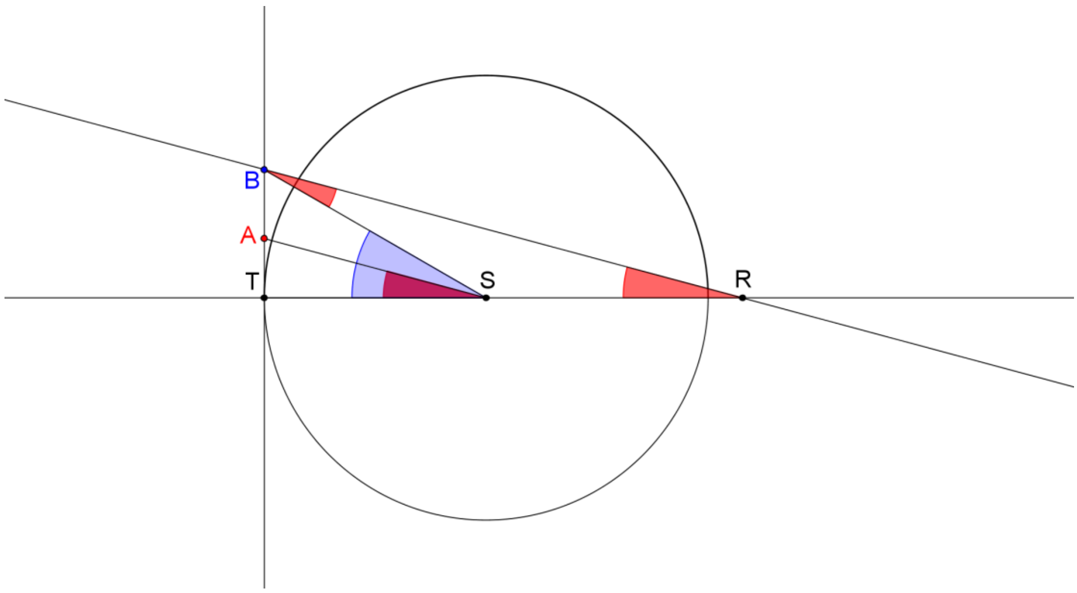
Důkaz třetí věty (s využitím algebraické symboliky, kterou Archimédés k dispozici neměl)**.**

Výpočet obvodu 96-úhelníku kružnici opsaného.

Pro jednoduchost budeme počítat s jednotkovou kružnicí, které opíšeme pravidelný n-úhelník. Rozpůlením středových úhlů získáme pravidelný 2n-úhelník (obrázek 3.2 a obrázek 3.3).



Obrázek 3.2: Kružnici opsaný pravidelná n-úhelník a *2n*-úhelník.



Obrázek 3.3: Nalezení délky poloviny strany kružnici opsaného *2n*-úhelníku pomocí půlení středových úhlů *n*-úhelníku.

Úsečka BT je polovinou strany opsaného n-úhelníku a AT je polovinou strany opsaného 2n-úhelníku ($|\sphericalangle TSA| = |\sphericalangle ASB|$).

$$|TS| = 1.$$

Délky těchto úseček označme |BT| = t_n a |AT| = t_{2n}.

Nechť je přímka BR rovnoběžná s přímkou AS, potom platí:

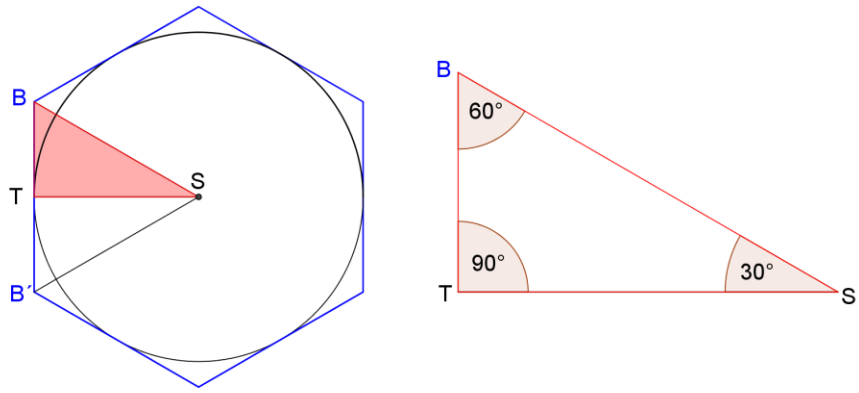
$$|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle SBR| = |\sphericalangle SRB|,$$

a tedy |SB| = |SR|. Potom je $\Delta\, ATS$ podobný $\Delta\, BTR$ podle věty „uu", a tudíž:

$$\frac{|AT|}{|TS|} = \frac{|BT|}{|TR|} = \frac{|BT|}{|TS| + |SR|} = \frac{|BT|}{|TS| + |SB|}$$

Po dosazení dostaneme vztah: $\mathbf{t_{2n}} = \frac{\boldsymbol{t_n}}{\mathbf{1+\sqrt{1+\boldsymbol{t_n^2}}}}$, tento vztah označíme (*).

Nyní vypočítáme t_6 (obrázek 3.4):



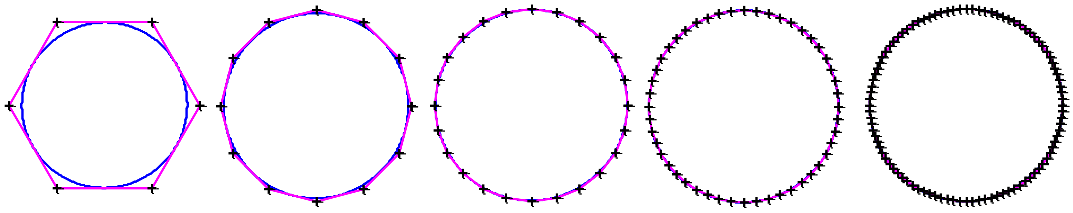
Obrázek 3.4: Výpočet délky úsečky *BT* pomocí pravoúhlého trojúhelníku *SBT*.

Potom t_6 vypočítáme pomocí funkce tangens ($\tan\alpha = \frac{protilehlá}{přilehlá}$, ve většině českých učebnic se pro funkci tangens užívá zkratka *tg*, já ve své práci využívám anglickou zkratku *tan*, kterou se vyskytuje například v počítačových programech):

$$t_6 = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Podle vztahu (*) můžeme vypočítat t_{12}, t_{24}, t_{48}, a konečně i t_{96} (a mohli bychom pokračovat s vyčíslováním i dále).

Obvod opsaného 96-úhelníku: $96 \cdot 2t_{96} = 192 \cdot t_{96}$



Obrázek 3.5: Kružnici opsaný pravidelný 6-úhelník, 12-úhelník, 24-úhelník, 48-úhelník a 96-úhelník.

Z obrázku 3.5 je patrné, že s narůstajícím počtem vrcholů mnohoúhelníku se zmenšuje jeho obvod a stále se přibližuje k obvodu kružnice.

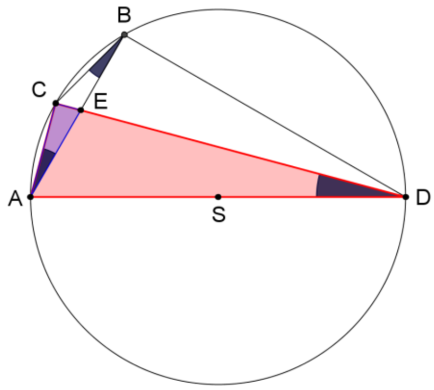
Počet vrcholů n, hodnoty t_1 až t_{6144}, obvod opsaného mnohoúhelníku o a horní odhad čísla π ($\pi = o / 2$) jsou uvedeny v následující tabulce. Všechny hodnoty jsou vypočítány v programu MatLab a zaokrouhleny na 15 desetinných míst. U horního odhadu čísla π je tučně zvýrazněno na kolik desetinných míst je tento odhad přesný. (Archimédés vypočítal hodnoty jen pro n = 6, 12, 24, 48, 96. Další hodnoty jsou uvedeny v tabulce 3.1 pod čarou).

n	t_n	o	horní odhad čísla π
6	0,577350269189626	6,928203230275511	**3**,464101615137755
12	0,267949192431123	6,430780618346946	**3**,215390309173473
24	0,131652497587396	6,319319884195003	**3,1**59659942097501
48	0,065543462815238	6,292172430262871	**3,14**6086215131436
96	0,032736610412973	6,285429199290739	**3,14**2714599645370
192	0,016363922135312	6,283746099959650	**3,141**873049979825
384	0,008181413403794	6,283325494113701	**3,141**662747056850
768	0,004090638250787	6,283220353209383	**3,141**610176604691
1536	0,002045310569220	6,283194068643057	**3,14159**7034321528
3072	0,001022654215095	6,283187497542709	**3,14159**3748771355
6144	$5,113269738582517e^{-4}$	6,283185854770197	**3,141592**927385099

Tabulka 3.1: Tabulka hodnot délek stran, obvodů a přibližné hodnoty čísla π pro kružnici opsané pravidelné 2n-úhelníky.

Výpočet obvodu 96-úhelníku kružnici vepsaného.

Mějme opět jednotkovou kružnici, do které vepíšeme pravidelný n-úhelník a rozpůlením středových úhlů získáme pravidelný 2n-úhelník (obrázek 3.6).



Obrázek 3.6: Kružnici vepsaný *n*-úhelník a *2n*-úhelník.

|SA| = 1, úsečka AB je stranou vepsaného n-úhelníku, úsečky AC a BC jsou strany vepsaného 2n-úhelníku. Délky těchto stran označme $|AB| = s_n$, $|AC| = s_{2n}$. Pomocí elementární geometrie zjistíme, že trojúhelníky $\Delta\, ADC$ a $\Delta\, EAC$ jsou podobné (podle věty „uuu“). Potom z těchto podobností vyplývají rovnosti:

$$\frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|EA|}{|CA|} \qquad \text{a} \qquad \frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|EB|}{|CB|} = \frac{|EB|}{|CA|}$$

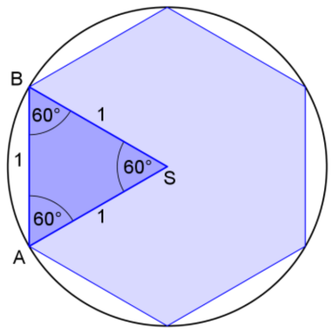
Odtud plyne:

$$\frac{|AD| + |BD|}{|CD|} = \frac{|EA| + |EB|}{|CA|} = \frac{|AB|}{|CA|}$$

Po dosazení dostaneme vztah $\frac{2+\sqrt{4-s_n^2}}{\sqrt{4-s_n^2}} = \frac{s_n}{s_{2n}}$, který upravíme $s_{2n} = \frac{s_n}{\sqrt{2+\sqrt{4-s_n^2}}}$

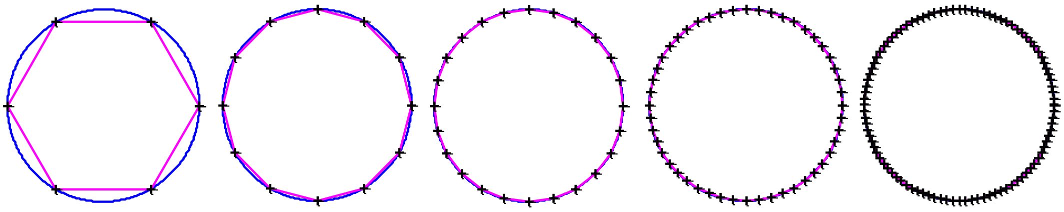
a upravený vztah označíme (**).

Nyní si musíme uvědomit, že $s_6 = 1$ (obrázek 3.7). Potom podle vztahu (**) snadno získáme s_{12}, s_{24}, s_{48} a nakonec i s_{96}.



Obrázek 3.7: Délka úsečky *AB*.

Vypočítali jsme tedy obvod vepsaného 96-úhelníku: 96 $\cdot\, s_{96}$



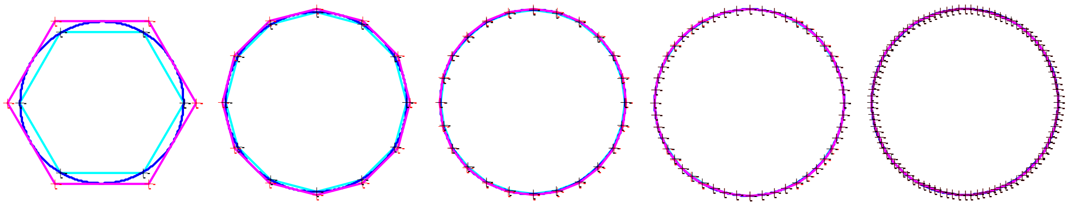
Obrázek 3.8: Kružnici vepsaný pravidelný 6-úhelník, 12-úhelník, 24-úhelník, 48-úhelník a 96-úhelník.

Z obrázku 3.8 je patrné, že s narůstajícím počtem vrcholů mnohoúhelníku se zvětšuje jeho obvod a stále se přibližuje k obvodu kružnice.

Počet vrcholů *n*, hodnoty s_1 až s_{6144}, obvod vepsaného mnohoúhelníku *o* a dolní odhad čísla π ($\pi = o / 2$) jsou uvedeny v následující tabulce. Všechny hodnoty jsou vypočítány v programu MatLab a zaokrouhleny na 15 desetinných míst. U dolního odhadu čísla π je tučně zvýrazněno na kolik desetinných míst je tento odhad přesný. (Archimédés vypočítal hodnoty jen pro n = 6, 12, 24, 48, 96. Další hodnoty jsou uvedeny v tabulce 3.2 pod čarou).

n	s_n	o	dolní odhad čísla π
6	1,000000000000000	6,000000000000000	**3**,000000000000000
12	0,517638090205041	6,211657082460498	**3,1**05828541230249
24	0,261052384440103	6,265257226562476	**3,1**32628613281238
48	0,130806258460286	6,278700406093734	**3,1**39350203046867
96	0,065438165643552	6,282063901781019	**3,141**031950890509
192	0,032723463252974	6,282904944570923	**3,141**452472285462
384	0,016362279207874	6,283115215823715	**3,1415**57607911858
768	0,008181208052470	6,283167784296635	**3,1415**83892148318
1536	0,004090612582328	6,283180926456099	**3,14159**0463228050
3072	0,002045307360677	6,283184211998542	**3,141592**105999271
6144	0,001022653814027	6,283185033384313	**3,141592**516692156

Tabulka 3.2: Tabulka hodnot délek stran, obvodů a přibližné hodnoty čísla π pro kružnici vepsané pravidelné 2n-úhelníky.



Obrázek 3.9: Kružnici opsaný i vepsaný pravidelný 6-úhelník, 12-úhelník, 24-úhelník, 48-úhelník a 96-úhelník (červené křížky jsou vrcholy opsaného n-úhelníku a černé křížky jsou vrcholy vepsaného n-úhelníku).

Obvod kruhu můžeme tedy odhadnout shora obvodem opsaného 96-úhelníku a zdola obvodem vepsaného 96-úhelníku (obrázek 3.9). Potom pro obvod kruhu platí:

$$96 \cdot s_{96} < o < 192 \cdot t_{96}$$

Podle vzorců (*) a (**) lze vypočítat hodnoty obvodu kruhu a také určit odhad čísla π. V tabulce 3.3 jsou uvedené přibližné hodnoty Ludolfova čísla omezené shora pomocí vepsaných pravidelných n-úhelníků a zdola pomocí vepsaných pravidelných n-úhelníků. Tučně je zvýrazněno, na kolik desetinných míst je odhad správný.

n	Dolní odhad		Ludolfovo číslo		Horní odhad
3	**3**,000000000000000	<	π	<	**3**,464101615137755
6	**3,1**05828541230249	<	π	<	**3**,215390309173473
12	**3,1**32628613281238	<	π	<	**3,1**59659942097501
24	**3,1**39350203046867	<	π	<	**3,14**6086215131436
48	**3,141**031950890509	<	π	<	**3,14**2714599645370
96	**3,141**452472285462	<	π	<	**3,141**873049979825
192	**3,1415**57607911858	<	π	<	**3,141**662747056850
384	**3,1415**83892148318	<	π	<	**3,141**610176604691
768	**3,14159**0463228050	<	π	<	**3,14159**7034321528
1536	**3,141592**105999271	<	π	<	**3,14159**3748771355
3072	**3,141592**516692156	<	π	<	**3,141592**927385099

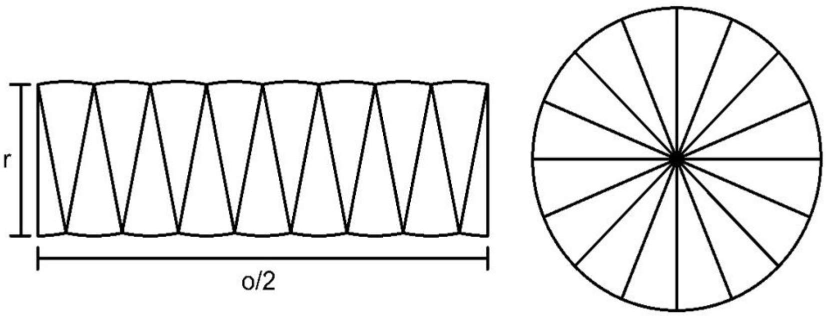
Tabulka 3.3: Přibližné hodnoty čísla π omezené shora pomocí vepsaných pravidelných n-úhelníků a zdola pomocí vepsaných pravidelných n-úhelníků.

3.3 Měření obvodu kruhu na střední škole

Aplikace Archimédova měření obvodu kruhu na střední škole.

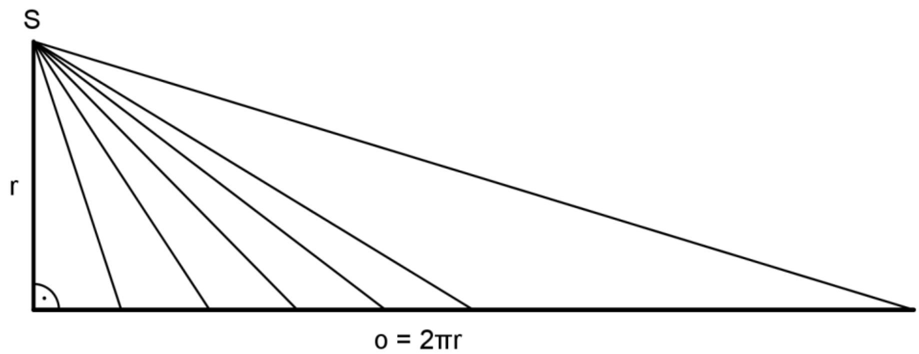
Pomocí následujících obrázků lze jednoduše znázornit Archimédův vztah $S = \frac{1}{2} \cdot r \cdot o$, kterým bychom vyjádřili jeho první větu v jeho spisu.

Kruh rozdělíme na $2n$ shodných výsečí a tyto výseče poskládáme tak, jak je na obrázku 3. Vznikne tak jakýsi „křivočarý rovnoběžník“. Jedna jeho strana je rovna poloměru řezaného kruhu a druhá odpovídá polovině obvodu daného kruhu. Pokud zvětšujeme počet výsečí (tj. neomezeně zvyšujeme číslo n), pak se „křivočarý rovnoběžník“ blíží skutečnému obdélníku (obrázek 3.10).



Obrázek 3.10: Obsah kruhu jako obsah křivočarého rovnoběžníku.

Druhý možný způsob vysvětlení je na následujícím obrázku 3.11.



Obrázek 3.11: Obsah kruhu jako obsah pravoúhlého trojúhelníka.

Kruh „odvalíme“ tak, aby se kružnice „narovnala“. Obsahy jednotlivých kruhových výsečí jsou rovny obsahům jednotlivých trojúhelníků, jejichž součet délek základen je roven obvodu daného kruhu a výška odpovídá poloměru tohoto kruhu.

Archimédovy výpočty čísla π pomocí aproximace obvodu kruhu obvody pravidelných vepsaných a opsaných n-úhelníků můžeme využít i na střední škole. Studenti si tak zopakují řadu poznatků z matematiky.

3.4 Rektifikace kružnice

Rektifikace je latinské slovo a česky znamená narovnání. Rektifikace kružnice (resp. oblouku kružnice) tedy znamená narýsování úsečky o délce obvodu dané kružnice (resp. oblouku kružnice).

Už v dávných dobách se staří Řekové pokoušeli přesně sestrojit jen s pomocí pravítka a kružítka úsečku, která by byla rovna obvodu kruhu daného poloměru, tedy provést rektifikaci kružnice. Ale až v roce 1882 bylo dokázáno, že to nejde. Je to tedy jedna ze čtyř „neřešitelných" matematických úloh, která nelze vyřešit eukleidovskou konstrukcí (tj. pravítkem a kružítkem). Další „neřešitelné" úlohy jsou trisekce úhlu, zdvojení krychle a kvadratura kruhu. Právě kvadratura kruhu a rektifikace kružnice spolu úzce souvisejí, proto se v některých pramenech uvádí pouze tři „neřešitelné" matematické úlohy. Neřešitelnost rektifikace kružnice a kvadratury kruhu eukleidovskou metodou vyplývá z vlastností čísla π. V roce 1882 německý matematik F. Lindemann dokázal, že π není řešením žádné algebraické rovnice s racionálními koeficienty a celočíselnými mocninami (tj. π není algebraické, ale transcendentní číslo) a tudíž nelze sestrojit úsečku této délky eukleidovskou konstrukcí.

Výhodným způsobem, jak alespoň přibližně sestrojit úsečku o velikosti obvodu daného kruhu, je Kochaňského rektifikace.

Pro rektifikaci oblouku o středovém úhlu menším než 30°, případně i pro zpětné navíjení úsečky na kružnici je užívána Sobotkova rektifikace.

Použitím těchto metod dostáváme úsečku, která má délku přibližně stejně velkou, avšak nepatrně větší, než je skutečná délka příslušného oblouku.

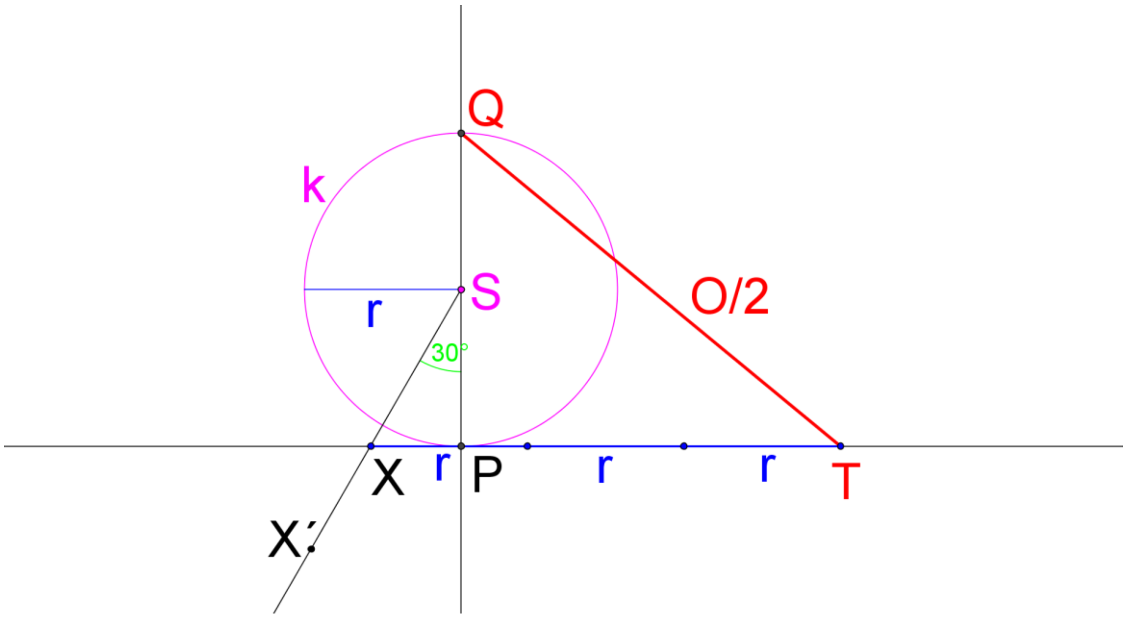
Opačný problém (tj. délka úsečky je jen nepatrně menší než délka příslušného oblouku) nastává při rektifikaci D'Ocagneově. Tato rektifikace slouží pro narýsování úsečky o délce, která je rovna délce oblouku o středovém úhlu menším než 90°.

Na dalších stránkách si všechny tyto konstrukce názorně předvedeme.

3.4.1 Kochaňského rektifikace kružnice

Postup konstrukce (obrázek 3.12):

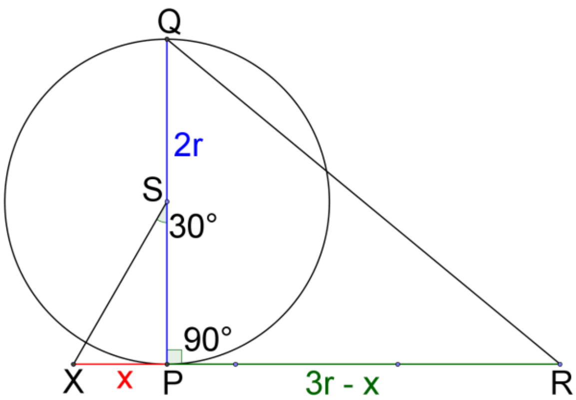
Mějme narýsovanou kružnici *k* se středem v bodě *S* a poloměrem délky *r*. Narýsujme si libovolný průměr. Koncové body označme *P, Q*. Bodem *P* veďme kolmici na průměr *PQ*. Dále rýsujeme podle obrázku úhel *X´SP*, který má velikost 30°. Průsečík polopřímky *SX´* a kolmice na průměr vedené bodem *P* je bod *X*. Na polopřímku *XP* naneseme úsečku, jejíž velikost je rovna trojnásobku poloměru *r*. Koncový bod této úsečky *T* spojíme s bodem *Q*. Velikost vzniklé úsečky *TQ* je přibližně rovna polovině obvodu rektifikované kružnice.



Obrázek 3.12: Kochaňského rektifikace.

Chyba při přesném rýsování činí přibližně 0,000019. Můžeme to dokázat jednoduchým výpočtem, který je předveden na následujících stránkách.

Chybu Kochaňského rektifikace můžeme snadno vypočítat za pomoci znalostí středoškolské matematiky. K lepší orientaci ve výpočtech poslouží obrázek 3.13.



Obrázek 3.13: Velikost chyby při Kochaňského rektifikaci.

K výpočtu velikosti úsečky *QR* potřebujeme nejprve znát velikost úsečky *XP*, kterou označíme x (tj. |*XP*| = *x*). Musíme si uvědomit, že *x* je odvěsnou v pravoúhlém trojúhelníku $\Delta\, XPS$, kde pravý úhel je u vrcholu *P* a druhá odvěsna má délku poloměru dané kružnice (|*PS*| = *r*). Proto můžeme k výpočtu použít funkci tangens ($\tan\varphi = \frac{protilehlá}{přilehlé}$)

$$\frac{x}{r} = \tan 30°$$

Po úpravě:

$$x = r \cdot \tan 30°$$

Po dosazení:

$$x = r \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Druhý pravoúhlý trojúhelník je $\Delta\, QPR$, jenž má pravý úhel opět u vrcholu *P*, ale nyní nás zajímá délka přepony, kterou označíme *y* (|*RQ*| = *y*). Vzhledem k tomu, že známe délky obou jeho odvěsen (|*QP*| = *2r*, |*PR*| = *(3r – x)*), využijeme k výpočtu Pýthagorovu větu ($a^2 + b^2 = c^2$).

$$r^2\left[2^2 + \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right] = y^2$$

Po úpravě:

$$r^2\left(4 + 9 - 2\sqrt{3} + \frac{1}{3}\right) = y^2$$

Nakonec celou rovnici odmocníme (druhé řešení neuvažujeme, protože vzdálenost je vždy kladné číslo):

$$r \cdot \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} = y$$

Pokud by konstrukce byla naprosto přesná, musel by být podíl poloviny obvodu kruhu ($\frac{o}{2} = \frac{2\pi r}{2}$) a y roven jedné. Ale není.

$$\frac{\pi}{\sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}}} \doteq 1{,}00001888087067 \ldots.$$

Po odečtení jedničky a zaokrouhlení dostáváme přibližnou chybu této rektifikace, která je přibližně 0,000019.

3.4.2 Sobotkova rektifikace kružnice

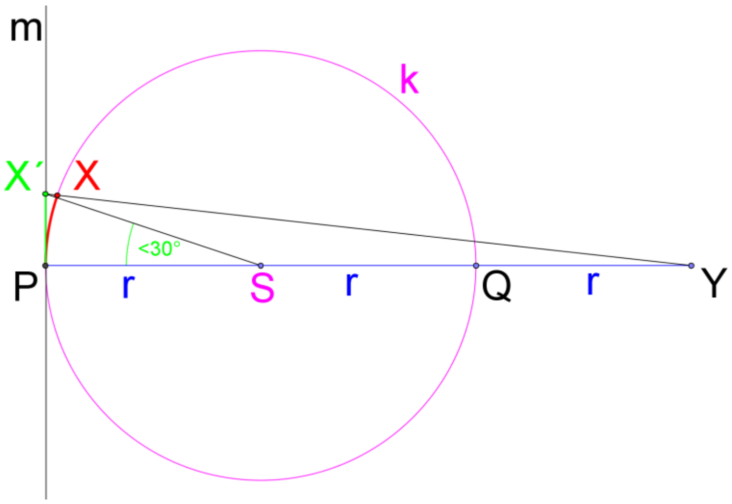
Postup konstrukce (obrázek 3.14):

Mějme narýsovanou kružnici k se středem v bodě S a poloměrem délky r. Chtějme narýsovat úsečku PX', která bude mít délku jako oblouk PX.

Narýsujme polopřímku PS. Jeden průsečík polopřímky PS s kružnicí k je bod P, druhý označme písmenem Q. Na polopřímku PS nanesme od bodu P úsečku délky 3r a koncový bod této úsečky označme Y ($|PS| = |SQ| = |QY| = r$). Bodem P veďme kolmici m na polopřímku PS. Nyní narýsujme polopřímku YX. Průsečík této polopřímky YX a přímky M označme X'.

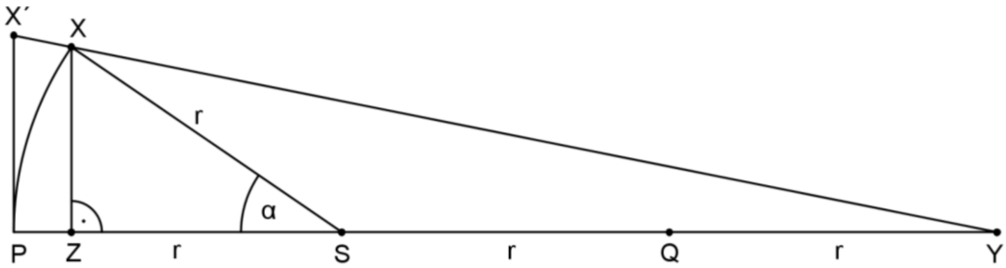
Délka úsečky PX' je přibližně rovna velikosti oblouku PX.

Z obrázku je vidět, že můžeme postupovat i opačným směrem, tj. sestrojit oblouk dané kružnice o velikosti délky dané úsečky.



. **Obrázek 3.14:** Sobotkova rektifikace.

Velikost chyby u této rektifikace závisí na středovém úhlu rektifikovaného oblouku kružnice, případně na volbě délky navíjené úsečky na danou kružnici, proto dále předvedu, jak pomocí středoškolské matematiky odvodit vzorec pro snadné dopočítání chyby rektifikace kružnice o daném poloměru a pro konkrétní úhel i pro délku úsečky navíjenou na kružnici o poloměru r.



Obrázek 3.15: Chyba při Sobotkově rektifikaci (rektifikujeme-li oblouk kružnice příslušný danému úhlu)

Když rektifikujeme oblouk příslušný danému úhlu, máme dán středový úhel α (ve stupních) a poloměr kruhového oblouku r (obrázek 3.15).

Nejdříve si vypočítáme délku našeho kruhového oblouku, kterou označíme d.

$$\frac{2\pi r}{360} \cdot \alpha = d$$

Nyní potřebuje spočítat délku úsečky PX'. K tomu využijeme podobných trojúhelníků $\Delta\, YZX$ a $\Delta\, YPX'$ (je zřejmé, že trojúhelníky jsou podobné podle věty „uu“).

Délku úsečky ZX vypočítáme z pravoúhlého $\Delta\, SZX$ a využijeme k tomu funkci sinus ($\sin\varphi = \frac{protilehlá}{přeponě}$).

$$|ZX| = r \cdot \sin\alpha$$

Abychom zjistili délku úsečky ZY, musíme nejdříve určit velikost úsečky *ZS*, protože z obrázku vidíme, že |*ZY*| = |*YS*| + *2r*. Ale velikost *ZS* vypočítáme snadno opět za pomoci pravoúhlého $\Delta\, SZX$ a využijeme k tomu funkci cosinus ($\cos\varphi = \frac{přilehlá}{přeponě}$).

$$|ZS| = r \cdot \cos\alpha$$

Potom

$$|ZY| = r \cdot \cos\alpha + 2r$$

Teď si uvědomme, že máme spočítané délky dvou stran trojúhelníka $\Delta\, YZX$ a známe délku strany PY podobného trojúhelníka $\Delta\, YPX'$ ($|PY| = 3r$). V podobnosti si odpovídají strany: PY a ZY, PX' a ZX, YX' a YX (Známe: $|ZX|$, $|ZY|$, $|PY|$, chceme $|PX'|$).

Pomocí podobnosti nyní můžeme určit délku strany PY.

$$\frac{|PX'|}{|ZX|} = \frac{|PY|}{|ZY|}$$

Po úpravě:

$$|PX'| = \frac{|PY|}{|ZY|} \cdot |ZX|$$

Po dosazení a drobné úpravě dostaneme:

$$|PX'| = \frac{3r \cdot \sin\alpha}{\cos\alpha + 2}$$

Nyní máme vypočítanou délku oblouku i délku příslušné úsečky. Abychom zjistili velikost chyby, musíme udělat podíl těchto délek a odečíst jedničku. Dostáváme pak velikost chyby, jejíž znamínko nám říká, jestli je úsečka kratší nebo delší než délka oblouku.

$$chyba = \frac{d}{|PX'|} - 1$$

Po dosazení a drobných úpravách dostaneme:

$$chyba = \frac{(\cos\alpha + 2) \cdot \pi\alpha}{540 \sin\alpha} - 1$$

chyba > 0 a z toho plyne, že rektifikovaný oblouk kružnice je o velikost chyby větší než získaná úsečka.

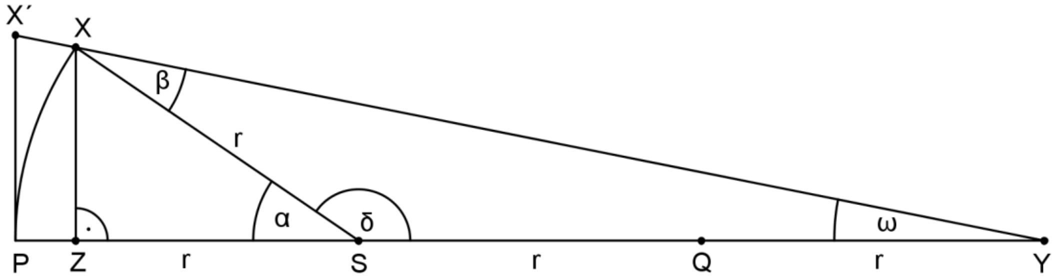
Příklad: Mějme oblouk jednotkové kružnice se středovým úhlem α:

α	Přibližná chyba
5°	0, 000000322485989
10°	0, 000005173852888
15°	0, 000026312170593
20°	0, 000083693519786
25°	0, 000206028154359
30°	0, 000431594836769
35°	0, 000809352168613
40°	0, 001400401654945
45°	0, 002279877492210
50°	0, 003539364551310
55°	0, 005289981413259
60°	0, 007666313463454

Tabulka 3.4: Tabulka velikostí chyb při Sobotkově rektifikaci oblouku kružnice příslušného danému úhlu.

Z tabulky 2.4 je vidět, že při zvětšování středového úhlu chyba prudce roste. Proto se doporučuje rektifikovat oblouky o středovém úhlu menším než 30°. Na internetu se často uvádí, že tato rektifikace je vhodná až pro úhel 45°, ale není tomu tak. Při rektifikaci oblouku o středovém úhlu větším než 30° je chyba již velká a je vhodné oblouk rozdělit, případně použít jinou rektifikaci.

Pokud postupujeme opačným směrem, tj. máme danou úsečku (známe $|PX'|$), kterou chceme „navinout“ na kružnici o daném poloměru r, a spočítat chybu, pak počítáme následujícím způsobem (obrázek 3.16).



Obrázek 3.16: Chyba při Sobotkově rektifikaci (navíjíme-li danou úsečku na kružnici).

Potřebujeme určit velikost úhlu α. Doplněk úhlu α do 180° je úhel δ. Takže nám stačí určit vnitřní úhly v trojúhelníku $\Delta\, YSX$. K určení velikosti úhlu ω nám pomůže pravoúhlý trojúhelník $\Delta\, YPX'$.

Velikost úsečky PX' byla dána a velikost úsečky YP je trojnásobek poloměru dané kružnice (tj. $|YP| = 3r$).

Potom velikost úhlu $\sphericalangle\, PYX'$ spočítáme pomocí funkce tangens ($\tan\varphi = \frac{protilehl\acute{a}}{p\check{r}ilehl\acute{e}}$).

$$\tan\omega = \frac{|PX'|}{|YP|}$$

Potom

$$\omega = \tan^{-1}\frac{|PX'|}{3r}$$

Nyní si musíme uvědomit, že trojúhelník $\Delta\, YSX$ je obecný, ale platí v něm sinová věta ($\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$). Tudíž jsme schopni dopočítat všechny ostatní úhly.

$$\frac{|SX|}{\sin\varpi} = \frac{|SY|}{\sin\beta} = \frac{|XY|}{\sin\delta} \qquad \wedge \qquad \varpi + \beta + \delta = 180°$$

Po dosazení:

$$\frac{r}{\sin\left(\tan^{-1}\frac{|PX'|}{3r}\right)} = \frac{2r}{\sin\beta}$$

Po úpravě:

$$\beta = \sin^{-1}\left(2 \cdot \sin\left(\tan^{-1}\frac{|PX'|}{3r}\right)\right)$$

Nyní si dopočítáme úhel α.

$$\delta = 180° - (\varpi + \beta) = 180° - \alpha \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \varpi + \beta$$

V tuto chvíli již můžeme pro výpočet chyby použít vzoreček z předchozího příkladu.

$$chyba = \frac{(\cos\alpha + 2) \cdot \pi\alpha}{540 \sin\alpha} - 1$$

$$chyba = \frac{\left(\cos(tan^{-1}\frac{|PX'|}{3r} + \beta) + 2\right) \cdot \pi(tan^{-1}\frac{|PX'|}{3r} + \beta)}{540 \sin(tan^{-1}\frac{|PX'|}{3r} + \beta)} - 1$$

Pro jednotkovou kružnici dostáváme tabulku chyb (tabulka 3.5):

$\|PX'\|$	**Přibližná chyba**
0,1	0,000000556218865
0,2	0,000008931715297
0,3	0,000045495064381
0,4	0,000145062439632
0,5	0,000358355624025
0,6	0,000754390526657
0,7	0,001424244992746
0,8	0,002486976627436
0,9	0,004099047666614
1,0	0,006469757398925
1,5	0,047197551196598

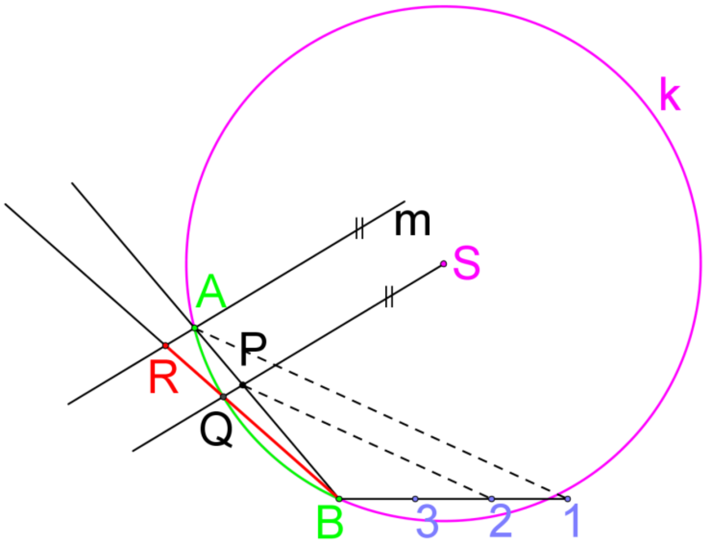
Tabulka 3.5: Tabulka velikostí chyb při Sobotkově rektifikaci navíjíme-li danou úsečku na kružnici.

3.4.3 D'Ocagneova rektifikace.

Postup konstrukce (obrázek 3.17):

Mějme danou kružnici *k* se středem *S* a poloměrem *r*. Rektifikovaný oblouk je určen body *A, B* ležících na kružnici *k*.

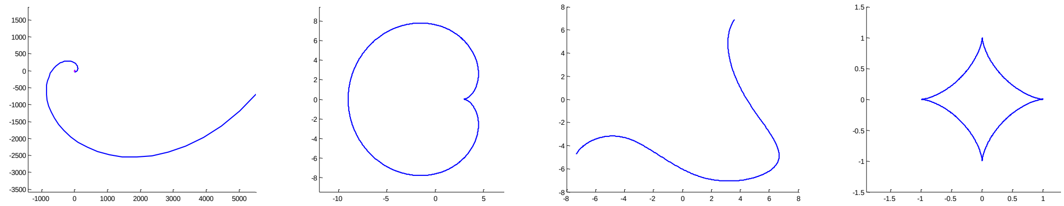
Sestrojme úsečku *AB*. Pak ji pomocí bodů 1, 2 a 3 rozdělme na 3 shodné části (na třetiny). Bod v jedné třetině úsečky *AB* označme *P*. Pak sestrojme polopřímku *SP*. Její průsečík s kružnicí *k* označme *Q*. Potom bodem *A* veďme rovnoběžku *m* s polopřímkou *SP*. Sestrojme polopřímku *BQ*. Průsečík polopřímek *BQ* a *m* označme *R*. Hledaná délka oblouku *AB* je přibližně stejně velká jako délka úsečky *BR*.



Obrázek 3.17: D'Ocagneova rektifikace.

Více o rektifikacích a jejich chybách jsem našla na zajímavých webových stránkách: http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/401711/DejinyMat_44-2010-1_6.pdf

4. Křivky



Obrázek 4.1: Rovinné křivky: logaritmická spirála, kardioida, Coonsova kubika a asteroida.

Křivky patří k základním geometrickým objektům. Pod pojmem *křivka* si asi každý intuitivně představí dlouhou tenkou čáru, která se může různě klikatit. Můžeme ji chápat jako dráhu pohybujícího se bodu (např. dráha letadla letícího po obloze nebo stopa ve sněhu za lyžařem).

Studiem a popisováním křivek se zabývá například diferenciální geometrie.

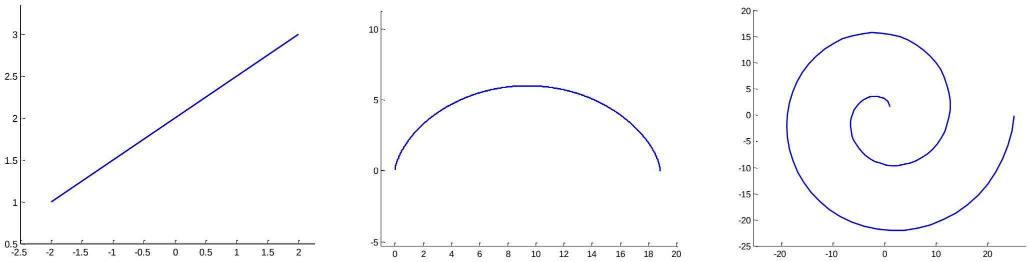
Nyní vyslovíme definici křivky:

Křivkou v $\mathbb{R}_r$ *rozumíme zobrazení* φ *nějakého intervalu* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *do* $\mathbb{R}_r$. *Množinu* $\varphi([a, b])$ *nazýváme jejím* ***geometrickým obrazem***. *Někdy se také křivkou nazývá množina* $\varphi([a, b])$ *a zobrazení* φ *se nazývá jejím* ***parametrickým zadáním***.

([5], str. 175)

4.1 Křivky v rovině

Příklady známých křivek v rovině:



Obrázek 4.2: Příklady rovinných křivek: přímka, prostá cykloida a spirála.

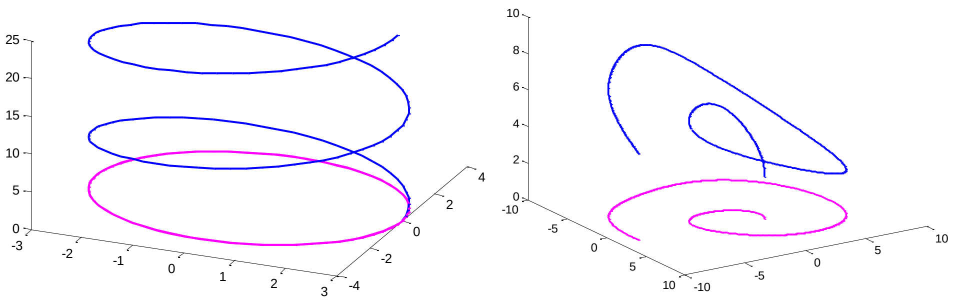
Další příklady známých rovinných křivek: kružnice, elipsa, parabola, hyperbola, asteroida, kardioida, logaritmická spirála, řetězovka, klotoida, atd.

Zadání křivky v rovině:

- Explicitní rovnice: *graf funkce y = f(x), x ∈ [a, b]* ([5], str. 178)
- Implicitní rovnice: množina bodů F(x,y) = 0
- Parametrické rovnice: c: [a, b] → R^2, c(t) = [x(t), y(t)], t ∈ R
- Tzv. polární tvar: $r = h(\varphi),\ \varphi \in [\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi]$ ([5], str. 179)
- Je mnoho experimentálních křivek, jejichž početní vyjádření neznáme.

4.2 Křivky v prostoru

Příklady křivek v prostoru:



Obrázek 4.3: Příklady prostorových křivek: šroubovice a Coonsova kubika v prostoru (růžový je půdorys křivky, modrá je prostorová křivka).

Zadání křivky v prostoru:

- Implicitní rovnice: množina bodů F(x,y,z) = 0
- Parametrické rovnice: c: [a, b] → R^3, c(t) = [x(t), y(t), z(t)], t ∈ R
- Je mnoho experimentálních křivek, jejichž početní vyjádření neznáme.

4.3 Výpočet délky křivky

Abychom mohli vypočítat délku křivky, musíme znát její početní vyjádření. Následně ji můžeme nahradit lomenou čarou.

Sečteme-li délky jednotlivých úseček (vypočítáme délku lomené čáry) a budeme pozorovat, jestli se při zjemňování dělení délky lomených čar blíží k nějakému číslu. Toto číslo pak nazveme délkou křivky.

Pokud je supremum délek těchto lomených čar konečné, pak jej nazveme délkou křivky a křivku rektifikovatelnou.

Tyto dva postupy odpovídají dvěma definicím **Riemannova integrálu**:

Pomocí integrálních součtů:

Nechť [a,b] je omezený uzavřený interval. Nechť $x_0 = a < x_1 < .... < x_n = b$ *je (n+1) čísel. Potom řekneme, že tato čísla určují dělení D intervalu [a,b] a nazýváme je dělícími body tohoto dělení. Interval* (x_{i-1},x_i) *nazýváme i-tým dělícím intervalem dělení D a číslo* $\upsilon(D) = max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, ..., x_n - x_{n-1}\}$ *nazýváme normou tohoto dělení.*

Dělení D' nazýváme zjeměním dělení D, je-li každý dělící bod dělení D také dělícím bodem dělení D'. ([5], str. 150)

Pomocí horních a dolních součtů:

Nechť je f reálná funkce, definovaná a omezená na intervalu [a, b]. Je-li dělení D intervalu [a, b] s dělícími body x_i, $i = 1, 2, 3, ..., n$, *označme:*

$m_i = inf_{[x_{i-1},x_i]} f$, $M_i = sup_{[x_{i-1},x_i]} f$, $i = 1, 2, 3, ..., n.$

Potom číslo $s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$ *nazýváme dolním Riemannovým součtem funkce f odpovídajícím dělení D.*

A číslo $S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$ *nazýváme horním Riemannovým součtem funkce f odpovídajícím dělení D.* ([5], str. 151)

Délku křivky c na intervalu [a, b] značíme: l(c, [a, b]).

$l(c, [a, b]) = \sup_D \sum_{i=1}^{n} ||c(t_i) - c(t_{i-1})||$, D: $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$

Omezíme se na případ jednoduché křivky třídy C^1*, což znamená, že zobrazení* φ *zadávající křivku je prosté na [a, b], jeho složky* $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 ....., \varphi_r$ *jsou spojitě derivovatelné na [a, b] a* $\varphi' = (\varphi_1', \varphi_2', \varphi_3', ... \varphi_r') \neq 0$ *nebo jednoduché uzavřené křivky třídy* C^1*, což znamená, že zobrazení* φ *zadávající křivku je prosté na [a, b),* $\varphi(a) = \varphi(b)$ *a jeho složky* $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 ....., \varphi_r$ *jsou spojitě derivovatelné na [a, b],* $\varphi' \neq 0$.

([5], str. 175)

Pro parametricky zadanou křivku platí:

l(c(t), [a, b]) = $\int_a^b ||c'(t)||dt$ = $\int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$ **dt**

Lze dokázat, že tento vzorec platí pro jednoduchou nebo jednoduchou uzavřenou křivku nezávisle na zvolené parametrizaci.

Pro křivku zadanou jako graf funkce platí:

Za parametr volíme x a dostaneme tento vzorec:

l(f(x), [a, b]) = $\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$

([5], str. 178)

Pro křivku zadanou v polárních souřadnicích používáme vzorec:

l(h(φ), [α, β]) = $\int_\alpha^\beta \sqrt{h^2(\varphi) + [h'(\varphi)]^2}$ **dφ**

([5], str. 179)

4.4 Příklady

Příklad 1:

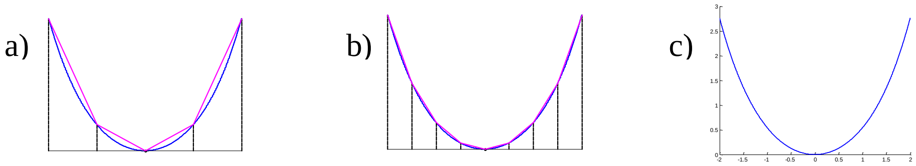
Vypočítejte délku oblouku řetězovky zadané jako graf funkce: y = c · cosh(x/c), x ∈ [a,b], c ≠ 0.

(Řetězovka je v technice a stavebnictví velmi užívaná křivka, například lano venkovního vedení (ať už mezi stejně nebo různě vysokými tyčemi) má tvar řetězovky.)

Konkrétní zadání křivky: c = 1, [a,b] = [-2, 2].

Pro vypočítání délky řetězovky do ní vepisujeme lomenou čáru a sčítáme velikosti jejích úseček.

Při dělení na intervalu [a,b] po 1 jednotce (obrázek 4.4a), má vepsaná lomená čára přibližně délku 7,1440. Při zjemění dělení intervalu [a,b] po ½ jednotky (obrázek 4.4b) se délka lomené čáry zvětší (tato lomená čára má přibližně délku 7,2265) a přiblíží se více délce zadané řetězovky. Pokud budeme takto pokračovat, zjistíme, že přibližná délka tohoto oblouku řetězovky je 7,2537 (obrázek 4.4c).



Obrázek 4.4 a, b, c: Řetězovka: a) dělení intervalu [a,b], b) zjemnění dělení intervalu [a,b], c) graf řetězovky

Výpočet délky pomocí integrálu:

Pro výpočet délky řetězovky použijeme obecný vzorec:

l(řetězovky, [a,b]) = $\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$

Potřebujeme znát první derivaci:

y‘ = c · sinh(x/c) · 1/c

1 + (y‘)^2 = 1 + sinh^2(x/c) = cosh^2(x/c)

l(řetězovky, [a,b]) = $\int_a^b \sqrt{cosh^2\,(x/c)}\, dx$ = $\int_a^b$ cosh (x/c) dx = $[\sinh(x/c)]_a^b$

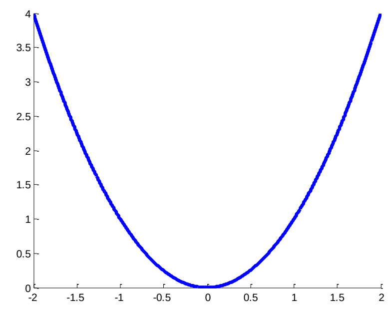
Dosazení konkrétního zadání:

l(řetězovky, [-2,2]) = $\int_{-2}^{2} \sqrt{cosh^2\,(x/1)}\, dx$ = $\int_{-2}^{2}$ cosh (x) dx = $[\sinh(x)]_{-2}^{2}$ ≈ 7,2537 cm

Délka oblouku řetězovky na intervalu [-2,2] je přibližne 7,2537 cm.

Příklad 2:

Vypočítejte délku oblouku paraboly zadané jako graf funkce: $y = x^2$, $x \in [-2,2]$ a porovnejte parabolu s řetězovkou.



Obrázek 4.5: Parabola.

Délku paraboly na intervalu [a,b] vypočítáme pomocí intervalu:

Pro výpočet délky paraboly použijeme obecný vzorec:

l(paraboly, [a,b]) = $\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$

Potřebujeme znát první derivaci: $y' = 2x \rightarrow 1 + (y')^2 = 1 + 4x^2$

Dosazení zadaných a vypočítaných hodnot do obecného vzorce pro výpočet délky křivky zadané jako graf funkce:

l(paraboly, [-2, 2]) = $\int_{-2}^{2} \sqrt{1 + 4x^2}\,dx = \left[\frac{1}{4}\left(2x\sqrt{4x^2+1} + \sinh^{-1}(2x)\right)\right]_{-2}^{2} =$

$= \frac{1}{2}\left(4\sqrt{17} + sinh^{-1}(4)\right) \approx 9{,}2936$ cm

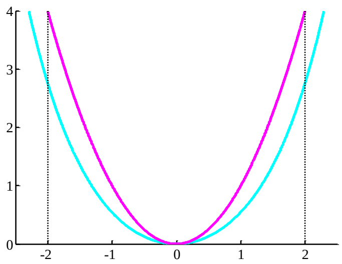
Tento integrál vypočítáme pomocí substituce $x = \frac{\tan\alpha}{2}$, nebo využijeme internetového programu WolframAlpha (https://www.wolframalpha.com)

Konkrétní zadání je na webové adrese:

https://www.wolframalpha.com/input/?i=integral+from+%28-2%29+to+2+of+sqrt%281+%2B+4*x%5E2+%29+dx

Délka paraboly na intervalu [-2,2] je přibližne 9,2936 cm.

Srovnání řetězovky s parabolou:



Obrázek 4.6: Srovnání paraboly a řetězovky – růžová je parabola, modrá je řetězovka.

Z obrázku 4.6 je vidět, jaký je rozdíl mezi řetězovkou (y = cosh x) a parabolou ($y = x^2$).

V předchozích dvou příkladech jsme se omezili na interval hodnot x ∈ [-2,2]. A vypočítali jsme délku obou křivek. Výsledky byly:

Délka oblouku řetězovky na intervalu [-2,2] je přibližně 7,2537 cm.

Délka paraboly na intervalu [-2, 2] je přibližně 9,2936 cm.

Z toho vyplývá, že parabola roste rychleji než řetězovka a na stejném intervalu je delší.

Příklad 3:

Odvození vzorce pro výpočet délky kružnice.

Uvědomme si, že kružnice je rovinná křivka a my známe její parametrické vyjádření: $\boldsymbol{x = r \cdot cos(t), y = r \cdot sin(t),}$ kde t je reálný parametr a r je poloměr.

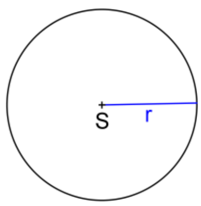
Připomeňme si, že pro parametricky zadanou křivku platí:

$$l(c(t), [a, b]) = \int_a^b ||c'(t)||dt = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$$

Potom délku kružnice vypočítáme jako:

$$l(\text{kružnice}, [0, 2\pi]) = 2 \int_0^\pi \sqrt{[r\, cos'(t)]^2 + [r\, sin'(t)]^2} dt = 2r\, [t]_0^\pi = 2\pi r$$

Odvodily jsme tak obecný vzoreček pro výpočet délky kružnice/obvodu kruhu, který je $o = 2\pi r$.



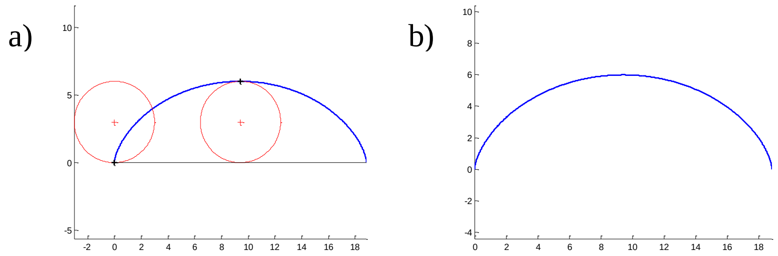
Obrázek 4.7: Kružnice o poloměru *r*.

Příklad 4:

Vypočítejte délku jednoho oblouku prosté cykloidy zadané parametricky:

$x = 3\,(t - \sin(t))$, $y = 3\,(1 - \cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.

(prostá cykloida = dráha pevně zvoleného bodu na kružnici, která se valí po přímce)



Obrázek 4.8: Cykloida: a) znázornění vzniku cykloidy, b) jeden oblouk cykloidy.

Pro výpočet délky jednoho oblouku cykloidy použijeme vzorec pro křivku zadanou parametricky:

l(cykloidy, [a, b]) = $\int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$

Dosazení do vzorce a výpočet integrálu:

l(cykloidy, [0, 2π]) = $3 \int_0^{2\pi} \sqrt{[1 - \cos(t)]^2 + sin^2(t)}$ dt = $6 \int_0^{2\pi} [t - \sin(t)]$ dt =

= $6\,[t - \sin(t)]_0^{2\pi} = 12\pi$

Délka jednoho oblouku cykloidy je 12π.

5. Obsah a ukázky z učebnic matematiky

O. Odvárko, J. Kadleček: MATEMATIKA 3 pro 8. ročník základní školy, Prometheus, Praha 2013

Celá tato učebnice se věnuje kruhu, kružnici a válci a konstrukčním úlohám. Je velmi přehledná a barevná. Například na straně 28 najdeme stručnou historii odvození desetinného rozvoje Ludolfova čísla.

Učebnice je plná zajímavých úkolů, ale asi nejvíce mě zaujala úloha na straně 31:

Fantazie a skutečnost

Zemský rovník je přibližně kružnice o poloměru 6 400 km. Vesmírná stanice má tvar koule o poloměru 6 m. Superman, který měří 2 m, nejprve obešel po rovníku celou Zemi a potom, opět po „rovníku", obešel vesmírnou stanici.

Vypočítej, o kolik metrů delší dráhu vykonal vršek jeho hlavy než podrážka jeho boty

a) při cestě po zemském povrchu, b) při obcházení vesmírné stanice.

Výsledek zaokrouhli na desetiny metru.

O. Odvárko, J. Kadleček: MATEMATIKA 1 pro 6. ročník základní školy, Prometheus, Praha 1997

Kapitola 5: ČRTÁME, RÝSUJEME, MĚŘÍME

V této učebnici najdeme úlohy na rýsování úsečky dané délky, například:

Sestroj na přímce p dva body K, L tak, aby jejich vzdálenost byla 6 cm.

Dále zde najdeme úlohy na shodnost úseček a přenášení úseček pomocí kružítka.

Zajímavou úlohou je odhadování velikostí úseček, například úloha:

Odhadni bez měření délku úsečky UV, odhad si zapiš. A teď úsečku UV změř a zapiš změřenou délku. O kolik milimetrů ses zmýlil?

Součástí této kapitoly jsou i úlohy na rýsování trojúhelníků a čtyřúhelníků.

Kapitola 6: POČÍTÁME OBVODY A OBSAHY:

Zde najdeme zajímavé příklady na převody jednotek délky. Příklady:

Vyzkoušej svůj odhad. Načrtni bez pravítka a měřítka

Úsečku AB, která je podle tvého odhadu dlouhá 1 centimetr,

Úsečku CD s délkou jeden decimetr.

Teď obě úsečky změř. Pokud ses zmýlil u úsečky AB o méně než 2 mm a u úsečky CD o méně než 1 cm, máš výborný odhad.

Také se zde objevují úlohy na obvody mnohoúhelníků.

J. Justová: MATEMATIKA pro 5. ročník ZŠ (třetí díl), Alter, Všeň 1997

Kapitola: Geometrie

Tato učebnice se tady zabývá vzdáleností dvou rovnoběžek a grafickým sčítáním a odčítáním úseček. Najdeme zde například tuto úlohu:

Sestroj grafický součet/rozdíl úseček KL a MN. Přesnost rýsování ověř měřením.

Kapitola: Opakování

V kapitole nazvanou *Opakování* najdeme úlohy na vzdálenost bodu od přímky a na obvody rovinných útvarů.

J. Čižnár, Ľ. Hrdina, M. Koman, D. Řebíčková, F. Zapletal: MATEMATIKA pro 6. ročník základní školy, II. díl, Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1990

Kapitola 8: Topografické práce

V této kapitole najdeme dvě zajímavé řešené úlohy na měření vzdáleností v přírodě. Například:

Ve vodorovném terénu vytyčte přímku AB pomocí bodů A, B, jejichž vzdálenost je 20 m. Na přímce AB vytyčte úsečku CD tak, aby body C, D ležely mezi body A, B a aby $|CD| = 5$ *m,* $|AC| = 7$ *m a* $|AD| > |AC|$.

J. Divíšek, Ľ. Bálint, M. Jarošová: SBÍRKA ÚLOH Z MATEMATIKY pro 2. a 3. ročník ZŠ, Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1989

Kapitola: GEOMETRIE

V této kapitole najdeme úlohy zabývající se délkou úsečky, vzdáleností bodů ve čtvercové síti, převody jednotek délky, délkami stran trojúhelníku a odhady délky úsečky. Nalezneme tady příklady:

Ukažte na měřidle: 96 mm + 6 cm, 84 mm + 7 cm,…

Odhadněte délku tužky v centimetrech. Měřením zjistěte, jak přesný byl váš odhad.

Kapitola: Zajímavé úlohy

Strana 143, příklad 38.: *Určete nejprve odhadem a pak měřením, která z úseček FB a BD na obrázku je delší.*

J. Urbanová, R. Blaška, J. Kabele, M. Janků, J. Melichar, J. Šmelhaus: MATEMATIKA – cvičebnice pro 5. Ročník ZŠ (páté vydání), Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1981

Kapitola: Geometrie IV/OBSAH

V první podkapitole nazvané *DÉLKA ÚSEČKY* najdeme témata obvod obdélníku a měření délky v přírodě pomocí kroků a dvojkroků, kde mě zaujala následující úloha:

Na přímé cestě položte dva kameny ve vzdálenosti 100 m (podle svého odhadu). Svůj odhad zkontrolujte změřením na dvojkroky.

V. Macháček: GEOMETRIE pro střední školy pro pracující (I. díl), Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1961

Kapitola 7: Délka kružnice a obsah kruhu.

Učebnice se v této kapitole zabývá mimo jiné i odvozením desetinného rozvoje Ludolfova čísla pomocí vepsání i opsání pravidelného 25-úhelníku.

J. Šimek, J. Pírek, F. Procházka, J. Schejbal: GEOMETRIE pro osmý ročník, Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1959

Učebnice se zabývá problematikou vepisování pravidelného mnohoúhelníku do kružnice a výpočty délky obvodu kružnice a kružnicového oblouku.

F. Balada: MATEMATIKA pro II. třídu gymnasií, Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1953

Kapitola 6.: Délka oblouku kružnice

V této kapitole se dočteme o obloukové míře, ale na jejím konci je cvičení, kde jsou zajímavé úlohy. Například:

216. Na trati se jedno kolo vozu otočilo m-krát, druhé n-krát. Určete poměr poloměrů obou kol.

219. Určete velikost kružnice, jejíž velikost je o 5 dm větší než její průměr.

E. Čech, A. Fišer, V. Jozífek, K. Komínek, J. Vyšín, R. Zelinka: GEOMETRIE pro třetí třídu středních škol, Státní nakladatelství, Praha 1950

Kapitola IV.: Kružnice

V šesté podkapitole nazvané *Délka kružnice a kruhového oblouku* najdeme pěkné úlohy na výpočet délky kružnice a kruhového oblouku. Například cvičení číslo 194 na straně 71:

Kus drátu dlouhý 1 m je ohnut do tvaru a) kruhu,b) polokruhu, c) čtvrtkruhu. Vypočtěte poloměr.

M. Valouch, K. ŠPAČEK: MĚŘIČSTVÍ pro I., II. a III. třídu středních škol (sedmé, přepracované vydání), Jednota československých matematiků a fysiků, Praha 1933

Pro první třídu středních škol

Kapitola 4: Měření délek. Početní výkony s úsečkami.

Zde se seznámíme s jednotkami délky a s pojmy „úsečka“ a „vzdálenost dvou bodů“. Také se naučíme sčítat a odčítat úsečky a dělit úsečku na shodné části.

Pro druhou třídu středních škol

Kapitola 7: Vyměřování úhlů a délek

V podkapitole 38, která nese název *Vyměřování délek,* se dozvíme, jak měřit vzdálenost dvou bodů pomocí středové souměrnosti, jak se určí vzdálenost nepřístupného bodu, také se zde dozvíme, jak měřit výšku. Dále tady najdeme pěkné příklady pro měření vzdáleností v přírodě, například:

193. Jak byste změřili šířku rybníka?

194.Stanovte hledanou výšku nebo vzdálenost narýsováním příslušných trojúhelníků ve zmenšeném měřítku.

Pro třetí třídu středních škol

Kapitola 6: Obvod a obsah kruhu a jeho částí.

V této kapitole najdeme odvození čísla π přes kružnici opsaný čtverec a kružnici vepsaný šestiúhelník a další n-úhelníky.

Také jsou zde úlohy na obvod kruhu, například:

258. Jakého průměru je strom, jenž obepjat byl šňůrou délky 3 m 9 dm 7 cm?

262. kolikrát se otočí kolo průměru $1\frac{1}{2}$ *m na dráze 100 km?*

F. Kneidl: POČETNICE pro druhou třídu měšťanských škol (vydání páté, nezměněné), Česká grafická unie a.s., Prha 1925

V této učebnici najdete pěkné tabulky.

Část devátá: Míry, váhy a peníze – tabulky:

I. Přehled měr a vah metrických (ukázka 1):

I. Přehled měr a vah metrických.

Násobky základní jednotky								Základní jednotka	Díly základní jednotky					
stomil.	desetimil.	miliony	stotisíce	desetitisíce	tisíce	sta	desítky		desetiny	setiny	tisíciny	desetitisíc.	stotisíciny	milioniny
				myria- *µm* = 10km	kilo- *km*	hekto- hm (Švýcary)	deka- dkm	m	deci- *dm*	centi- *cm*	mili- *mm*			
*µm*² = 100 km²		*km*²		*ha*		*a*		m²		*dm*²		*cm*²		*mm*²
Viz pozn. 1.					dkm³			m³			*dm*³			*cm*³
						hl	dkl (Švýcary)	l	*dl* Pozn. 2.	*cl*	ml			
		t = 1000 kg = 10 q	q (metr.) = 100 kg; celní cent = 50 kg	*µg* (Švýcary)	*kg*	hg (Švýcary)	*dkg*	g	*dg*	*cg*	*mg*			

Pozn. 1. 1 *km*³ = 1 tisíc mil. *m*³; 1 *µm*³ = jeden bilion *m*³.
2. Dovoleny jsou též míry: 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32 litru.

Míry, váhy a peníze.

Část devátá.

Obrázek 5.1: Tabulka měr, vah.

II. Míry a váhy – anglické (ukázka 2):

II. Míry a váhy anglické, ruské a staré rakouské.

Říše		Míry délkové	Míry plošné	Míry těles (krychlové)
Anglie	jednotky	**yard (yd) = 0·91438 m**	**acre (akr) = 40·4671 a**	**krychl. yd = 0·76455 m³**
	díly	*yd* = 3 stopy (feet) po 12 palcích (inches)	acre = 4840 čtvereč. yardů	krychl. yd = 27 krychl. stop
	násobky	angl. míle = 1760 *yds*, mořská míle = $\frac{1}{60}$ stupně rovníkového = 2028·8 *yds*	yard země (of land) = 30 acrů míle země (of land) = 640 acrů,	tuna rejstříková, registerton [1]) (anglická míra nosnosti lodí) = 100 angl. krychl. stop
		Míry duté	**Váhy**	**Poznámka**
	jednotky	**gallon = 4·5436 l**	**libra (℔) obchodní = = 0·4535903 kg, libra troyská [4]) = = 0·373241 kg**	[1]) Registerton jest mezinárodní míra nosnosti lodí. Vnitřní prostor lodi s přístavbami na horní palubě vyjádřený v *m*³ a rozdělený č. 2·83 *m*³ dá hrubý lodní obsah prostorový [2]) Americký gallon = 3·7852 *l* [3]) Americký bušl = 35·238 *l*; barel petrol. = 42 am. gall. [4]) Váhy troyské jsou k vážení drahých kovů a zboží lékárnického. [5]) Amer. centál = 100 angl. ℔ „ tuna = 2000 angl. ℔
	díly	gallon = 4 quarty à 2 pintách,[2]) 1 pinta = 4 gilly (gill = nejmenší míra dutá)	℔ = 16 uncí (*oz*) po 16 drachmách (*drs*), ℔ troyská = 12 uncí à 24 grén., *drs* = 3 skruple po 10 grénech (*grs*)	
	násobky	quarter = 8 bušlů po 8 gall.[3]), barel = 36 gallonů, tuna na víno = 252 gallony, tuna na jiné tekut. = 192 gall., tuna lodní = 42 krychl. stopy	angl. cent [5]) (*cwt*) = 4 quartery po 28 ℔, tuna = 20 *cwt*	

Poznámka: Vyslovuj: *a)* míry délkové: jard, fít, inčes; *b)* plošné: ekr, of lend; *c)* těles: ridžistrtn; *d)* váhu: grýn.

Obrázek 5.2: Anglické míry a váhy.

II. Míry a váhy – ruské (ukázka 3):

Říše		Míry délkové	Míry plošné	Míry těles (krychlové)
Rusko	jed-notky	**sažeň = 2·1336 m**	**čtver. sažeň = 4·55225 m^2**	**krychlová sažeň = = 9·712417 m^3**
	díly	sažeň = a) 3 aršíny, aršín = 16 veršků n. 28 palců, „ = b) 7 stop po 12 palcích	—	krychl. sažeň = 27 krychl. aršínů
	ná-sobky	versta = 500 sažní, ruská míle = 10 verst	desjatina = 2400 čtvereč. sažní, čtvereč. versta = $104^{1}/_{6}$ desjatiny	—
		Míry duté	**Váhy**	**Poznámka**
	jed-notky	**vědro = 12·2993 l**	**libra (℔) = 0·40951236 kg,** (℔ lékárnická = = 0·35832336 *kg*)	—
	díly	vědro = 10 krušek (džbánků) po 10 čarkách	℔ = 32 lotů po 3 zolotníkách, 1 zolotník = 96 doljů (dílků), (℔ lékárnická = 12 uncí po 8 drachmách, 1 drachma = 3 skrupule po 20 granech)	
	ná-sobky	četverť (na obilí) = 8 čtveriků po 4 četverkách à 2 garnce (hrnce), bočka (bečka, na tekutiny) = 40 věder	pud = 40 ℔, berkovec = 10 pudů, tonna, tuna = 120 pudů	

Obrázek 5.3: Ruské míry a váhy.

II. Míry a váhy – rakousko-uherské (ukázka 4):

Říše		Míry délkové	Míry plošné	Míry těles (krychlové)
Z bývalého **Rak.-Uherska** některé u nás dosud užívané:	jed-notky	**sáh (°) = 1·896484 m** **m = 0·527 sáhu**	**čtvereč. sáh (□°) = = 3·596652 m^2**	**krychl. sáh = 6·820992 m^3**
	díly	sáh = 6 stop ('), stopa 12 palců (″) po 12 čárkách, loket = 2 stopy	□° = 36□' po 144□″ à 144□‴	krychl. sáh = 216 krychl. stop, 1 krychl. stopa 1728 krychl. palců
	ná-sobky	rakouská míle = 4000 sáhů	jitro = 1600□°, korec výsevu = $^{1}/_{2}$ jitra, měřice „ = $^{1}/_{3}$ jitra, lán = 32 jitra	—
		Míry duté	**Váhy**	**Poznámka**
	jed-notky	**korec (strych, na obilí) = 93·592 l, sud** (piva) = 2·4 *hl*, „ (vína) = 5·8 *hl*	**Cent = 56·006 kg**	—
	díly	korec = 4 věrtele po 4 čtvrtcích, „ = $1^{1}/_{2}$ měřice (n. $^{2}/_{3}$ korce = 1 měřice), sud (piva) = 4 vědra, 1 vědro = 40 mázů, 1 m. = 2 pinty à 2 žejd.	cent = 100 ℔, 1 ℔ = 32 lotů po 4 kventlíkách	
	ná-sobky	—	víd. hřivna stříbra = 16 lotů po 18 grénech = 280·668 *g*; víd. hřivna zlata = 24 kar. po 12 grén. = 4·946496 *g*, 1 karát = 0·206104 *g*	

Obrázek 5.4: Rakousko-uherské míry a váhy.

Naskenované tabulky (ukázky) jsou v plném rozlišení na přiloženém CD ve složce s názvem *ukazky*.

J. Vojtěch: GEOMETRIE pro IV. a V. třídu škol středních (páté vydání), Jednota československých matematiků a fysiků, Praha 1924

Kapitola 10: Měření úseček.

Podkapitoly nesou názvy: Měření a Dělení; základní výkony algebraické. Název podkapitol jasně vystihuje obsah celé kapitoly. Najdeme zde úlohy typu:

Rozděliti jest danou úsečku na udaný počet rovných dílů.

Podkapitola 99 pojednává o odvození čísla π pomocí opisování a vepisování n-úhelníků kružnici a o historii odvozování a je zde zmínka i o rektifikacích kružnice. Najdeme tady úlohu:

Je-li dána strana pravidelného n-úheníku vepsaného do kružnice, jest vypočítati stranu pravidelného 2n-úhelníku do téže kružnice vepsaného a stranu pravidelného n-úhelníku téže kružnici opsaného.

Následuje postup řešení úlohy a přehledná tabulka výsledků.

E. Formánek, H. Vojtěchovská: MĚŘIČSTVÍ A RÝSOVÁNÍ pro I., II. a III. třídu měšťanských škol dívčích (páté vydání), KOMENIUM, Praha 1923

Na začátku učebnice (na stranách 6 a 7) najdeme text o měření úseček, například:

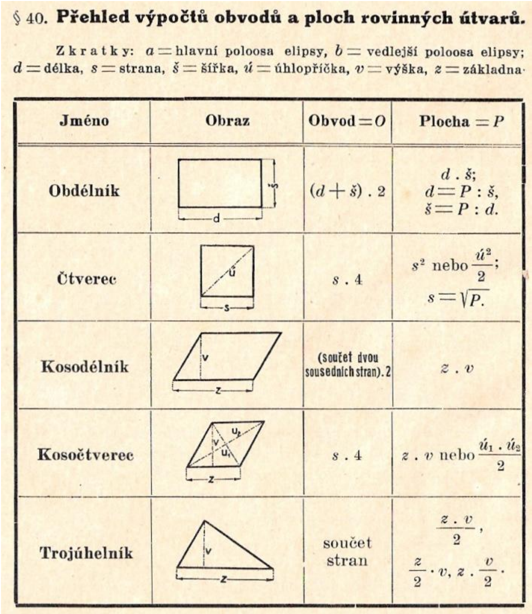
Jednotka míry délkové jest metr, tj. desíti miliontá část čtvrtiny poledníkové kružnice (zemského kvadrantu). Znaménko metru jest m.

Druhá třída začíná čtvrtou částí nazvanou *O obvodu a plošném obsahu úhelníků a kruhu*. V kapitole 29 se dozvídáme, jak vypočítat obvod a plochu obdélníku a čtverce. V následujících kapitolách se naučíme jak vypočítat obvod kosoúhlých rovnoběžníků, trojúhelníků, lichoběžníků, různoběžníků a mnohoúhelníků. Kapitola 35 se zabývá obvodem kruhu a délkou kruhového oblouku. Dočteme se zde o Ludolfově čísle. Zaujala mě kapitola 39 s názvem *Obvod a plocha elipsy*, protože vzoreček na přesné určení obvodu elipsy neexistuje, ale přesto je zde uveden. Nikde není ani zmínka, že jde pouze o přibližné určení jejího obvodu.

Cituji (včetně tučného zvýraznění):

Je-li veliká poloosa označena a, malá poloosa b, jest ***obvod elipsy*** *= (a + b) . π, t. j.* ***obvod elipsy vypočítáme, znásobíme-li součet poloos číslem Ludolfovým.***

V kapitole 40 nazvané *Přehled výpočtů obvodů a ploch rovinných útvarů* najdeme na stranách 52 a 53 pěknou tabulku:
(ukázka 5 a 6)

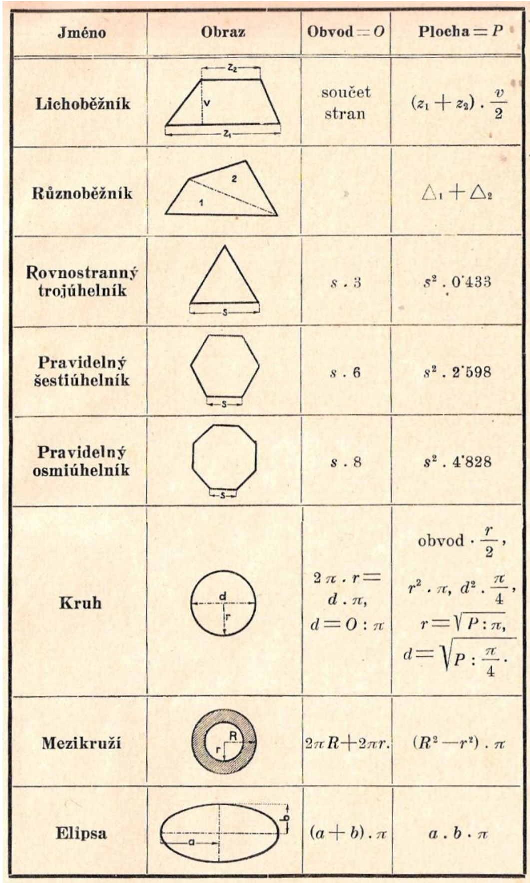


§ 40. **Přehled výpočtů obvodů a ploch rovinných útvarů.**

Zkratky: a = hlavní poloosa elipsy, b = vedlejší poloosa elipsy; d = délka, s = strana, $š$ = šířka, $ú$ = úhlopříčka, v = výška, z = základna.

Jméno	Obraz	Obvod = O	Plocha = P
Obdélník		$(d + š) \, . \, 2$	$d \, . \, š$; $d = P : š$, $š = P : d$.
Čtverec		$s \, . \, 4$	s^2 nebo $\frac{ú^2}{2}$; $s = \sqrt{P}$.
Kosodélník		(součet dvou sousedních stran). 2	$z \, . \, v$
Kosočtverec		$s \, . \, 4$	$z \, . \, v$ nebo $\frac{ú_1 \, . \, ú_2}{2}$
Trojúhelník		součet stran	$\frac{z \, . \, v}{2}$, $\frac{z}{2} \cdot v$, $z \, . \, \frac{v}{2}$.

Obrázek 5.5: Přehled vzorců – první část.



Jméno	Obraz	Obvod = O	Plocha = P
Lichoběžník		součet stran	$(z_1 + z_2) \, . \, \frac{v}{2}$
Různoběžník			$\triangle_1 + \triangle_2$
Rovnostranný trojúhelník		$s \, . \, 3$	$s^2 \, . \, 0{\cdot}433$
Pravidelný šestiúhelník		$s \, . \, 6$	$s^2 \, . \, 2{\cdot}598$
Pravidelný osmiúhelník		$s \, . \, 8$	$s^2 \, . \, 4{\cdot}828$
Kruh		$2\pi \, . \, r = d \, . \, \pi$, $d = O : \pi$	obvod $\cdot \frac{r}{2}$, $r^2 \, . \, \pi$, $d^2 \, . \, \frac{\pi}{4}$, $r = \sqrt{P : \pi}$, $d = \sqrt{P : \frac{\pi}{4}}$.
Mezikruží		$2\pi R + 2\pi r$.	$(R^2 - r^2) \, . \, \pi$
Elipsa		$(a + b) \, . \, \pi$	$a \, . \, b \, . \, \pi$

Obrázek 5.6: Přehled vorců – druhá část.

Za zmínku stojí ještě přehledná tabulka metrických měr a vah, kterou najdeme na straně 77 (ukázka 7).

Tabulka metrických měr a vah.

	Jednotkou míry				
	délkové = m	plošné = m^2	krychlové = m^3	duté = l	vah = kg
díly	$m = 10\,dm$ $dm = 10\,cm$ $cm = 10\,mm$	$m^2 = 100\,dm^2$ $dm^2 = 100\,cm^2$ $cm^2 = 100\,mm^2$	$m^3 = 1000\,dm^3$ $dm^3 = 1000\,cm^3$ $cm^3 = 1000\,mm^3$	$l = 10\,dl$ $dl = 10\,cl$	$dkg = 10\,g$ $g = 10\,dg$ $dg = 10\,cg$ $cg = 10\,mg$
měnitel	 10	 100	 1000	. . . 10	. . . 10
násobky	$1.000\,m = km$ $10.000\,m = \mu m$	$100\,m^2 = a$ $100\,a = ha$ $100\,ha = km^2$	—	$100\,l = hl$	$100\,kg = q$ $1000\,kg = t$

Obrázek 5.7: Tabulka metrických měr a vah.

Naskenované tabulky (ukázky) jsou v plném rozlišení na přiloženém CD ve složce s názvem *ukazky*.

J. Havelka: GEOMETRIE I. pro ústavy učitelské, Československá grafická unie a. s., Praha1922

Kapitola 6.: Základní křivky rovinné

Podkapitola 31. *Obvod a plocha kruhu* se věnuje odvození Ludolfova čísla a opět tady najdeme pěknou tabulku pro vymezení čísla π pomocí kružnici opsaných i vepsaných n-úhelníků (vyčíslení až pro 3072-úhelník).

A. Strnad, K. Rašín: GEOMETRIE pro vyšší školy reálné – díl II., F. Kytka, Praha 1913

Kapitola XII.: Obvod a obsah kruhu.

První úlohou v podkapitole 59. nazvané *Obvod a obsah pravidelných mnohoúhelníků* je: *1. Dána jest strana* a_n *pravidelného n-úhelníka vepsaného do kružnice poloměru r; vypočítati*

a) stranu a_{2n} *pravid. n-úhelníka téže kružnici vepsaného,*

b) stranu $á_n$ *pravid. n-úhelníka téže kružnici opsaného.*

Následuje řešení, tabulka výsledků a závěr. Nicméně obvodem kruhu, Ludolfovým číslem i jeho historií se zabývá další podkapitola, kde najdeme i mnoho zajímavých úloh, například:

Kolikrát se otočí kolo mající 1 m průměru na dráze 1 km?

V učebnici je i zmínka o Kochaňského rektifikaci kružnice.

Závěr

V bakalářské práci jsme se nejdříve zabývali axiomatickou výstavbou euklidovské geometrie.
Druhá kapitola pojednává o historii.
Ve třetí kapitole jsme si ukázali, jak postupoval Archimédés při počítání délky kružnice, a jak se tento postup dá využít na střední škole a také jsme si ukázali tři nejznámější rektifikace kružnice.
O rovinných i prostorových křivkách je následující čtvrtá kapitola. Najdeme v ní i příklady na výpočet délky různých křivek.
Poslední kapitola ukazuje, jaké zajímavé příklady k tématu měření délek ukrývají staré i nové učebnice.

Práce obsahuje obrázky vytvořené v počítačových programech GeoGebra, MatLab a Rhino. Tabulky jsou vytvářené v tabulkové aplikaci Microsoft Excel. A pro výpočty byl využívám internetový program Wolfram Alpha.

Potěšilo by mě, kdyby moje bakalářská práce Měření délek mohla sloužit jako inspirace pro budoucí i současné učitele matematiky.

Seznam použité literatury

[1] J. Bečvář, Z. Halas, O. Odvárko, J. Robová, A. Šarounová: *Matematika – Aktivně, aktuálně a s aplikacemi*, Nakladatelství P3K, Praha 2012

[2] L. Boček, V. Kubát: *Diferenciální geometrie křivek a ploch,* Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1983

[3] J. Hons, B. Šimák: *Pojďte s námi měřit zeměkouli* (první díl), nakladatelství Dr. Karoliny Kolářové, Praha 1942

[4] J. Hons, B. Šimák: *Pojďte s námi měřit zeměkouli – papírová zeměkoule* (druhý díl), nakladatelství Dr. Karoliny Kolářové, Praha 1942

[5] J. Kopáček: *Matematická analýza nejen pro fyziky (I),* Matfyzpress, Praha 2004

[6] Z. Opava: *Matematika kolem nás*, Albatros, Praha 1989

[7] Fr. Servít: *Eukleidovy základy (Elementa),* Jednota českých matematiků, Praha 1907

[8] Š. Voráčová a kolektiv: *Atlas geometrie (Geometrie krásná a užitečná),* Academia, Praha 2013

[9] J. Vyšín: *Elementární geometrie III,* Přírodovědecké vydavatelství, Praha 1952

Učebnice:

[10] F. Balada: *MATEMATIKA pro II. třídu gymnasií,* Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1953

[11] E. Čech, A. Fišer, V. Jozífek, K. Komínek, J. Vyšín, R. Zelinka: *GEOMETRIE pro třetí třídu středních škol,* Státní nakladatelství, Praha 1950

[12] J. Čižnár, Ľ. Hrdina, M. Koman, D. Řebíčková, F. Zapletal: *MATEMATIKA pro 6. ročník základní školy*, II. díl, Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1990

[13] J. Divíšek, Ľ. Bálint, M. Jarošová: *SBÍRKA ÚLOH Z MATEMATIKY pro 2. a 3. ročník ZŠ,* Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1989

[14] E. Formánek, H. Vojtěchovská: *MĚŘIČSTVÍ A RÝSOVÁNÍ pro I., II. a III. třídu měšťanských škol dívčích* (páté vydání), KOMENIUM, Praha 1923

[15] J. Havelka: *GEOMETRIE I. pro ústavy učitelské*, Československá grafická unie a. s., Praha1922

[16] J. Justová: *MATEMATIKA pro 5. ročník ZŠ* (třetí díl), Alter, Všeň 1997

[17] F. Kneidl: *POČETNICE pro druhou třídu měšťanských škol* (vydání páté, nezměněné), Česká grafická unie a.s., Praha 1925

[18] V. Macháček: *GEOMETRIE pro střední školy pro pracující* (I. díl), Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1961

[19] O. Odvárko, J. Kadleček: *MATEMATIKA 3 pro 8. ročník základní školy*, Prometheus, Praha 2013

[20] O. Odvárko, J. Kadleček: *MATEMATIKA 1 pro 6. ročník základní školy*, Prometheus, Praha 1997

[21] A. Strnad, K. Rašín: *GEOMETRIE pro vyšší školy reálné – díl II.*, F. Kytka, Praha 1913

[22] J. Šimek, J. Pírek, F. Procházka, J. Schejbal: *GEOMETRIE pro osmý ročník*, Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1959

[23] J. Urbanová, R. Blaška, J. Kabele, M. Janků, J. Melichar, J. Šmelhaus: *MATEMATIKA – cvičebnice pro 5. ročník ZŠ* (páté vydání), Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1981

[24] M. Valouch, K. ŠPAČEK: *MĚŘIČSTVÍ pro I., II. a III. třídu středních škol* (sedmé, přepracované vydání), Jednota československých matematiků a fysiků, Praha 1933

[25] J. Vojtěch: *GEOMETRIE pro IV. a V. třídu škol středních* (páté vydání), Jednota československých matematiků a fysiků, Praha 1924

Internetové zdroje:

Marie Kašparová: Přibližné rektifikace kruhového oblouku:
http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/401711/DejinyMat_44-2010-1_6.pdf

Zápisky z přednášek:

A. Slavík: Diferenciální geometrie (letní semestr 2014)

P. Surynková: Deskriptivní geometrie (letní semestr 2013)

A. Karger: Matematická analýza (letní semestr 2012)

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Seznam použitých zkratek a značek

Zkratky:

atd. = a tak dále
cm = centimetr
cos = goniometrická funkce cosinus
m = metr
mm = milimetr
př. n. l. = před naším letopočtem
SI = Système International
sin = goniometrická funkce sinus
str. = strana
tan = goniometrická funkce tangens
tj. = to je
tzv. = tak zvaný

Značky:

Δ = trojúhelník

$\sphericalangle$ = úhel

$|x|$ = velikost x

π = Ludolfovo číslo

Příloha – Příručka malého měřiče

Příručka

malého

měřiče

____

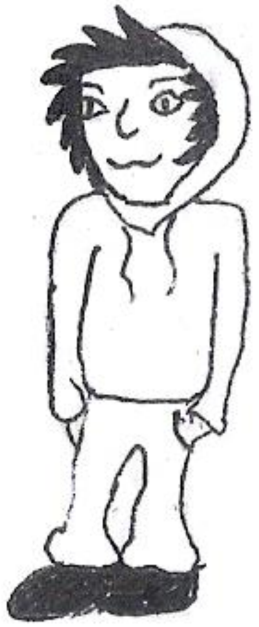
jméno

Ahoj,

jmenuji se Metřík a v této příručce tě naučím spoustu užitečných věcí. Ukážu ti, jak si vyrobit jednoduchá měřidla, jak a čím měřit vzdálenosti doma, ve škole i v přírodě.

Doufám, že tě to bude bavit tak jako mě a užiješ si při měření spoustu legrace.

Měření zdar!



Tvůj Metřík

Nejdříve si zopakujeme naše jednotky délky a jejich převody:

Základní jednotkou délky je metr – značka m.

Další jednotky a jejich značky:

- milimetr ……mm
- centimetr …..cm
- decimetr……..dm
- kilometr……km

Převody:

1 km = 1000 m

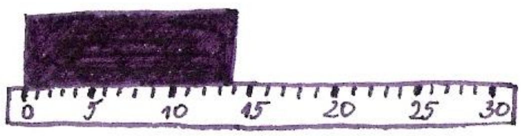
1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm

1 dm = 10 cm = 100 mm

1 cm = 10 mm

Postup při měření:

1. Zvol si správné měřidlo (pravítko).
2. Přilož počátek měřidla (nulu) na začátek měřeného předmětu.
3. Srovnej měřidlo rovně (těsně) podle měřeného předmětu. Dej pozor, aby se ti neposunul začátek měřidla.
4. Zjisti údaj na stupnici, který je na konci měřidla. Nebo spočítej jednotky na měřidle od začátku do konce předmětu.
5. Při čtení jednotek se na stupnici dívej kolmo.
6. Uvědom si jednotky, v kterých měříš, a zapiš naměřené údaje.



Teď si vyrobíme pomůcku na měření větší vzdálenosti. Například vzdálenost dvou stromů, délku stěny třídy, délku hodu…

Měřidlo 1: Co budeme potřebovat?

- *Provázek určité délky - nejlépe 8 m*
- *Lihový fix (místo fixu lze použít i špendlíky, samolepky, uzlíky…)*

Postup:

Rozmotej provázek, ale dej pozor, aby se ti nezamotal. Dej konce provázku k sobě a provázek přelož přesně na polovinu, v přehybu udělej značku. Přeložený provázek přelož opět na polovinu a opět udělej v přehybu značku. Tento postup opakuj ještě dvakrát. Pak provázek rozdělej. Získal jsi tak 15 značek vzdálených od sebe 50 cm. Takže máš měřidlo s jednou jednotkou o velikosti 50 cm.

Měřidlo 2: Co budeme potřebovat?

- Pravítko
- Provázek (čím delší, tím lepší, ale dej pozor, aby se ti nezamotal)
- Lihový fix (místo fixu lze použít i špendlíky, samolepky, uzlíky…)

Postup:

Vezmi si všechno, co budeme potřebovat. Rozmysli si, jaké jednotky budeš chtít při měření používat. Já jsem volil jako jeden dílek 50 cm, ale lze volit i 10 cm, nebo rovný 1 m. Přilož začátek provázku k nule na pravítku a fixem udělej na provázku značku ve vzdálenosti zvolené jednotky. Potom provázek posuň tak, aby značka na provázku byla u nuly na pravítku a opět udělej značku na provázku ve vzdálenosti zvolené jednotky. Tento postup opakuj až do konce provázku.

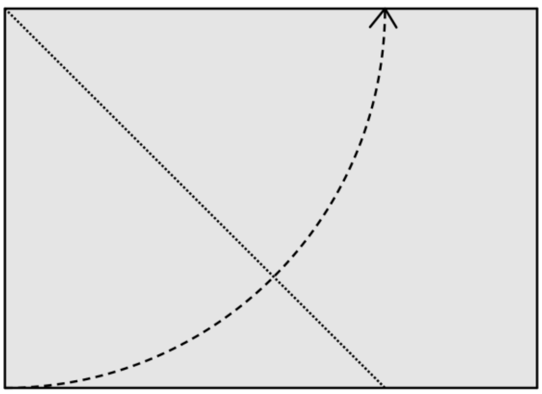
Další pomůcka bude sloužit k měření výšky.

Měřidlo 3: Připrav si:

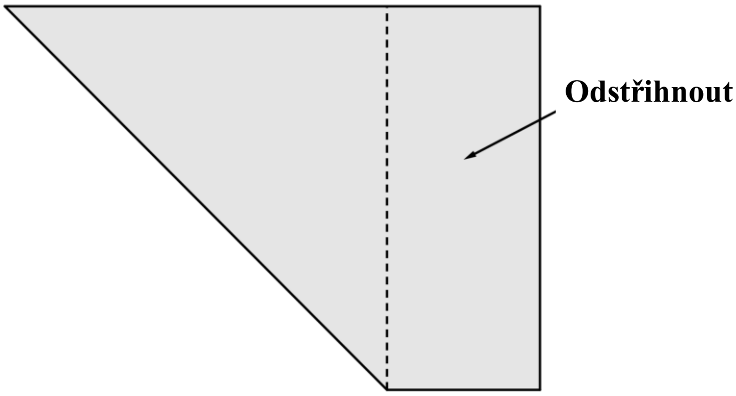
- Tvrdý papír ve tvaru obdélníku
- Nůžky
- Děrovačku (nebo něco, čím uděláš do papíru dírku)
- Kousek provázku (postačí i pevná nit)

Postup:

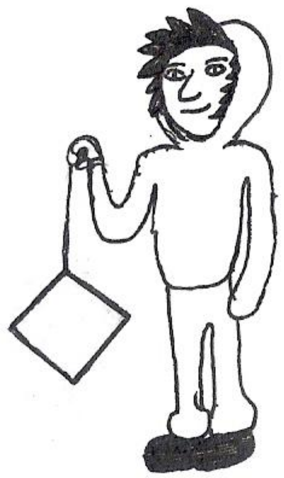
Opatrně přeložte čtvrtku tak, jak je na obrázku.



Přebytečnou část odstříhněte, jak je vyznačeno na dalším obrázku.



Přeloženou část rozlož. Tím získáš čtverec. Odstřiženou část (tu menší) můžeš zahodit, nebudeme ji už potřebovat. V jednom rohu čtverce udělej dírku. Dírkou protáhni kus provázku a jeho konce spoj uzlíkem.



Pro Měření obvodu a průměru kmene stromu si připravíme další měřidlo.

Měřidlo 4: Co si máš připravit?

- Pravítko
- Provázek – může být kratší, cca 2 m
- Lihový fix

Postup:

Vezmi si vše, co budeme potřebovat. Přilož jeden konec provázku k nule na pravítku. Srovnej provázek podél pravítka a udělej značky na provázku ve vzdálenosti 3 cm.

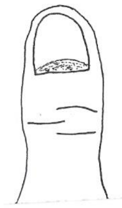
Takže u těchto čísel na pravítku: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30 udělej značku. Pak pravítko posuň a postup opakuj, až se dostaneš na konec provázku.

Než začneme měřit, tak si povíme něco málo o tom, jak lidé měřili dříve.

Měření délky je činnost člověka, která ho provází už od nejstarších dějin. Aby bylo možné měřit, je potřeba zvolit vhodné jednotky. Dříve si lidé volili jako jednotky délky části svého těla, například palec, loket, sáh, stopu…
Bylo to sice velmi nepřesné, ale výhodou bylo, že každý měl svůj „metr“ vždy po ruce.
Takových jednotek bylo velké množství, proto bylo potřeba je sjednotit. K výrazným snahám o sjednocení jednotek měr došlo až v 18. století.
Ale až v 19. století byla podepsána dohoda o používání metrických jednotek, protože základní jednotkou byl zvolen metr. A tato soustava dostala název metrická a stala základem pro Mezinárodní soustavu jednotek zvanou SI, kterou používáme dodnes.

Jak už jsem říkal, lidé dříve používali k měření délky části svého těla.

Takové měření si můžeš vyzkoušet i ty a porovnáním výsledků se spolužáky se můžeš přesvědčit o tom, jak moc nepřesné to měření bylo…

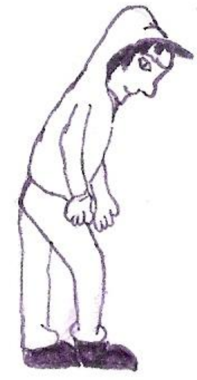


Takové jednotky délky jsou například:
prst, palec, loket, sáh, stopa, krok.

Šířka prstu nebo palce je jasná.
Ale co je to vlastně loket a sáh?
Loket je délka mezi loketním kloubem a špičkou prostředníčku. Sáh je délka mezi špičkami prostředníčků rozpažených rukou.
Stopa je velikost tvého chodidla a krok je délkou kroku.

Nejdříve si vyzkoušíme měření a naše měřidla ve třídě.

A moje první úkoly zní:

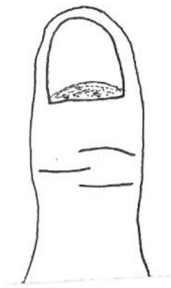


- *Změř kolik stop je dlouhá třída.*

  Délka třídy je ______stop.

- *Změř pomocí našeho vyrobeného provázkového měřidla, jak je dlouhá třída.*

  Třída je dlouhá ______dm.



- *Změř, kolik palců je široká tvoje lavice.*

  Lavice je široká ______palců.

- *Změř kolik centimetrů je široký tvůj sešit.*

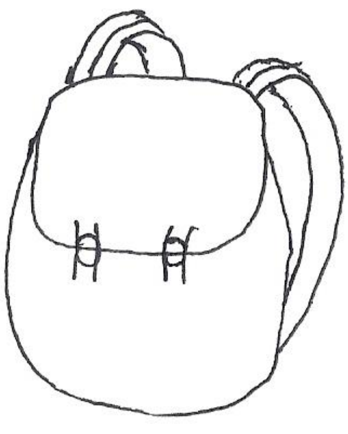
  Sešit je široký ______cm.

Zapsané výsledky porovnej se spolužáky.

Nyní se přesuneme ven. V této části tě naučím k čemu a jak používat naše připravená měřidla a jak změřit vzdálenost nedostupných míst.

Co si máš s sebou vzít na cestu?

- *Všechna naše vyrobená měřidla a pomůcky (provázky s jednotkami, papírový čtverec)*
- *Tuto příručku*
- *Čepici s kšiltem*
- *Kalkulačku (jistě se ti bude hodit)*
- *Stopky*
- *Papír a tužku na zapisování výsledků*
- *Nějakou svačinu a pití*



Teď si zkusíme změřit vzdálenost dvou stromů.

Jak na to?

Vezmi si připravené měřidlo 1 nebo 2. Jeden konec provázku polož na zem těsně ke kmeni stromu. Pak popros svého kamaráda/ kamarádku, aby ti ho tam přidržel. Pak provázek natáhni až k druhému kmeni stromu. Dávej pozor, aby se ti provázek nezacuchal a aby byl napnutý a položený na zemi. Pokud tomu tak je, spočítej, kolik dílků provázku se vešlo mezi ty dva kmeny. Pak si uvědom, jak je velký jeden dílek a zapiš si výsledek.

Vzdálenost mezi dvěma stromy je:

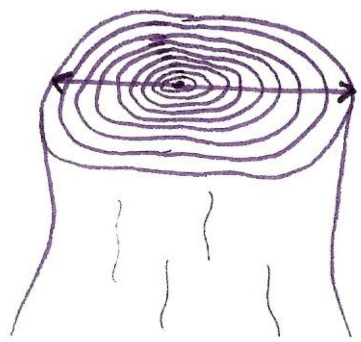
____.

Druhým úkolem je změřit průměr kmene stromu.

Ale nejdříve si připrav měřidlo 4. Je to kratší provázek, který má jednu jednotku dlouhou 3 cm. Vyber si nějaký pěkný strom. Pak ho tímto provázkem omotej. Dávej pozor, aby byl provázek na všech místech přibližně stejně vysoko. Začátek provázku se ti musí potkat s jinou částí provázku. V té jiné části si provázek chytni a spočítej, kolik dílků jsi vzdálen od začátku provázku. Přibližně tolik centimetrů je průměr tohoto kmene stromu.

Průměr kmene je:

______________________*cm.*



Další, co změříme, bude obvod kmene stromu.

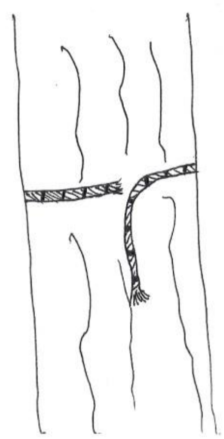
Nebude to nic těžkého, ale možná použiješ kalkulačku.

Měřidlo i postup bude úplně stejný jako u předchozího příkladu. Takže si připrav měřidlo 4. Vyber si nějaký pěkný strom. Pak ho tímto provázkem omotej. Dávej pozor, aby byl provázek na všech místech přibližně stejně vysoko. Začátek provázku se ti musí potkat s jinou částí provázku. V té jiné části si provázek chytni a spočítej, kolik dílků jsi vzdálen od začátku provázku.

Teď ale ještě nezapisuj výsledek. Nejdříve musíš počet dílků vynásobit třemi.

Pak dostaneš výsledný obvod kmene stromu v centimetrech.

Obvod kmene je: ______cm.



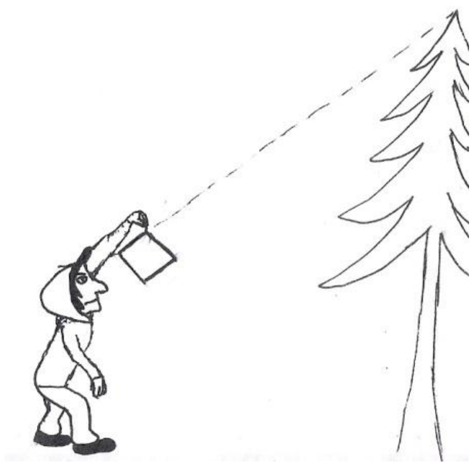
A když už jsme u těch stromů, tak bychom mohli zkusit změřit jejich výšku pomocí našeho papírového čtverce.

Tohle měření vyžaduje vhodný strom, který je někde na kraji lesa a kolem něj je dostatek volného prostoru, nebo strom, který je přímo na louce.

Pokud máš takový strom, pak si připrav naše provázkové měřidlo a papírový čtverec.

Stoupni si tak daleko od stromu, jak vysoký asi je – odhadem. Pak chytni čtverec za provázek a snaž se ho srovnot tak, aby zorný paprsek (směr jakým se díváš) z našeho oka k vrcholku stromu splýval s jednou stranou čtverce (jako je na obrázku). Potom změř, jak vysoko je tvoje oko nad zemí a jak daleko jsi od stromu. Součet těchto vzdáleností je výška stromu. Pozor, sčítat můžeš pouze stejné jednotky…

Výška stromu je __________.



Co bychom si ještě mohli změřit? Už vím! Změříme si výšku mostu nad hladinou řeky.

Nejdříve si najdi nějaký pěkný kamínek. Pak si připrav stopky. Stoupni si na most tak, aby bylo dobře vidět na hladinu vody vedle mostu. Vezmi si do jedné ruky kámen a do druhé stopky. Ruku s kamenem natáhni z mostu nad vodu. Ve chvíli, kdy pouštíš kámen, stiskni stopky, a když kámen dopadne na hladinu, tak je zase rychle stopni.

Pak si vyndej kalkulačku a použij jednoduchý výpočet pro přibližné určení výšky, který je:

5 · naměřený čas · naměřený čas = výška mostu

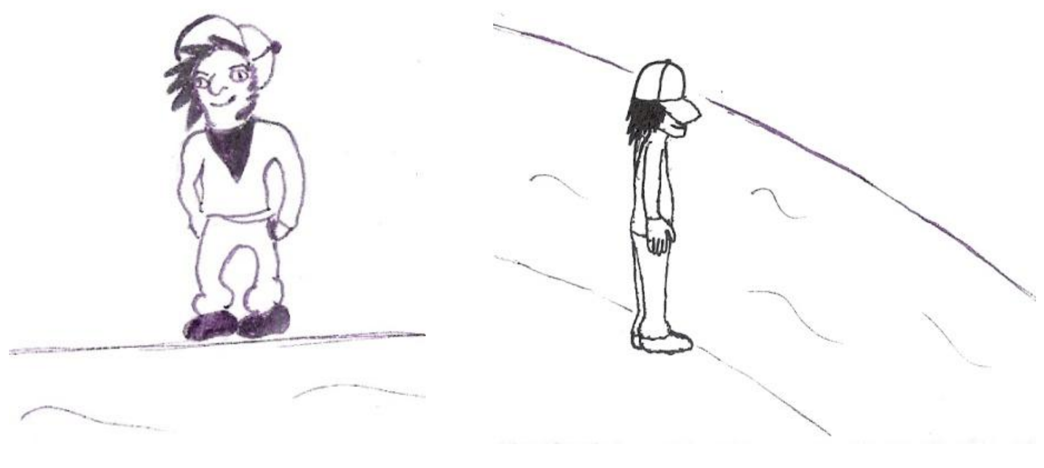
(Já jsem naměřil 2 vteřiny, takže můj výpočet byl: 5 · 2 · 2 = 20, a proto je výška mého mostu 20 metrů).

Výška mostu je ______m.

Říkáš si, proč jsi měl mít čepici s kšiltem (kšiltovku)? Rád ti to povím, je to ideální pomůcka pro měření šířky řeky a vzdálenosti dalších nepřístupných míst.

Takže si to teď vyzkoušíme.

Nasaď si kšiltovku na hlavu. Postav se na jeden břeh řeky. Nastav si kšilt na hlavě tak, aby se kryl s okrajem druhého břehu řeky. Teď vidíš pouze vodu v řece. Pak se otoč, případně kousek popojdi tak, abys viděl nějaké místo, kam se dá dojít, ale nehýbej s hlavou ani s kšiltem. Popros někoho, aby označil třeba větví nebo kamenem místo, které vidíš stejně, jako jsi viděl druhý břeh. Pozor! To místo nesmí být na kopci ani někde dole. Musí být v rovině. Pak změř měřidlem 1 nebo 2 vzdálenost od tebe k označenému místu. Tato vzdálenost se rovná šířce měřené řeky.



Na konec našeho měření bych ti chtěl předat ještě pár nápadů.

Hloubku studny můžeš zjistit stejným způsobem, jako jsme měřili výšku mostu nad hladinou řeky.

Pomocí kšiltovky se dá změřit vzdálenost i jiných nepřístupných míst, ne jenom šířka řeky…

Pomocí našeho čtverce můžeme měřit výšku čehokoli, třeba sloupu, domu, rozhledny.

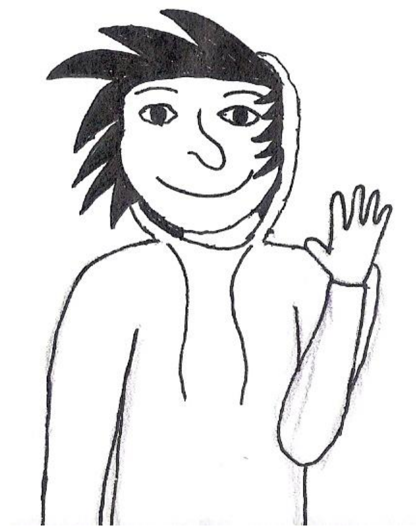
Průměr nemusí být jen kmene stromu, ale všech kulatých věcí, jako třeba míče, nebo naší hlavy.

No a vzdálenosti dvou předmětů se dají změřit čímkoli pomocí stop, kroků, jednoduchých i složitých měřidel….

Doufám, že výsledky máš všechny poctivě zapsané a teď je můžeš porovnat se svými spolužáky.

Věřím, že tě moje návody inspirovaly k dalšímu měření a budeš v tom pokračovat. Ale dej pozor na bezpečnost, nikde se nevykláněj a měř vždy společně s dospělou osobou, která ti určitě ráda pomůže.

Nezapomeň na mě.



Tvůj Metřík

Tvoje nápady: