Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

Poker a pravděpodobnost

Bakalářská práce

Katedra didaktiky matematiky

Roman Jelínek

Vedoucí práce: RNDr. Jakub Staněk, Ph.D.

Studijní program: Tělesná výchova a sport (B7401)

Studijní obor: TVS_M

Praha 2016

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze, dne ……………………………

podpis

Název práce: Poker a pravděpodobnost

Autor: Roman Jelínek

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jakub Staněk, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Cílem práce je vytvořit historické uvedení do zajímavé karetní hry a především přiblížení jejích matematických aspektů široké veřejnosti. Práce je tvořena didaktickým způsobem s mnohými komentáři k dané teorii. Text je formulován způsobem, aby většina lidí porozuměla popisovaným situacím bez jakýchkoliv matematických základů. Z tohoto důvodu zde nejsou uvedeny žádné složité vzorce a použité jsou důkladně popsány. Práce se zaměřuje především na neprofesionální hráče pokeru, ale také na osoby, které s touto karetní hrou nemají žádné zkušenosti.

Klíčová slova: historie pokeru, pravidla pokeru, výherní kombinace, pravděpodobnost výhry

Title: Poker and Probability

Author: Roman Jelínek

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Jakub Staněk, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: The aim of this Bachelor thesis is to create a historical introduction to the exciting card game and especially proximity of its mathematical aspects to the general public. The work consists of didactic way with many comments to the theory. The text is worded in a way that most people understand the situations, which are described without mathematical basics. For this reason there are no complicated formulas written and used are thoroughly described. The work focuses mainly on amateur poker players, but also on people, who knows anything about this card game.

Keywords: history of poker, poker rules, poker hands, the probability of winning

Chtěl bych poděkovat všem, kteří mě v psaní bakalářské práce jakýmkoliv způsobem podporovali, a především těm autorům článků, kteří se mi snažili velmi vstřícným způsobem pomoci v pochopení některých souvislostí. Dále pak bych rád věnoval největší dík svému školiteli, panu RNDr. Jakubu Staňkovi, Ph.D. za odborné vedení a pohotovou podporu ve formě konzultací.

Obsah

1 Úvod

Poker je karetní hra plná klamu, sebevědomí, schopnosti odhadnou správně lidi a především matematiky. Někdo by mohl říct, že je to hazardní hra, jiní by ovšem namítali, že se jedná o jeden z nejlepších a dokonce divácky atraktivních sportů.

Práce by měla sloužit široké veřejnosti v pochopení základních principů, na kterých je karetní hra poker založena. Kromě blufování, které je jistě nedílnou součástí hry, prostupuje celou touto hrou matematika. Počítání pravděpodobností výhry, nebo i jen zamyšlení se na tím, jaká je šance, že přijde v některé kombinaci karta, kterou hráč v dané chvíli potřebuje, to jsou věci, které tvoří poker zajímavým.

Kromě historického úvodu, jenž dává karetní hře teoretické zázemí, zde naleznete přehled všech výherních kombinací, které mohou ve variantách Texas Hold'em a 5 Card Draw nastat. Dále pak přejdeme k výpočtům pravděpodobností vzniku těchto kombinací a také počítání pravděpodobnosti výhry v některých modelových příkladech.

V poslední kapitole se dozvíte, jakým způsobem by bylo možné poker zařadit do výuky na středních školách.

Tato práce je vhodná především pro lidi, kteří by se o pokeru rádi dozvěděli něco nového, zajímavého a rádi by se mu například dále věnovali. Také rekreační hráči mohou knihu uvítat a zdokonalit se s její pomocí v některých oblastech této karetní hry.

Veškeré obrázky, použité v následujících kapitolách, jsou dostupné na webových stránkách cs.wikipedia.org. [6], [11], [13]

2 O hře poker

V první části této práce týkající se pokeru, se dozvíte něco o historii a vývoji uvedené karetní hry. Dále pak informace o jejích variantách, kterých je takové množství, že by bylo velmi těžké vyjmenovat i polovinu z nich. Následně se budeme věnovat nynějším pravidlům vybraných variant a také pravděpodobnostem jednotlivých výherních kombinací, stejně jako pravděpodobnostem výhry.

2.1 Historie

Existuje mnoho teorií, z jaké hry se karetní hra poker vyvinula. Každý stát by měl nejraději zásluhu na jeho vzniku, ale objektivně vzato, některé hry jsou mu podobny více než ostatní.

Nejstarší zmínky o hře velmi podobné pokeru pocházejí z 9. stolení našeho letopočtu z Číny. Zde prý panovník hrál se svojí ženou hru zvanou Domino cards. Někteří odborníci tvrdí, že se z ní vyvinul právě poker. Také Egypťané, na přelomu 12. a 13. století, si krátili čas karetními hrami. Jiní si tedy myslí, že základní kámen pro poker byl položen zde.[9]

V následující části naleznete podrobnější popisy několika málo her, které se pokeru podobají nejvíce, dozvíte se také, která hra je jeho přímým předchůdcem. V závěru této kapitoly se dostaneme k pokeru samotnému.

2.1.1 Âs Nas

V Persii se v 15. století objevila hra obsahující sázení na karty zvaná Âs Nas. Popularitě se těšila především v 17. a 18. století našeho letopočtu. Následně tento zájem polevoval až do roku 1979, kdy kvůli islámské revoluci vyhasl úplně. Podle nejpravděpodobnější teorie se jedná o prvního přímého předchůdce pokeru vůbec.

Nyní již k samotné hře Âs Nas. Využívalo se zde 20 nebo 25 karet, které byly obvykle ručně malované, s pěti motivy. Tyto karty můžete vidět na následujících obrázcích seřazeny od nejslabší po nejsilnější.[6]


Obr. 1. Tanečník


Obr. 2. Voják


Obr. 3. Královna


Obr. 4. Král


Obr. 5. Eso

Pravidla jsou poměrně jednoduchá. Hra probíhala ve třech kolech, kdy po prvním z nich měl každý hráč dvě karty. V tu chvíli přicházelo první rozhodování, zda ve hře pokračovat a s tím spojené sázky na vlastní karty. Všichni, kdo nepoložili karty, se automaticky přesunuli do dalšího kola, ve kterém každý získal další dvě karty. Opět následovalo sázení, kdy po dorovnání všemi hráči a případném složení karet některými z nich, dostali všichni účastníci třetího kola poslední pátou kartu a na řadě bylo poslední sázení. Na samém konci každý odhalil své karty a už o vítězi rozhodovala pouze nejvyšší kombinace.[7]

Výherní kombinace byly velmi podobné dnešnímu pokeru. Liší se jen nepatrně v důsledku jiného počtu karet. Konkrétně se jedná o následující (řazeny od nesilnější)[7]: straight, pětice, poker, full house, trojice a pár. Více se o těchto kombinacích dočtete později. Jediná, která se zde vyskytuje navíc, je pětice (pět karet stejného typu).

2.1.2 Primero

Dále pak vzniká ve Španělsku, Francii, Anglii a především Itálii v 15. a 16. století hra zvaná Primero, která je opravdu podobná modernímu pokeru se vším všudy (je také označována za „matku pokeru"). Jelikož Primero vzniklo ve více státech, není divu, že jednotlivé verze se poněkud liší. Zajímavé je, že historické prameny se mírně rozcházejí, co se týče pravidel a průběhu hry, i při popisu jedné varianty. Ital Girolamo Zorli popisuje Primero následujícím způsobem.[2]

Využívá se 40 karet, čehož docílíme odebráním osmiček, devítek a desítek z běžného hracího balíku. Tento způsob popisuje Girolamo Cardano (1501 – 1576) ve své latinské knize Liber de Ludo aleae („Kniha o hře v kostky") [2]. Samozřejmě v době, kdy byla hra Primero rozšířená a oblíbená, existovaly speciální karty pro její hraní. Na rozdíl od ostatních uvedených her zde byly jednotlivé karty ohodnoceny určitým počtem bodů. Konkrétně dvojky – 12, trojky – 13, čtyřky – 14, 5 – 15, šestky – 18, sedmičky –

21, J, Q, K – 10 a eso – 16 body. Tyto hodnoty následně rozhodovaly při shodnosti karetní kombinace.

Hry se účastní většinou 4 – 6 hráčů, ovšem existuje mnoho variant, kde hrají například pouze dva. Nejprve se určí dealer, který bude rozdávat karty. Po rozdání dvou karet každému hráči, nastává prostor pro první sázky a měnění karet. Asi největší rozdíl mezi touto hrou a pokerem je, že se zde sází na konkrétní výherní kombinaci, kterou má hráč v ruce, nebo očekává, že ji bude mít.[1]

Po ukončení první fáze se všemi náležitostmi, které musí mít (sázky, dorovnání sázky nebo složení karet), následuje druhá část hry, kdy opět každý z hráčů dostává dvě kary do celkového počtu čtyř karet. Znovu nastává prostor pro sázení, po jehož ukončení dorovnáním všemi hráči, kteří chtějí ve hře pokračovat, všichni odhalují karty. Vyhrává hráč s nejvyšší možnou kombinací.

V této hře záleží především na hodnotách jednotlivých karet. Současně samozřejmě na jejich barvách. Celkem je možné získat jednu z pěti výherních kombinací. Aby mohl hráč vyhrát, musí (kromě přebití kombinací všech ostatních hráčů) mít vsazeno na svou výherní kombinaci. Další informace ohledně výherních kombinací jsou dostupné na stránkách jducoeur.com. [1]

2.1.3 Poque

Jedná se o francouzskou karetní hru, která byla v oblibě ke konci 16. století. Už podle podobnosti názvů se není čemu divit, že Poque je předchůdcem pokeru se vším všudy. Francouzští kolonisté přivezli tuto hru do Ameriky, kde se z ní následně poker vyvinul.[10]

Poque je pojmenování pro francouzskou variantu, jejíž německá obdoba se nazývá Pochen, Poch nebo také Pochspiele. Pravidla obou variant jsou prakticky stejná, až na pár odlišností, které ovšem nejsou tak podstatné. Důležitý je především princip.

Hry se účastní 3 – 6 hráčů a využívá se balíčku 32, příp. 36 karet (A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7, příp. 6 – vše po čtyřech kusech v symbolech srdce ♥, káry ♦, piky ♠ a kříže ♣). Podle dostupných informací se zde poprvé tyto symboly objevují a následně jsou využívané také v balíčku karet pro Poker.[4]

Neobvyklá je první fáze hry, kdy se využívá hráčský stůl, tzv. Pochbrett, kde se shromažďují vsazené žetony. V německé verzi Poch nejprve každý z hráčů dá po jednom žetonu do každé z devíti jamek u jednotlivých kombinací resp. nejvyšších karet. Tyto kombinace jsou královská dvojice (karta pro královnu Q a krále K) a sekvence (karty 7, 8, 9 pohromadě) a dále ostatní vysoké karty samostatně – A, K, Q, J, 10 a Pocher (vyobrazený jako žolík). Ve francouzské variantě je pouze 6 těchto bazénků na žetony a to pro karty A, K, Q, J, 10 a Poque. Dále je uprostřed stolu neoznačená jamka, která slouží k následným sázkám na výherní kombinace. Následuje rozdělení do jednotlivých fází hry Poque.[4]

V první fázi hry dostávají hráči po dvou kartách a je možné vkládat první sázky. Samozřejmě může kterýkoliv hráč složit karty nebo vsadit všechny žetony. Jakmile jsou sázky dorovnány, rozdávají se hráčům další tři karty do celkového počtu pěti karet.

Vrchní karta ze zbylého balíčku je otočena jako trumf (což je další odlišnost od Pokeru, kde mají všechny karty stejný význam) a tyto trumfy následně rozhodují o lepší ze stejných kombinací. Má-li hráč některou z výše uvedených karet, získává žetony z příslušné jamky. Dále se rozdělují hlavní sázky (z prostředního bazénku) na karty, které mají hráči v ruce. Výherní kombinace jsou pouze pár, trojice, čtveřice. Jestliže nastane situace, kdy někdo má dva páry, počítá se pouze větší z nich. Stejně tak je tomu u kombinace trojice a dvojice (v Pokeru tzv. full house), kde se počítá pouze trojice.[4]

2.1.4 Poker

Na předchozích několika stránkách jsou popsané hry, ze kterých se poker pravděpodobně vyvinul. Nyní ovšem k samotnému pokeru a jeho vzniku. Francouzští kolonisté přivezli svou hru Poque do Ameriky, kde se z ní následně zrodil poker. Konkrétně tomu tak bylo v 17. století. Větší popularitě se ovšem tato karetní hra těšila až v následujícím století s centrem v New Orleans. Označení poker se užívá údajně od roku 1834 a jeho autorem je Jonathan H. Green. Nejvíce se rozvíjel v okolí řeky Mississippi.[10]

V první fázi se hrála varianta s pouze 20 kartami (A, K, Q, J, 10) ve čtyřech hráčích. Existovaly zde jen tyto výherní kombinace – pár, dva páry, trojice, full house a čtveřice. Joe Cowell popisuje tyto události ve své knize Strasti a slasti hazardu z roku 1829. Stejně tak se o zmíněné variantě zmiňuje Jonathan H. Green. Ve 30. letech 19.

století byl balíček 20 karet nahrazen dosud používaným, který obsahuje 52 karet.[3] To umožnilo přidání dalších výherních kombinací – flush (barva) a také straight (postupka). Touto úpravou se tedy dostal Poker na úroveň, jakou známe dnes.[3]

Ze začátku 20. století se objevuje varianta zvaná Texas Hold’em Poker, kde každý z hráčů dostává pouze dvě karty a dalších pět mají společných (viz. 2.2.1 Texas Hold’em). Brzy se tento způsob hry stal nejoblíbenějším a nejrozšířenějším, jako je tomu i nyní.[11]

Roku 1970 se koná první ročník Světové Pokerové série – World Series of Poker (WSOP). Tyto turnaje se brzy stávají nejprestižnějšími v oblasti Pokeru a vítěz hlavního je světovým šampionem. Na přelomu tisíciletí vznikají další velké Pokerové série jako World Poker Tour (WPT), European Poker Tour (EPT) nebo Aussie Millions. Ve stejném období s rozvojem techniky se objevují také první internetové turnaje – tzv. online Poker.[11]

2.2 Pravidla Pokeru

V průběhu historie vznikala veliká spousta variant Pokeru, jelikož se často měnila pravidla (více či méně) a stará varianta zůstala stále zachována. Existuje více než 1000 způsobů, jak jej můžeme hrát. Nejrozšířenějším druhem je v současné době Texas Hold’em, který vznikl z varianty 7-Card Stud (pro každého hráče 3 karty v ruce a 4 vyložené – počítá se nejlepších 5). Tento způsob hry vznikl z 5-Card Stud Pokeru (každý má v ruce 1 kartu a 4 vyložené). Dále existuje varianta 5-Card Draw, která dala vzniknout zmíněné 5-Card Stud verzi stejně jako mnoha dalším.[11]

Na následujících stranách můžete nalézt rozepsaná pravidla variant Texas Hold’em, jakožto nejrozšířenější, a 5-Card Draw, která položila základy mnoha dalším verzím a je stále poměrně využívaná (především pro začátečníky a v domácích podmínkách). Následují také výherní kombinace, které jsou pro obě varianty stejné.

2.2.1 Texas Hold’em

Pravidla pro variantu Texas Hold’em jsou čerpána z webové stránky pokerpravidla.cz. [12]

Tato varianta se dá dále rozdělit. Za prvé lze uvést Limit Texas Hold'em, dále pak Pot Limit Texas Hold'em. Tyto dvě verze se liší pouze některými omezeními (co se týče sázek) od třetí varianty popsané v této práci – NoLimit Texas Hold'em. Pravidla jsou pro všechny tři způsoby stejná.

Na samém začátku je zvolen tzv. dealer – ten, který rozdává karty. Hra vždy probíhá ve směru hodinových ručiček. První hráč na řadě (tedy po levici dealera) má označení pro „small blind". Dále druhý hráč ve hře (po levici small blindu) je označen žetonem „big blind". Jakmile tito označení hráči vloží své povinné sázky (jejich hodnota, případně kdy dojde k navýšení, se domlouvá před začátkem hry), rozdává dealer po jedné kartě každému do celkového počtu dvou karet.

Dostáváme se do první fáze sázení. Začíná první hráč, který zatím nemá žádné vsazené žetony (tedy třetí od pozice dealera). Aby mohl pokračovat, musí minimálně dorovnat (call) vsazený big blind. Takto pokračují všichni hráči až po toho, který má vsazený small blind. Kterýkoliv z hráčů (včetně druhého ve hře, když na něj přijde řada) může kromě srovnání sázky také navýšit (raise). Pokud se tak stane, musejí ostatní dorovnat kromě big blindu také toto navýšení.

Jakmile je všemi, kteří chtějí nadále pokračovat, srovnáno, přichází další fáze hry. V tuto chvíli dealer odloží (spálí) jednu kartu z hracího balíčku tak, aby ji nikdo neviděl, a následně vykládá první tři společné karty (flop). Nyní a také v dalších fázích hry začíná první hráč ve hře po levici vedle dealera.

Po splnění všech náležitostí druhé fáze (check, reise a následný call, případně fold), následuje, po spálení další karty, vyložení čtvrté společné karty (turn). Opakuje se stejný postup, jako v předchozí části, a po dorovnání všemi hráči se blíží poslední sázkové kolo.

Po opětovném spálení vrchní karty z hracího balíčku vyloží dealer poslední společnou kartu (river). Momentálně všichni přesně vědí, co mají za výherní kombinaci, a následuje zmíněné poslední kolo sázení. Jakmile je srovnaný počet žetonů všemi hráči, odkrývají se karty, které jsou drženy v ruce. Hráč s nejvyšší kombinací bere všechny vsazené žetony (pot). V případě, že mají tutéž výherní kombinaci dva nebo více hráčů, dělí si pot ve stejném dílu. Může se stát, že v průběhu hry všichni až na jednoho hráče složí karty, tento bere všechny žetony na potu, aniž by musel ukazovat karty, které drží v ruce.

Kdykoliv během hry je také možno vsadit všechny žetony, které má hráč u sebe (all-in). Když dva a více hráčů dorovná soupeřův all-in, dává se současný pot před hráče, který vsadil veškeré žetony a hraje právě o tuto částku. Další dva (nebo více) mohou pokračovat v navyšování. Této části se již hráč bez žetonů neúčastní. Pokud má dotyčný, který dal all-in, nejvyšší výherní kombinaci, vyhrává žetony, které jsou před ním a o zbylé žetony soupeří ostatní hráči, jako by hráli pouze oni. V případě, že nejvyšší výherní kombinaci nemá, přichází o všechny své žetony a tím pádem končí ve hře.

Jakmile byly odhaleny karty a jeden z hráčů získal pot, posouvají se velké žetony s označením pro dealera, small a big blind o jeden post doleva. Dále se opakuje celý postup až do doby, kdy zůstane poslední hráč.

2.2.2 5-Card Draw

Informace o pravidlech varianty 5-Card Draw dostupné na poker24.cz. [8]

Také v této variantě Pokeru je na začátku vybrán dealer. Po jeho levici sedí hráč, který dostane označení small blind a dále druhý na řadě s označením big blind. Poté, co tito hráči vsadí své povinné sázky naslepo, dealer každému z hráčů dává po jedné kartě do celkového počtu pěti karet. Obdobně, jako v první variantě, přichází první kolo sázek. Rozdíl je především v tom, že zde nejsou žádné společné karty. Poté, co je srovnán stav žetonů na stole, po dorovnání všemi, případném složení karet, nebo navýšení sázky a jeho dorovnání, přichází druhá fáze hry.

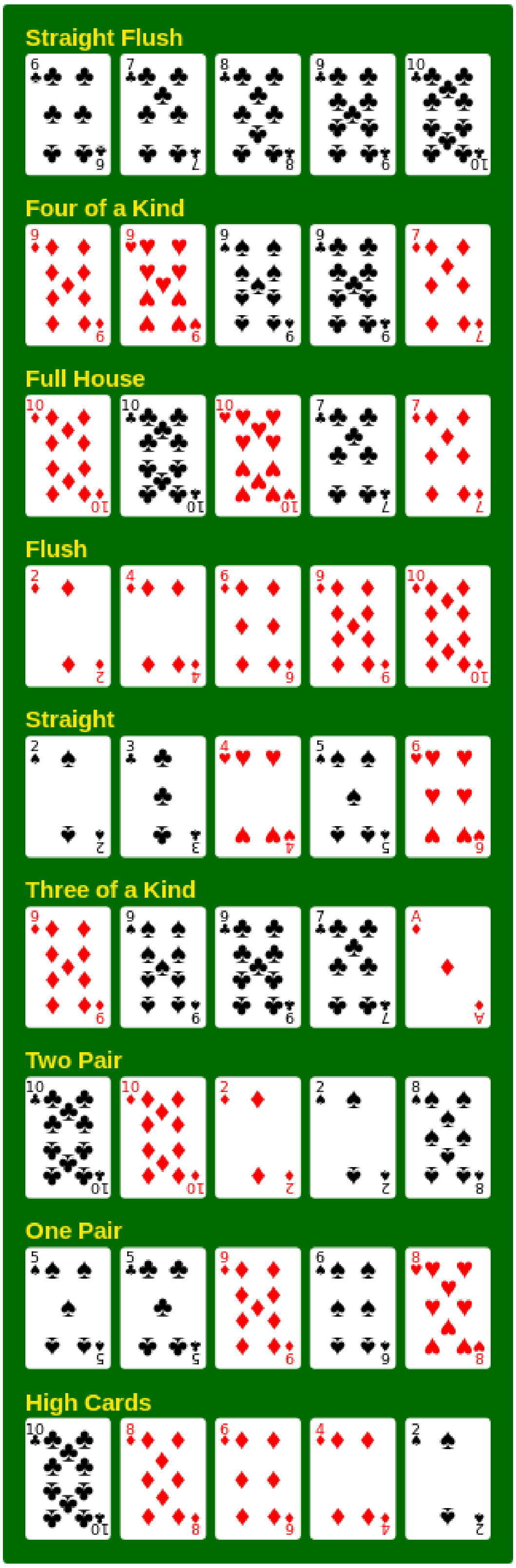
Draw varianta znamená s měněním karet. V druhé části, nastává prostor pro výměnu. Každý z hráčů si může zvolit libovolný počet karet (maximálně 3 karty, pokud nedrží v ruce eso – po jeho ukázání může měnit karty 4), které chce nechat vyměnit. Tyto karty postupně ve směru hodinových ručiček podávají hráči dealerovi (tak, aby je nikdo neviděl) a dostávají místo nich stejný počet nových. Následně, po výměně karet také dealerem (resp. posledním hráčem ve hře), je prostor pro druhé kolo sázek, tentokrát již na konečnou výherní kombinaci.

Vyhrává opět nejlepší kombinace. Dále se posouvá ve směru hodinových ručiček žeton pro označení dealera, small a big blindu a pokračuje se další hrou. Samozřejmě i zde je možné kdykoliv vložit all-in, jak tomu bylo při variantě Texas Hold'em.

2.2.3 *Výherní kombinace*

Výherní kombinace jsou pro obě varianty stejné. Zde jsou srovnány od nejsilnější.

Obr. 6. Výherní kombinace v pokeru



Straight Flush (postupka v barvě – pět karet jdoucích po sobě v jedné barvě)

Four of a Kind (čtyři karty stejné hodnoty a pátá libovolná) – někdy také označováno jako poker

Full House (v překladu plný dům – jedná se o kombinaci trojice a dvojice karet stejných hodnot karet)

Flush (barva – jakýchkoliv pět karet, které nejsou v postupce, stejné barvy)

Straight (postupka – pět karet jsoucích po sobě, které nejsou v jedné barvě)

Three of a Kind (trojice karet stejné hodnoty a dvě libovolné karty, které se neshodují)

Two Pair (dva páry – dvě dvojice karet se stejnou hodnotou a pátá libovolná karta, která se neshoduje ani s jednou hodnotou karet ve dvojici):

Pair (dvojice karet se stejnou hodnotou a další tři navzájem různé karty, kde se ani jedna z nich neshoduje s kartami, které jsou v páru)

High Cards (vysoké karty – navzájem pět různých karet, které netvoří žádnou z výše uvedených kombinací)

Při shodnosti výherních kombinací dále rozhoduje hodnota jednotlivých karet. Například Flush 2♦, 4♦, 6♦, 9♦, 10♦ porazí Flush 2♠, 3♠, 5♠, 7♠, 8♠, zatímco Full House 10♦, 10♣, 10♥, 7♣, 7♦ bude poražen kombinací Full House A♣, A♦, A♠, 5♥, 5♦. Při shodnosti výherní kombinace (například dva hráči mají naprosto shodnou kombinaci Two Pair – až na barvy karet samozřejmě) rozhoduje o vítězi nejvyšší ze zbývajících karet. Jestliže nastane situace, že se hodnoty karet dvou hráčů zcela rovnají, tito si rozdělí pot rovným dílem.

Často se jako vůbec nejsilnější kombinace uvádí Royal Flush. Jedná se o nejvyšší možnou postupku v barvě, tedy takovou, která obsahuje karty 10, J, Q, K, A.

3 Pravděpodobnost v Pokeru

Třetí kapitola se věnuje výpočtům pravděpodobností jednotlivých výherních kombinací. V první řadě jsou zde uvedeny výpočty pro běžný pokerový balíček 52 karet a následně se dozvíte, jak by se situace změnila, kdybychom použili ke hře pouze 32 mariášových karet (všechny pravděpodobnosti jsou zaokrouhleny na 9 desetinných míst). Dále pak se budeme zabývat modelovými situacemi a různými příklady na zamyšlení.

3.1 Pravděpodobnost výherních kombinací

3.1.1 52 karet

Pokerový balíček obsahuje 52 karet (obsahují 4 různé barvy, v nichž jsou hodnoty jednotlivých karet následující – 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A). Z těchto karet vybíráme pětici způsobem, že první kartu taháme ze všech 52 karet, druhou kartu už pouze z 51 zbylých a tak dále až pátou kartu vybíráme jen ze 48 karet. Žádná karta tedy nebude vybrána dvakrát, jelikož ji do balíčku po vytažení nevracíme. Z hlediska pravděpodobnosti je tento popis shodný s popisem kombinací bez opakování.

Kombinace bez opakování nám udávají počet neuspořádaných k-tic sestavených z prvků množiny $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ tak, že se v nich každý prvek vyskytne nejvýše jednou. Takovýto počet je potom roven kombinačnímu číslu $\binom{n}{k}$. Kombinační číslo můžeme vypočítat ze vzorce

$$V(k,n) = C(k,n) * k!$$

$V(k,n)$ je počet uspořádaných k-tic, $C(k,n)$ udává počet neuspořádaných k-tic (kombinační číslo $\binom{n}{k}$) a k! je počet uspořádání neuspořádaných k-tic. Z toho plyne:

$$C(k,n) = \frac{V(k,n)}{k!}$$

$C(k,n) = \binom{n}{k}$ – kombinační číslo a $V(k,n) = \frac{n!}{(n-k)!}$ – variace. Tedy

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!} * \frac{1}{k!} = \frac{n!}{k! * (n-k)!}$$

Tento zlomek jsme schopni dále upravit, konkrétně můžeme krátit $(n-k)!$:

$$\frac{n!}{k! * (n-k)!} = \frac{n * (n-1) * \dots * (n-k+1)}{k!}$$

Tímto způsobem tedy můžeme vypočítat počet všech možných kombinací při vytažení pěti náhodných karet z pokerového balíčku. Máme tedy množinu 52 karet, ze které vybíráme pětici $(n = 52, k = 5)$. Po dosazení do výše uvedené rovnice dostáváme:

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{5! * (52-5)!}$$

K výpočtu daného zlomku využijeme výše uvedeného návodu:

$$\frac{52!}{5!\,(52-5)!} = \frac{52!}{5!\,47!} = \frac{52 * 51 * 50 * 49 * 48}{5!} = 2\,598\,960$$

Tento výsledek budeme v následujících příkladech využívat k určení pravděpodobností jednotlivých výherních kombinací.

Nyní je třeba vypočítat vždy počet příznivých kombinací, tedy počet všech možností, jak může daná výherní kombinace vzniknout. Následně toto číslo vydělíme počtem všech možných kombinací a tím zjistíme pravděpodobnost, s jakou vybereme z balíčku právě tuto výherní kombinaci. Tímto způsobem můžeme postupovat, neboť se jedná o tzv. klasickou pravděpodobnost. Jestliže je počet všech možností konečný, elementární jevy mají stejnou pravděpodobnost a vzájemně se vylučují, potom hovoříme právě o klasické pravděpodobnosti. Pravděpodobnost jevu A označíme $P(A)$ a definujeme ji jako

$$P(A) = \frac{počet\ možností\ příznivých\ jevu\ A}{počet\ všech\ možností}$$

Straight Flush

Tato postupka může začínat jednou z karet A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 nebo 10 (jakmile vytáhneme například 2♣, dále už nezbývá jiná možnost, než vytáhnout karty 3♣, 4♣, 5♣ a 6♣. obdobně by tomu bylo s jakoukoliv jinou kartou). Každá z uvedených karet tedy znamená jednu možnost výběru výherní kombinace. Těchto počátečních karet je 10 a to v každé ze čtyř používaných barev. Proto počet příznivých možností pro výběr Straight Flush je $4 * 10$, tedy 40. Pravděpodobnost se potom vypočítá následovně:

$$\frac{40}{\binom{52}{5}} = \frac{40}{2598960} = 0{,}000015390$$

Four of a Kind

Čtveřice nebo také poker vznikne kombinací čtyř karet stejné hodnoty a páté libovolné karty. Čtveřici můžeme vytvořit z karet každé ze 13 hodnot (např. 3♥, 3♦, 3♣, 3♠) a ze zbylých 48 karet nabíráme pátou kartu. Počet příznivých možností pro vytvoření Four of a Kind je $13 * 48$, tedy 624. Pravděpodobnost počítáme obdobně, jako v předchozím případě.

$$\frac{624}{\binom{52}{5}} = \frac{624}{2598960} = 0{,}000240096$$

Full House

Full House znamená kombinaci trojice stejné hodnoty a páru. Pro výběr hodnoty karty, ze které vznikne trojice, máme 13 možností. Vezměme jako příklad trojici tvořenou kartami hodnoty J. V tomto případě máme 4 možnosti, jak tuto trojici vytvořit – (J♦, J♣, J♠), (J♦, J♣, J♥), (J♣, J♠, J♥), (J♦, J♠, J♥) – vybíráme totiž 3 karty ze 4 možných bez opakování, což lze vyjádřit kombinačním číslem $\binom{4}{3}$. Existuje tedy $13 * 4$ možností, jak lze vytvořit trojici.

Pár, který společně s trojicí tvoří Full House, již můžeme vytvořit pouze z karet 12 zbylých hodnot. Při výběru páru potřebujeme vytáhnout 2 karty ze 4. To lze $\binom{4}{2}$, tedy 6 způsoby. To znamená, že existuje $12 * 6$ možností, jak tento pár vytvořit. Tímto výpočtem zjišťujeme, že počet příznivých možností pro vytvoření Full House je 3 744, neboť je roven číslu $13 * 12 * 4 * 6$. Pravděpodobnost této výherní kombinace potom je:

$$\frac{3744}{\binom{52}{5}} = \frac{3744}{2598960} = 0{,}001440576$$

Flush

Flush znamená sestavení kombinace pěti karet stejné barvy, avšak musíme z těchto možností vynechat ty, které tvoří postupku, neboť jsou již započítány v možnostech pro Straight Flush. Každá barva obsahuje 13 karet, ze kterých tedy budeme pětici vybírat. Takových kombinací existuje $\binom{13}{5}$. To jsou možnosti výběru 5 karet jedné barvy včetně postupek. Existují ovšem 4 různé barvy, proto uvedené kombinační číslo musíme vynásobit čtyřmi. Dále pak odečteme všechny možnosti vzniku postupky v barvě, kterých je 40, a získáváme hledaný počet příznivých možností pro vznik Flushe. Ten tedy je $4 * \binom{13}{5} - 40$, tedy 5 108.

Pravděpodobnost vzniku Flushe je:

$$\frac{5108}{\binom{52}{5}} = \frac{5108}{2598960} = 0{,}001965402$$

Straight

Straight neboli postupku dostaneme výběrem 5 karet jdoucích po sobě, které nejsou všechny jedné barvy. Stejně jako při počítání Straight Flush máme 10 možností, jaké hodnoty může postupka obsahovat. Jsou to konkrétně postupky začínající jednou z karet A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 nebo 10. Tentokrát ovšem nezáleží na barvě, proto musíme jejich počet vynásobit číslem udávajícím všechny možné kombinace barev vybraných pěti karet. Každou z hodnot těchto pěti karet můžeme vybrat ze 4 různých barev. Počet kombinací těchto karet je tedy 4^5. Dále pak musíme opět odečíst počet postupek v barvě, kterých je 40, a dostaneme číslo $10 * 4^5 - 40$, tedy 10 200, které nám udává počet všech příznivých kombinací vzniku postupky. Pravděpodobnost je potom:

$$\frac{10200}{\binom{52}{5}} = \frac{10200}{2598960} = 0{,}003924647$$

Three of a Kind

Například 2♣, 2♦, 2♠, 5♦, 8♥ patří mezi výherní kombinace zvané Three of a Kind neboli trojice. Tu tvoří vždy trojice karet stejné hodnoty a dvě další karty, jejichž hodnota je navzájem různá a liší se také od karty tvořící trojici. Začněme tedy výběrem stejných tří karet. Stejně jako ve Full House máme pro výběr hodnoty karty, ze které vznikne trojice, 13 možností. Opět ovšem vybíráme pouze 3 karty ze 4 stejné hodnoty, proto musíme násobit číslem $\binom{4}{3}$, neboť právě tolik existuje kombinací těchto karet.

Na výběr čtvrté karty pak máme už pouze 12 možností, protože nemůže být stejné hodnoty, jako první tři. Může mít ovšem jednu ze čtyř barev, proto násobíme čtyřmi. Pátou kartu vybíráme jen z 11 možností a opět vynásobíme počtem barev. Jelikož ovšem nezáleží na pořadí posledních dvou karet (kombinace (5♦, 8♥) je stejná jako (8♥, 5♦)) musíme celé číslo na závěr vydělit 2!.

Trojice tedy může vzniknout $13 * \binom{4}{3} * 12 * 4 * 11 * 4/2!$, tedy 54 912, způsoby. Pravděpodobnost jejího vzniku při výběru 5 karet z 52 potom je:

$$\frac{54912}{\binom{52}{5}} = \frac{54912}{2598960} = 0{,}021128451$$

Two Pair

Jde již o poměrně frekventovanou výherní kombinaci. Jedná se například o karty 2♦, 2♥, 3♦, 3♠, 8♥. Na výběr prvního páru máme znovu 13 možností. Mohou jej tvořit karty kterékoliv hodnoty. Jelikož se jedná o výběr pouze 2 ze 4 karet, musíme toto číslo vynásobit $\binom{4}{2}$. Stejným číslem také násobíme počet variant výběru druhého páru, na který připadá již pouze 12 možností. Obdobně jako v předchozím případě nezáleží na tom, který z těchto párů vybereme jako první, proto celé číslo vydělíme 2!.

Zbývá nám vybrat pátá karta, pro kterou máme 11 možností, neboť nesmí být stejná jako kterýkoliv z vybraných párů. Karta, kterou na páté pozici vybereme má jednu ze čtyř barev, proto toto číslo násobíme čtyřmi. Celkový počet možností výběru dvou párů potom je $13 * \binom{4}{2} * 12 * \binom{4}{2} * 11 * 4/2!$, tedy 123 552. Potom můžeme psát, že pravděpodobnost tohoto výběru je:

$$\frac{123552}{\binom{52}{5}} = \frac{123552}{2598960} = 0{,}047539016$$

Pair

Jeden pár získá člověk téměř při každém druhém výběru karet. Pravděpodobnost tohoto výběru vypočítáme obdobně, jako v předchozích případech. Začněme možnostmi pro vytažení páru. Máme 13 hodnot karet, ze kterých máme možnost v první fázi vybírat. Jelikož jde pouze o 2 karty ze 4, musíme toto číslo vynásobit kombinačním číslem $\binom{4}{2}$.

Následuje výběr třetí karty, pro kterou už máme jen 12 možností, ovšem ve 4 různých barvách. Stejně tak se počet možností sníží o jednu při výběru čtvrté karty, avšak ji vybíráme ze 4 barev. Z nich taháme také poslední kartu, na kterou nám zbylo pouze 10 možností. Tyto tři karty můžeme vybrat v libovolném pořadí (kombinace (3♥, 4♦, 5♦) je totožná s kombinacemi (3♥, 5♣, 4♦), (4♦, 5♣, 3♥), (4♦, 3♥, 5♣), (5♣, 4♦, 3♥) a (5♣, 3♥, 4♦)). Proto celé číslo musíme v závěru vydělit 6, protože počet možností uspořádání tří karet je 3!.

Počet všech vhodných kombinací je $13 * \binom{4}{2} * 12 * 4 * 11 * 4 * 10 * 4/3!$, tedy 1 098 240. Pravděpodobnost výherní kombinace je:

$$\frac{1098240}{\binom{52}{5}} = \frac{1098240}{2598960} = 0{,}422569028$$

High Cards

High Cards (vysoké karty) je nejfrekventovanější výherní kombinace v pokeru. Je také ovšem nejjednodušeji porazitelná. Jedná se o takové kombinace karet, které nevytvářejí žádnou z výše uvedených výherních kombinací. Jejich počet tedy zjistíme odečtením kombinací tvořících některou z vyjmenovaných kombinací od počtu všech možných kombinací při výběru 5 z 52 karet.

Takový počet je $2598960 - 1098240 - 123552 - 54912 - 10200 - 5108 - 3744 - 624 - 40$, tedy 1 302 540. Pravděpodobnost rozdání této kombinace potom je:

$$\frac{1302540}{\binom{52}{5}} = \frac{1302540}{2598960} = 0{,}501177394$$

V předchozí části jsme si ukázali, že seřazení výherních kombinací od vysokých karet jako nejslabší po postupku v barvě jako nejsilnější není bezdůvodné. Je dáno právě pravděpodobností, se kterou nastávají.

3.1.2 32 karet

Tato část práce je věnována přepočítání pravděpodobností výherních kombinací, kdybychom se rozhodli hrát poker s mariášovými kartami. Takového balíčku docílíme tím, že z původního odebereme karty hodnot 2, 3, 4, 5 a 6. Zůstanou tedy karty 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A. Ukážeme si nyní, jak se situace změní oproti variantě poprané v kapitole 3.1.1.

Stejným způsobem, jako v předešlém případě si nejprve vypočítáme počet všech možných kombinací při výběru 5 z 32 karet. Jedná se tedy o kombinační číslo $\binom{32}{5}$.

$$\binom{32}{5} = \frac{32!}{5!\,27!}$$

Vyžili jsme pouze návodu z úvodu kapitoly 3.1.1, ve kterém jsme počítali kombinační číslo $\binom{52}{5}$.

Dále vypočítáme pomocí jednoduchých úprav výše uvedený zlomek.

$$\frac{32!}{5!\,27!} = \frac{32 * 31 * 30 * 29 * 28}{5!} = 201\,376$$

Abychom vypočítali pravděpodobnosti v následujících příkladech, budeme v nich tímto číslem vždy dělit počet vhodných kombinací.

Straight Flush

V tomto případě máme pouze 4 možnosti karet, kterými může postupka začínat. Jedná se o hodnoty 7, 8, 9 a 10, kde každá z nich představuje právě jednu možnost pro vytvoření postupky v barvě. Jelikož počítáme stále se čtyřmi barvami, bude všech vhodných kombinací $4 * 4$, tedy 16. Pravděpodobnost se potom vypočítá následovně:

$$\frac{16}{\binom{32}{5}} = \frac{16}{201376} = 0{,}000079453$$

Four of a Kind

Pro výběr čtveřice můžeme využít jakoukoliv hodnotu karty, takže máme 8 možností. Na pátou kartu již zbývá pouze jedna z karet zbývajících 7 hodnot a to v některé ze čtyř barev. Proto je počet všech vhodných kombinací 8*7*4, tedy 224. Pravděpodobnost vzniku této výherní kombinace je:

$$\frac{224}{\binom{32}{5}} = \frac{224}{201376} = 0{,}001112347$$

Full House

Tuto kombinaci trojice a páru můžeme získat následujícím způsobem. Pro výběr trojice se nám opět nabízí karty 8 různých hodnot. Vybíráme ovšem pouze 3 ze 4 karet této hodnoty, proto počet možností tohoto výběru je $8 * \binom{4}{3}$. Dále pak potřebujeme pár, který bude tvořen kartami některé ze 7 zbývajících hodnot. Jelikož v tuto chvíli vybíráme 2 ze 4 karet, je počet všech možných kombinací $7 * \binom{4}{2}$. Potom počet všech příznivých možností pro sestavení Full House je $8 * \binom{4}{3} * 7 * \binom{4}{2}$, tedy 1 344. Pravděpodobnost této výherní kombinace tedy vypočítáme takto:

$$\frac{1344}{\binom{32}{5}} = \frac{1344}{201376} = 0{,}006674082$$

Flush

Aby vznikla Flush, musíme vybrat 5 z jedné osmice karet stejné barvy. Počet takových možností udává kombinační číslo $\binom{8}{5}$. Jelikož opět můžeme tuto pětici vybrat z jakékoliv ze čtyř barev, musíme uvedené číslo čtyřmi vynásobit. V tuto chvíli jsou ovšem do počítání zahrnuty také postupky v barvách, kterých je celkem 16 a proto toto číslo musíme odečíst. Získáme tak počet všech pozitivních kombinací pro tvorbu pouze Flushe. Takový počet tedy je $\binom{8}{5} * 4 - 16$, neboli 208. Jak je patrné, těchto možností je podstatně méně, než je tomu u Full House, a dokonce méně, než možností pro vznik pokeru. Na základě pravděpodobnosti by tedy ve variantě s 32 kartami měla být barva chápána jako druhá nejsilnější výherní kombinace. Pravděpodobnost Flushe je:

$$\frac{208}{\binom{32}{5}} = \frac{208}{201376} = 0{,}001032894$$

Straight

Straight neboli postupka může začínat některou z karet 7, 8, 9 nebo 10. To tvoří pouze 4 možnosti postupky, kde ovšem každá z karet má jednu ze 4 barev. Stejně jako ve variantě s 52 kartami zde musíme počet možných vytvoření postupky vynásobit číslem 4^5, jakožto počtem všech kombinací barev. Následně odečteme všechny kombinace, které tvoří postupku v barvě, kterých je 16 a tak získáme počet všech příznivých možností pro vytvoření postupky. Získáváme tedy číslo $4 * 4^5 - 16$, tedy 4 080. Pravděpodobnost potom vypočítáme následovně:

$$\frac{4080}{\binom{32}{5}} = \frac{4080}{201376} = 0{,}020260607$$

Three of a Kind

Trojici získáme naprosto stejným způsobem, jako v předchozí variantě. Nyní máme možnost vybrat trojici z karet 8 různých hodnot. Jelikož vybíráme trojici ze 4 karet, můžeme tak učinit $\binom{4}{3}$ způsoby. Dále pak potřebujeme čtvrtou a pátou kartu, kde čtvrtou máme možnost vybrat ze zbývajících sedmi a pátou už jen ze šesti hodnot. Obě tyto karty mžeme vybrat ze 4 různých barev, tedy vynásobíme číslem 4^2 a nezáleží na pořadí, v jakém je vytáhneme, proto vydělíme číslem 2!.

Počet všech trojic pak je $8 * \binom{4}{3} * 7 * 4 * 6 * 4/2!$, tedy 10 752. Pravděpodobnost vypočítáme takto:

$$\frac{10752}{\binom{32}{5}} = \frac{10752}{201376} = 0{,}053392659$$

Two Pair

Jde o kombinaci dvou párů, ve které první z nich vybíráme z 8 možných hodnot a druhý již pouze ze zbylých 7. V obou případech se jedná o výběr 2 ze 4 karet, proto je třeba jak 8, tak 7 vynásobit kombinačním číslem $\binom{4}{2}$, abychom zjistili počet všech možných kombinací pro výběr těchto párů. Jelikož znovu nezáleží na tom, který z párů získáme jako první, musíme celý součin vydělit 2!. Pak nás již čeká pátá karta, pro kterou zbývá 6 možností ve 4 barvách.

Celkový počet kombinací dva páry je $8 * \binom{4}{2} * 7 * \binom{4}{2} * 6 * 4/2!$, tedy 24 192.

$$\frac{24192}{\binom{32}{5}} = \frac{24192}{201376} = 0{,}120133482$$

Pair

Získat pár je v této variantě ještě jednodušší, než v té s 52 kartami. Stane se tak dokonce ve více případech, než pouze jednou ze dvou. Nyní jak se k tomu dostaneme. Pár můžeme vytvořit z karet osmi nabízejících se hodnot. Vybíráme 2 ze 4 karet, proto opět násobíme kombinačním číslem $\binom{4}{2}$. Dále máme pro třetí kartu $7 * 4$ možností, 6*4 pro čtvrtou a 5*4 pro poslední kartu. U těchto tří karet nezáleží na tom, v jakém pořadí je vytáhneme, proto celé číslo vydělíme 3!, a získáme počet příznivých možností tohoto výběru. Počet kombinací je $8 * \binom{4}{2} * 7 * 4 * 6 * 4 * 5 * 4/3!$, tedy 107 520. Pravděpodobnost potom vypočítáme následovně:

$$\frac{107520}{\binom{32}{5}} = \frac{107520}{201376} = 0{,}533926585$$

High Cards

Počet těchto kombinací znovu získáme odečtením všech výše vypočítaných počtů jednotlivých výherních kombinací od počtu všech možných kombinací vzniklých náhodným rozdáním 5 z 32 karet. Máme tedy $201376 - 107520 - 24192 - 10752 - 4080 - 208 - 1344 - 224 - 16$, tedy 53 040 kombinací. Toto číslo je pouze poloviční oproti počtu kombinací jednoho páru. Pár by tedy měl být nejslabší kombinací, naopak vysoké karty až druhé nejhorší. Pravděpodobnost této kombinace je:

$$\frac{53040}{\binom{32}{5}} = \frac{53040}{201376} = 0{,}263387891$$

Situace se nám tedy vzhledem k pravděpodobnostem jednotlivých výherních kombinací změnila následujícím způsobem. Výherní kombinace jsou zde srovnány opět od nejsilnějších.

Poker s 52 kartami:	*Poker s 32 kartami:*
Straight Flush,	Straight Flush,
Four of a Kind,	Flush,
Full House,	Fout of a Kind,
Flush,	Full House,
Straight,	Straight,
Three of a Kind,	Three of a Kind,
Two Pair,	Two Pair,
Pair,	High Cards,
High Cards	Pair

V druhé situaci si tedy značně polepšila kombinace Flush, která přeskočila dokonce dvě výherní kombinace, neboť se velmi snížila pravděpodobnost jejího vzniku. High Cards se staly také méně pravděpodobnými a proto si vyměnily místo s kombinací Pair.

3.2 Pravděpodobnost výhry v Texas Hold'em

Tato kapitola se věnuje ještě více praxi. Existuje několik kalkulaček na internetu, do kterých pouze vyplníte své počáteční karty, a ony vám vypočítají pravděpodobnost výhry. Čím více zadáte údajů, tím lepší výpočet je. Pokud bychom zadali pouze své vlastní karty, s čímž samozřejmě hráči při turnajích počítají, je do tohoto výpočtu zahrnuta spousta neznámých.

V tuto chvíli se budeme věnovat situaci, kterou můžete sledovat na turnajích v pokeru, kdy znáte karty všech zúčastněných hráčů a počítač vypočítává jejich pravděpodobnost výhry. V modelovém příkladu 1 a příkladu 2 si ukážeme situaci, kde hrají pouze dva hráči, známe jejich karty v ruce a také první tři společné karty, tedy situace po flopu (všechny pravděpodobnosti výhry jsou vypočítány na 5 desetinných míst).

Příklad 1

Jsou tedy rozdány karty Hráči 1 (2♥, 9♣) a Hráči 2 (A♥, A♠). Již na první pohled je vidět, že Hráč 2 má značně navrch. Když na flop přišly karty (5♦, 6♣, A♦), zdá se situace zcela jasná. Jsou zde ovšem možnosti, za kterých by Hráč 1 mohl vyhrát.

Jediná možnost, jak porazit nejsilnější možnou trojici Hráče 2, je v tuto chvíli postupka. Konkrétně může Hráči 1 vzniknout postupka 2, 3, 4, 5, 6, za podmínky, že přijdou karty 3 a 4, nebo existuje druhá možnost, a to postupka 5, 6, 7, 8, 9, pokud přijde kombinace karet 7 a 8. Je tu 16 možností, v jakých kombinacích mohou přijít katy 3 a 4, neboť každá z nich může být vybrána ze 4 barev. Všech možných kombinací, jak tyto karty poskládat je tedy 4^2, což je 16. Stejně tak je tomu i u možnosti, že přijdou karty 7 a 8. Rovněž každá z nich bude v jedné ze 4 barev. Dohromady tedy existuje 36 možností, které zachrání Hráče 1 před prohrou.

Abychom zjistili pravděpodobnost výhry obou hráčů, musíme vypočítat, kolik existuje všech možných situací, které mohou nastat. V tuto chvíli mají na stůl přijít ještě dvě karty a 7 karet je již použito. To znamená, že v balíčku zbývá 45 karet, ze kterých budeme dále rozdávat. Počet všech možností charakterizuje opět kombinační číslo, a to konkrétně $\binom{45}{2}$. Vypočteme tedy toto číslo a následně jím vydělíme počet příznivých kombinací Hráče 1.

$$\binom{45}{2} = \frac{45!}{2! * 43!} = \frac{45 * 44}{2} = 990$$

Pravděpodobnost výhry Hráče 1 tedy je:

$$\frac{32}{\binom{45}{2}} = \frac{32}{990} = 0{,}03232$$

Pokud bychom chtěli uvést pravděpodobnost v procentech, jako tomu bývá na pokerových turnajích, vynásobíme vypočítané číslo 100 a dostaneme pravděpodobnost 3,23%.

Pro Hráče dva hrají všechny ostatní kombinace, kterých je $990 - 32$, tedy 958. Pravděpodobnost jeho výhry je potom:

$$\frac{958}{\binom{45}{2}} = \frac{958}{990} = 0{,}96768$$

Nebo opět po vynásobení 100 je to 96,77%. Součet obou pravděpodobností výher, respektive výher a remízy musí být 100%. (remíza zde vzniknout nemůže).

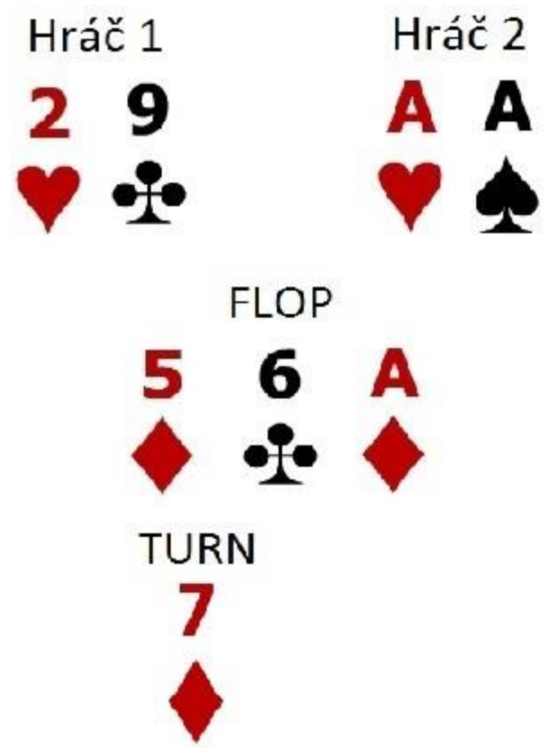
Známe tedy pravděpodobnost výhry obou hráčů a předpokládáme, že oba pokračují ve hře. Následuje čtvrtá společná karta, tedy turn. V tuto chvíli rozdělíme příklad na dvě situace.

1)

Nyní je situace jasná. Nemusíme čekat na poslední společnou kartu, neboť již v tomto momentu je pravděpodobnost výhry Hráče 2 100%. Neexistuje žádná kombinace pro Hráče 1, která by v následujícím kole porazila trojici es, tedy jeho pravděpodobnost výhry je nulová. Takovýmto výsledkem skončí duel dle dříve vypočítané pravděpodobnosti přibližně v 97 případech ze 100.

Podíváme se, jak by se hra vyvíjela, kdyby přišla na turnu jedna z vhodných karet pro Hráče 1.

2)



Nyní stále existuje šance pro výhru Hráče 1. Kdyby přišla kterákoliv z karet hodnoty 8, vznikla by tomuto hráči postupka porážející trojici Hráče 2. V balíku zůstává 44 karet a 4 z nich nají na rubu napsané číslo 8. Jednu z těchto karet Hráč 1 potřebuje, aby zvítězil a pravděpodobnost, že zmíněná situace nastane, je:

$$\frac{4}{44} = \frac{1}{11} = 0{,}09091$$

Zbylých 40 karet je potřebných pro výhru Hráče 2 a pravděpodobnost tohoto jevu je:

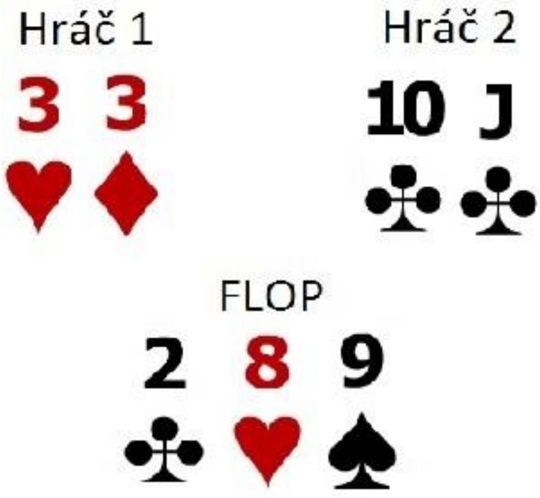
$$\frac{40}{44} = \frac{10}{11} = 0{,}90909$$

Situace na riveru rozhodne o výhře, kterou v přibližně 91 případech ze 100 získá právě Hráč 2.

Poslední společná karta, a samozřejmě všechny karty předchozí, znamená výhru Hráče 2.

Podívejme se nyní na obdobný příklad, kdy hrají pouze dva hráči proti sobě, avšak pravděpodobnost jejich výhry je po flopu téměř vyrovnaná.

Příklad 2



Nyní jsou karty rozdány takto: Hráč 1 v ruce drží (3♥, 3♦) a Hráč 2 (10♣, J♣). Tomuto případu říkají pokerový hráči slangově coin flip, neboli v překladu do češtiny hození mincí. Jedná se o situaci, kdy šance na výhru jsou téměř vyrovnané. Nicméně na flop přišly karty (2♣, 8♥, 9♠), které nám počítání velice usnadní.

V tuto chvíli má lepší kombinaci Hráč 1, avšak podle pravděpodobnosti je ve výhodě druhý hráč. Musíme opět vypočítat, jaké všechny možnosti hrají do karet kterému z hráčů. Začněme tedy Hráčem 1. V žádném případě nesmí přijít jakákoliv kombinace s kartami hodnoty 7 a Q, které Hráči 2 tvoří postupku. Stejně tak jsou pro Hráče 1 nepřípustné jakékoliv kombinace karet 4, 5, 6, 8, K, A v barvě ♣. Ty by znamenaly barvu pro Hráče 2. Nesmíme také zapomenout na kombinace různých karet (kromě trojky) s kartou hodnoty 10 nebo J, které by znamenaly vyšší pár (případně trojici, kdyby přišly dvě stejné karty) pro Hráče 2.

Karty, které pro Hráče 1 mohou v nějaké kombinaci přijít, jsou všechny ostatní. Pro výpočet všech pozitivních možností pro výhru Hráče 1 využijeme pro přehlednost tabulku.

Karty, se kterými vytváříme kombinace	Karty, které kombinujeme (počet těchto kombinací)
2♠, 2♥, 2♦	Všechny kromě karet hodnoty 7 a Q – postupka pro Hráče 2 a karet 10, J – vyšší dva páry pro Hráče 2 $(3 * (44 - (8 + 6)) = 90)$
3♠	Všechny kromě karet hodnoty 7 a Q – postupka pro Hráče 2 $(1 * (44 - 8) = 36)$
3♣	Všechny kromě karet hodnoty 7 a Q – postupka pro Hráče 2 a karet v barvě ♣ (vyjma 8♣ a 9♣, které tvoří Hráči 1 Full House) – barva pro Hráče 2 $(1 * (44 - (8 + 5)) = 31)$
4♠, 4♥, 4♦	Všechny kromě karet hodnoty 7 a Q – postupka pro Hráče 2 a karet 10, J – vyšší pár pro Hráče 2 $(3 * (44 - (8 + 6)) = 90)$

5♠, 5♥, 5♦	Všechny kromě karet hodnoty 7 a Q – postupka pro Hráče 2 a karet 10, J – vyšší pár pro Hráče 2 $(3 * (44 - (8 + 6)) = 90)$
6♠, 6♥, 6♦	Všechny kromě karet hodnoty 7 a Q – postupka pro Hráče 2 a karet 10, J – vyšší pár pro Hráče 2 $(3 * (44 - (8 + 6)) = 90)$
4♣, 5♣, 6♣	Všechny kromě karet hodnoty 7 a Q – postupka pro Hráče 2, karet v barvě ♣ – barva pro Hráče 2 a karet 10, J – vyšší pár pro Hráče 2 $(3 * (44 - (8 + 7 + 6)) = 69)$
7♠, 7♥, 7♦, 7♣	Žádná z kombinací nepomůže Hráči 1 zvítězit
8♠, 8♦	Všechny kromě karet hodnoty 7 a Q – postupka pro Hráče 2 a karet 9, 10, J – vyšší dva páry pro Hráče 2 $(2 * (44 - (8 + 9)) = 54)$
8♣	Všechny kromě karet hodnoty 7 a Q – postupka pro Hráče 2, karet v barvě ♣ (vyjma 3♣) – barva pro Hráče 2 a karet 9, 10, J – vyšší dva páry pro Hráče 2 $(1 * (44 - (8 + 5 + 9)) = 22)$
9♥, 9♦	Všechny kromě karet hodnoty 7 a Q – postupka pro Hráče 2 a karet 8, 10, J – vyšší dva páry pro Hráče 2 $(2 * (44 - (8 + 9)) = 54)$
9♣	Všechny kromě karet hodnoty 7 a Q – postupka pro Hráče 2, karet v barvě ♣ (vyjma 3♣) – barva pro Hráče 2 a karet 8, 10, J – vyšší dva páry pro Hráče 2 $(1 * (44 - (8 + 5 + 9)) = 22)$
10♠, 10♥, 10♦	Pouze karty hodnoty 3, které vytvoří Hráči 1 trojici přebíjející pár Hráče 2 $(3 * 2 = 6)$

J♠, J♥, J♦	Pouze karty hodnoty 3, které vytvoří Hráči 1 trojici přebíjející pár Hráče 2 $(3 * 2 = 6)$
Q♠, Q♥, Q♦, Q♣	Žádná z kombinací nepomůže Hráči 1 zvítězit
K♠, K♥, K♦	Všechny kromě karet hodnoty 7 a Q – postupka pro Hráče 2 a karet 10, J – vyšší pár pro Hráče 2 $(3 * (44 - (8 + 6)) = 90)$
A♠, A♥, A♦	Všechny kromě karet hodnoty 7 a Q – postupka pro Hráče 2 a karet 10, J – vyšší pár pro Hráče 2 $(3 * (44 - (8 + 6)) = 90)$
K♣, A♣	Všechny kromě karet hodnoty 7 a Q – postupka pro Hráče 2, karet v barvě ♣ – barva pro Hráče 2 a karet 10, J – vyšší pár pro Hráče 2 $(2 * (44 - (8 + 7 + 6)) = 46)$

Když bychom nyní čísla v závorkách sečetli, dostali bychom dvojnásobek skutečné hodnoty všech příznivých kombinací pro Hráče 1, neboť jsme všechny kombinace započetli dvakrát. Pro příklad, že tomu tak skutečně je, uveďme kombinaci (3♣, 8♣). Ve třetím řádku tabulky započítáváme tuto kombinaci pro Hráče 1 jako vhodnou. Znovu se objevuje v desátém řádku jako kombinace vytvářející Hráči 1 Full House. Musíme tedy celý součet vydělit dvěma a následně získáme počet všech vhodných variant pro prvního hráče.

$$\frac{90 + 36 + 31 + 90 + 90 + 90 + 69 + 54 + 22 + 54 + 22 + 6 + 6 + 90 + 90 + 46}{2}$$

Tento zlomek je roven po vypočtení součtu v čitateli zlomku

$$\frac{886}{2} = 443$$

Abychom byli schopni vypočítat pravděpodobnost, že Hráč 1 v duelu zvítězí, musíme nejprve zjistit, kolik existuje všech možných kombinací, které mohou při výběru 2 ze zbylých 45 karet v balíčku nastat.

Všechny možné kombinace při výběru 2 karet ze 45 charakterizuje kombinační číslo $\binom{45}{2}$. Toto číslo vypočítáme a následně jím vydělíme počet příznivých možností pro výhru Hráče 1, abychom zjistili pravděpodobnost jeho výhry v této chvíli.

$$\binom{45}{2} = \frac{45!}{2! * 43!} = \frac{45 * 44}{2} = 990$$

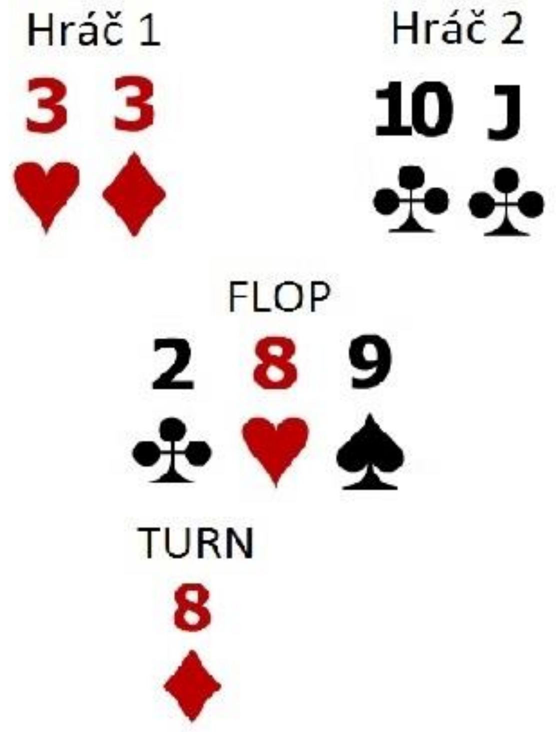
Pravděpodobnost výhry Hráče 1 tedy je:

$$\frac{443}{\binom{45}{2}} = \frac{443}{990} = 0{,}44747$$

Jelikož nemůže nastat remíza, udává číslo 2 $990 - 443$, tedy 547 počet vhodných kombinací pro Hráče 2, a proto pravděpodobnost jeho výhry vypočítáme následovně:

$$\frac{547}{\binom{45}{2}} = \frac{547}{990} = 0{,}55253$$

Znovu bychom mohli psát pravděpodobnost v procentech, tedy pro Hráče 1 44,75% a pro Hráče 2 55,25%. Zatím je vše nakloněno Hráči 2 a nyní se podíváme, jak se situace změní po rozdání čtvrté společné karty. Dostáváme se do fáze, kdy jsou známy 4 společné karty.



Na turn přišla karta 8♦, která hru velmi ovlivňuje. Hráč 1 má momentálně navrch, jelikož jeho výherní kombinaci tvoří karty (3♥, 3♦, 8♥, 8♦, 9♠), tedy dva páry, oproti Hráči 2, který má v současné chvíli (8♥, 8♦, 9♠, 10♣, J♣), tedy pár. Je zde několik karet, které hrají pro výhru druhého hráče, ale větší počet znamená jeho konec.

Bude tedy rychlejší zjistit, které karty a díky nim vzniklé kombinace Hráče 2 by znamenaly porážku Hráče 1. V první řadě jsou stále ve hře karty, které vytvoří druhému hráči postupku. Jedná se o karty hodnoty 7 a Q ve všech čtyřech barvách (8 možností). Dále pak je možnost, že Hráč 2 vyhraje s kombinací vyšších dvou párů. Pro tuto variantu by potřeboval některou z karet hodnoty 9, 10 nebo J. Těchto karet se v balíčku nachází 9, neboť jsou tam 3 barvy ke každé z uvedených hodnot (9 možností). Celkový počet vhodných karet pro Hráče 2 vedoucích k jeho výhře je tedy $8 + 9$, tedy 17.

Jednu z těchto 17 karet máme možnost rozdat z balíčku 44 karet a proto je pravděpodobnost této situace:

$$\frac{17}{44} = 0{,}38636$$

Ostatní karty potom znamenají výhru Hráče 1 a těchto karet je v balíčku $44 - 17$, tedy 27. Pravděpodobnost jeho výhry vypočítáme jako zlomek:

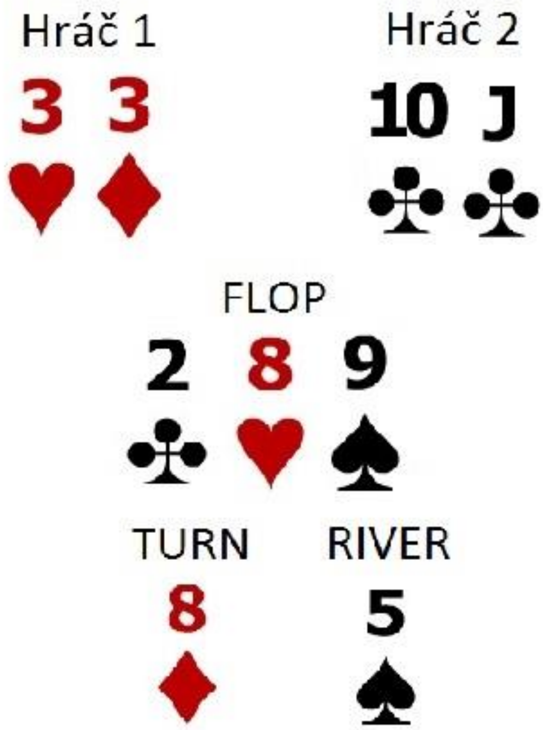
$$\frac{27}{44} = 0{,}61364$$

Opět neexistuje žádná varianta, která by znamenala remízu, což nám potvrzuje také součet vypočítaných pravděpodobností, který je roven jedné.

Kdybychom chtěli vyjádřit pravděpodobnost výhry jednotlivých hráčů v procentech, jako tomu bývá na pokerových turnajích, opět bychom museli výsledek vynásobit 100 a zjistili bychom, že Hráč 1 zvítězí s pravděpodobností 61,34% a Hráč 2 se stane vítězem ze 38,64%.

To znamená, že první hráč vyhraje přibližně ve třech z pěti duelů, zatímco druhý ve zbylých dvou případech. Při této informaci a znalosti výše potu by se dalo zjistit, při jak vysoké sázce by se Hráči 2 vyplatilo účastnit se hry i nadále a doufat, že přijde výherní kombinace právě jemu.

Podíváme se nyní, ke komu pošle výhru poslední společná karta, která je na riveru rozdána na stůl.



Karta 5♠ rozhodla, že výhru získává Hráč 1, neboť svojí výherní kombinací dva páry porazil pár soupeře.

Situace před flopem

Počítání pravděpodobnosti výhry psaním na papír a zadáváním výpočtů do kalkulačky je velmi zdlouhavý a náročný proces. Dříve nebyla jiná možnost, než postupovat tímto způsobem, ale v současné době, po mohutném rozvoji výpočetní techniky, se nám situace značně zjednodušila. Existuje mnoho kalkulaček na internetu určených k počítání pravděpodobnosti výhry v různých situacích. Program je většinou nastavený na libovolný počet hráčů, maximálně však pro 10 účastníků hry. Po zadání karet jednotlivých hráčů počítač ihned napíše pravděpodobnosti jejich výhry, respektive jaká je šance na remízu. To platí pro všechny situace – před flopem, na flopu, na turnu – a na riveru zjistíte, která kombinace vyhrává. Například v příkladu 2 nám pokerová kalkulačka udává, že v situaci před flopem je šance na výhru pro Hráče 1 rovna 46,05%, Hráč 2 zvítězí s pravděpodobností 52,81% a remíza nastane z 1,13%.

Náročnost výpočtu je také opodstatnění faktu, že zde nenacházíte žádný příklad věnovaný výpočtu pravděpodobnosti v situaci před flopem, tedy ve chvíli, kdy jsou rozdány pouze karty každému z hráčů. Pravděpodobnost výhry se v takovém případě různí v závislosti na počtu hráčů. Existuje několik tabulek, které udávají pravděpodobnost výhry před flopem jednotlivých karetních kombinací, které mohou být hráčům na začátku hry rozdány. Tato tabulka platí v situaci, kdy hráč neví, co mají za karty jeho protihráči, a rozhoduje se, zda se do hry zapojí.

Obr 7. počáteční kombinace

Základní strategie před flopem

	A	K	Q	J	10	9	8	7	6	5	4	3	2	
A	1	1	2	2	3	5	5	5	5	5	5	5	5	A
K	2	1	2	3	4	7	7	7	7	7	7	7	7	K
Q	3	4	1	3	4	5	7							Q
J	4	5	5	1	3	4	6	8						J
10	6	6	6	5	2	4	5	7						10
9	8	8	8	7	7	3	4	5	8					9
8				8	8	7	4	5	6	8				8
7							8	5	5	6	8			7
6								8	5	6	7			6
5									8	6	6	7		5
4										8	7	7	8	4
3												7	8	3
2													7	2
	A	K	Q	J	10	9	8	7	6	5	4	3	2	

Orientace v tabulce: Jestliže chcete zjistit, do jaké skupiny spadá například kombinace 10♣, J♣ musíme nejprve najít v řádcích najít pole označené 10. Dále pak nalezneme sloupec J, a kde se tento sloupec protne s původně zvoleným řádkem, je napsané číslo 3. Tato kombinace tedy spadá do relativně silné skupiny. Tento postup jsme volili z důvodu, že šlo o kombinaci karet jedné barvy (vyšší z karet nalezneme v řádcích, nižší mezi sloupci). Kdybychom však chtěli zjistit, kam spadá dvojice 10♦, J♥ (vyšší kartu volíme ve sloupcích a nižší v řádcích), v první řadě bychom nalezli kartu J mezi sloupci a následně ji spojili s řádkem označující kartu 10. Na průniku je nyní napsáno číslo 5 označující přesný průměr.

Tuto tabulku vytvořili slavní pokeroví teoretici David Sklansky a Mason Malmuth. Rozdělili tak karetní kombinace do devíti skupin, kde nižší číslo znamená lepší startovní kombinaci. Bílé místo označuje kombinace spadající do deváté, tedy nejhorší skupiny. Na různých pokerových turnajích si můžeme všimnout, že hráči opravdu zde uvedené nevýhodné kombinace v počátku hry ihned zahazují.[13]

V případě, že jsou karty všech hráčů známy, a my bychom přeci jen chtěli počítat pravděpodobnost výhry v situaci před flopem ručně, museli bychom porovnávat všechny možné kombinace, které mohou přijít na stůl, a zjišťovat, který z hráčů vyhraje. Těchto kombinací je ovšem velmi mnoho. Vraťme se nyní k situaci pouhých dvou hráčů. Jsou tedy rozdány 4 karty a v balíčku jich zbývá 48. Na první kartu tedy připadá právě 48 možností výběru. Dále pak pro druhou kartu 47 možností a na třetí jich zbývá 46. To bychom měli rozdány karty na flopu, avšak v tuto chvíli chceme zjistit pravděpodobnost výhry. Proto musíme počítat se všemi pěti společnými kartami, kde na rozdání čtvrté máme 45 možností a na pátou již zůstalo pouhých 44 karet. Nezáleží ovšem na tom, v jakém pořadí přijdou, proto počet kombinací musíme vydělit počtem všech jejich uspořádání, tedy číslem 5!.

Výpočet všech možných kombinací, které mohou přijít jako společné karty:

$$\frac{48 * 47 * 46 * 45 * 44}{5!} = 1\ 712\ 304$$

To je opravdu nepřeberné množství možností a bez počítače by bylo časově velmi náročné všechny tyto případy porovnávat. Ovšem pro uvědomění si, jakým způsobem se pravděpodobnost výhry v pokerových turnajích počítá, je i toto přínosný příklad.

Všech 1 712 304 kombinací by se rozdělilo na počet, který přináší výhru prvnímu hráči, a zbylé možnosti pak hrají proti němu. Jinými slovy, počítač vyzkouší každou z 1 712 304 možností a ohodnotí, zda při této variantě vyhraje první nebo druhý hráč, nebo dojde k remíze. Na základě tohoto rozhodnutí zařadí tuto možnost do jedné ze tří skupin (výhra Hráče 1, výhra Hráče 2, remíza). Jelikož pro současné počítače není problém analyzovat velmi rychle všechny možnosti, tak lze jednoduše naprogramovat výše zmíněné pokerové kalkulačky. Pravděpodobnost výhry potom je dána vztahem:

$$\frac{počet\ vhodných\ kombinací}{počet\ všech\ možných\ kombinací}$$

Takto bychom zjistili pravděpodobnosti výhry každého z hráčů.

4 Využití ve výuce na SŠ

V rámci středních škol se obvykle ve třetím ročníku setkávají studenti s kombinatorikou. Konkrétně potom s definicemi variací, permutací a kombinací a příklady, které se týkají těchto témat. Dozví se dále, jak je definován faktoriál, jehož znalost je nezbytná k počítání kombinatorických příkladů. U kombinačních čísel se učí o jejich vlastnostech a také například o existenci Pascalova trojúhelníku. V neposlední řadě se potom učitelé některých středních škol věnují také binomické větě.[5]

Cílem výuky kombinatoriky na SŠ je nepochybně dovednost studentů rozpoznat, o jakou kombinatorickou skupinu (variace, permutace, kombinace) se v příkladech jedná. Dále pak umí aplikovat vzorec, respektive vymyslet, jakým způsobem se daný příklad počítá – k tomuto procesu využijí znalost faktoriálu a vlastností kombinačních čísel.

Existuje mnoho příkladů zaměřených na výpočtu, kolika různými způsoby lze sestavit několikačlenný tým, jaké jsou možnosti uspořádání nesourodé řady a podobně. V rámci výuky se objevují také úlohy, ve kterých se ptáme na pravděpodobnost, s jakou nastane nějaký daný jev (např. pravděpodobnost vylosování bílé koule z osudí, ve kterém jsou černé a bílé koule v nějakém poměru, nebo může jít o výpočet pravděpodobnosti, s jakou rozdáme mezi pěti kartami z balíčku 52 například 4 shodné).

V tuto chvíli se dostáváme k využití teorie uvedené v kapitole 3.1, jež se věnuje právě výpočtům pravděpodobností jednotlivých výherních kombinací v pokeru. Takový příklad může být pro studenty velmi zajímavý, neboť jim bude připadat využitelný v reálném životě. Ještě více někteří ocení, když půjdeme více do hloubky a využijeme některý z příkladů v kapitole 3.2. Aby byly tyto příklady pochopeny, zabere jejich výklad nějaký čas, kterého z různých důvodů nemusí mít učitel nazbyt. Avšak správně volené příklady s krátkým úvodem ohledně pravidel pokeru, to by mohlo studentům příjemně zpestřit výuku.

5 Závěr

Tato Bakalářská práce poskytuje teoretické zázemí pro karetní hru poker. V úvodní části je uvedena stručná historie, jak se poker vyvíjel v průběhu let a také jeho současná podoba. Součástí úvodních podkapitol je také přehled všech výherních kombinací, včetně jejich stručného popisu a rozřešení situace, kdy nastane remíza.

Druhá část se zabývá matematickými aspekty pokeru, konkrétně výpočty pravděpodobností vzniku každé z výherních kombinací při rozdání pěti náhodných karet. Situace je rozdílná, zvolíme-li k rozdávání balíček obsahující 32 karet, oproti variantě s 52 kartami.

Nejzajímavější částí této práce je dozajista počítání pravděpodobnosti výhry, které můžeme vidět na velkých pokerových turnajích v televizi. Kromě nástinu situace před flopem ve stejnojmenné kapitole, zde můžete nalézt dva konkrétní příklady k situacím na flopu a na turnu.

Poslední kapitola je věnována krátkému povídání o využití pravděpodobnosti v pokeru při výuce kombinatoriky na středních školách.

6 Seznam použité literatury

[1] Du COEUR, Justin. Game report: Primero. In: *jducoeur.com*[online]. [cit. 22. 2. 2016]. Dostupné z: http://jducoeur.com/game-hist/game-recon-primero.html

[2] GIROLAMO, Zorli. Cardan's Primero game. In: *tretre.it* [online]. [cit. 22. 2. 2016]. Dostupné z: http://www.tretre.it/menu/accademia-del-tre/documenti-e-articoli/cardans-primero-game-1530-ca/#c2048

[3] McLEOD, John. A History of Poker. In*: pagat.com* [online]. [cit. 9. 3. 2016]. Dostupné z: https://www.pagat.com/poker/history.html

[4] McLEOD, John. Poch / Le Poque. In*: pagat.com* [online]. [cit. 7. 3. 2016]. Dostupné z: https://www.pagat.com/stops/poch.html

[5] STRNADOVÁ, Pavlína. Způsob výuky kombinatoriky na střední škole a jeho vliv na řešitelské strategie žáků. MFF UK, Praha. 2014

[6] As-Nas. In*: en.wikipedia.org* [online]. Wikipedia The Free Encyclopedia. [cit. 22. 2. 2016]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/As-Nas

[7] As Nas. In*: poker.wikia.com* [online]. Wikia. [cit. 22. 2. 2016]. Dostupné z: http://poker.wikia.com/wiki/As_Nas

[8] Five Card Draw Poker. In*: poker24.cz* [online]. Poker24.cz 1. československý poker web. [cit. 14. 5. 2016]. Dostupné z: http://www.poker24.cz/5-card-draw

[9] Historie pokeru. In*: cardcasino.com* [online]. CardCasino. [cit. 22. 2. 2016]. Dostupné z: https://www.cardcasino.com/poker-history

[10] History of Poker. In*: cardschat.com* [online]. [cit. 7. 3. 2016]. Dostupné z: https://www.cardschat.com/poker-history.php/

[11] Poker. In*: cs.wikipedia.org* [online]. Wikipedie Otevřená encyklopedie. [cit. 9. 3. 2016]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Poker

[12] Poker pravidla. In*: pokerpravidla.cz* [online]. [cit. 14. 5. 2016]. Dostupné z: http://www.pokerpravidla.cz/category/poker-pravidla/

[13] Startovní kombinace v Texas hold'em pokeru. In*: cz.wikipedia.org* [online]. Wikipedie Otevřená encyklopedie. [cit. 14. 5. 2016]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Startovn%C3%AD_kombinace_v_Texas_hold_%27em_pokeru