Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Jan Bártek

Geometrický Brownův pohyb v Hilbertově prostoru

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Bohdan Maslowski, DrSc.,
Matematický ústav AV ČR

Studijní program: Matematika
Studijní obor: Pravděpodobnost, matematická statistika a ekonometrie

Děkuji vedoucímu práce Doc. RNDr. Bohdanu Maslowskému, DrSc. za cenné rady a návrhy na vylepšení práce.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 5. 8. 2009 Jan Bártek

Obsah

Název práce: Geometrický Brownův pohyb v Hilbertově prostoru
Autor: Jan Bártek
Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Bohdan Maslowski, DrSc., Matematický ústav AV ČR
e-mail vedoucího: maslow@math.cas.cz

Abstrakt: Tato práce popisuje vztah mezi řešením jistého typu nelineární stochastické parciální diferenciální rovnice s multiplikativním šumem, kdy řídícím procesem je frakcionální Brownův pohyb (fBm), a řešením její deterministické verze. Řešení stochastické rovnice je explicitně vyjádřeno pomocí řešení deterministické rovnice a trajektorií fBm. Klíčovou roli hraje tzv. geometrický frakcionální Brownův pohyb. Řešení se uvažují v silném i slabém smyslu. Integrál podle fBm s Hurstovým indexem H lze definovat různými způsoby. Zde je pro hodnoty $H > 1/2$ uvažován integrál Stratonovičova typu. Získaný vztah je použit ke zkoumání některých vlastností řešení stochastické rovnice difúze v porézním prostředí – střední hodnoty hmoty řešení a limitního chování pro velké časy.
Klíčová slova a fráze: Frakcionální Brownův pohyb, řešení stochastické diferenciální rovnice, Itôova formule

Title: Geometric Brownian motion in Hilbert space
Author: Jan Bártek
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics,
Supervisor: Doc. RNDr. Bohdan Maslowski, DrSc.
Supervisor's e-mail address: maslow@math.cas.cz

Abstract: The present work describes the relation between solutions of a special kind of nonlinear stochastic partial differential equation with multiplicative noise, driven by fractional Brownian motion (fBm), and the solutions of deterministic version of this equation. Solution of the stochastic equation is given explicitly by means of solution to the deterministic equation and trajectories of fBm. The geometric fractional Brownian motion plays an important role here. The solutions are considered both in strong and weak sense. Stochastic integral wrt. fBm with Hurst index H can be defined in various ways. Here we consider a Stratonovich type integral for $H > 1/2$. The results obtained are used for the study of properties of solution of stochastic porous media equation – the expected value of total mass of the solution and the long-time behaviour of the solution.
Keywords: Fractional Brownian motion, solution of stochastic differential equation, the Itô formula

Úvod

Inspirací této diplomové práce je článek [6] S. Lototského, ve kterém je studován vztah mezi řešeními deterministické parciální diferenciální rovnice

$$v_t = F(v, Dv, D^2v, \ldots),$$

kde F je tzv. homogenní funkce, a její stochastické verze

$$\mathrm{d}u = F(u, Du, D^2u, \ldots)\,\mathrm{d}t + u(f(t)\,\mathrm{d}W(t) + g(t)\,\mathrm{d}t), \tag{1}$$

kde W je standardní Brownův pohyb a rovnice je chápána v Itôově smyslu. Výsledky ukazují, že za jistých předpokladů je mezi řešeními těchto dvou rovnic vzájemně jednoznačný vztah, vyjádřený explicitní formulí. Důležitou roli v tomto vztahu hraje tzv. geometrický Brownův pohyb.

Nabízí se otázka, jestli existuje podobný vztah i v situaci, kdy je stochastická rovnice řízena frakcionálním Brownovým pohybem (fBm) s Hurstovým indexem H. Situaci zde ztěžuje poměrně komplikovaná teorie integrace podle fBm. Přirozenou analogií rovnice (1) by bylo použití Skorochodova stochastického integrálu, který jistým způsobem odpovídá Itôovu stochastickému integrálu pro Brownův pohyb. Při této volbě však narazíme na potíže v podobě dosti komplikovaného tvaru Itôovy formule. V této práci se proto vydáme, pro hodnoty $H > 1/2$, cestou stochastického integrálu definovaného po trajektoriích, který je obdobou Stratonovičova integrálu.

Rovnice tohoto typu nebyly dosud studovány. Jistou výjimkou jsou práce [3] a [10], které pojednávají ale jen o lineárním případě (v případě práce [10] může být (fBm) závislý i na prostorové proměnné).

Práce je členěna do čtyř kapitol. V první kapitole je definován frakcionální Brownův pohyb a jsou zde uvedeny některé jeho základní vlastnosti. Hlavním zdrojem informací první kapitoly jsou knihy [2] a [9]. Ve druhé kapitole je s využitím frakcionálního kalkulu zaveden stochastický integrál a zformulována příslušná Itôova formule. Hlavním zdrojem informací pro druhou kapitolu je článek [7] a kniha [9]. Třetí kapitola je členěna do dvou sekcí. V první je ukázáno, že pro bilineární rovnici platí stejný vztah mezi řešeními jako v "nefrakcionálním" případě (Věta 3.2) a že pro nelineární homogenní rovnici plyne existence řešení stochastické rovnice z existence řešení rovnice deterministické (Věta 3.1). Zde jsou uvažována klasická řešení. Ve druhé sekci ukážeme existenci explicitní formule pro vztah mezi zobecněnými řešeními deterministické a stochastické rovnice porézního prostředí (porous medium equation, pme) (Věta 3.3), literaturou pro kapitolu tři jsou články [1], [6] a kniha [11]. Poslední kapitola je rozdělena do tří částí. V první jsou uvedeny některé vlastnosti důležitého Barenblattova (nebo anglicky také source-type solution, neboť v čase 0 je násobkem Diracovy míry) řešení pme. Ve druhé a třetí sekci jsou odvozeny některé vlastnosti řešení stochastické verze pme zkonstruovaných pomocí výsledků z předchozí kapitoly. Konkrétně ve druhé sekci se zabýváme střední hodnotou celkové hmoty řešení (na Příkladu 4.1 můžeme vidět, že i pro velké časy rychle degenerující šum může ovlivnit asymptotické chování střední hodnoty řešení) a ve třetí sekci zkoumáme limitní chování některých řešení pro velké časy (Tvrzení 4.1-3 a Důsledky 4.1-2). Literaturou k poslední kapitole je [1], [2], [4], [6] i [11].

Rovnice porézního prostředí je rovnice tvaru

$$v_t = \Delta(v^m)$$

a v závislosti na hodnotě parametru m popisuje různé fyzikální děje. Například vedení tepla, proudění plynu v porézním prostředí, prosakování podzemní vody, radiaci plazmatu, šíření populace a další. Studium vlastností její stochastické verze je aktuální téma.

Výsledky obsažené v diplomové práci úzce souvisejí s grantovým projektem GAČR č. 201/07/0237.

Kapitola 1

Frakcionální Brownův pohyb

Definice 1.1. Nechť $H \in (0,1)$ je konstanta. *(Skalární) frakcionální Brownův pohyb (fBm) s Hurstovým parametrem H* je spojitý centrovaný stochastický gaussovský proces $(B^{(H)}(t))_{t\geq 0}$ s kovarianční funkcí

$$\mathbb{E}\Big[B^{(H)}(t)B^{(H)}(s)\Big] = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}).$$

Pro hodnotu Hurstova parametru $H = 1/2$ je fBm standardní Brownův pohyb. Přímo z Definice 1.1 vyplývá, že fBm $B^{(H)}$ má následující vlastnosti:

1. $B^{(H)}(0) = 0$ a $\mathbb{E}[B^{(H)}(t)] = 0 \quad \forall t \geq 0$.

2. $B^{(H)}$ je gaussovský proces a $\mathbb{E}[B^{(H)}(t)]^2 = t^{2H}$, $t \geq 0$, $H \in (0,1)$.

3. $B^{(H)}$ má stacionární přírůstky, tj. $B^{(H)}(t+s) - B^{(H)}(s)$ má stejné rozdělení jako $B^{(H)}(t)$ pro $t, s \geq 0$, platí totiž:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[B^{(H)}(t+s) - B^{(H)}(s)]^2 &= \mathbb{E}[B^{(H)}(t+s)]^2 + \mathbb{E}[B^{(H)}(s)]^2 - 2\,\mathbb{E}[B^{(H)}(t+s) \cdot \\ &\cdot\ B^{(H)}(s)] = (t+s)^{2H} + s^{2H} - ((t+s)^{2H} + s^{2H} \\ &-\ |t+s-s|^{2H}) = t^{2H} = \mathbb{E}[B^{(H)}(t)]^2\end{aligned}$$

4. $B^{(H)}$ má spojité trajektorie.

V dalším budeme $B^{(H)}$ uvažovat na fixovaném filtrovaném pravděpodobnostním prostoru $\mathbb{F} = (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ splňujícím obvyklé podmínky úplnosti $\mathcal{F}$ a spojitosti zprava $\mathcal{F}_t$ a $B^{(H)}$ je $\mathcal{F}_t$-adaptovaný. Frakcionální Brownův pohyb má celou řadu zajímavých vlastností. Zde jich několik stručně a převážně bez důkazů uvedeme, zdrojem těchto a mnoha dalších informací o fBm jsou knihy [2] a [9], kde může případný zájemce nalézt podrobnosti.

1. Reprezentace stochastickým integrálem
   fBm lze vyjádřit jako Itôův stochastický integrál podle standardního Brownova pohybu $(B_t)_{t\geq 0}$:

$$B^{(H)}(t) = \int_0^t K_H(t,s)\,\mathrm{d}B(s), \qquad t \geq 0,$$

   kde pro $H > 1/2$

$$K_H(t,s) = c_H s^{1/2-H} \int_s^t |u-s|^{H-3/2} u^{H-1/2}\,\mathrm{d}u,$$

kde $c_H = [H(2H-1)/\beta(2-2H, H-1/2)]^{1/2}$ a $t > s$, β je beta funkce, a pro $H < 1/2$

$$K_H(t,s) = b_H\left[\left(\frac{t}{s}\right)^{H-1/2}(t-s)^{H-1/2} - \left(H-\frac{1}{2}\right)s^{1/2-H}\int_s^t (u-s)^{H-1/2}u^{H-3/2}\,\mathrm{d}u\right],$$

kde $b_H = [2H/((1-2H)\beta(1-2H, H+1/2))]^{1/2}$ a $t > s$.

2. Korelace mezi přírůstky
   Pro $H \neq 1/2$ jsou přírůstky fBm korelované. Přesněji, kovariance mezi $B^{(H)}(t+h) - B^{(H)}(t)$ a $B^{(H)}(s+h) - B^{(H)}(s)$, kde $s+h \leq t$ a $t - s = nh$, je

   $$\rho_H(n) = \frac{1}{2}h^{2H}[(n+1)^{2H} + (n-1)^{2H} - 2n^{2H}].$$

   Speciálně, přírůstky typu $B^{(H)}(t+h) - B^{(H)}(t)$ a $B^{(H)}(t+2h) - B^{(H)}(t+h)$ jsou pozitivně korelované pro $H > 1/2$ a negativně korelované pro $H < 1/2$.

3. Soběpodobnost
   Pro každou hodnotu $a > 0$ mají procesy $(B^{(H)}(at), t \geq 0)$ a $(a^H B^{(H)}(t), t \geq 0)$ stejné rozdělení.

4. Hölderovská spojitost trajektorií
   Tato vlastnost bude zvláště důležitá pro definování stochastického integrálu. Připomeňme, že funkce $f : I \to \mathbb{R}$, kde $I \subset \mathbb{R}$ je interval, je hölderovsky spojitá stupně $0 < \alpha \leq 1$ (α-hölderovská), jestliže

   $$\|f\|_\alpha := \sup_{t\in I}|f(t)| + \sup_{t,s\in I}\frac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|^\alpha} < \infty.$$

   Množinu α-hölderovských funkcí na intervalu I značíme $C^\alpha(I)$. Dále označme $C^{\beta-}(I) = \bigcap\limits_{0<\alpha<\beta} C^\alpha(I)$.

Věta 1.1. *Nechť $H \in (0,1)$. Existuje modifikace fBm, jejíž trajektorie jsou skoro jistě α-hölderovsky spojité pro každé $0 < \alpha < H$.*

Důkaz.
Podle Kolmogorovova kriteria má proces $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ spojitou modifikaci, jestliže pro každý kompaktní interval $K \subset \mathbb{R}$ existují konstanty $\alpha \geq 1$, $\beta > 0$ a $k > 0$ tak, že

$$\mathbb{E}[|X(t) - X(s)|^\alpha] \leq k|t-s|^{1+\beta}, \qquad t, s \in K,$$

a trajektorie této modifikace jsou lokálně γ-hölderovsky spojité pro každé $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$.
Pro každé $\alpha > 0$ máme

$$\mathbb{E}\Big[|B^{(H)}(t) - B^{(H)}(s)|^\alpha\Big] = \mathbb{E}\Big[|B^{(H)}(1)|^\alpha\Big]|t-s|^{\alpha H},$$

takže podle Kolmogorovova kritéria dostáváme hölderovskou spojitost trajektorií $B^{(H)}$ řádu menšího než H, tj. $B^{(H)} \in C^{H-}([0,T])\ \forall T > 0$.

□

5. Platí zákon iterovaného logaritmu, viz [5], tj.

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B^{(H)}(t)}{(2t^{2H}\log\log t)^{\frac{1}{2}}} = K_H \quad \mathbb{P}\text{-}s.j., \tag{1.1}$$

kde K_H je konstanta, která závisí jen na H.

6. Konečná $1/H$-variace

Definice 1.2. Nechť $(X(t))_{t\in[0,T]}$ je stochastický proces a $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T\}$ je dělení intervalu $[0,T]$. Položme

$$\mathcal{S}(X,\pi,\psi(x)) := \sum_{k=1}^{n} \psi(X(t_k) - X(t_{k-1})).$$

Potom *p-variace* X přes interval $[0,T]$ je definována jako

$$\mathcal{V}_p(X,[0,T]) := \sup_{\pi} \mathcal{S}(X,\pi,|x|^p),$$

kde π je konečné dělení $[0,T]$. *Index p-variace* procesu X je definován jako

$$I(X,[0,T]) := \inf\{p > 0; \mathcal{V}_p(X,[0,T]) < \infty)\}.$$

Pro fBm $\{B^{(H)}(t), t \geq 0\}$ s Hurstovým indexem $H \in (0,1)$ a pro $p > 0$ uvažujme sumy

$$S_{n,p}(t) = \sum_{j=1}^{2^n} \left| B^{(H)}_{\frac{jt}{2^n}} - B^{(H)}_{\frac{(j-1)t}{2^n}} \right|^p \cdot 2^{n(pH-1)} \tag{1.2}$$

a

$$\tilde{S}_{n,p} = 2^{-n} \sum_{j=1}^{2^n} \left| B^{(H)}_{jt} - B^{(H)}_{(j-1)t} \right|^p.$$

Rozdělení $S_{n,p}(t)$ a $\tilde{S}_{n,p}$ je díky vlastnosti soběpodobnosti fBm stejné. Posloupnost $\{B^{(H)}_{kt} - B^{(H)}_{(k-1)t}\}_{k\in\mathbb{N}}$ je stacionární a ergodická, viz [8]. Tudíž, podle ergodické věty,

$$\tilde{S}_{n,p}(t) \to \mathbb{E}|B^{(H)}(t)|^p =: C_p t^{pH} \quad \text{pro} \quad n \to \infty$$

s pravděpodobností 1 a v $L_1(\mathbb{P})$, z čehož plyne

$$S_{n,p}(t) \xrightarrow{d} C_p t^{pH},\ n \to \infty$$

a

$$S_{n,p}(t) \xrightarrow{\mathbb{P}} C_p t^{pH},\ n \to \infty. \tag{1.3}$$

Z (1.2) a (1.3) dostáváme

$$\sum_{j=1}^{2^n} \left| B^{(H)}_{\frac{jt}{2^n}} - B^{(H)}_{\frac{(j-1)t}{2^n}} \right|^p \xrightarrow{\mathbb{P}} \begin{cases} 0, & p > \frac{1}{H}, \\ +\infty, & p < \frac{1}{H}, \\ \mathbb{E}|B^{(H)}(t)|^{1/H}, & p = 1/H. \end{cases} \tag{1.4}$$

Uvažujme nyní $t = 1$ a označme $\Pi(\delta)$ množinu všech dělení π intervalu $[0,1]$ s $|\pi| < \delta$, kde $|\pi| := \sup\{t_j - t_{j-1}\}$ je norma dělení π. Z (1.4) ihned dostáváme, že

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{\pi \in \Pi(\delta)} \mathcal{S}(B^{(H)}, \pi, |x|^p) = +\infty$$

s pravděpodobností 1 pro $p < 1/H$.
Pro $p > 1/H$ platí $\mathcal{V}_p(B^{(H)}, [0,1]) = 0$ s pravděpodobností 1, viz [9], Věta 1.18.1-3. Celkově dostáváme

$$I(B^{(H)}, [0,1]) = \frac{1}{H}. \tag{1.5}$$

7. Lévyho věta
Pro situaci $H = 1/2$ platí známá Lévyho věta:

Věta 1.2. *Nechť $\{\mu(t),\, t \geq 0\}$ je spojitý lokální martingal s kvadratickou variací $\langle \mu \rangle_t = t$. Potom μ_t je Wienerův proces.*

Ukazuje se, že i fBm lze charakterizovat podobným způsobem, viz [9], Věta 1.19.2. Nechť $\{X_t,\, t \geq 0\}$ je náhodný proces definovaný na stochastické bázi $\{\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P}\}$. Pro $t > 0$ označme $t_k := t\frac{k}{n},\ 1 \leq k \leq n$. Platí následující věta

Věta 1.3. *Nechť proces X_t splňuje následující podmínky:*

(a) trajektorie X jsou γ-hölderovsky spojité pro každé $0 < \gamma < H$, kde $0 < H < 1$,

(b)

$$n^{2\alpha} \sum_{k=1}^{n} (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2 \to t^{2\alpha+1}$$

pro každé $t > 0$ v prostoru $L_1(\mathbb{P})$ při $n \to \infty$,

(c) proces

$$M_t := \int_0^t s^{-\alpha}(t-s)^{-\alpha}\, \mathrm{d}X_s$$

je $\mathcal{F}_t$-adaptovaný spojitý L_2-martingal, kde $\alpha = H - 1/2$.

Potom X_t je $\mathcal{F}_t$-adaptovaný fBm s Hurstovým indexem H.

Poznámka
Integrál $\int \cdot\, \mathrm{d}X$ z předchozí věty je tzv. Wienerův integrál a v této práci se mu věnovat nebudeme, je nicméně zaveden v mnoha učebnicích stochastického kalkulu pro fBm, viz také [2], Definice 2.1.3, nebo [9], Definice 1.6.1.

Kapitola 2

Integrál vzhledem k fBm

Stochastický integrál pro frakcionální Brownův pohyb lze zavést různými způsoby. Zde budeme předpokládat, že hodnota Hurstova indexu $H > 1/2$, a definujeme integrál po trajektoriích pomocí frakcionálního kalkulu, viz. např. [7], [2], Appendix B, a [9], kapitola 1 a 2.

Nechť $\alpha \in (0,1)$. Řekneme, že funkce $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ má Weylovu derivaci $D^{\alpha}_{0+}f$,

$$D^{\alpha}_{0+}f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{f(t)}{t^{\alpha}} + \alpha\int_0^t \frac{f(t)-f(\lambda)}{(t-\lambda)^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}\lambda\right),$$

jestliže integrál napravo existuje pro skoro všechna $t \in (0,T)$, kde Γ je Eulerova gamma funkce. Analogicky definujeme $D^{\alpha}_{T-}f(t)$ jako

$$D^{\alpha}_{T-}f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{f(t)}{(T-t)^{\alpha}} + \alpha\int_t^T \frac{f(t)-f(\lambda)}{(\lambda-t)^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}\lambda\right).$$

Weylovy derivace jsou inverzemi k následujícím frakcionálním integrálům. Předpokládejme, že $\phi \in L^1([0,T])$. Levostranný, resp. pravostranný frakcionální Riemannův-Liouvillův integrál ϕ stupně α je definován pro skoro všechna $t \in (0,T)$ rovností

$$I^{\alpha}_{0+}\phi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\lambda)^{\alpha-1}\phi(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda,$$

resp.

$$I^{\alpha}_{T-}\phi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^T (t-\lambda)^{\alpha-1}\phi(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda.$$

Předpokládejme, že $f = I^{\alpha}_{0+}\phi$, kde $\phi \in L^1([0,T])$. Potom Weylova derivace f existuje a $D^{\alpha}_{0+}f = \phi$. Podobný vztah platí i pro pravostranný frakcionální integrál.

Nechť $W^{\alpha,1}(0,T)$ je prostor měřitelných funkcí $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ takových, že

$$|f|_{\alpha,1} := \int_0^T \left(\frac{|f(s)|}{s^{\alpha}} + \int_0^s \frac{|f(s)-f(\lambda)|}{(s-\lambda)^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{d}s < \infty,$$

kde $0 < \alpha < 1/2$ je pevné. Dále nechť g je spojitá funkce na $[0,T]$ taková, že $\Lambda_{\alpha}(g) < \infty$, kde

$$\Lambda_{\alpha}(g) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}\sup_{0<s<t<T}\left(\frac{|g(t)-g(s)|}{(t-s)^{1-\alpha}} + \int_s^t \frac{|g(\lambda)-g(s)|}{(\lambda-s)^{2-\alpha}}\,\mathrm{d}\lambda\right).$$

Nyní můžeme definovat zobecněný Stieltjesův integrál $\int_0^T f\,\mathrm{d}g$ funkce f podle g jako

$$\int_0^T f\,\mathrm{d}g := \int_0^T D^{\alpha}_{0+}f(s)D^{1-\alpha}_{T-}g_{T-}(s)\,\mathrm{d}s, \tag{2.1}$$

kde $g_{T-}(t) = g(t) - g(T)$. Při výše uvedených předpokladech integrál $\int_0^T f\,\mathrm{d}g$ nezávisí na volbě α (se kterým f a g splňují výše uvedené předpoklady), integrál $\int_0^t f\,\mathrm{d}g$ existuje pro všechna $t \in [0,T]$ a platí

$$\int_0^t f\,\mathrm{d}g = \int_0^T f 1_{(0,t)}\,\mathrm{d}g.$$

Navíc platí následující odhad

$$\left| \int_0^t f\,\mathrm{d}g \right| \leq \Lambda_\alpha(g) |f|_{\alpha,1}, \qquad t \in [0,T].$$

Následující lemma popisuje integrál $\int_0^t f\,\mathrm{d}g$ coby funkci horní meze v případě, že f i g jsou hölderovské funkce. Důkaz a další detaily lze nalézt v [9], Lemma 2.1.9.

Lemma 2.1. *Nechť $f \in C^{\alpha+\varepsilon}([0,T])$, $g \in C^{1-\alpha+\varepsilon}([0,T])$, pro nějaké $0 < \varepsilon < \alpha \wedge (1-\alpha)$, a nechť $G(t) := \int_0^t f\,\mathrm{d}g$. Potom $G \in C^{1-\alpha}([0,T])$.*

Poznámka
Integrál $\int f\,\mathrm{d}g$ v předchozím lemmatu je dobře definován, neboť $C^{\alpha+\varepsilon}([0,T]) \subset W^{\alpha,1}(0,T)$ a $\Lambda_\alpha(g) < \infty$ pro každou $g \in C^{1-\alpha+\varepsilon}([0,T])$, $\varepsilon > 0$. Podrobnosti opět viz. [9].

Pro f a g hölderovské funkce existuje $\int f\,\mathrm{d}g$ i jako tzv. Riemann-Stieltjesův integrál. Přesně to popisuje následující věta, podrobnosti a důkaz viz [9], Věta 2.1.7.

Věta 2.1. *Nechť $f \in C^\lambda([a,b])$, $g \in C^\mu([a,b])$, $\lambda + \mu > 1$, a $\pi_n = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ je posloupnost dělení intervalu $[a,b]$ s $|\pi_n| \to 0$, $n \to \infty$. Potom*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(g(x_k) - g(x_{k-1})).$$

Nyní již můžeme definovat integrál podle $B^{(H)}$.

Definice 2.1. Nechť frakcionální Brownův pohyb $B^{(H)}$ je definován na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a nechť Hurstův index $H \in (1/2, 1)$. Pro funkci $f \in W^{\alpha,1}(0,T)$, kde $\alpha \in (1-H, 1/2)$, budeme integrál

$$\int_0^T f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s)$$

chápat ve smyslu definovaném rovností (2.1) po trajektoriích, což má smysl, protože $\Lambda_\gamma(B^{(H)}) < \infty$ $\mathbb{P}$-s.j. $\forall \gamma \in (1-H, 1/2)$.

Právě definovaný integrál je integrálem Stratonovičova typu, nebo se také nazývá symetrický integrál.

Na následujících řádcích uvedeme tvar Itôovy formule pro takto definovaný stochastický integrál, nejprve nejjednodušší verzi i s důkazem a poté verzi, kterou budeme potřebovat v dalších kapitolách, další podrobnosti a důkazy lze nalézt v [9], Lemma 2.7.1, Věta 2.7.2, Věta 2.7.3 a Poznámka 2.7.4.

Věta 2.2. *Nechť $B^{(H)}$ je fBm s $H \in (1/2, 1)$, $F \in C^2(\mathbb{R})$. Potom pro každé $t > 0$ platí*

$$F(B_t^{(H)}) = F(0) + \int_0^t F'(B_u^{(H)})\,\mathrm{d}^\circ B_u^{(H)}.$$

Důkaz.
Podle Taylorovy formule s integrálním tvarem zbytku platí

$$F(x) = F(y) + F'(y)(x-y) + \int_y^x F''(u)(x-u)\,\mathrm{d}u.$$

Nechť $\pi_n = \{0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{k_n}^n = t\}$ je posloupnost dělení taková, že $|\pi_n| \to 0$ pro $n \to \infty$. Potom

$$F(B_t^{(H)}) - F(0) = \sum_{k=1}^{k_n} [F(B_{t_k^n}^{(H)}) - F(B_{t_{k-1}^n}^{(H)})] = \sum_{k=1}^{k_n} F'(B_{t_{k-1}^n}^{(H)})(B_{t_k^n}^{(H)} - B_{t_{k-1}^n}^{(H)}) + R_t^n,$$

kde

$$R_t^n = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{B_{t_{k-1}^n}^{(H)}}^{B_{t_k^n}^{(H)}} F''(u)(B_{t_k^n}^{(H)} - u)\,\mathrm{d}u.$$

Dále, protože $F \in C^2(\mathbb{R})$, máme $\sup\limits_{0 \le u \le t} |F''(B_u^{(H)})| < \infty$ s.j. a pro $H \in (1/2, 1)$ díky (1.5) platí

$$\mathbb{P}\text{-}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left| B_{t_k^n}^{(H)} - B_{t_{k-1}^n}^{(H)} \right|^2 = 0.$$

Tudíž

$$|R_t^n| \le \frac{1}{2} \sup_{0 \le u \le t} |F''(B_u^{(H)})| \sum_{k=1}^{k_n} \left| B_{t_k^n}^{(H)} - B_{t_{k-1}^n}^{(H)} \right|^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

a podle Věty 2.1 máme konvergenci sumy $\sum\limits_{k=1}^{k_n} F'(B_{t_{k-1}^n}^{(H)})(B_{t_k^n}^{(H)} - B_{t_{k-1}^n}^{(H)})$ k $\int_0^t F'(B_u^{(H)})\,\mathrm{d}^\circ B_u^{(H)}$ a celkově dostáváme

$$F(B_t^{(H)}) - F(0) = \int_0^t F'(B_u^{(H)})\,\mathrm{d}^\circ B_u^{(H)}.$$

□

Věta 2.3. *Nechť* $Y_t^i = \int_0^t f_i(s)\,\mathrm{d}B_s^{(H_i)}$, *kde* $H_1 = 1/2$, $H_i \in (1/2, 1)$, $2 \le i \le m-1$, $Y_t^m = \int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s$, $\int_0^t f_1^2(s)\,\mathrm{d}s < \infty$ *s.j.,* $f_i \in C^{\beta_i}[0,t]$ *s.j. pro* $\beta_i + H_i > 1$, $\int_0^t |g(s)|\,\mathrm{d}s < \infty$ *s.j.,* $F = F(t,x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F \in C^1(\mathbb{R}_+) \times C^2(\mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R}^{n-1})$, *integrály* $\int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(Z_s) f_1(s) \right)^2 \mathrm{d}s$, $\int_0^t |\frac{\partial F}{\partial t}(Z_s)|\,\mathrm{d}s$, $\int_0^t |\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(Z_s)| f_1^2(s)\,\mathrm{d}s$ *a* $\int_0^t |\frac{\partial F}{\partial x_m}(Z_s) g(s)|\,\mathrm{d}s$ *jsou konečné skoro jistě,* $\frac{\partial F}{\partial x_i}(Z_s) f_i \in C^\gamma[0,t]$ *s.j. pro* $\gamma + H_i > 1$ *a každé* $t > 0$, *kde* $Z_s = (s, Y_s^1, \ldots, Y_s^m)$.
Potom

$$\begin{aligned} F(t, Y_t^1, \ldots, Y_t^m) &= F(0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(Z_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_1}(Z_s) f_1(s)\,\mathrm{d}B_s^{(H_1)} \\ &+ \sum_{i=2}^{m-1} \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(Z_s) f_i(s)\,\mathrm{d}^\circ B_s^{(H_i)} + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_m}(Z_s) g(s)\,\mathrm{d}s \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(Z_s) f_1^2(s)\,\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Poznamenejme, že integál podle $B^{(H_1)}$ v rovnosti (2.2) je Itôovým integrálem, integrály podle $B^{(H_2)}$ až $B^{(H_{m-1})}$ jsou integrály z Definice 2.1.

V dalším bude užitečný následující důsledek předchozí věty:

Důsledek 2.1. *Nechť* $Y_t = \int_0^t a(s)\,\mathrm{d}^\circ B_s^{(H)} + \int_0^t b(s)\,\mathrm{d}s$, $t \in [0,T]$, *(předpoklady na a, resp. b, nechť jsou stejné jako na* f_2*, resp. g, výše) a* Y^m *je jako výše,* $\int_0^T |Y(s)g(s)|\,\mathrm{d}s < \infty$, $\int_0^T |Y^m(s)b(s)|\,\mathrm{d}s$
$< \infty$ *a* $Y^m(s)a(s) \in C^\gamma([0,T])$ *s.j., kde* $\gamma + H > 1$*, pak pro* $t \in [0,T]$ *platí*

$$Y_tY_t^m = \int_0^t Y(s)g(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t Y^m(s)b(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t Y^m(s)a(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s). \tag{2.3}$$

Důkaz.
Platí

$$\begin{aligned} Y_tY_t^m &= \Big(\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) + \int_0^t b(s)\,\mathrm{d}s\Big)\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t a(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s)\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t b(s)\,\mathrm{d}s\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Na první sčítanec použijeme Větu 2.3 a procesy ve druhém sčítanci májí derivaci s.j., takže použijeme pravidlo o derivaci součinu. Dostaneme

$$\begin{aligned} Y_tY_t^m &= \int_0^t a(s)Y^m(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) + \int_0^t g(s)\int_0^s a(r)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s)\,\mathrm{d}s \\ &+ \int_0^t b(s)Y^m(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t g(s)\int_0^s b(r)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t Y(s)g(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t Y^m(s)b(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t Y^m(s)a(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s). \end{aligned}$$

□

Kapitola 3

Rovnice a její řešení

3.1 Homogenní rovnice

Uvažujme rovnici

$$v_t = F(v, Dv, D^2v, \ldots),\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d, \tag{3.1}$$

s počáteční podmínkou $v(0,x) = v_0(x)$. Neznámou v rovnici (3.1) je funkce $v = v(t,x)$, funkce F je dána, $v_t = \partial v/\partial t$ a $D^k v$ je obecná k-tá derivace v podle x. Zápis $F(v, Dv, D^2v, \ldots)$ zde znamená, že F je závislá na v a konečném počtu derivací $Dv, D^2v, \ldots, D^m v, \ldots, m \in \mathbb{N}$.

Dále uvažujme stochastickou verzi rovnice (3.1) pro neznámé náhodné pole $u = u(t,x)$, $t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d$ ve tvaru

$$du = F(u, Du, D^2u, \ldots)dt + u(f(t)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(t) + g(t)\,\mathrm{d}t), \tag{3.2}$$

se stejnou počáteční podmínkou jako v (3.1), tj. $u(0,x) = u_0(x) = v_0(x)$, kde $f \in C^{\alpha+\varepsilon}([0,T])\ \forall T > 0$, pro nějaké $0 < \varepsilon < \min\{1-\alpha,\ \alpha,\ H+\alpha-1\}$, a $g \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+)$.

V dalším budeme zkoumat vztah mezi řešeními rovnic (3.1) a (3.2). K tomu je potřeba pojem řešení rovnice vhodně definovat.

Definice 3.1. Funkce $v : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ je *klasickým řešením* rovnice (3.1) , jestliže splňuje:

1. v je spojitá,
2. všechny potřebné parciální derivace funkce v vzhledem k x existují a jsou spojité v proměnné x a γ-hölderovsky spojité v proměnné t na $[0,T]\ \forall T > 0$, kde $\gamma > 1-H$.
3. Je splněna rovnost

   $$v(t,x) = v_0(x) + \int_0^t F(v(s,x), Dv(s,x), D^2v(s,x), \ldots)\,\mathrm{d}s$$

   pro všechna $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$.

Markovský čas τ v následující definici má význam především v případě, že řešení příslušné deterministické rovnice exploduje v konečném čase, v tom případě má τ význam např. času exploze.

Definice 3.2. Nechť $\tau : \Omega \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ je markovský čas. Náhodné pole $u = u(t,x)$ je *klasickým řešením* rovnice (3.2), jestliže existuje množina $\Omega^* \subset \Omega$, $\mathbb{P}(\Omega^*) = 1$, a na množině $((0,\tau]] = \{(t,x,\omega) : t < \tau(\omega),\ \omega \in \Omega^*,\ x \in \mathbb{R}^d\}$ je splněno:

1. u je spojité v proměnné x a γ-hölderovsky spojité v proměnné t pro každé $(t,x,\omega) \in ((0,\tau]]$, pro nějaké $\gamma > 1 - H$,
2. všechny potřebné parciální derivace u vzhledem k x existují a jsou spojité v proměnné x a γ-hölderovsky spojité v proměnné t na $[0,T]$ $\forall\, 0 < T < \tau$, pro nějaké $\gamma > 1 - H$,
3. rovnost

$$u(t,x) = u_0(x) + \int_0^t F(u(s,x), Du(s,x), \dots)\,\mathrm{d}s + \int_0^t u(s,x)(f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) + g(s)\,\mathrm{d}s)$$

platí pro všechna $(t,x,\omega) \in ((0,\tau]]$.

V dalším se budeme zabývat pouze jistým typem diferenciální rovnice, tzv. homogenní rovnicí. Konkrétně to popisuje následující definice.

Definice 3.3. Řekneme, že funkce F je *homogenní stupně* $m \geq 1$, jestliže $\forall \lambda > 0$ platí

$$F(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \dots) = \lambda^m F(x,y,z,\dots), \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^d, z \in \mathbb{R}^{d\times d}, \dots \tag{3.3}$$

Řekneme, že rovnice (3.1) je *homogenní stupně* $m \geq 1$, jestliže funkce F je homogenní stupně m.

Definujme funkce

$$h(t) = \exp\Big(\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s)\Big) \quad \text{a} \quad H(t) = \int_0^t h^{m-1}(s)\,\mathrm{d}s. \tag{3.4}$$

Proces h se nazývá geometrický frakcionální Brownův pohyb a hraje klíčovou roli ve vztahu řešení rovnic (3.1) a (3.2). Zřejmě $h(0) = 1$ a přímou aplikací Itôovy formule (2.2) dostáváme, že proces h splňuje rovnost

$$h(t) = 1 + \int_0^t h(s)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) + \int_0^t h(s)g(s)\,\mathrm{d}s.$$

Platí následující věta.

Věta 3.1. *Předpokládejme, že funkce F v rovnici (3.1) je spojitá a homogenní stupně m, a nechť funkce $v = v(t,x)$ je klasickým řešením rovnice (3.1). Definujme funkci u vztahem*

$$u(t,x) = h(t)v(H(t),x). \tag{3.5}$$

Potom u je klasickým řešením rovnice (3.2).

Důkaz.
Nechť v je klasickým řešením (3.1) a nechť máme dán markovský čas τ. Dále pro $t < \tau(\omega)$ definujme funkce

$$\begin{aligned}\tilde{h}(t) &:= h(t) - h(0),\\ \tilde{v}(t,x) &:= v(t,x) - v_0(x)\end{aligned}$$

a funkci $H^* : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d,\ (t,x) \mapsto (H(t),x)$. Vidíme, že platí

$$\tilde{h}(t) = \int_0^t h(s)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) + \int_0^t h(s)g(s)\,\mathrm{d}s$$

a protože v řeší (3.1), platí také

$$v(t,x) = v_0(x) + \int_0^t F(v, Dv, D^2v, \dots)(s,x)\,\mathrm{d}s$$

a

$$v(H(t),x) = v_0(x) + \int_0^{H(t)} F(v, Dv, D^2v, \dots)(s,x)\,\mathrm{d}s,$$

a tedy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v(H(t),x) = H'(t)F(v\circ H^*, D(v\circ H^*), D^2(v\circ H^*), \dots)(t,x),$$

neboli

$$\tilde{v}(H(t),x) = v(H(t),x) - v_0(x) = \int_0^t H'(s)F(v\circ H^*, D(v\circ H^*), D^2(v\circ H^*), \dots)(s,x)\,\mathrm{d}s.$$

Nyní můžeme psát

$$\begin{aligned} u(t,x) &= h(t)v(H(t),x) = (\tilde{h}(t) + h(0))(\tilde{v}(H(t,x)) + v_0(x)) \\ &= h(0)v(0,t) + \tilde{h}(t)\tilde{v}(H(t),x) + \tilde{h}(t)v_0(x) + \tilde{v}(H(t),x)h(0) \end{aligned} \tag{3.6}$$

a chtěli bychom aplikovat Itôovou formuli (2.3) na součin $\tilde{h}(t)\tilde{v}(H(t),x)$. Vidíme, že jsme v situaci Důsledku 2.1, kdy roli $Y^m(t)$ hraje $\tilde{v}(H(t),x)$ a $Y(t)$ je $\tilde{h}(t)$. Ověřme tedy předpoklady Důsledku 2.1.

- Předpoklad

  $$\int_0^t |H'(s)F(v\circ H^*, D(v\circ H^*), D^2(v\circ H^*), \dots)(s,x)|\,\mathrm{d}s < \infty \quad s.j.$$

  platí, neboť:

  $$X(t) = \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s)$$

  je s.j. $(1-\alpha)$-hölderovská podle Lemmatu 2.1, tudíž $\mathrm{e}^{X(t)}$ je $(1-\alpha)$-hölderovská, protože exponenciála má lokálně omezenou derivaci, a nakonec $h(t) = \mathrm{e}^{X(t)+\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s}$ je s.j. $(1-\alpha)$-hölderovská, protože $\mathrm{e}^{\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s}$ má taktéž lokálně omezenou derivaci. Z toho plyne, že $H'(t) = h^{m-1}(t)$ je s.j. spojitá a tedy omezená na $[0,t]$. Tedy $H'(s)F(v\circ H^*, D(v\circ H^*), D^2(v\circ H^*), \dots)(s,x)$ je integrovatelná, protože $F(v\circ H^*, D(v\circ H^*), D^2(v\circ H^*), \dots)(s,x)$ je integrovatelná, neboť H^* je spojitá a v řeší (3.1).

- Předpoklad

  $$\int_0^t |\tilde{v}(H(t),x)h(s)g(s)|\,\mathrm{d}s < \infty \quad s.j.$$

  platí, protože všechny tři funkce v integrandu jsou s.j. omezené na $[0,t]$.

- Předpoklad

$$\int_0^t |\tilde{h}(s)H'(s)F(v\circ H^*, D(v\circ H^*), D^2(v\circ H^*),\dots)(s,x)|\,\mathrm{d}s < \infty \quad s.j.$$

platí, protože $\tilde{h}(t)$ je omezená a $H'(t)F(v\circ H^*, D(v\circ H^*), D^2(v\circ H^*),\dots)(t,x)$ integrovatelná s.j.

- Předpoklad

$$\tilde{v}(H(t),x)h(t)f(t) \in C^{\gamma}([0,t]),\ \text{pro nějaké}\ \gamma,\ \gamma + H > 1, \quad s.j.$$

platí, protože $h \in C^{1-\alpha}([0,t])$, $f \in C^{\alpha+\varepsilon}([0,t])$, $\tilde{v}(H(t),x)$ má na $[0,t]$ omezenou derivaci s.j. (zde se využila spojitost F) a $\alpha + H > 1$, tedy můžeme položit $\gamma = \alpha$.

Teď můžeme na $\tilde{h}(t)\tilde{v}(H(t),x)$ použít Itôovu formuli (2.3) z Důsledku 2.1. Dostáváme

$$\begin{aligned}
\tilde{h}(t)\tilde{v}(H(t),x) &= \int_0^t \tilde{h}(s)H'(s)F(v\circ H^*, D(v\circ H^*), D^2(v\circ H^*),\dots)(s,x)\,\mathrm{d}s \\
&+ \int_0^t \tilde{v}(H(s),x)h(s)g(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \tilde{v}(H(s),x)h(s)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) \\
&= \int_0^t h^m(s)F(v\circ H^*, D(v\circ H^*), D^2(v\circ H^*),\dots)(s,x)\,\mathrm{d}s \\
&- h(0)\int_0^t H'(s)F(v\circ H^*, D(v\circ H^*), D^2(v\circ H^*),\dots)(s,x)\,\mathrm{d}s \\
&+ \int_0^t v(H(s),x)h(s)g(s)\,\mathrm{d}s - v_0(x)\int_0^t h(s)g(s)\,\mathrm{d}s \\
&+ \int_0^t v(H(s),x)h(s)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) - v_0(x)\int_0^t h(s)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) \\
&= \int_0^t F(u, Du, D^2u,\dots)(s,x)\,\mathrm{d}s - h(0)\tilde{v}(H(t),x) \\
&+ \int_0^t u(s,x)g(s)\,\mathrm{d}s - v_0(x)\tilde{h}(s) + \int_0^t u(s,x)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s),
\end{aligned}$$

přičemž v první rovnosti byl použit Důsledek 2.1, ve druhé definice $\tilde{h}$ a $\tilde{v}$ a rovnost $H'(s) = h^{m-1}(s)$ a ve třetí rovnosti homogenita F, definice u, $\tilde{h}$ a $\tilde{v}$.

Dosadíme-li právě spočtený výraz do rovnosti (3.6), dostáváme

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= h(0)v(0,t) + \int_0^t F(u, Du, D^2u,\dots)(s,x)\,\mathrm{d}s - h(0)\tilde{v}(H(t),x) \\
&+ \int_0^t u(s,x)g(s)\,\mathrm{d}s - v_0(x)\tilde{h}(s) + \int_0^t u(s,x)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) + \tilde{h}(t)v_0(x) \\
&+ \tilde{v}(H(t),x)h(0) \\
&= u_0(x) + \int_0^t F(u, Du, D^2u,\dots)(s,x)\,\mathrm{d}s \\
&+ \int_0^t u(s,x)g(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t u(s,x)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s).
\end{aligned}$$

Tímto jsme ověřili bod 3 z Definice 3.2. Body 1 a 2 platí díky hölderovské spojitosti h a H. Celkově dostáváme, že u je klasickým řešením rovnice (3.2).

$\square$

Tvrzení předchozí věty lze obrátit minimálně v případě bilineární rovnice.

Věta 3.2. *Předpokládejme, že funkce F v rovnici (3.1) je spojitá a homogenní stupně 1, a nechť u je klasické řešení její stochastické verze (3.2). Potom funkce v definovaná vztahem*

$$v(t,x) = z(t)u(t,x)$$

je klasickým řešením rovnice (3.1), kde $z(t) = 1/h(t)$.

Důkaz.
Tvrzení se ukáže analogicky jako v předchozí větě. Nechť u je klasickým řešením (3.2), tj. platí

$$u(t,x) = u_0(x) + \int_0^t \Big[F(u(s,x), Du(s,x), \dots) + u(s,x)g(s)\Big]\,\mathrm{d}s + \int_0^t u(s,x)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s).$$

Pomocí Itôovy formule (2.2) aplikované na proces $z(t) = p(t, X(t))$, kde

$$p(t,x) = \mathrm{e}^{-x-\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s}$$

a stejně jako ve Větě 3.1

$$X(t) = \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s),$$

dostáváme

$$z(t) = 1 - \int_0^t z(s)g(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^t z(s)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s).$$

Nyní definujme funkce $\tilde{z}(t) = z(t) - z(0)$ a $\tilde{u}(t,x) = u(t,x) - u_0(x)$. Platí

$$\begin{aligned} v(t,x) &= z(t)u(t,x) = (\tilde{z}(t) + z(0))(\tilde{u}(t,x) + u_0(x)) \\ &= \tilde{z}(t)\tilde{u}(t,x) + z(0)\tilde{u}(t,x) + \tilde{z}(t)u_0(x) + u_0(x)z(0) \end{aligned} \tag{3.7}$$

a $\tilde{z}(t)\tilde{u}(t,x) = z_1(t)\tilde{u}(t,x) + z_2(t)\tilde{u}(t,x)$, kde

$$z_1(t) = -\int_0^t z(s)g(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{a} \quad z_2(t) = -\int_0^t z(s)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s).$$

Na součin $z_1(t)\tilde{u}(t,x)$ aplikujeme Itôovu formuli (2.3) z Důsledku 2.1, přičemž roli Y má $\tilde{u}$ a Y^m je z_1, a dostaneme

$$\begin{aligned} z_1(t)\tilde{u}(t,x) &= \int_0^t z_1(t)\Big[F(u(s,x), Du(s,x), \dots) + u(s,x)g(s)\Big]\,\mathrm{d}s \\ &+ \int_0^t z_1(s)u(s)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) - \int_0^t \tilde{u}(t,x)z(s)g(s)\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Na součin $z_2(t)\tilde{u}(t,x)$ aplikujeme Itôovu formuli (2.2) z Věty 2.3 následujícím způsobem: $z_2(t)\tilde{u}(t,x) = p(Y^2(t), Y^3(t), Y^m(t))$, kde

$$p(y_2, y_3, y_m) = -y_2(y_3 + y_m), \quad \frac{\partial p}{\partial y_2}(y_2, y_3, y_m) = -(y_3 + y_m), \quad \frac{\partial p}{\partial y_3}(y_2, y_3, y_m) = -y_2,$$

$$\frac{\partial p}{\partial y_m}(y_2, y_3, y_m) = -y_2, \quad Y^2(t) = -z_2(t), \quad Y^3(t) = \int_0^t u(s,x) f(s)\, \mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s)$$

a

$$Y^m(t) = \int_0^t \Big[F(u(s,x), Du(s,x), \ldots) + u(s,x)g(s)\Big]\, \mathrm{d}s.$$

Dostáváme

$$\begin{aligned}
z_2(t)\tilde{u}(t,x) &= -\int_0^t (Y^3(s) + Y^m(s)) z(s) f(s)\, \mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) - \int_0^t Y^2(s) u(s) f(s)\, \mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) \\
&- \int_0^t Y^2(s)\Big[F(u(s,x), Du(s,x), \ldots) + u(s,x)g(s)\Big]\, \mathrm{d}s \\
&= -\int_0^t \tilde{u}(s,x) z(s) f(s)\, \mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) + \int_0^t z_2(s) u(s,x) f(s)\, \mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) \\
&+ \int_0^t z_2(s)\Big[F(u(s,x), Du(s,x), \ldots) + u(s,x)g(s)\Big]\, \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Dále

$$\begin{aligned}
\tilde{z}(t)\tilde{u}(t,x) &= z_1(t)\tilde{u}(t,x) + z_2(t)\tilde{u}(t,x) \\
&= \int_0^t \tilde{z}(s) u(s,x) f(s)\, \mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) - \int_0^t \tilde{u}(s,x) z(s) f(s)\, \mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) \\
&+ \int_0^t \tilde{z}(s)\Big[F(u(s,x), Du(s,x), \ldots) + u(s,x)g(s)\Big]\, \mathrm{d}s \\
&- \int_0^t \tilde{u}(s) z(s) g(s)\, \mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \Big\{(z(s) - z(0)) u(s) f(s) - (u(s,x) - u_0(x)) z(s) f(s)\Big\}\, \mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) \\
&+ \int_0^t \Big\{(z(s) - z(0))\Big[F(u(s,x), Du(s,x), \ldots) + u(s,x)g(s)\Big] \\
&\qquad - (u(s,x) - u_0(x)) z(s) g(s)\Big\}\, \mathrm{d}s \\
&= -z(0)\int_0^t u(s,x) f(s)\, \mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) + u_0(x)\int_0^t f(s) z(s)\, \mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) \\
&+ \int_0^t z(s) F(u(s,x), Du(s,x), \ldots)\, \mathrm{d}s + u_0(x)\int_0^t z(s) g(s)\, \mathrm{d}s \\
&- z(0)\Big\{\int_0^t F(u(s,x), Du(s,x), \ldots)\, \mathrm{d}s + \int_0^t u(s,x) g(s)\, \mathrm{d}s\Big\} \\
&= \int_0^t F(v(s,x), Dv(s,x), \ldots)\, \mathrm{d}s - u_0(x)\tilde{z}(t) - z(0)\tilde{u}(t,x)
\end{aligned}$$

a dosadíme-li právě vypočtený výraz do (3.7), dostáváme konečně

$$\begin{aligned}
v(t,x) &= \int_0^t F(v(s,x), Dv(s,x), \ldots)\, \mathrm{d}s - u_0(x)\tilde{z}(t) - z(0)\tilde{u}(t,x) \\
&+ z(0)\tilde{u}(t,x) + \tilde{z}(t) u_0(x) + u_0(x) z(0) \\
&= \int_0^t F(v(s,x), Dv(s,x), \ldots)\, \mathrm{d}s + v_0(x),
\end{aligned}$$

tedy v splňuje rovnost (3.1) a bod 3 z Definice 3.2. Předpoklady pro použití Itôovy formule podle Věty 2.3 a Důsledku 2.1 se ověří zcela analogicky jako v důkaze Věty 3.1. Platnost bodů 1 a 2 Definice 3.1 plyne přímo z bodů 1 a 2 Definice 3.2 a spojitosti z.

$\square$

3.2 Stochastická rovnice porézního prostředí

Uvažujme ideální plyn, který isentropicky proudí v homogenním porézním prostředí. Jeho tok je řízen následujícími třemi zákony:

- *Stavová rovnice:*
$$p = p_0 \rho^\alpha,$$
kde $p = p(x,t)$ je tlak, $\rho = \rho(x,t)$ je hustota a $\alpha \in [1, \infty)$ a $p_0 \in \mathbb{R}_+$ jsou konstanty.

- *Zachování hmoty:*
$$\varkappa \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0,$$
kde $\vec{v} = \vec{v}(x,t)$ je vektor rychlosti a $\varkappa \in \mathbb{R}_+$ je pórovitost prostředí (tj. podíl objemu volného pro plyn), kde $\operatorname{div}\vec{f} = \sum\limits_{i=1}^{d} \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i}$ je divergenční operátor.

- *Darcyho zákon:*
$$\nu \vec{v} = -\mu \nabla p,$$
kde $\nu \in \mathbb{R}_+$ je viskozita plynu a $\mu \in \mathbb{R}_+$ je permeabilita prostředí.

Eliminujeme-li z rovnic p a $\vec{v}$ a přeškálováním odstraníme výsledné konstanty, dostaneme *rovnici porézního prostředí*

$$v_t(t,x) = \Delta v^m(t,x), \ t > 0, \tag{3.8}$$

kde $v_t = \partial v / \partial t$, $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$ a Δ je Laplaceův operátor, tj.

$$\Delta v = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial^2 v}{\partial x_k^2}.$$

Další informace o této rovnici lze nalézt např. v [1] a [11].

Stejně jako v předchozí sekci uvažujme stochastickou verzi rovnice (3.8):

$$\mathrm{d}u(t,x) = \Delta u^m(t,x)\,\mathrm{d}t + u(t,x)(f(t)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(t) + g(t)\,\mathrm{d}t), \ t > 0, \ x \in \mathbb{R}^d \tag{3.9}$$

se stejnou počáteční podmínkou jako v (3.8), tj. $u(0,x) = u_0(x) = v_0(x)$, kde $f \in C^{\alpha+\varepsilon}([0,T])\ \forall T > 0$, pro nějaké $0 < \varepsilon < \min\{1-\alpha,\ \alpha,\ H+\alpha-1\}$, a $g \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+)$.

Budeme zkoumat vztah mezi řešeními těchto dvou rovnic, ovšem nyní již nebudou uvažovaná řešení nutně klasická. Řešení deterministické rovnice definujeme následujícím způsobem:

Definice 3.4. Nezáporná funkce $v = v(t,x)$ se nazývá *řešení* rovnice (3.8), jestliže pro každou funkci $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ s kompaktním nosičem platí pro všechna $t > 0$ rovnost

$$(v,\varphi)(t) = (v_0,\varphi) + \int_0^t (v^m, \Delta\varphi)(s)\,\mathrm{d}s,$$

kde

$$(v,\varphi)(t) = \int_{\mathbb{R}^d} v(t,x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

a funkce $t \mapsto (v^m,\varphi)(t)$ je γ-hölderovsky spojitá na $[0,T]$ $\forall T > 0$, pro nějaké $\gamma > 1 - H$.

Analogicky řešení stochastické rovnice:

Definice 3.5. Nechť $\tau : \Omega \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ je markovský čas. Nezáporné náhodné pole $u = u(t,x)$ se nazývá *řešení* rovnice (3.9), jestliže existuje množina $\Omega^* \subset \Omega$, $\mathbb{P}(\Omega^*) = 1$, a na množině $((0,\tau]] = \{(t,\omega) : t < \tau(\omega),\ \omega \in \Omega^*\}$ platí pro každou funkci $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ s kompaktním nosičem pro všechny $(t,\omega) \in ((0,\tau]]$ rovnost

$$(u,\varphi)(t) = (u_0,\varphi) + \int_0^t (u^m, \Delta\varphi)(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t (u,\varphi)(s)(f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) + g(s)\,\mathrm{d}s),$$

(3.10)

kde

$$(u,\varphi)(t) = \int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Mezi řešeními rovnic (3.8) a (3.9) platí stejný vztah jako pro klasická řešení.

Věta 3.3. *Nechť v je řešením rovnice (3.8). Pak náhodné pole u dané vztahem*

$$u(t,x) = v(H(t),x)h(t), \tag{3.11}$$

kde h a H jsou dány v (3.4), je řešením rovnice (3.9).

Důkaz.
Důkaz probíhá stejně jako důkaz Věty 3.1. Nechť v je řešením (3.8) a nechť τ je markovský čas, $t < \tau(\omega)$ a $\varphi = \varphi(x)$ je hladká funkce s kompaktním nosičem. Definujme funkce

$$\begin{aligned} \tilde{h}(t) &:= h(t) - h(0), \\ \tilde{v}(t,x) &:= v(t,x) - v_0(x) \end{aligned}$$

a funkci $H^* : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d,\ (t,x) \mapsto (H(t),x)$. Vidíme, že platí

$$\tilde{h}(t) = \int_0^t h(s)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) + \int_0^t h(s)g(s)\,\mathrm{d}s$$

a protože v řeší (3.8), platí také

$$(\tilde{v} \circ H^*, \varphi)(t) = \int_0^{H(t)} (v^m, \Delta\varphi)(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t h^{m-1}(s)(v^m,\Delta\varphi)(s)\,\mathrm{d}s.$$

Můžeme psát

$$(u,\varphi)(t) = h(t)(v \circ H^*)(t) = h(0)(v_0,\varphi) + \tilde{h}(t)(\tilde{v},\varphi)(t) + \tilde{h}(t)(v_0,\varphi) + h(0)(\tilde{v},\varphi)(t),$$

na součin $\tilde{h}(t)(\tilde{v},\varphi)(t)$ použít Itôovu formuli (2.3) z Důsledku 2.1 a dostaneme

$$\begin{aligned}
\tilde{h}(t)(\tilde{v},\varphi)(t) &= \int_0^t \tilde{h}(s)h^{m-1}(s)(v^m \circ H^*, \Delta\varphi)(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t (\tilde{v},\varphi)(s)h(s)g(s)\,\mathrm{d}s \\
&+ \int_0^t (\tilde{v},\varphi)(s)h(s)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) \\
&= \int_0^t h^m(s)(v^m \circ H^*, \Delta\varphi)(s)\,\mathrm{d}s - h(s)(\tilde{v},\varphi)(t) + \int_0^t (v,\varphi)(s)h(s)g(s)\,\mathrm{d}s \\
&- (v_0,\varphi)\int_0^t h(s)g(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t (v,\varphi)(s)h(s)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) \\
&- (v_0,\varphi)\int_0^t h(s)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) \\
&= \int_0^t (u^m,\Delta\varphi)(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t (u,\varphi)(s)g(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t (u,\varphi)(s)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) \\
&- h(0)(\tilde{v}(t),\varphi) - (v_0,\varphi)\tilde{h}(t).
\end{aligned}$$

Dosadíme-li za $\tilde{h}(t)(\tilde{v},\varphi)(t)$ zpátky, dostáváme

$$(u,\varphi)(t) = (u_0,\varphi) + \int_0^t (u^m,\Delta\varphi)(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t (u,\varphi)(s)g(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t (u,\varphi)(s)f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s).$$

Ověření předpokladů Důsledku 2.1 proběhne stejně jako v důkazu Věty 3.1 s tím, že roli $\tilde{v}(H(t),x)$ hraje $(\tilde{v}\circ H^*,\varphi)(t)$.

$\square$

Kapitola 4

Příklady

V této kapitole popíšeme některé vlastnosti tzv. Barenblattova řešení rovnice porézního prostředí a pomocí výsledků z předchozí kapitoly odvodíme některé vlastnosti řešení stochastické rovnice porézního prostředí. Ukážeme například, jak se pro velké časy chová střední hodnota celkové hmoty řešení při konkrétní volbě funkcí f a g modifikujících pravou stranu diferenciální rovnice. Dále ukážeme limitní chování jednotlivých trajektorií řešení opět v závislosti na volbě f a g.

4.1 Barenblattovo řešení

Barenblattovým řešením rovnice porézního prostředí

$$U_t = \Delta(U^m) \tag{4.1}$$

je funkce

$$U^{[BT]}(t, x; b) = \frac{1}{t^\alpha}\Big(\max\Big(0,\ b - \frac{m-1}{2m}\beta\frac{|x|^2}{t^{2\beta}}\Big)\Big)^{1/(m-1)},\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d, \tag{4.2}$$

kde $b > 0$ a

$$\beta = \frac{1}{(m-1)d + 2}, \quad \alpha = \beta d.$$

Je to důležité speciální řešení, které určuje chování pro velké časy každého globálního řešení rovnice (3.8). Podobně, s jistými omezeními na funkce H a h definované pomocí (3.4), potažmo na funkce f a g, určuje pro velké časy stochastická verze Barenblattova řešení zkonstruovaná podle Věty 3.3 chování některých řešení stochastické rovnice porézního prostředí (3.9).

Deterministické Barenblattovo řešení (4.2) má mnohé zajímavé vlastnosti, jejichž podrobnější popis lze nalézt např. v [1], [4], [11] nebo [6]. Zde si uvedeme několik základních.

- $U^{[BT]}$ není klasické řešení podle definice (3.1). Počáteční podmínka $U^{[BT]}(0, x)$ je násobek Diracovy míry v bodě 0, platí

  $$U^{[BT]}(0, x) = M\delta_0(x),$$

  kde M je celková hmota řešení, definovaná jako $M = \int_{R^d} U^{[BT]}(t, x; b)\,\mathrm{d}x$, nezávisí na t a je jednoznačně určena hodnotou parametru b; platí

  $$M := M_b = b^{1/(2\beta(m-1))}\Big(\frac{m-1}{2\pi m}\beta\Big)^{-d/2}\frac{\Gamma(\frac{m}{m-1})}{\Gamma(\frac{m}{m-1} + d)},$$

  kde Γ je gamma funkce.

- $U^{[BT]}$ je klasickým řešením rovnice $U_t = \Delta(U^m)$ na množině

$$\left\{(t,x) : |x| \neq \sqrt{\frac{2mb}{(m-1)\beta}t^\beta}\right\}.$$

- Pro každé $p, q, t_0 > 0, x_0 \in \mathbb{R}^d$ je také funkce

$$\widetilde{U}(t,x) = \left(\frac{p}{q^2}\right)^{1/(m-1)} U^{[BT]}(pt + t_0, qx + x_0; b)$$

  řešením rovnice (3.9).

- Nechť $U^{[BT]}(t,x;b)$ je Barenblattovo řešení s hmotou M_b a $U(t,x)$ je libovolné řešení rovnice (3.8) ve smyslu Definice 3.4 s $\int_{\mathbb{R}^d} U(0,x) = M_b$. Potom

$$t^{\beta d}|U(t,x) - U^{[BT]}(t,x;b)| \to 0, \ \ t \to \infty, \tag{4.3}$$

  stejnoměrně vzhledem k x na množinách tvaru

$$\{(t,x) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ : |x| \leq Ct^\beta\},$$

  kde $C > 0$.

4.2 Střední hodnota

Řešení $U^{[BT]}$ splňuje předpoklady Věty 3.3, a proto náhodné pole

$$u^{[BT]} = u^{[BT]}(t,x;b) = h(t)U^{[BT]}(H(t),x;b) \tag{4.4}$$

je řešením rovnice (3.9). Spočtěme střední hodnotu jeho hmoty M.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\int_{\mathbb{R}^d} u^{[BT]}(t,x;b)\,\mathrm{d}x &= \mathbb{E}h(t)\int_{\mathbb{R}^d} U^{[BT]}(H(t),x;b)\,\mathrm{d}x = M_b\,\mathbb{E}h(t) \\
&= M_b\,\mathbb{E}\exp\Big(\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s) + \int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s\Big) \\
&= M_b \mathrm{e}^{\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathbb{E}\exp\Big(\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s)\Big) \\
&= M_b\exp\Big\{\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s \\
&\quad + \frac{1}{2}H(2H-1)\int_0^t\int_0^t f(u)f(v)|u-v|^{2H-2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\Big\},
\end{aligned} \tag{4.5}$$

protože (viz např. [2], Věta 5.5.1 a Lemma 3.1.3) $\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s)$ je centrovaná gaussovská náhodná veličina s rozptylem

$$H(2H-1)\int_0^t\int_0^t f(u)f(v)|u-v|^{2H-2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

a tudíž

$$\mathbb{E}\exp\Big(\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}^\circ B^{(H)}(s)\Big) = \exp\Big\{\frac{1}{2}H(2H-1)\int_0^t\int_0^t f(u)f(v)|u-v|^{2H-2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\Big\}.$$

Následující příklad ukazuje, jak se může střední hodnota hmoty $u^{[BT]}$ chovat pro velké časy.

Příklad 4.1. Nechť jsou funkce g a f v rovnici (3.9) dány následovně: $g < 0$ je konstantní a $f(s) = 1 \wedge s^\alpha,\ s \in (0,t),\ 0 > \alpha > -H$. Ze vztahu (4.5) vidíme, že hmota Barenblattova řešení (deterministické) rovnice

$$v_t(t,x) = \Delta v^m(t,x) + gv(t,x) \tag{4.6}$$

je $M_b \exp(gt)$ a pro $g < 0$ jde exponenciálně k 0.
Spočtěme střední hodnotu hmoty řešení $u^{[BT]}(t,x;b)$. Pomocí (4.5) máme

$$\mathbb{E}\int_{\mathbb{R}^d} u^{[BT]}(t,x;b)\,\mathrm{d}x = M_b \exp\Big(gt + \frac{1}{2}H(2H-1)\int_0^t\int_0^t (1\wedge u^\alpha)(1\wedge v^\alpha)|u-v|^{2H-2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\Big).$$

Dvojný integrál v předchozím výrazu lze rozdělit na několik částí:

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_0^t (1\wedge u^\alpha)(1\wedge v^\alpha)|u-v|^{2H-2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_0^1\int_0^1 |u-v|^{2H-2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\ &+2\int_0^1\int_0^t u^\alpha|u-v|^{2H-2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \int_1^t\int_1^t u^\alpha v^\alpha|u-v|^{2H-2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\ &= I_1 + 2I_2(t) + I_3(t),\end{aligned}$$

kde

$$I_1 = \frac{1}{H(2H-1)}\,\mathbb{E}[B^{(H)}(1)]^2 = \frac{1}{H(2H-1)}, \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} I_2(t) &= \int_0^t\int_0^1 u^\alpha|u-v|^{2H-2}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u\\ &= -\int_0^t u^\alpha\left[\frac{(u-v)^{2H-1}}{(2H-1)}\right]_0^1\mathrm{d}u\\ &= \int_0^t u^\alpha\frac{u^{2H-1}-(u-1)^{2H-1}}{2H-1}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_{1/t}^1 \frac{(ut)^\alpha((ut)^{2H-1}-(ut-1)^{2H-1})}{2H-1}t\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{t^{\alpha+2H}}{2H-1}\int_{1/t}^1 u^\alpha[(u-\frac{1}{t})^{2H-1}-u^{2H-1}]\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2H-1}\Bigg[\frac{2\Gamma(1-\alpha-2H)\Gamma(H)}{(\alpha+2H)\Gamma(-\alpha)}\\ &\qquad+\Gamma(-\alpha)[(\alpha+2H)\beta(1/t,-\alpha-2H,2H)-1+t^{\alpha+2H}]\Bigg],\end{aligned}$$

kde $\beta(u_0,a,b)$ je neúplná Beta funkce, tj. platí

$$\beta(u_0,a,b) = \int_0^{u_0} u^{a-1}(1-u)^{b-1}\,\mathrm{d}u.$$

Pro $t \ge t_0 \ge 1$ platí

$$\beta(1/t_0,-\alpha-2H,2H) \ge \beta(1/t,-\alpha-2H,2H) \ge 0$$

a dostáváme odhad

$$K_1(H,\alpha) + 2\Gamma(-\alpha)t^{\alpha+2H} \leq I_2(t) \leq \tilde{K_1}(H,\alpha) + 2\Gamma(-\alpha)t^{\alpha+2H}. \tag{4.8}$$

kde $K_1(H,\alpha)$ a $\tilde{K_1}(H,\alpha)$ jsou konstanty závisející pouze na H a α. Integrál $I_3(t)$ odhadneme takto:

$$\begin{aligned} I_3(t) &= \int_1^t \int_1^t u^\alpha v^\alpha |u-v|^{2H-2} \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \\ &= \int_{1/t}^1 \int_{1/t}^1 (ut)^\alpha (vt)^\alpha |ut-vt|^{2H-2} t^2 \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \\ &= t^{2H+2\alpha} \int_{1/t}^1 \int_{1/t}^1 u^\alpha v^\alpha |u-v|^{2H-2} \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \end{aligned}$$

a pro $t \geq t_0 \geq 1$ platí

$$\begin{aligned} 0 &< \int_{1/t_0}^1 \int_{1/t_0}^1 u^\alpha v^\alpha |u-v|^{2H-2} \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v =: K_2(H,\alpha) \\ &< \int_{1/t}^1 \int_{1/t}^1 u^\alpha v^\alpha |u-v|^{2H-2} \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \\ &< \int_0^1 \int_0^1 u^\alpha v^\alpha |u-v|^{2H-2} \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v =: \widetilde{K_2}(H,\alpha), \end{aligned}$$

přičemž konečnost konstanty $\widetilde{K_2}(H,\alpha)$ uvidíme z Lemmatu 4.1 uvedeného za tímto příkladem a z toho, že pro $\alpha > -H$ a $T > 0$ funkce $u \mapsto u^\alpha$ leží v prostoru $L^{1/H}([0,T])$. Dostáváme

$$K_2(H,\alpha)t^{2H+2\alpha} < I_3(t) < t^{2H+2\alpha}\widetilde{K_2}(H,\alpha). \tag{4.9}$$

Kombinací (4.7), (4.8) a (4.9) získáváme odhad pro střední hodnotu hmoty stochastického Barenblattova řešení:

$$\begin{aligned} &M_b \exp\left\{gt + \frac{1}{H(2H-1)} + K_1(H,\alpha) + 2\Gamma(-\alpha)t^{\alpha+2H} + K_2(H,\alpha)t^{2H+2\alpha}\right\} \\ &\qquad < \mathbb{E}\int_{\mathbb{R}^d} u^{[BT]}(t,x;b)\,\mathrm{d}x < \\ &M_b \exp\left\{gt + \frac{1}{H(2H-1)} + \tilde{K_1}(H,\alpha) + 2\Gamma(-\alpha)t^{\alpha+2H} + \tilde{K_2}(H,\alpha)t^{2H+2\alpha}\right\}. \end{aligned}$$

Z tohoto odhadu vídíme, jak se pro $g < 0$ střední hodnota v závislosti na α a H chová. Je-li $-H < \alpha < 1-2H$, pak jde střední hodnota s rostoucím t k 0 stejně jako v situaci rovnice (4.6). Platí-li ale $1-2H < \alpha < 0$, pak jde střední hodnota s rostoucím t k nekonečnu, což je zajímavé, protože by se mohlo zdát, že když f, tj. vliv náhodné složky, se bude zmenšovat k 0, převáží vliv g a střední hodnota hmoty půjde k 0 (pro $1-2H < \alpha < -1/2$ je totiž dokonce $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, a tedy je opravdu "malá").

Lemma 4.1. *Nechť $H \in (1/2,1)$ a $T > 0$. Označme $|\mathcal{H}|$ prostor měřitelných funkcí ψ definovaných na intervalu $[0,T]$ a splňujících*

$$\|\psi\|^2_{|\mathcal{H}|} := H(2H-1)\int_0^T \int_0^T |\psi(s)||\psi(t)||s-t|^{2H-2} \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}t < \infty.$$

Potom

$$\|\psi\|_{|\mathcal{H}|} \leq \beta_H \|\psi\|_{L^{1/H}([0,T])},$$

pro nějakou konstantu $\beta_H > 0$, tedy $L^{1/H}([0,T]) \subset |\mathcal{H}|$.

Důkaz.
Viz. [2], Tvrzení 2.1.13.

□

4.3 Limitní chování

V této sekci ukážeme, jak se pro velké časy chová stochastické Barenblattovo řešení rovnice (3.9) a jak je jeho limitní chování spojeno s limitním chováním některých dalších řešení této rovnice. Platí následující tvrzení.

Tvrzení 4.1. *Nechť* $\lim_{t\to\infty} H(t) = \infty$ *s pravděpodobností* 1*. Nechť* $U(t,x)$ *je takovým řešením rovnice (3.8), že platí*

$$\int_{\mathbb{R}^d} U(0,x)\,\mathrm{d}x = M_b$$

a $u(t,x)$ *je jemu odpovídající řešení rovnice (3.9), tj.* $u(t,x) = h(t)U(H(t),x)$*, potom*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^d \ \lim_{t\to\infty} \frac{(H(t))^\alpha}{h(t)} |u(t,x) - u^{[BT]}(t,x;b)| = 0 \ s.j.$$

Důkaz.
Platí

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} \frac{(H(t))^\alpha}{h(t)} |u(t,x) - u^{[BT]}(t,x;b)| \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{(H(t))^\alpha}{h(t)} h(t) |U(H(t),x) - U^{[BT]}(H(t),x;b)| \\
&= \lim_{t\to\infty} (H(t))^\alpha |U(H(t),x) - U^{[BT]}(H(t),x;b)| \\
&\overset{s.j.}{=} \lim_{t\to\infty} t^\alpha |U(t,x) - U^{[BT]}(t,x;b)| = 0,
\end{aligned}$$

přičemž poslední rovnost plyne z vlastnosti (4.3) řešení deterministické rovnice.

□

Dále se podíváme na chování $u^{[BT]}$ pro velké časy a konkrétní volbu f a g. Nechť jsou funkce g a f v rovnici (3.9) konstantní. Klíčovou roli pro chování $u^{[BT]}$ mají funkce h a H definované rovnostmi (3.4). V této situaci mají tvar

$$h(t) = \exp\Big(gt + fB^{(H)}(t)\Big), \tag{4.10}$$

$$H(t) = \int_0^t h^{(m-1)}(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t \exp\Big(gs(m-1) + fB^{(H)}(s)(m-1)\Big)\,\mathrm{d}s. \tag{4.11}$$

Zabývejme se situací, kdy $g > 0$, a popišme jejich asymptotiku. V dalším platí, že všechny konstanty za existenčními kvantifikátory jsou funkcemi ω, které je pro přehlednost zpravidla vynecháváno. Podle zákonu iterovaného logaritmu (1.1) platí

$$\forall\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists t_0 = t_0(\omega) > 0\ \forall t \geq t_0\ |B^{(H)}(t)| < (K_H + \varepsilon)t^{H+\delta} \quad \mathbb{P}\text{-}s.j.$$

Odtud dostaneme odhady pro chování h a H. Pro $t \geq t_0$ platí

$$h(t) \geq \exp\Big(gt - |f|(K_H + \varepsilon)t^{H+\delta}\Big)$$

a tedy, volíme-li $0 < \delta < 1 - H$,

$$\forall \varkappa > 0 \ \exists t_1 > 0 \ \forall t > t_1 \ h(t) \geq \mathrm{e}^{(g-\varkappa)t}.$$

Dále

$$\begin{aligned}
H(t) &\leq \int_0^{t_0} \mathrm{e}^{gs(m-1)+f(m-1)B^{(H)}(s)}\,\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{gs(m-1)+|f|(m-1)(K_H+\varepsilon)s^{H+\delta}}\,\mathrm{d}s \\
&\leq C_1 + \int_{t_1}^{t} \mathrm{e}^{[g(m-1)+\varkappa]s}\,\mathrm{d}s = C_1 + \left[\frac{\mathrm{e}^{[g(m-1)+\varkappa]s}}{g(m-1)+\varkappa}\right]_{t_1}^{t} \\
&\leq C_2 + \frac{\mathrm{e}^{[g(m-1)+\varkappa]t}}{g(m-1)+\varkappa}
\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}
H(t) &\geq \int_0^{t_0} \mathrm{e}^{gs(m-1)+f(m-1)B^{(H)}(s)}\,\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{gs(m-1)-|f|(m-1)(K_H+\varepsilon)s^{H+\delta}}\,\mathrm{d}s \\
&\geq C_1' + \int_{t_1'}^{t} \mathrm{e}^{[g(m-1)-\varkappa]s}\,\mathrm{d}s = C_1' + \left[\frac{\mathrm{e}^{[g(m-1)-\varkappa]s}}{g(m-1)-\varkappa}\right]_{t_1'}^{t} \\
&\geq C_2' + \frac{\mathrm{e}^{[g(m-1)-\varkappa]t}}{g(m-1)-\varkappa}.
\end{aligned}$$

Odtud plyne, pro $0 < \alpha < 1$,

$$H^{\alpha}(t) \leq C_3 + \frac{\mathrm{e}^{\alpha[g(m-1)+\varkappa]t}}{(g(m-1)+\varkappa)^{\alpha}}.$$

Analogicky se ukáže, že platí

$$H^{2\beta}(t) \geq C_4 + \frac{\mathrm{e}^{2\beta[g(m-1)-\varkappa]t}}{(g(m-1)-\varkappa)^{2\beta}} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Použijeme-li tyto odhady na stochastické Barenblattovo řešení definované rovností (4.4), dostaneme

$$u^{[BT]}(t,x) \geq \frac{\mathrm{e}^{(g-\varkappa)t}}{C_3 + \frac{\mathrm{e}^{\alpha[g(m-1)+\varkappa]t}}{(g(m-1)+\varkappa)^{\alpha}}}\Big(\max(0, b - \frac{m-1}{2m}\beta\frac{|x|^2}{C_4 + \frac{\mathrm{e}^{2\beta[g(m-1)-\varkappa]t}}{(g(m-1)-\varkappa)^{2\beta}}})\Big)^{\frac{1}{m-1}}.$$

Dále

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \ \exists t_2 > 0 \ \forall t \geq t_2 \ \frac{m-1}{2m}\beta\frac{|x|^2}{C_4 + \frac{\mathrm{e}^{2\beta[g(m-1)-\varkappa]t}}{(g(m-1)-\varkappa)^{2\beta}}} < \frac{b}{2}$$

a tedy $\forall t \geq t_1 \vee t_2$ platí

$$\begin{aligned}
u^{[BT]}(t,x) &\geq \mathrm{e}^{(g-\varkappa)t}\Big(C_4 + \frac{\mathrm{e}^{\alpha[g(m-1)+\varkappa]t}}{[g(m-1)+\varkappa]^{\alpha}}\Big)^{-1}\Big(\frac{b}{2}\Big)^{\frac{1}{m-1}} \\
&= \mathrm{e}^{(g-\varkappa)t}\Big\{\Big(\frac{b}{2}\Big)^{\frac{1}{m-1}}[g(m-1)+\varkappa]^{\alpha}\Big\}\Big(\frac{C_4}{[g(m-1)+\varkappa]^{\alpha}} + \mathrm{e}^{\alpha[g(m-1)+\varkappa]t}\Big)^{-1} \\
&= C_5\frac{\mathrm{e}^{(g-\varkappa)t}}{C_6 + \mathrm{e}^{\alpha[g(m-1)+\varkappa]t}}.
\end{aligned}$$

Předchozí výpočty můžeme shrnout do tvrzení:

Tvrzení 4.2. *Nechť $g > 0$ a f jsou konstantní a $u^{[BT]}$ je řešení rovnice (3.9) definované pomocí (4.4). Potom platí*

$$\forall \varkappa > 0 \; \exists C, K, t_0 > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^d, \; t > t_0 \quad u^{[BT]}(t,x) \geq C \frac{e^{(g-\varkappa)t}}{K + e^{\alpha[g(m-1)+\varkappa]t}} \quad \mathbb{P}\text{-}s.j.$$

Speciálně,

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad \liminf_{t\to\infty} u^{BT}(t,x) = +\infty.$$

Důkaz.
Speciálně:

$$\begin{aligned}\liminf_{t\to\infty} u^{[BT]}(t,x) &\geq \lim_{t\to\infty} C_5 \frac{\mathrm{e}^{(g-\varkappa)t}}{C_6 + \mathrm{e}^{\alpha[g(m-1)+\varkappa]t}} = C_5 \lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{(g-\varkappa)t}}{\mathrm{e}^{\alpha[g(m-1)+\varkappa]t}} \\ &= C_5 \lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{\{(g-\varkappa)-\alpha[g(m-1)+\varkappa]\}t} = +\infty, \end{aligned} \tag{4.12}$$

neboť

$$g - \varkappa - \alpha g m + \alpha g - \alpha\varkappa = g(1 - \alpha(m-1)) - \varkappa(1+\alpha),$$

kde

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{d}{(m-1)d+2}, \\ \alpha(m-1) &= \frac{(m-1)d}{(m-1)d+2} = 1 - \frac{2}{(m-1)d+2} < 1\end{aligned}$$

a $\varkappa$ je libovolně malé. Stačí volit

$$\begin{aligned}\varkappa(1+\alpha) &< \frac{2g}{(m-1)d+2} \\ \varkappa &< \frac{2g}{[(m-1)d+2]\left(1 + \frac{d}{(m-1)d+2}\right)} \\ &= \frac{2g[(m-1)d+2]}{[(m-1)d+2][md+2]} = \frac{2g}{md+2}\end{aligned}$$

a koeficient $\{(g-\varkappa) - \alpha[g(m-1)+\varkappa]\}$ v exponentu (4.12) je kladný.

$\square$

Je-li $g < 0$, analogicky jako výše se ukáže, že platí tvrzení

Tvrzení 4.3. *Nechť $g < 0$ a f jsou konstantní a $u^{[BT]}$ je řešení rovnice (3.9) definované pomocí (4.4). Potom platí*

$$\forall \varkappa > 0 \; \exists C, K, t_0 > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^d, \; t > t_0 \quad u^{[BT]}(t,x) \leq C \frac{e^{(g+\varkappa)t}}{K + e^{\alpha[g(m-1)-\varkappa]t}} \quad \mathbb{P}\text{-}s.j.$$

Speciálně,

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad \lim_{t\to\infty} u^{BT}(t,x) = 0 \; \mathbb{P}\text{-}s.j.$$

Důkaz.
Speciálně: stačí volit $\varkappa < g \wedge g(m-1)$.

$\square$

Poznámka
Analogicky za předpokladů předchozího tvrzení dostaneme, že i celková hmota stochastického Barenblattova řešení jde s.j. k nule:

$$\int_{\mathbb{R}^d} u^{[BT]}(t,x;b)\,\mathrm{d}x = h(t)\int_{\mathbb{R}^d} U^{[BT]}(H(t),x;b)\,\mathrm{d}x = M_b h(t) \to 0,\ t\to\infty.$$

Naproti tomu pro střední hodnotu hmoty podle (4.5) platí

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int_{\mathbb{R}^d} u^{[BT]}(t,x;b)\,\mathrm{d}x &= M_b \exp\Big(gt + f^2H(2H-1)\int_0^t\int_0^t |s-v|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}v\Big)\\ &= M_b\exp(gt+f^2t^{2H}) \to \infty,\ t\to\infty.\end{aligned}$$

Vidíme, že chování hmoty řešení odpovídá chování frakcionálního geometrického Brownova pohybu. Dále si všimněme, že zde pro $H > 1/2$ nemůže dojít k situaci, kdy střední hodnota je konstantní.

Zkombinujeme-li Tvrzení 4.1 a 4.2, dostaneme následující důsledek o asymptotice některých dalších řešení rovnice (3.9).

Důsledek 4.1. *Nechť platí předpoklady Tvrzení 4.2 a nechť $U(t,x)$ je takovým řešením rovnice (3.8), že platí*

$$\int_{\mathbb{R}^d} U(0,x)\,\mathrm{d}x = M_b$$

a $u(t,x)$ je jemu odpovídající řešení rovnice (3.9), tj. $u(t,x) = h(t)U(H(t),x)$. Potom

$$\forall\, x\in\mathbb{R}^d \quad \lim_{t\to\infty} u(t,x) = +\infty\ \mathbb{P}\text{-}s.j.$$

Důkaz.
Zřejmě $H(t)\to\infty,\ t\to\infty$, a tedy podle Tvrzení 4.1 platí

$$0 = \lim_{t\to\infty}\frac{H^\alpha(t)}{h(t)}|u(t,x)-u^{[BT]}(t,x)| = \Big|\frac{H^\alpha(t)}{h(t)}u(t,x) - (b - \frac{m-1}{2m}\beta\frac{|x|^2}{H^{2\beta}(t)})^+\Big|,$$

přičemž výraz

$$(b-\frac{m-1}{2m}\beta\frac{|x|^2}{H^{2\beta}(t)})^+$$

konverguje k $b>0$ pro $t\to\infty$ a

$$\frac{H^\alpha(t)}{h(t)} \to 0,\ t\to\infty.$$

Musí tedy nutně

$$u(t,x)\to\infty,\ t\to\infty.$$

$\square$

Pro $g<0$ platí

Důsledek 4.2. *Nechť $g < 0$ a f jsou konstantní a $u^{[BT]}$ je řešení rovnice (3.9) definované pomocí (4.4) a nechť $U(t,x)$ je takovým řešením rovnice (3.8), že $U(0,\cdot)$ je omezená a integrovatelná funkce a $u(t,x)$ je jemu odpovídající řešení rovnice (3.9), tj. $u(t,x) = h(t)U(H(t),x)$. Potom*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^d \quad \lim_{t\to\infty} u(t,x) = 0 \ \mathbb{P}\text{-}s.j.$$

Důkaz.
Pomocí vztahu (4.3) a spojitosti v t (viz. [6], Věta 3.5) je $U(t,x)$ omezené v t $\forall\, x \in \mathbb{R}^d$. Z předpokladů plyne, že $h(t) \to 0,\ t \to \infty$ a tudíž i $u(t,x) = h(t)U(H(t),x) \to 0,\ t \to \infty$.

□

Literatura

[1] Aronson D. G.: The Porous Medium Equation. In *Nonlinear Diffusion Problems (Montecatini Terme, 1985)*, Lecture Notes in Math. 1224 1–46, Springer, Berlin, 1986.

[2] Biagini F., Yaozhong H., Øksendal B., Zhang T.: *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications*, Springer, London, 2008.

[3] Duncan T. E., Maslowski B., Pasik-Duncan, *Stochastic equations in Hilbert space with a multiplicative fractional Gaussian noise*, Stoch. Process. Appl. 115(8) 1357–1383, 2005.

[4] Friedman A., Kamin S.: *The Asymptotic Behavior of Gas in n-dimensional Porous Medium*, Trans. Amer. Math. Soc., 262(2), 551-563, 1980.

[5] Hunt G. A.: *Random Fourier Transform*, Trans. Amer. Math. Soc., 71 38–69, 1951.

[6] Lototsky S. V.: *A random change of variables and applications to the stochastic porous medium equation with multiplicative time noise*, Communications on Stochastic Analysis 1(3) 343–355, 2007.

[7] Maslowski B., Nualart D.: *Evolution equations driven by a fractional Brownian motion*, Journal of Functional Analysis 202 277–305, 2003.

[8] Maslowski B., Schmalfuss B.: *Random dynamical systems and stationary solutions of differential equations driven by the fractional Brownian motion*, Stochastic Anal. Appl. 22(6) 1577–1607, 2004.

[9] Mishura Y. S.: *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes*, Springer, Berlin, 2008.

[10] Tindel S., Tudor C. A., Viens F.: *Stochastic evolution equations with fractional Brownian motion*, Probab. Theory Related Fields 127(2) 186–204, 2003.

[11] Vázques J. L.: *The Porous Medium Equation (Mathematical Theory)*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford, 2007.