



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA**  
Univerzita Karlova

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

Kateřina Malá

**Metody tvorby pojistných sazeb  
založené na mírách rizika**

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Martin Branda, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2016

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora

Název práce: Metody tvorby pojistných sazeb založené na mírách rizika

Autor: Kateřina Malá

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Martin Branda, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V této práci zkoumáme míry rizika a jednu z jejich vlastností - koherenci. Zaměřujeme se zejména na hodnotu v riziku (zkráceně VaR), respektive na podmíněnou hodnotu v riziku (CVaR). Zmiňujeme také výhody CVaR oproti VaR. Dále rozebíráme nejběžnější formy složeného rozdělení, které jsou užívány v praxi. Závěrečná část této bakalářské práce je věnována numerické studii, kde počítáme střední hodnotu, rozptyl, VaR a CVaR pro konkrétní hodnoty parametrů.

Klíčová slova: míra rizika, koherence, hodnota v riziku, podmíněná hodnota v riziku, složené Poissonovo rozdělení, složené negativně binomické rozdělení

Title: Insurance pricing methods based on risk measures

Author: Kateřina Malá

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Martin Branda, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: In this thesis we study various risk measures and one of their characteristics - the coherence. We talk especially about value-at-risk (VaR in short), respectively about conditional value-at-risk (CVaR). We also mention the advantage of CVaR against VaR. After that we discuss the most common forms of compound distribution that are used in practice. The final part of this bachelor thesis is dedicated to a numerical study where we calculate mean, variance, VaR a CVaR for specific values of parameters.

Keywords: risk measure, coherence, value-at-risk, conditional value-at-risk, compound Poisson distribution, compound negative binomial distribution

Děkuji všem ve svém okolí, kteří mi byli při psaní této práce oporou. Předně bych ráda poděkovala vedoucímu své bakalářské práce RNDr. Martinu Brandovi, Ph.D. za odborné konzultace a trpělivost. Dále bych ráda poděkovala Martinu Scholtzovi za podporu.

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Míry rizika</b>	<b>3</b>
1.1 Pojistné a míry rizika . . . . .	3
1.2 Koherence . . . . .	4
1.3 Hodnota v riziku . . . . .	6
1.4 Podmíněná hodnota v riziku . . . . .	7
1.4.1 Definice a základní vlastnosti . . . . .	7
1.4.2 Minimalizační formule a koherence . . . . .	10
<b>2 Principy sazbování</b>	<b>12</b>
2.1 Výše ztrát . . . . .	12
2.2 Počty ztrát . . . . .	14
2.3 Složené rozdělení . . . . .	15
2.3.1 Složené Poissonovo rozdělení . . . . .	15
2.3.2 Složené negativně binomické rozdělení . . . . .	17
<b>3 Numerická studie</b>	<b>18</b>
3.1 Složené Poissonovo rozdělení . . . . .	18
3.1.1 Exponenciální rozdělení . . . . .	19
3.1.2 Gama rozdělení . . . . .	21
3.1.3 Paretovo rozdělení . . . . .	23
3.1.4 Logaritmicke-normální rozdělení . . . . .	25
3.2 Složené negativně binomické rozdělení . . . . .	27
3.2.1 Exponenciální rozdělení . . . . .	27
3.2.2 Gama rozdělení . . . . .	29
3.2.3 Paretovo rozdělení . . . . .	31
3.2.4 Logaritmicke-normální rozdělení . . . . .	33
<b>Závěr</b>	<b>35</b>
<b>Seznam použité literatury</b>	<b>36</b>

# Úvod

Stanovení pojistných sazeb je ve finančním světě jedním ze základních problémů. V této práci rozebíráme míry rizika, pomocí kterých se tyto sazby dále určují. Zaměřujeme se především na hodnotu v riziku, resp. podmíněnou hodnotu v riziku, a na koherenci měr rizika. Dále se také věnujeme rozdělení počtů a výší ztrát, jež jsou rozhodující pro rozdělení celkového úhrnu škod.

Na začátku první kapitoly dělíme míry rizika podle typu bezpečnostní přírážky na čtyři kategorie. První typ je bez bezpečnostní přírážky, druhá kategorie má bezpečnostní přírážku zavedenou pomocí střední hodnoty a třetí typ, resp. poslední kategorie, má bezpečnostní přírážku vyjádřenou rozptylem, resp. směrodatnou odchylkou. Následně zavádíme pojem koherence a ukazujeme, zda jsou uvedené míry rizika koherentní nebo ne.

V další části této kapitoly se věnujeme hodnotě v riziku a na příkladu ukazujeme, že tato míra rizika není koherentní. V poslední podkapitole se zaměřujeme na podmíněnou hodnotu v riziku a podrobněji rozebíráme její vlastnosti.

V druhé kapitole zkoumáme principy sazbování. Nejprve uvádíme nejčastěji používaná rozdělení výše ztrát, mezi která se zařazují exponenciální, gama, Pareto a logaritnicko-normální rozdělení. Dále představujeme některá nejběžnější rozdělení počtu ztrát jako Poissonovo či negativně binomické rozdělení.

Následně zavádíme pojem složeného rozdělení. Nakonec odvozujeme střední hodnotu, rozptyl, hodnotu v riziku a podmíněnou hodnotu v riziku pro složené Poissonovo a pro složené negativně binomické rozdělení.

V poslední kapitole této bakalářské práce uvádíme numerickou studii pro konkrétně zvolené parametry. Kapitola je rozdělena do dvou hlavních částí dle typu složeného rozdělení. Tyto části následně dělíme dle typu rozdělení výše ztrát. Pro každou kategorii počítáme střední hodnotu a rozptyl celkového úhrnu ztrát s konkrétně zvolenými parametry a tím ukazujeme, jak se tyto momenty mění v závislosti nejen na typu rozdělení výše ztrát, ale i na hodnotách parametrů rozdělení počtu ztrát. Pro výpočet hodnoty v riziku je nutno nejprve určit distribuční funkci celkového úhrnu ztrát, kterou počítáme pomocí vzájemného vztahu zavedených pravděpodobnostních vytvořujících funkcí. Průběh výsledné distribuční funkce na kladné poloose vykreslíme do grafu. Dále také počítáme hodnotu v riziku a podmíněnou hodnotu v riziku a následně vykreslíme jejich průběhy do grafu v závislosti na parametru  $\alpha$ .

Veškeré výpočty provádíme v programu Wolfram Mathematica 10.0.

# Kapitola 1

## Míry rizika

V této kapitole se budeme zabývat mírami rizika. Zavedeme si pojem míry rizika a uvedeme si, jaké existují principy stanovení pojistného na základě měř rizika. Dále si ukážeme význam koherence, což je jedna ze základních zkoumaných vlastností měř rizika. Nakonec se budeme více věnovat hodnotě v riziku, respektive podmíněné hodnotě v riziku.

**Definice 1.1** Necht  $X$  je nezáporná náhodná veličina vyjadřující ztrátu. Potom *míra rizika* náhodné veličiny  $X$ , značená  $\rho(X)$ , je reálná funkce  $\rho : X \rightarrow R$ , kde  $R$  je množina všech reálných čísel.

**Poznámka.** Pro účel měření pojistných rizik předpokládejme, že  $\rho(X)$  nezáporná míra rizika.

Nyní si označme střední hodnotu náhodné veličiny  $X$  jako  $EX = \mu_X$  a její rozptyl jako  $\text{var}X = \sigma_X^2$ .

Rozptyl náhodné veličiny  $X$  odvodíme ze vztahu  $\text{var}X = EX^2 - (EX)^2$ . Směrodatnou odchylku náhodné veličiny  $X$  označíme  $\sigma_X = \sqrt{\text{var}X}$ .

### 1.1 Pojistné a míry rizika

V této podkapitole se budeme věnovat principům stanovení míry rizika pomocí tzv. *bezpečnostní přírážky*.

Uveďme si několik metod, jak lze odvodit míru rizika  $\rho(X)$ :

**a)** ryzí pojistné

Míra rizika  $\rho(X)$  je určena na základě ryzího pojistného bez bezpečnostní přírážky, tj.  $\rho(X) = \mu_X$ .

**b)** princip střední hodnoty

Míra rizika  $\rho(X)$  je určena na základě ryzího pojistného s bezpečnostní přírážkou, která je vyjádřena pomocí střední hodnoty náhodné veličiny  $X$ , tj.  $\rho(X) = (1 + \theta)\mu_X$ , kde  $\theta \geq 0$ .

**c)** princip rozptylu

Míra rizika  $\rho(X)$  je určena na základě ryzího pojistného s bezpečnostní přírážkou, která je vyjádřena pomocí rozptylu náhodné veličiny  $X$ , tj.  $\rho(X) = \mu_X + \theta\sigma_X^2$ ,

kde  $\theta \geq 0$ .

d) princip směrodatné odchylky

Míra rizika  $\rho(X)$  je určena na základě ryzího pojistného s bezpečnostní přírážkou, která je vyjádřena pomocí směrodatné odchylky náhodné veličiny  $X$ , tj.  $\rho(X) = \mu_X + \theta\sigma_X$ , kde  $\theta \geq 0$ .

## 1.2 Koherence

Koherence míry rizika je jedna z jejích základních zkoumaných vlastností a lze ji zavést několika způsoby. V některých zdrojích (viz [2]) se tato koherence definuje pomocí čtyř axiomů – monotónie, pozitivní homogenita, subaditivita, translační invariance (viz níže) – v jiné literatuře (viz [6]) najdeme axiomy monotónie, translační invariance a konvexity. Nicméně konvexita obecně neimplikuje pozitivní homogenitu, a proto míry rizika splňující pouze tyto 3 axiomy se někdy nazývají *slabě koherentní*. V dalších zdrojích (viz [1],[6]) lze najít definici koherence využívající tvrzení, že libovolná pozitivně homogenní míra rizika je konvexní právě tehdy, když je subaditivní.

My zavedeme koherenci míry rizika pomocí axiomů monotónie, translační invariance, subaditivity a pozitivní homogenity.

**Definice 1.2.1** Řekneme, že míra rizika  $\rho(X)$  je *koherentní*, pokud jsou splněny následující 4 axiomy:

**Axiom 1** [Translační invariance] Pro libovolnou náhodnou veličinu  $X$  a libovolné  $a \geq 0$  platí  $\rho(X + a) = \rho(X) + a$ .

**Axiom 2** [Subaditivita] Pro libovolné náhodné veličiny  $X$  a  $Y$  platí  $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ .

**Axiom 3** [Pozitivní homogenita] Pro libovolnou náhodnou veličinu  $X$  a libovolné  $a \geq 0$  platí  $\rho(aX) = a\rho(X)$ .

**Axiom 4** [Monotónie] Pro libovolné náhodné veličiny  $X$  a  $Y$  takové, že  $X \leq Y$ , platí  $\rho(X) \leq \rho(Y)$ .

Nyní rozebereme koherenci jednotlivých měr rizika zavedených v podkapitole 1.1.

**Tvrzení 1.2.1** Míra rizika založená na ryzím pojistném je koherentní mírou rizika.

**Důkaz.** Ověříme, že pro tuto míru rizika platí všechny čtyři axiomy.

Axiom 1: Pro libovolnou náhodnou veličinu  $X$  a libovolné  $a \geq 0$  máme  $\rho(X + a) = E(X + a) = EX + a = \rho(X) + a$ .

Axiom 2: Pro libovolné náhodné veličiny  $X$  a  $Y$  máme  $\rho(X + Y) = E(X + Y) = EX + EY = \rho(X) + \rho(Y)$ .

Axiom 3: Pro libovolnou náhodnou veličinu  $X$  a libovolné  $a \geq 0$  máme  $\rho(aX) = E(aX) = aEX = a\rho(X)$ .

Axiom 4: Pro libovolné náhodné veličiny  $X$  a  $Y$  takové, že  $X \leq Y$ , platí  $EX \leq EY$ . Z toho tedy okamžitě vyplývá, že i  $\rho(X) \leq \rho(Y)$ .

Jelikož míra rizika založená na ryzím pojistném splňuje všechny axiomy, je koherentní mírou rizika.  $\square$



**Tvrzení 1.2.2** Míra rizika založená na principu střední hodnoty není koherentní mírou rizika. Axiomy subaditivity, pozitivní homogenity a monotónie jsou sice splněny, ale axiom translační invariance je porušen.

**Důkaz.**

Axiom 1: Pro libovolnou náhodnou veličinu  $X$ , libovolné  $a \geq 0$  a  $\theta > 0$  máme  $\rho(X + a) = (1 + \theta)E(X + a) > (1 + \theta)EX + a = \rho(X) + a$ .

Axiom 2: Pro libovolné náhodné veličiny  $X$  a  $Y$  a libovolné  $\theta \geq 0$  máme  $\rho(X + Y) = (1 + \theta)E(X + Y) = (1 + \theta)EX + (1 + \theta)EY = \rho(X) + \rho(Y)$ .

Axiom 3: Pro libovolnou náhodnou veličinu  $X$  a libovolné  $\theta, a \geq 0$  máme  $\rho(aX) = (1 + \theta)E(aX) = a(1 + \theta)EX = a\rho(X)$ .

Axiom 4: Pro libovolné  $\theta \geq 0$  a libovolné náhodné veličiny  $X$  a  $Y$  takové, že  $X \leq Y$ , platí  $EX \leq EY$ . Tedy,  $\rho(X) = (1 + \theta)EX > (1 + \theta)EY = \rho(Y)$ .

Dokázali jsme, že pro míru rizika založenou na principu střední hodnoty platí axiomy subaditivity, pozitivní homogenity a monotónie. Avšak axiom translační invariance pro  $\theta > 0$  neplatí (pro  $\theta = 0$  se dostáváme do situace, kdy míra rizika je založená na ryzím pojistném). Z tohoto důvodu míra rizika založená na principu střední hodnoty není koherentní mírou rizika.  $\square$

**Tvrzení 1.2.3** Míra rizika založená na principu rozptylu není koherentní mírou rizika. Axiom translační invariance je splněn, avšak axiomy subaditivity, monotónie a pozitivní homogenity jsou porušeny.

**Důkaz.**

Axiom 1: Pro libovolnou náhodnou veličinu  $X$  a libovolné  $\theta, a \geq 0$  máme  $\rho(X + a) = E(X + a) + \theta\text{var}(X + a) = EX + Ea + \theta\text{var}X = EX + \theta\text{var}X + a = \rho(X) + a$ .

Axiom 2: Pro libovolné  $\theta \geq 0$  a libovolné náhodné veličiny  $X$  a  $Y$  máme  $\rho(X + Y) = E(X + Y) + \theta\text{var}(X + Y) = EX + EY + \theta\text{var}X + \theta\text{var}Y + 2\theta\text{cov}(X, Y) = \rho(X) + \rho(Y) + 2\theta\text{cov}(X, Y)$ . Člen  $\text{cov}(X, Y)$  může mít libovolné znaménko a axiom subaditivity tedy obecně neplatí.

Axiom 3: Pro libovolnou náhodnou veličinu  $X$  a libovolné  $\theta, a \geq 0$  máme  $\rho(aX) = E(aX) + \theta\text{var}(aX) = aEX + \theta a^2\text{var}X \neq a\rho(X)$ .

Axiom 4: Pro libovolné  $\theta \geq 0$  a libovolné náhodné veličiny  $X$  a  $Y$  takové, že  $X \leq Y$ . Víme, že  $X \leq Y$  implikuje  $EX \leq EY$ . Nicméně  $X \leq Y$  již neimplikuje  $\text{var}X \leq \text{var}Y$  a tudíž axiom monotónie obecně neplatí.

Ukázali jsme, že pro míru rizika založenou na principu rozptylu platí pouze axiom translační invariance a ostatní axiomy obecně pro tuto míru rizika neplatí. Tato míra rizika tedy není koherentní mírou rizika.  $\square$

**Tvrzení 1.2.4** Míra rizika založená na principu směrodatné odchylky není koherentní mírou rizika, protože je porušen axiom monotónie. Nicméně axiomy translační invariance, subaditivity a pozitivní homogenity jsou splněny.

**Důkaz.**

Axiom 1: Pro libovolnou náhodnou veličinu  $X$  a libovolné  $\theta, a \geq 0$  máme  $\rho(X + a) = E(X + a) + \theta\sqrt{\text{var}(X + a)} = a + EX + \theta\sqrt{\text{var}X} = \rho(X) + a$ .

Axiom 2: Pro libovolné  $\theta \geq 0$  a libovolné náhodné veličiny  $X$  a  $Y$  máme  $\rho(X + Y) = E(X + Y) + \theta\sqrt{\text{var}(X + Y)} = EX + EY + \theta\sqrt{\text{var}X + \text{var}Y + 2\text{cov}(X, Y)} \leq EX + \theta\sqrt{\text{var}X} + EY + \theta\sqrt{\text{var}Y} = \rho(X) + \rho(Y)$ .

$$= \rho(X) + \rho(Y).$$

Podrobněji ukážeme platnost nerovnosti. Výraz

$$\theta\sqrt{\text{var}X + \text{var}Y + 2\text{cov}(X,Y)} \leq \theta\sqrt{\text{var}X} + \theta\sqrt{\text{var}Y}$$

po zkrácení  $\theta$  a umocnění obou stran dává

$$\text{var}X + \text{var}Y + 2\text{cov}(X,Y) \leq \text{var}X + \text{var}Y + 2\sqrt{\text{var}X \cdot \text{var}Y}.$$

Z toho vyplývá, že

$$\frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{var}X \cdot \text{var}Y}} \leq 1,$$

což vždy platí dle vlastností korelačního koeficientu, vyplývajících z Cauchy-Schwarzovy nerovnosti. (viz [4])

**Axiom 3:** Pro libovolnou náhodnou veličinu  $X$  a libovolné  $\theta, a \geq 0$  máme  $\rho(aX) = E(aX) + \theta\sqrt{\text{var}(aX)} = aEX + \theta\sqrt{a^2\text{var}X} = aEX + a\theta\sqrt{\text{var}X} = a\rho(X)$ .

**Axiom 4:** Pro libovolné  $\theta \geq 0$  a libovolné náhodné veličiny  $X$  a  $Y$  takové, že  $X \leq Y$ . Víme, že  $X \leq Y$  implikuje  $EX \leq EY$ . Nicméně  $X \leq Y$  již neimplikuje  $\sqrt{\text{var}X} \leq \sqrt{\text{var}Y}$  a tudíž axiom monotónie obecně neplatí.

Dokázali jsme, že pro míru rizika založenou na principu střední hodnoty platí axiomy translační invariance, subaditivity a pozitivní homogenity, ale axiom monotónie nikoliv. Z tohoto poznatku vyplývá, že míra rizika založená na principu směrodatné odchylky není koherentní mírou rizika.  $\square$

## 1.3 Hodnota v riziku

V této podkapitole se budeme zabývat jednou z nejpoužívanějších měr rizika nazývanou *hodnota v riziku*, anglicky *value-at-risk* (zkráceně VaR).

**Definice 1.3.1** *Hodnotu v riziku* definujeme jako  $\alpha$ -kvantil náhodné veličiny  $X$ , tj.

$$\text{VaR}_\alpha(X) = \Psi^{-1}(\alpha) = \min \{x \in [0, \infty) : \Psi(x) \geq \alpha\}. \quad (1.1)$$

$\text{VaR}_\alpha$  nám tedy udává velikost ztráty, která nebude s pravděpodobností  $\alpha$  překročena. Veličina  $\Psi(x)$  označuje zleva spojitou distribuční funkci náhodné veličiny  $X$ . Parametr  $\alpha \in (0,1)$  většinou volíme blízký 1, např.  $\alpha = 0,95$  nebo  $\alpha = 0,99$ .

**Poznámka.** Dále předpokládáme, že  $EX < \infty$ . Tento předpoklad konečné střední hodnoty není nutný zavádět pro VaR, pro CVaR nicméně splněn být musí a bude se nám hodit například v důkazu Tvzení 1.4.2.1.

Minimum je vždy dosaženo, protože funkce  $\Psi(x)$  je neklesající a zprava spojitá v proměnné  $x$ . Jestliže je  $\Psi(x)$  spojitá a rostoucí funkce, pak  $\text{VaR}_\alpha(X)$  je jednoznačně dána řešením  $x$  splňujícím rovnici  $\Psi(x) = \alpha$ . Pokud dané podmínky nejsou splněny, tato rovnice nemá žádné nebo naopak více řešení.

Přestože VaR patří mezi nejfrekventovanější míry rizika, existují nedostatky, které se zdají být zásadní. Jeden z nich je, že hodnota v riziku není koherentní

mírou v riziku dle definice 1.2.1, protože nesplňuje axiom subaditivity. Ukažme si příklad, kde je tento axiom porušen (viz také [5]):

Mějme portfolio složené ze dvou dluhopisů A a B, jejichž tržní hodnoty a pravděpodobnosti, se kterými těchto hodnot nabývají, jsou dány v Tabulce 1.1. Snadno lze vypočítat  $\text{VaR}_{95\%}$ , který je uveden v Tabulce 1.2. Z Tabulky 1.2 je již dle autorů článku [5] zřejmé, že axiom subaditivity je skutečně porušen, z čehož vyplývá, že hodnota v riziku není koherentní mírou rizika.

Dále je hodnota v riziku špatně interpretovatelná pro ztráty, které nemají „normální“ rozdělení — což je častý jev, protože rozdělení ztrát má těžké chvosty nebo bývá diskrétní. S tím souvisí problém, že VaR není schopen určit velikost ztráty, pokud je překročena hranice  $\alpha$ . Nevíme tedy, jestli je příslušná ztráta jen nepatrně větší, než bylo spočítáno pomocí VaR, nebo zda tato ztráta dosahuje ohromných velikostí. Abychom měli představu o velikosti ztráty, která překračuje daný  $\alpha$ -kvantil, zavádíme další míru rizika v podkapitole 1.4.

## 1.4 Podmíněná hodnota v riziku

V podkapitole 1.3 jsme zavedli míru rizika značenou jako  $\text{VaR}_\alpha$ , která udává velikost ztráty, která nebude překročena s pravděpodobností  $\alpha$ . Nicméně jsme zjistili, že tato míra rizika neukazuje velikost ztráty pokud dojde k překročení příslušného  $\alpha$ -kvantilu. Z tohoto důvodu si nyní zavedeme další míru rizika zvanou *podmíněná hodnota v riziku*, anglicky *conditional value-at-risk* (zkráceně CVaR). Následně odvodíme minimalizační formuli, díky které lze vypočítat současně VaR a CVaR na hladině  $\alpha$  ztráty  $X$ .

### 1.4.1 Definice a základní vlastnosti

**Definice 1.4.1.1** *Podmíněnou hodnotu v riziku* pro spojitě rozdělenou náhodnou veličinu  $X$  lze definovat jako

$$\text{CVaR}_\alpha(X) = E[X|X > \text{VaR}_\alpha(X)] = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{\text{VaR}_\alpha(X)}^{\infty} x f_X(x) dx, \quad (1.2)$$

A	B	A+B	Pravděpodobnost
70	100	170	3 %
90	100	190	2 %
100	70	170	3 %
100	90	190	2 %
100	100	200	90 %

Tabulka 1.1: Portfolio složené ze dvou dluhopisů A a B.

	A	B	A+B
Střední hodnota	98,9	98,9	197,8
$\text{VaR}_{0,95}$	8,9	8,9	27,8

Tabulka 1.2: VaR na hladině 0,95.

kde  $f_X$  je hustota náhodné veličiny  $X$ .

Existuje více možností, jak CVaR definovat. Ukážeme si tedy ještě jiný způsob zavedení podmíněné hodnoty v riziku. Navíc tento způsob definice je výhodnější v tom směru, že náhodná veličina vyjadřující ztrátu nemusí být spojitá.

**Definice 1.4.1.2** [viz [8] nebo [1], str. 1448-1449] *Podmíněná hodnota v riziku* na hladině  $\alpha$  je definována jako  $\text{CVaR}_\alpha(X) =$  střední hodnota rozdělení ztráty  $X$ , která překročila hladinu  $\alpha$ , kde rozdělení ztráty  $X$  má distribuční funkci  $\Psi_\alpha(x)$  definovanou jako

$$\begin{aligned}\Psi_\alpha(x) &= 0 && \text{pro } x < \text{VaR}_\alpha(X), \\ &= \frac{\Psi(x) - \alpha}{1 - \alpha} && \text{pro } x \geq \text{VaR}_\alpha(X).\end{aligned}$$

Vezměme si situaci, kdy distribuční funkce  $\Psi(x)$  má skok v bodě  $\text{VaR}_\alpha(X)$ . V tomto případě má interval  $[\text{VaR}_\alpha(x), \infty)$  pravděpodobnost větší než  $1 - \alpha$ , takže vyvstává otázka, co je vlastně míněno rozdělením ztráty, které překročilo hranici  $\alpha$ . Právě definice 1.4.1.2 tento problém řeší pomocí zavedení nové distribuční funkce  $\Psi_\alpha(x)$ .

Pro další výpočty je výhodné si zdefinovat další dvě varianty podmíněné hodnoty v riziku, které označíme  $\text{CVaR}^+$ , respektive  $\text{CVaR}^-$ .

**Definice 1.4.1.3** Horní podmíněná hodnota v riziku na hladině  $\alpha$  je definována jako

$$\text{CVaR}_\alpha^+(X) = E[X | X > \text{VaR}_\alpha(X)]$$

a dolní podmíněná hodnota v riziku na hladině  $\alpha$  je definována jako

$$\text{CVaR}_\alpha^-(X) = E[X | X \geq \text{VaR}_\alpha(X)].$$

Uvedené veličiny  $\text{CVaR}^+$  a  $\text{CVaR}^-$  nejsou koherentními měrami rizika (důkaz viz [7]).

Nyní si uvedeme základní vztahy mezi zavedenými veličinami  $\text{CVaR}$ ,  $\text{CVaR}^+$  a  $\text{CVaR}^-$ .

**Tvrzení 1.4.1.1** [viz [1], str. 1449] Pokud v bodě  $\text{VaR}_\alpha(X)$  distribuční funkce nemá skok, potom

$$\text{CVaR}_\alpha^-(X) = \text{CVaR}_\alpha(X) = \text{CVaR}_\alpha^+(X).$$

Jestliže v bodě  $\text{VaR}_\alpha(X)$  je skok, pak

$$\text{CVaR}_\alpha^-(X) < \text{CVaR}_\alpha(X) = \text{CVaR}_\alpha^+(X),$$

pokud  $\alpha = \Psi(\text{VaR}_\alpha(X))$ , nebo

$$\text{CVaR}_\alpha^-(X) = \text{CVaR}_\alpha(X),$$

pokud  $\Psi(\text{VaR}_\alpha(X)) = 1$ . Jinak platí

$$\text{CVaR}_\alpha^-(X) < \text{CVaR}_\alpha(X) < \text{CVaR}_\alpha^+(X),$$

tj. ve všech případech, kdy  $\Psi(\text{VaR}_\alpha(X)^-) < \alpha < \Psi(\text{VaR}_\alpha(X)) < 1$ .

**Důkaz.** K důkazu tohoto tvrzení si potřebujeme ukázat, jak vypadají distribuční funkce, pomocí kterých jsou definovány  $\text{CVaR}^+$  a  $\text{CVaR}^-$ . Distribuční funkce  $\text{CVaR}_\alpha^+(X)$  je definována jako

$$\begin{aligned}\Psi_\alpha^+(x) &= 0 && \text{pro } x < \text{VaR}_\alpha(X), \\ &= \frac{\Psi(x) - \alpha^+}{1 - \alpha^+} && \text{pro } x \geq \text{VaR}_\alpha(X),\end{aligned}$$

kde  $\alpha^+ = \Psi(\text{VaR}_\alpha(X))$ .

Distribuční funkce  $\text{CVaR}_\alpha^-$  je definována jako

$$\begin{aligned}\Psi_\alpha^-(x) &= 0 && \text{pro } x < \text{VaR}_\alpha(X), \\ &= \frac{\Psi(x) - \alpha^-}{1 - \alpha^-} && \text{pro } x \geq \text{VaR}_\alpha(X),\end{aligned}$$

kde  $\alpha^- = \Psi(\text{VaR}_\alpha(X)^-) = \lim_{x \rightarrow \text{VaR}_\alpha(X)^-} \Psi(x)$ .

Uvědomme si, že  $\alpha^-$  a  $\alpha^+$  označují dolní a horní mez skoku v bodě  $\text{VaR}_\alpha(X)$ . Nyní již stačí rozebrat jednotlivé případy vztahů mezi těmito dvěma mezemi.  $\square$

**Tvrzení 1.4.1.2** [CVaR jako vážený průměr] Nechť  $\lambda_\alpha$  je pravděpodobnost, že ztráta  $X = \text{VaR}_\alpha(X)$ , kde

$$\lambda_\alpha = \frac{\Psi(\text{VaR}_\alpha(X)) - \alpha}{1 - \alpha} \in [0,1].$$

Pokud  $\Psi(\text{VaR}_\alpha(X)) < 1$ , existuje možnost ztráty větší než  $\text{VaR}_\alpha(X)$ , tedy

$$\text{CVaR}_\alpha(X) = \lambda_\alpha \text{VaR}_\alpha(X) + [1 - \lambda_\alpha] \text{CVaR}_\alpha^+(X),$$

kde  $\lambda_\alpha < 1$ . Jestliže  $\Psi(\text{VaR}_\alpha(X)) = 1$ , potom  $\text{VaR}_\alpha(X)$  je největší možná ztráta, která může nastat (a  $\lambda_\alpha = 1$ ), tj.  $\text{CVaR}_\alpha(X) = \text{VaR}_\alpha(X)$ .

**Důkaz.** Tvrzení 1.4.1.2 vyplývá z definice 1.4.1.2 a z definice 1.3.1 která ukazuje, že výraz  $\alpha \leq \Psi(\text{VaR}_\alpha(X))$  vždy platí.  $\square$

Skutečnost, že CVaR lze vyjádřit jako vážený průměr VaR a  $\text{CVaR}^+$ , může být trochu překvapující. Například CVaR je koherentní mírou rizika (viz tvrzení 1.4.2.2), přestože VaR ani  $\text{CVaR}^+$  nejsou koherentní (viz [5], respektive [7]).

Nyní si můžeme ukázat, jak CVaR konkrétně vypadá pro diskrétní rozdělení ztrát.

**Tvrzení 1.4.1.3** [viz [1], str. 1453] Nechť rozdělení veličiny  $X$  je diskrétní s realizacemi  $z_1 < z_2 < \dots < z_N$ . Seřadíme body  $z_k$  tak, že  $z_1 < z_2 < \dots < z_N$ , kde pravděpodobnost  $z_k$  je  $p_k > 0$ . Označme  $k_\alpha$  jako index splňující

$$\sum_{k=1}^{k_\alpha} p_k \geq \alpha > \sum_{k=1}^{k_\alpha-1} p_k. \quad (1.3)$$

Potom VaR na hladině  $\alpha$  je dán výrazem  $\text{VaR}_\alpha(X) = z_{k_\alpha}$  a CVaR na hladině  $\alpha$  je dán

$$\text{CVaR}_\alpha(X) = \frac{1}{1 - \alpha} \left[ \left( \sum_{k=1}^{k_\alpha} p_k - \alpha \right) z_{k_\alpha} + \sum_{k=k_\alpha+1}^N p_k z_k \right].$$

V této situaci je tvar  $\lambda_\alpha$  následující a platí nerovnost

$$\lambda_\alpha = \frac{1}{1 - \alpha} \left( \sum_{k=1}^{k_\alpha} p_k - \alpha \right) \leq \frac{p_{k_\alpha}}{p_{k_\alpha} + \dots + p_N}.$$

**Důkaz.** Dle výrazu 1.3 máme dáno

$$\Psi(\text{VaR}_\alpha(X)) = \sum_{k=1}^{k_\alpha} p_k,$$

$$\Psi(\text{VaR}_\alpha(X)^-) = \sum_{k=1}^{k_\alpha-1} p_k,$$

$$\Psi(\text{VaR}_\alpha(X)) - \Psi(\text{VaR}_\alpha(X)^-) = p_{k_\alpha}.$$

Rovnosti potom vyplývají z definice  $\text{CVaR}_\alpha(X)$  zavedené v definici 1.4.1.2 a z tvrzení 1.4.1.2.  $\square$

**Důsledek.** [Nejvyšší ztráty] Pokud  $z_N$  má pravděpodobnost  $p_N > 1 - \alpha$ , potom  $\text{CVaR}_\alpha(X) = \text{VaR}_\alpha(X) = z_N$ .

**Důkaz.** V tvrzení 1.4.1.3 položíme  $k_\alpha = N$  a dosadíme do vzorců pro VaR a CVaR.  $\square$

## 1.4.2 Minimalizační formule a koherence

Nyní si již můžeme ukázat, jak společně spočítat VaR a CVaR na hladině  $\alpha$  ztráty  $X$  díky řešení základního optimalizačního problému. Nejprve zavedeme speciální funkci

$$F_\alpha(X, \zeta) = \zeta + \frac{1}{1 - \alpha} \mathbb{E} \{ [X - \zeta]^+ \}, \quad (1.4)$$

kde  $[X - \zeta]^+ = \max \{0, X - \zeta\}$ . Právě tuto funkci využijeme v naší minimalizační formuli.

**Tvrzení 1.4.2.1** [Minimalizační formule; viz [1], str. 1454] Nechť  $\zeta \in R$  a  $\alpha \in (0,1)$ . Potom  $F_\alpha(X, \zeta)$  je omezená a konvexní (a tudíž spojitá) funkce, kde

$$\text{CVaR}_\alpha(X) = \min_{\zeta} F_\alpha(X, \zeta) \quad (1.5)$$

a navíc

$\text{VaR}_\alpha(X) =$  dolní koncový bod  $\arg \min_{\zeta} F_\alpha(X, \zeta)$  a

$\text{VaR}_\alpha^+(X) =$  horní koncový bod  $\arg \min_{\zeta} F_\alpha(X, \zeta)$ ,

kde  $\arg \min$  odkazuje na množinu bodů  $\zeta$  takových, pro které je minimum dosaženo. V tomto případě to musí být neprázdný, uzavřený a omezený interval. Tedy vždy platí, že  $\text{VaR}_\alpha(X) \in \arg \min_{\zeta} F_\alpha(X, \zeta)$  a  $\text{CVaR}_\alpha(X) = F_\alpha(X, \text{VaR}_\alpha(X))$ .

**Důkaz.** Omezenost funkce  $F_\alpha(X, \cdot)$  vyplývá již z poznámky za definicí 1.3.1, tedy  $EX < \infty$ . Její konvexita je dána konvexitou výrazu  $[X - \zeta]^+$  vzhledem k  $\zeta$ . Jako omezená konvexní funkce, má  $F_\alpha(X, \cdot)$  konečné derivace zprava a zleva v každém bodě  $\zeta$ .

V dalším průběhu důkazu počítáme tyto derivace a limity. Nakonec využijeme platnosti výrazu  $\Psi(\zeta^-) \leq \alpha \leq \Psi(\zeta)$ . Podrobný důkaz lze najít v [1], str. 1454–1456.  $\square$

Tvrzení 1.4.2.1 ukazuje rozdíl mezi VaR a CVaR a odhaluje, proč se CVaR „chová“ mnohem lépe než VaR. Důvodem je fakt, že optimální hodnota v minimalizačním problému, v našem případě  $\text{CVaR}_\alpha(X)$ , je mnohem více přijatelná jako funkce proměnné  $X$  než jako množina optimálních řešení, která je zde reprezentována intervalem argmin mající  $\text{VaR}_\alpha(X)$  jako dolní koncový bod.

Na závěr této kapitoly ukážeme, že podmíněná hodnota v riziku je koherentní mírou rizika.

**Tvrzení 1.4.2.2** Podmíněná hodnota v riziku je koherentní mírou rizika.

**Důkaz.** V důkazu tvrzení 1.4.2.2 nevyužíváme všechny axiomy zavedené v definici 1.2.1, ale najdeme zde mírné úpravy. Není například dokázán přímo axiom subaditivity, ale jsou odvozeny platnosti axiomů pozitivní homogenity a konvexity, z kterých již subaditivita přímo vyplývá. Celý důkaz lze opět najít v [1], str. 1458 (s využitím poznatků ze str. 1456–1457).

Ukážeme zde alespoň důkaz konvexity  $\text{CVaR}_\alpha(X)$  tak, jak je uveden v [1]. Příslušné tvrzení zní:

Jestliže je funkce  $F_\alpha(X, \zeta)$  konvexní vzhledem k  $X$ , potom  $\text{CVaR}_\alpha(X)$  je také konvexní vzhledem k  $X$ .

Konvexita funkce  $F_\alpha(X, \zeta)$  vyplývá přímo z definice této funkce v 1.4 a z konvexity výrazu  $[X - \zeta]^+$ . Konvexita  $\text{CVaR}_\alpha(X)$  potom ihned vyplývá z minimalizační formule 1.5.  $\square$

# Kapitola 2

## Principy sazbování

V této kapitole nejprve uvedeme, jaká rozdělení mohou mít počty a výše ztrát a jejich základní charakteristiky. Dále definujeme složené rozdělení a ukážeme, která rozdělení může mít celkový úhrn ztrát. Následně odvodíme střední hodnotu, rozptyl, hodnotu v riziku a podmíněnou hodnotu v riziku pro každé z těchto složených rozdělení.

### 2.1 Výše ztrát

Obecně lze říci, že rozdělení výše ztrát je spojitě s nosičem  $[0, \infty)$ . Tato rozdělení také vykazují kladnou šikmost, tj. existuje větší četnost výskytu menších ztrát. Koeficient šikmosti (za předpokladu konečného třetího momentu) lze spočítat jako

$$\gamma_1 = \frac{E(X - EX)^3}{(\text{var}X)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.1)$$

**Poznámka.** Uvedeme zde pouze výčet rozdělení a některé jejich základní charakteristiky; podrobné odvození jednotlivých momentů lze nalézt v [3].

Výše ztrát (značíme  $X$ ) modelujeme nejčastěji těmito rozděleními:

#### a) exponenciální rozdělení

Exponenciální rozdělení je definováno hustotou  $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$  pro  $x \geq 0$  a  $\alpha > 0$ . Střední hodnota je rovna  $\frac{1}{\alpha}$  a rozptyl se rovná  $\frac{1}{\alpha^2}$ . Koeficient šikmosti, odvozený ze vzorce 2.1, je roven 2 (a tedy nezávislý na parametru  $\alpha$ ).

Toto rozdělení má lehký pravý chvost, což znamená, že velkých hodnot je nabýváno s malou pravděpodobností. Nicméně výše ztrát mající exponenciální rozdělení nemají v praxi přílišné uplatnění, protože závisí pouze na jednom parametru.

#### b) gama rozdělení

Rozdělení gama je definováno hustotou  $f(x) = \frac{\alpha^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\alpha x}$ , kde  $x \geq 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $p > 0$ . Následně lze ukázat, že střední hodnota je rovna  $\frac{p}{\alpha}$  a rozptyl je ve tvaru  $\frac{p}{\alpha^2}$ . Koeficient šikmosti, opět odvozený ze vzorce 2.1, se rovná  $\frac{2}{\sqrt{p}}$ .

Výše ztrát s gama rozdělením je jeden z nejpoužívanějších modelů. Závisí totiž, narozdíl od výší ztrát s exponenciálním rozdělením, na dvou parametrech



a stejně jako předešlý model má lehký pravý chvost, protože jeho hustota konverguje k 0 pro  $x \rightarrow \infty$  exponenciálně rychle. Gama rozdělení s parametry  $\alpha$  a  $p = 1$  dokonce přímo odpovídá exponenciálnímu rozdělení s parametrem  $\alpha$ .

**c) Paretovo rozdělení**

Paretovo rozdělení je definováno hustotou  $f(x) = a^\alpha \alpha (x+a)^{-\alpha-1}$ , kde  $x \geq 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $a > 0$ . Střední hodnota, která je konečná pouze pro  $\alpha > 1$ , je rovna  $\frac{a}{\alpha-1}$ . Rozptyl se rovná  $\frac{\alpha a^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$  a je konečný pouze pro  $\alpha > 2$ .

Koeficient šikmosti Paretova rozdělení pro  $\alpha > 3$  je ve tvaru

$$\gamma_1 = \frac{2(\alpha + 1)}{(\alpha - 3)\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-2}}}.$$

Paretovo rozdělení je označováno za rozdělení s těžkým pravým chvostem, protože hustota ve srovnání s exponenciálním rozdělením konverguje k 0 při  $x \rightarrow \infty$  pomalu, tj.  $f(x) = O(x^{-\alpha-1})$ .

**d) logaritmicko-normální rozdělení**

Logaritmicko-normální rozdělení je definováno hustotou

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\},$$

kde  $x > 0$ ,  $\mu \in R$  a  $\sigma^2 > 0$ . Dále lze odvodit střední hodnotu, která se rovná  $e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$ , a rozptyl, který je roven  $e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$ .

Koeficient šikmosti má tvar

$$\gamma_1 = \frac{e^{2\sigma^2} + e^{\sigma^2} - 2}{\sqrt{e^{\sigma^2} - 1}}.$$

Logaritmicko-normální rozdělení je také považováno za rozdělení s těžším pravým chvostem, ale jeho hustota konverguje k 0 pro  $x \rightarrow \infty$  rychleji než hustota Paretova rozdělení.

Přehled momentů všech uvedených rozdělení názorně ukážeme v Tabulce 2.1 (předpokládáme, že parametry  $a, p, \alpha, \sigma^2$  jsou kladné, parametr  $\mu \in R$  a  $k$ -tý moment Paretova rozdělení je konečný pouze pro  $\alpha > k$ ).

rozdělení	EX	varX	$\gamma_1$
exponenciální	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha^2}$	2
gama	$\frac{p}{\alpha}$	$\frac{p}{\alpha^2}$	$\frac{2}{\sqrt{p}}$
Paretovo	$\frac{a}{\alpha-1}$	$\frac{\alpha a^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$	$\frac{2(\alpha+1)}{(\alpha-3)} \left(\frac{\alpha}{\alpha-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$
logaritmicko-normální	$e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$	$e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$	$(e^{2\sigma^2} + e^{\sigma^2} - 2)(e^{\sigma^2} - 1)^{-\frac{1}{2}}$

Tabulka 2.1: Rozdělení výší ztrát a jejich momenty.

## 2.2 Počty ztrát

Rozdělení počtu ztrát je obecně diskrétní rozdělení na hodnotách  $0, 1, 2, \dots$

Opět zde uvedeme pouze výčet rozdělení a některé jejich základní charakteristiky; podrobné odvození jednotlivých momentů lze nalézt v [3].

Počty ztrát (značíme  $N$ ) modelujeme nejčastěji těmito rozděleními:

### a) Poissonovo rozdělení

Poissonovo rozdělení definujeme pomocí pravděpodobností hodnot  $P(N = n) = \frac{\theta^n}{n!} e^{-\theta}$ , kde  $\theta > 0$  a  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Střední hodnota je rovna  $\theta$ . Po odvození rozptylu nahlédneme, že je také roven  $\theta$ .

Dále zavedeme pravděpodobnostní vytvořující funkci, kterou využijeme v podkapitole 2.3.1:

$$\Pi_N(r) = \text{Er}^N = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \frac{\theta^n}{n!} e^{-\theta} = e^{-\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r\theta)^n}{n!} = e^{\theta(r-1)} \quad (2.2)$$

Počty ztrát s Poissonovým rozdělením patří mezi základní a nejpoužívanější modely. Jestliže se ovšem v praxi rozptyl a střední hodnota významně odlišují (zpravidla pokud je rozptyl výrazně vyšší), není vhodné použít toto rozdělení, protože teoreticky by se u Poissonova rozdělení střední hodnota a rozptyl měli shodovat (jak jsme již zmínili výše).

### b) negativně binomické rozdělení

Negativně binomické rozdělení definujeme pomocí pravděpodobností hodnot  $P(N = n) = \binom{n+h-1}{n} p^h (1-p)^n$  pro  $0 < p < 1$ ,  $h > 0$  a  $n = 0, 1, 2, \dots$

Momenty odvodíme pomocí tzv. Poissonova rozdělení s náhodným parametrem. Střední hodnota vyjde (viz [9]) rovna  $h \frac{1-p}{p}$  a rozptyl roven  $h \frac{1-p}{p^2}$ .

Dále zavedeme pravděpodobnostní vytvořující funkci pro  $|r| < \frac{1}{1-p}$ , kterou využijeme v podkapitole 2.3.2:

$$\Pi_N(r) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \binom{-h}{n} p^h (p-1)^n = p^h \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-h}{n} [r(p-1)]^n = \left[ \frac{p}{1-r(1-p)} \right]^h. \quad (2.3)$$

Lze ukázat, že negativně binomické rozdělení konverguje v distribuci k Poissonovu rozdělení s parametrem  $\theta$  pro  $h \rightarrow \infty$  a pro  $p = \frac{h}{h+\theta}$ .

Přehled momentů obou uvedených rozdělení opět ukážeme v Tabulce 2.2 (předpokládáme, že parametr  $p \in (0,1)$  a parametry  $\theta, h$  jsou kladné):

rozdělení	EX	varX
Poissonovo	$\theta$	$\theta$
negativně binomické	$h \frac{1-p}{p}$	$h \frac{1-p}{p^2}$

Tabulka 2.2: Rozdělení počtů ztrát a jejich momenty.

## 2.3 Složené rozdělení

Nejprve si definujeme složené rozdělení náhodné veličiny  $S$  vyjadřující celkový úhrn ztrát. Zavedme si náhodnou veličinu  $S$  následujícím způsobem:

$$S = \sum_{i=1}^N X_i,$$

kde  $X_i$  je náhodná veličina reprezentující  $i$ -tou ztrátu a  $N$  je náhodná veličina vyjadřující počet ztrát v dané skupině pojistných smluv. Pro  $N = 0$  dodefinujeme  $S = 0$ .

**Definice 2.3.1**  $S$  má *složené rozdělení* právě tehdy, když  $\{X_1, X_2, \dots\}$  je posloupnost nezávislých stejně rozdělených veličin a  $N$  je diskrétní náhodná veličina nezávislá na  $\{X_1, X_2, \dots\}$ .

Název rozdělení náhodné veličiny  $S$  je odvozen od názvu rozdělení náhodné veličiny  $N$ . V podkapitole 2.2 jsme ukázali, že rozdělení počtu ztrát je buď Poissonovo nebo negativně binomické. Tudíž jestliže  $N$  má Poissonovo rozdělení, potom má  $S$  složené Poissonovo rozdělení. Obdobně to platí i pro negativně binomické rozdělení: pokud  $N$  má negativně binomické rozdělení, pak  $S$  má složené negativně binomické rozdělení.

Nyní se budeme zabývat střední hodnotou, rozptylem, hodnotou v riziku a podmíněnou hodnotou v riziku jednotlivých složených rozdělení. Pro výpočet prvního momentu a druhého centrálního momentu je potřeba znát momentovou vytvořující funkci  $M_S(r)$  daného rozdělení. Střední hodnotu a rozptyl složeného rozdělení lze totiž vyjádřit derivováním  $\log M_S(r)$  v bodě  $r = 0$ . Momentovou vytvořující funkci lze snadno najít ze vztahu

$$M_S(r) = \Pi_N(M_X(r)), \quad (2.4)$$

kde pravděpodobnostní vytvořující funkce pro Poissonovo a negativně binomické rozdělení odvodili již v podkapitole 2.2 a  $M_X(r)$  označuje momentovou vytvořující funkci ztrát  $X_i$  pro  $i = 1, 2, \dots$  definovanou jako  $M_X(r) = Ee^{rX_i}$ .

### 2.3.1 Složené Poissonovo rozdělení

#### Střední hodnota a rozptyl

Momentovou vytvořující funkci složeného Poissonova rozdělení získáme dosažením rovnosti 2.2 do vztahu 2.4:

$$M_S(r) = e^{\theta(M_X(r)-1)}$$

pro takové  $r$ , kde  $M_X(r) < \infty$ .

První derivací funkce  $\log M_S(r)$  podle  $r$  v bodě  $r = 0$  vypočítáme střední hodnotu  $ES = \theta \cdot EX$ .

Druhou derivací funkce  $\log M_S(r)$  podle  $r$  v bodě  $r = 0$  vypočítáme rozptyl  $\text{var}S = \theta \cdot EX^2$ .

### Hodnota v riziku

Hodnotu v riziku spočítáme pomocí vztahu 1.1, tedy  $\text{VaR}_\alpha(S) = F_S^{-1}(\alpha)$ . Nejdříve je nutné určit distribuční funkci  $F_S$ , což uděláme pomocí vztahu mezi třemi pravděpodobnostními vytvářejícími funkcemi, které si zavedme následovně:

$$P(z) = \mathbb{E}z^N = \sum_{k=0}^{\infty} p(k)z^k,$$

kde  $p(k) = P(N = k)$  pro  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,

$$F(z) = \mathbb{E}z^S = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^k, \quad (2.5)$$

kde  $f(k) = P(S = k)$  pro  $k = 0, 1, 2, \dots$  a

$$G(z) = \mathbb{E}z^X = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)z^k,$$

kde  $g(k) = P(X = k)$  pro  $k = 1, 2, \dots$

Funkci  $G(z)$  lze takto zavést pouze v případě, že  $X$  má diskrétní rozdělení. Tento předpoklad ovšem v našem případě neplatí, a proto nejprve musíme rozdělení  $X$  diskretizovat například tzv. *zaokrouhlovací metodou*:

Zvolme délku kroku  $h > 0$ . Potom funkci  $g(j)$  definujeme následovně:

$$g(0) = P(0 < X \leq \frac{h}{2}) = P_X(\frac{h}{2}) \quad \text{a}$$

$$g(j) = P(jh - \frac{h}{2} < X \leq jh + \frac{h}{2}) = P_X(jh + \frac{h}{2}) - P_X(jh - \frac{h}{2}) \quad \text{pro } j = 1, 2, \dots$$

Nyní využijme již zmíněný vzájemný vztah těchto tří vytvářejících funkcí:

$$\begin{aligned} F(z) = \mathbb{E}z^S &= \mathbb{E}\mathbb{E}[z^S | N] = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)\mathbb{E}[z^S | N = n] = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)\mathbb{E}z^{X_1 + \dots + X_n} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p(n)G^n(z) = P(G(z)), \end{aligned} \quad (2.6)$$

kde předposlední rovnost platí díky nezávislosti  $X_i$ .

Díky znalosti pravděpodobností hodnot Poissonova rozdělení zavedené v podkapitole 2.2 a znalosti hustoty rozdělení výše ztrát uvedené v podkapitole 2.1 lze dosadit do vztahu 2.6 a určit koeficienty  $f(k)$  s počáteční hodnotou  $f(0) = F(0) = P(G(0)) = e^{-\theta}$ .

Distribuční funkce  $F_S$  je potom rovna součtu koeficientů  $f(k)$ , tj.

$$F_S(n) = P(S \leq n) = \sum_{k=0}^n f(k). \quad (2.7)$$

Dle definice 1.3.1. stačí k výpočtu  $\text{VaR}_\alpha(S)$  zinvertovat distribuční funkci  $F_S$  danou vztahem 2.7.

### Podmíněná hodnota v riziku

K výpočtu podmíněné hodnoty v riziku využijeme její definici, tj.

$$\text{CVaR}_\alpha(S) = E[S|S > \text{VaR}_\alpha(S)] = \frac{1}{1-\alpha} \sum_{k=\text{VaR}_\alpha(S)}^n kf(k), \quad (2.8)$$

kde  $n$  je předem vhodně zvolené konečné přirozené číslo, které je větší než  $\text{VaR}_\alpha$ .

## 2.3.2 Složené negativně binomické rozdělení

### Střední hodnota a rozptyl

Momentovou vytvořující funkci složeného negativně binomického rozdělení získáme dosazením rovnosti 2.3 do vztahu 2.4:

$$M_S(r) = \left(1 - \frac{1-p}{p}(M_X(r) - 1)\right)^{-h}$$

pro takové  $r$ , kde  $M_X(r)$  existuje a  $M_X(r) < \frac{1}{1-p}$ .

První derivací funkce  $\log M_S(r)$  podle  $r$  v bodě  $r = 0$  vypočítáme střední hodnotu  $ES = h \frac{1-p}{p} \cdot EX$ .

Druhou derivací funkce  $\log M_S(r)$  podle  $r$  v bodě  $r = 0$  vypočítáme rozptyl  $\text{var}S = h \frac{1-p}{p} \cdot EX^2 + h \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 \cdot (EX)^2$ .

### Hodnota v riziku

Hodnotu v riziku opět spočítáme pomocí vztahu 1.1, tedy  $\text{VaR}_\alpha(S) = F_S^{-1}(\alpha)$ .

Pro výpočet distribuční funkce  $F_S$  je znova nutné zavést tři pravděpodobnostní vytvořující funkce  $P(z)$ ,  $G(z)$  a  $F(z)$ , které zdefinujeme stejně jako v podkapitole 2.3.1 (včetně použití zaokrouhlovací metody).

Pro výpočet distribuční funkce složeného negativně binomického rozdělení opět využijeme vzájemný vztah pravděpodobnostních vytvořujících funkcí daný rovnicí 2.6, tj.  $F(z) = P(G(z))$ . Následně distribuční funkci  $F_S$  získáme stejným postupem jako v případě složeného Poissonova rozdělení, tj. dle vztahu 2.7.

### Podmíněná hodnota v riziku

K výpočtu podmíněné hodnoty v riziku opět využijeme její definici a upravíme ji do konečné formule 2.8, tj.

$$\text{CVaR}_\alpha(S) = E[S|S > \text{VaR}_\alpha(S)] = \frac{1}{1-\alpha} \sum_{k=\text{VaR}_\alpha(S)}^n kf(k),$$

pro nějaké konečné přirozené  $n$  větší než  $\text{VaR}_\alpha$ .

**Poznámka.** Složené negativně binomické rozdělení je zároveň složeným Poissonovým rozdělením, tj. k parametrům negativně binomického rozdělení  $\theta$ ,  $h$ ,  $P(x)$  lze nalézt  $\theta_1 > 0$  a distribuční funkci  $P_1(x)$  tak, že  $S$  má složené Poissonovo rozdělení s parametry  $\theta_1, P_1(x)$ . Podrobné odvození lze dohledat v [3].

# Kapitola 3

## Numerická studie

V této kapitole se budeme zabývat výpočtem střední hodnoty, rozptylu, hodnoty v riziku a podmíněné hodnoty v riziku pro jednotlivá rozdělení pro konkrétně zvolené parametry.

U počtu ztrát se střední hodnota v praxi pohybuje přibližně mezi 0,05 až 0,15. My ji tedy budeme volit 0,05, 0,1 a 0,15. Pro střední hodnotu výší ztrát budeme volit nízké hodnoty - pro vyšší ztráty výpočet proběhne analogicky. Parametry rozdělení tedy budeme volit tak, aby jejich střední hodnoty přibližně odpovídaly těmto požadavkům.

Postup výpočtu střední hodnoty a rozptylu celkového úhrnu ztrát budeme podrobně rozepisovat vždy pouze pro jednu zvolenou kombinaci parametrů Poissonova nebo negativně binomického rozdělení. Výsledky dalších kombinací parametrů pouze vypíšeme v přehledných tabulkách.

Hodnotu v riziku a podmíněnou hodnotu v riziku spočítáme dle vzorců odvozených v předcházející kapitole. Pro složené Poissonovo rozdělení i pro složené negativně binomické rozdělení tedy budeme využívat vzájemný vztah pravděpodobnostních vytvářujících funkcí (tj. vztah 2.6).

Pro každý typ rozdělení vždy vykreslíme hodnoty VaR a CVaR do jednoho grafu v závislosti na hladině  $\alpha$ . Lze předpokládat, že CVaR je za shodných podmínek vždy vyšší než VaR. Tento fakt vyplývá přímo z definice podmíněné hodnoty v riziku.

### 3.1 Složené Poissonovo rozdělení

Nejprve se zabývejme celkovými úhrny ztrát, jejichž počet je dán Poissonovým rozdělením. K výpočtu využijeme znalost pravděpodobností hodnot uvedené již v podkapitole 2.2. Z tabulky 2.2 je zřejmé, že střední hodnota tohoto rozdělení je rovna  $\theta$ . Z výše uvedených důvodů zvolíme  $\theta = 0,05$ ,  $\theta = 0,1$  nebo  $\theta = 0,15$ .

### 3.1.1 Exponenciální rozdělení

Mějme složené Poissonovo rozdělení celkového úhrnu škod, kde výše ztrát je dána exponenciálním rozdělením.

Jak jsme již uvedli v podkapitole 2.3.1, střední hodnota složeného Poissonova rozdělení je  $ES = \theta \cdot EX$ , kde  $\theta > 0$  má význam parametru Poissonova rozdělení a dle tabulky 2.1 je  $EX = \frac{1}{\lambda}$ , kde  $\lambda$  označuje parametr exponenciálního rozdělení.

Pokud volíme například  $\theta = 0,1$  a  $\lambda = 0,02$ , potom:

$$ES = 0,1 \cdot 50 = 5.$$

Obdobně (opět pomocí tabulky 2.1 a pomocí údajů z podkapitoly 2.3.1) odvodíme, že rozptyl složeného Poissonova rozdělení je roven

$$\text{var}S = \theta \cdot EX^2 = \theta \cdot \left[ \frac{1}{\lambda^2} + \left( \frac{1}{\lambda} \right)^2 \right] = 0,1 \cdot 2 \cdot 2500 = 500.$$

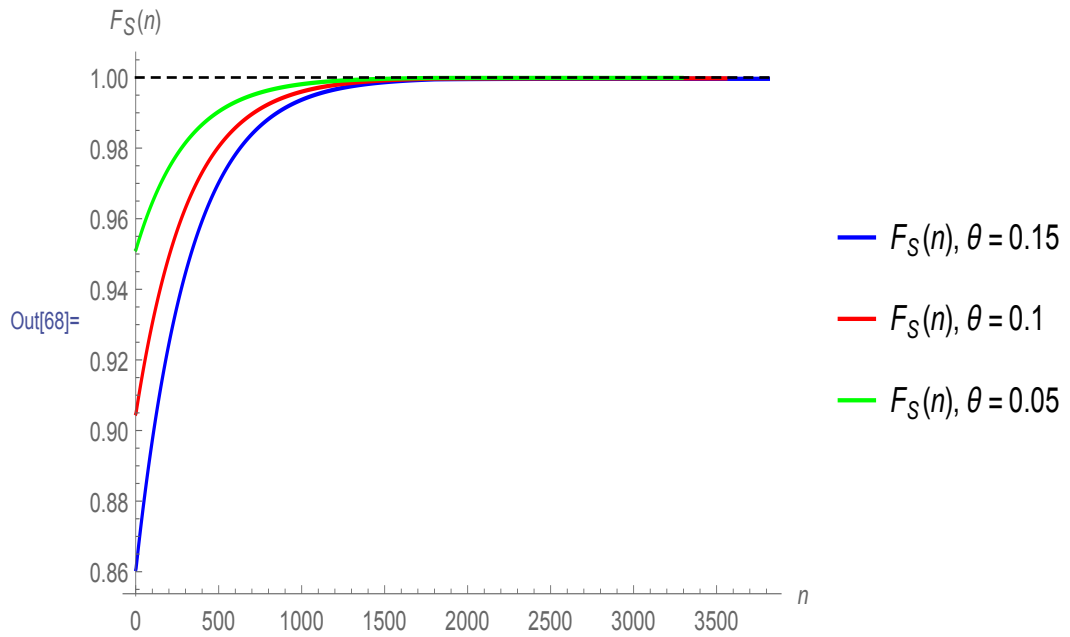
V tabulce 3.1 uvádíme střední hodnotu a rozptyl i pro další volby  $\theta$ .

Pro určení hodnoty v riziku je nejprve nutný výpočet distribuční funkce pomocí vztahu 2.6. Dále ve výpočtu využijeme znalost tvaru hustoty exponenciálního rozdělení (viz podkapitola 2.1). Průběh této distribuční funkce na kladné poloose si lze prohlédnout na obrázku 3.1.

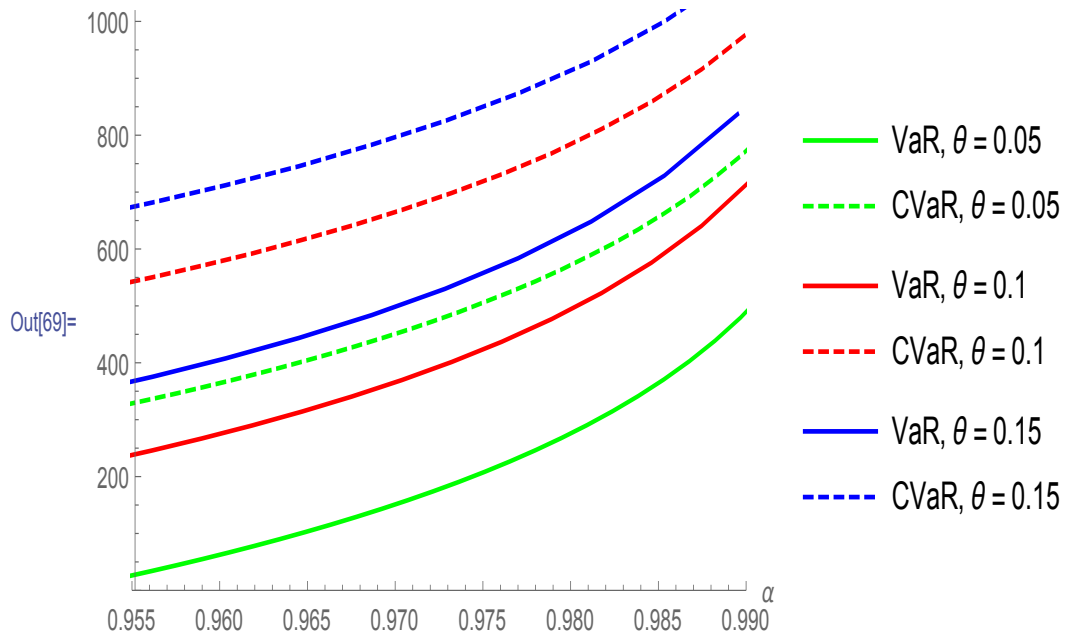
Nyní již lze přejít k výpočtu hodnoty v riziku na hladině  $\alpha$  a následně i k určení podmíněné hodnoty v riziku na stejné hladině. Na obrázku 3.2 vykreslíme VaR a CVaR v závislosti na hodnotě hladiny  $\alpha$ . V tabulce 3.1 jsou udány konkrétní hodnoty hodnoty v riziku, respektive podmíněné hodnoty v riziku, na hladině  $\alpha = 0,98$ .

	$\theta = 0,05$	$\theta = 0,1$	$\theta = 0,15$
Střední hodnota	2,5	5	7,5
Rozptyl	250	500	750
$\text{VaR}_{0,98}$	276	493	629
$\text{CVaR}_{0,98}$	571	784	913

Tabulka 3.1: Střední hodnota, rozptyl,  $\text{VaR}_{0,98}$  a  $\text{CVaR}_{0,98}$  pro složené Poissonovo rozdělení s exponenciálním rozdělením výší ztrát.



Obrázek 3.1: Distribuční funkce složeného Poissonova rozdělení s exponenciálním rozdělením výší ztrát.



Obrázek 3.2: VaR a CVaR složeného Poissonova rozdělení s exponenciálním rozdělením výší ztrát.



### 3.1.2 Gama rozdělení

Nyní přejdeme k celkovému úhrnu ztrát, jejichž výše má gama rozdělení.

Postupem analogickým k postupu uvedeném v podkapitole pro exponenciální rozdělení odvodíme střední hodnotu a rozptyl.

Pro volbu například  $\theta = 0,1$  a  $p = 10, \lambda = 1$  dostáváme

$$ES = \theta \cdot \frac{p}{\lambda} = 0,1 \cdot \frac{10}{1} = 1 \text{ a}$$

$$\text{var}S = \theta \cdot \left[ \frac{p}{\lambda^2} + \left( \frac{p}{\lambda} \right)^2 \right] = 0,1 \cdot 110 = 11.$$

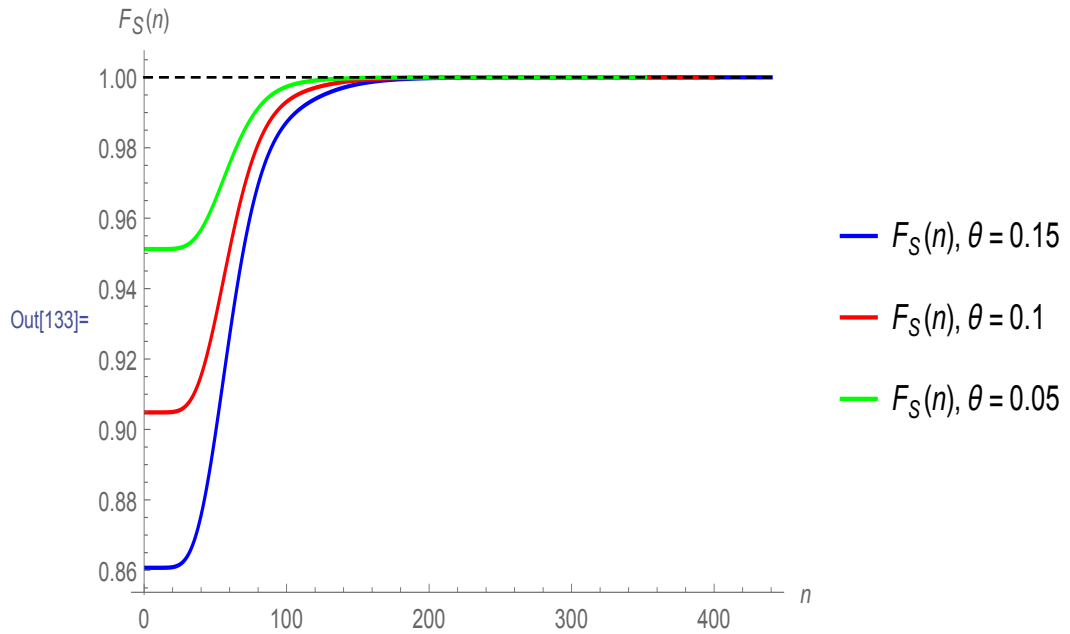
V tabulce 3.2 je střední hodnota a rozptyl i pro další volby parametru  $\theta$ .

Než přejdeme k výpočtu hodnoty v riziku, musíme určit distribuční funkci celkového úhrnu ztrát. Její průběh na kladné poloose opět ukážeme na obrázku 3.3. Opět jsme využili znalost hustoty tohoto rozdělení uvedené v podkapitole 2.1.

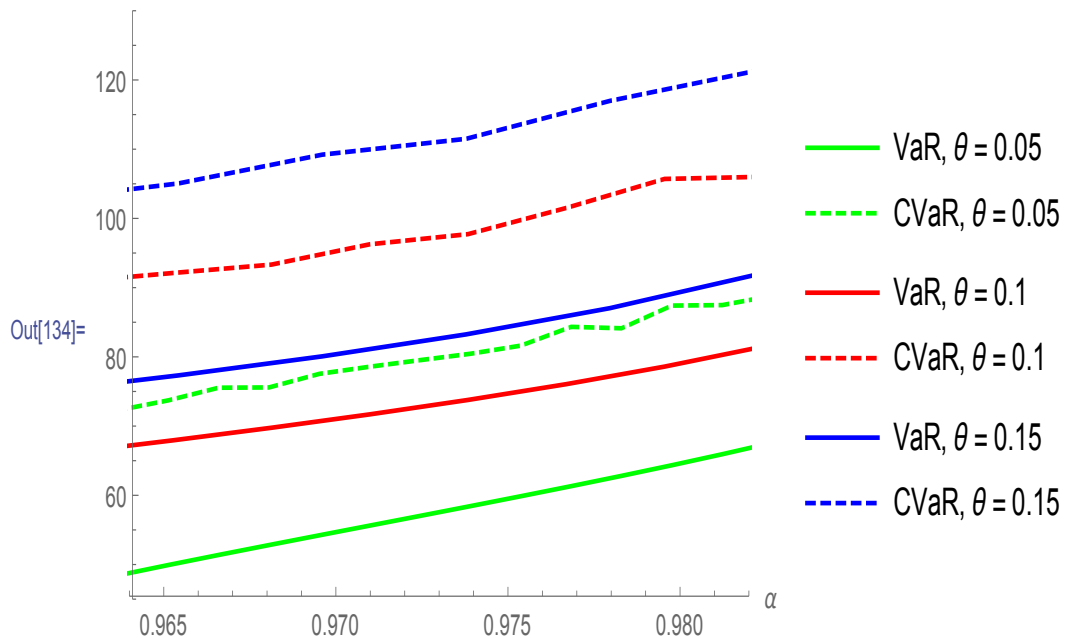
Tímto se dostáváme k výpočtu hodnoty v riziku, respektive podmíněné hodnoty v riziku, na hladině  $\alpha$ . V tabulce 3.2 jsou uvedeny hodnoty VaRu a CVaRu pro hladinu  $\alpha = 0,98$ . Na obrázku 3.4 opět vykreslujeme VaR a CVaR v závislosti na parametru  $\alpha$ .

	$\theta = 0,05$	$\theta = 0,1$	$\theta = 0,15$
Střední hodnota	0,5	1	1,5
Rozptyl	5,5	11	16,5
VaR <sub>0,98</sub>	78	92	106
CVaR <sub>0,98</sub>	102	121	137

Tabulka 3.2: Střední hodnota, rozptyl, VaR<sub>0,98</sub> a CVaR<sub>0,98</sub> pro složené Poissonovo rozdělení s gama rozdělením výší ztrát.



Obrázek 3.3: Distribuční funkce složeného Poissonova rozdělení s gama rozdělením výší ztrát.



Obrázek 3.4: VaR a CVaR složeného Poissonova rozdělení s gama rozdělením výší ztrát.

### 3.1.3 Paretovo rozdělení

Celkový úhrn ztrát, kde výše ztrát je dána Paretovým rozdělením, je dalším způsobem, jak úhrn ztrát modelovat.

Začneme se střední hodnotou a rozptylem, které určíme opět pomocí tabulky 2.1 a pomocí údajů z podkapitoly 2.3.1. Pro volbu například  $\theta = 0,1$  a  $\lambda = 4$ ,  $a = 200$  máme

$$ES = \theta \cdot \frac{a}{\lambda - 1} = 0,1 \cdot \frac{200}{3} = \frac{20}{3} = 6,\bar{6} \text{ a}$$

$$\text{var}S = \theta \cdot \left[ \frac{\lambda a^2}{(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)} + \left( \frac{a}{\lambda - 1} \right)^2 \right] = 0,1 \cdot \frac{40000}{3} = \frac{4000}{3} = 1333,\bar{3}.$$

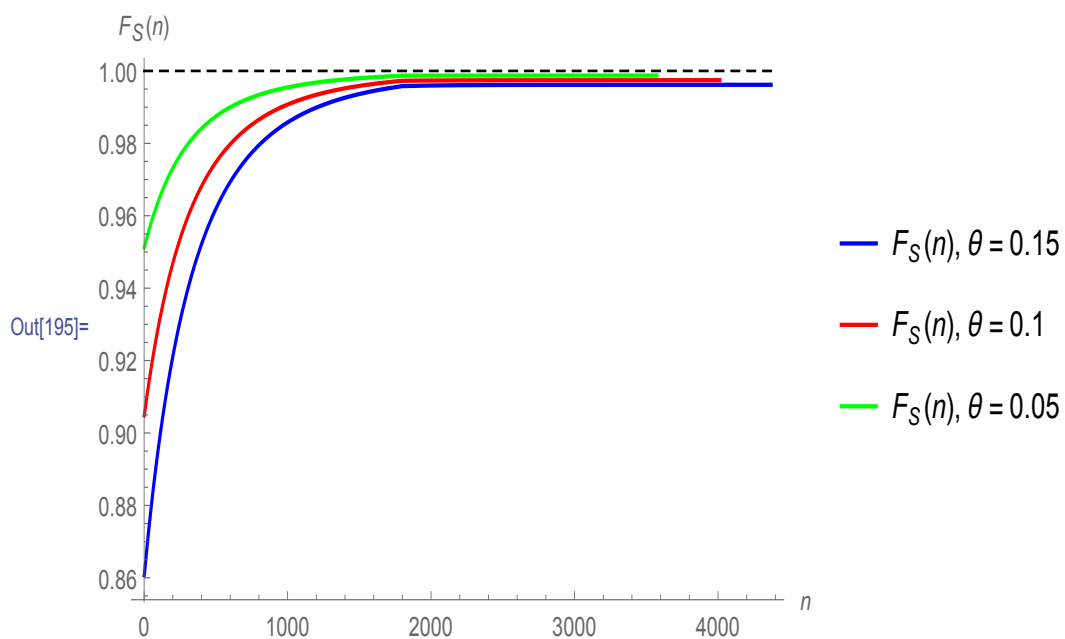
V tabulce 3.3 jsou opět uvedeny hodnoty rozptylu a střední hodnoty pro další volby  $\theta$ .

Opět pro výpočet hodnoty v riziku je signifikantní nejprve určit distribuční funkci celkového úhrnu ztrát. Její průběh pro zvolené parametry je znázorněn na obrázku 3.5.

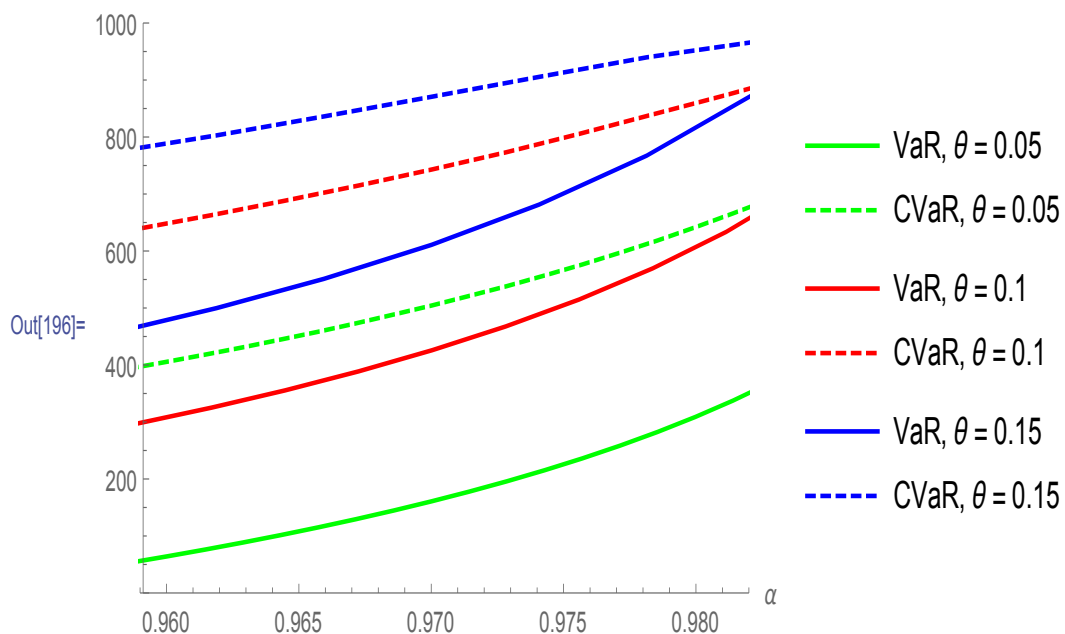
Nyní již můžeme spočítat hodnotu v riziku a podmíněnou hodnotu v riziku. Jejich průběh lze sledovat na obrázku 3.6 a jejich hodnoty na hladině  $\alpha = 0,98$  můžeme sledovat v tabulce 3.3.

	$\theta = 0,05$	$\theta = 0,1$	$\theta = 0,15$
Střední hodnota	$3,\bar{3}$	$6,\bar{6}$	10
Rozptyl	$666,\bar{6}$	$1333,\bar{3}$	2000
$\text{VaR}_{0,98}$	309	606	813
$\text{CVaR}_{0,98}$	642	860	954

Tabulka 3.3: Střední hodnota, rozptyl,  $\text{VaR}_{0,98}$  a  $\text{CVaR}_{0,98}$  pro složené Poissonovo rozdělení s Paretovým rozdělením výší ztrát.



Obrázek 3.5: Distribuční funkce složeného Poissonova rozdělení s Paretovým rozdělením výší ztrát.



Obrázek 3.6: VaR a CVaR složeného Poissonova rozdělení s Paretovým rozdělením výší ztrát.

### 3.1.4 Logaritmicko-normální rozdělení

Poslední případ, který zde uvedeme pro celkový úhrn ztrát modelovaný složeným Poissonovým rozdělením, je ten, kde výše ztrát jsou dány logaritmicko-normálním rozdělením.

Střední hodnotu a rozptyl celkového úhrnu ztrát odvodíme znovu pomocí údajů z podkapitoly 2.3.1 a pomocí tabulky 2.1. Volbou například  $\theta = 0,1$  a  $\mu = 3, \sigma^2 = 2$  dostáváme

$$ES = \theta \cdot e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} = 0,1 \cdot e^4 \doteq 5,46 \text{ a}$$

$$\text{var}S = \theta \cdot \left[ e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1) + \left( e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \right)^2 \right] = 0,1 \cdot [e^8 (e^2 - 1) + e^8] = 2202,65.$$

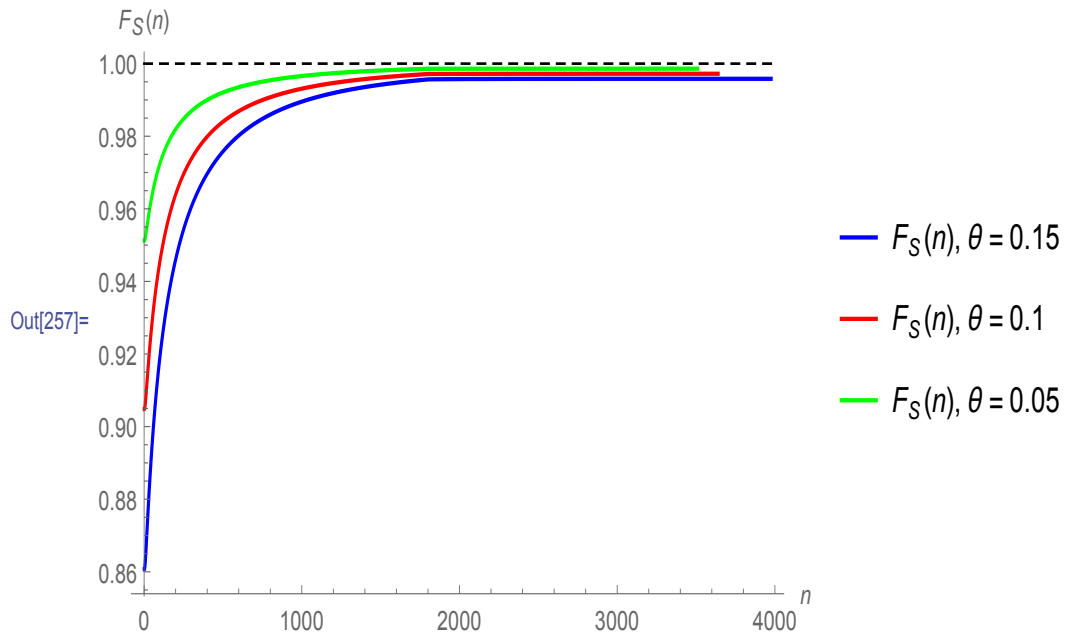
Střední hodnota a rozptyl pro další volby parametru  $\theta$  jsou uvedeny v tabulce 3.4.

Nejprve je opět nutno spočítat distribuční funkci celkového úhrnu škod. Její průběh je znázorněn na obrázku 3.7.

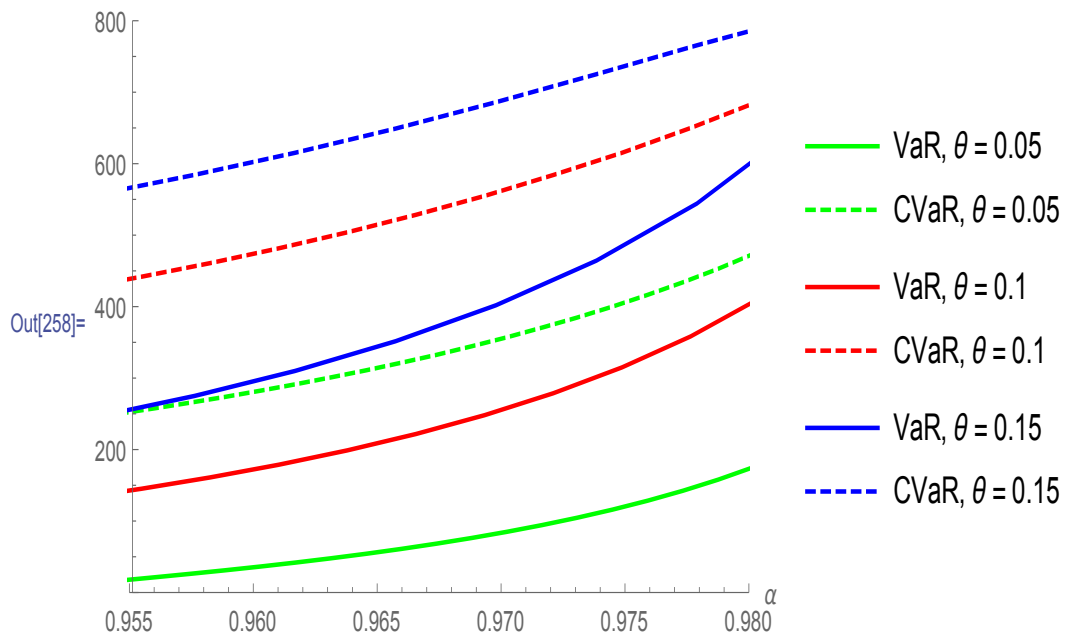
Dále na obrázku 3.8 ukážeme, jak vypadá průběh hodnoty v riziku a podmíněné hodnoty v riziku v závislosti na hladině  $\alpha$ . Hodnoty VaRu a CVaRu na hladině  $\alpha = 0,98$  najdeme v tabulce 3.4.

	$\theta = 0,05$	$\theta = 0,1$	$\theta = 0,15$
Střední hodnota	2,28	5,46	8,19
Rozptyl	1101,32	2202,65	3303,97
VaR <sub>0,98</sub>	173	402	595
CVaR <sub>0,98</sub>	471	682	786

Tabulka 3.4: Střední hodnota, rozptyl, VaR<sub>0,98</sub> a CVaR<sub>0,98</sub> pro složené Poissonovo rozdělení s logaritmicko-normálním rozdělením výší ztrát.



Obrázek 3.7: Distribuční funkce složeného Poissonova rozdělení s logaritmicke-normálním rozdělením výší ztrát.



Obrázek 3.8: VaR a CVaR složeného Poissonova rozdělení s logaritmicke-normálním rozdělením výší ztrát.

## 3.2 Složené negativně binomické rozdělení

Nyní přejdeme k celkovým úhrnům ztrát, jejichž počet je dán negativně binomickým rozdělením. Opět z tabulky 2.2 odvodíme, že střední hodnota tohoto rozdělení se rovná  $h \frac{1-p}{p}$ . Pokud chceme, aby tato střední hodnota byla rovna 0,1, potom zvolíme například  $h = 0,4$  a  $p = 0,8$ . Dále volíme  $h = 0,2$  a  $p = 0,8$  pro střední hodnotu rovnou 0,05 a například  $h = 0,6$  a  $p = 0,8$  pro střední hodnotu rovnou 0,15.

### 3.2.1 Exponenciální rozdělení

Mějme složené negativně binomické rozdělení celkového úhrnu škod, kde výše ztrát je dána exponenciálním rozdělením.

Jak jsme již uvedli v podkapitole 2.3.2, střední hodnota složeného negativně binomického rozdělení je  $ES = h \frac{1-p}{p} \cdot EX$ , kde  $h > 0, p \in (0,1)$  jsou parametry negativně binomického rozdělení a dle tabulky 2.1 je  $EX = \frac{1}{\lambda}$ , kde  $\lambda$  označuje parametr exponenciálního rozdělení.

Volíme například  $h = 0,4$  a  $p = 0,8$  a  $\lambda = 0,02$ . Potom:

$$ES = 0,4 \frac{1 - 0,8}{0,8} \cdot 50 = 5.$$

Obdobně (opět pomocí tabulky 2.1 a pomocí údajů z podkapitoly 2.3.2) odvodíme, že rozptyl složeného negativně binomického rozdělení je roven

$$\begin{aligned} \text{var}S &= h \frac{1-p}{p} \cdot EX^2 + h \left( \frac{1-p}{p} \right)^2 \cdot (EX)^2 = 0,1 \cdot 2 \cdot 2500 + 0,4 \cdot \left( \frac{1}{4 \cdot 0,02} \right)^2 = \\ &= 500 + 62,5 = 562,5. \end{aligned}$$

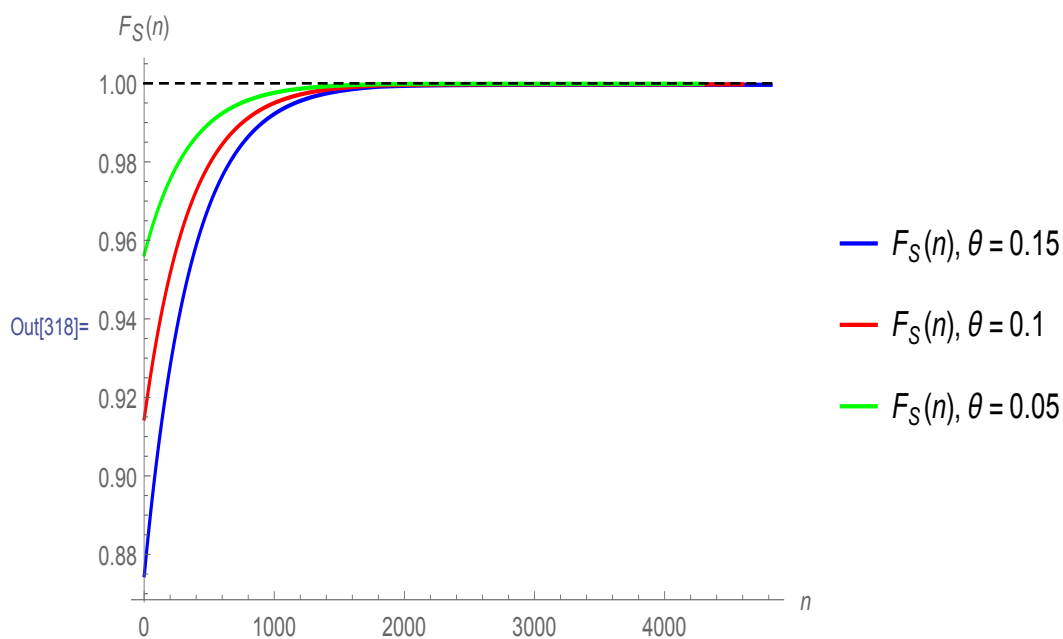
V tabulce 3.5 jsou uvedeny hodnoty rozptylu a střední hodnoty pro jiné volby parametru  $h$ .

Pro určení hodnoty v riziku je nejprve nutný výpočet distribuční funkce opět pomocí vztahu 2.6. Průběh této distribuční funkce na kladné poloose si lze prohlédnout na obrázku 3.9.

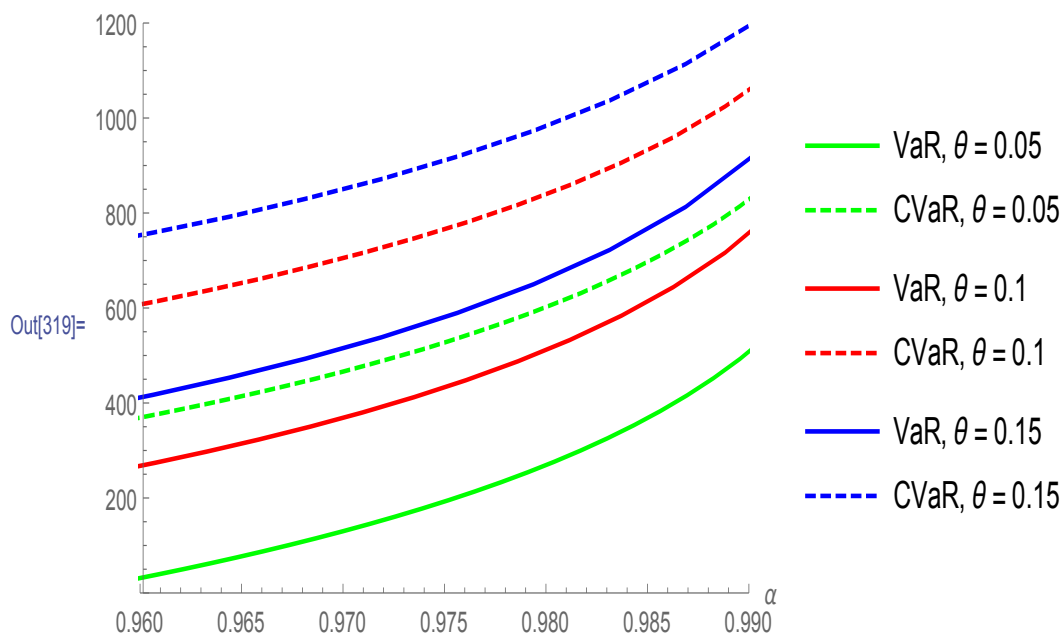
Následně přejdeme k výpočtu samotné hodnoty v riziku a podmíněné hodnoty v riziku. Jejich průběh lze pozorovat na obrázku 3.10 a jejich hodnoty na hladině  $\alpha = 0,98$  najdeme v tabulce 3.5.

	$h = 0,2$	$h = 0,4$	$h = 0,6$
Střední hodnota	2,5	5	7,5
Rozptyl	281,25	562,5	843,75
$\text{VaR}_{0,98}$	269	511	661
$\text{CVaR}_{0,98}$	602	839	982

Tabulka 3.5: Střední hodnota, rozptyl,  $\text{VaR}_{0,98}$  a  $\text{CVaR}_{0,98}$  pro složené negativně binomické rozdělení s exponenciálním rozdělením výší ztrát.



Obrázek 3.9: Distribuční funkce složeného negativně binomického rozdělení s exponenciálním rozdělením výší ztrát.



Obrázek 3.10: VaR a CVaR složeného negativně binomického rozdělení s exponenciálním rozdělením výší ztrát.



### 3.2.2 Gama rozdělení

Nyní přejdeme k celkovému úhrnu ztrát, jejichž výše má gama rozdělení.

Postupem analogickým k postupu uvedeném v podkapitole pro exponenciální rozdělení odvodíme střední hodnotu a rozptyl.

Pro volbu například  $h = 0,4$  a  $p = 0,8$  a pro  $r = 10, \lambda = 1$ , kde  $h, p$  jsou parametry negativně binomického rozdělení a  $r, \lambda$  jsou parametry gama rozdělení, dostáváme

$$ES = h \frac{1-p}{p} \cdot \frac{r}{\lambda} = 0,4 \cdot \frac{1-0,8}{0,8} \cdot \frac{10}{1} = 1 \text{ a}$$

$$\text{var}S = h \frac{1-p}{p} \cdot \left[ \frac{r}{\lambda^2} + \left( \frac{r}{\lambda} \right)^2 \right] + h \left( \frac{1-p}{p} \right)^2 \cdot \left( \frac{r}{\lambda} \right)^2 = 0,1 \cdot 110 + \frac{40}{16} = 13,5.$$

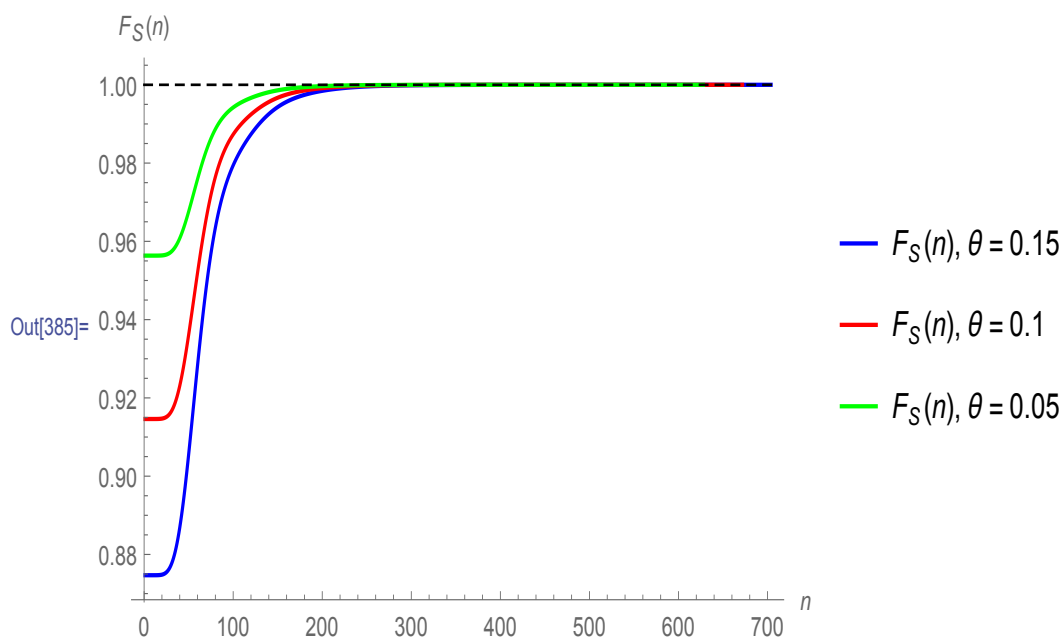
Střední hodnota a rozptyl pro jiné volby parametru  $\vartheta$  jsou uvedeny v tabulce 3.6.

Pro výpočet hodnoty v riziku a podmíněné hodnoty v riziku je opět nejprve nutné určit příslušnou distribuční funkci, jejíž průběh na kladné poloose je znázorněn na obrázku 3.11.

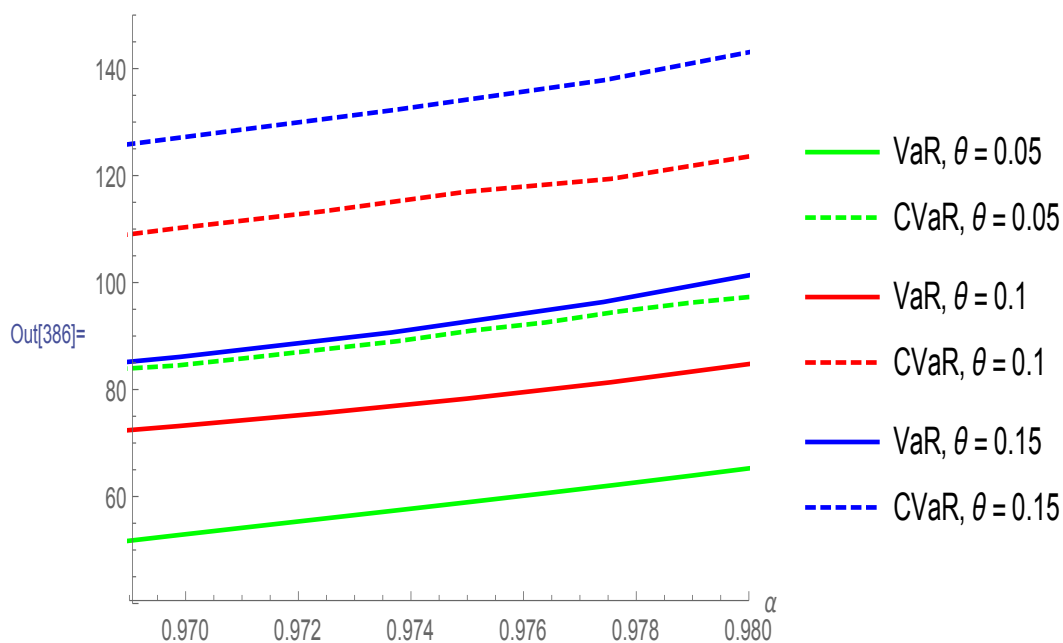
Jelikož v tuto chvíli již máme distribuční funkci celkového úhrnu ztrát určenou, můžeme přejít k výpočtu hodnoty v riziku a podmíněné hodnoty v riziku. Průběh VaR a CVaR v závislosti na hladině  $\alpha$  je možné pozorovat na obrázku 3.12. VaR a CVaR na hladině  $\alpha = 0,98$  jsou znázorněny v tabulce 3.6.

	$h = 0,2$	$h = 0,4$	$h = 0,6$
Střední hodnota	0,5	1	1,5
Rozptyl	6,75	13,5	20,25
VaR <sub>0,98</sub>	65	85	101
CVaR <sub>0,98</sub>	97	124	142

Tabulka 3.6: Střední hodnota, rozptyl, VaR<sub>0,98</sub> a CVaR<sub>0,98</sub> pro složené negativně binomické rozdělení s gama rozdělením výší ztrát.



Obrázek 3.11: Distribuční funkce složeného negativně binomického rozdělení s gamma rozdělením výší ztrát.



Obrázek 3.12: VaR a CVaR složeného negativně binomického rozdělení s gamma rozdělením výší ztrát.

### 3.2.3 Paretovo rozdělení

Dále si ukažme hodnoty rozptylu a střední hodnoty pro složené negativně binomické rozdělení s Paretovým rozdělením výší ztrát.

Opět volme například  $h = 0,4$  a  $p = 0,8$  a parametry Paretova rozdělení třeba  $a = 200$  a  $\lambda = 4$ . Potom střední hodnota a rozptyl celkového úhrnu ztrát  $S$  vypadají následovně

$$ES = h \frac{1-p}{p} \cdot \frac{a}{\lambda-1} = 0,1 \cdot \frac{200}{3} = 6,\bar{6} \text{ a}$$

$$\begin{aligned} \text{var}S &= h \frac{1-p}{p} \cdot \left[ \frac{\lambda a^2}{(\lambda-1)^2(\lambda-2)} + \left( \frac{a}{\lambda-1} \right)^2 \right] + h \left( \frac{1-p}{p} \right)^2 \cdot \left( \frac{a}{\lambda-1} \right)^2 = \\ &= 0,1 \cdot \frac{40000}{3} + \frac{1}{40} \cdot \frac{40000}{9} = 1444,\bar{4}. \end{aligned}$$

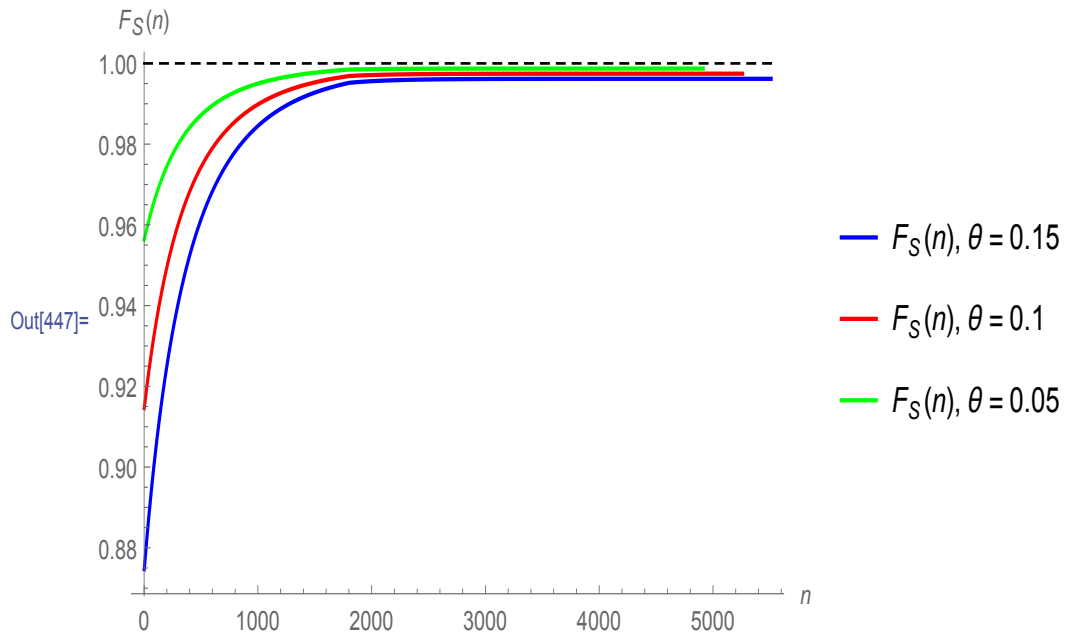
V tabulce 3.7 opět uvádíme hodnoty rozptylu a střední hodnoty pro další volby parametru  $\vartheta$ .

Výpočtu hodnot VaR a CVaR předchází výpočet distribuční funkce celkového úhrnu ztrát. Její průběh na kladné poloose lze sledovat na obrázku 3.13.

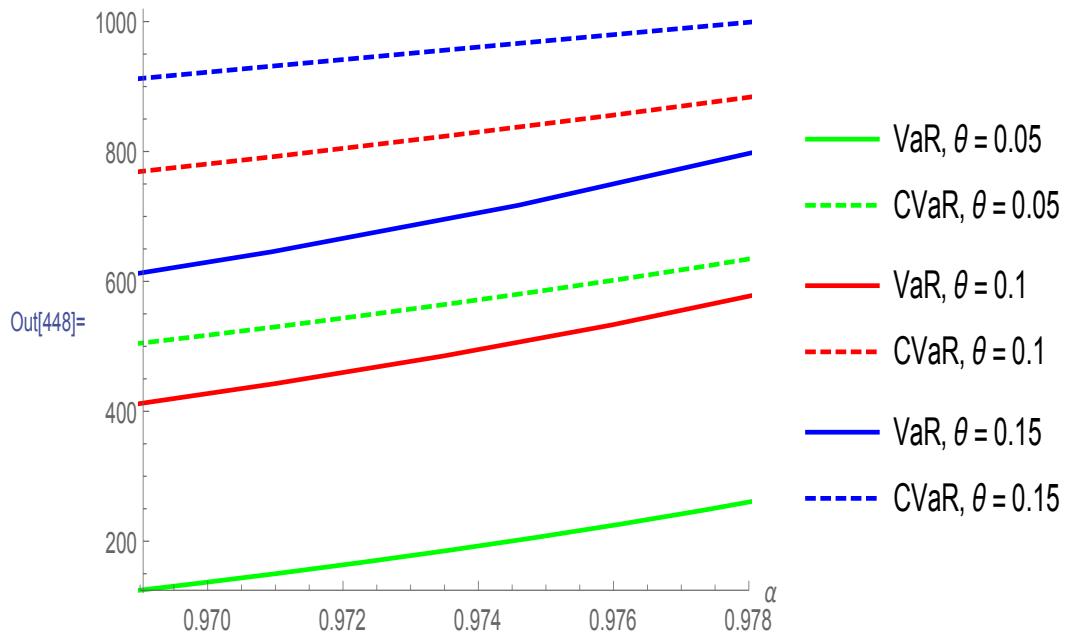
Následně je možné přejít k výpočtu hodnoty v riziku, respektive podmíněné hodnoty v riziku. Na obrázku 3.14 sledujeme jejich průběh v závislosti na parametru  $\alpha$  a v tabulce 3.7 sledujeme vývoj hodnot VaR a CVaR na hladině  $\alpha = 0,98$ .

	$h = 0,2$	$h = 0,4$	$h = 0,6$
Střední hodnota	$3,\bar{3}$	$6,\bar{6}$	10
Rozptyl	$722,\bar{2}$	$1444,\bar{4}$	$2166,\bar{6}$
$\text{VaR}_{0,98}$	300	625	850
$\text{CVaR}_{0,98}$	670	912	1017

Tabulka 3.7: Střední hodnota, rozptyl,  $\text{VaR}_{0,98}$  a  $\text{CVaR}_{0,98}$  pro složené negativně binomické rozdělení s Paretovým rozdělením výší ztrát.



Obrázek 3.13: Distribuční funkce složeného negativně binomického rozdělení s Paretovým rozdělením výší ztrát.



Obrázek 3.14: VaR a CVaR složeného negativně binomického rozdělení s Pareto-  
vým rozdělením výší ztrát.

### 3.2.4 Logaritmicko-normální rozdělení

V poslední části této kapitoly se věnujeme složenému negativně binomickému rozdělení s logaritmicko-normálním rozdělením výší ztrát.

Nejdříve určíme střední hodnotu a rozptyl veličiny  $S$  pro volbu parametrů například  $h = 0,4$  a  $p = 0,8$  a pro  $\mu = 3, \sigma^2 = 2$ :

$$ES = h \frac{1-p}{p} \cdot e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} = 0,1 \cdot e^4 \doteq 5,46 \text{ a}$$

$$\begin{aligned} \text{var}S &= h \frac{1-p}{p} \cdot \left[ e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1) + \left( e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \right)^2 \right] + h \left( \frac{1-p}{p} \right)^2 \cdot \left( e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \right)^2 = \\ &= 0,1 \cdot [e^8 (e^2 - 1) + e^8] + \frac{1}{40} \cdot e^8 = 0,1 \cdot e^{10} + \frac{1}{40} \cdot e^8 = 2277,17 \end{aligned}$$

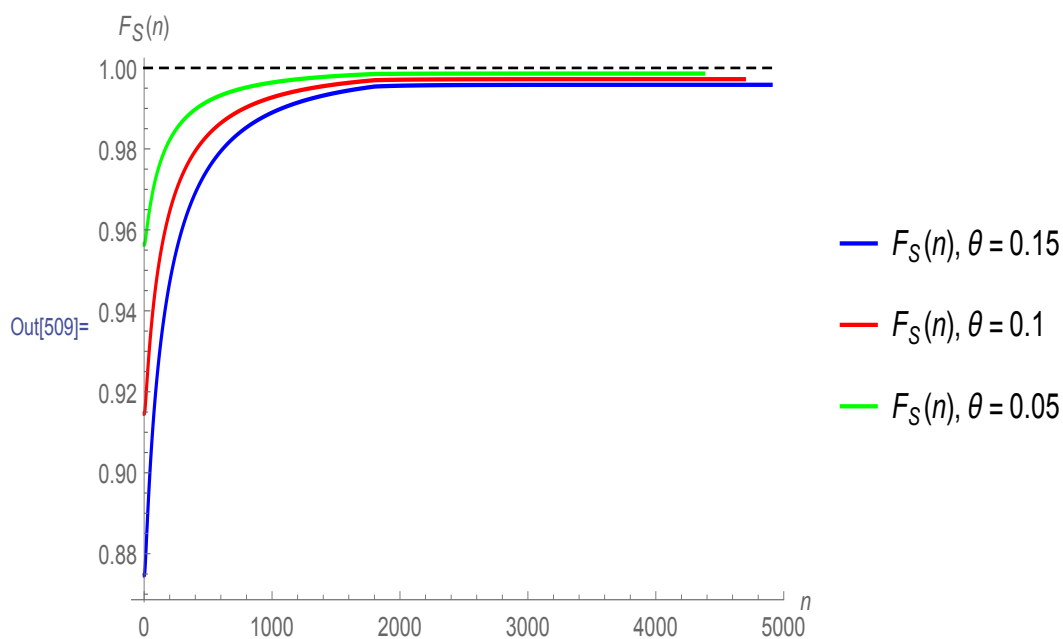
V tabulce 3.8 opět uvádíme hodnoty rozptylu a střední hodnoty pro jinou volbu parametru  $\vartheta$ .

Pro výpočet VaR a CVaR je zásadní nejprve určit distribuční funkci celkového úhrnu škod. Její průběh na kladné poloose je opět znázorněn na obrázku 3.15.

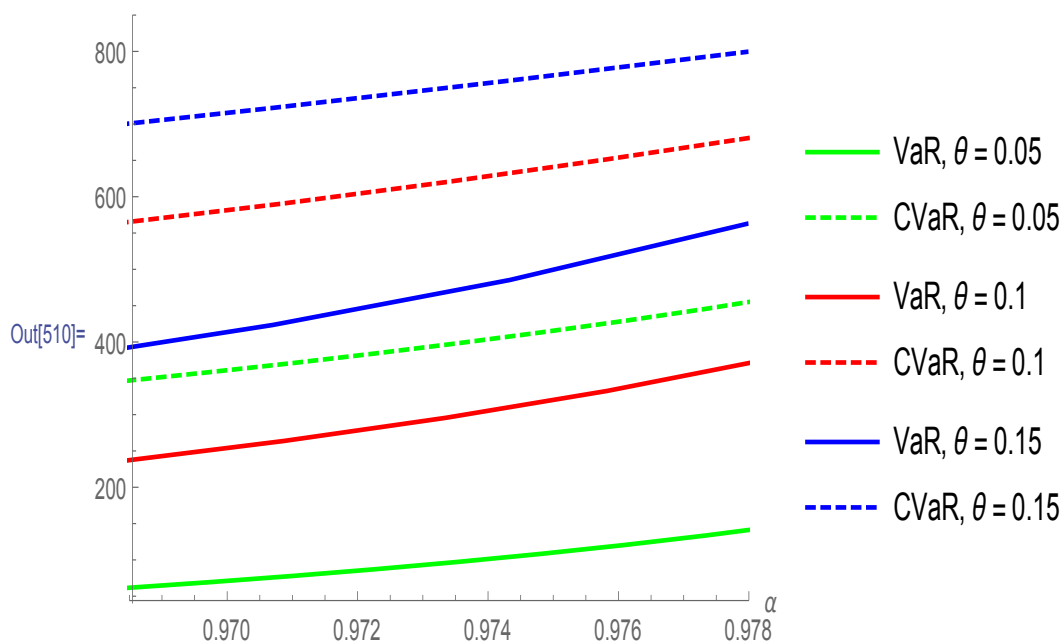
Příslušnou distribuční funkci tedy známe, a proto je možné přejít k výpočtu hodnoty v riziku a podmíněné hodnoty v riziku. Jejich průběh pozorujeme na obrázku 3.16 a jejich hodnoty na hladině  $\alpha = 0,98$  lze sledovat v tabulce 3.8.

	$h = 0,2$	$h = 0,4$	$h = 0,6$
Střední hodnota	2,28	5,46	8,19
Rozptyl	1138,59	2277,17	3415,76
$\text{VaR}_{0,98}$	166	411	615
$\text{CVaR}_{0,98}$	485	710	821

Tabulka 3.8: Střední hodnota, rozptyl,  $\text{VaR}_{0,98}$  a  $\text{CVaR}_{0,98}$  pro složené negativně binomické rozdělení s logaritmicko-normálním rozdělením výší ztrát.



Obrázek 3.15: Distribuční funkce složeného negativně binomického rozdělení s logaritmo-normálním rozdělením výší ztrát.



Obrázek 3.16: VaR a CVaR složeného negativně binomického rozdělení s logaritmo-normálním rozdělením výší ztrát.

# Závěr

Naším cílem bylo stanovit pojistné sazby na základě měr rizika. V první kapitole jsme zavedli pojem míry rizika a rozdělili jsme je dle typu bezpečnostní přírážky na čtyři kategorie. Dále jsme definovali koherenci, tedy jednu z vlastností míry rizika, a dokazovali jsme z definice, zda již zmíněné čtyři typy měr rizika jsou koherentní či nikoliv.

Hlavní část první kapitoly byla věnována hodnotě v riziku, již jsme zadefinovali a na příkladu ukázali, že není koherentní mírou rizika, a především podmíněné hodnotě v riziku. Kromě samotné podmíněné hodnotě v riziku jsme definovali také horní a dolní podmíněnou hodnotu v riziku a pomocí těchto pojmů jsme ukazovali některá tvrzení s případnými důkazy. Na závěr této kapitoly jsme zavedli minimalizační formulaci a následně přednesli tvrzení o koherenci podmíněné hodnoty v riziku.

V druhé kapitole jsme se věnovali složenému rozdělení celkových úhrnů ztrát. Nejprve jsme si zavedli některé typy rozdělení výše ztrát jako exponenciální, gama, Pareto nebo logaritnicko-normální. U všech těchto rozdělení jsme ukázali tvar střední hodnoty, rozptylu a koeficientu šikmosti. Následně jsme přešli k typům rozdělení počtu ztrát, konkrétně k Poissonovu a negativně binomickému rozdělení. K těmto dvěma rozdělení jsme vypsali střední hodnotu a rozptyl. Dále jsme pro ně také odvodili tvar pravděpodobnostní vytvořující funkce.

V další části druhé kapitoly jsme zavedli pojem složeného rozdělení. Pro složené Poissonovo a negativně binomické rozdělení jsme z momentových vytvořujících funkcí odvodili tvary středních hodnot a rozptylů. Hodnotu v riziku pro složené Poissonovo rozdělení jsme odvozovali z distribuční funkce celkového úhrnu ztrát určené pomocí vzájemného vztahu tří pravděpodobnostních vytvořujících funkcí, přičemž nejprve bylo nutno zdiskretizovat rozdělení výší ztrát. Obdobně jsme vypočítali hodnotu v riziku i pro složené negativně binomické rozdělení. Nakonec jsme uvedli vzorec pro výpočet podmíněné hodnoty v riziku.

V závěrečné kapitole jsme ukázali, jak se mění střední hodnota, rozptyl, hodnota v riziku a podmíněná hodnota v riziku pro složené Poissonovo a negativně binomické rozdělení v závislosti na typu rozdělení výše ztrát a na hodnotách parametrů Poissonova a negativně binomického rozdělení. Pro každý typ rozdělení jsme znázornili průběh distribuční funkce na kladné poloose a průběhy hodnoty v riziku a podmíněné hodnoty v riziku vykreslené v závislosti na hladině  $\alpha$ .

# Seznam použité literatury

- [1] ROCKAFELLAR, R.T., URYASEV, S. (2002). Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking & Finance*, **26**, 1443–1471.
- [2] TSE, Y.-K. (2009). *Nonlife actuarial models: Theory, methods and evaluation*. First Edition. Cambridge University Press, New York. ISBN 0521764653.
- [3] MANDL, P., MAZUROVÁ, L. (1999). *Matematické základy neživotního pojištění*. První vydání. Matfyzpress, Praha. ISBN 80-85863-42-1.
- [4] ZVÁRA, K., ŠTĚPÁN, J. (2002). *Pravděpodobnost a matematická statistika*. Třetí vydání. Matfyzpress, Praha. ISBN 80-85863-93-6.
- [5] ACERBI, C., NORDIO, C., SIRTORI, C. (2008). Expected Shortfall as a Tool for Financial Risk Management.
- [6] SZEGÖ, G. (2002). Measures of risk. *Journal of Banking & Finance*, **26**, 1253–1272.
- [7] ACERBI, C., NORDIO, C., SIRTORI, C. (2001). Expected shortfall as a tool for financial risk management. Working paper.
- [8] DRÁBKOVÁ, A. (2007). *VaR a jiné míry rizika*. Bakalářská práce. Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy v Praze.
- [9] DOUDOVÁ, L. (2009). *Statistická analýza populací s negativně binomickým rozdělením*. Dizertační práce. Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity v Brně.