Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Slovní úlohy na střední škole waldorfské

Word problems at the Waldorf secondary school

Radovan Daniel

Vedoucí práce:	doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.
Studijní program:	Učitelství pro střední školy
Studijní obor:	Učitelství všeobecně vzdělávacích předmětů pro základní školy a střední školy – matematika

2015

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma Slovní úlohy na střední škole waldorfské vypracoval pod vedením vedoucí práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Praha 16. 7. 2015

....

podpis

Poděkování

Děkuji vedoucí mé práce doc. RNDr. Nadě Vondrové, Ph.D. za odborné vedení, trpělivost, cenné rady a podnětné připomínky k mé práci a za čas, který mi věnovala. Děkuji také všem učitelům z Waldorfského lycea v Praze a paní hospodářce Aleně Kolářové za podporu při psaní diplomové práce.

ABSTRAKT

Teoretická část práce obsahuje didaktický rozbor tématu slovních úloh, tedy vymezení pojmu slovní úloha, klasifikaci slovních úloh z několika různých hledisek a metody řešení slovních úloh podle několika českých didaktiků matematiky. Další částí teoretické části práce je popis výuky předmětu matematika na střední waldorfské škole s akcentem na epochové vyučování.

Jádrem práce je experimentální část, která je složena ze dvou oddílů. V prvním oddílu je popsaná příprava, realizace a vyhodnocení výukového experimentu na téma slovních úloh. Výukový experiment byl proveden v prvním ročníku Waldorfského lycea v Praze ve školním roce 2014/2015. V práci jsou popsané jednotlivé dny výuky. Součástí je reflexe vyučujícího a hospitanta, který se celé epochy účastnil.

Praktická část pokračuje oddílem, ve kterém jsou analyzovány řešitelské strategie žáků, kteří psali didaktický test obsahující slovní úlohy, jednou před výukovým experimentem a jednou po něm. Následuje analýza jednotlivých úloh, ve které jsou zkoumány zajímavé jevy, které se v řešeních objevily.

V závěru je popsán celkový pohled autora práce na vykonaný výzkum, na části, které se z pohledu autora povedly nebo nepovedly. Navíc je zde vysloven závěr, který z výukového experimentu a didaktického testu vyplývá.

KLÍČOVÁ SLOVA

slovní úlohy, epochové vyučování, obtíže žáků, chyby, výukové přístupy

ABSTRACT

The theoretical part of the diploma thesis contains didactic analysis of word problems, that is the definition of a word problem, classification of word problems from various perspectives and methods of solving word problems, according to czech specialists in didactics of mathematics. The second part describes the teaching of mathematics at the secondary Waldorf schools with an emphasis on teaching in main lesson blocks.

The core of the work lies in the experimental part which consists of two sections. The first section describes the preparation, implementation and evaluation of educational experiments on the subject of word problems. The educational experiment was conducted in the first class of the Waldorf lyceum in Prague in the academic year 2014/2015. All days of the main lesson block are described. Part of the reflection of the teacher and an observer who participated in the entire main lesson block is the part of thesis.

The practical part continues with the pupil´s solving strategies analysis. Pupils wrote a didactic test with word problems once before the teaching experiment and once after it. The analysis of each problem is following, in which the interesting phenomena that emerged in the pupils´ solutions are explored.

The conclusion summarises the main points of the research conducted and looks critically at some of its parts. Finally, some implications of the work are given.

KEYWORDS

word problems, teaching in main lesson blocks, pupil´s problems, mistakes, teaching approaches

Obsah

1 Úvod

Výuka slovních úloh pro mě vždy představovala problém. Čtyři roky pracuji jako učitel na střední waldorfské škole a snažím se slovní úlohy zařazovat do všech probíraných témat. Samozřejmě pouze tehdy, pokud je to možné. Pravidelně se ve své praxi setkávám s negativním postojem žáků k tématu slovních úloh už při příchodu na střední školu. Proto jsem se během studia na Pedagogické fakultě Univerzity Karlovy v Praze začal o toto téma zajímat.

Vedoucí mé práce nám studentům na jednom semináři nabídla téma diplomové práce, ve kterém by se skupina studentů měla zabývat kritickými místy matematiky na základní škole. Každý student si měl vybrat jednu oblast matematiky, na kterou by se zaměřil. Já jsem se přihlásil o téma slovních úloh. Po půl roce jsem musel, kvůli povinnostem třídního učitele na škole, na které působím, studium na dva roky přerušit. Ve studijním roce 2014/2015 jsem do studia opět nastoupil a chtěl jsem pokračovat v tématu, které jsem si předtím vybral. Netušil jsem, že skončil grant, v rámci kterého se kritická místa v matematice analyzovala. Mé téma bylo tím pádem v původním zadání neaktuální.

Proto jsme se s vedoucí práce dohodli, že se zaměřím na vyučování slovních úloh na střední škole waldorfské. Vnímal jsem to jako obrovskou výzvu, protože metodická literatura k fenoménu slovních úloh na škole waldorfského typu neexistuje. Zároveň jsem měl radost z toho, že se můžu zabývat tématem, které mě dlouhodobě zajímalo a se zaměřením na typ školy, na které učím.

Cílem práce bylo zpracovat téma rovnic a slovních úloh tak, aby bylo vhodné pro vyučování formou epoch na waldorfské střední škole, ověřit svou přípravu v praxi a vyhodnotit, jakým způsobem výuka tématu ovlivnila řešitelské strategie žáků u vybraných slovních úloh.

První část práce tvoří didaktický rozbor tématu slovních úloh a zpracování výzkumů v této oblasti. Nejdříve je vymezen pojem slovní úlohy podle několika autorů a jejich klasifikace. Dále jsou popsány metody řešení slovních úloh podle autorů Novotné, Hejného a Kuřiny. Nedílnou součástí první části práce je charakteristika schopností potřebných k řešení slovních úloh podle schématu, které popsala Novotná (2004).

Další část práce se zabývá způsoby vyučování matematice na střední škole waldorfské. Zavádí se důležitý pojem epochového vyučování, rozlišují se cvičné hodiny a praktika a jejich náplň v jednotlivých ročnících. Nejvíce prostoru je určeno pro epochové vyučování, protože to je specifikem právě waldorfských škol. Popis struktury epochy je důležitý pro pochopení dalšího textu.

Praktická část práce začíná čtvrtou kapitolou, ve které je popsaná příprava, realizace a vyhodnocení výukového experimentu na téma slovních úloh řešitelných rovnicemi (nebo jinak). Výukový experiment byl proveden v prvním ročníku Waldorfského lycea v Praze ve školním roce 2014/2015. Experimentální výuka probíhala v osmidenní epoše rovnic a slovních úloh. V práci jsou popsané jednotlivé dny výuky. V každém dnu je popsán průběh této konkrétní vyučovací činnosti ve všech třech částech – pojmové, zápisové a rekapitulační. Nechybí reflexe proběhlé epochy vyučujícím a hospitujícím učitelem.

Praktická část pokračuje pátou kapitolou, která se věnuje řešitelským strategiím žáků. Připravil a realizoval jsem didaktický test obsahující slovní úlohy, jednou před výukovým experimentem a jednou po něm. Následně jsem analyzoval, jaké řešitelské strategie se v obou testech objevily, a porovnal je.

V závěru jsou opět vymezeny cíle práce a navíc míra jejich dosažení. Je zde popsán autorův pohled na to, jak se mu povedlo zpracovat téma rovnic a slovních úloh tak, aby bylo vhodné pro epochovou formu vyučování. Důraz je v závěru kladen na reflexi analýzy úloh z didaktického testu.

Poslední částí práce jsou přílohy. Do příloh jsou zařazeny charakteristiky aktivit, které ve vyučování probíhaly, jejich žákovské zápisy v sešitech a pracovní listy k samostatné práci v jednotlivých epochových hodinách. Součástí přílohy je také školní vzdělávací program pro předmět matematika na Waldorfském lyceu v Praze.

2 Slovní úlohy ve vyučování matematiky

2.1 Slovní úloha – vymezení

Samotné vymezení pojmu slovní úlohy se v jednotlivých odborných publikacích liší a obecně je vymezení slovních úloh v didaktice matematiky nejednoznačné. Například Vyšín (1962) tento pojem vymezuje následovně: „Slovními úlohami bývají zpravidla nazývány úlohy aritmetické nebo algebraické, formulované slovy, nikoli matematickými symboly, nebo úlohy z praxe, jejichž řešení vyžaduje rozřešení aritmetické nebo algebraické úlohy." Hruša (1967) několik let po Vyšínovi pojem slovní úlohy zpřesňuje: „Slovní úloha je početní úloha, ve které je souvislost mezi danými a hledanými čísly vyjádřena slovní formulací a ve které je třeba na základě vhodné úvahy zjistit, které početní výkony musíme s danými čísly provést, abychom dospěli k číslu, jež máme vypočítat."

Dívíšek (1989) tvrdí, že slovní úloha je „obvykle úloha z praxe, ve které je popsána určitá reálná situace, která vyúsťuje v problém. Tento problém můžeme řešit matematickými prostředky nebo v realitě." Kuřina (1990, s. 61) uvádí: „Slovní úlohy jsou úlohy, v nichž je obvykle popsána určitá reálná situace (např. s ekonomickou, přírodní, fyzikální, společenskou či jinou tematikou) a úkolem řešitele je určit odpovědi na položené otázky." Hejný (2003, s. 3) v článku o anatomii slovní úlohy o věku vymezuje slovní úlohu následovně: „Termínem slovní úloha rozumíme matematickou úlohu, která vyžaduje jazykové porozumění a přesah do životní zkušenosti."

Z vymezení plyne, že jsou slovní úlohy zadávány slovně nebo pomocí obrázku. Matematickou symboliku v zadáních slovních úloh používáme jen zřídka. To je i základní rozdíl mezi slovními úlohami a běžnými úlohami v matematice. Všichni autoři kromě Hruši kladou důraz na možnost aplikace matematiky do oblastí mimo matematiku. V práci budu používat termín slovní úloha v širším slova smyslu, tedy bez nutnosti kontextu.

2.2 Klasifikace slovních úloh

Slovní úlohy lze kategorizovat podle různých hledisek. Na druhém stupni základní školy a na středních školách jsou nejčastějším matematickým nástrojem pro modelování slovních úloh lineární rovnice s jednou neznámou a soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých. To je jedno možné rozdělení slovních úloh – podle použitého matematického aparátu:

- slovní úlohy řešitelné lineárními rovnicemi,
- slovní úlohy řešitelné soustavami rovnic o dvou neznámých,
- slovní úlohy na procenta,

- kombinatorické slovní úlohy apod.

Další kategorizace je určena reálným obsahem úlohy, kontextem. I dnes se některé učebnice tímto rozdělením řídí a používají ho, např. Rosecká (2000):

- slovní úlohy o pohybu,
- slovní úlohy o společné práci,
- slovní úlohy o směsích.

Pracuje-li žák s učebnicí, která segmentuje slovní úlohy do typově podobných úloh, můžou se stát rutinními a vést k formalismu. Žák se naučí signály, které má při daném typu zadání vykonat. Například společná práce znamená „$\frac{1}{x}$“. Je proto vhodné řešit s žáky co nejvíce nerutinních úloh, které pro ně budou výzvou a budou rozvíjet jejich myšlení a motivaci. Šedivý a Vallo (2013, s. 6) rozdělují slovní úlohy z hlediska rutiny:

- standardní,
- nestandardní.

Standardní úlohy kladou důraz na opakování rutinního postupu a paměť. Pro žáky jsou zpravidla zajímavější úlohy nestandardní, kterými lze vzbudit zájem o matematiku jako takovou. Řešení nestandardních úloh vyžaduje důvtip a novou myšlenku. Žák je zde v roli objevovatele.

Pokud zkoumáme formulaci zadání slovní úlohy, můžeme pozorovat, že je při určování náročnosti signifikantní. Ruppeldtová (2005, s. 224) fenomén formulace zadání úlohy zařazuje mezi hlavní fenomény[1] náročnosti slovních úloh. Rozlišuje:

- konceptuální úlohy (statické podle Hejného (2003)),
- procesuální úlohy (dynamické podle Hejného (2003)).

Konceptuální úlohy jsou popisem reálné situace neměnné s časem. Naopak procesuální úlohy označují úlohy, které jsou závislé na času a vyjadřují změnu reálné situace v čase. Autorka v článku nepopisuje, která z těchto dvou kategorií je pro žáky náročnější. Domnívám se však, že to jsou úlohy procesuální, protože proměnlivost hodnot v čase může žákům komplikovat obraz o úloze a proměnných.

2.2.1 Slovní úlohy s praktickými náměty

Velmi významnou skupinou slovních úloh jsou slovní úlohy s praktickými náměty, které ukazují, že lze matematiku využít v praxi. Dále žáky vedou k dovednostem uchopení praktických

[1] Fenomén ve smyslu jevu, který má vliv na obtížnost matematické úlohy.

životních situací pomocí matematiky. Trávníček (2013, s. 166–167) rozlišuje deset vlastností, které by měly mít slovní úlohy s praktickými náměty:

- „Úloha má být organickou součástí vyučování matematice.
- Úloha má být formulována optimálně co do délky, srozumitelnosti a přiměřenosti věku, schopnostem a zaměření žáků.
- Použití praktických pojmů má být funkční a z praktického hlediska souviset s řešeným problémem.
- Správné pojmy a věrohodné údaje mají být použity ve správném významu z hlediska praxe, o níž úloha pojednává, a pravdivě o této praxi vypovídat.
- Má se používat pojmů a situací žákům známých nebo takových, jejichž vysvětlení a pochopení výrazně nepřekročí rámec řešené úlohy.
- Úloha má být z matematického hlediska správně formulována, použití praktických pojmů nemá být na úkor matematické přesnosti.
- Situace, kterou úloha navozuje, nemá být spekulativní, ale ve shodě s praxí; i když podle míry abstrakce může tuto praxi odrážet zjednodušeně, má být v rámci dané abstrakce prakticky možná.
- Problém, který se v úloze řeší, má být nejen prakticky možný, ale i užitečný, jeho řešení má prohloubit poznání reality. Má to být tedy problém (typ problému) toho druhu, jaké se v praxi skutečně řeší, i když opět může odrážet praxi zjednodušeně. Tam, kde užitečnost řešení problému není zjevná, měl by se v úloze naznačit kontext, z něhož by praktický význam řešení vynikl, nebo by pro učitele a žáky nemělo být složité tento kontext domyslet.
- Úloha by měla v žácích podnítit zájem o příslušný praktický problém a o jeho řešení.
- Slovní úlohy kromě svého prvoplánového účinku působí svým vstupem do reality i nepřímo. Některé poznatky a pocity se ukládají v mysli žáků, aniž si to (a často i učitel) uvědomují, a v různých souvislostech ovlivňují žákovo myšlení a jednání. I toto působení se má podle možnosti předvídat."

2.3 Metody řešení slovních úloh

Polya na jedné ze svých přednášek řekl: „Myslím, že jedním ze základních cílů základních škol by mělo být seznámit žáky s metodami řešení úloh. Řešit nejen běžné úlohy, řešit dlouhé úlohy na dělení a násobení a podobné věci, ale vybudovat v nich všeobecný postoj k řešení úloh".

(Lengyelfalusy, 2007, s. 110). Ovšem samotné řešení slovních úloh patří podle mnoha učitelů k nejobtížnějším partiím matematiky na základní škole vůbec.

2.3.1 Řešení slovních úloh podle Novotné

Novotná (2004) rozděluje model procesu řešení slovní úlohy do tří operací:

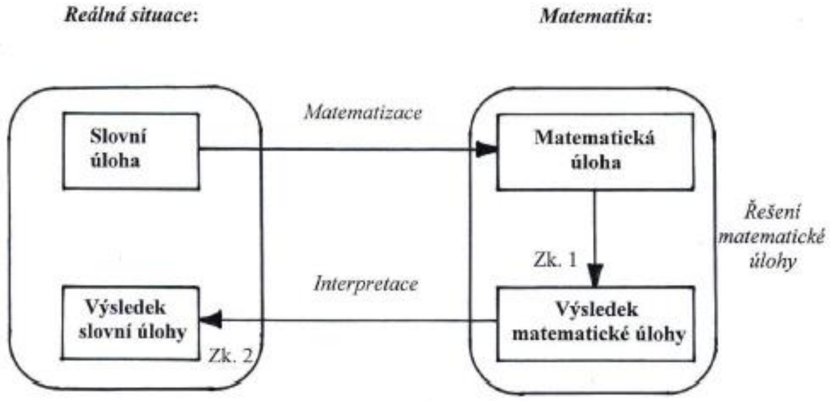
- Uchopení zadání slovní úlohy

  Uchopením se zde myslí získání všech dat a vztahů nezbytných pro vytvoření matematického modelu dané úlohy a samotné vytvoření modelu. Dá se také říct, že text z obecného jazyka překládáme do jazyka matematiky, což vyžaduje jazykové pochopení. Uchopení Novotná charakterizuje jako operaci složenou z pěti činností: identifikace objektů, identifikace vztahů mezi objekty, identifikace otázky, nalezení sjednocujícího faktoru, získání vhledu do struktury slovní úlohy a vytvoření matematického modelu úlohy.
- Vyřešení matematického modelu

  Vyřešení matematického modelu znamená vyřešení matematické úlohy (např. rovnice) bez ohledu na kontext úlohy.
- Návrat do kontextu slovní úlohy

  Výsledek řešení matematického modelu se aplikuje v kontextu úlohy a zkouškou se ověří správnost výsledku.

Popsaný mechanismus lze znázornit graficky:



Obr. 1: Schéma matematizace slovních úloh (Odvárko, 1990)

Neplatí však obecně, že všichni žáci pracují se slovními úlohami podle uvedeného mechanismu. Někteří upřednostňují nealgebraický způsob řešení úlohy (řešení úsudkem, metoda pokus – omyl, grafické řešení). Šedivý a Vallo (2013, s. 7) zdůrazňují, že „žádnou slovní úlohu nemůžeme vyřešit, pokud nebyla zformulovaná příslušná matematická úloha“. To však platí pouze v případě, že žák slovní úlohy řeší algebraicky. Zmíněný předpoklad v jejich tvrzení chybí.

2.3.2 Řešení slovních úloh podle Hejného

Hejný (2003, s. 3) si ve svém anatomickém přístupu ke slovní úloze všímá čtyř vrstev:

- vrstva příběhu (situace),
- vrstva objektů,
- vrstva vztahů,
- vrstva matematického modelu.

Ve vrstvě příběhu (situaci) si řešitel vytváří první představy o úloze. Objekty, o kterých se v zadání úlohy hovoří, jsou součástí vrstvy objektů, které poukazují, nebo nepoukazují na číslo. Všechny vazby mezi objekty tvoří vrstvu vztahů. Vztah v tomto smyslu Hejný vymezuje jako „každou sémantickou informaci o objektech úlohy“. Autor popisuje vrstvu matematického modelu jako převedení příběhu nebo situace do znakového jazyka (rovnice).

Řešitelský proces je popsán pomocí rozkladu textu úlohy na jednotlivé věty – fragmenty. Fragmenty, které netvoří gramatické věty, se do gramatických vět převedou. Následně se fragmenty přepíšou jako znakové vazby do formalizovaného jazyka.

Přístupy Novotné (2004) a Hejného (2003) jsou rozdílné. Novotná používá pojem operace, Hejný pojem vrstvy. Novotná úlohu analyzuje z pohledu žáka a jeho myšlenkových činností, Hejný se na úlohu dívá prostřednictvím samotné úlohy a její struktury, morfologie.

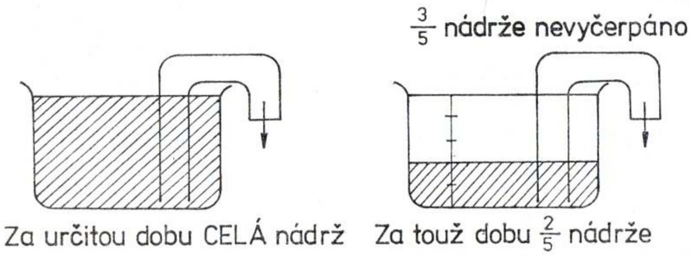
2.3.3 Řešení slovních úloh podle Kuřiny

Jednoduchý pohled na řešení slovní úlohy nabízí Kuřina (1990), který tvrdí, že řešitel má při hledání řešení úlohy dvě možnosti, experimentovat nebo modelovat. Modely rozděluje na:

- činnostní (objekty z úlohy lze nahradit předměty, s kterými žák může přímo pracovat)
- ikonické (přepis zadání úlohy s použitím minimálního počtu slov, přepis obrázkem, grafem)
- symbolické (objekty úlohy a vztahy mezi nimi vyjádřené pomocí jazyka matematiky)

Model řešiteli pomáhá myšlenkově proniknout do podstaty zadání úlohy, řešení zjednodušuje.

Vhodný ilustrativní příklad jednotlivých modelů uvádí Kuřina: „Pumpa, která vysávala vodu z nádrže, se znečistila a pracuje jen na 40 % své kapacity. O kolik procent se prodlouží doba potřebná k vyčerpání nádrže?“ Činnostní model není v této úloze využitelný. Pravděpodobně nelze činností simulovat snížení kapacity nádrže. Jeden možný ikonický model je na obrázku 2.



Obr. 2: Ikonický model úlohy (Kuřina, 1990, s. 62)

Řešitel vhodně vizualizuje objekt úlohy – pumpu a snížení kapacity reprezentuje grafickým zvýrazněním adekvátní částí celku. Následně logicky z obrázku vyvozuje, že se doba musí prodloužit o 150 %.

Chceme-li sestavit symbolický model, musíme nejdříve zavést jednotlivé proměnné vystupující v úloze:

x … původní výkon pumpy	X … nový výkon pumpy
t … původní doba potřebná k vyčerpání	T … nová doba potřebná k vyčerpání
V … objem nádrže	

Zřejmě platí, že $x \cdot t = V$ a zároveň $X \cdot T = V$. Z toho vyplývá, že $X \cdot T = x \cdot t$, z čeho ze zadání platí: $X = \frac{40}{100} \cdot x = \frac{2}{5} \cdot x$. Nakonec dostáváme rovnost $\frac{2}{5} \cdot x \cdot T = x \cdot t$, což implikuje $T = \frac{5}{2} \cdot t =$ $= t + 1{,}5 \cdot t$.

Z poslední rovnice lze usoudit, že se doba musí prodloužit o právě 150 %.

2.4 Schopnosti potřebné k řešení slovních úloh

Termín schopnost vymezuje Čáp (1993) jako „předpoklad ke správnému vykonávání činnosti“. My se zde nebudeme zabývat schopnostmi souvisejícími s emocionalitou, zaměříme se na schopnosti intelektové, schopnosti vnímání a představivosti, které přímo s řešením slovních úloh souvisí.

2.4.1 Schopnosti potřebné k uchopení slovní úlohy

Ve fázi uchopení slovní úlohy žák potřebuje porozumět textu úlohy, takže využívá schopnosti jako čtení s porozuměním a představivost. Správné porozumění textu je nevyhnutné pro všechny další kroky v řešení. Je složité rozhodnout, jestli je důvodem žákova nepochopení zadání úlohy selhání v čtení s porozuměním nebo představivosti. V případě, že je důvodem nesprávné pochopení plynoucí z čtení, je možné úlohu přeformulovat (možno i ve spolupráci s žákem). Pokud zvolíme možnost přeformulovat zadání společně s žákem, můžeme tím žákovi pomoct s pochopením kontextu úlohy, nemusíme tak však zaručit, že žák bude schopen sestavit matematický model úlohy.

Sestavení matematického modelu vyžaduje schopnost vytvořit vizualizaci nebo sestavit plán řešení a matematizaci. „Vizualizací nazýváme ten graficko-výtvarný produkt žáka, který byl vytvořen s cílem porozumět úloze, najít její řešení, nebo napomoci formulovat výsledek.“ (Hejný, 2005, s. 22). V žákovských řešeních můžeme často objevit diagramy, grafy a obrázky. Žák úlohu vizualizuje proto, aby úloze „porozuměl, našel její řešení, nebo formuloval výsledek“. (Hejný, 2005, s. 25) Hejný experimentálně ověřil, že vizualizace podporuje tvorbu řešitelské strategie žákem.

Schopnost sestavit plán řešení znamená schopnost rozdělit si řešení úlohy na jednotlivé kroky. Není nevyhnutné, aby žák vytvořil plán vědomě, nemusí umět jednotlivé kroky pojmenovat, to už vyžaduje určitou úroveň abstrakce. Stačí, aby měl žák ve vědomí krok, ve kterém se právě nachází, a krok následující.

Uchopení slovní úlohy je završeno matematizací, tedy vytvořením matematického modelu úlohy. Z vlastní zkušenosti považuji matematizaci za nejsložitější část procesu uchopení, kdy mívají žáci problém v přechodu z mateřského jazyka do jazyka matematiky (vrstva matematického modelu). Popisovaný přechod vyžaduje od žáka objevení souvislostí, matematických vztahů mezi zavedenými proměnnými.

Velmi často se však stává, že je proces matematizace žáky zaměňován za proces vyhledání vhodného typu úlohy (úlohy o pohybu, o společné práci apod.). V tom případě narážíme na problém, kdy je daný typ slovních úloh u žáka zakotven ve formě formálních poznatků, postupů a schémat vytvořených na základě opakování určité početní zkušenosti. Dokonce i někteří učitelé tvrdí, že aby žák mohl úspěšně řešit jednoduchou slovní úlohu, musí se naučit a zautomatizovat si správný postup. Myslím si, že pokud je na automatizaci kladen přílišný důraz, může to podporovat vznik formálního poznatku v myšlenkových strukturách žáka. Podle Hejného a Kuřiny (2001, s. 121–131) formální poznatek charakterizují dvě vlastnosti. První je ta, že formální poznatek postrádá oporu o izolované a univerzální modely. Projevuje se to například tím, že žák není schopný uvádět konkrétní příklady. Druhou vlastností formálního poznatku je jeho uchování pouze pamětí.

Není výjimkou, že už na prvním stupni základní školy se začínají slovní úlohy stávat formálním poznatkem. Podle Hošpesové (2002, s. 5) to souvisí se zařazením slovních úloh až po vytvoření spojů pro základní aritmetické operace. Často je totiž praxe taková, že jsou slovní úlohy tématem pro procvičení operací. Takže jsou například vybudovány operace sčítání a násobení bez ohledu na reálný kontext a až následně, po automatizaci operací, se učitel zaměřuje na jejich aplikaci při řešení slovních úloh. Právě opomínání reálných zkušeností dětí při zavádění nových pojmů a operací je často důsledkem potíží při vytváření matematických modelů.

2.4.2 Schopnosti potřebné k vyřešení matematického modelu

K vyřešení matematického modelu řešitel využívá své matematické schopnosti, které rozlišuje např. Devlin (2005, cit. v Komárik, 2007, s. 14):

- smysl pro číslo (vrozená schopnost porozumět např. rozdílům v počtu, pořadí nebo hodnotě),
- schopnost počítat s čísly jako abstraktními entitami,
- schopnost porozumět prostorovým vztahům (schopnost rozlišit tvary a vzdálenosti),
- schopnost konstruovat a sledovat kauzální řetězec fakt nebo událostí,
- schopnost algoritmizovat,
- schopnost pracovat s abstraktními modely.

Smysl pro číslo a schopnost počítání s čísly jako abstraktními entitami jsou schopnosti, které sestávají z dílčích schopností, jakými jsou například schopnost provádět aritmetickou operaci, porozumění algoritmu výpočtu a porozumění významu operace. U žáků se pěstuje v tematickém okruhu čísel a početních operací s nimi už na prvním stupni základní školy. Na druhém stupni se k číslu přidává proměnná.

2.4.3 Schopnosti potřebné k návratu do kontextu slovní úlohy

U slovních úloh je realizací návratu do kontextu úlohy slovní odpověď. Slovní odpověď mnozí žáci považují za nadbytečnou část řešení slovní úlohy. Schopnost interpretace výsledku a posouzení jeho správnosti však pomáhá při tvorbě zdůvodněných rozhodnutí. Na základě praxe je však známo, že se žákům často stává, že se nezamýšlejí nad výsledky úloh, které řeší.

Hejný (2005, s. 25) doporučuje od žáka požadovat takovou formulaci výsledku, kterou by pochopil i ten, kdo danou úlohu vůbec neřešil, například žák z jiné třídy. V případě, že se žákům odpovědi nechce psát, je možno k úloze zformulovat několik dalších otázek, které spolu vytvoří komplexní slovní odpověď a zároveň učiteli umožňují kontrolu, zda se žák vrátil do kontextu úlohy.

3 Matematika na střední škole waldorfské

Matematika patří ve waldorfské škole k předmětům s poměrně slušnou hodinovou dotací. V případě Waldorfského lycea v Praze se jedná o týdenní hodinovou dotaci 15 vyučovacích hodin za studium v ročníkové struktuře 5-4-3-3. Matematika se zde vyučuje ve třech formách: epochových a cvičných hodinách a praktikách. Kromě toho učitelé matematiky na waldorfských školách často spolupracují s ostatními odbornými učiteli. Například při epoše trigonometrie se v hudební výchově probírá Pythagorův monochord, nebo během epochy projektivní geometrie žáci ve výtvarné výchově kreslí obrazy metodou lineární perspektivy. Učitelé epoch o probíraných tématech mluví minimálně s třídním učitelem a ten vyhledává příležitosti pro mezipředmětovou spolupráci.

3.1 Epochová forma vyučování matematice

Epochy jsou několikatýdenní, denně 110 minut trvající, bloky zaměřené na výuku jednoho tématu. Na waldorfské škole jsou epochy těžištěm celé výuky. Epochová hodina probíhá každý den od 08:00 do 09:50. V matematice se na Waldorfském lyceu v Praze můžeme setkat s těmito epochami[2]:

- Epocha goniometrie a trigonometrie (1. ročník, 3 týdny)
  Probíraná témata: Úhel a jeho vlastnosti, trojúhelníky a jejich klasifikace, shodnost, podobnost, Pythagorova věta a její různé důkazy, Euklidovy věty, goniometrické funkce ostrého úhlu, jednotková kružnice a obecná definice goniometrických funkcí, goniometrické rovnice, sinová a kosinová věta a jejich aplikace.
  Epocha je teoretickou přípravou a má úzkou návaznost na zeměměřický kurz, který se koná koncem školního roku.
- Epocha rovnic a slovních úloh (1. ročník, 3 týdny)
  Probíraná témata: Lineární rovnice a řešení úloh z praxe, nelineární rovnice převoditelné na lineární, rovnice s absolutní hodnotou, kvadratické rovnice a řešení úloh z praxe, soustavy rovnic a řešení úloh z praxe, exponenciální rovnice a řešení úloh z praxe, logaritmus a počítání s logaritmy, logaritmické rovnice a řešení úloh z praxe.
- Epocha analytické geometrie (2. ročník, 3 týdny)
  Probíraná témata: Kartézská soustava souřadnic v rovině, vzdálenost dvou bodů, střed úsečky, obecná rovnice přímky v rovině, směrnicový a normovaný tvar rovnice přímky,

[2] Skladba epoch matematiky na Waldorfském lyceu v Praze ve školním roce 2014/2015.

vzájemná poloha přímek a jejich odchylka, vzdálenost bodu od přímky, analytické vyjádření kružnice, elipsy, paraboly, hyperboly (jejíž osy jsou rovnoběžné s osami souřadnic), vzájemná poloha přímky a kuželosečky, tečna ke kuželosečce.

- Epocha projektivní geometrie (2. ročník, 3 týdny)

  Probíraná témata: Perspektiva v renesančním umění, nekonečně vzdálený bod a přímka v souvislosti se středovým promítáním (úběžník a horizont v perspektivě), Desarguesova, Brianchonova a Pascalova věta, projektivní zavedení kuželoseček, princip duality v rovině, projektivní geometrie křivek, bodové a tečnové vytváření křivek, regulární a singulární body křivky, duální křivky.
- Epocha kombinatoriky a pravděpodobnosti (3. ročník, 4 týdny)

  Probíraná témata: Základní kombinatorické pojmy: variace, permutace, kombinace bez a s opakováním, faktoriál, binomická věta a kombinační čísla, Pascalův trojúhelník, aplikace na praktických úlohách, náhodný jev a jeho pravděpodobnost, závislost a nezávislost jevů, klasický výpočet pravděpodobnosti, hypergeometrické a binomické rozdělení, geometrická a statistická pravděpodobnost.
- Epocha statistiky (4. ročník, 1 týden)

  Probíraná témata: Dotazník a jeho tvorba, typy otázek, struktura a testování dotazníku, sběr dat, statistický soubor, statistický znak a jeho četnost, rozdělení četností, charakteristiky souboru: průměry, modus, medián, rozptyl, směrodatná odchylka, variační koeficient, analýza závislosti: koeficient korelace, zpracování dat a interpretace.
- Epocha komplexních čísel (4. ročník, 2 týdny)

  Probíraná témata: Gaussova rovina, komplexní čísla a počítání s nimi, algebraický tvar komplexního čísla, absolutní hodnota a argument komplexního čísla, geometrický význam operací s komplexními čísly, goniometrický tvar komplexního čísla, Moivreova věta, binomická rovnice.

Výhodou epochového vyučování je spojení žáka s tématem. Žák se do tématu ponoří, protože jej prožívá každý den v čase, kdy je schopen nejvíce využít svých kognitivních schopností. Žáci v epochách nepoužívají učebnice, ale sami si je vytvářejí formou sešitu, ve kterém jsou zápisy z hodin a zároveň množství řešených úloh. Sešity pak žákům slouží jako učebnice. Pro žáka to znamená, že musí kromě obsahu dbát i na grafickou úpravu a přehlednost. Zároveň se na jedno téma v epoše díváme z různých stran a pohledů, to je pro žáky atraktivní. Žákům je umožněno se ptát, v epochových hodinách se potýkají s problémy, které musí řešit a o kterých musí přemýšlet.

Znamená to, že si aktivně budují své znalosti. V častých diskusích, které s žáky učitel vede, hrají roli kromě matematických poznatků také sociální aspekty.

Zcela výjimečnou epochou je epocha projektivní geometrie. V německých středních školách waldorfských se projektivní geometrie běžně vyučuje. V České republice se projektivní geometrií zabýváme pouze u nás, na Waldorfském lyceu v Praze. Máme ji pevně integrovanou ve školním vzdělávacím programu. V této epoše lze u žáků, mimo jiné, pěstovat důvěru ve vlastní myšlení. Prostředkem k tomu je například axiom, který zde běžně používáme, že se dvě rovnoběžné přímky protnou v nevlastním bodě. Žáci s tímto výrokem dlouze vnitřně bojují. Jsou však schopni s nevlastními prvky dále pracovat. Tuto schopnost považujeme za velmi důležitou.

3.1.1 Struktura epochové hodiny

Nejdůležitějším faktorem, který žáka spojuje s probíraným tématem, je vnitřní struktura epochových hodin. Pestrost a střídání aktivit zajišťují soustředěnou a plnohodnotnou výuku. Jedna epochová hodina (110 minut) je složena ze tří částí: pojmové, zápisové a rekapitulační. Jejich délky jsou pouze orientační, záleží na probíraném tématu a formě práce.

- Pojmová část (přibližně 50 minut)

  V této části učitel většinou nevystupuje frontálně. Učitel spíše nastoluje otázky, nechá žáky samostatně o pojmech přemýšlet a diskutovat. Ideální je, když i žáci sami mezi sebou diskutují a dohadují se. „Na první pohled by se mohlo zdát, že diskusi ve třídě je snadné vytvořit, pokud se studenti někdy předtím jisté kultuře diskuse naučili. Je třeba však mít na paměti, že zde vyvažujeme velký protiklad mezi zdánlivou libovolností diskuse (každý příspěvek může být motivován osobními a subjektivními dojmy) a exaktností cíle, kterého chceme dosáhnout (nalezený pojem není závislý na tom, jestli se nám líbí nebo ne). Toto vyvažování protikladu činí onu diskusi někdy velmi náročnou a je zde nebezpečí, že se studenti přeci jen chtějí spokojit s jednoznačnou odpovědí danou učitelem. Pokud je však řetězec učitelem připravených dílčích otázek důsledně promyšlený, najdou studenti hledaný pojem skutečně sami. Velmi častou formou vyučování je v pojmové části skupinová práce žáků. V jednotlivých skupinách jsou žáci různé úrovně matematických dovedností, což zaručuje zapojení všech. Každý žák může ve skupině přispět svými přednostmi. Je to esence celého epochového vyučování, protože získaný pojem je nevysloveným cílem společného snažení a soustřeďuje se na něj nemalé očekávání samotných žáků.“ (Jirout, 2012, s. 5)

- Zápisová část (přibližně 20 minut)

  Pouze v zápisové části žáci píší zápis do sešitu. Znamená to, že si v pojmové části nesmí nic do sešitu ani na papír zapsat. Zdá se to být pro žáka složitý úkol. Waldorfská škola je založena na předpokladu, že psaní a poslech, psaní a vnímání jsou dvojice činností, které by se neměly během výkladu učitele odehrávat najednou. Zároveň je zápis až po výkladu druhou možností, jak žák může probíraná témata uchopit, je to druhý vědomý návrat k témuž. V prvním a druhém ročníku střední školy učitel většinou žákům se zápisem pomáhá formou osnovy, která je napsaná na tabuli. Ve třetím a čtvrtém ročníku se žáci pokouší psát zápis zcela samostatně. Učitel je žákům v zápisové části k dispozici, většinou chodí po třídě a odpovídá na doplňující otázky jednotlivých žáků. Během zápisu si žáci mají možnost lépe uvědomit pojem, který v pojmové části poznávali a objevili.
- Rekapitulační část (přibližně 40 minut)

  V poslední, rekapitulační části hodiny, žáci řeší úlohy související s nově probranými pojmy, které pro ně připravuje učitel většinou formou pracovních listů. Můžeme říct, že v rekapitulační části vládne pokojnější nálada. Je dobře, když žáci spolu o řešení jednotlivých úloh hovoří, je vhodné je v tom podporovat.

3.2 Cvičné hodiny matematiky

Jádrem matematické činnosti na waldorfských školách je řešení úloh. „Matematika zde vychází z obou základních pilířů matematiky: z fantazie (indukce) v počátečním stadiu a z logického vyvozování (dedukce) v pozdějším stádiu matematické činnosti. Nejdůležitějším cílem je rozvinout u žáka jeho schopnost v myšlení v širokém rozpětí od odhadu výsledku až k logickému závěru a dodat mu tak sebedůvěru, důvěru ve vlastní myšlení.“ (Richter, 2013, s. 179)

Ve cvičných hodinách jde na waldorfské škole především o procvičování učiva ve smyslu řešení úloh. Žáci v hodinách řeší úlohy připravené učitelem. Úlohy by měly být diferencované pro alespoň dvě úrovně podle schopností žáků. Tento aspekt je v cvičných hodinách matematiky velmi důležitý. V prvním ročníku obzvlášť, protože je úroveň matematických schopností nově příchozích žáků různá. Navíc se ve cvičných hodinách probírají nová témata, takže i zde je prostor pro podnětné vyučování.

Témata, kterými se žáci Waldorfského lycea v Praze zabývají ve cvičných hodinách v prvním ročníku, jsou operace s čísly a výrazy a planimetrie. Dále se v těchto hodinách procvičují témata probíraná v epochovém vyučování. Žáci hlouběji poznávají význam symbolického matematického zápisu. Je nutné, aby získali důvěru v jeho používání. V planimetrii se kromě konstrukčních úloh, zobrazení v rovině, obvodů a obsahů rovinných útvarů, zabývají specifickými tématy, jako jsou například Hippokratovy půlměsíčky, euklidovsky neřešitelné úlohy (trisekce úhlu, kvadratura kruhu, rektifikace kružnice) a konstrukce omezenými prostředky.

Ve druhém ročníku se v cvičných hodinách soustředíme na stereometrii, posloupnosti a vektorovou geometrii. V stereometrii se zaměřujeme na metrické vlastnosti v prostoru, povrchy a objemy těles, Platónská a Archimédovská tělesa. Téma aritmetických a geometrických posloupností a řad je rozšířeno o Fibonacciho posloupnost a zlatý řez a jejich výskyt v přírodě a architektuře. Žáci pracují s pojmem nekonečna při součtu nekonečných geometrických řad. Podruhé se tak setkávají s nekonečnem, poprvé to bylo v epoše projektivní geometrie.

Třetí ročník je z pohledu cvičných hodin monotematický. Jediným probíraným tématem jsou funkce. Součástí je diferenciální a integrální počet funkcí jedné proměnné.

Ve čtvrtém ročníku jsou cvičné hodiny určeny pouze pro studenty přírodovědné specializace, kdy jsou žáci schopni manipulovat s abstraktními pojmy matematiky. Mezi probíraná témata patří výroková a predikátová logika, teorie množin, důkazy matematických vět a algebra matic. Zároveň se podle počtu disponibilních hodin rozšiřují vybrané fenomény z předešlých let studia.

3.3 Praktika

Předmět matematika na waldorfských školách doplňují praktika z matematiky. Jedná se o bloky zaměřené na deskriptivní geometrii. Navíc každá třída v prvním ročníku absolvuje zeměměřické praktikum, které trvá 10 dní.

Bloky deskriptivní geometrie se v učebním plánu vyskytují v rozsahu 12 hodin v prvním ročníku a 24 hodin v ročníku třetím. V prvním ročníku je tématem úvod do stereometrie, základní polohové vlastnosti v prostoru a řezy těles ve volném rovnoběžném promítání. Ve třetím ročníku žáci řeší prostorové úlohy a úlohy na řezy těles v Mongeově promítání. Od žáků se vyžaduje přesnost a úhlednost v konstrukcích.

Druhým praktikem, které na Waldorfském lyceu souvisí s matematikou, je zeměměřický kurz. Zeměměřické praktikum je zážitkem, který je spojený s aplikací matematiky v terénu při tvorbě mapy. Žáci pracují v tříčlenných skupinách. Každá skupina má na starosti vybrané území, které musí změřit pomocí teodolitu a pásma a následně změřená data zanést do mapy. Prakticky změřené vzdálenosti a úhly se musí kontrolovat pomocí vět platících pro obecný trojúhelník. Žák tedy prakticky využívá poznatky z epochy trigonometrie. Výsledná mapa vzniká spojením práce všech skupin.

4 Výukový experiment – epocha rovnic a slovních úloh

Epocha rovnic a slovních úloh se na Waldorfském lyceu v Praze vyučuje ve druhém pololetí prvního ročníku. Je to poprvé. V předešlých letech se druhá matematická epocha v prvním ročníku nazývala epochou mocnin a logaritmů. Během dvou měsíců před epochou se v cvičných hodinách s žáky řeší úlohy o polynomech. Při práci s polynomy je nutné využívat pravidla platící pro operace s mocninami. Proto jsem se rozhodl, že mocniny zařadím do cvičných hodin ještě před téma polynomů. Na základě tohoto rozhodnutí jsem začal přemýšlet o změně tématu epochy a přišel jsem na nápad zabývat se rovnicemi a slovními úlohami, které jsou i tak ve školním vzdělávacím programu Waldorfského lycea v Praze pro předmět matematika v prvním ročníku.

Mojí další a neméně důležitou motivací je „stupeň úsudku“[3] žáka prvního ročníku střední školy. „Ve třídě sedí mladí lidé s nově probuzenými intelektuálními silami a s touhou udělat něco praktického ve světě.“ (Carlgren, Klinborg, 2013, s. 192) V praxi na naší škole pozoruji, že žáky ve věku 15 let řešení úloh z praxe velmi uspokojuje, velmi často kladou učiteli otázky po příčinách věcí. Ve waldorfské pedagogice se tvrdí, že mezi hlavní otázky, kterými se žák v tomto věku zabývá, je předpověď výsledku a hledání společných zákonitostí v jevech, které je obklopují. Téma slovních úloh se mi jeví jako ideální k uspokojení těchto intelektuálních potřeb.

V celé epoše je cílem ukázat, že rovnice jsou užitečné při řešení reálných problémů. U všech typů rovnic se snažím o to, aby jejich potřeba řešení u žáka vyplynula z potřeby řešení praktického problému, kterým se žák zabývá. Není zde tedy uplatňován princip rovnice – řešení rovnic – slovní úlohy. Pracujeme s opačným schématem: slovní úloha – rovnice – řešení rovnice.

Ve cvičných hodinách, které epochu předcházejí a žáky na ni připravují, se dbá na to, aby se co možná nejvíce algebraických identit reprezentovalo geometricky. Velmi známé jsou například geometrické reprezentace binomické věty pro $n = 2$: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. Mezi další řešené typy úloh či činností patří například součtové trojúhelníky[4].

V následujícím oddíle popíši, jakým způsobem probíhala epocha rovnic a slovních úloh ve školním roce 2014/2015, konkrétně v termínu od 23. 3. do 1. 4., což je dohromady osm pracovních dnů. Učitelem jsem byl já. Výuku jsem připravil na základě svých vlastních

---

[3] Stupněm úsudku se ve waldorfské pedagogice označuje stupeň vytváření vlastního myšlení. Úsudek na střední škole rozlišujeme teoretický (1. ročník), oduševnělý (2. ročník), individualizovaný (3. ročník) a praktický (4. ročník). Více informací: http://www.wlyceum.cz/web/studium/pojeti-studia/.

[4] Součtové trojúhelníky jsou trojúhelníková číselná schémata, ve kterých je každé číslo součtem dvou čísel ležících nad ním.

zkušeností s výukou tématu rovnic a slovních úloh. Jedná se tedy o moje vlastní přípravy, ve kterých respektuji členění epochového vyučování uplatňující se ve waldorfských školách.

4.1 Metodologie

Předkládaný výzkum je vzhledem k malému rozsahu souboru statistických jednotek výzkumem kvalitativním. Kvalitativní výzkum umožňuje podívat se hlouběji na detaily, které by se v kvantitativním výzkumu neobjevily.

4.1.1 Cíl

Cílem výukového experimentu je hlavně analýza a reflexe pedagogické praxe v mém vlastním vyučování. Chci lépe poznat dobré stránky, ale také problémy své praxe a navrhnout jejich další řešení do budoucna. Domnívám se, že je to cesta, jak zkvalitnit mé pedagogické zkušenosti ve prospěch žáků a de facto celé školy.

4.1.2 Účastníci výukového experimentu

Experiment byl proveden na státní střední odborné škole, která nabízí čtyřleté studium zakončené maturitní zkouškou. Oborem studia je 78-42-M/06 Kombinované lyceum. Žáci se od třetího ročníku rozdělují do specializací: přírodovědné a humanitní. V přírodovědné specializaci jsou profilovými předměty matematika, fyzika, chemie a biologie. V humanitní specializaci to jsou předměty pedagogika, psychologie, logika, teorie komunikace a sociální práce. Škola dosahuje velmi dobré výsledky u státních maturit, například ve státní maturitě v roce 2011 byla na 1. místě v České republice v rámci středních odborných škol. V tom samém roce skončil 2. ročník také na prvním místě v rámci středních odborných škol v testech čtenářské gramotnosti vytvořených společností Scio.

Třída, ve které byla epocha rovnic a slovních úloh vyučována, je složena z 30 žáků[5], z toho je 20 dívek a 10 chlapců, jedná se tedy o třídu smíšenou. Asi 8 žáků pochází z neúplných rodin, ostatní žáci ze sociálně stabilních rodin. V roce, kdy byli žáci do této třídy přijímáni, bylo přijato 31 studentů ze 79 uchazečů v prvním kole. Tento výběr určitým způsobem zaručil, že byli přijati převážně prospěchově velmi dobří žáci. Na druhou stranu se nedalo předpokládat, jaké klima třídy budou společně formovat.

Všeobecně se mezi učiteli školy říká, že je to třída plna aktivních a velmi dobře spolupracujících žáků. Ve třídě lze při vyučování vnímat pozitivní citové vazby mezi žáky,

[5] Data o žácích musí být anonymizována, proto jsem pravá jména žáků v diplomové práci nahradil pseudonymy.

přátelskou atmosféru. Tyto faktory usnadňují práci ve skupinách, žáci kooperují a nemají problém s prací ve skupinách, které určí učitel. Třídní kolektiv je integrovaný, neprojevují se zde konkurenční ani nepřátelské vztahy, se šikanou v této třídě nejsou žádné zkušenosti. Ve třídě je mnoho dominantních žáků, přesto se v kolektivu nevytvářejí skupinky, které by mezi sebou soupeřily. Obecně se na waldorfské škole soutěžení moc nepodporuje, učitelé se spíše snaží o to, aby žáci spolu spolupracovali. Žáci mají ve třídě podíl na rozhodování o průběhu společných akcí, klade se důraz na angažovanost při činnostech souvisejících se školou. Třídní učitel žáky v angažovanosti podporuje a dává jim prostor pro seberealizaci. Nezapomíná však na mantinely, které jasně vymezuje, a po jejich překročení s žáky projednává důsledky. V rozhodování a práci s třídou je třídní učitel pevný a důsledný. Také proto se dá říct, že se v této třídě dobře učí.

Já jsem byl v této třídě ve školním roce 2014/2015 učitelem matematiky a bloku deskriptivní geometrie. Na začátku školního roku byla práce v experimentální třídě složitá. Žáci se na adaptačním kurzu sblížili a navázali nová přátelství, což se projevovalo i ve vyučování. V hodinách často vyrušovali a udržet pracovní morálku ve třídě bylo složité. Musel jsem jim dát najevo, že se mi jejich styl práce nelíbí, a po několika dnech se situace zlepšila. Na konci školního roku 2014/2015 vnímám tuto třídu jako třídu, ve které se pracuje skvěle. Žáci jsou vnímaví, rádi poznávají nové oblasti matematiky a během objevování vládne ve třídě pracovní atmosféra, během které se žáci mezi sebou často baví dost hlučně, ale baví se o matematice. Nezřídka se při diskusích žáci mezi sebou hádají a poslouchat jejich argumenty je pro mě jedním z důvodů, proč se na vyučování v této třídě těším. Žáci se s oblibou účastní našich tzv. matematických vědeckých konferencí, při kterých vystupují před třídou s výsledky svých žákovských výzkumů. Jednou z mnoha výzkumných otázek v této třídě byla například otázka odhadu a následného důkazu číselné hodnoty výrazu $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}$.

Slabší stránkou žáků této třídy v předmětu matematika je jejich nedůslednost, což se snažím narušit, ale pokrok v této oblasti je jen pomalý. Jejich nedůslednost se projevuje například v častých chybách z nepozornosti, na které narážím při opravování jejich písemných prací. Nedůsledná je také jejich domácí příprava. Stává se, že někdy i polovina třídy nemá domácí úkol, i když se snažím domácí úkoly zadávat jen občas. Nedůslednost se projevuje také v celkových výsledcích. Aritmetický průměr známek žáků v pololetí a na konci školního roku se pohybuje kolem hodnoty 3,0. Na konci školního roku 2014/2015 byli žáci této třídy hodnoceni třikrát výborně, šestkrát chvalitebně, třináctkrát dobře, šestkrát dostatečně a dvakrát nedostatečně.

Celkově tedy lze říct, že celkové výsledky experimentální třídy v matematice nekorespondují s jejich aktivitou, která je popsána v dalších oddílech práce. Do budoucna je nutné se zaměřit na pečlivost při řešení úloh.

4.1.3 Způsob sběru a analýza dat

Hlavním cílem mého výzkumu je zlepšení vyučování a také mě jako učitele matematiky. Proto se dá můj výukový experiment metodologicky zařadit k akčnímu výzkumu. „Akční výzkum je v oblasti školní praxe definován jako proces, v němž učitelé pečlivě a systematicky prověřují svou vlastní pedagogickou praxi, jevy a procesy vázané k vyučování a učení, a to prostřednictvím strategií, metod a technik pedagogického výzkumu." (Seberová, 2013, s. 6) Můj výukový experiment má několik znaků, které jsou typické pro akční výzkum:

- Byl jsem nejenom v roli výzkumníka, ale i v roli učitele, tedy byl jsem účastníkem zkoumaných procesů.
- Výzkum jsem neprováděl zcela sám, spolupracoval jsem s praktikantem, který byl na výuce přímo zainteresován a navíc s badatelkou, která nebyla ve výuce přímo zainteresovaná (se svojí vedoucí práce) – jedná se tedy o výzkum kooperativní.

V kvalitativním akčním výzkumu jsem zvolil následující metody sběru dat. Jednotlivé metody sběru dat jsem kombinoval kvůli detailnějšímu pohledu na pozorovanou realitu během vyučování v epoše rovnic a slovních úloh.

Metoda sběru dat	**Data**	**Zdroj dat**
zúčastněné pozorování	přípravy na hodinu, terénní zápisy z průběhu hodiny, reflektivní poznámky po vyučovací hodině	učitel – výzkumník
práce vytipovaných žáků (školní sešit, domácí práce)	kopie žákovských prací	žáci
přítomnost externího pozorovatele	písemný záznam pozorovatele	pozorovatel

Tab. 1: Metody sběru dat

Zúčastněného pozorování jsem se účastnil ve dvou rolích, jako učitel a také jako výzkumník. Musel jsem tedy reagovat na podněty, které vznikly ve vyučování, a zároveň se snažit je zachytit v terénních zápisech, které jsem psal po vyučování. S pomocí terénních zápisů vznikl oddíl, ve kterém popisuji jednotlivé epochové hodiny. Faktorem, který terénní zápisy komplikoval, byla délka jednotlivých epochových hodin.

Společně s pozorováním jsem dále použil školní sešity vybraných žáků, které nejlépe dokumentují způsob uchopení probraného učiva žákem. Některé části žákovských zápisů v sešitě doplňují moji reflexi v následujícím oddíle práce.

Pro výzkum byla také důležitá přítomnost externího pozorovatele, kterým byl student Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze Adam Ráž, který u mě v celé epoše hospitoval v rámci své pedagogické praxe při studiu učitelství matematiky. Šlo o hospitace nad rámec povinné praxe, tu vykonával u aprobovaného kolegy dlouhodoběji. Každý den jsme mluvili o tom, jak epocha proběhla, co se povedlo, co nepovedlo a na co bych se měl zaměřit v další hodině. Využívali jsme při tom Adamovy hospitační záznamy.

4.2 Popis jednotlivých epochových hodin

Epocha zaměřená na rovnice a slovní úlohy měla ve školním roce 2014/2015 dvě části. V první části, která trvala dva týdny (celkem 8 dní kvůli prázdninám), byly centrálními tématy rovnice (lineární, převoditelné na lineární, kvadratické, v podílovém a součinovém tvaru) a jejich soustavy a slovní úlohy na ně vedoucí. Ve druhé týdenní části se probíraly exponenciální rovnice, zavedl se pojem logaritmu a dále se řešily logaritmické rovnice. Mezi jednotlivými částmi byl prostor čtyř týdnů, kdy probíhala jiná epocha. V tomto čase se na tématu rovnic a slovních úloh pracovalo ve cvičných hodinách, ve kterých se řešily spíše úlohy rutinního typu.

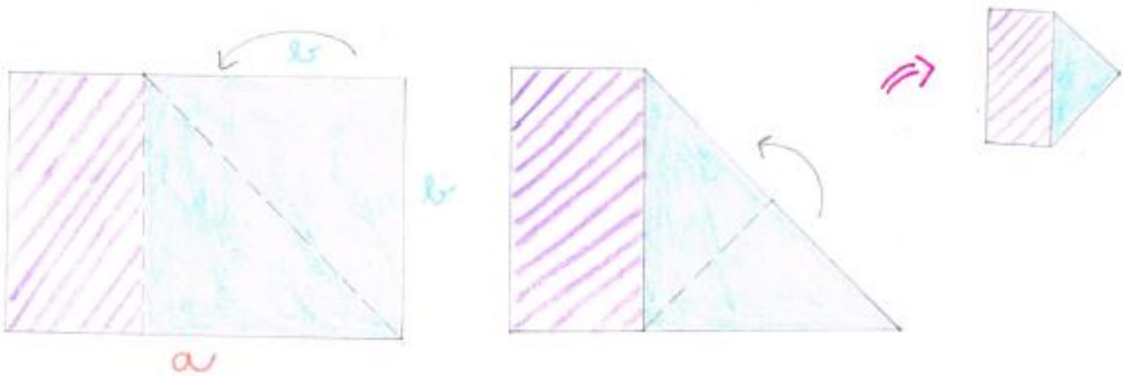
V následujících oddílech popíši průběh jednotlivých epochových hodin. Pro názornost někde použiji žákovská řešení z vlastní výuky, která je dále popsána.

4.2.1 První epochová hodina

V první epochové hodině se tematicky navázalo na učivo probírané ve cvičných hodinách matematiky. Žáci uměli sčítat, odečítat, násobit a dělit polynomy. Navíc uměli hledat nejmenší společný násobek a největší společný dělitel dvou a více polynomů. Dokázali rozkládat polynomy na součin. V této kreativní části polynomiální algebry měli žáci poměrně dost zkušeností, které využili při řešení nelineárních rovnic převoditelných na součin lineárních rovnic. Probírané učivo z cvičných hodin sloužilo jako propedeutika k řešení matematických modelů slovních úloh, tedy rovnic.

Pojmová část epochové hodiny se skládala ze dvou činností. V první činnosti (20 minut), která sestávala ze dvou aktivit (viz příloha 1 a příloha 2), žáci spolu se mnou překládali papír na základě mých instrukcí. Nejdříve jsem žákům rozdal dva volné listy papíru formátu A4. Dále jsem v rámci obou aktivit pracoval frontálně, instruoval jsem žáky a sám jsem podle instrukcí překládal papír. První instrukcí v aktivitě A01 bylo: „Strany obdélníku jako modelu listu papíru označíme: delší stranu jako a, kratší jako b." Ukázal jsem při tom na delší a kratší stranu volného papíru, který jsem měl v ruce. Pokračoval jsem v instrukcích: „Papír v horizontální poloze přeložte na polovinu. Jaké jsou délky jeho stran? Délky stran zapište na druhý papír." Žáci bez pokládání otázek pracovali a skládali papír podle instrukcí. Následovala další instrukce: „Papír opět v horizontální poloze přeložte na polovinu. Jaké jsou délky jeho stran? Délky stran zapište na druhý papír." Žáci i teď bez tázání zapsali své mezivýsledky na papír, trvalo jim to však déle. Opakoval jsem ještě jednou instrukci, kterou jsem žákům řekl už dvakrát. Někteří žáci začali pracovat stereotypně a výsledky zapsali okamžitě po skládání na další papír. Následovala moje poslední instrukce: „Představte si, že byste papír přeložili stejným postupem ještě čtyřikrát. Jaké budou potom délky jeho stran? Délky stran zapište na druhý papír." Někteří žáci byli bezradní, někteří měli radost, že se mohou pustit do řešení předloženého problému. Žákyně Eva se po položení mé otázky potřebovala ujistit: „Je to tedy tak, že papír budu dál skládat ještě čtyřikrát? Nebo na to můžu přijít jenom tak, z hlavy?" Dal jsem žákyni možnost si vybrat, kterou metodu si zvolí. Přibližně třetina žáků papír dál skládala a zapisovala si mezivýsledky. Ostatní pracovali bez skládání. Aktivita A01 žáky bavila, většina z nich se dostala ke správnému výsledku. Asi deset žáků nezvládlo odhad délek stran obdélníku po čtyřech přeloženích, tedy odpověď na poslední otázku. Umožnil jsem žákům, kteří na všechny otázky zodpověděli správně, pomoct s vysvětlením spolužákům, kteří některé kroky nezvládli. Následovala kontrola zapsaných údajů. Tázal jsem se několika žáků na jejich výsledky a vypadalo to tak, že s nimi všichni žáci souhlasí. Zapojení žáků v pomoci svým spolužákům průběh aktivity A01 urychlilo.

Další aktivita A02 začala podobně jako předchozí. Vzal jsem si do ruky jiný volný list papíru formátu A4 a k tomu samému jsem vyzval žáky. Frontálně jsem řekl první instrukci: „Strany obdélníku jako modelu listu papíru opět označíme: delší stranu jako a, kratší jako b." Pokračoval jsem dalšími instrukcemi, které graficky výborně zaznamenala žákyně Martina (obrázek 3). Úlohou žáků bylo zjistit obsah posledního útvaru, který vznikl skládáním („domečku"). Umožnil jsem žákům pracovat ve dvojicích. Během řešení úlohy někteří žáci papír zpětně rozkládali, všichni mezi sebou diskutovali a zapisovali si délky jednotlivých stran, které vznikly skládáním. Většina žáků vyřešila úlohu s obsahem správně, což se ukázalo při společné krátké diskusi po vyřešení úlohy v aktivitě A02.



Obr. 3: Postup skládání papíru v aktivitě A02 (žákovské řešení)

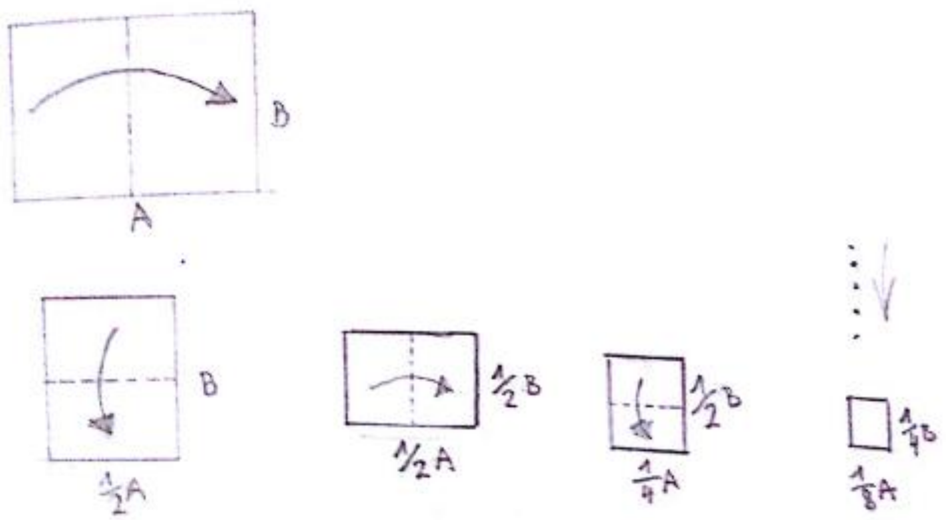
Žáci papír skládali soustředěně, zadáním úloh rozuměli. Aktivity A01 a A02 byly rozcvičkou, která měla žáky aktivizovat k dalším náročným činnostem. Překládání papíru propojila různá matematická témata, jakými jsou obsahy rovinných útvarů a algebraické výrazy.

Po ukončení aktivit A01 a A02 následovala skupinová práce žáků (40 minut). Nechal jsem žáky rozdělit se do skupin po pěti až šesti. Každá skupina si vybrala ze šesti úloh (viz příloha 3) právě tři, které se žáci ve skupině snažili řešit v omezeném čase 15 minut. Důvodem pro výběr této skupiny úloh je fakt, že jsou v experimentální třídě žáci, kteří s řešením slovních úloh úsudkem nemají zkušenosti, nebo byli dříve dokonce učitelem upozorňováni, že je řešení úsudkem nevhodné. Jedním z mých cílů je v této epoše u žáků odbourat strach nebo pochybnosti z používání metody úsudkem při řešení slovních úloh.

Mezitím jsem se pohyboval po třídě a pomáhal skupinám odpovídat na jejich dotazy. Z mého pozorování vyplývá, že si většina skupin vybrala strategii kooperace. Žáci si nerozdělili řešení jednotlivých úloh mezi sebe, ale každou úlohu řešili společně. Skupiny řešily jednotlivé úlohy víceméně samostatně, moje role byla spíše pozorovací. Úloha o vlkovi, koze a zelí byla pro žáky známá, možná proto si ji vybrala každá skupina. Druhou nejčastěji vybranou úlohou byla úloha: „Položte na stůl sedm mincí tak, aby v šesti řadách nebylo ani více ani méně než tři.“ Každá skupina ji řešila experimentálně. Žáci na stůl vyložili sedm mincí a zkoušeli s nimi manipulovat do chvíle, než objevili řešení. Nejvíce dotazů jsem dostával k úloze: „Franta má odměřit čtyři litry pouze pomocí 2 nádob, třílitrové a pětilitrové. Jak to lze provést?“ Žákům nebylo jasné, jestli je možné nádoby naplnit jen částečně.

Po uplynutí času pro skupinovou práci jsem vybral z každé skupiny dvojici nebo jednotlivce, aby před třídou vysvětlili, jak vybranou úlohu řešili. Po každém vysvětlení následovala diskuse a prostor pro odpovědi na otázky spolužáků. Snažil jsem se vybrat žáky tak, aby vysvětlili řešení všech úloh, které byly součástí samostatné práce. Nebylo to však možné, protože dvě úlohy z pracovního listu si nevybrala žádná skupina. Byla to úloha 1 a úloha 6.

V devět hodin začala zápisová část epochové hodiny (20 minut). Chtěl jsem, aby žákovský zápis do sešitu obsahoval velmi podrobný popis aktivit A01 (viz příloha 4) a A02 (viz příloha 5) včetně grafického znázornění jednotlivých kroků překládání papíru pro podporu schopnosti žáků vizualizovat řešení úloh. Zápis ze skupinové práce jsem nevyžadoval. Já jsem se v zápisové části pohyboval po třídě. Žáci se zápisem neměli potíže, protože jako podklad mohli využívat dvojici volných papírů, které používali při překládání. Grafické znázornění překládání papíru nebylo pro všechny žáky jednoduché. Někteří žáci museli obrázky kreslit několikrát. Zdařilé je například zpracování Kristýny (obrázek 4).

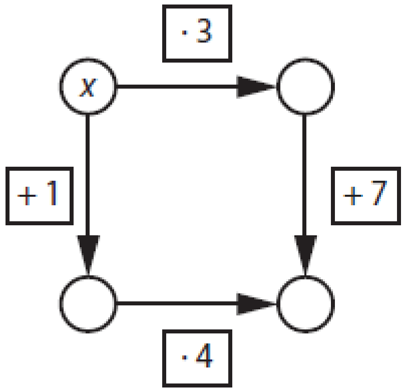


Obr. 4: Grafické znázornění překládání papíru při aktivitě A01 (žákovské řešení)

V rekapitulační části epochové hodiny (30 minut) jsem žákům rozdal první pracovní list (viz příloha 6). Úlohy, které jsou v prvním pracovním listu, tvoří dvě skupiny. V první skupině jsou úlohy upevňující schopnost matematizovat reálné situace. Zároveň jsou zde proměnné na takovém místě, kde je žák spíše zvyklý na numerický údaj (například *n* hlav místo počtu hlav zvířat). Tyto úlohy tedy navíc pomáhají žákům lépe pracovat s proměnnými veličinami. Druhou skupinou jsou úlohy se šipkovými diagramy. „Šipkový zápis pomáhá žákům porozumět úpravám i řešení rovnic, jevům linearity a aproximacím. Žák navíc vidí, že stejná myšlenka se dá formulovat dvěma různými způsoby: šipkovým grafem, který má charakter procesu, a identitou, která je konceptem." (Hejný, Jirotková, 2010, s. 59)

4.2.2 Druhá epochová hodina

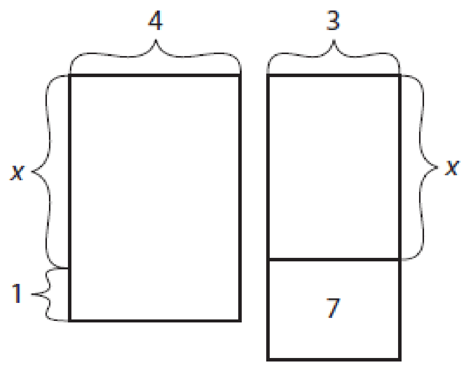
V pojmové části jsem začal návratem (10 minut) k úlohám z prvního pracovního listu (příloha 6) formou úlohy podobné. Šipkový graf reprezentuje rovnici, identitu. Dva různé způsoby formulace jedné myšlenky jsou dvě strany jedné rovnice. Žákům byl pojem rovnice již známý, proto jsem se nepokoušel o jeho zavedení. Snažil jsem se spíše o jeho připomenutí. Na promítacím plátně jsem promítl šipkový diagram z obrázku 5, který žáci předešlého dne neřešili. Doptával jsem se na jeho řešení. Žáci, jelikož podobné úlohy už řešili v pracovním listu, neměli s pochopením grafu problémy. Chvíli trvalo, než zpaměti přišli na rovnici, kterou šipkový graf reprezentuje. Žák Šimon po chvíli nekontrolovaně hledanou rovnici vykřikl. Ostatní žáci s jeho nápadem souhlasili. Na tabuli jsem tedy napsal rovnici $4 \cdot (x + 1) = 3 \cdot x + 7$.



Obr. 5: Šipkový diagram (Hejný, Jirotková, 2010, s. 60)

Potom (10 minut) jsem žákům řekl zadání úlohy: „Myslím si číslo. Když k jeho trojnásobku přičtu 7, dostanu totéž, jako když k myšlenému číslu přičtu 1 a pak to vynásobím 4. Jaké číslo jsem si myslel?“ Žáci si úlohu do sešitu nezapisovali. Čekal jsem na reakce žáků. Po minutě ticha, kdy žádný žák nepřišel na souvislost této úlohy s promítnutým šipkovým diagramem, jsem úlohu řekl ještě jednou. Na to okamžitě zareagovala Lenka: „No jo, dyť to je to samé, jako úloha, kterou jsme řešili před chvílí!“ Pár spolužáků nesouhlasně potřásalo hlavou. Na to jsem Lenku upozornil, že několik spolužáků s jejím postřehem nesouhlasí. Na to se Lenka postavila a přišla k tabuli, kde na souvislost mezi dvěma předchozími úlohami poukázala. Nesouhlas jsem dále ve třídě nevnímal. Lenka navíc prozradila, že řešením rovnice je číslo 3. I když si žáci úlohu nezapisovali, dokázali spolupracovat výborně. Já osobně se často snažím s žáky v hodinách počítat zpaměti. V tomto případě se mi to zdálo být výhodné z důvodu, že se žáci mohli plně soustředit na zadání úlohy, které jsem řekl několikrát, ne na zápis řešení úlohy. Důležité je, že jsem zadání říkal zpaměti. Poté si žáci nejdříve uvědomili souvislost řečené úlohy s promítnutým šipkovým grafem a až následně řešili rovnici, která vznikla ze šipkového grafu. V případě, kdy se od žáků vyžaduje počítání zpaměti, musí se počítat s tím, že činnost déle trvá, někdy i dvakrát déle, než při písemném počítání.

Následovala další společně řešená úloha (10 minut). Na promítací plátno jsem žákům promítl obrázek 6. Otázka pro žáky byla jednoduchá: „Čemu se rovná x, jsou-li obsahy obou obdélníků stejné?“ Žáci opět nepoužívali sešity ani jiné pomocné papíry na výpočty, aby se zbytečně jejich pozornost nezaměřovala na jiné činnosti a aby si procvičovali počítání zpaměti. Vyzval jsem žáky, aby o úloze přemýšleli a zatím své výsledky neprozrazovali. Po několika málo minutách jsem se žáků zeptal na jejich řešení. Karel se přihlásil a popsal, jak uvažoval: „Vzal jsem si každý obdélník zvlášť. Obsah toho prvního je $(x+1)\cdot 4$, ten další má obsah $(x+7)\cdot 3$ a dál nevím, co s tím.“ Na to reagoval Václav: „Máš tam chybu, ten druhý obdélník má jiný obsah, není to $x+7$.“ „Jak to?“ reagoval Karel. Vyzval jsem Václava, aby u tabule ukázal, jak řešil úlohu on. Správně určil obsah druhého obdélníku a potom poznamenal, že i tato úloha vede k rovnici, která byla už na začátku určena šipkovým diagramem.

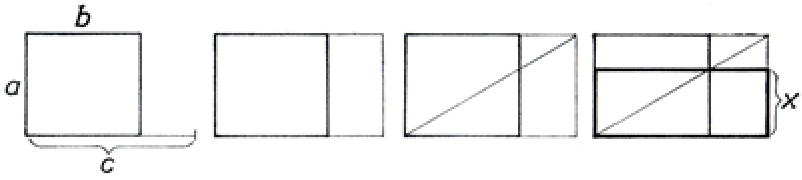


Obr. 6: Úloha s obsahy (Hejný, Jirotková, 2010, s. 60)

Prvním vyústěním pojmové části byl pojem rovnice jako model reálné situace. K tomuto pojetí jsem musel žáky přivézt volbou otázek na konci pojmové části. Moje první otázka byla následující: „Řešili jsme tři různé úlohy, šipkový diagram, hádanku a úlohu s obsahy. Co měly tyto úlohy společného?“ Někdo ve třídě zvolal: „Dělali jsme je dnes!“ S odpovědí jsem souhlasil, ale zároveň jsem řekl, že se dá najít více věcí, které jsou zde společné. Ve třídě byl chvíli šum, který přerušila reakce Denisy: „Myslím, že ta rovnice je společná.“ „Ano, ta rovnice vycházela všude,“ doplnila jí Julie. Souhlasil jsem a navíc jsem se zeptal, jakou roli v těch úlohách rovnice hraje. Cítil jsem, že žáci nevědí, na co se ptám. Na to Václav řekl, že ta rovnice ty úlohy popisuje. Opět jsem souhlasil a žákům jsem prozradil, že tou rovnicí jsme úlohy matematizovali a jejím sestavením jsme vytvářeli model pro danou úlohu.

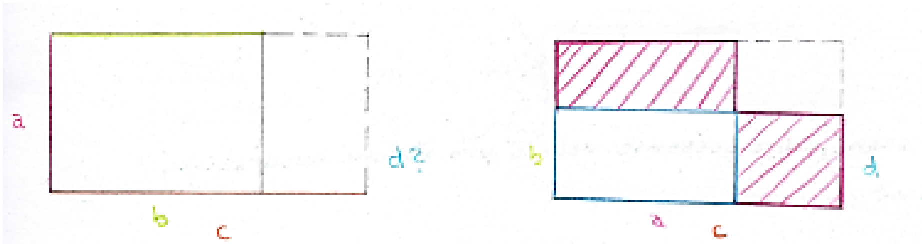
Vzhledem k relativní složitosti předešlé činnosti jsem upravil rytmus pojmové části činností, kdy žáci byli ti pasivnější. Proto jsem žákům řekl něco málo z historie řešení rovnic (20 minut).

Začal jsem u matematických papyrů ze starého Egypta, kde je možné najít hodně slovních úloh řešitelných rovnicemi, a na konci krátkého výkladu jsem žákům přečetl několik slovních úloh ze současných překladů úloh z papyrů. Dalším zajímavým mezníkem v historii, u kterého jsem se na chvíli zastavil, byl geometrický způsob řešení rovnic ve staré řecké matematice. Něco málo jsem řekl o životě Diofanta, který jako první zavedl symbol pro neznámou. Poté jsem žákům ukázal geometrický způsob řešení rovnice $a \cdot b = c \cdot x$, kde $a, b, c > 0$. Konstrukci je vidět na obrázku 7 a na tabuli jsem ji pouze prováděl a popisoval kroky konstrukce, nesnažil jsem se zdůvodnit, že je konstrukce správná.



Obr. 7: Geometrické řešení rovnice $ab = cx$ (Kuřina, 1989, s. 53)

V <u>zápisové části</u> (30 minut) bylo úkolem žáků zapsat si do sešitu řešení série úloh, které vycházely ze šipkového diagramu na obrázku 5, a závěr, že rovnice jsou matematickým modelem reálných situací. Dále v sešitě neměla chybět historická poznámka o řešení rovnic a narýsovaný a podrobně popsaný geometrický přístup k řešení rovnice $a \cdot b = c \cdot x$. Až v zápisové části musel každý žák v sešitě obhájit správnost této metody, tedy dokázat, že x v obrázku 7 je skutečně řešením uvedené rovnice. Příklad velmi pečlivé žákovské argumentace lze najít v příloze 7. Během svého pozorování v této části hodiny jsem viděl, že někteří žáci nevědí, jak dokázat geometrickou metodu řešení rovnice. V tom případě jsem žákům pomohl a do obrázků jsem dokreslil určité detaily, podobné jsem nakonec viděl v žákovském zápise Denisy (obrázek 8). Pokud ani to nepomohlo, řekl jsem žákům, aby zkusili uvažovat ještě doma.



Obr. 8: Geometrické řešení rovnice $ab = cx$ – návod k řešení

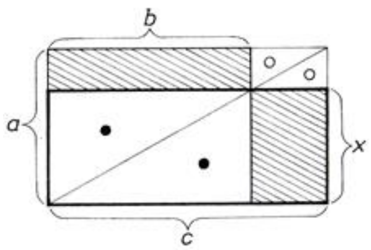
<u>Rekapitulační část</u> (30 minut) tvořilo samostatné žákovské řešení úloh z pracovního listu (viz příloha 8). Úlohy ve druhém pracovním listě byly vybrány tak, aby si žáci mohli zkusit matematizaci v sérii mnoha jednoduchých slovních zadání. Jednoduchá zadání žáky neodradila, naopak, měli dobrý pocit, že toho vyřešili hodně a byli v řešení úspěšní. Z rychlého

pokroku v řešení měli žáci radost a po druhé epochové hodině byli, podle mého názoru, motivovaní k dalším, složitějším matematizacím.

4.2.3 Třetí epochová hodina

Tématem třetího dne epochy byly ekvivalentní úpravy rovnic. Pro žáky to nebylo nové téma, setkali se s ním už na základní škole. Mám však zkušenosti, že v ekvivalentních úpravách nemají všichni žáci jasno, hlavně v násobení a dělení obou stran rovnice reálným nenulovým číslem (výrazem) dělají často chyby. Důležitost přívlastku nenulový si mnoho žáků neuvědomuje. Cílem této hodiny bylo zopakovat si už známá pravidla a naučit se je vědomě používat.

Pojmovou část jsem začal otázkou (15 minut) směřovanou celé třídě. Zjišťoval jsem, zda žáci správně zdůvodnili geometrickou metodu řešení rovnice z minulé hodiny (viz obrázek 7). Ptal jsem se na několik žákovských řešení a každé s třídou diskutoval. Někteří žáci si uvědomili, podobně jako je znázorněno na obrázku 9, že jsou zde dvě dvojice trojúhelníků se stejným obsahem. Nevěděli však, jak pokračovat dál. Našli se žáci, kteří dále poznamenali, že potom stačí dokázat, že obsahy vyšrafovaných obdélníků jsou stejné. Štěpán se přihlásil a chtěl svoji úvahu napsat na tabuli. Řekl, že „pokud se obsahy vyšrafovaných částí mají rovnat, musí platit“ a na tabuli napsal: $a \cdot b - (a - x) \cdot b = c \cdot x - b \cdot x$. Zeptal jsem se ostatních žáků, co si o uvedené úvaze myslí. „Ono to vede k něčemu, co nám vůbec nepomůže,“ připomínkovala Štěpánův návrh Lada. Štěpán se její poznámce divil, proto jsem Ladu vyzval k tabuli, aby nám svoji připomínku vysvětlila. Lada na tabuli napsala rovnici: $a \cdot b - a \cdot b + b \cdot x = c \cdot x - b \cdot x$ a navíc podotkla, že „to k ničemu nevede“. Zeptal jsem se Lady, jestli ta rovnice skutečně k ničemu nevede. Na to neuměla odpovědět. Štěpán se u tabule vzpamatoval a napsal na tabuli rovnici, která z uvedené plyne: $2 \cdot b \cdot x = cx$. „Tak to asi fakt k ničemu nevede,“ tak své uvažování ukončil. Já jsem se dále ptal, proč ta rovnice, kterou Štěpán napsal na tabuli, k ničemu nevede. Štěpán se po podívání do sešitu z lavice ještě ozval: „Jo jasně, ta rovnice, kterou to řeší, vypadá jinak, asi proto to nic neřeší.“ Mezitím se z lavice hlásila Nina: Já bych ty obsahy vyšrafovaných obdélníků počítala jinak. Můžu to ukázat u tabule?“ Na tabuli napsala rovnici $(a - x) \cdot b = (c - b) \cdot x$, ze které skutečně plyne rovnice $a \cdot b = c \cdot x$.



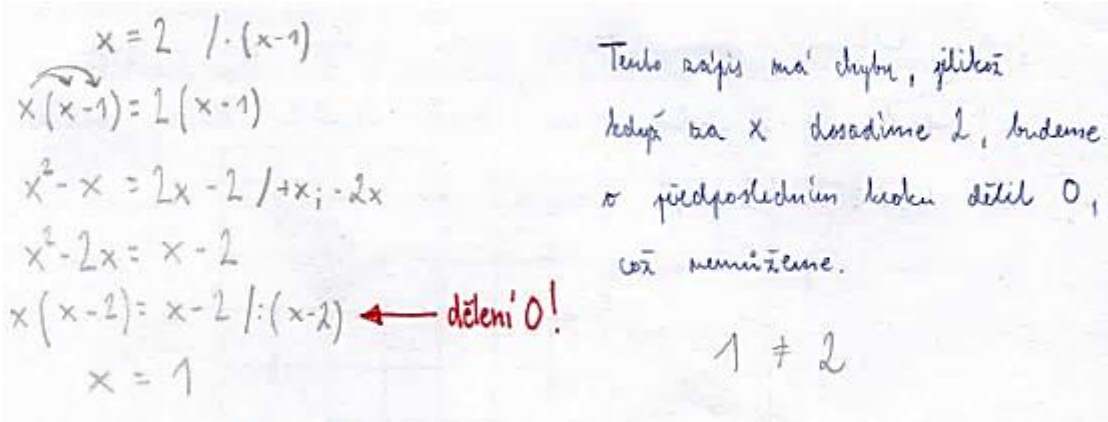
Obr. 9: Důkaz správnosti geometrického řešení rovnice $ab = cx$ (Kuřina, 1989, s. 53)

Následující činností (25 minut) v pojmové části byla diskuse s žáky. Na tabuli jsem napsal jednoduchou rovnici $2x + 10 = 3x$. Následně jsem se zeptal žáků, co se stane, když k oběma stranám rovnice (výrazům) přičtu to samé číslo nebo proměnnou, například 10 nebo x. Žáci byli většinově názoru, že se s rovnicí nic nestane. Dále jsem se ptal, jestli se těmito úpravami nezmění řešení rovnice. V této chvíli někteří žáci znejistili, potřebovali několik minut k promyšlení odpovědi. Mezi žáky probíhala krátká diskuse, snažil jsem se do ní vůbec nezasahovat. Samozřejmě žáci během diskuse počítali pouze zpaměti. Nakonec se žáci i v této otázce shodli na tom, že se tím řešení rovnice nezmění. Dále jsem vyzval žáky, aby své zkušenosti s přičítáním a odečítáním čísla k rovnici rozšířili o násobení a dělení. Zeptal jsem se, jestli můžeme rovnici násobit a dělit libovolným číslem. Na to okamžitě reagoval Tadeáš: „Ano, rovnici můžeme násobit a dělit libovolným číslem a řešení rovnice se nezmění.“ Na tuto reakci jsem byl připravený. Mojí reakcí na Tadeášovo tvrzení byl nekomentovaný zápis na tabuli:

$$x = 2$$
$$x(x-1) = 2(x-1)$$
$$x^2 - x = 2x - 2$$
$$x^2 - 2x = x - 2$$
$$x(x-2) = x - 2$$
$$x = 1$$

„Právě jsem dokázal, že $1 = 2$, co na to říkáte? Je to správně? Udělal jsem někde ve výpočtu chybu?“ Tak jsem se žáků ptal. Žáci pět minut přemýšleli o zápise na tabuli a neobjevil se nikdo, kdo by měl správnou připomínku. Nechal jsem tedy žáky si dané řešení napsat na papír a u každého řádku naznačit, jaká úprava byla provedena. Některým žákům se zdálo zvláštní násobení rovnice výrazem $(x - 1)$. Na to jsem reagoval tak, že žák násobil rovnici číslem 1, jelikož předpokládáme, že $x = 2$. Do samostatné práce žáků jsem příliš nezasahoval, dohlížel jsem na to, aby se žáci nepřestali soustředit na řešený problém. Po chvíli se našel žák, který v řešení chybu našel a pojmenoval ji. Byla to Nina. Uvědomila si, že jsem rovnici dělil nulou, a dostal jsem se tak ke spornému výsledku. Ještě jsem se zeptal Tadeáše, jestli si pořád stojí za svým tvrzením, že rovnici můžeme násobit a dělit libovolným číslem (proměnnou) a řešení rovnice se nezmění. Ten do uvedeného tvrzení přidal přívlastek nenulovým.

V zápisové části (20 minut) žáci psali do sešitu zápis, který obsahoval seznam základních ekvivalentních úprav a komentovanou úlohu z výkladu („důkaz“, že $2 = 1$). Na obrázku 10 lze vidět příklad žákovského komentovaného zápisu ze zápisové části. Mnozí žáci si během zápisové části zapisovali správnou argumentaci k starořeckému řešení rovnic, kterou doma vyřešili nesprávně.



Obr. 10: Žákovský zápis „důkazu“, že 2=1

V rekapitulační části (50 minut) žáci samostatně řešili úlohy z dalšího pracovního listu (viz příloha 9). Úloha 24 obsahuje několik rutinních rovnic, ve kterých musí být žák bdělý a dávat si pozor na mínus před závorkou a správnou aplikaci binomické věty pro $n = 2$. Další dvě úlohy jsou matematicky nesprávné argumentace a úkolem je najít v těchto argumentacích chybu, vždy se jedná o dělení nulou ve tvaru například $(x - x)$. Myslím si, že tato činnost v žácích více upevnila poznatek, že rovnici můžeme násobit (dělit) pouze nenulovým reálným číslem.

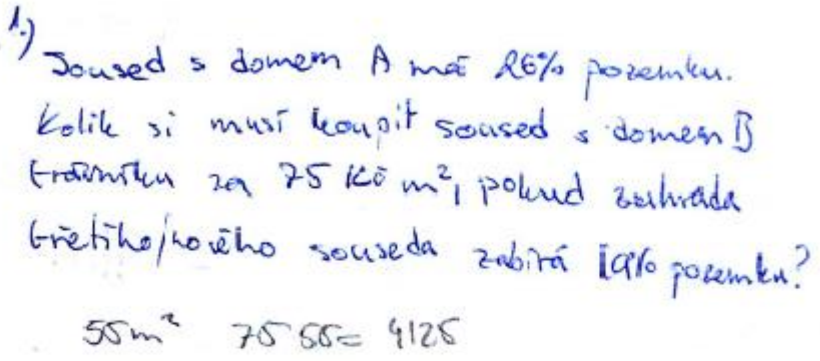
4.2.4 Čtvrtá epochová hodina

Ve čtvrté epochové hodině jsme navázali na třetí hodinu zamyšlením se nad možnými řešeními lineárních rovnic. Pojem lineární rovnice jsme zatím v epoše nevyslovili, proto bylo nutné jej vymezit. Zároveň byla čtvrtá epochová hodina další hodinou, která by mohla žáky zbavit strachu z matematizace a řešení slovních úloh. Prostředkem k tomu byla sada jednoduchých slovních úloh, kterou žáci v této hodině samostatně řešili. Žáci si mohli vybrat metodu, kterou budou slovní úlohy řešit, podporoval jsem je v řešení úloh logickou úvahou i rovnicí.

V pojmové části jsem se vrátil k včerejšímu tématu řešení rovnic. Na začátku jsem frontálně vymezil (10 minut) pojem lineární rovnice jako rovnice, kterou lze upravit na tvar $ax + b = 0$, $a \neq 0$. Poukázal jsem na rovnice, které žáci v poslední hodině řešili, všechny byly lineární. U několika rovnic $5x - 7 = 0$, $2 = -x$, $x - 1 = 2x + 3$ jsem se žáků ptal na hodnoty lineárního a absolutního členu. Žáci odpovídali správně, jelikož jsem předtím na tabuli obecný tvar lineární rovnice spolu s pojmenováním jednotlivých členů napsal.

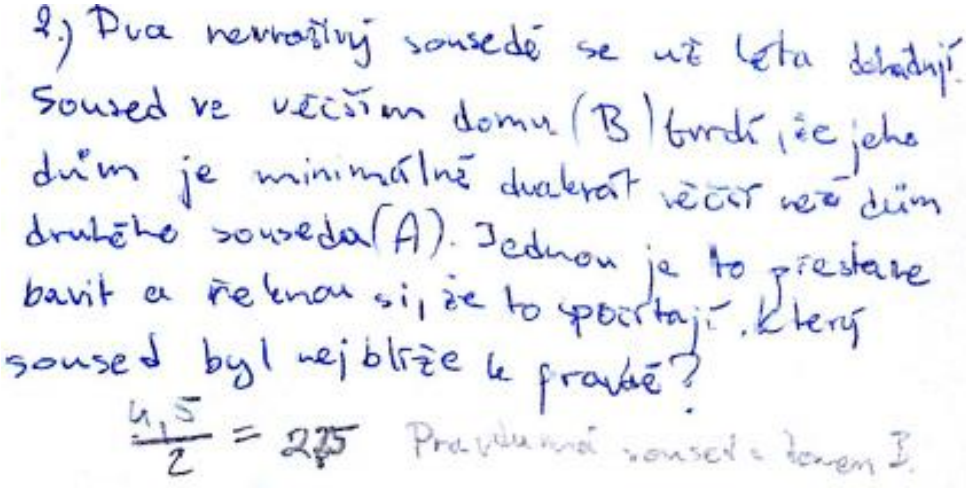
Dále jsem (10 minut) na tabuli napsal vedle sebe tři rovnice $x - 1 = 0$, $x - 1 = x - 1$ a $x - 1 = x - 2$. Ptal jsem se žáků, jaký je mezi rovnicemi rozdíl. Ve třídě probíhala mezi žáky diskuse. Ve chvíli, kdy někteří žáci poukázali na řešení rovnic a použili pojmy nekonečně mnoho řešení a nemá řešení, jsem diskusi ukončil otázkou, jak poznáme, že daná rovnice nemá řešení (nebo jich má nekonečně mnoho). Žáci po krátké diskusi mezi sebou vyslovili závěry typu „když vyjde nesmysl, nemá to řešení“ nebo „když ti tam vyjde, že se číslo rovná samo sobě, má to nekonečně mnoho řešení“. Já jsem nakonec závěry upravil do korektnější podoby, například že rovnice má nekonečně mnoho řešení, pokud ji lze upravit na tvar $0 \cdot x = 0, x \in \mathbb{R}$.

Následovala aktivita A03 (30 minut), která je převzata z dizertační práce Bureše (2014, s. 58). Jednalo se o žákovskou tvorbu úloh v daném prostředí. Každá dvojice žáků si měla vybrat právě jedno prostředí (viz příloha 10 a 11) a v tomto prostředí vymyslet zadání slovní úlohy. Jedna úloha měla být jednoduchá a druhá složitější. Samozřejmě obě úlohy měli být žáci schopni vyřešit. Prostředí čtvercové sítě si ve třídě vybralo velmi málo dvojic. Pravděpodobně je vizuální zadání odradilo. Nedokázali v něm vytvořit slovní úlohu vedoucí k rovnici. Většinou vytvořili elementární úlohy, jakou je například dvojice úloh, kterou vytvořila jinak výborná žákyně (obrázek 11).



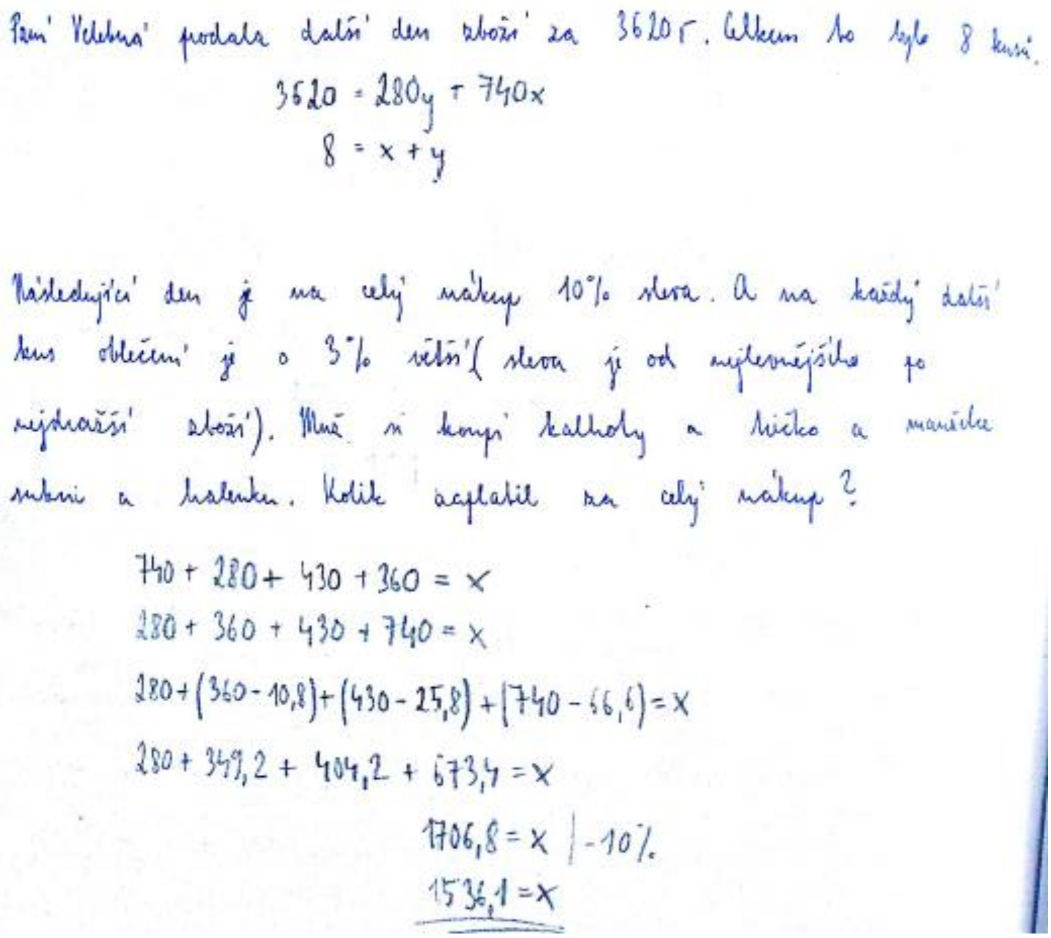
Obr. 11: Žákovská úloha v prostředí čtvercové sítě

Ta samá žákyně úlohu, kterou vytvořila, rozšířila (obrázek 12).



Obr. 12: Žákovská úloha v prostředí čtvercové sítě – rozšíření

Prostředí obchodu s oblečením si vybrala většina žáků. Hlavním důvodem byla pravděpodobně textová forma zadání. V textu, který prostředí popisuje, jsou i ceny zboží v obchodě, což je pro žáky signál, který je více inspiruje k vytvoření autorské slovní úlohy. Na obrázku 13 je úloha, kterou vymyslela dvojice žáků v prostředí obchodu s oblečením. V zápisu úlohy je v první větě chyba. Správně by měla být: „Paní Velebná prodala další den pánské zboží…“



Paní Velebná prodala další den zboží za 3620 r. Celkem to bylo 8 kusů.

$3620 = 280y + 740x$

$8 = x + y$

Následující den je na celý nákup 10% sleva. A na každý další kus oblečení je o 3% větší (sleva je od nejlevnějšího po nejdražší zboží). Muž si koupí kalhoty a tričko a manželce sukni a halenku. Kolik zaplatil na celý nákup?

$740 + 280 + 430 + 360 = x$

$280 + 360 + 430 + 740 = x$

$280 + (360 - 10,8) + (430 - 25,8) + (740 - 66,6) = x$

$280 + 349,2 + 404,2 + 673,4 = x$

$1706,8 = x \mid -10\%$

$1536,1 = x$

Obr. 13: Žákovská úloha v prostředí obchodu s oblečením

Většina úloh, které žáci ve dvojicích vymysleli, se nedala dále využít. Úlohy vedly k rovnicím, které byly elementární (obrázek 13), nebo nebyly vůbec řešitelné. Důvodem byl možná fakt, že jsem žáky během jejich samostatné práce málo tlačil k vytváření jiných zadání.

V zápisové části (20 minut) si žáci vytvořili zápis do sešitu, ve kterém popsali množiny řešení lineárních rovnic. Navíc si do sešitu zapsali obě úlohy, které vymysleli ve dvojicích ve dvou daných prostředích. První část zápisu byla pro žáky snadná. Druhou někteří vzdali, protože se jim nepovedlo úlohu vůbec vymyslet, nebo ji považovali za příliš elementární.

V rekapitulační části (40 minut) žáci řešili úlohy z dalšího pracovního listu (viz příloha 12), který obsahuje množství jednoduchých slovních úloh. Všechny úlohy vedou k lineárním rovnicím nebo jejich soustavám. Záměrně jsem vybral pouze úlohy základní, ne příliš složité. Jedním z mých cílů bylo, aby byli žáci v prvních dnech epochy pozitivně motivovaní k řešení dalších, náročnějších úloh, s kterými se v nejbližších dnech setkali. Důkazem, že se tento krok vyplatí, jsou tvrzení některých žáků, kteří se slovních úloh, na základě zkušenosti ze základní školy, obávali a při řešení těchto úloh zažívali radost z úspěchu.

4.2.5 Pátá epochová hodina

Tématem páté epochové hodiny byly soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých (dále soustavy rovnic) a metody jejich řešení. Pro žáky to bylo téma známé, na základní škole soustavy rovnic řešili. Nový byl maticový způsob řešení soustav rovnic, který jsem v této hodině zavedl. Maticová metoda byla pro žáky něčím novým. V praxi pozoruji, že si při řešení soustav rovnic maticovou metodu často vybírají žáci talentovaní. Pro některé slabší žáky představuje maticová metoda hru s čísly, kterou upřednostní před práci s proměnnou v ostatních metodách.

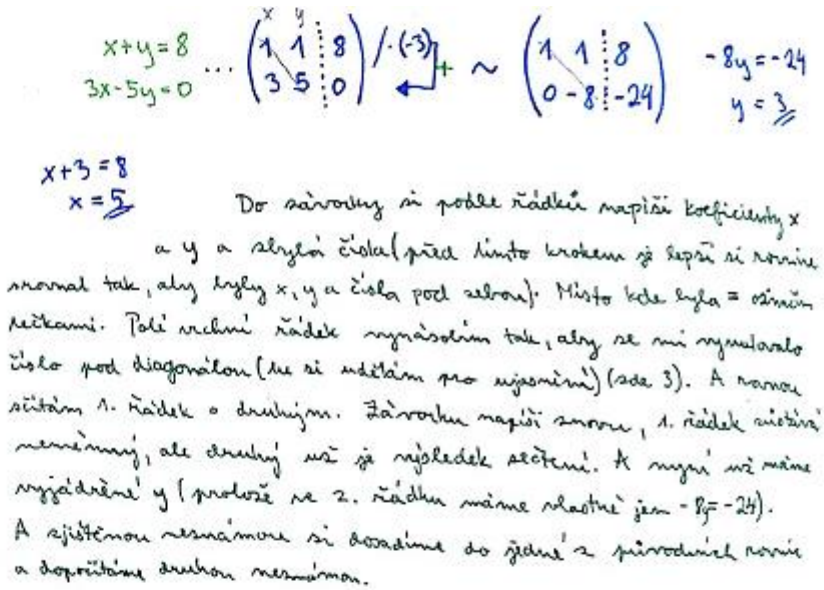
Žáci měli mít potřebu soustavy řešit už z předešlé hodiny, protože se s nimi jako s modely už setkali. V pracovním listě (viz příloha 12) byly totiž slovní úlohy, které vedly k soustavám rovnic. Žáci je většinou řešili dosazovací metodou, čímž soustavu upravili na lineární rovnici o jedné neznámé.

Pojmová část začala mým frontálním výkladem (45 minut). Na tabuli jsem řešil jednoduchou soustavu rovnic:

$$x + y = 8,$$
$$3x - 5y = 0.$$

Ptal jsem se žáků, jakou metodou by soustavu řešili. Podle jejich reakcí jsem začal řešit soustavu metodou, kterou si vybralo nejvíce z nich – dosazovací metodou. Následně jsem na tabuli vyřešil soustavu metodou sčítací. Diskutoval jsem s žáky výhodnost použití jednotlivých metod. Poté jsem ukázal žákům metodu přepisu soustavy do maticového tvaru, Gaussovu eliminační metodu. Já osobně jsem žákům poprvé Gaussovu eliminační metodu nekomentoval, jenom jsem soustavu touto metodou tiše na tabuli vyřešil. Někteří žáci byli fascinovaní postupem, který neobsahoval proměnné. U jiných žáků maticový zápis probudil zvědavost a ptali se, jak je možné, že to funguje. Jiní si všimli, že postup připomíná sčítací metodu řešení soustav. Nechal jsem žáky mezi sebou diskutovat jednotlivé kroky nové metody. Ve chvíli, kdy jsem vnímal, že už jsou mezi žáky jednotlivci, kteří metodě rozumí, vyzval jsem jednoho, jestli by se u tabule s námi o své postřehy nepodělil. Výklad žáka doprovázely otázky spolužáků. Například hodně žáků bylo nejistých při přičítání násobku jednoho řádku k dalšímu: „To si jako můžeš jen tak dva řádky mezi sebou sečíst?“ Žák u tabule svoje kroky výborně obhájil. Předchozí otázku zdůvodnil: „Tady to máš stejně, taky sčítáš řádky mezi sebou“ a poukázal na soustavu řešenou sčítací metodou, která byla na tabuli napsaná. Několikrát jsme ho já nebo jiný spolužák otázkou nebo připomínkou nasměrovali, ale většinu zvládl sám a spolužáci mu nakonec zatleskali.

Následovala <u>zápisová část</u> (25 minut), ve které si žáci nejdříve zapsali všechny tři metody řešení soustav rovnic. U Gaussovy eliminační metody se vyžadovalo, aby si žáci u každého kroku řešení napsali slovní komentář. Žáci v této chvíli na tabuli neviděli řešení soustavy rovnic Gaussovou eliminační metodou. Jejich úkolem bylo pokusit se řešit danou soustavu rovnic samostatně pomocí nové metody. Někteří žáci se potýkali s potížemi, nejčastěji v posledním kroku, kdy se měli z maticového zápisu vrátit k rovnicím. Musel jsem tedy hodně jednotlivcům během zápisu s řešením pomáhat, s čímž jsem už u přípravy počítal. Příklad možného žákovského zápisu je na obrázku 14.



$x+y=8$, $3x-5y=0$ … $\begin{array}{cc} x & y \end{array}$ $\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 8 \\ 3 & 5 & 0 \end{array}\right) / \cdot(-3)$ + $\sim \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 8 \\ 0 & -8 & -24 \end{array}\right)$ $-8y=-24$, $y=3$

$x+3=8$, $x=5$

Do závorky si podle řádků napíši koeficienty x a y a [illegible] čísla (před tímto krokem je lepší si rovnice srovnat tak, aby byly x, y a čísla pod sebou). Místo kde byla = označím tečkami. Poté vrchní řádek vynásobím tak, aby se mi vynulovalo číslo pod diagonálou (tu si udělám pro ujasnění) (zde 3). A rovnou sčítám 1. řádek s druhým. Závorku napíši znovu, 1. řádek zůstává neměnný, ale druhý už je výsledek sečtení. A nyní už máme vyjádřené y (protože ve 2. řádku máme vlastně jen $-8y=-24$). A zjištěnou neznámou si dosadíme do jedné z původních rovnic a dopočítáme druhou neznámou.

Obr. 14: Žákovský zápis Gaussovy eliminační metody pro soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

Potom žáci samostatně řešili v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ Gaussovou eliminační metodou následující soustavu rovnic (15 minut):

$$(x+5)\cdot(y+2) = (x+2)\cdot(y+1),$$
$$(x+4)\cdot(y+7) = (x+3)\cdot(y+4).$$

Žáci měli potíže s převodem do maticového tvaru, často už soustavu ze zadání přepsali pomocí matice do tvaru $\left(\begin{array}{c:c} 1\,5\,1\,2 & 1\,2\,1\,1 \\ 1\,4\,1\,7 & 1\,3\,1\,4 \end{array}\right)$. Tuto chybu považuji za velmi důležitou. Při samostatné práci jsem radil jednotlivcům. Poradil jsem jim, že si jednotlivé rovnice nejdříve musí upravit do tvaru, kdy budou mít proměnné v řádcích pod sebou. Poté jsem s pomocí žáků vyslovil závěr, ve kterém jsme vymezili, jaký tvar soustavy rovnic je vhodný k maticovému přepisu a následnému užití Gaussovy eliminační metody.

V rekapitulační části (25 minut) žáci řešili úlohy z dalšího pracovního listu (viz příloha 13). Byly v něm zařazeny slovní úlohy, které převážně vedly k soustavám rovnic. Pro žáky bylo v této chvíli řešení slovních úloh změnou ve stylu práce (do této chvíle řešili pouze algebraické úlohy), což je v epochové hodině obzvlášť důležité, jelikož trvají nepřetržitě 110 minut. V posledních minutách hodiny jsem žákům nadiktoval Eulerovu úlohu: „Dvě vesničanky přinesly na trh dohromady 100 vajec, jedná více než druhá. Obě utržily stejně. První žena řekla druhé: „Kdybych měla tvoje vejce, vydělala bych 15 krejcarů.“ Na to jí druhá odpověděla: „Kdybych já měla tvoje vejce, vydělala bych $6\frac{2}{3}$ krejcaru.“ Kolik vajec měla každá vesničanka na začátku?“ Žáci měli za domácí úkol sestavit k Eulerově úloze matematický model.

4.2.6 Šestá epochová hodina

V šesté epochové hodině se většina žáků poprvé seznámila s pojmem kvadratické rovnice (výjimku tvořily dvě žákyně, které absolvovaly víceleté gymnázium). Řešení kvadratických rovnic pomocí diskriminantu však nebylo náplní této hodiny. V páté hodině žáci dostali za úkol sestavit model k Eulerově úloze. Jedná se o model, který není složitý, obsahuje však čtyři rovnice a čtyři neznámé.

V pojmové části jsem s žáky diskutoval (40 minut) model Eulerovy úlohy a s pomocí žáků u tabule řešil sestavený model. Během celé diskuse a výkladu jsem se ptal žáků na další kroky řešení, snažil jsem se o to, abych nic neprozradil zcela sám. Podívejme se blíže na řešení Eulerovy úlohy. Zaveďme proměnné a jejich význam z kontextu úlohy:

x – počet vajec první vesničanky,

y – počet vajec druhé vesničanky,

a – cena jednoho vejce první vesničanky,

b – cena jednoho vejce druhé vesničanky.

Samozřejmě musí platit, že $x \geq 0, y \geq 0, a \geq 0, b \geq 0$. Úloha vede k modelu:

$$(x \cdot a = y \cdot b) \land (y \cdot a = 15) \land \left(x \cdot b = 6\frac{2}{3}\right) \land (x + y = 100).$$

Z druhé rovnice $a = \frac{15}{y}$, ze třetí rovnice $b = \frac{20}{3x}$.

Po dosazení do první rovnice dostáváme rovnici

$$x \cdot \frac{15}{y} = y \cdot \frac{20}{3x}.$$

Ze čtvrté rovnice vyjádříme $x = 100 - y$ a řešíme rovnici

$$(100-y)\cdot\frac{15}{y}=y\cdot\frac{20}{3(100-y)}.$$

Po několika jednoduchých ekvivalentních úpravách se dostáváme ke kvadratické rovnici

$$y^2-360y+18000=0.$$

Žáci znali z cvičných hodin úpravu na čtverec a rozklad na součin. Nechal jsem je tedy kvadratickou rovnici vyřešit. Žáci, kteří měli ve cvičných hodinách s úpravou na čtverec potíže, kvadratickou rovnici samostatně nevyřešili. Řešení mohlo vypadat například tak, že levou stranu kvadratické rovnice $y^2-360y+18000=0$ upravíme na čtverec

$$(y-180)^2-120^2=0$$

a následně levou stranu rozložíme na součin

$$(y-300)\cdot(y-60)=0.$$

Protože $x+y=100$, je jediným řešením Eulerovy úlohy $y=60$.

Řešení Eulerovy úlohy bylo pro většinu žáků složité. Při řešení narazili na několik úskalí. Prvním byl netradiční model, potom poměrně složitá dosazovací metoda vedoucí k rovnici s jednou neznámou a nakonec i řešení kvadratické rovnice úpravou na čtverec a rozkladem na součin není jednoduché. Pokoušel jsem se o to, aby byl zápis řešení Eulerovy úlohy na tabuli co nejsrozumitelnější. Umožnil jsem tak žákům si během zápisové části (15 minut) částečně odpočinout. Jediné, co si v zápisové části měli žáci do sešitu zapsat, byla Eulerova úloha a její řešení s komentářem, proto část trvala pouze 15 minut.

V rekapitulační části (55 minut) žáci řešili úlohy dalšího pracovního listu (viz příloha 14). Všechny slovní úlohy zde vedou ke kvadratické rovnici, kterou jsme zatím v hodinách nepojmenovali, a jediný způsob, kterým byli žáci schopni kvadratické rovnice řešit, byla úprava na čtverec a rozklad na součin. Žáci kvadratické rovnice řešili rádi. Měli pocit, že při jejich řešení využívají poznatků z předešlých cvičných hodin, a to je podle mě uspokojovalo.

4.2.7 Sedmá epochová hodina

Sedmá epochová hodina byla poslední, která měla strukturu běžné epochové hodiny. Poslední, osmý den, žáci psali závěrečnou písemnou práci. V šesté hodině jsme řešili slovní úlohy, které vedly ke kvadratickým rovnicím. Kvadratické rovnice jsme zatím řešili pouze metodou úpravy na součin dvou lineárních činitelů. V sedmé hodině jsme se zaměřili na obecné řešení kvadratické rovnice, kterému se někdy ve školním prostředí říká řešení pomocí diskriminantu.

V pojmové části (40 minut) jsem na tabuli frontálně řešil dvě kvadratické rovnice. Jednu konkrétní $2x^2+12x+4=0$ a dále kvadratickou rovnici v obecném tvaru $ax^2+bx+c=0$, kde $a\neq 0$ (inspiroval jsem se v učebnici M. Krynického z www.realisticky.cz). Každý krok, který jsem provedl u konkrétní kvadratické rovnice, jsem v tu samou chvíli provedl u rovnice v obecném tvaru. Mohlo by se zdát, že si při tomto způsobu výkladu žáci neměli možnost řešení konkrétní rovnice dostatečně pochopit. Domnívám se, že k pochopení může dojít i později, při písemném zápisu do sešitu. Na tabuli bylo nakonec kromě řešení konkrétní rovnice také řešení rovnice v obecném tvaru:

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = 0$$

$$a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c = 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \cdot \frac{1}{a}$$

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Z poslední rovnice plyne, že řešení jsou dvě, a to $x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ a $x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Výraz pod odmocninou jsem pojmenoval jako diskriminant a nakonec na tabuli ukázal řešení konkrétní kvadratické rovnice pomocí právě odvozeného vztahu. Každý krok řešení jsem se snažil provádět pomalu a doptával jsem se žáků na to, jak by sami dále postupovali.

V zápisové části (20 minut) si žáci zapsali řešení konkrétní rovnice a podrobně komentované odvození kořenů kvadratické rovnice v obecném tvaru.

V části rekapitulační (50 minut) žáci samostatně řešili úlohy z dalšího pracovního listu (viz příloha 15). Jedná se převážně o slovní úlohy vedoucí ke kvadratickým rovnicím. Poslední úloha obsahuje 11 kvadratických rovnic, jejichž řešením by si žáci měli zautomatizovat používání nově odvozených vztahů. Větší důraz na řešení kvadratických rovnic a rovnic upravitelných na kvadratické se kladl v hodinách cvičných.

4.3 Vyhodnocení výukového experimentu

Nyní se zaměřím na reflexi vlastní výuky. Pokusím se o objektivní popis mé přípravy a realizace výuky. Do epochy rovnic a slovních úloh jsem vstupoval s pokorou, nejenom z důvodu, že jsem toto téma poprvé učil v epochové formě, ale také z důvodu, že před každou epochou cítím silný pocit zodpovědnosti. Ve srovnání s klasickou vyučovací hodinou, která trvá 45 minut, je příprava a samotná realizace epochové hodiny v mnoha ohledech mnohem složitější.

Co se v epoše rovnic a slovních úloh povedlo, byla skupinová práce. Žáci se vždy dokázali na zadané úkoly ve skupinách maximálně soustředit. Pracovali ochotně, nikdy se nestalo, že by někdo spolupráci odmítal. Důkazem byly chvíle, kdy bylo v hodině skutečně rušno a jediným, mezi žáky probíraným tématem, byla matematika. Tak se skupinové práce navenek jevily pozorovateli Adamovi.

Navíc jsme se shodli, že žákovská úprava sešitů byla nadstandardní. Během zápisových částí jsme pozorovali, jak se žáci snaží do sešitů zapsat všechny detaily, které byly řečeny, ale nebyly uvedeny na tabuli. Adam také pozitivně hodnotil mé zápisy na tabuli. Během přípravy na epochu jsem si vždy kreslil obrázek tabule a do něj jsem naznačoval, do jaké její části napíši to, co jsem plánoval. Dělal jsem to tak, aby byl zápis přehledný, aby se všechno na tabuli vešlo a abych nemusel během vyučovací hodiny zbytečně otáčet křídla tabule, a tím znemožnil žákům při zápisové části psát zápis vlastním tempem.

Z mého pohledu se podařilo vhodně vygradovat náročnost probíraného učiva mezi jednotlivými epochovými hodinami. Na úkor množství probraných témat jsem se zaměřil na budování pozitivního vztahu k matematickému modelování slovních úloh. Pozitivní vztah jsem se rozhodl budovat tak, že jsem v několika prvních dnech s žáky řešil převážně jednoduché slovní úlohy a ve velkém množství. I slabší žáci si mohli říct, že toho vyřešili hodně. Podle toho, jak se slabší žáci aktivně v hodinách zapojovali, hodnotím tento úkol za alespoň částečně splněný.

Dalším povedeným prvkem v epoše byl pro žáky nový pohled na už známé pojmy nebo postupy. Žáky fascinovaly souvislosti mezi geometrií a algebrou (starořecké řešení rovnic). Rádi vytvářeli slovní úlohy, kdy byli limitování prostředím (viz dizertační práce Bureše, 2014, s. 58).

Při výuce tématu lineárních rovnic jsem si sám uvědomil, že jsem v hodině až příliš rozebíral samotný pojem lineární rovnice. Zabýval jsem se teorií až příliš, což také reflektoval Adam během hospitačního rozhovoru. Další věc, která se mi nepovedla, byla práce s nadanými žáky. Více jsem se u samostatné práce zaměřil na slabší žáky a méně jsem se věnoval ostatním žákům, kteří to také pravděpodobně potřebovali. Několikrát se stalo, že se měli příležitost nudit, nebyli plně zaměstnáni.

V této chvíli ještě nevím, jestli téma rovnic a slovních úloh i příští rok do epochy zařadím. Na základě zkušeností z výuky jsem nabyl dojmu, že právě epochová forma výuky není pro toto téma příliš vhodná. Mám pocit, že témata, která jsou více pojmová, jsou pro epochové vyučování vhodnější. Zároveň není téma rovnic a slovních úloh pro žáky tématem novým, což epochovou formu výuky komplikuje, protože v tomto tématu nebylo mnoho toho, co by mohli objevovat. Naopak výhodou epochové formy vyučování byla maximální soustředěnost žáků, jejich plná koncentrace, která je v epoše pozorovatelně jiná než ve cvičných hodinách. Také žákovská domácí příprava na epochy je, na základě mého pozorování, častější. Z tohoto důvodu byla epochová forma pro téma rovnic a slovních úloh přínosná.

Pozorovatel Adam mi při našem posledním hospitačním rozhovoru řekl své pocity z proběhlé epochy. Přišlo mu až neuvěřitelné, jak jsou všichni žáci ochotni spolupracovat s učitelem. Pochvaloval si příjemnou a přátelskou atmosféru během vyučování. Líbil se mu můj důsledný a zároveň lidský přístup k žákům. Neřekl mi nic negativního, kromě jedné poznámky, kterou jsem popsal výše. Pravděpodobně proto, že ještě nemá jako učitel zkušenosti, a zároveň se možná neodvážil mi něco negativního říct při rozhovoru tváří v tvář.

Nyní zhodnotím některé konkrétní jevy z vyučování. Ve třetí epochové hodině jsem s žáky řešil „důkaz“, že $1 = 2$. Domnívám se, že frontální forma a následná diskuse nebyly vhodnou organizační formou vyučování. Příště bych pravděpodobně zvolil na začátku samostatnou práci. Žákům bych rozdal papíry, na kterých by byl důkaz vytištěný, a nechal je uvažovat individuálně. V mé hodině se tato aktivita táhla delší dobu, než jsem očekával, někteří žáci po chvíli, kdy nenašli v důkazu chybu, přestali přemýšlet a už se řešením problému nezabývali. Samostatnou prací bych částečně tento jev eliminoval. Zároveň bych každému žákovi umožnil svým tempem problém řešit a nakonec bychom mohli problém diskutovat s celou třídou. Myslím si, že by tato forma byla pro žáky podnětnější.

Podobně ve čtvrté epochové hodině bych první aktivitu, kdy jsem frontálně s žáky řešil lineární rovnice vedoucí k nekonečně mnoha a žádnému řešení, změnil. Opět bych žáky nechal pracovat samostatně a nechal bych je vyslovit závěry k množině řešení daných rovnic. Vyžadovalo by to ode mě připravit pro žáky pracovní list, který by dané rovnice obsahoval, a formou otázek bych musel žáky směřovat k závěrům. Ve čtvrté hodině byla však dominantní aktivitou samostatná práce, která spočívala v žákovské tvorbě slovních úloh v daném prostředí. Tady jsem si předem neuvědomil, že žáci nemají dostatečné zkušenosti s tvorbou úloh, a tento fakt jsem nevzal dostatečně v úvahu. Předpokládal jsem jinou kvalitu vytvořených úloh, než žáci vymysleli. Nakonec ani ti prospěchově nejlepší žáci si v této aktivitě neuměli poradit. Žáci často vymysleli úlohy absurdní, které nevedly k žádnému řešení díky absenci údajů v zadání, nebo byla jejich úloha spíše pokusem o vtip. Příště bych vytváření slovních úloh žáky zkusil ve cvičné hodině. Sám bych nedříve u tabule ukázal, jak uvažuji, když vymýšlím novou úlohu, a možná bych žákům zadal domácí úkol, v rámci kterého by měli úlohu vymyslet. V další hodině bych s žáky jejich domácí úkol rozebíral a hledal důvody, proč jsou úlohy nevhodné, neúplné apod.

V páté hodině opět narážím na organizační formu vyučování, kterou bych příště změnil. Frontálně jsem společně s žáky řešil soustavu rovnic dvěma metodami, které žáci znali. Bylo to pravděpodobně zbytečné, protože téměř všichni žáci soustavy rovnic uměli řešit. Příště bych tuto činnost přenechal žákům samotným formou samostatné práce a těm žákům, kteří by to potřebovali, bych pomáhal individuálně. Formu tichého výkladu, kterou jsem zvolil v případě Gaussovy eliminační metody, bych zachoval. Líbilo se mi, jak žáci chtěli přijít na postup, který jsem nahlas nevyslovil.

Dominantou šesté epochové hodiny byla Eulerova úloha, která žáky přivedla ke kvadratické rovnici. Mým cílem bylo ukázat žákům slovní úlohu, jejíž matematizace vede ke kvadratické rovnici. Domnívám se však, že jsem zvolil příliš složitou slovní úlohu k matematizaci, důsledkem čehož samotný nový pojem kvadratické rovnice stál v pozadí. Výklad byl zdlouhavý a mnozí žáci si nebyli jistí v samotném vytvoření matematického modelu k úloze, i když to byla součást domácího úkolu. Ten mnozí nedokázali splnit. Příště bych se určitě pokusil najít takovou slovní úlohu vedoucí ke kvadratické rovnici, která nebude pro žáky složitá na matematizaci, aby mohla být pozornost žáků soustředěna více na řešení samotné kvadratické rovnice.

5 Didaktický test

5.1 Cíl

Cílem druhé části mé práce bylo popsat řešitelské strategie zkoumaných žáků při řešení tří vybraných slovních úloh a zjistit, do jaké míry byly ovlivněny výukou popsanou v kapitole 4. Proto byli žáci testováni dvakrát, poprvé před epochou (žáci už měli zkušenosti s řešením lineárních rovnic a slovních úloh ze základní školy) a potom po epoše. Prostředkem ke srovnání byl stejný didaktický test. Na vypracování testu měli žáci vždy čas 45 minut, tedy celou vyučovací hodinu. Každý žák seděl v lavici sám, měl k dispozici psací potřeby a zadání testu. Kalkulačky a tabulky nebyly povoleny. Testování probíhalo v termínech 19. 3. (první termín) a 8. 4. 2015 (druhý termín). Po prvním termínu jsem o řešeních s žáky nemluvil a nedával jsem jim žádnou zpětnou vazbu.

5.2 Výběr úloh do didaktického testu

Do didaktického testu byly vybrány tři slovní úlohy.

5.2.1 Úloha E1

Úloha E1 není originální, nachází se v mnoha sbírkách úloh v různých obměnách. Jedná se o konceptuální slovní úlohu bez praktického námětu řešitelnou lineární rovnicí. Z hlediska rutiny je to úloha standardní. Pro mé účely je důležité, že objevení jejího matematického modelu je pro žáka poměrně jednoduché. Lze ji také vyřešit jednoduchou úvahou, například metodou pokus – omyl. Předpokládal jsem, že ji většina žáků vyřeší správně, což je bude pozitivně motivovat k řešení dalších složitějších úloh.

Dovednosti a schopnosti potřebné pro řešení úlohy E1:

- čtenářské dovednosti k nalezení podstatných informací,
- schopnost počítat s čísly jako abstraktními entitami,
- schopnost matematicky vyjádřit vztahy mezi přirozenými čísly,
- znalost významu matematických symbolů a jejich zápisu,
- schopnost interpretovat výsledek a posoudit jeho správnost.

Zadání: Součet tří po sobě jdoucích přirozených čísel je 30. Jaká jsou to čísla?

Možné řešení: Úlohu lze uchopit pomocí identifikace objektů, kterými jsou v tomto případě přirozená čísla. Mezi objekty platí vztah, že jsou tři po sobě jdoucí. Matematický model toho vztahu je nasnadě: $n, n+1, n+2$. Sjednocujícím faktorem je skutečnost, že jejich součet je 30. Matematickým modelem této úlohy je rovnice

$$n + (n + 1) + (n + 2) = 30.$$

Řešením rovnice je $n = 9$. Po aplikaci uvedeného výsledku v kontextu úlohy E1 vidíme, že hledaná trojice přirozených čísel je 9, 10, 11. Zkouškou $9 + 10 + 11 = 30$ potvrzujeme správnost řešení.

Další možné řešení: Kdybychom nehledali tři přirozená čísla po sobě jdoucí, mohlo by nás napadnout, že číslo 30 lze zapsat jako součet $10 + 10 + 10 = (10 - 1) + 10 + (10 + 1)$, odečtení a opětovné přičtení čísla 1 hodnotu součtu nezmění, takže je to stále 30. Hledaná trojice čísel je tedy 9, 10 a 11.

5.2.2 Úloha E2

Úloha E2 byla součástí testování PISA. Je to nestandardní konceptuální slovní úloha řešitelná lineární rovnicí s praktickým námětem. Podle Nemčíkové a kol. (2011, s. 37) „jde o komplexní úlohu, která podporuje vytváření strategií řešení, identifikaci důležitých údajů, hledání vztahů". To je také důvod, proč byla úloha do didaktického testu vybrána. Úloha má praktický námět, je komplexní a rozvíjí žákovo myšlení a motivaci.

Dovednosti a schopnosti potřebné pro řešení úlohy E2:

- čtenářské dovednosti k nalezení podstatných informací,
- schopnost porozumět matematickému textu,
- schopnost porozumět významu matematické interpretace změn,
- znalost významu matematických symbolů a jejich zápisu,
- schopnost matematicky vyjádřit vztah sdělení. (Nemčíková a kol., 2011, s. 36)

Zadání: Lidé by se ze zdravotních důvodů neměli přepínat, např. při sportu, aby nepřekročili určitou frekvenci srdečního tepu. Léta byl vztah mezi doporučenou maximální tepovou frekvencí a věkem osoby vyjadřován následujícím vzorcem:

$$\text{doporučená maximální tepová frekvence} = 220 - \text{věk}.$$

Poslední výzkumy ukázaly, že by se tento vzorec měl poněkud upravit. Podle nového vzorce je:

$$\text{doporučená maximální tepová frekvence} = 208 - (0{,}7 \cdot \text{věk}).$$

V novinovém článku vyšlo: „Použijeme-li nový vzorec místo starého, zjistíme, že doporučený maximální počet úderů srdce za minutu pro mladší lidi poněkud poklesne a pro starší lidi poněkud vzroste." Od jakého věku vzroste doporučená maximální tepová frekvence při použití nového vzorce? Zapište svůj postup.

Možné řešení: „Z textu úlohy určíme neznámou hodnotu a zvolíme si symbol k jejímu vyjádření. Převedeme slovní vyjádření pomocí matematických symbolů a matematických operací.

Tím vytvoříme model, pomocí kterého hledáme řešení. Výraz pro doporučenou maximální tepovou frekvenci podle starého a nového vzorce dáme do rovnosti a sestavíme lineární rovnici

$$220 - v = 208 - (0{,}7 \cdot v).$$

Pomocí ekvivalentních úprav vyřešíme sestavenou rovnici. Při formulování odpovědi se vrátíme k otázce v zadání úlohy. Formulujeme odpověď, že od 40. nebo od 41. roku věku vzroste doporučená maximální tepová frekvence při použití nového vzorce." (Nemčíková a kol., 2011, s. 37)

<u>Další možné řešení:</u> „Sestavíme lineární nerovnici

$$220 - v < 208 - (0{,}7 \cdot v),$$

ve které porovnáme doporučenou maximální tepovou frekvenci při použití starého vzorce s novým. Pomocí ekvivalentních úprav vyřešíme sestavenou nerovnici a formulujeme odpověď." (Nemčíková a kol., 2011, s. 38)

<u>Jiné možné řešení:</u> „Do výrazu s proměnnou pro nový a starý vzorec doporučené maximální tepové frekvence systematicky dosazujeme číselné hodnoty (nejlépe po desítkách), dokud nedostaneme stejnou číselnou hodnotu. Stejná číselná hodnota udává věk, kdy je tepová frekvence stejná, a na základě zjištěné hodnoty formulujeme odpověď, od jakého věku tepová frekvence použitím nového vzorce vzroste." (Nemčíková a kol., 2011, s. 39)

5.2.3 Úloha E3

Poslední úloha E3 pochází z pracovního listu od Štětkové (2015, s. 1). Je to standardní konceptuální slovní úloha řešitelná lineární rovnicí s praktickým námětem. Při řešení úlohy sestavením rovnice musí žák sestavit rovnici se zlomky a převádět jednotky délky.

Dovednosti a schopnosti potřebné pro řešení úlohy E3:

- čtenářské dovednosti k nalezení podstatných informací,
- schopnost sestavení matematického modelu,
- schopnost matematicky vyjádřit vztahy mezi racionálními čísly,
- schopnost vytvořit vizualizaci nebo sestavit plán řešení a matematizaci úlohy,
- schopnost konstruovat a sledovat kauzální řetězec fakt nebo událostí.

<u>Zadání:</u> Jana se učí švadlenou a chce si na konci školního roku ušít šaty. Rozhodla se, že si raději ušije halenku a sukni samostatně, aby obě části oděvu mohla různě kombinovat. Koupila si látku a začala ji stříhat. Na halenku ustříhla $\frac{3}{5}$ kusu látky, na sukni ustříhla $\frac{2}{3}$ ze zbývající části látky. Z celého kusu jí ještě zbylo 20 centimetrů. Kolik metrů látky Jana koupila? Kolik centimetrů látky spotřebovala na halenku a kolik na sukni?

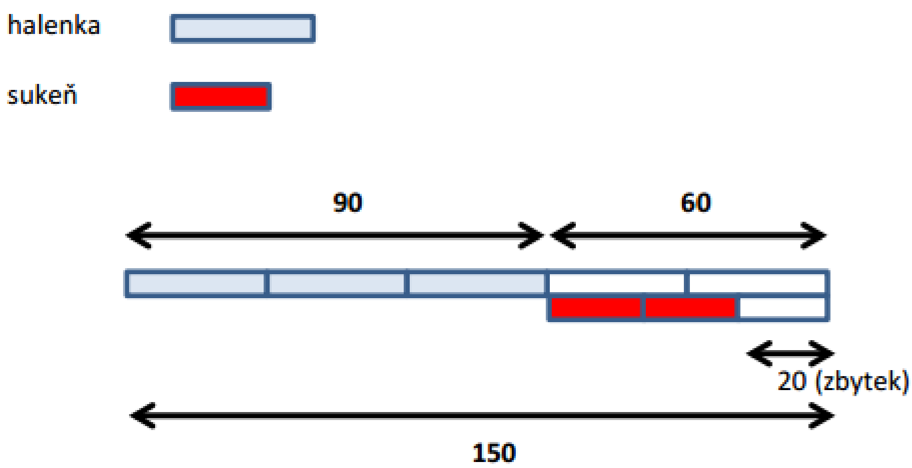
Možné řešení: Při uchopení slovní úlohy lze z textu zadání identifikovat objekt jako látku a její vlastností je celková délka, kterou označíme jako neznámou x. Sjednocujícím faktorem je podíl délky látky v jednotlivých kusech oblečení. Na halenku potřebujeme $\frac{3}{5}x$ a na sukni $\frac{2}{3}$ ze zbytku látky: $\frac{2}{3} \cdot \left(x - \frac{3}{5}\right)$, zbytkem je 0,2 m látky. Matematickým modelem úlohy je potom:

$$\frac{3}{5}x + \frac{2}{3} \cdot \left(x - \frac{3}{5}\right) + 0{,}2 = x$$

Řešením matematického modelu úlohy je $x = 1{,}5$. Vrátíme-li se do kontextu úlohy, můžeme tvrdit, že si Jana koupila 1,5 m látky a na halenku spotřebovala $\frac{3}{5}$ ze 150, tedy 90 cm. Zbylo jí 60, takže na sukni spotřebovala $\frac{2}{3}$ z 60. Na sukni spotřebovala 40 cm. Zkouškou $90 + 40 + 20 = {}$ $= 150$ můžeme ověřit, že Jana spotřebovala 1,5 m látky.

Jiné možné řešení úlohy E3: Úlohu lze řešit úvahou. 20 cm odpovídá jedné třetině, dvě třetiny představují 40 cm, tolik Jana potřebovala na sukni. 60 cm odpovídá dvěma pětinám, tři pětiny představují 90 cm. Tolik Jana spotřebovala na halenku.

Grafické řešení:



Obr. 15: Grafické řešení úlohy E3 (Štětková, 2015, s. 1)

5.3 Analýza žákovských řešení jednotlivých úloh

V předchozích oddílech byli popsáni účastníci experimentu a také úlohy, které v didaktickém testu řešili. Nyní provedu analýzu žákovských řešení z hlediska řešitelských strategií u jednotlivých úloh a chyb, kterých se dopustili. Jelikož žáci psali test dvakrát, u každé úlohy se zaměřím na výsledky v obou testech. Výsledky analýz jednotlivých úloh budu prezentovat zvlášť. Aby bylo možno výsledky považovat za validní, nebudu analyzovat všechna řešení, zaměřím se pouze na řešení těch žáků, kteří se účastnili obou testů, což je celkem 25 žáků.

5.3.1 Analýza úlohy E1

U této úlohy se předpokládalo, že ji zvládnou správně vyřešit téměř všichni žáci. Tento předpoklad se naplnil, což dokazují absolutní četnosti uvedené v následující tabulce:

výsledek řešení / termín	**1. termín**	**2. termín**
správný výsledek řešení	23	24
nesprávný výsledek řešení	1	1
neřešená úloha	1	0

Tab. 2: Absolutní četnosti vyjadřující správné řešení úlohy E1

Pouze dva žáci úlohu vyřešili nesprávně nebo vůbec nevyřešili, na druhý pokus pouze jeden žák.

Dále je součástí analýzy pohled na změnu řešitelské strategie bez ohledu na správnost řešení po absolvování epochy rovnic a slovních úloh.

metoda řešení úlohy / termín	**1. termín**	**2. termín**
lineární rovnice	3	8
logická úvaha	13	11
pokus – omyl	4	1
není známa (jen výsledek)	4	5
neřešená úloha	1	0

Tab. 3: Absolutní četnosti vyjadřující metody řešení úlohy E1

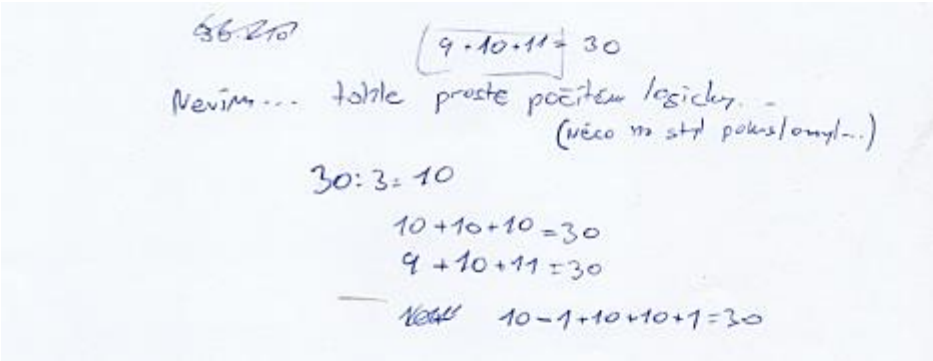
Zajímavý je nárůst počtu žáků, kteří řešili slovní úlohu E1 matematickým modelem – lineární rovnicí. Analogicky k tomu mírně v absolutním počtu klesly metody logická úvaha a pokus – omyl.

V tabulce 3 je vidět dynamika přechodu z jedné metody řešení úlohy na jinou neúplně. V následující tabulce jsou zobrazeny absolutní četnosti, které reprezentují počet žáků, kteří změnili metodu řešení. Jsou zde tedy informace o konkrétní změně metody. Samozřejmě jsou i zde žáci, kteří metodu nezměnili, ti jsou v tabulce uvedeni také.

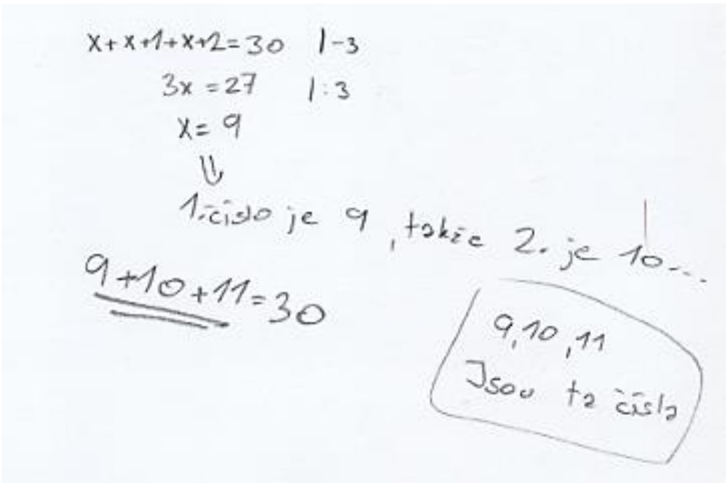
změna metody řešení	**počet žáků**
logická úvaha → rovnice	5
pokus – omyl → logická úvaha	3
logická úvaha → pokus omyl	1
neřešená úloha → rovnice	1
rovnice → rovnice	2
logická úvaha → logická úvaha	8
logická úvaha → není známa	1
není známa → není známa	4

Tab. 4: Absolutní četnosti vyjadřující změnu metody řešení úlohy E1

Například Milan patří mezi ty žáky, kteří v prvním termínu řešili úlohu úvahou, a ve druhém termínu změnil metodu na řešení vytvořením matematického modelu. Milan je žák, který absolvoval první stupeň základní školy ve škole pro mimořádně nadané děti v Bratislavě. Rodiče byli s výukou nespokojeni, proto Milana přemístili do základní školy waldorfské v Bratislavě. Milan dosahuje v matematice výborných výsledků a většinu slovních úloh, které jsme v hodinách řešili, řešil úsudkem. Podobně je tomu i v případě jeho řešení před epochou rovnic a slovních úloh, které je vidět na obrázku 16. Po epoše (obrázek 17) Milan přeložil text z obecného jazyka a správně uchopil vztah po sobě jdoucích přirozených čísel. Vytvořil správný matematický model a jednoduše se vrátil do kontextu úlohy.

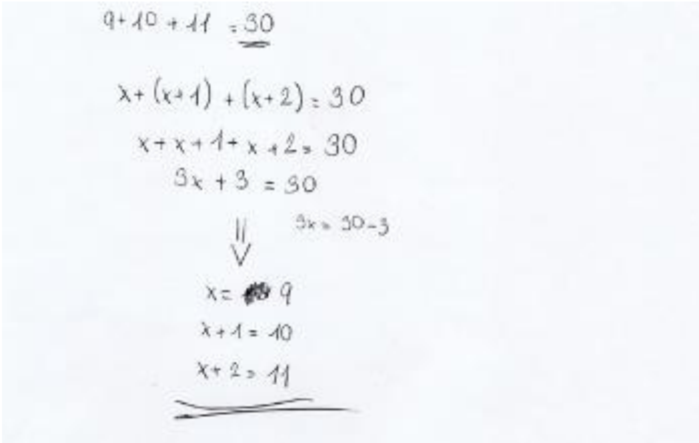


Obr. 16: Žákovské řešení úlohy E1 před epochou (Milan)



Obr. 17: Žákovské řešení úlohy E1 po epoše (Milan)

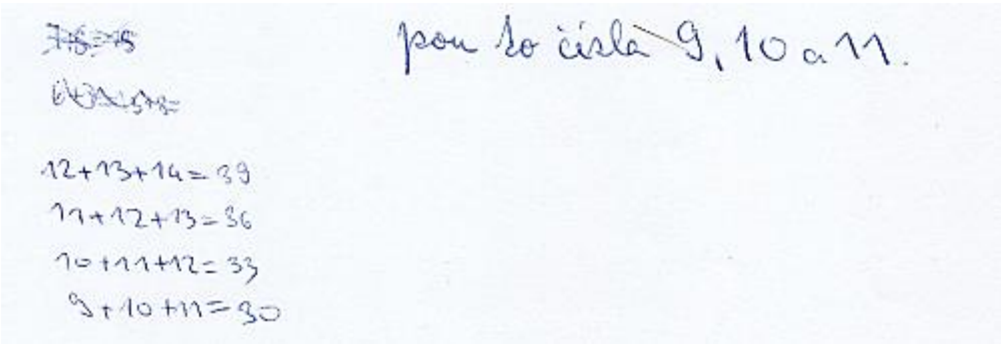
Lucie úlohu E1 při prvním testování vůbec neřešila, na papír se zadáním pouze napsala symbol otazníku. Na Waldorfské lyceum přišla z osmiletého gymnázia, kde měla z hodin matematiky strach. V hodinách se to na začátku školního roku projevovalo tak, že nebyla schopna psát zápis do sešitu, nebo v hodině běžně plakala. S jejím strachem jsme museli společně s rodiči pracovat. Ve škole jsem s Lucií probíral látku základní školy a pokoušel jsem se o konstruktivistický přístup. Rodiče jsem požádal, aby netlačili na výkon a Lucii důvěřovali. V současnosti už se strachem v hodinách pracovat nemusíme. Proto je potěšující, že po epoše Lucie úlohu vyřešila správně a navíc s pomocí matematického modelu.



Obr. 18: Žákovské řešení úlohy E1 po epoše (Lucie)

Celkem čtyři žáci v prvním termínu testu úlohu E1 řešili metodou pokus – omyl. Vlasta si vypsala řadu přirozených čísel od jedné a postupně sčítala tři čísla po sobě jdoucí, až došla k součtu, který hledala. Kateřinu pravděpodobně napadlo, že stačí uvažovat čísla kolem desíti, proto zkoušela sčítat trojice čísel jako například 12, 13, 14 nebo 11, 12, 13. Součet se postupně blížil k hodnotě 30, takže Kateřina rychle dospěla ke správnému výsledku.

Obr. 19: Žákovské řešení úlohy E1 metodou pokus – omyl (Vlasta)

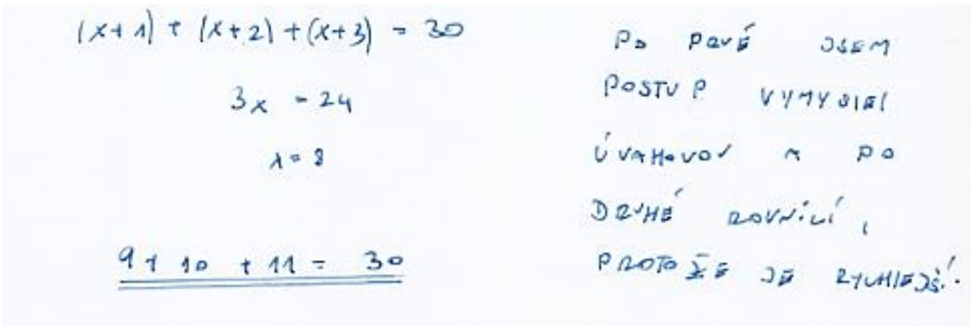


Obr. 20: Žákovské řešení úlohy E1 metodou pokus – omyl (Kateřina)

V absolutních četnostech vyjádřených v tabulce 2 je vidět, že nesprávně úlohu E1 vyřešila pouze jedna žákyně. Podíváme-li se na její řešení (obrázek 21), je jasné, že Julie úlohu neuchopila správně. Domnívá se totiž, že má úloha více řešení. Důvodem je fakt, že Julie neuchopila pojem „tří po sobě jdoucích přirozených čísel“. Správně uchopila tři objekty, ale neidentifikovala správný vztah mezi těmito objekty. Znamená to, že ve výsledku hledala trojice libovolných přirozených čísel, jejichž součet je 30. Proto uvedla odpověď, že má daná úloha více řešení, nehledala je však všechna.

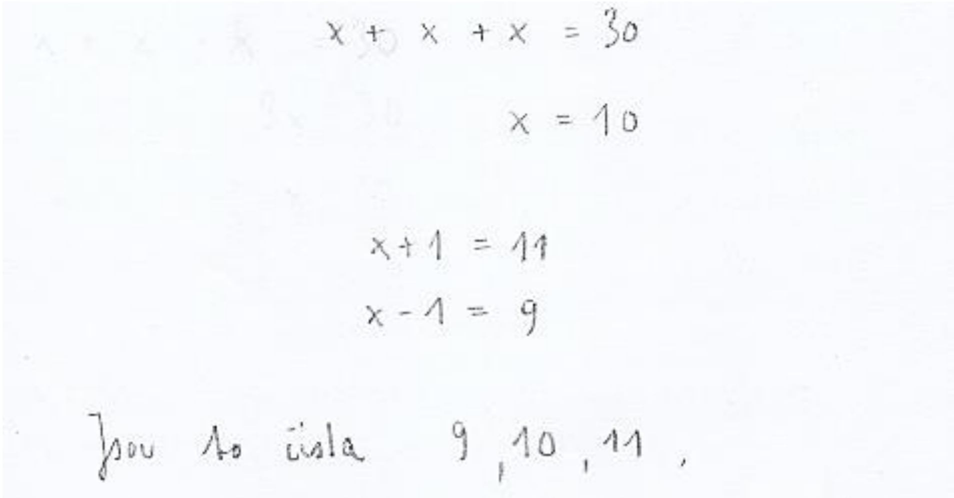
Obr. 21: Chybné žákovské řešení úlohy E1 (Julie)

Další řešení, které je zde uvedeno, není s nesprávným výsledkem. Žák Štěpán dospěl ke správnému výsledku užitím zajímavého matematického modelu (obrázek 22). Štěpán neudělal chybu při matematizaci slovní úlohy. Sestavil rovnici, ve které nejmenší sčítanec součtu je výraz $x + 1$. Ve všech ostatních případech, kdy žáci sestavili matematický model úlohy, pracovali s proměnnou x a výsledkem matematické úlohy potom byl nejmenší sčítanec 9. Jan se velmi dobře vrátil do kontextu úlohy a zkouškou ověřil, že je jeho výsledek správný. Janovo řešení se dá v souboru všech označit za ojedinělé.



Obr. 22: Žákovské řešení úlohy E1 (Štěpán)

Poslední žákovské řešení, které je zde uvedeno, je zajímavé tím, že žákyně Petra sestavila matematický model (obrázek 23), který nekoresponduje se zadáním, ale výsledek je správně. Petra získala všechna data a vztahy nezbytné pro vyřešení slovní úlohy. Text zadání však nepřeložila do obecného matematického jazyka správně. Její matematický model by se dal interpretovat například jako: „Hledám číslo, jehož trojnásobek je číslo 30.“ Je také možné, že si žákyně uvědomila, že číslo vlevo je o 1 menší než číslo uprostřed a číslo vpravo o 1 větší, takže mohla počítat třikrát to číslo uprostřed. To by odpovídalo tomu, že hned pod tím přičítá a odčítá 1. Petra svůj matematický model vyřešila správně, našla číslo 10. K němu potom přičetla a odečetla číslo 1, čímž se dostala ke správnému výsledku.



Obr. 23: Žákovské řešení úlohy E1 (Petra)

Souhrnně lze říct, že žáci při řešení úlohy E1 obstáli výborně. Na začátku řešení této úlohy si ani jeden žák nevytvořil k úloze slovní legendu nebo zápis. Všichni žáci úlohy začali řešit buďto ihned matematizací, nebo v případě řešení úvahou nebo metodou pokus – omyl, zapsali své myšlenky na papír. Ojedinělý byl případ, kdy žák na papír napsal pouze správnou trojici čísel (4 žáci). Úloha byla motivační. Bohužel se z ní nedá usuzovat na vliv epochy rovnic a slovních úloh na změnu řešitelských strategií žáků. Ten se snad ukáže při analýze dalších dvou úloh z didaktického testu.

5.3.2 Analýza úlohy E2

Úloha E2 je typická tím, že její text je dlouhý a pro uchopení a následnou matematizaci složitější než u úlohy E1. Navzdory tomu byli žáci také u této úlohy řešitelsky poměrně úspěšní v obou termínech. Pravděpodobně to vyplývá mimo jiné z toho, že jsou zvyklí řešit nestandardní úlohy. Navíc je asi oslovilo, že se jedná o úlohu s praktickým námětem. Z mé vlastní zkušenosti vím, že v případě, kdy řešíme úlohu, která je praktická a propojená s životními zkušenostmi žáků, je jejich zájem vyšší, než je tomu například u témat, jako jsou polynomy apod.

výsledek řešení / termín	**1. termín**	**2. termín**
správný výsledek řešení	20	19
nesprávný výsledek řešení	3	3
neřešená úloha	2	3

Tab. 5: Absolutní četnosti vyjadřující správné řešení úlohy E2

Většina žáků neměla potíže s porozuměním zadání úlohy.

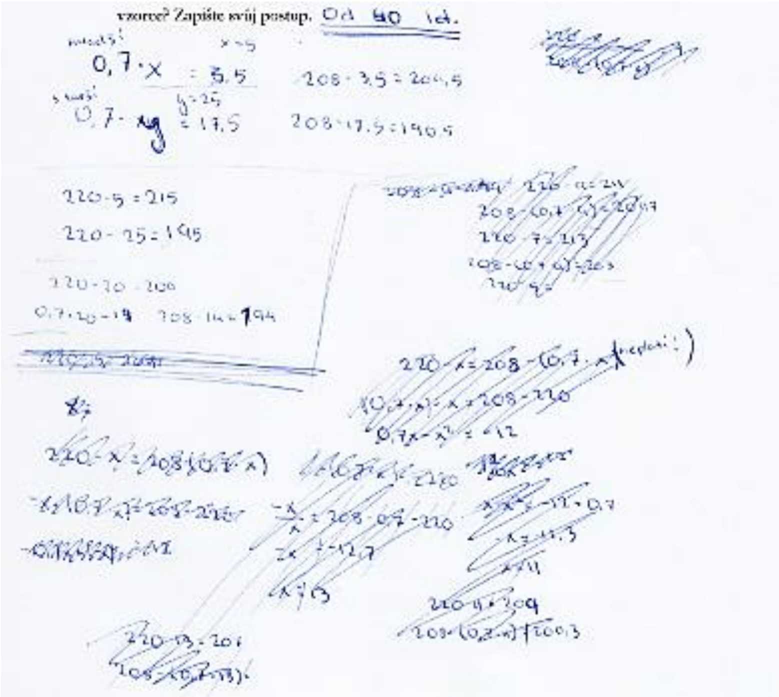
Metody řešení této úlohy vyplývající z analýz žákovských řešení jsou, kromě jednoho řešení, pouze dvě. Jedna skupina žáků úlohu řešila rovnicí, druhá skupina pracovala metodou pokus – omyl, zkoušeli do vzorců dosadit hodnoty konkrétního věku, pro ty počítali maximální tepovou frekvenci a odpověď na položenou otázku postupně vypozorovali. Absolutní četnosti použití jednotlivých řešitelských strategií jsou vidět v tabulce 6 a grafu 2.

metoda řešení úlohy / termín	**1. termín**	**2. termín**
lineární rovnice	7	11
pokus – omyl	15	11
úvaha	1	0
neřešená úloha	2	3

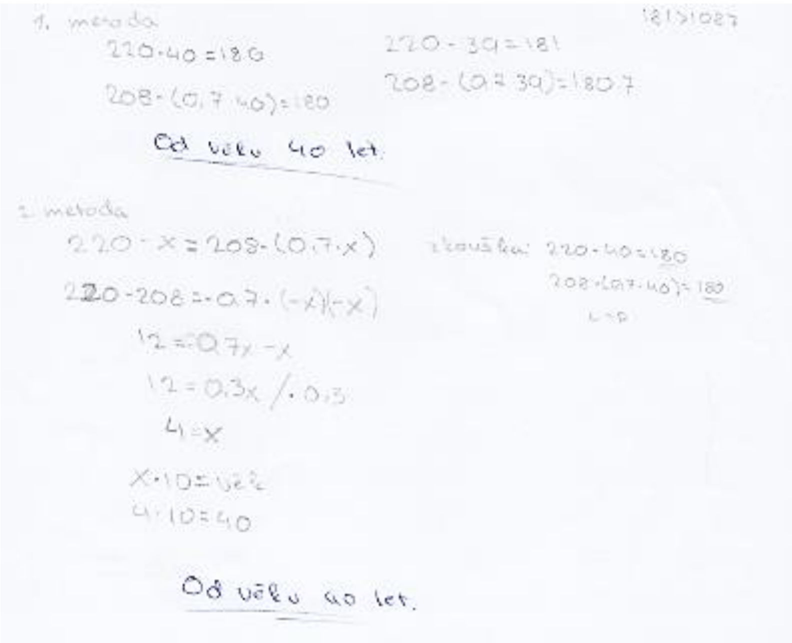
Tab. 6: Absolutní četnosti vyjadřující metody řešení úlohy E2

Nejvýznamnější změna v metodě řešení úlohy E2 před a po epoše se projevila v žákovském řešení Niny. Ta v prvním termínu testování úlohu řešila metodou pokus – omyl, přičemž se pokusila také o sestavení matematického modelu (obrázek 24). V algebraické metodě si nevěřila a několikrát zkusila najít řešení matematického modelu. Nakonec všechny pokusy o algebraické řešení škrtla a začala pracovat s kalkulačkou metodou pokus – omyl, bohužel na papír mezivýsledky z kalkulačky nezapsala, odpověděla však správně a opisovat nemohla, protože seděla v lavici sama. Při druhém testování Nina úlohu uchopila lépe. Všimla si vztahu mezi prvním a druhým vzorcem ze zadání a dala je do rovnosti, čímž sestavila správný matematický model úlohy (obrázek 23). V řešení matematického modelu jsou však vidět chyby. V druhém řádku řešení provedla Nina ekvivalentní úpravy vedoucí k rovnici $220 - 208 = = -0{,}7 \cdot (-x)(-x)$. Poté levou i pravou stranu rovnice upravila a dostala se k tvaru $12 = = 0{,}7x - x$. Nakonec rovnici $12 = 0{,}3x$ vynásobila číslem $0{,}3$ a našla řešení $x = 4$, které posléze vynásobila číslem 10, a napsala správné řešení. Nina má diagnostikovanou speciální poruchu učení – dyslexii. Často při psaní písemných prací píše jiná znaménka operací, než zamýšlí. Potom se i z nesprávných tvarů například rovnic dostává ke správným řešením, proto i zde považuji její řešení za správné. Jinak Nina vyniká v geometrii, má výbornou prostorovou představivost.

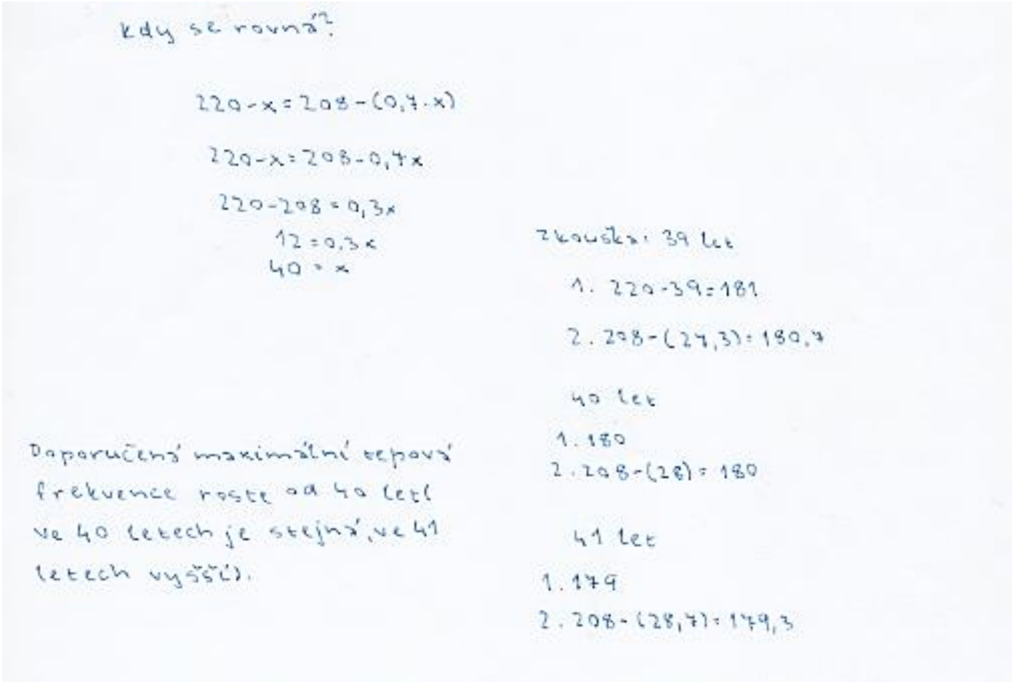
Za vzorově řešenou úlohu E2 lze považovat řešení žákyně Denisy (obrázek 26). Její řešení v obou testováních jsou stejná, jako metodu použila metodu vytvoření matematického modelu a jeho následné vyřešení. Na začátku svého řešení si Denisa uvědomila, že musí zjistit, kdy se nový a starý vzorec rovnají, dokonce tuto myšlenku i zapsala na papír. Sestavenou rovnici Denisa vyřešila správně. Aby se ujistila, že je její řešení v pořádku, udělala navíc zkoušku, ve které manipulovala s konkrétními číselnými hodnotami a ověřila, že skutečně věk 41 let je zlomový. Nakonec v řešení velmi precizně formulovala slovní odpověď.



Obr. 24: Žákovské řešení úlohy E2 před epochou (Nina)

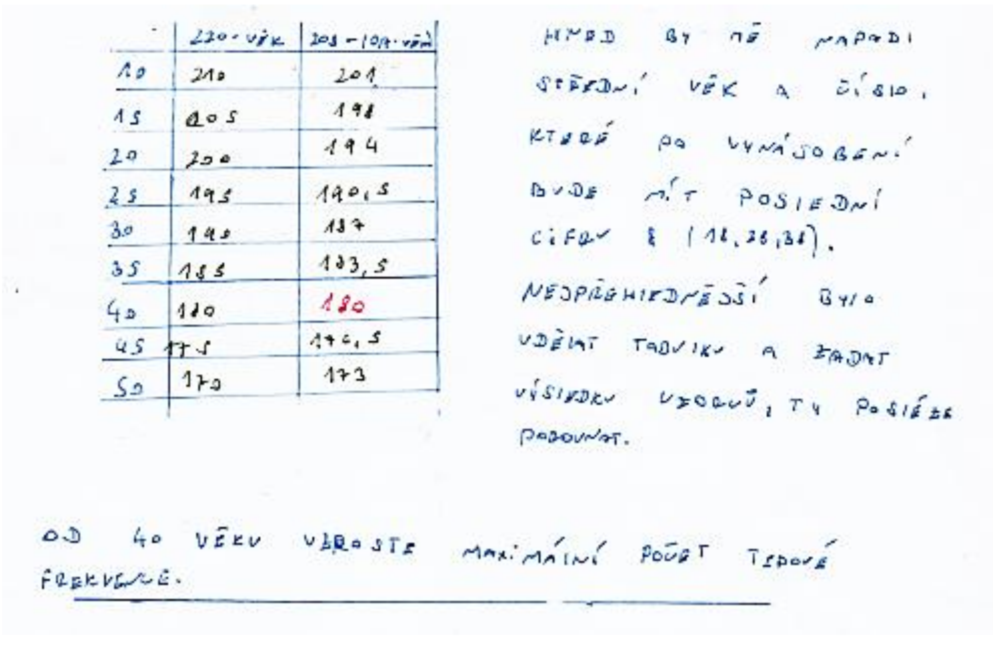


Obr. 25: Žákovské řešení úlohy E2 po epoše (Nina)



Obr. 26: Žákovské řešení úlohy E2 (Denisa)

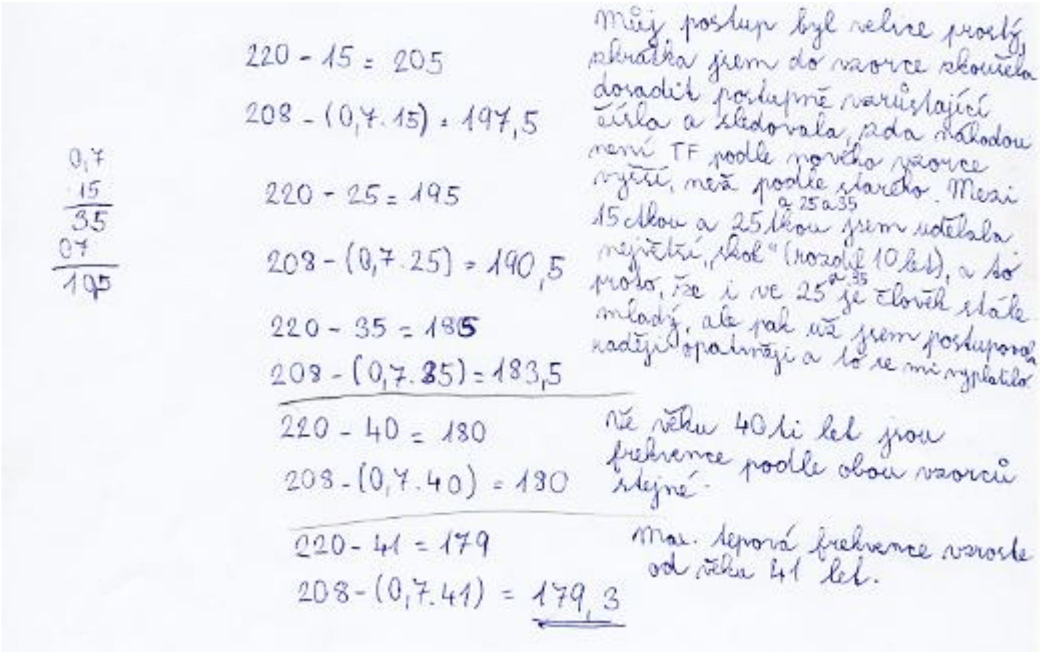
Podobně vzorným řešením je řešení žáka Štěpána (obrázek 27). Ten úlohu E2 řešil metodou pokus – omyl a systematicky dosazoval číselné hodnoty v pětiletých intervalech do obou vzorců, které následně srovnával. Zajímavá je Štěpánova poznámka vpravo: „Hned by mě napadl střední věk a číslo, které po vynásobení bude mít poslední cifru 8 (18, 28, 38). Nejpřehlednější bylo udělat tabulku a zadat výsledky vzorců, ty posléze porovnat." Bohužel svoji myšlenku o poslední číslici 8 více na papíře nerozváděl, zajímalo by mě, jak se k tomu dostal a proč ho právě tato čísla napadla.



	220 - věk	208 - (0,7 · věk)
10	210	201
15	205	198
20	200	194
25	195	190,5
30	190	187
35	185	183,5
40	180	180
45	175	176,5
50	170	173

Obr. 27: Žákovské řešení úlohy E2 (Štěpán)

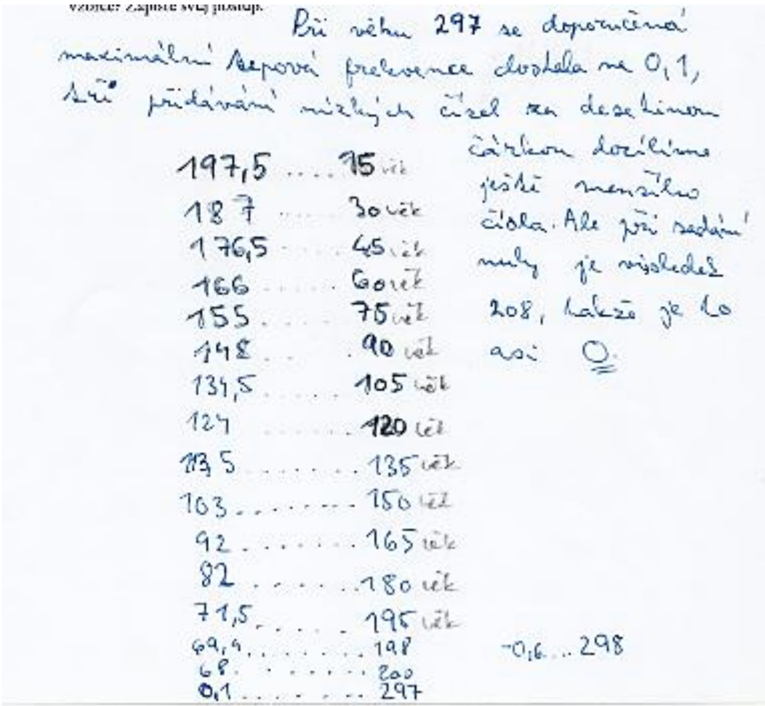
Další zdařilé žákovské řešení úlohy E2 je řešení žákyně Lucie (obrázek 28). Ta podrobně popsala, jak postupovala. Komentář k řešení Lucie je: „Můj postup byl velice prostý, zkrátka jsem do vzorce zkoušela dosadit postupně vzrůstající čísla a sledovala, zda náhodou není tepová frekvence podle nového vzorce vyšší, než podle starého. Mezi 15 a 25 jsem udělala největší skok (rozdíl 10 let) a to proto, že i ve 25 a 35 je člověk stále mladý, ale pak už jsem postupovala raději opatrněji a to se mi vyplatilo.“ Lucie tedy uvažovala o tom, kdy je člověk z jejího pohledu ještě mladý, a tomu přizpůsobila rozpětí, ve kterém vzorce dosazováním hodnot testovala.



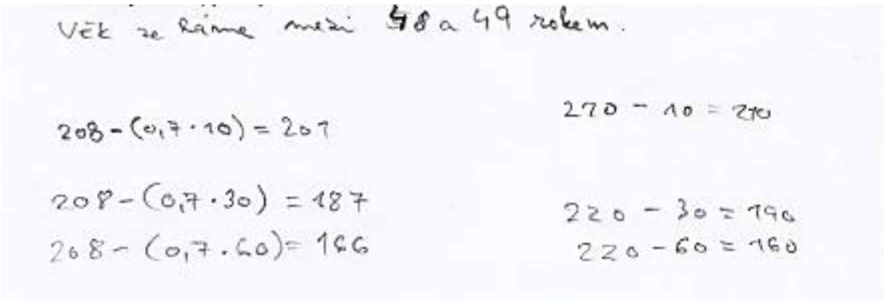
Obr. 28: Žákovské řešení úlohy E2 (Lucie)

U obou testování se vyskytla tři řešení s nesprávným výsledkem. Z toho dvě žákyně chybovaly před i po epoše. První je Marie, která poprvé úlohu E2 řešila metodou pokus – omyl (obrázek 29). Nenašla však správný systém pro dosazování hodnot do výrazu s proměnnou. Dosazování neprováděla nahodile, ale z jejího řešení není jasné, do kterého vzorce dosazovala, protože řešení obsahuje pouze jeden sloupec vypočítaných hodnot maximální tepové frekvence. Marie na papíře formuluje svoji úvahu: „Při věku 297 se doporučená maximální tepová frekvence dostala na 0,1. Při přidávání malých nízkých čísel za desetinnou čárkou docílíme ještě menšího čísla. Ale při zadání nuly je výsledek 208, takže je to asi 0.“ Marie, vzhledem k dlouhému zadání úlohy, neuchopila všechny informace ze zadání a nezískala vhled do úlohy. Pravděpodobně nerozumí významům jednotlivých čísel. Dokonce ani nesmyslný věk 297 let ji nevrátil do kontextu délky života člověka a s tímto číslem Marie pracovala dál. V jejím řešení maximální tepová frekvence pořád klesá, dokonce až do záporné hodnoty. Jako odpověď volí žákyně hodnotu 0. Po epoše metodu řešení Marie nezměnila (obrázek 30). I když je druhé řešení

Marie nesprávné, je v něm vidět, že už více pochopila význam dvou vzorců v zadání a s oběma v řešení manipuluje. Bohužel do vzorců číselné hodnoty věku dosazuje s velkým intervalovým rozpětím dvaceti let (10, 30, 60). V pravém dolním rohu obrázku 28 je vidět, že se potom zaměřila na věk 49, 50 a 51 let. U těchto hodnot viděla změnu, kterou hledala, a považovala tedy věk 49 let za správnou odpověď. Důvodem druhého pochybení je nesystematičnost v dosazování hodnot do vzorců ze zadání.

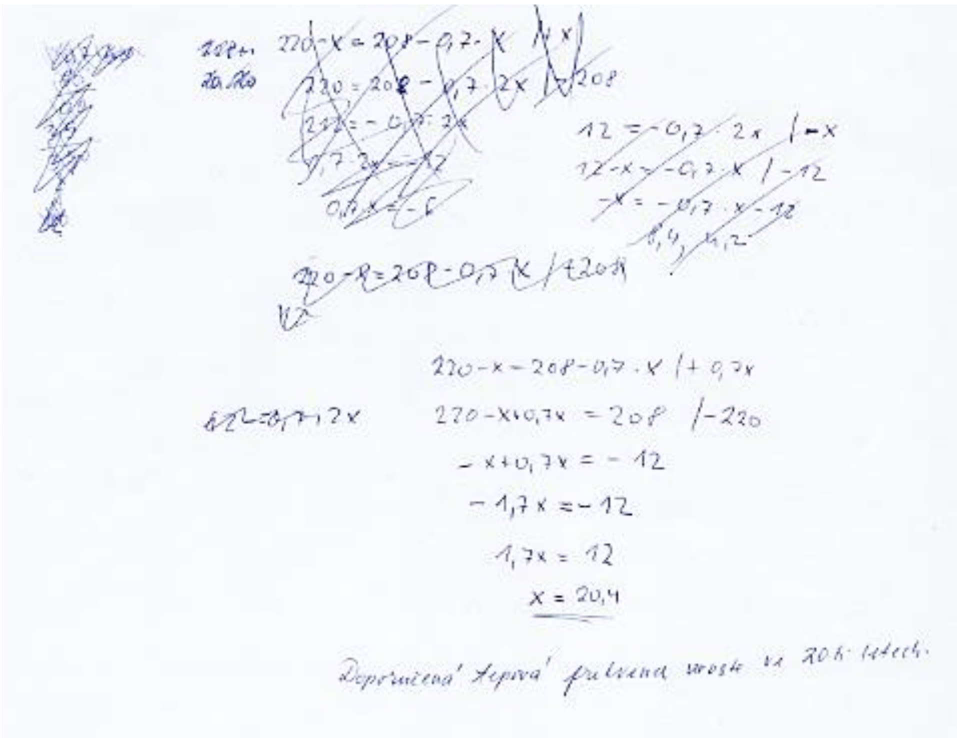


Obr. 29: Chybné žákovské řešení úlohy E2 před epochou (Marie)

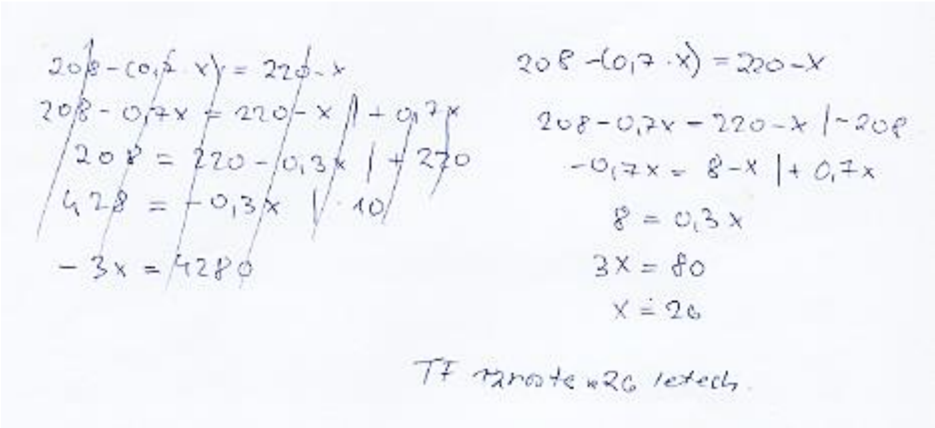


Obr. 30: Chybné žákovské řešení úlohy E2 po epoše (Marie)

Druhá žákyně, která v řešení úlohy E2 udělala chybu v obou termínech, byla Jiřina. V obou termínech testování Jiřina získala ze zadání vztah mezi zadanými vzorci pro výpočet maximální tepové frekvence, nezbytný pro vytvoření modelu dané úlohy. Znamená to, že vytvořila správný matematický model, v obou případech se však chyby dopustila při řešení lineární rovnice. Pokaždé se jednalo o jinou chybu v různých stupních řešení rovnice pomocí ekvivalentních úprav. V testu před epochou udělala Jiřina chybu ve čtvrtém řádku řešení, které lze vidět na obrázku 31. Už v prvním řádku žákyně přičetla k oběma stranám rovnice jednočlen $0{,}7x$. Avšak až do čtvrtého řádku operaci s výrazy $-x + 0{,}7x$ neprovedla. Jiřina na základní škole nezískala dostatečné počtářské zkušenosti v počítání s polynomy a lomenými výrazy. Výpočet $-1 + 0{,}7$ by provedla bez problémů. Strategická manipulace s proměnnou jí dělá potíže, s polynomy nepracuje správně a plynule. Jako výsledek operace $-x + 0{,}7x$ žákyně uvedla jednočlen $-1{,}7x$. Z tohoto důvodu rovnici vyřešila nesprávně s výsledkem $20{,}4$. Kdyby se vrátila do kontextu úlohy vykonáním zkoušky správnosti, mohla dosazením hodnoty 20 zjistit, že řešení její rovnice není správné. Ve druhém testu Jiřina opět sestavila správný matematický model úlohy a ten řešila (obrázek 30). Opět udělala chybu, v tomto případě chybu numerickou. V druhém řádku počítala Jiřina rozdíl $220 - 208$ a jako výsledek uvedla v testu číslo 8. V případě, že by se této chybě vyhnula, mohla dospět k správnému výsledku řešení. Sice se i ve druhém řešení Jiřiny vyskytla chyba, dá se však říct, že se posunula. Po epoše se výrazně zlepšila její schopnost manipulace s polynomy. K tomu však přispělo i to, že docházela na konzultační hodiny, kde jsme spolu pracovali na vytváření představ o polynomech.



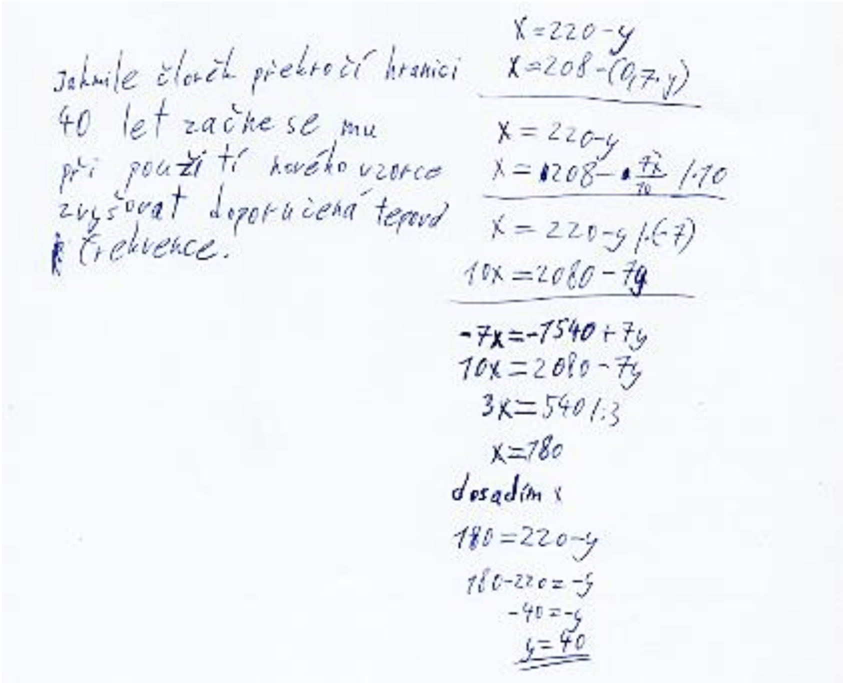
Obr. 31: Chybné žákovské řešení úlohy E2 před epochou (Jiřina)



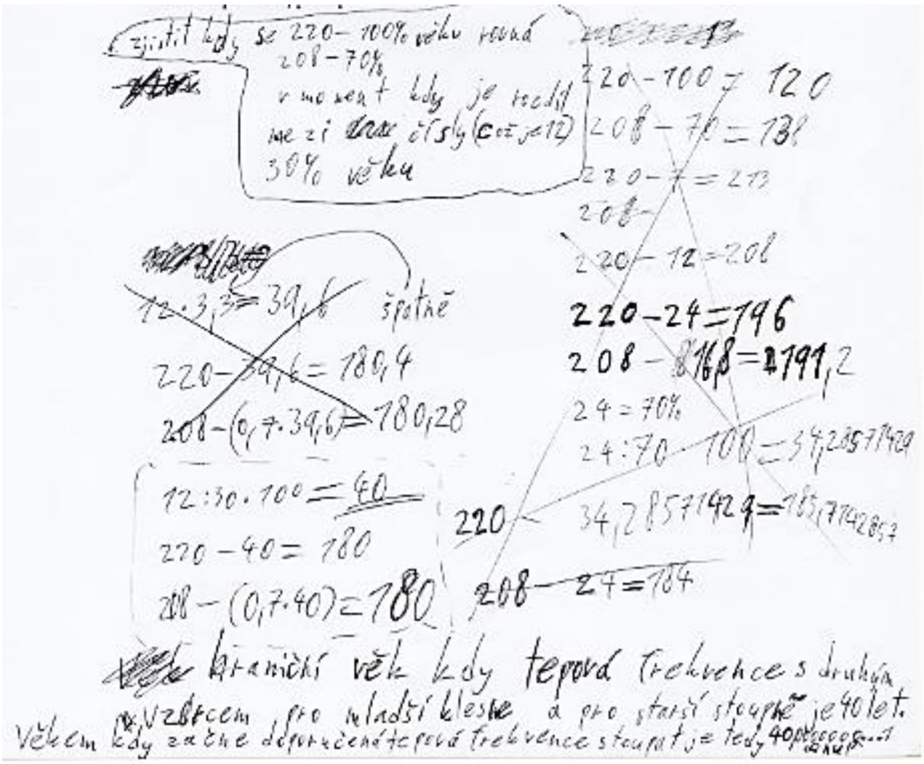
Obr. 32: Chybné žákovské řešení úlohy E2 po epoše (Bětka)

Řešení, které je zajímavé způsobem, jakým žák sestavil matematický model úlohy a ten následně řešil, je žákovské řešení Matěje (obrázek 33). Matěj si uvědomil, že mu stačí zjistit, kdy se oba vzorce pro výpočet maximální tepové frekvence rovnají. Proto také oba označil stejnou proměnnou x. Poté mohl dát vzorce do rovnosti a vyřešit rovnici, která by takto vznikla. Matěj však dva řádky vnímal spíše jako soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. A skutečně matematický model řešil sčítací metodou jako soustavu rovnic. Nakonec dospěl ke správnému výsledku. Možná ještě zajímavějším řešením je jeho řešení v prvním termínu. Je to jediné řešení úlohy E2, ve kterém využil žák jako metodu řešení úvahu. Matěj v prvním testu uvažoval originálně, všiml si ve vzorcích ze zadání procentuální vztah (obrázek 34). V rámečku žák uvádí: „Zjistit, kdy se $220 - 100\ \%$ rovná $208 - 70\ \%$. V momentu, kdy je rozdíl mezi čísly (což je 12) 30 % věku.“. Pomocí této úvahy dále počítal: $12 \div 30 \cdot 100 = 40$ a dostal se ke správnému řešení, které ověřil zkouškou správnosti. Matějova metoda řešení se mezi testy změnila z úvahy na řešení rovnice. V obou případech jsou to řešení originální a ve třídě ojedinělá.

Souhrnně se dá také u úlohy E2 říct, že v ní žáci obstáli výborně. Zatím se však ani u této úlohy nedá moc pozorovat vliv výuky v epoše rovnic a slovních úloh. Na rozdíl od úlohy E1, kde se alespoň v několika případech změnila metoda řešení, u úlohy E2 k signifikantní změně metody nedošlo. Pokud ano, jsou to jednotková čísla.



Obr. 33: Žákovské řešení úlohy E2 po epoše (Matěj)



Obr. 34: Žákovské řešení úlohy E2 před epochou (Matěj)

5.3.3 Analýza úlohy E3

Úloha E3 obsahuje v zadání dvě otázky označené jako a) a b). Všichni žáci, kteří odpověděli na otázku a) správně, odpověděli také na otázku b) správně a stejně tomu bylo v případě nesprávné odpovědi na otázku a) a následně b). Z tohoto důvodu bude úloha analyzována jako úloha s jednou otázkou. Byla pro žáky nejnáročnější. Je to možné pozorovat v tabulce 7.

výsledek řešení / termín	**1. termín**	**2. termín**
správný výsledek řešení	15	17
nesprávný výsledek řešení	10	7
neřešená úloha	0	1

Tab. 7: Absolutní četnosti vyjadřující správné řešení úlohy E3

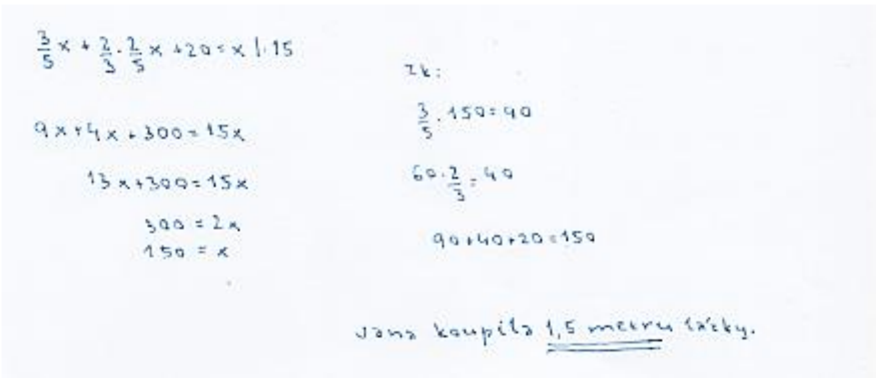
V případě úlohy E3 se dají její žákovské metody řešení rozdělit do tří skupin (tabulka 8).

metoda řešení úlohy / termín	**1. termín**	**2. termín**
lineární rovnice	10	2
logická úvaha	6	17
grafické řešení	9	5
neřešená úloha	0	1

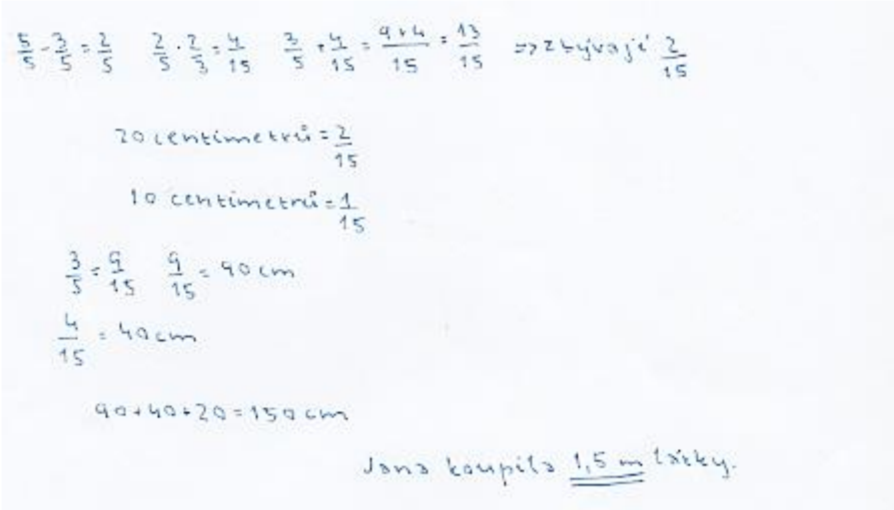
Tab. 8: Absolutní četnosti vyjadřující metody řešení úlohy E3

Výrazný a z dat na první pohled patrný je pokles počtu žáků, kteří úlohu E3 řešili metodou sestavení matematického modelu – lineární rovnice. Naopak se výrazně zvýšil počet žáků, kteří úlohu E3 řešili logickou úvahou, která je druhým řešením této úlohy v předchozí kapitole.

Příkladem změny metody řešení úlohy z lineární rovnice na úvahu je řešení Denisy v prvním a druhém termínu. V prvním termínu Denisa sestavila přímo ze zadání správný matematický model (obrázek 35), ten vyřešila a uvědomila si, že tím zjistila celkovou délku kusu látky. Vykonala zkoušku a přesvědčila se, že je její řešení správné. V didaktickém testu po epoše Denisa uvažovala jinak (obrázek 36). Vztahy mezi objekty plynoucí ze zadání žákyně řešila logickou úvahou pomocí zlomků jako zbývající části látky a opět úlohu vyřešila správně.



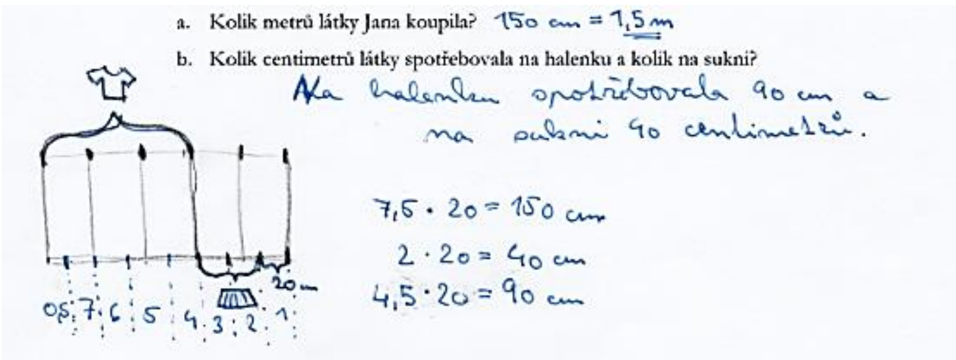
Obr. 35: Žákovské řešení úlohy E3a před epochou (Denisa)



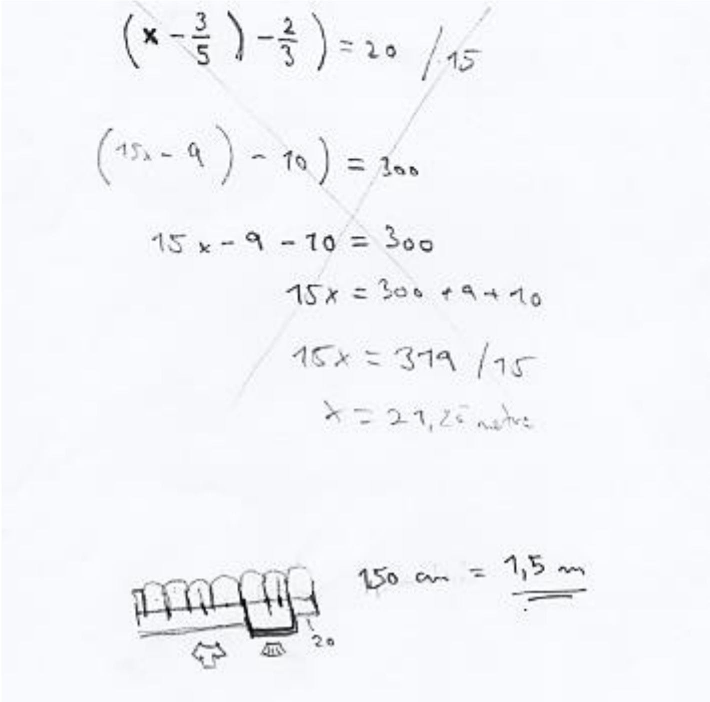
Obr. 36: Žákovské řešení úlohy E3a po epoše (Denisa)

Martina řešila úlohu E3 v prvním termínu sestavením rovnice (obrázek 37). Část kusu látky, který zbyl po ustřižení na ušití halenky, vyjádřila jako $y = x - \frac{3}{5}x$. Proměnnou y použila v modelu, ve kterém vyjádřila zbytek látky jako rozdíl mezi kusem látky použitým na halenku a sukni. Model $y - \frac{2}{3}y = 20$ vyřešila a jeho řešení následně použila při nalezení řešení rovnice $x - \frac{3}{5}x = 60$. Zjistila tak, že celková délka koupené látky je 150 cm.

Marie v prvním termínu úlohu E3 řešila graficky (obrázek 38). Grafickým modelem úlohy je v tomto případě obdélník vertikálně rozdělený úsečkami na pět částí s přibližně stejným obsahem. Marie se pravděpodobně na základní škole při výuce zlomků seznámila i s modelem čokolády. Marie zde nepotřebovala čokoládu dělit horizontálně. V grafickém modelu žákyně postupně zaznamenávala údaje a vztahy mezi nimi od konce zadání úlohy. Při druhém testování se žákyně pokusila o metodu řešení pomocí rovnice (obrázek 39). Sestavila však nesprávný matematický model úlohy, neznámou určila jako $x = 21{,}25$. Pravděpodobně si vzpomněla, že měla v předchozím testu jiný výsledek. Proto se vrátila ke grafickému řešení a úlohu nakonec vyřešila správně.

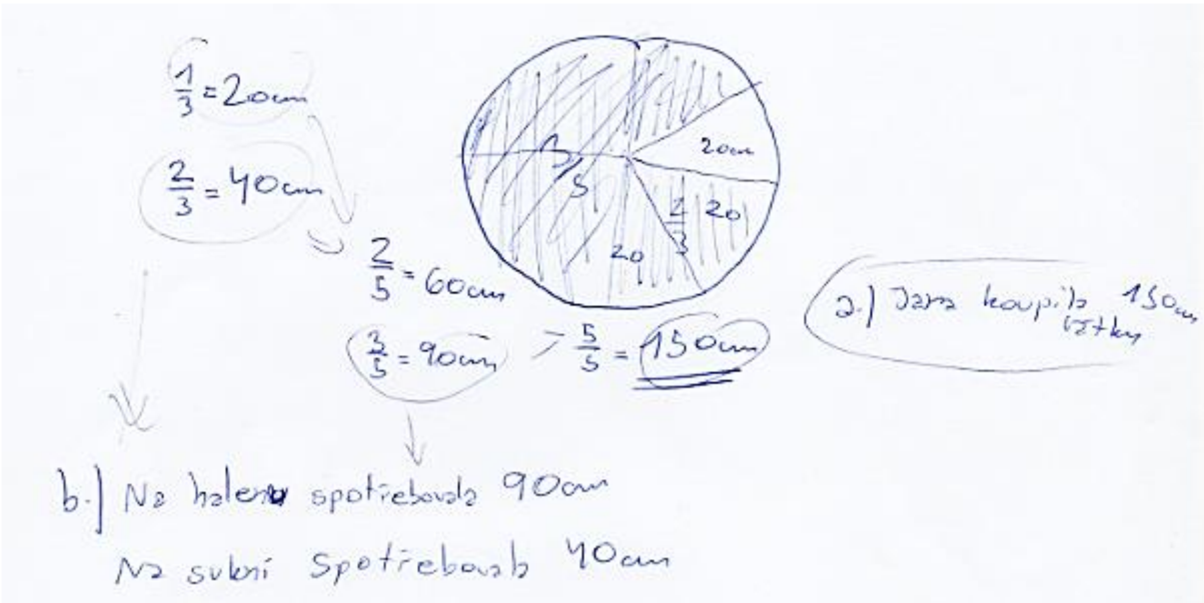


Obr. 38: Žákovské řešení úlohy E3 před epochou (Marie)



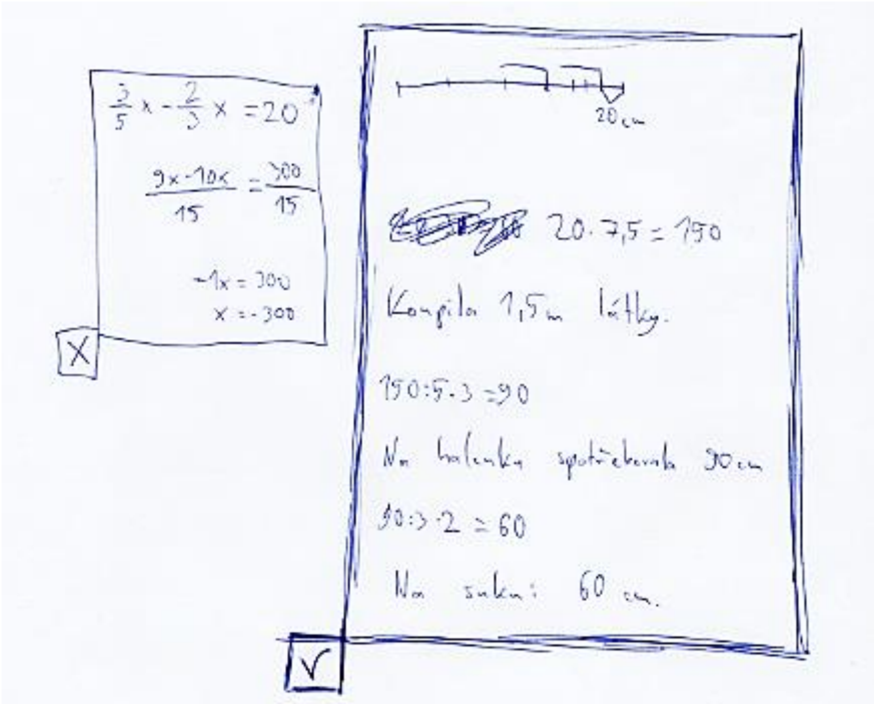
Obr. 39: Žákovské řešení úlohy E3 po epoše (Marie)

Jiný typ grafického modelu použil při svých řešeních v obou termínech Milan (obrázek 40). Celé Milanovo řešení se opírá o koláčový graf, ve kterém postupně znázorňuje části koláče reprezentující části látky ze zadání úlohy.



Obr. 40: Žákovské řešení úlohy E3 (Milan)

Karel využil jako grafický model úsečku (obrázek 41). Pro demonstraci potřeby společného dělitele při operacích se zlomky možná na základní škole pracoval i s tyčovým modelem. V jeho řešení je vlevo uvedený nesprávný matematický model, který Karel sestavil. Po jeho vyřešení se žák při návratu do kontextu úlohy uvědomil, že záporné řešení nevyhovuje podmínkám zadání. Proto začal úlohu řešit jinak, nezměnil však matematický model úlohy a dostal se ke správnému výsledku grafickým řešením.



Obr. 41: Žákovské řešení úlohy E3 (Karel)

Celých 17 žáků řešilo v druhém termínu úlohu E3 logickou úvahou. Srozumitelně napsal své řešení úvahou (obrázek 42) žák Václav, který identifikoval všechny objekty v zadání úlohy a správně popsal vztahy mezi nimi. Václav řešil úlohu od konce. Uvědomil si, že zbytek látky je jednou třetinou látky, která byla použita na sukni. Z toho odvodil, jaká část látky se spotřebovala na halenku, a tím úlohu vyřešil.

Matěj byl žákem, který v obou termínech úlohu E3 řešil logickou úvahou (obrázek 43). Své řešení ve druhém didaktickém testu nepopsal slovně, manipuloval pouze se zlomky. Podobně jako Václav začal od konce zadání výpočtem $\frac{5}{5} - \frac{3}{5}$, čímž zjistil část látky, který byla použita na halenku. Potom vynásobil výsledek z předešlého výpočtu jednou třetinou, takže zjistil část látky, která zbyla (20 cm). Matěj si z předchozího uvědomil, že zná-li vztah mezi zlomkem a délkou látky, může úlohu vyřešit, proto v řešení napsal $\frac{1}{15} = 10$ cm, takže celek je 150 cm.

$\frac{2}{3}$ se objevující − sukně = zbytek 20 cm² je tedy $\frac{1}{3}$ na sukni: tedy použila 40 cm²

$\frac{3}{5}$ látky jsou na kabelku $\Rightarrow$ $\frac{2}{5}$ jsou 60 cm²

$60 : 2 = 30$ $5 \times 30 = 150$ $\Rightarrow$ a, Jana koupila 1,5m² látky.

b, $\frac{1}{5} = 30 \Rightarrow \frac{3}{5} = 90$ cm² Na kabelku spotřebovala 90 cm².

$\frac{1}{3} = 20 \Rightarrow \frac{2}{3} = 40$ cm² Na sukni spotřebovala 40 cm²

(zkouška $90 + 40 = 130$, $130 + 20 = 150$)

Obr. 42: Žákovské řešení úlohy E3 (Václav)

$\cancel{\frac{1}{1} - \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{3}\right) = \frac{9+10}{15} = 15}$

$\frac{5}{5} - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ $\cancel{\ldots : 2}$

$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15} \cdot \frac{2}{1} = \frac{4}{15}$

$\frac{2}{5} - \frac{4}{15} = \frac{6}{15} - \frac{4}{15} = \frac{2}{15} = 20$cm

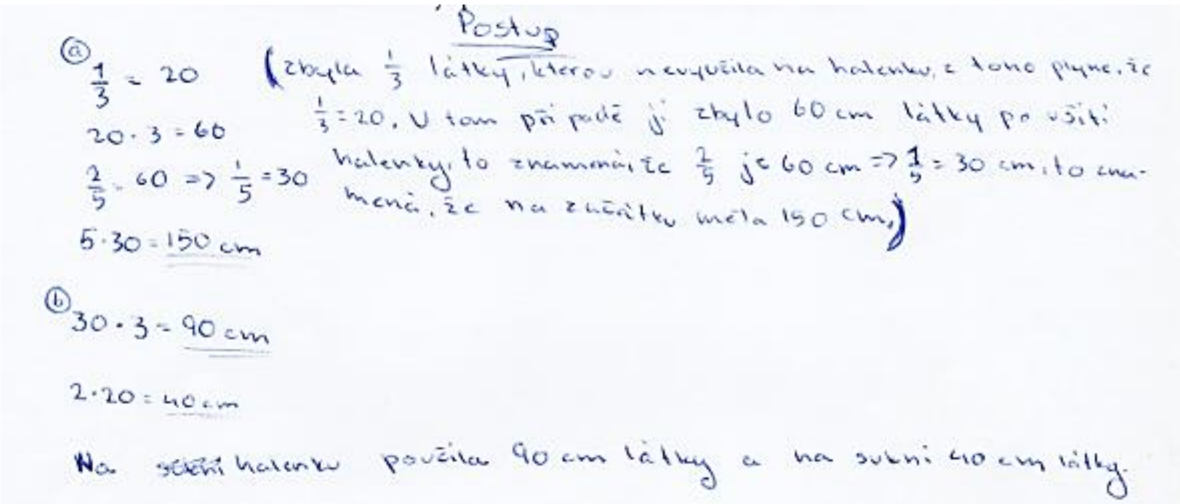
$\frac{1}{15} = 10$cm

$15 \cdot 10 = \underline{150}$cm

Jana si koupila 150cm látky

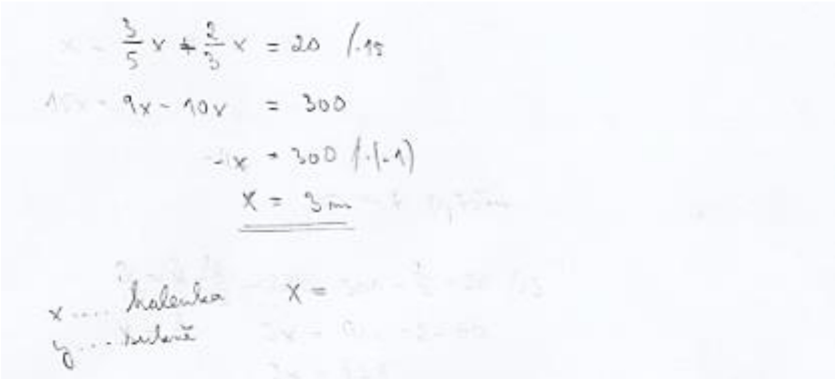
Obr. 43: Žákovské řešení úlohy E3 (Matěj)

Nina uvažovala podobně jako Matěj, ale svoji logickou úvahu navíc popsala (obrázek 44). Ve svém řešení svůj postup komentuje: „zbyla $\frac{1}{3}$ látky, kterou nevyužila na halenku a z toho plyne, že $\frac{1}{3} = 20$. V tom případě jí zbylo 60 cm látky po ušití halenky, to znamená, že $\frac{2}{5}$ je 60 cm, takže na začátku měla 150 cm.“

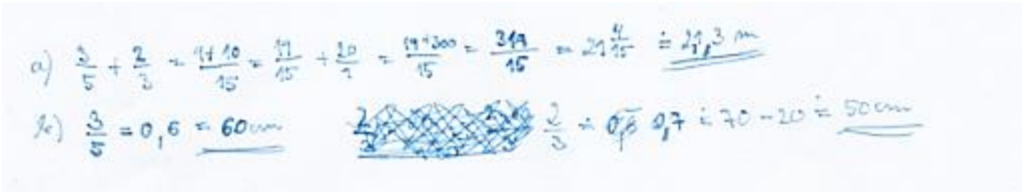


Obr. 44: Žákovské řešení úlohy E3 (Nina)

Dále se zaměřím na chybná žákovská řešení. Například Julie v prvním termínu (obrázek 45) sestavila matematický model úlohy. Nesprávně identifikovala vztah mezi objekty úlohy. V modelu použila proměnnou x, když však modelovala text ze zadání „na sukni ustřihla část látky ze zbývající části látky“, nereflektovala, že se $\frac{2}{3}$ látky ustříhly až po ustřižení látky na halenku, tedy $\frac{2}{3}$ nevyjádřila ze zbytku látky, ale z látky celé. Řešení matematického modelu ji dovedlo k nesprávnému řešení $x = 3$ m. Kolik látky bylo použito na halenku, a sukni Julie nezjistila. Ve druhém termínu (obrázek 46) Julie úlohu E3 řešila logickou úvahou a ve svém řešení operovala pouze se zlomky. V řešení je vidět součet $\frac{3}{5} + \frac{2}{3} + 20$. Julie všechny numerické údaje ze zadání sečetla a součet interpretovala jako celkovou délku látky. Na konci výpočtu nesprávně převedla výslednou délku látky z centimetrů na metry. Julie nevykonala zkoušku, aby se přesvědčila, že jsou její výsledky chybné. Je pravděpodobné, že si žákyně uvědomila, že v prvním termínu úlohu E3 neřešila správně. Možná proto se v druhém termínu pokusila o jiné řešení, nesprávně však interpretovala vztah mezi objekty v zadání.



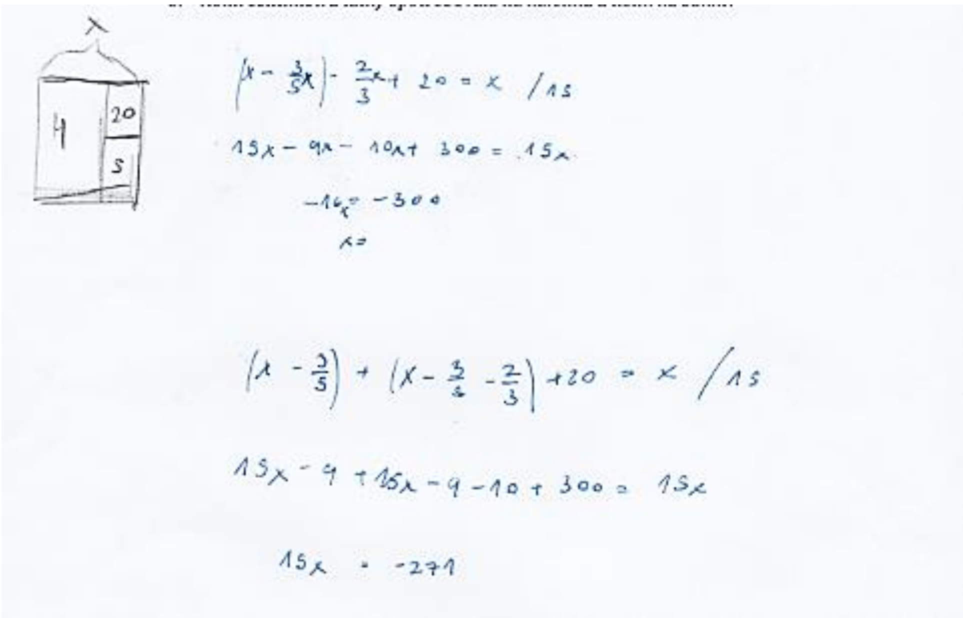
Obr. 45: Chybné žákovské řešení úlohy E3 před epochou (Julie)



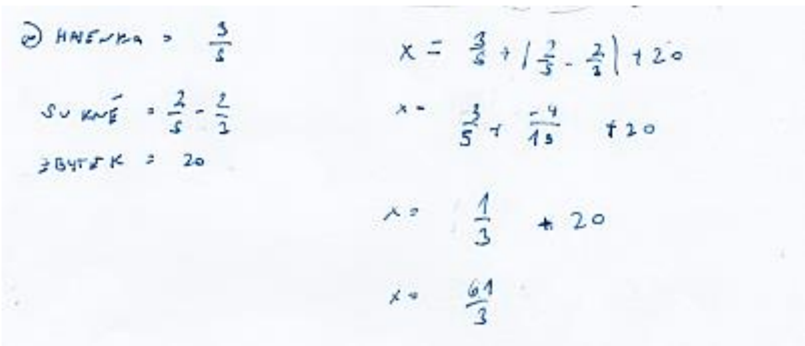
Obr. 46: Chybné žákovské řešení úlohy E3 po epoše (Julie)

Štěpán v prvním termínu sestavoval při řešení úlohy E3 matematický model (obrázek 47). Pomohl si při tom obrázkem čtverce, který reprezentoval koupenou látku ze zadání úlohy. Podle pravé strany Štěpánova modelu je zřejmé, že význam proměnné x v jeho modelu je „délka látky, kterou Jana koupila“. Při analýze levé strany Štěpánova modelu si lze všimnout, že žák nesprávně identifikoval vztah mezi objekty úlohy z části zadání „na halenku ustřihla $\frac{3}{5}$ kusu látky“ a „na sukni ustřihla $\frac{2}{3}$ ze zbývající části látky“. Místo $\frac{3}{5}x$ Štěpán píše $x - \frac{3}{5}x$ a místo $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}x$ píše $\frac{2}{3}x$. Tento model Štěpán nakonec v didaktickém testu ani nedořešil. Uvědomil si, že model není správný. Proto sestavil jiný model (obrázek 48), ve kterém se však dopustil chyb stejného druhu jako v předchozím řešení.

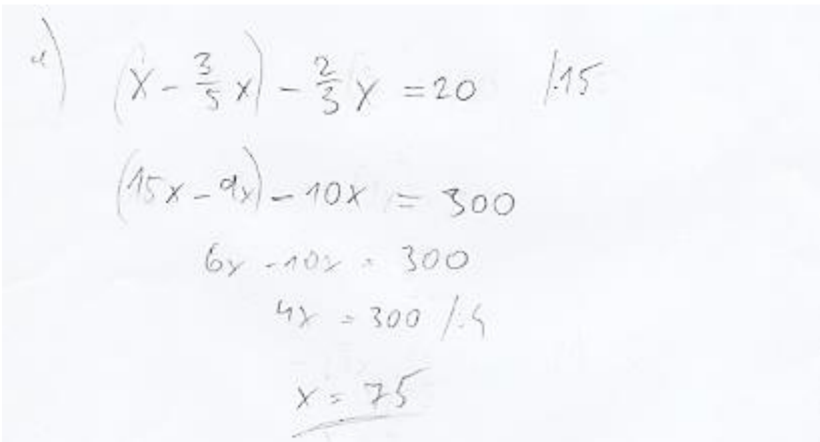
Podobně jako Štěpán uvažoval v prvním termínu Mikeš (obrázek 49). Mikeš ale v rovnici svého matematického modelu úlohy nevyjádřil délku látky, ale zbytek 20 cm. Také při analýze levé strany Mikešova modelu si lze všimnout, že žák nesprávně identifikoval vztah mezi objekty úlohy z části zadání „na halenku ustřihla $\frac{3}{5}$ kusu látky“ a „na sukni ustřihla $\frac{2}{3}$ ze zbývající části látky“. Na rozdíl od Štěpánova řešení byl Mikešův výsledek celočíselný, což ho uspokojilo a řešení považoval za správné. V tom ho utvrdil i výsledek zkoušky, kterou vykonal.



Obr. 47: Chybné žákovské řešení úlohy E3 před epochou (Štěpán)

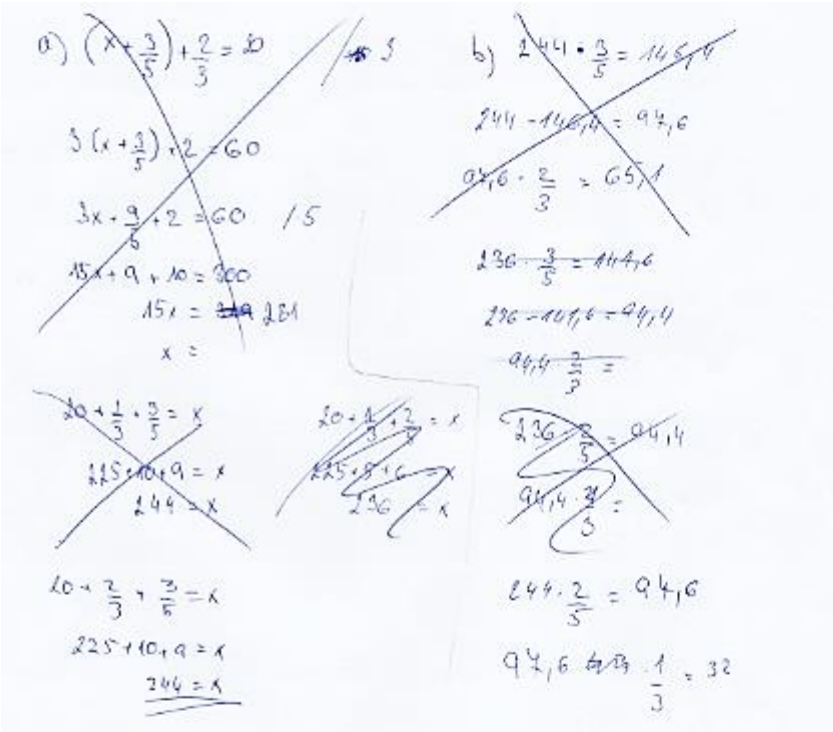


Obr. 48: Chybné žákovské řešení úlohy E3 po epoše (Štěpán)

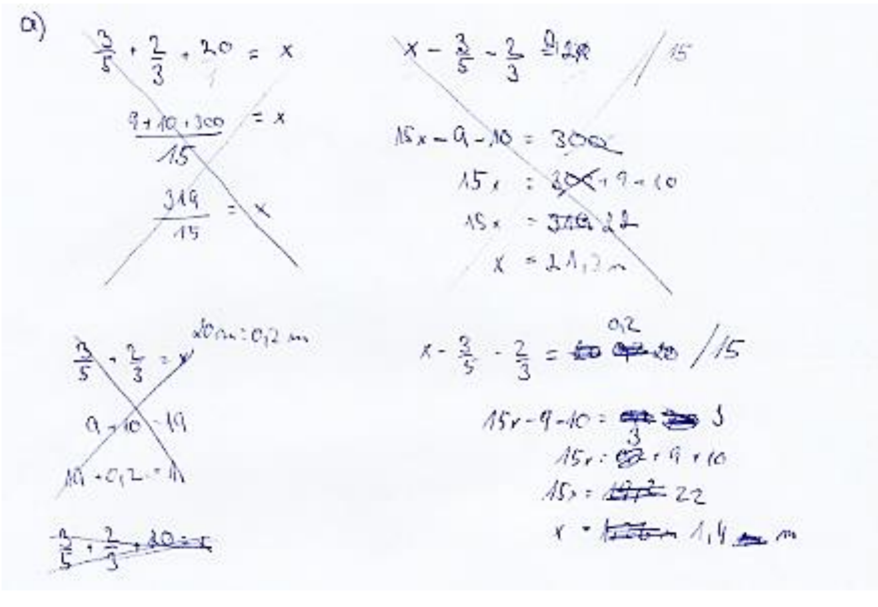


Obr. 49: Chybné žákovské řešení úlohy E3 (Mikeš)

Eva se v obou termínech pokusila úlohu E3 řešit modelováním rovnicí (obrázek 50 a 51). V obou pokusech je vidět mnoho proškrtaných modelů úlohy. Všechny modely, které Eva sestavila, mají společné to, že v nich Eva nereflektuje změnu proměnné, proměnná je v modelech statická a slouží pouze jako vyjádření pro operaci mezi numerickými údaji ze zadání úlohy. Eva neuchopila úlohu správně, protože zlomky v zadání interpretuje jako operátory, nebo pokyny k vykonání aritmetické operace s dalším zlomkem ze zadání úlohy. Zlomky v zadání Eva nepochopila ve vztahu část-celek.

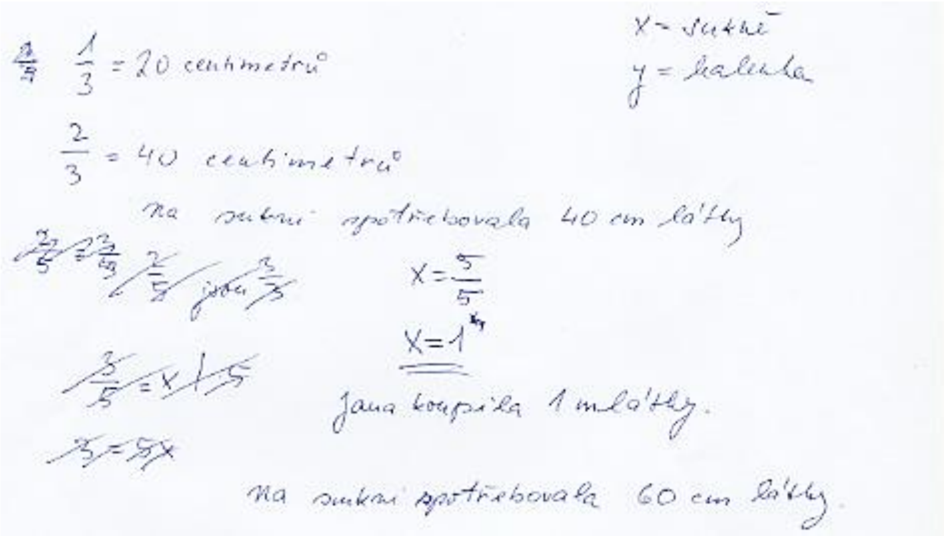


Obr. 50: Chybné žákovské řešení úlohy E3 před epochou (Eva)

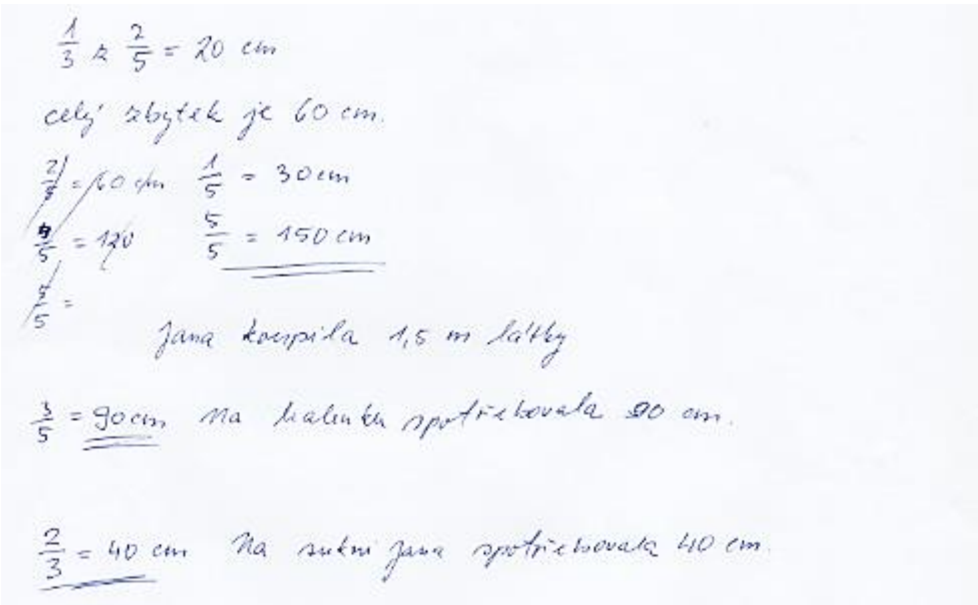


Obr. 51: Chybné žákovské řešení úlohy E3 po epoše (Eva)

Jiřina v prvním termínu (obrázek 52) správně přiřadila zbývající části látky zlomkovou část, takže správně určila délku látky spotřebované na šití sukně. Celkovou délku koupené látky Jiřina určila nesprávně jako $\frac{5}{5} = 1$ m látky. Jmenovatel zlomku $\frac{5}{5}$ vychází pravděpodobně ze jmenovatele zlomku $\frac{3}{5}$, který vystupuje v zadání jako část látky ustřižené na halenku. Zlomek $\frac{5}{5}$ Jiřina ve svém řešení použila možná proto, že si neuvědomila, že zlomek, který předtím použila ve vztahu k délce látky, měl hodnotu jmenovatele 3. Dopustila se tedy chyby z nepozornosti. Ve druhém termínu (obrázek 53) Jiřina úlohu E3 vyřešila správně.



Obr. 52: Chybné žákovské řešení úlohy E3 před epochou (Jiřina)



Obr. 53: Žákovské řešení úlohy E3 po epoše (Jiřina)

Souhrnně lze říct, že úloha E3 dělala žákům největší potíže. Z pohledu metod řešení byla nejpestřejší, došlo u ní k nejvýznamnějším změnám v řešitelských strategiích. Z pohledu správnosti došlo mezi jednotlivými termíny pouze k mírnému zlepšení.

6 Závěr

V úvodu mé diplomové práce jsem si stanovil několik cílů. Jedním z nich bylo zpracovat téma rovnic a slovních úloh tak, aby bylo vhodné pro vyučování formou epoch na waldorfské střední škole. Domnívám se, že se mi podařilo v odborných článcích a pracích najít dostatečné množství aktivit, které zpřístupňovaly témata, kterými jsme se v epochách zabývali. Patří mezi ně skládání papíru, šipkové diagramy, úloha s obsahy, geometrická metoda řešení rovnic, „důkaz“, že $2 = 1$, žákovská tvorba úloh v daném prostředí. Plán se mi však nepodařilo beze zbytku realizovat. Bohužel v posledních dnech epochy převládala frontální forma výkladu, kterou bych v příští epoše rovnic a slovních úloh vyměnil za jinou a podnětnější činnost. Zpracovat téma tak, aby bylo vhodné pro vyučování formou epoch, mimo jiné znamená vše dopředu promyslet tak, aby se činnosti žáků rytmicky střídaly. Rytmem může být způsob práce (individuální, ve dvojicích, skupinová) nebo například intenzita pracovní činnosti (žák řeší úlohy, poslouchá výklad, kreslí obrázky apod.). V tomto ohledu jsem s rytmikou v proběhlé epoše rovnic a slovních úloh spokojený. Moje spokojenost pramení hlavně ze zážitků s žáky, žáci nebyli v epoše unavení nebo otrávení, rádi se pouštěli do nových aktivit. V případě posledních epochových hodin, kdy v pojmových částech převládal frontální výklad, jakýsi rytmus ve vyučování zajistila sama struktura epochové hodiny. Po pojmové části žáci psali a potom samostatně řešili úlohy. Není to však proto ideální, proto to také uvádím mezi svými pochybeními.

Cílem druhé části mé práce bylo popsat řešitelské strategie zkoumaných žáků a zjistit, do jaké míry byly ovlivněny výukou popsanou v kapitole 4. Pro celkové vyhodnocení výsledků didaktického testu je důležité říct, že mezi dvěma didaktickými testy, které žáci psali, byl relativně krátký časový odstup tří týdnů. Důsledkem této skutečnosti může být fakt, že si žáci svá řešení z prvního termínu pamatovali.

Na základě analýzy úlohy E1 by se dalo říct, že nejvíce žáků zůstalo u metody řešení logickým úsudkem. Pětina žáků změnila strategii z řešení logickou úvahou na řešení sestavením lineární rovnice. Když jsem tuto úlohu vybral do didaktického testu, považoval jsem ji za úlohu, která svým zadáním bude pro většinu žáků nejjednodušeji řešitelná úsudkem, což se potvrdilo.

Výsledky žáků a jejich použité řešitelské strategie ze všech třech úloh změnily mezi oběma termíny nejméně u úlohy E2. Domnívám se, že žáci při prvním řešení úlohy E2 tuto úlohu řešili nejdéle, protože má nejdelší text zadání a je jediná nestandardní. Z porovnání didaktických testů mezi dvěma termíny vyplývá, že jsou jednotlivá žákovská řešení téměř identická. Domnívám se, že při této úloze žáci nejvíce spoléhali na své vzpomínky z řešení v prvním termínu. To je v rozporu s mým předpokladem, že se žáci vlivem epochy rozhodnou více pro řešení rovnicí.

I když skupina žáků, která změnila metodu řešení, byla pouze jedna, a to skupina, ve které všichni žáci přešli z metody pokus – omyl na řešení rovnicí. Tvořili ji však jen čtyři žáci. Při vytváření didaktického testu jsem se domníval, že dva vzorce, které jsou v zadání úlohy, a otázka změny maximální tepové frekvence, která vede k hledání hodnoty stejné frekvence (dva vzorce se rovnají), vytvoří podmínky pro volbu rovnice jako metody řešení.

Úloha E3 byla z hlediska řešitelských strategií nejzajímavější. Žáci úlohu řešili lineární rovnicí, logickou úvahou a graficky. V grafickém řešení žáci využili několik různých grafických modelů. Domnívám se, že tyto grafické modely souvisí se způsobem, jakým se u daných žáků zaváděly zlomky a aritmetické operace s nimi. Důvodem jsou grafické modely připomínající model čokolády, koláče nebo tyče, případně číselné osy. Úloha E3 je také jedinou, u které došlo k signifikantní změně v řešitelských strategiích žáků. Mezi jednotlivými termíny výrazně klesl počet žáků, kteří úlohu řešili rovnicí. Naopak výrazně vzrostl počet žáků řešících úlohu logickou úvahou. Klesl také počet žáků, kteří využili grafické řešení. Nárůst v metodě řešení úsudkem je pro mě pozitivním signálem toho, že činnosti v epoše, kterými jsem se snažil u žáků probudit zájem o používání úsudku jako rovnocenné metody řešení, měly na žáky vliv. Domnívám se, že nárůst je u této úlohy významný také proto, že úloha E3 patří mezi standardní, na které jsou žáci už ze základních škol zvyklí. Když jsem se žáků před epochou rovnic a slovních úloh ptal, jakými metodami řešili na základní škole slovní úlohy, většina se přihlásila k metodě řešení rovnicí. Tak signifikantní nárůst je pro mě důvodem vyslovit závěr, že výuka tématu rovnic a slovních úloh v epoše měla částečný vliv na řešitelské strategie žáků. Určitě však nepovažuji výsledky za reprezentativní.

Z řešení žáků v didaktickém testu vyplývá, že je nutno dávat důraz na vykonání zkoušky správnosti řešení.

Pro mě osobně bylo velmi přínosné zabývat se vlastní výukou tak hluboce. Velký přínos pro mě měla přítomnost hospitanta během celé epochy. Měl postřehy k jevům, které bych sám nezaznamenal. Dalším pozitivem pro mě byly zápisky z hodin, které jsem si pořizoval. Zpětný pohled na proběhlé vyučování mi lépe umožnil se zamyslet, co bych v budoucnu chtěl změnit. Metoda akčního výzkumu mi umožnila uvědomit si, že je možné nahradit frontální výklad i na místech, kde jsem to při plánování epochy nepředpokládal. Také jsem si mohl uvědomit, že jsem nekladl dostatečný důraz na kontrolu domácích úkolů. Velkým přínosem pro mě bylo poznání, že najít výbornou aktivitu do vyučování neznamená automaticky, že se v konkrétní vyučovací hodině její provedení podaří (žákovská tvorba úloh v daném prostředí), potřeboval jsem si tuto zkušenost zažít. Nemůžu opomenout detailní analýzu žákovských řešení didaktických testů.

Bylo to poprvé, kdy jsem se tak intenzivně zabýval žákovskými řešeními úloh v testech. Testy jsem opravoval často, vždy však mým cílem bylo je ohodnotit. Samozřejmě, že jsem se při běžném opravování testů snažil pozorovat řešitelské strategie žáků, avšak až při příležitosti analýzy v rámci diplomové práce, jsem je pozoroval hluboce. Benefitem, který si z analýzy žákovských řešení odnáším, je také hlubší poznání žáků, které budu ještě tři roky doprovázet studiem.

7 Seznam použitých informačních zdrojů

CARLGREN, Frans a Arne KLINGBORG. *Výchova ke svobodě: Pedagogika Rudolfa Steinera*. Praha: Asociace waldorfských škol ČR, 2013. ISBN 978-80-905222-4-4.

ČÁP, Jan. *Psychologie výchovy a vyučování*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, 1993, 415 p. ISBN 80-706-6534-3.

DIVÍŠEK, Jiří. *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989, 269 s. Učebnice pro vysoké školy (Státní pedagogické nakladatelství). ISBN 80-042-0433-3.

HEJNÝ, Milan. Zmocňování se slovní úlohy. *Pedagogika XLV*. 1995, roč. 1995, č. 4, s. 386 – 399. Dostupné z: http://pages.pedf.cuni.cz/pedagogika/?p=3229

HEJNÝ, Milan. Anatómia slovnej úlohy o veku. In: *Disputationes Scientificae Universitatis Catholicae in Ružomberok*. Ružomberok: Katolícka univerzita Ružomberok, 2003, s. 1 – 13. Dostupné z: http://math.ku.sk/data/konferenciasub/pdf2003/Hejny.pdf

HEJNÝ, Milan a Darina JIROTKOVÁ. *Matematické úlohy pro druhý stupeň základního vzdělávání: náměty pro rozvoj kompetencí žáků na základě zjištění výzkumu TIMSS 2007*. 1. vyd. Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání, 2010, 111 s. ISBN 978-80-211-0612-3.

HEJNÝ, Milan a František KUŘINA. *Dítě, škola a matematika*. Praha: Portál, 2001, 187 s. ISBN 80-717-8581-4.

HEJNÝ, Milan a Anna MICHALCOVÁ. *Skúmanie matematického riešiteľského postupu*. Bratislava: Metodické centrum v Bratislave, 2001. ISBN 80- 8052-085-2.

HOŠPESOVÁ, Alena. Řešení slovních úloh na 1. stupni ZŠ. In: *Didaktika matematiky pro 1. stupeň ZŠ* [online]. 2002 [cit. 2015-04-12]. Dostupné z:
http://www.eamos.cz/amos/kat_mat/modules/low/kurz_obsah.php?kod_kurzu=kat_mat_2951

HRUŠA, Karel. *Metodika počtů pro pedagogické fakulty*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1967.

JIROUT, Petr. Metodický komentář k obsahu výuky fyziky. *Projekt „Vzdělávání pro adaptabilitu“*. 2012, č. 1. Dostupné z: http://www.wlyceum.cz/web/projekty-esf/vzdelavani-pro-adaptibilitu3/

LENGYELFALUSY, Tomáš. Odkaz G. Polyu pre didaktiku matematiky 21. storočia. In: ŠEDIVÝ, Ondrej. *ACTA MATHEMATICA 10*. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, 2007, s. 107 – 114.

KOŠČ, Ladislav. *Psychológia matematických schopností*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1972.

KOMÁRIK, Emil. Miesto matematických znalostí v štruktúre ľudského potenciálu. In: ŠEDIVÝ, Ondrej. *ACTA MATHEMATICA 10*. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, 2007, s. 11 – 17.

KUŘINA, František. *Umění vidět v matematice*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1990. ISBN 80-042-3753-3.

MALÁČ, Jaromír. *Sbírka náročnějších úloh z matematiky*. Praha: SPN, 1967.

NEMČÍKOVÁ, Katarína, Věra OLŠÁKOVÁ, Filip ROUBÍČEK, Vladislav TOMÁŠEK, Jana VAŇKOVÁ a Eva ZELENDOVÁ. *Matematická gramotnost ve výuce* [online]. 2011 [cit. 2015-06-05]. ISBN 978-80-87000-97-7. Dostupné z:
http://www.nuv.cz/uploads/Publikace/vup/matematickagramotnost_final.pdf

NOVOTNÁ, Jarmila. Zpracování informací při řešení slovních úloh. In: HEJNÝ, Milan, Jarmila NOVOTNÁ a Naďa STEHLÍKOVÁ. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta, 2004, s. 367 – 378. ISBN 80729018931.

RAKOUŠOVÁ, Alena. *Integrace obsahu vyučování: integrované slovní úlohy, tématické vyučování, možnosti uplatnění, psychologická integrace obsahu, ukázky a praktická cvičení*. Vyd. 1. Praha: Grada, 2008, 158 s. ISBN 978-802-4725-291.

RICHTER, Tobias. *Vzdělávací plán pro 1. až 12. ročník waldorfské školy: Pedagogické pojetí a vzdělávací cíle*. Praha: Asociace waldorfských škol ČR, 2013. ISBN 978-80-905222-5-1.

ROSECKÁ, Zdena. *Algebra: učebnice pro 9. ročník*. Brno: Nová škola, 2000, 111 s. ISBN 80-728-9024-7.

RUPPELDTOVÁ, Janka. Fenomény náročnosti slovných úloh. In: *Induktívne a deduktívne prístupy v matematike*. Trnava: Trnavská univerzita, 2005, s. 223 – 229. Dostupné z: pdf.truni.sk/download?zbornik/smolenice/ruppeldtova.pdf

SEBEROVÁ, Alena. Akční výzkum v pregraduálním vzdělávání učitelů 1. stupně základní školy. *Studijní opora k inovovanému předmětu: Pedagogické problémy školní praxe 1* [online]. 2013, (1) [cit. 2015-06-27]. Dostupné z: http://projekty.osu.cz/svp/opory/pdf-seberova-akcni-vyzkum-v-pregradualnim-vzdelavani-ucitelu-1.-stupne-zakladni-skoly-adaptace.pdf

ŠEDIVÝ, Ondrej a Dušan VALLO. Prečo vyučovať slovné a konštrukčné úlohy. In: *Slovné a konštrukčné úlohy ako prostriedok k rozvoju logického myslenia*. Nitra: Fakulta prírodných vied UKF v Nitre, 2013, s. 3 – 8.
Dostupné z: http://www.km.fpv.ukf.sk/upload_publikacie/20131004_91147__1.pdf

ŠÍMA, František. *Matematizace reálných situací a slovní úlohy*. Olomouc, 2013. Dostupné z: http://theses.cz/id/cjesg3/00175150-959273041.pdf. Disertační práce. Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého v Olomouci.

ŠTĚTKOVÁ, Marie. *Nové šaty*. *Matematika pro všechny* [online]. 2015 [cit. 2015-06-20]. Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~math4all/download/M_uloha_1283_SU.pdf

TRÁVNÍČEK, Stanislav. Výuka matematiky a praxe. *Matematika, fyzika, informatika*. 2013, roč. 22, č. 3, s. 161 – 173. Dostupné z: http://www.mfi.upol.cz/index.php/mfi/issue/view/6

VYŠÍN, Jan. *Metodika řešení matematických úloh*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1962.

8 Seznam příloh