UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Obtíže žáků 7. a 8. ročníku při práci se zápornými čísly

Diplomová práce

Autor práce: **Bc. Lucie Bejčková**

Studijní obor: Učitelství všeobecně vzdělávacích předmětů pro základní školy a střední školy – matematika

Vedoucí práce: **doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.**

Praha 2015

CHARLES UNIVERSITY IN PRAGUE

FACULTY OF EDUCATION

Department od Mathematics and Mathematical Education

Grade 7 and 8 Pupils' Problems with Negative Numbers

Master's Thesis

Author: **Bc. Lucie Bejčková**

Branch of study: Training Teachers of General Subjects at Lower and Higher Secondary Schools Mathematics

Supervisor: **doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.**

Prague 2015

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně pod vedením doc. RNDr. Nadi Vondrové, Ph.D. a s použitím uvedené literatury. Všechny použité prameny byly řádně citovány a práce nebyla použita k získání jiného či stejného titulu.

Byla jsem seznámena s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Karlova má právo uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Karlova oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Souhlasím s tím, že práce bude prezenčně zpřístupněna v knihovně Katedry matematiky a didaktiky matematiky, Pedagogické fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

V Praze dne 17. 7. 2015 Podpis ………………………

Lucie Bejčková

Děkuji doc. RNDr. Nadě Vondrové, Ph.D. za odborné vedení mé diplomové práce, za spolupráci, věcné připomínky, poskytnuté rady a čas, který mi věnovala při konzultacích. Děkuji učitelům i žákům základních škol za rozhovory, bez nichž by tato práce nemohla vzniknout. Děkuji dále rodině a přátelům za podporu při studiu a zejména za psychickou podporu, čas a trpělivost.

Název

Obtíže žáků 7. a 8. ročníku při práci se zápornými čísly

Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá tématem záporná čísla, konkrétně strategiemi a obtížemi žáků sedmých a osmých ročníků na druhém stupni základních škol při řešení vybraných úloh se zápornými čísly. Je rozdělena na teoretickou a experimentální část.

Teoretická část práce je věnována problematice záporných čísel, jejich vývoji, didaktické náročnosti a práci s nimi. Práce se dále zabývá vybranými mezinárodními srovnávacími i zahraničními výzkumy, které zahrnují problematiku záporných čísel. Nejvíce je pak zastoupena část, kterou tvoří analýza učebnic matematiky, podle nichž jsou vyučováni žáci na českých základních školách, zaměřená na problematiku záporných čísel.

Podstatnou částí práce je experimentální část, jejímž cílem je identifikovat žákovské obtíže a analyzovat chyby při manipulaci se zápornými čísly. Výzkumu se účastnilo celkem 185 žáků sedmých a osmých ročníků tří různých základních škol. Metodou sběru dat bylo písemné testování, které bylo průběžně doplňováno komentáři žáků. Soubor testových úloh pro žáky byl vytvořen na základě prostudování uvedených výzkumů a učebnic matematiky. Získaná data byla následně analyzována a zpracovávána po jednotlivých úlohách. Chyby byly identifikovány a nejčastější a nejvýznamnější byly ilustrovány konkrétními řešeními žáků. Závěrem jsou shrnuty možné příčiny nejčastějších chyb a navržen didaktický přístup k dané problematice.

Klíčová slova:

Záporné číslo, analýza učebnic, modely záporných čísel, početní operace, chyba v matematice, TIMSS

Title:

Grade 7 and 8 Pupils' Problems with Negative Numbers

Abstract:

This diploma thesis deals with the topic negative numbers, especially with strategies and difficulties of 7th and 8th grade primary school pupils when solving selected tasks with negative numbers. This thesis is divided into theoretical and experimental parts.

The theoretical part deals with negative numbers, their development, didactic difficulty and work with them. The thesis deals with selected international comparative and foreign researches with the focus on negative numbers. The most extensive part of the thesis contains an analysis of mathematics textbooks used in schools in the Czech Republic with the focus on negative numbers.

The experimental part, which aim is the identification of pupils' difficulties and the analysis of mistakes they make when working with negative numbers, is the key part of the thesis. 185 pupils of 7th and 8th grade from three different schools took part in the research. The methodology consisted of the preparation of a didactic test on negative numbers and assigning it to the pupils. After completing the test, selected pupils were asked to explain their written solutions. The didactic test was prepared on the basis of mentioned research results and the analysis of mathematics textbooks. The data were analysed in terms of pupils' strategies and mistakes. The thesis presents a classification of the mistakes and the most frequent and important ones are illustrated by pupils' solutions. The conclusion summarizes potential causes of the most frequent mistakes and suggests didactic approach to overcome them.

Keywords:

Negative number, analysis of textbooks, negative number models, mathematical operation, mistakes in mathematics, TIMSS

Obsah

Úvod

V současné době z mezinárodních srovnávacích výzkumů plyne, že matematická gramotnost českých žáků spíše klesá. Mezi největší problémy žáků patří dle mého mínění přístup a nedostatečná motivace ke studiu. Žáci se stále častěji dotazují na praktickou využitelnost matematiky, která pro ně není dostatečně atraktivní vědou. Jako budoucí učitelka matematiky si tak kladu otázku, jak žákům více zpřístupnit hodiny matematiky, a svou prací bych chtěla přispět ke zlepšení kvality výuky matematiky.

Tématem mé diplomové práce jsou obtíže žáků 7. a 8. ročníku při práci se zápornými čísly. Toto téma jsem si vybrala především proto, že se domnívám, že záporná čísla patří mezi problematické a náročné oblasti. Žáci je však musí zvládnout, protože se zápornými čísly chtě nechtě musejí v běžném životě pracovat. Jak uvádí mezinárodní šetření TIMSS, čeští žáci se v matematice mezi léty 1995 až 2007 výrazně zhoršili. Největší pokles se však týká především algebry a z výzkumů vyplývá, že v aritmetice jsou žáci v mezinárodním kontextu nadprůměrní. Zajímalo mě tedy, jakých výsledků dosáhnou žáci v mé studii.

Číselný obor přirozených čísel se na druhém stupni základní školy rozšiřuje na obor čísel celých. Jedná se především o porozumění jejich uspořádání, velikosti a operacím s nimi. Ne vždy však žáci tohoto porozumění dosáhnou. Hlavním cílem mé práce je tedy identifikovat obtíže a chyby žáků sedmých a osmých ročníků základní školy při počítání se zápornými čísly.

V teoretické části práce jsem se zabývala problematikou záporných čísel, jejich vývojem a didaktickou náročností při práci s nimi. Dále jsem se zaměřila na problematiku záporných čísel ve vybraných mezinárodních srovnávacích výzkumech. Následně jsem vytvořila analýzu učebnic z hlediska zavádění pojmu záporného čísla a zaměřila jsem se na zavedení jednotlivých matematických operací se zápornými čísly. Do analýzy učebnic jsem zařadila i učebnice, podle kterých jsou vyučováni žáci účastnící se mého výzkumu.

Hlavním cílem experimentální části práce je podrobná analýza a identifikace žákovských chyb při manipulaci se zápornými čísly. Do výzkumu jsem zařadila 185 žáků sedmých a osmých ročníků tří různých základních škol. Jako metodu sběru dat jsem zvolila písemné testování, které bylo doplněno o komentáře vybraných žáků. Soubor testových úloh pro žáky jsem vytvořila na základě prostudování vybraných výzkumů a učebnic matematiky. Získaná data byla následně analyzována a zpracovávána po jednotlivých úlohách. Chyby byly identifikovány a nejčastější a nejvýznamnější byly ilustrovány konkrétními řešeními žáků. Následně jsem navrhla takový didaktický přístup k problematice záporných čísel, který by mohl žákovské obtíže potlačit.

1 Teoretická část

1.1 Záporná čísla

Záporné číslo je takové reálné číslo, které je menší než nula. Nachází se tedy na číselné ose vlevo od nuly. Můžeme si ho představit na modelu jako dluh, chybějící prvek, zpětný pohyb či hodnotu pod nulou na stupnici teploměru.

1.2 Vývoj záporných čísel

M. Hejný (1988: 83–85) uvádí, že budování pojmu záporné číslo trvalo asi 1 500 let. Jedna z prvních zmínek o záporných číslech se podle něj objevuje v řecké matematice u Diofanta, u něhož bylo záporné číslo pouhým operátorem a nikdy se neobjevovalo v výsledku. Zanedlouho poté se záporná čísla objevují v čínské učebnici matematiky nazývané Matematika v devíti knihách, která je datována k prvnímu století našeho letopočtu. Zde jsou uvedeny i první početní operace s kladnými a zápornými čísly. Jedná se však pouze o sčítání a odčítání, první zmínky o násobení se objevují až v Indii v 7. století našeho letopočtu. A teprve v 17. a 18. století se záporná čísla dostávají do Evropy a i tam se zavádějí záporná čísla především díky úřednickým potřebám (nutnost zapsat dluh). Majetek a dluh už je ale chápán na abstraktnější úrovni, a proto je nutné hledat další modely záporných čísel, které přinášejí především geometrie a fyzika. Newton interpretuje záporné veličiny ve fyzice a Descartes zavádí geometrickou orientaci a zabývá se záporným řešením algebraických rovnic (tamtéž).

1.3 Didaktická náročnost záporných čísel

Již na prvním stupni ZŠ se obor přirozených čísel rozšiřuje dvěma směry. Jedná se o zlomky a desetinná čísla a následně záporná čísla. Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání platný od roku 2013 dostupný na stránkách (www.rvp.cz), uvádí již v druhém období prvního stupně v tematickém okruhu **Čísla a početní operace** očekávaný výstup: porozumění významu znaku „– „ pro zápis celého záporného čísla a jeho vyznačení na číselné ose. Dále poté pro druhý stupeň ZŠ uvádí RVP tematický okruh **Číslo a proměnná**, kde se od žáka očekává, že bude provádět početní operace v oboru celých a racionálních čísel a užívat je ve výpočtech. RVP zařazuje učivo (celá čísla – čísla navzájem opačná a číselnou osu) na druhý stupeň základní školy (www.rvp.cz). M. Hejný (2004) si pokládá dvě otázky spojené se zápornými čísly: Jaké jsou příčiny nízkého porozumění záporným číslům? A jak je možné daný stav měnit k lepšímu? Záporná čísla jsou z matematického i didaktického hlediska velmi náročná. U záporných čísel je problém už v samotném pojmu, v jeho přijetí a zrovnoprávnění záporných čísel s čísly kladnými. Autor specifikuje metody zkoumání žákovských představ o záporném čísle, kde uvádí, že až na výjimky je většina didaktické literatury zaměřena na povrchovou vrstvu práce žáka se znaménky.

Autor dále tyto myšlenky rozebírá a představuje konkrétní příklady, na kterých ilustruje problém představy o záporném číslu. Jako hlavní příčiny náročnosti záporných čísel jmenuje M. Hejný:

1. **Řídký výskyt záporných čísel v reálném světě.** Záporná čísla se objevují na teploměru či při počítání zisků a ztrát ve finančnictví. Záporné číslo často bývá převedeno na kladné v opozitní kvalitě (je pět stupňů pod nulou). Základní model přirozeného čísla (počet předmětů) nemá v oblasti záporných čísel ekvivalent. Záporné číslo proto žák nemůže vnímat smysly.

2. **Náhlý vpád záporných čísel do výuky.** Záporná čísla vstupují do výuky bez náležité propedeutické přípravy. Je vhodné žáky seznamovat se záporným číslem již na prvním stupni (což by se podle upraveného RVP pro ZV mělo dít).

3. **Způsob výuky záporných čísel zaměřený na nácvik pravidel.** Pravidla bývají zaváděna nevhodně a po žácích je požadováno učení nazpaměť. Neklade se důraz na porozumění.

4. **Faktická nepotřebnost záporných čísel.** Autor si klade otázku, zda je opravdu nutné učivo záporných čísel na základní školu zařazovat, když se bez nich matematici obešli až do poloviny 18. století. Na to sám odpovídá, že ano (viz také následující citát).

Závěrem kapitoly o záporných číslech autor uvádí několik myšlenek, důležitých pro samotnou koncepci výuky.

> Jsme přesvědčeni, že záporné číslo i číslo nula patří na základní školu (a) jako nástroj na uchopení jistých reálných i abstraktních situací i (b) jako nástroj na porozumění těmto situacím.
>
> 1. Pojem záporné číslo nestačí budovat pomocí pravidel na zacházení se zápornými čísly. Je třeba budovat jej ve směru strukturálním i ve směru sémantickém. Jinak bude poznání trpět formalizmem.

2. Propedeutiku pojmu záporné číslo je třeba začínat již v 1. ročníku základní školy, aby bylo dost času na získání dostatečného počtu separovaných modelů schopných dovést žáka k objevu generických modelů.

3. Záporným číslům v propedeutickém období není nutno věnovat při vyučování mnoho času. Spíše je třeba ukázat žákům situace, nejlépe hry, jimiž se mohou zabývat i mimo školu. Každý měsíc by se ale měla idea záporného čísla nebo myšlenka, která tuto ideu předchází, ve vyučování objevit aspoň jednou, i když krátce; takto po celou dobu pěti let.

4. Impuls k zaměření pozornosti třídy na záporné číslo, který vzejde od žáka, je cennější než impuls od učitele.

(Hejný, 2004: s. 342)

1.4 Modely záporných čísel

S propedeutikou záporných čísel je zapotřebí začít již na prvním stupni a opakovaně žákům předkládat tuto problematiku v nejlepším případě nenásilně formou hry, aby mohlo dojít k vytvoření separovaných modelů[1], které následně povedou k tvorbě generických modelů[2] (v smyslu teorie generických modelů). M. Hejný (2004) uvádí několik modelů záporných čísel:

1. modely záporných mnohostí (dluhy, nedostatky),
2. záporné operátory (odebírání, návrat, chůze zpět),
3. záporné adresy (teploměr, výtah, číselná osa).

Tyto modely můžeme rozdělit na modely sémantické a modely strukturální.

1.4.1 Sémantické modely (Hejný, 2004)[3]

U sémantických modelů jde především o to, vybudovat u žáků představu o tom, co je záporné číslo. Dva typy modelů čísla (jméno a počet), které žáci znají, se ale se záporným číslem

[1] Separovaný model (také izolovaný model) – jde o postupné nabývání zkušeností s konkrétními případy budoucího poznání.
[2] Generický model (také univerzální model) – vzniká, když dojde k vytvoření struktury separovaných modelů. Jedná se o poznatek, který dává vhled do množiny separovaných modelů a vyjadřuje jejich podstatu. Často je prototypem části nebo všech separovaných modelů.
[3] Celý oddíl je zpracován podle publikace (Hejný, 2004). Nejde o doslovné citace, text jsem upravovala, proto není odsazen jako citát.

bohužel neztotožňují. Nelze mluvit o záporném množství, ani nám nejsou známa záporná jména. Pro záporná čísla můžeme využít těchto modelů:

Adresa je údaj místa nebo času vyjádřený záporným číslem. Separovanými modely jsou reálné stupnice např. teploměr nebo stupnice pater ve výtahu. Generickým modelem je v tomto případě číselná osa, která je vnímána ve dvou tvarech svislá a vodorovná.

Veličina je uspořádaná trojice (číslo, jednotka, objekt). Přestože záporné veličiny existují, na prvním stupni ZŠ se s nimi žáci povětšinou nesetkávají. Jednu z výjimek tvoří právě teplota měřená ve stupních Celsia, ale problémem je, že žáci ji nevnímají jako veličinu, ale jako adresu na stupnici teploměru. Druhou výjimkou je kapitál měřený v korunách, finanční model některé žáky natolik osloví a zaujme, že si z něj podvědomě vytvářejí generický model. S další zápornou veličinou se žáci setkávají až ve vyšších ročnících, většinou se jedná o orientovaný úhel. Dále se mohou studenti (zpravidla až na vysoké škole) setkat také s orientovaným objemem či obsahem v integrálním počtu.

Operátor porovnání měří kvantitativní rozdíl dvou adres, mohutností nebo operátorů. V tomto případě lze použít záporného čísla, ale běžně se to nedělá. Málo kdo by uvedl „jsem o – 5 cm vyšší než Marek“. Většinou by bylo řečeno „ jsem o 5 cm menší než Marek“. Podobně je to s dluhy. Neřekneme „dlužíš mi – 50 korun“ ale „dlužím ti 50 korun“. Přirozeně se záporná čísla využívají pouze při porovnávání s jedním pevným údajem. Například jedná-li se o aritmetický průměr „ Na stránce je 750 slov na padesáti řádcích, na jednom řádku je tedy průměrně 15 slov. Na třetím řádku je pouze 12 slov, tedy odchylka od průměru je – 3.“ Úlohy tohoto typu mohou být propedeutikou statistiky.

Operátor změny měří změnu adresy, mohutnosti nebo operátorů. I v tomto modelu dochází k použití záporného čísla zřídka, především však, jedná-li se o více změn. Například žák stojí na červeně označeném schodu a má se dostat do úrovně – 7 dostává různé povely 3 nahoru, 2 dolů, 5 nahoru atd. a vše si zaznamenává. Pokud používáme jedinou změnu, záporné číslo nevyužijeme. Ovšem některé žáky tím motivujeme k vytvoření vlastních opisů, které poté nazýváme opozitními modely.

Opozitní model je takový, ve kterém vystupují čísla dvou různých kvalit: majetek x dluh, vpravo x vlevo, vpřed x vzad atd. Například výrok „Pepík dal 2 vlastní góly“ byl změněn na „Pepík dal – 2 góly“. Někdo však může namítnout: „Kdyby dal Pepík i 2 góly soupeři, pak 2 – 2 = 0, což není pravda, protože Pepík dal góly 4.“ Jak popisuje Hejný, někteří žáci vytvářeli i domněle opozitní modely jako noc x den, chytrý x hloupý. Debaty žáků o opozitních modelech jim dovolují vstupovat hlouběji do představy o záporném čísle.

Model panáček může být pro některé žáky generickým, protože se ukazuje jako nejúčinnější nástroj na porozumění aritmetickým operacím se zápornými čísly. Model pracuje zároveň s adresami a operátory. Na začátku máme dánu číselnou osu a panáčka P, který se pohybuje po číselné ose (sčítá i odčítá). Pracujeme tedy s čísly dvou typů. Adresy představují čísla zobrazená na číselné ose a operátory představují čísla udávající počet kroků, které panáček P dělá (kladné číslo – počet kroků vpřed, záporné číslo – počet kroků vzad). V tomto modelu se řídíme čtyřmi základními pravidly:

1. Nápis čteme zleva doprava. První číslo je adresa, na kterou se P postaví tváří k +∞.
2. Každé další číslo nápisu je operátor určující počet kroků, které P udělá.
3. Objeví-li se v nápisu mínus před závorkou, udělá P čelem vzad.
4. Ukončení závorky, před kterou bylo mínus, znamená opět příkaz čelem vzad.

Příklad: Výpočet 2 – 1 – (–7 + 4) + 2 = 6 (tab. 1).

Tab. 1: Popis akce panáčka daného výpočtu

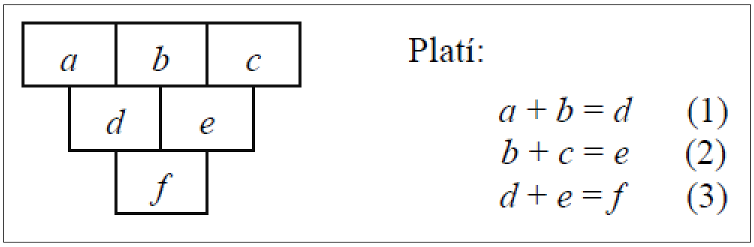
Rozklad zápisu na jednotlivé prvky							Akce panáčka P
2							P se postaví na číslo 2 tváří k + ∞
	– 1						P udělá krok vzad, je na čísle 1 tváří k +∞
		– (					P udělá čelem vzad, je na čísle 1 tváří k –∞
			–7				P udělá 7 kroků vzad, je na čísle 6 tváří k –∞
				+ 4			P udělá 4 kroky vpřed, je na čísle 4 tváří k –∞
					)		P udělá čelem vzad, je na čísle 4 tváří k +∞
						+ 2	P udělá 2 kroky vpřed, je na čísle 6 tváří k +∞

Tento model je mezi žáky velmi oblíbený, protože ho lze zavádět formou divadelní inscenace. Jeden žák stojí na číselné ose a koná vše podle pokynů spoluhráčů. Je vhodné začínat s jednoduchými pokyny a pozorovat, na co žáci přicházejí. V ideálním případě dojde k dokreslení číselné osy směrem k – ∞ a také k zavedení povelu „čelem vzad“. Pokud na to žáci nepřijdou sami, musí je k tomu učitel vhodnými povely dovést.

1.4.2 Strukturální modely

U strukturálních modelů jde především o budování struktury celých čísel, kde nejsou záporná čísla v hlubokém ústraní. Strukturální porozumění záporným číslům poskytují žákům situace, ve kterých se záporná čísla objevují v daném aritmetickém kontextu např. sčítací trojúhelník, tramvaj či posloupnost vztahů (záporné číslo je dominantní jako pojem).

Sčítací trojúhelník se řídí pravidly na obr. 1; pod každou dvojicí sousedních čísel je jejich součet. V trojúhelníku můžeme využívat čísla přirozená, celá, zlomky a další, záleží na tom, jaké učivo chceme v dané chvíli procvičovat.



Obr. 1: Ukázka sčítacího trojúhelníku

Tramvaj je hra, která umožňuje žákům pracovat s větším množstvím dat. Učitel vypráví příběh, jak do tramvaje nastoupí na první zastávce dané množství cestujících, na každé zastávce určitý počet cestujících nastoupí, či vystoupí. Žáci si průběh vyprávění mohou zaznamenávat. Když dojede tramvaj na konečnou zastávku, žáci mají uvést, kolik cestujících z tramvaje vystoupí. Učitel poté může pokládat různé další otázky např. „Kolik cestujících po cestě do tramvaje přistoupilo?“, „Kdy bylo v tramvaji nejvíce lidí?“, „Kolik cestujících bylo v tramvaji při příjezdu do páté zastávky?“ apod. K této hře existuje několik modifikací, z nichž neznámější je ta, kdy žáci mají určit počet lidí v tramvaji na první zastávce. Přínos této hry v ohledu matematickém je: zvýšení porozumění číslu ve funkci operátoru změny, z vytvořených záznamů vyvozovat další potřebné údaje a schopnost pomocí tabulky evidovat demonstrovaný proces.

Posloupnosti vztahů (číselný had). Jedná se o úlohy, kde je nedokončená řada čísel a platí zde nějaká zákonitost. Žáci mají za úkol najít další čísla, která by v řadě následovala. Tuto hru můžeme modifikovat na hru „najdi další vztah“ a její příklad můžeme vidět v tab. 2. V sloupcích jsou uvedeny posloupnosti vztahů a úkolem žáka je uvést další vztahy. Hru lze doplnit dalšími otázkami, ale hlavním cílem je překonání předsudku, že záporné číslo je ilegálním objektem. Dochází k přirozenému prolínání kladných a záporných čísel a zároveň jsou dodržována všechna aritmetická pravidla.

Tab. 2: Ukázka ze hry „najdi další vztah“

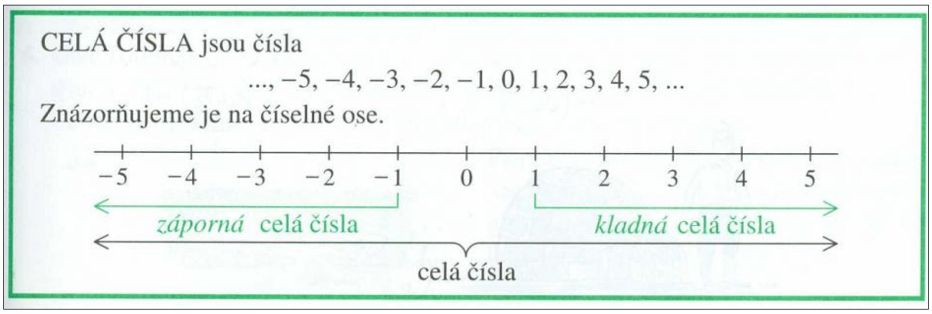
5 – 1 + 6 = 10	4 – 1 + 6 = 9	3 + 2 + 1 = 6
5 – 2 + 7 = 10	4 – 2 + 6 = 8	4 + 3 + 2 – 1 = 8
5 – 3 + 8 = 10	4 – 3 + 6 = 7	5 + 4 + 3 – 2 – 1 = 9
5 – 4 + 9 = 10	4 – 4 + 6 = 6	6 + 5 + 4 – 3 – 2 – 1 = 9
5 – 5 + 10 = 10	4 – 5 + 6 = 5	7 + 6 + 5 – 4 – 3 – 2 – 1 = 8
…	…	…

1.5 Analýza učebnic z hlediska záporných čísel

V tomto oddíle se zaměřím na analýzu učebnic matematiky, které jsou dnes nebo byly v minulosti využívány k výuce matematiky na základních školách či nižších ročnících víceletých gymnázií. V analýze se zaměřuji především na části učebnic, jejichž obsah je spjat s problematikou záporných čísel. Za cíl si kladu porovnat přístupy jednotlivých autorů k zavedení záporných čísel a zavedení početních operací se zápornými čísly. Ráda bych také poukázala na didaktický záměr autorů, typy úvodních, procvičovacích a shrnujících úloh.

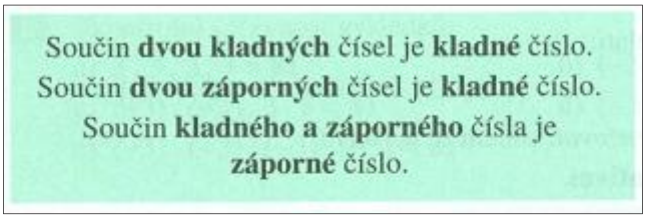
1.5.1 Matematika autorské dvojice Odvárko a Kadleček (nakladatelství Prometheus)

Autoři využívají v učebnici pouze dvě barvy černou a zelenou, tento fakt činí učebnici relativně přehlednou. K přehlednosti velmi přispívají ucelené kapitoly, které jsou členěny do podkapitol věnujících se konkrétní části celku doplněné o minimum ilustrací. Nové poznatky pro žáky autoři uvádějí v zeleně ohraničených rámečcích (obr. 2).



Obr. 2: Rámeček uvádějící nové poznatky

Dále autoři v učenici používají zelené podbarvené rámečky, které žáky upozorňují na důležitá fakta. Autoři však upozorňují, že není nutno se je učit zpaměti (obr. 3).


Součin **dvou kladných** čísel je **kladné** číslo.
Součin **dvou záporných** čísel je **kladné** číslo.
Součin **kladného a záporného** čísla je **záporné** číslo.

Obr. 3: Rámeček s důležitými fakty

Na konci učebnice jsou uvedeny klíčové kompetence a výstupy žáků, jak je známe z RVP. Dále se zaměřím především na záporná čísla, se kterými se žáci sedmého ročníku poprvé setkávají v kapitole **4 Celá čísla** a která jsou zde zavedena na modelu teploměru.

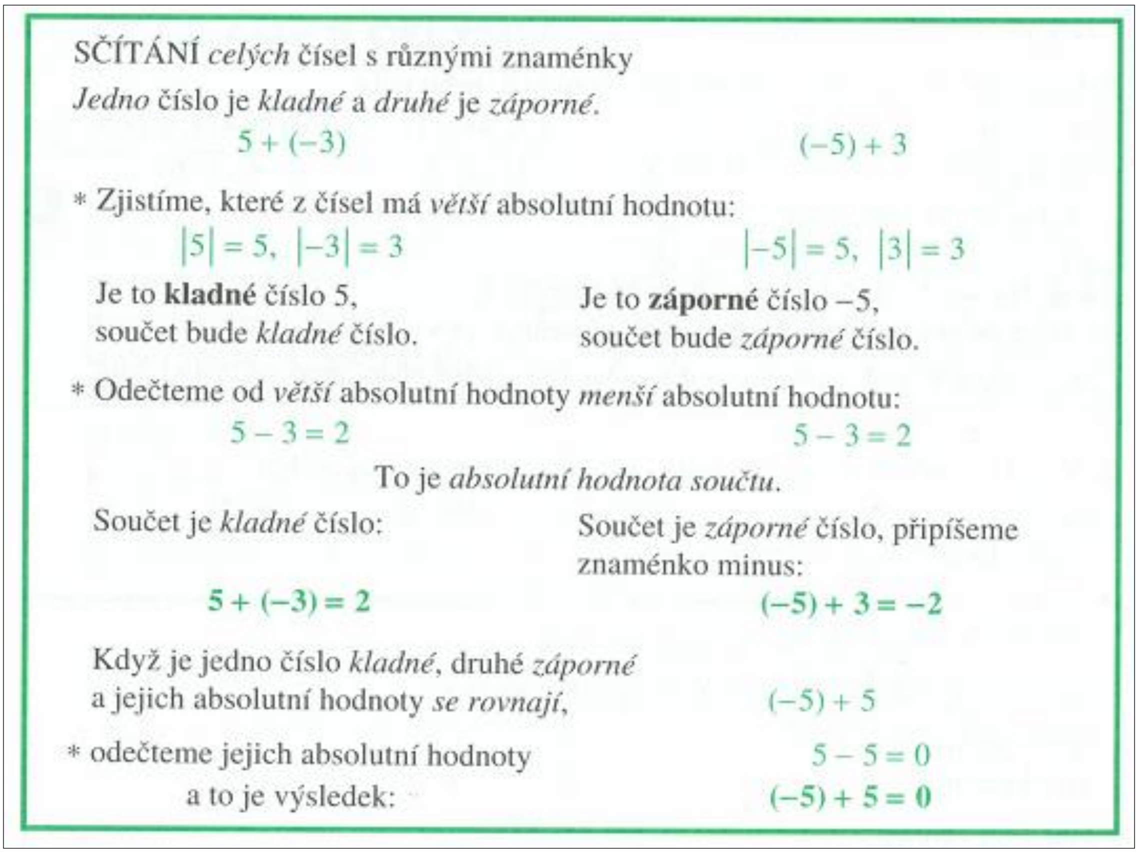
Se zápornými čísly se žáci setkávají bezprostředně poté, co se naučí počítat se zlomky. Motivační úloha je zde volena velmi dobře, protože teploměr není pro žáky novinkou. Hned poté je zobrazena číselná osa, kde jsou vyznačena kladná čísla, záporná čísla a nula (autoři upozorňují na to, že nula nepatří ani ke kladným, ani k záporným číslům, ale jedná se o číslo celé). Je zde také uveden fakt, že kladná celá čísla jsou přirozená čísla, která už žáci znají z předchozího učiva.

Dále autoři uvádějí několik cvičení aritmetického typu, ve kterých žáci pracují s číselnou osou a teploměrem se záměrem procvičit a upevnit nové učivo. A jsou zde zařazeny také reálné příklady z běžného života – kolísání výšky hladiny vody, otáčení hřídele motoru (odchylky od normálu) či spotřeba elektrické energie (odchylky od průměrné spotřeby). Následně autoři zavádějí v učebnici absolutní hodnotu celých čísel pomocí číselné osy a délkové jednotky. Poté následuje několik cvičení na určování absolutních hodnot čísel a také jsou zde zařazeny jednoduché početní příklady s absolutní hodnotou.

Následně je zaveden pojem opačné číslo a v další části kapitoly se autoři věnují porovnávaní celých čísel, kde nabízejí dvě možnosti: porovnávání pomocí uspořádání na číselné ose nebo porovnávání absolutních hodnot čísel. V učebnici je dle mého názoru dostatek příkladů k procvičení a důležité také je, že je zde na každé straně uváděna číselná osa, která přispívá k názornosti pro žáky. Dále poté v pracovním sešitě, který k učebnici patří, je uvedeno dostatečné množství příkladů k procvičení.

V následující kapitole, *Počítáme s celými čísly,* se autoři věnují početním operacím. Jako první je zde zavedeno sčítání. Nejdříve je uvedena motivační úloha. Jedná se o příklad „házení šipek na terč“. Pokud se hráč trefí do terče, získává kladné body, když hráč terč netrefí, obdrží za tento hod – 2 body. Výsledky jednotlivých her (součty bodů) znázorňují žáci na číselné ose. Sčítání celých čísel pak vysvětluje obr. 4, a to pomocí absolutní hodnoty. Dále jsou zařazena různá cvičení, která vedou žáky k využití komutativního a asociativního zákonu při sčítání.

Odčítání celých čísel je také zavedeno na modelu číselné osy, a to úlohou zabývající se změnou denních teplot. Úloha nabízí žákům několik teplotních rekordů naměřených na několika místech světa a žáci mají za úkol určit, o kolik stupňů je teplota na místě A vyšší než na místě B, k čemuž využívají odčítání celých čísel. Následně autoři uvádějí několik procvičovacích úloh a přidávají tabulku se znaménkovými pravidly, kde jsou uvedeny konkrétní příklady i zobecnění (tab. 3).



SČÍTÁNÍ *celých* čísel s různými znaménky

Jedno číslo je *kladné* a *druhé* je *záporné*.

$5 + (-3)$ $\quad\quad$ $(-5) + 3$

* Zjistíme, které z čísel má *větší* absolutní hodnotu:

$|5| = 5,\ |-3| = 3$ $\quad\quad$ $|-5| = 5,\ |3| = 3$

Je to **kladné** číslo 5, součet bude *kladné* číslo.

Je to **záporné** číslo -5, součet bude *záporné* číslo.

* Odečteme od *větší* absolutní hodnoty *menší* absolutní hodnotu:

$5 - 3 = 2$ $\quad\quad$ $5 - 3 = 2$

To je *absolutní hodnota součtu.*

Součet je *kladné* číslo:

$\mathbf{5 + (-3) = 2}$

Součet je *záporné* číslo, připíšeme znaménko minus:

$\mathbf{(-5) + 3 = -2}$

Když je jedno číslo *kladné*, druhé *záporné* a jejich absolutní hodnoty *se rovnají*,

$(-5) + 5$

* odečteme jejich absolutní hodnoty a to je výsledek:

$5 - 5 = 0$

$\mathbf{(-5) + 5 = 0}$

Obr. 4: Sčítání celých čísel

Tab. 3: Znázornění znaménkových pravidel

Znaménková pravidla. Pro všechna celá čísla a, b platí:	
$a - (-b) = a + b$	$1 - (-4) = 1 + 4$
$a - b = -(b - a)$	$3 - 7 = -(7 - 3)$
$(-a) + (-b) = -(a + b)$	$(-2) + (-3) = -(2 + 3)$

Dále jsou zařazena procvičovací cvičení, která vedou žáky k využití komutativního a asociativního zákonu při násobení. Autoři také poukazují na distributivní zákon násobení vzhledem ke sčítání (tab. 4).

Tab. 4: Matematické zákony

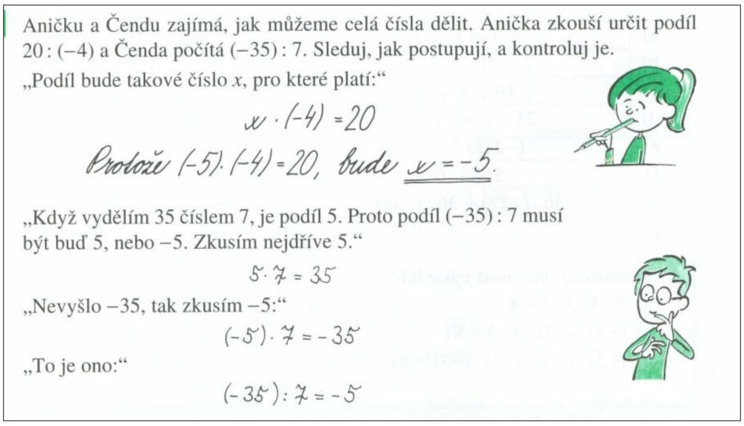
Násobení je komutativní.	$a \times b = b \times a$	$(-3) \times (-2) = (-2) \times (-3)$
Násobení je asociativní.	$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$	$[(-3) \times (-2)] \times 4 = (-3) \times [(-2) \times 4]$
Násobení je distributivní vzhledem ke sčítání.	$a \times b + a \times c = a \times (b + c)$	$(-3) \times 2 + (-3) \times 4 = (-3) \times (2 + 4)$

Následuje zavedení násobení celých čísel, které je nejdříve uvedeno motivační úlohou „risk je zisk“, kde žáci za každou špatnou odpověď získávají – 100 bodů, a násobení tak převádějí na sčítání více záporných čísel. Násobení je dále ilustrované pomocí tabulky s výpočty (obr. 5), kde si žáci mají všímat výsledků, vysledovat nějakou pravidelnost a tu využít pro doplnění výsledků na místo otazníků. Žáci porovnávají některé součiny a vyvozují tak znaménková pravidla pro násobení celých čísel.

$$\begin{array}{rcl} 4\,.\;3 &=& 12 \\ 4\,.\;2 &=& 8 \\ 4\,.\;1 &=& 4 \\ 4\,.\;0 &=& 0 \\ 4\,.\,(-1) &=& -4 \\ 4\,.\,(-2) &=& -8 \\ 4\,.\,(-3) &=& -12 \end{array} \qquad \boxed{-4} \qquad \begin{array}{rcl} 4\,.\,(-3) &=& -12 \\ 3\,.\,(-3) &=& -9 \\ 2\,.\,(-3) &=& -6 \\ 1\,.\,(-3) &=& -3 \\ 0\,.\,(-3) &=& ? \\ (-1)\,.\,(-3) &=& ? \\ (-2)\,.\,(-3) &=& ? \\ (-3)\,.\,(-3) &=& ? \\ (-4)\,.\,(-3) &=& ? \end{array} \qquad \boxed{+3}$$

Obr. 5: Zavedení násobení celých čísel

Dělení celých čísel je zavedeno na konkrétních aritmetických výpočtech, žáci procházejí řešení Čendy a Aničky (obr. 6), a všímají si tak vlastností dělení celých čísel, které jsou následně shrnuty do přehledné tabulky.



Obr. 6: Úvodní výpočty při zavádění dělení celých čísel

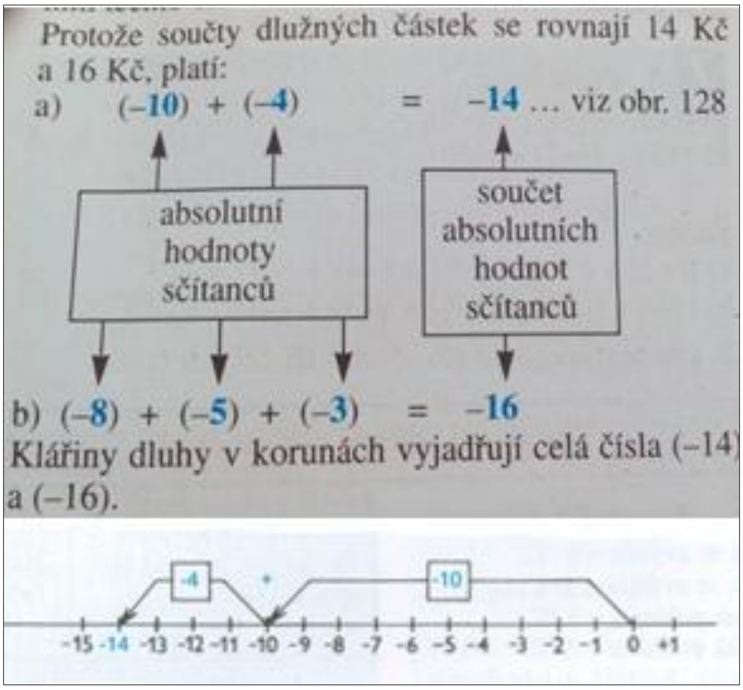
V závěru kapitoly jsou uvedeny úlohy k procvičení shrnující všechny nové poznatky. Dostatek úloh k procvičení jednotlivých úkonů je zařazen do pracovního sešitu, který k učebnici náleží.

1.5.2 Matematika autorů Trejbal, Jirotková, Sýkora (nakladatelství SPN)

Autoři využívají v učebnici pouze dvě barvy černou a modrou, tento fakt činí učebnici relativně přehlednou. Na přehlednosti však ubírá formátování textu do dvou sloupců. Konkrétně v 5. kapitole (celá čísla) autoři nevyužívají mnoho ilustrací, ale je zde uvedeno velké množství textu doplněné o relativně přehledná schémata. Nové učivo a úlohy, které ho rozšiřují, označují autoři ilustrací panáčka a tužky (jak uvádějí v poznámce redakce). Autoři v učebnici využívají rámečků ke shrnutí pravidel a uvádění důležitých pojmů.

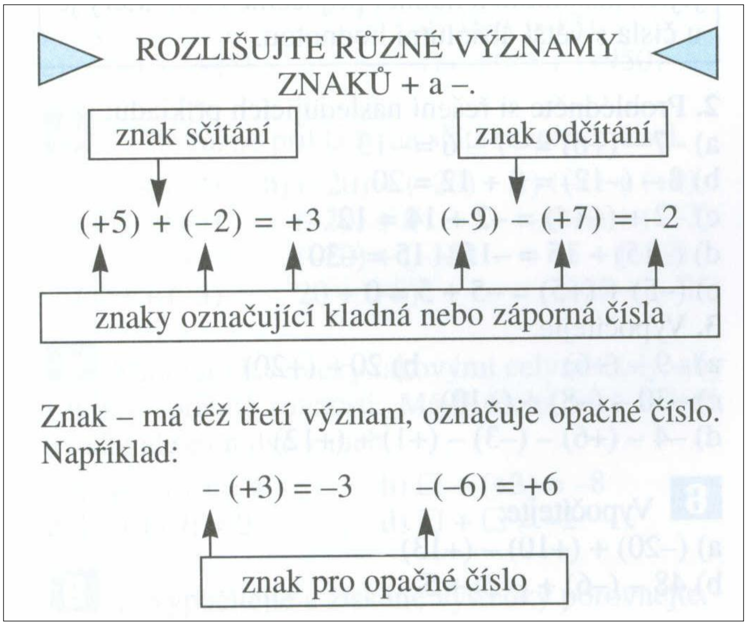
Dále se zaměřím především na záporná čísla, se kterými se žáci sedmého ročníku poprvé setkávají v 5. kapitole **Celá čísla** a jsou zde zavedena na modelu teploměru (výtahu). Po úvodních úlohách autoři rozšiřují množinu přirozených čísel o množinu celých čísel (rozdělení na kladná a záporná). V následujících úlohách využívají autoři vodorovné i svislé číselné osy k procvičování umístění čísel na číselné ose, určování opačných čísel i k jednoduchým početním úlohám. Dále autoři zavádějí pojem opačná čísla a absolutní hodnota a následně se věnují porovnávání celých čísel.

V následující podkapitole je zavedeno sčítání a odčítání celých čísel na základě absolutní hodnoty. Kladná čísla jsou pouze zopakována. Sčítání záporných čísel je zavedeno na příkladu s půjčováním peněz (dluhy), kde k zavedení této operace využívají autoři absolutní hodnotu a demonstrují řešení na číselné ose (obr. 7).



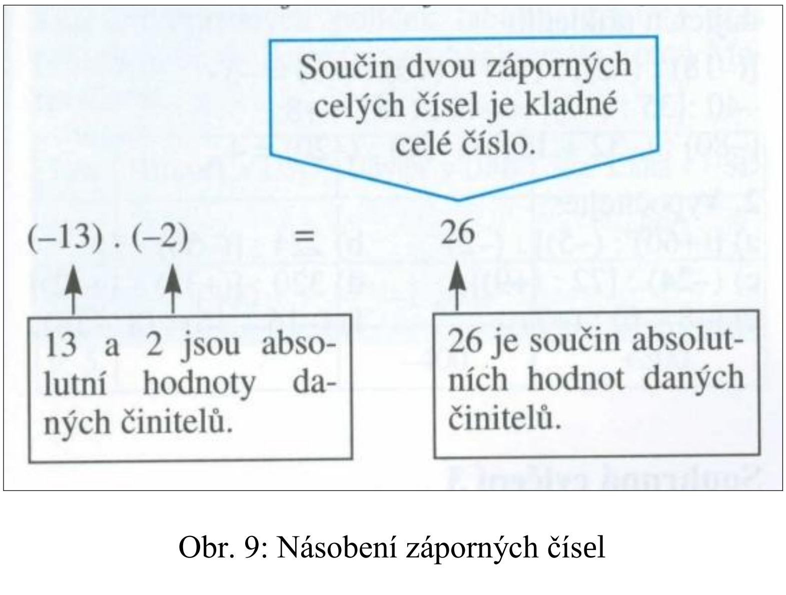
Obr. 7: Součet dlužných částek

Odčítání celých čísel je uvedeno na příkladu přičítání opačného čísla. Autoři v učebnici uvádějí dostatečné množství procvičujících úloh (další navíc v pracovním sešitu). Před násobením ještě autoři poukazují na důležitost rozlišování znaků + a – (obr. 8).



Obr. 8: Rozlišení významu znaků + a –

Následující podkapitola je věnována násobení a dělení celých čísel. Součin dvou kladných čísel převádí autoři na součin dvou přirozených čísel, které již žáci znají z dřívějška. S násobením se žáci seznamují pomocí detailního řešení úlohy s dluhy: Zdena si vypůjčí od pěti spolužáků 20 korun (5 · (–20) = –100). Žáci mají sledovat především vztah mezi absolutními hodnotami daných činitelů a příslušných součinů. Násobení dvou záporných celých čísel uvádí obr. 9, kde mají žáci sledovat schematický zápis.



Obr. 9: Násobení záporných čísel

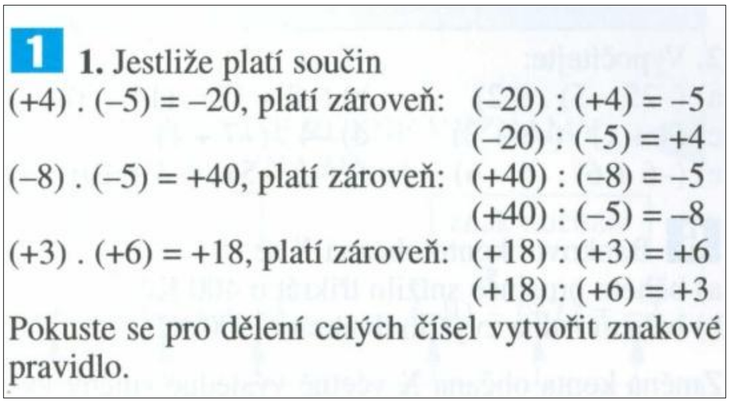
Dále autoři uvádějí, že dvě celá čísla různá od nuly vynásobíme tak, že k součinu jejich absolutních hodnot přidáme:

a) znak +, když jsou oba činitelé kladná čísla, nebo oba činitelé záporná čísla,

b) znak –, když je jeden z činitelů kladné číslo a jeden záporné číslo.

Následně je uvedeno několik výpočtů, u kterých mají žáci zkontrolovat správnost řešení, a posléze samostatně řešit několik úloh zaměřených na násobení. Dále autoři zmiňují násobení více členů, a ukazují tak využití komutativního a asociativního zákona.

Dělení je zavedeno pomocí souboru řešených úloh, z nichž žáci vyvozují pravidla pro dělení, které si poté procvičují na dalších úlohách. Jedná se o úlohy na násobení, které jsou převáděny na úlohy s operací dělení, jak ukazuje (obr. 10).



1

1. Jestliže platí součin

(+4) . (–5) = –20, platí zároveň: (–20) : (+4) = –5
(–20) : (–5) = +4

(–8) . (–5) = +40, platí zároveň: (+40) : (–8) = –5
(+40) : (–5) = –8

(+3) . (+6) = +18, platí zároveň: (+18) : (+3) = +6
(+18) : (+6) = +3

Pokuste se pro dělení celých čísel vytvořit znakové pravidlo.

Obr. 10: Ukázka dělení celých čísel

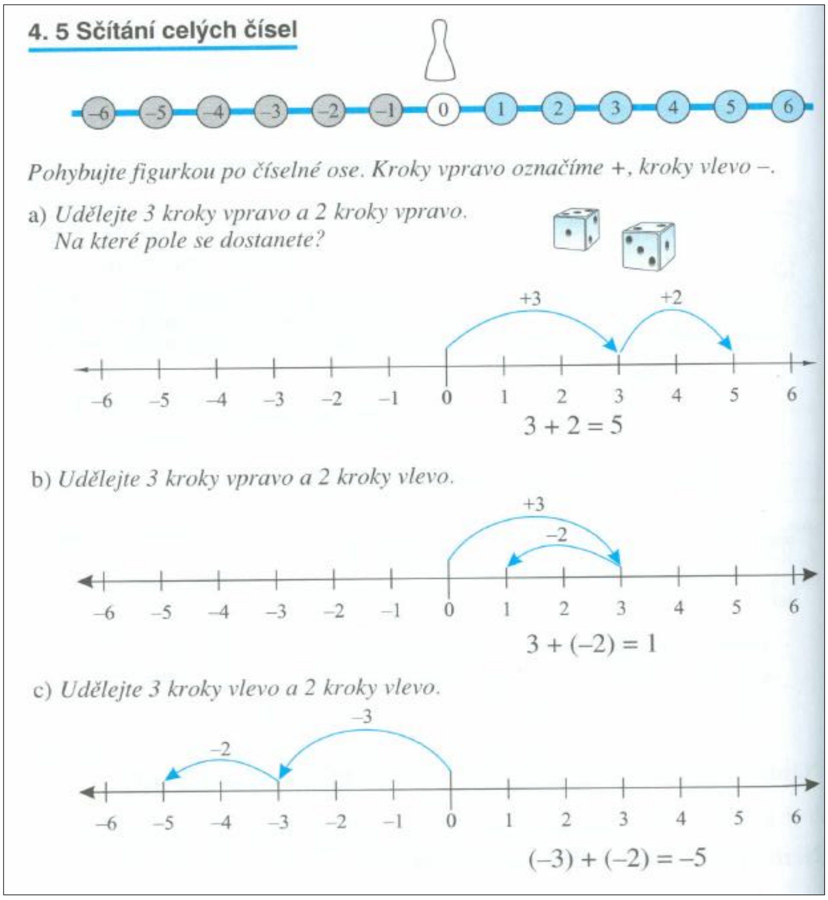
V průběhu celé kapitoly autoři zařazují důležité pojmy a pravidla, která shrnují v přehledných tabulkách. V závěru kapitoly poté uvádění souhrnná cvičení k procvičení a ucelení učiva. Velké množství úloh k procvičení doporučují autoři v pracovním sešitu.

1.5.3 Matematika autorů Coufalová, Pěchoučková, Hejl, Lávička (nakladatelství Fortuna)

V této učebnici autoři využívají také pouze dvou barev černé a modré. Učebnice je přehledně zpracována a učivo je členěno do několika tematických celků, které jsou dále členěny do několika oddílů. Autoři využívají modrých rámečků a podbarvování textu ke zdůraznění zásadních pojmů. Se samotným pojmem záporné číslo se žáci 7. ročníku poprvé shledávají v kapitole číslo 4 **Celá čísla**.

Celá čísla jsou zavedena na modelu teploměru, jsou zde uvedeny svislé i vodorovné stupnice a také graficky znázorněné půjčky, dluhy a vrácené peníze. Následně autoři zavádějí pojem opačné číslo a absolutní hodnota, kde využívají jednotek na číselné ose. Následně autoři předchozí znalosti využívají k porovnávání celých čísel, řešení jednoduchých nerovnic a při vysvětlení početních operací s celými čísly

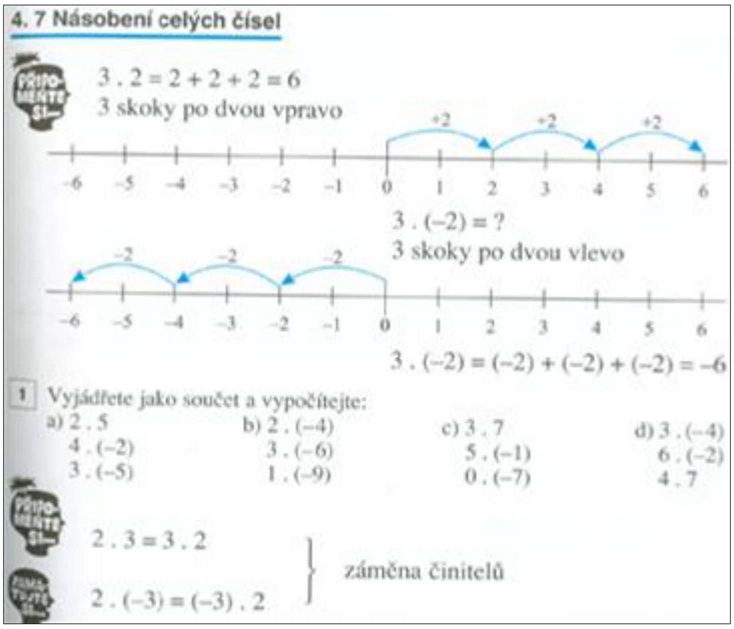
V následující podkapitole je zavedeno sčítání celých čísel na modelu panáčka (je zde využita figurka). Jednoduché příklady jsou řešeny pomocí pohybu figurky po číselné ose (obr. 11).



Obr. 11: Sčítání celých čísel s využitím modelu panáčka

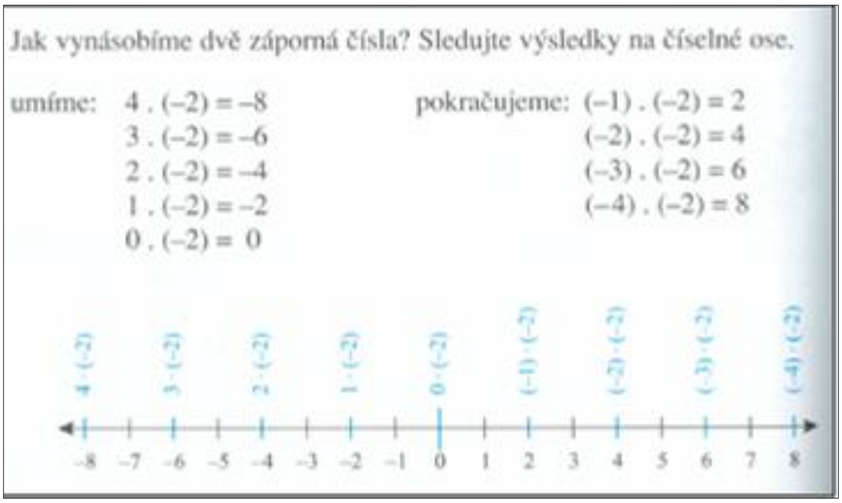
Při sčítání dvou kladných či záporných čísel, nevidí autoři žádné úskalí. Sčítáme-li však kladné a záporné číslo, autoři uvádějí tento postup: čísla odečteme bez ohledu na znaménko stejně jako čísla přirozená. K výsledku pak přidáme stejné znaménko jako má číslo, které je na číselné ose dále od nuly (tedy má větší absolutní hodnotu). A uvádějí konkrétní řešený aritmetický příklad. Dále následuje několik úloh na procvičení.

Podobným způsobem je zavedeno odčítání celých čísel. I zde autoři využívají modelu panáčka, který se pohybuje po číselné ose podle povelů. Dále zadávají sérii úloh k řešení, kde žáci využívají pohybu panáčka po číselné ose, a osvojují si tak vlastnosti odčítání celých čísel. Autoři zařazují také číselné hady, které podle mých zkušeností mají žáci v oblibě a motivují je k práci.



Obr. 12: Násobení celých čísel

Následně autoři zařazují násobení celých čísel, které je zavedeno pomocí číselné osy, kde jsou jednoduché příklady na násobení převáděny na příklady se sčítáním (obr. 12) a dále využívají také komutativního zákona, čímž vysvětlují násobení záporné krát kladné číslo. Jak násobit dvě záporná čísla, ukazuje série výpočtů, jejichž výsledky jsou zakreslovány na číselnou osu (obr. 13).



Obr. 13: Jak násobit dvě záporná čísla

Podobně jako v jiných učebnicích i zde autoři využívají toho, že dělení lze snadno převést na násobení, které už žáci umí z dřívějška (obr. 14). Opět autoři zařazují dostatečné množství úloh k procvičení. Na závěr kapitoly jsou uvedeny i úlohy „pro chytré hlavy“. I v této učebnici autoři mysleli na pracovní sešit, kde jsou uvedeny úlohy k opakování a procvičování i shrnující testy.

$6 : 3 = 2$,
protože $2 . 3 = 6$

Podobně:
$(-6) : 3 = -2$, protože $(-2) . 3 = -6$
$6 : (-3) = -2$, protože $(-2) . (-3) = 6$
$(-6) : (-3) = 2$, protože $2 . (-3) = -6$

Obr. 14: Převedení dělení na násobení

1.5.4 Aritmetika 7 autorů Binterová, Fuchs, Tlustý (nakladatelství Fraus)

Učebnice je velmi barevná, obsahuje velké množství ilustrací a mnoho úloh využívajících souvislostí s ostatními předměty. I zde autoři neopomněli připojit pracovní sešit a metodickou příručku pro učitele. Stejně jako u jiných učebnic i zde autoři uvádějí na vnitřní straně desek učebnice vysvětlivky pro snadnější orientaci. Důležité jsou především modré rámečky upozorňující na shrnutí nového učiva a slovníčky (obr. 15).

Co jsme objevili?

Čísla můžeme sdružovat do skupinek. Součet zůstává stejný!

$[(-41) + (-4)] + (-14) = (-41) + [(-4) + (-14)] = -59$

Slovníček

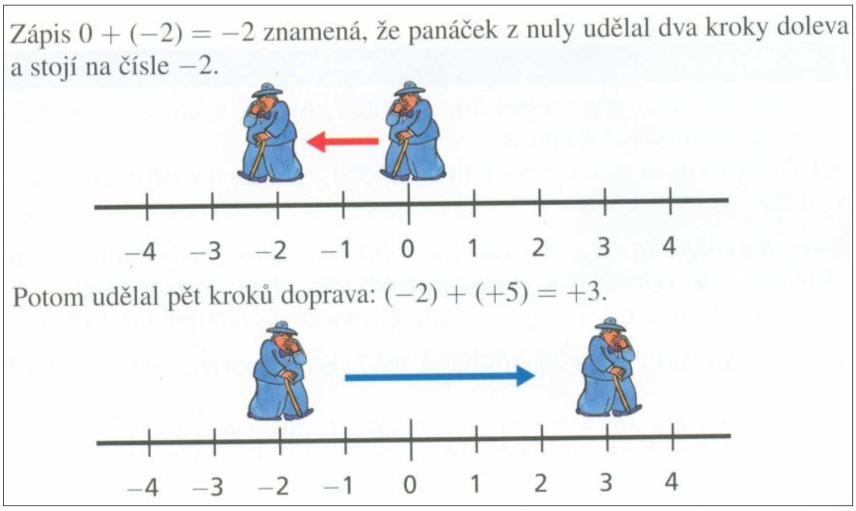
Sčítání celých čísel je asociativní.

Platí: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Obr. 15: Důležité rámečky

V této učebnici se žáci setkávají se zápornými čísly úvodem 7. ročníku v první kapitole **Celá čísla**. Celá čísla jsou zavedena na modelu panáčka a zároveň se zde objevuje model číselné osy, teploměru i stupnice nadmořských výšek. Jako úvod do záporných čísel uvádějí autoři několik reálných úloh. Následně pak na číselné ose vyznačují kladná a záporná čísla a vyčleňují nulu. Na základě vypracování úvodních úloh se žáci propracují k zavedení pojmu absolutní hodnota a opačné číslo, a to vše za pomocí jednotek na číselné ose. S pojmem absolutní hodnota pracují autoři dále při porovnávání hodnot čísel (když porovnáváme dvě záporná čísla, menší je to, které má větší absolutní hodnotu) a využívají ji k vysvětlení sčítání záporných čísel. Dále autoři využívají k procvičování úlohy s teplotami a odchylkami od normálu (např. hladina vody). Zařazují také úlohy, které propojují matematiku se zeměpisem, dějepisem i jinými předměty. Žáci porovnávají hodnoty a učí se pracovat s grafy.

V následující podkapitole autoři zavádějí sčítání a odčítání záporných čísel. Nejprve předkládají žákům úlohy, které jsou schopni logicky řešit, a poté zavádějí operaci sčítání a odčítání na modelu panáčka (obr. 16). Následně, po úvodních úlohách v tabulce uvádějící, co žáci objevili, jsou uvedeny dva příklady na přičítání záporného čísla ke kladnému. První příklad je 9 + (–5) = 4 a druhý 5 + (–9) = –4, o znaménku součtu rozhoduje číslo, jehož absolutní hodnota je větší, tedy u obou příkladů se jedná o číslo devět. Proto také platí, jsou-li oba sčítanci záporná čísla, jejich součtem musí být také záporné číslo. Sčítání a odčítání je zde zaváděno společně, protože odečítat číslo je totéž jako přičítat číslo opačné. V učebnici i v pracovním sešitu je uvedeno dostatečné množství úloh k procvičení této problematiky.



Obr. 16: Sčítání záporných čísel

V následující podkapitole autoři zavádějí násobení a dělení, kde opět využívají modelu panáčka na číselné ose. Zařazují několik jednoduchých výpočtů na násobení dvou kladných čísel a násobení záporného čísla kladným. Využívají převedení výpočtu na sčítání a požadují po žácích, aby uváděli nejkratší matematické zápisy (tím je nutí používat násobení). Na základě řešení těchto úloh žáci vyvozují pravidla pro násobení, která využívají v následujících úlohách k procvičení. Dále autoři uvádějí, že násobení je komutativní, a tím vysvětlují násobení kladného čísla číslem záporným. Dále uvádějí, že když násobíme dvě kladná čísla, součinem je kladné číslo, změníme-li však znaménko u jednoho z činitelů, změní se tak i znaménko součinu. Z čehož tedy plyne, že násobíme-li dvě záporná čísla (změníme tedy druhého kladného činitele na záporný) musí být součinem opět kladné číslo.

Dělení je uvedeno na sérii osmi výpočtů, které mají žáci provést, a ujasnit si tak znaménková pravidla, která použili (obr. 17).

$9 \cdot 5 = 45$	$(-9) \cdot 5 = -45$	$9 \cdot (-5) = -45$	$(-9) \cdot (-5) = 45$
$45 : 5 =$	$(-45) : (-9) =$	$(-45) : 9 =$	$45 : (-9) =$

Kladné číslo dělené kladným číslem je kladné číslo. $+ : + = +$

Doplňte znaménka a zapište slovní vyjádření zápisů.

$- : - =$ $\quad + : - =$ $\quad - : + =$

Obr. 17: Série výpočtů pro zavedení dělení celých čísel

Na závěr kapitoly je uvedena strana pro žáky, kde jsou shrnuty všechny důležité poznatky o celých číslech, které by měli žáci ovládat. Poté následuje zkouška znalostí, na těchto úlohách by si žáci měli vyzkoušet své vědomosti a znalosti.

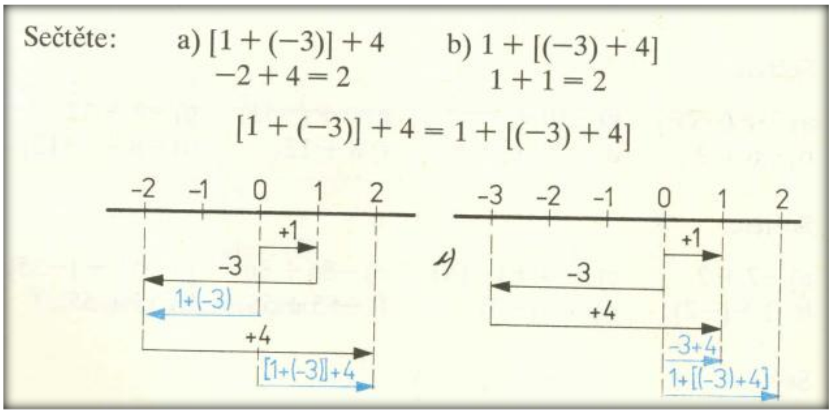
Jako jediná učebnice, se kterou jsem se setkala, uvádí tato závěrem ke všem kapitolám rozšiřující úlohy a také zavádí angličtinu do matematiky. Naopak učebnice neuvádí řešení jednotlivých úloh k procvičování. Velké množství úloh k procvičení doporučují autoři v pracovním sešitu, kde jsou výsledky již uvedeny.

1.5.5 Matematika autorů Urbanová, Koman, Řebíčková (nakladatelství SPN)

Tato učebnice již dnes není zařazena do učebnic používaných pro výuku matematiky na ZŠ, ale i tak do ní někteří učitelé rádi nahlížejí (přinejmenším učitelé, u nichž jsem zadávala své testy) a berou si z ní inspiraci pro svoji výuku. Autoři využívají podobně jako v ostatních učebnicích pouze dvě barvy černou a modrou. Učebnice je přehledná a členěna do jednotlivých podkapitol. Stejně jako v jiných učebnicích jsou zde důležitá fakta uváděna v barevných rámečcích.

V této řadě učebnic autoři zařadili pojem záporné číslo již na konci 5. ročníku základní školy. **Celá čísla** jsou zavedena na modelu číselné osy. Všechny úvodní úlohy se zaměřují na stav vodní hladiny a porovnávání poklesu a vzestupu vody. Na číselné ose jsou pak zavedena kladná a záporná čísla. Dále je zaveden pojem opačné číslo na modelu číselné osy (absolutní hodnotu na rozdíl od předchozích učebnic autoři nezmiňují). Teprve při porovnávání celých čísel se objevuje stupnice teploměru a svislá číselná osa.

Sčítání celých čísel zavádí autoři pomocí jednoduchých řešených příkladů doplněných o grafické řešení na číselné ose. Poté zařazují složitější příklady (obr. 18).

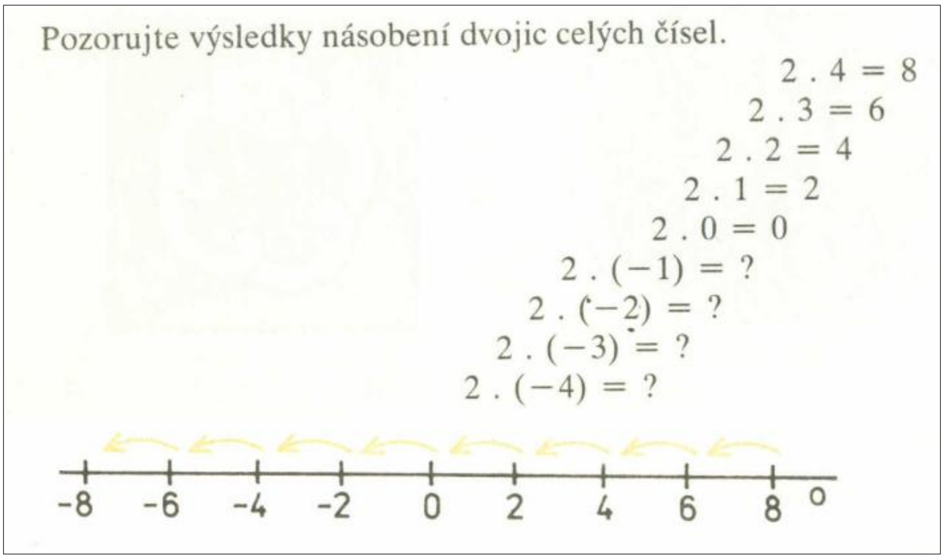


Obr. 18: Ilustrace sčítání záporných čísel na číselné ose

Následně je zavedeno odčítání celých čísel, a to na příkladu s přičítáním opačného čísla. Posléze autoři uvádějí dostatečné množství procvičujících úloh a za kapitolou jsou uvedeny shrnující úlohy.

Ve všech ostatních analyzovaných učebnicích následuje násobení a dělení celých čísel, zde ale autoři zařazují záporná desetinná čísla. Navíc za každou kapitolu vkládají historické poznámky a souvislosti k danému učivu.

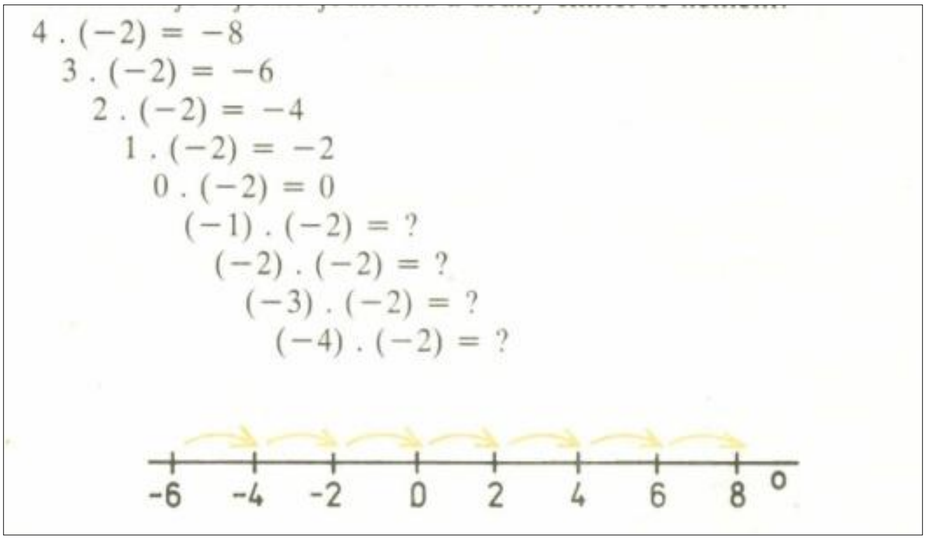
Násobení a dělení celých čísel tato řada učebnic zařazuje až koncem prvního pololetí v šestém ročníku základní školy, poté co již žáci umí pracovat s racionálními čísly a osvojili si znalosti o středové souměrnosti. Násobení celých čísel je zavedeno pomocí série řešených příkladů, která je doplněna o grafické znázornění na číselné ose (obr. 19).



Obr. 19: Násobení celých čísel

Žáci pozorují výsledky a všímají si, že zatímco první činitel se nemění, druhý se o jednotku zmenšuje, a výsledný součin se tak zmenšuje o dvě jednotky. Žáci si doplní výsledky místo otazníků a vysloví pravidlo pro násobení.

Stejným způsobem autoři vysvětlují násobení dvou záporných čísel, kde si žáci v sérii úloh (obr. 20) opět všímají výsledků při násobení a na základě pozorování vyvozují pravidlo pro násobení dvou záporných čísel.



Obr. 20: Série úloh pro vyvození pravidla pro násobení

Dělení autoři zavádějí na čtyřech výpočtech (42 : 7 a 42 : (–7) a (–42) : 7 a poslední (–42) : (–7)), které předkládají žákům k řešení za pomocí početní operace násobení. U prvního příkladu autoři uvádějí, že 42 : 7 = 6, protože 6 · 7 = 42. Dále podíl 42 : (–7) = ? přepisují do tvaru ? · (–7) = 42 a dotazují se, kterým číslem musíme násobit číslo –7, abychom dostali číslo 42. Násobit již žáci umějí z předchozího učiva, a vědí tedy, že (–6) · (–7) = 42, a proto tedy 42 : (–7) = (–6). Následně jsou takto v učebnici rozebrány i zbylé dva příklady. Dále v učebnici následuje násobení a dělení racionálních čísel. Závěrem jsou uvedena souhrnná cvičení a výsledky k předchozím úlohám. K dané řadě učebnic přísluší také sbírka úloh k procvičování.

1.6 Shrnutí analýzy učebnic

Časové období zavedení záporného čísla

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, který nabyl platnosti v roce 2013, udává, že žáci se s pojmem záporného čísla mají seznamovat již na prvním stupni ZŠ. Při analýze jednotlivých učebnic jsem však zjistila, že pojem záporné číslo je zaváděn ve většině učebnic sedmých ročníků ZŠ jako pojem nový. Pouze starší učebnice autorů Urbanová, Koman a Řebíčková zavádějí pojem záporného čísla již na prvním stupni základní školy (v 5. ročníku).

Zavedení pojmu záporné číslo

Ve všech pěti učebnicích, které jsem si vybrala k analýze, jsou záporná čísla zaváděna v kapitole věnujících se problematice celých čísel. Ve všech učebnicích autoři využili k zavedení pojmu sémantický model adresa. Konkrétně pak využívají několika separovaných modelů. Všichni autoři využili model teploměru a uvedli nadmořskou výšku či výšku vodního sloupce. Uvedli tak reálné stupnice a pokusili se žákům usnadnit cestu k vytvoření generického modelu, kterým je číselná osa vnímána ve dvou tvarech (svislá a vodorovná).

Zavedení opačných čísel a absolutní hodnoty

Ve všech pěti analyzovaných učebnicích se autoři shodli na zavedení opačných čísel pomocí vodorovné číselné osy. Ovšem ve dvou učebnicích (Odvárko a Kadleček a také Binterová, Fuchs a Tlustý) je zavedení pojmu spojeno s pojmem absolutní hodnota. V učebnici autorů Trejbal, Jirotková a Sýkora je nejdříve zaveden pojem opačné číslo a následně (v dalším oddílu) pak absolutní hodnota, kterou mají opačná čísla stejnou a vždy kladnou. Učebnice autorů Coufalová, Pěchoučková, Hejl a Lávička zavádí oba pojmy zcela odděleně v různých oddílech. Poslední učebnice autorů Urbanová, Koman a Řebíčková zavádí pouze pojem opačné číslo, ale absolutní hodnotu vůbec nezavádí (až v 8. ročníku s problematikou rovnic).

Porovnávání celých čísel

Všichni autoři následně zařazují porovnávání celých čísel, zařazují úlohy na porovnávání teplot a využívají svislou i vodorovnou číselnou osu. Dále někteří využívají další úlohy s reálnými situacemi k porovnávání.

Početní operace se zápornými čísly

Zavedení sčítání záporných čísel

Dvě učebnice využívají k zavedení této operace modelu panáčka pohybujícího se po číselné ose. Tyto přístupy jsou dle mého názory velmi vhodné, protože si žáci mohou pohyb panáčka po číselné ose reálně ukázat (vyzkoušet) a je pro ně snadnější tyto operace pochopit. Učebnice autorů Urbanová, Koman a Řebíčková zavádí sčítání výhradně početními příklady, jejichž řešení však ilustrují na číselné ose. Zbývající dvě učebnice využívají motivačních úloh s půjčováním peněz (reálné úlohy), což je pro žáky také snadno představitelné.

Zavedení odčítání záporných čísel

Odčítání dělá žákům povětšinou větší problémy než sčítání. Autoři ve všech učebnicích uvádějí nejprve odčítání většího kladného čísla od menšího (ukazují, jak lze tento výpočet převést na přičítání záporného čísla) a až následně zavádějí odčítán dvou záporných čísel. Všichni autoři tak využívají přičítání opačného čísla, dvě učebnice také k zavedení pojmu přidávají absolutní hodnotu; jedná se o učebnici Odvárka a Kadlečka a také o učebnici nakladatelství Fraus.

Zavedení násobení

Stejným způsobem zavádí násobení celých čísel učebnice od autorů Odvárko a Kadleček a učebnice autorů Urbanová, Koman a Řebíčková. Autoři předkládají sérii příkladů na násobení, kde první činitel zůstává neměnný a druhý se o jednotku zmenšuje, a žáci sledují, jak se mění součin. Na základě těchto zákonitostí žáci vyvozují pravidla pro násobení. Tento způsob zavedení násobení se mi zdá vhodný, protože žáky nutí přemýšlet. Sami si mohou vytvořit podobné série příkladů, na kterých si pravidla mohou procvičovat, a lépe si je tak osvojit. Učebnice nakladatelství Fraus a Fortuna předkládají žákům číselnou osu, na které mají pohybovat panáčkem tak, aby plnil přesně pokyny vyjádřené zápisem daných příkladů. Žáci jsou dále vedeni k řešení jednotlivých úloh (s víceciferným čísly), aby se oprostili od číselné osy. Toto zavedení operace násobení se mi jeví jako vhodné, ale domnívám se, že je zapotřebí zařadit větší množství úloh k procvičení, aby pro některé žáky nebyl přechod ke složitějším výpočtům moc rychlý.

Učebnice autorů Trejbal, Jirotková a Sýkora násobení uvádí na ilustračně řešené úloze s dluhy a výpůjčkami peněz, kde žáci kontrolují a sledují řešení jednotlivých kroků, které jim autor předkládá, dále pak autoři využívají k vysvětlení násobení dvou záporných čísel absolutní hodnotu. Domnívám se však, že někteří slabší žáci s tímto zavedením mohou mít problém, protože si nejsou schopni pravidla pro násobení z konkrétního příkladu zobecnit, i když autoři uvádějí ještě několik dalších řešených příkladů.

Zavedení dělení

Všichni autoři mnou analyzovaných učebnic zavádějí dělení pomocí úloh, jejichž řešení převádějí na násobení. Pouze autoři Odvárko a Kadleček vyžadují po žácích, aby nejprve provedli operaci dělení a násobením následně ověřili správnost výsledku. V úvodní motivační úloze však uvádějí také postup, kde přecházejí od násobení k dělení a opačně. Všechny učebnice tedy dávají dělení a násobení do souvislostí, a žáky tak odkazují na předchozí znalosti.

Jak jsem se přesvědčila při analýze učebnic, většina autorů k dané učebnici doporučuje pracovní sešit nebo alespoň sbírku úloh k procvičování, aby žáci měli dostatek materiálů k domácí přípravě. Významné poznatky z analýzy učebnic jsem shrnula do tab. 5.

Tab. 5: Významné poznatky z analýzy učebnic

Autor	Odvárko a Kadleček	Trejbal, Jirotková, Sýkora	Binterová, Fuchs, Tlustý	Coufalová, Pěchoučková, Hejl, Lávička	Urbanová, Koman, Řebíčková
Časové období zavedení záporného čísla	Navazuje po zlomcích první pololetí 7. ročníku ZŠ	Na závěr prvního pololetí 7. ročníku ZŠ (Po zlomcích a shodných zobrazeních v rovině)	Na úvod prvního pololetí 7. ročníku ZŠ (navazují zlomky, poměr)	Na závěr prvního pololetí 7. ročníku ZŠ (Po zlomcích a shodných zobrazeních v rovině)	Konec 5. ročníku a druhá poloviny 6. ročníku
Zavedení záporného čísla	Teploměr Číselná osa Odchylka od normální hodnoty	Výtah Teploměr Výška vodní hladiny Číselná osa	Teploměr Nadmořská výška Dluhy Číselná osa Model panáček (krokování) Souřadnicový systém	Číselná osa Výška vodní hladiny Dluhy Teplota na teploměru	Číselná osa Výška vodní hladiny
Zavedení opačných čísel	Společně s absolutní hodnotou	Na vodorovné číselné ose (dvojice)	Společně s absolutní hodnotou	Pomocí číselné osy (dvojice)	Pomocí číselné osy (dvojice)
Absolutní hodnota	Vzdálenost od 0 na číselné ose. Jednotky na číselné ose	Vzdálenost od 0 na číselné ose. Jednotky na číselné ose	Od konkrétních úloh (zobecnění pojmu)	Vzdálenost od 0 na číselné ose. Jednotky na číselné ose	Není
Zavedení porovnávání záporných čísel	Pomocí číselné osy Porovnávání teplot	Na reálných úlohách (hladina vody, teplota)	Na reálných úlohách (měření teploty) Číselná osa	Porovnávání teplot	Porovnávání teplot Porovnávání výšky vodní hladiny
Zavedení sčítání záporných čísel	Na číselné ose doplněno konkrétními příklady	Na reálné úloze s dluhy Na číselné ose	Společně s odčítáním na konkrétních příkladech s využitím stupnice teploměru	Model panáček na číselné ose	Řešené příklady graficky vyznačené na číselné ose
Zavedení odčítání ZP	Motivační úloha se	Přičítání opačného čísla		Model panáček na	Řešené příklady

	ziskem a ztrátou bodů Číselná osa počítání teplotních rozdílů Přičítání opačného čísla	Absolutní hodnota Řešené příklady (práce se znaménky)	Model panáček (práce s pracovním sešitem)	číselné ose Přičítání opačného čísla	graficky vyznačené na číselné ose Přičítání opačného čísla
Zavedení násobení	Uvedeno větší množství řešených příkladů Součin převeden na sčítání	Detailně rozpracované řešení úlohy s vypůjčení peněz Řešené příklady	Zavedeno na modelu panáček (využití číselné osy) Volně navazuje dělení	Číselná osa Převedení úloh na sčítání	Číselná osa Převedení úloh na sčítání
Zavedení dělení	Na konkrétních řešených aritmetických příkladech	Příklady s násobením převádí na dělení Řešené příklady		Příklady s násobením převádí na dělení	Příklady s násobením převádí na dělení
Úlohy na opravování chyb	V učebnici i v PS	Pouze jediná další v PS	Pouze v PS	Ano i v PS	Ne
Souhrnná cvičení	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano
Pracovní sešit	Ano	Sbírka úloh	Ano	Ano	Ne

ZP – záporná čísla PS – pracovní sešit

1.7 Související výzkumy

1.7.1 Mezinárodní srovnávací výzkum TIMSS

Žáci českých škol se již od roku 1995 zapojují do mezinárodního výzkumu TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study), který koordinuje Mezinárodní asociace pro hodnocení vzdělávacích výsledků IEA (The International Association for the Evaluation of Educational Achievement). Jedná se o mezinárodní srovnávací výzkum zaměřující se na matematickou (přírodovědnou) gramotnost. Hlavním záměrem tohoto výzkumu podle jeho tvůrců je zlepšení a zvýšení úrovně výuky matematiky a přírodovědných předmětů. Výsledky výzkumu jsou určeny především jako pomoc učitelům matematiky a dalším odborníkům ve školství věnujícím se matematice (Tomášek et al., 2008).

Výzkum TIMSS probíhá každé čtyři roky a je zaměřen především na získané školní vědomosti a dovednosti žáků. V jeho testech se žáci setkávají jak s uzavřenými, tak otevřenými úlohami.

Mezinárodní srovnávací výzkumy v matematice nám umožňují sledovat velký vzorek žáků. Studie TIMSS se zabývá především těmito třemi oblastmi:

1) soubor znalostí a dovedností, kterým chceme žáky naučit (zamýšlené kurikulum)

2) průběh vyučování (realizované kurikulum)

3) žáky skutečně osvojené znalosti a dovednosti (dosažené kurikulum).

TIMSS si klade za cíle pomoci s vyřešením několika problémů. Co a jakým způsobem žáky naučit, jak správně zorganizovat výuku matematiky, zjistit jak žáci ovládají matematiku a ostatní přírodní vědy, jsou-li žáci schopni využívat znalosti ze školy v běžném životě a jaký vztah mají k přírodovědným předmětům.

Široká veřejnost je o výsledcích testování informována na základě Mezinárodní a národní zprávy, která je volně přístupná na stránkách TIMSS (www.timss.org) nebo na stránkách České školní inspekce (www.csicr.cz). Ze zprávy se můžeme dozvědět konkrétní výsledky českých žáků v porovnání s ostatními zeměmi účastnících se výzkumu, rozdíly v úspěšnosti mezi chlapci a děvčaty atd. „Z hlediska didaktiky matematiky jsou však důležitější než celkové výsledky informace týkající se konkrétních oblastí učiva, jimž je možno přičítat pokles ve výsledcích TIMSS a PISA.“ (Rendl & Vondrová, 2014: s. 25). Výzkum TIMSS se zaměřuje na čtyři hlavní části aritmetika, algebra, geometrie a data a pravděpodobnost. Ve své diplomové práci se nadále budu věnovat především dílčí kapitole záporná čísla z části aritmetika. Pokusím se díky vybraným úlohám poukázat na problémy, které čeští žáci v této oblasti mají.

Výsledky českých žáků v šetření TIMSS 2007 ukazují, že ze 44 úloh z oblasti Číslo jich 11 bylo zařazeno mezi slabé a velmi slabé úlohy. Rendl a Vondrová (2014) uvádějí, že slabé úlohy jsou takové, v nichž odchylka úspěšnosti českých žáků je v rozmezí 0 až + 5 % oproti průměrné mezinárodní úspěšnosti (průměrní či lehce nadprůměrní žáci). Velmi slabé úlohy jsou takové, ve kterých byli čeští žáci podprůměrní oproti mezinárodní průměrné úspěšnosti. Žádná z 11 takto označených úloh nebyla zaměřena přímo na problematiku celých čísel, ale zaměříme-li se na konkrétní úroveň úloh, můžeme si povšimnout, že neúspěch v těchto úlohách může být spojen právě s nesprávným použitím pravidel pro počítání s celými čísly.

Budu vycházet z publikace (Tomášek, 2009), která obsahuje uvolněné úlohy z TIMSS 2007 (zadání úlohy a její stručnou charakteristiku: obsah, cíl úlohy, dovednost a obtížnost). V knize je také uvedena tabulka nabízející srovnání výsledků českých žáků s mezinárodním průměrem a rozdíl mezi chlapci a děvčaty. Poté následují informace pro hodnocení a tabulka četností jednotlivých odpovědí žáků. Na závěr je každá úloha doplněna rozborem řešení, komentářem o úspěšnosti či neúspěšnosti, hledání příčin chybných výsledků a celkové shrnutí úlohy. Uvedu zde 2 úlohy zabývající se problematikou záporných čísel: úlohu M17 (M02-03), která je otevřená (tedy žáci mají odpověď doplnit), a úlohu M18 (M03-13), která je uzavřená s výběrem odpovědi.

M17 (M02-03)

Do každého čtverečku napiš buď +, nebo – tak, aby výsledek byl co možná největší.

–5 ☐ –6 ☐ 3 ☐ –9

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	**49,1**	49,9	48,4
Mezinárodní průměr	34,3	32,4	36,1

Kód odpovědi: 10 správná odpověď, 79 chybná odpověď, 99 žák neuvedl žádnou odpověď

Odpovědi českých žáků			
Kód odpovědi	**10**	79	99
Četnost [%]	**49,1**	47,4	3,5

Cílem úlohy je umístěním znamének + nebo – mezi čtyři celá čísla vytvořit výraz, který bude mít největší hodnotu. Žáci mohli řešit úlohu zkusmo: sestavit osm výrazů, vypočítat jejich hodnoty a vybrat výraz s největší hodnotou (počet vyšetřovaných možností je možné redukovat, budou-li se znaménka umísťovat postupně se současným vyčíslováním hodnot dvojčlenů). Nejefektivnější způsob řešení spočívá v aplikaci poznatku o odčítání záporných čísel. Za správně vyřešenou byla úloha považována pouze v případě, že byla správně umístěna všechna tři znaménka, v hodnocení se nepřipouštělo částečně správné řešení. V úspěšnosti řešení dosáhli čeští žáci statisticky lepšího výsledku, než byl mezinárodní průměr.

(Tomášek et al., 2009: s. 25)

Úloha má stupeň obtížnosti 3 (nejobtížnější úlohy mají stupeň 4) a předpokladem k jejímu správnému vyřešení je „použití znalostí“.

> V úlohách souvisejících s tímto typem dovedností musí žáci aplikovat své znalosti faktů, postupů či porozumění matematickým pojmům při vytváření modelů a řešení úloh. Zasazení problému do kontextu je zde rutinnější než v úlohách zaměřených na uvažování. Úlohy jsou zpravidla podobné těm, s nimiž se žáci setkávají v učebnicích při procvičování jednotlivých postupů, ačkoli některé z nich budou formulovány tak, aby navozovaly situace ze skutečného života. Navzdory rozdílné obtížnosti použitých úloh se očekává, že všechny budou pro žáky dostatečně známé a žáci při jejich řešení pouze zvolí a uplatní naučené postupy. Oblast používání znalostí zahrnuje následující dovednosti: vybírání, vyjadřování, modelování, provádění, řešení rutinních problémů.
>
> (Tomášek et al., 2009: s. 105)

Úlohy s obtížnostním stupněm tři v oblasti Číslo:

> Žáci využívají své znalosti a dovednosti v různých poměrně složitých situacích. Žáci dovedou řešit poměrně složité problémy týkající se úměrnosti a procent. Dokážou vzájemně porovnat a převést zlomky, desetinná čísla a procenta. Dovedou počítat se zlomky a se zápornými celými čísly. Žáci prokážou porozumění různým měřítkům, číselným osám a mocninám. Dané číslo dokážou rozložit na prvočinitele.
>
> (Tomášek et al., 2009: s. 108)

Tato úloha dělala žákům ve světě veliké problémy. I přesto, že čeští žáci byli úspěšnější než jejich kolegové z jiných zemí, je úspěšnost necelých 50 % dle mého mínění dosti nízká. Proto jsem i já tuto úlohu zahrnula do svého výzkumu. Výzkum TIMSS nedává žádné informace o podstatě problémů, které s úlohou žáci měli.

Úloha M18 (M03-13)

Které číslo po vydělení číslem – 6 dává výsledek 12?

A) −72
B) −2
C) 2
D) 72

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	**A**	B	C	D
Četnost [%]	**67,6**	9,8	5,2	15,3

Úspěšnost [%]	Celkem	Dívky	Chlapci
Česká republika	**67,6**	73,1	62,3
Mezinárodní průměr	51,4	52,4	50,4

> Úloha zjišťuje, zda žáci umí dělit záporným číslem. Při řešení úlohy (nalezení neznámého dělence) mohli žáci použít poznatku o vztahu mezi dělením a násobením (dělenec = dělitel x podíl). Ke správnému výsledku lze ale dospět i bez tohoto poznatku – stačí pro každou z nabízených možností ověřit, zda po vydělení číslem – 6 dává výsledek 12. Volba odpovědi B nebo C svědčí o neznalosti správného vztahu mezi dělením a násobením, volba odpovědi C nebo D o neznalosti „znaménkového“ pravidla při dělení záporným číslem.
>
> (Tomášek et al., 2009: s. 26)

Druhá zařazená úloha je z mého pohledu pro žáky mnohem snadnější (obtížnost 2), ne jenom z toho důvodu, že mohou vybírat ze 4 možných odpovědí, ale k jejímu úspěšnému vyřešení stačí jenom prokázání znalosti vztahu mezi dělením a násobením celých čísel. Nepřekvapuje mě tedy, že úspěšnost u této úlohy oproti předešlé velmi stoupla, ale očekávala bych ještě větší úspěšnost. Proto jsem i tuto úlohu zařadila do svého výzkumu.

Prokazování znalostí:

> Do oblasti prokazování znalostí byly zařazeny následující dovednosti: vybavování, rozpoznávání, počítání, získávání informací, měření, třídění a uspořádávání.
>
> (Tomášek et al., 2009: s. 105)

Úlohy s obtížnostním stupněm dva v oblasti Číslo:

> Žáci dokážou aplikovat základní matematické znalosti na jednoduché situace. Žáci používají základní matematické znalosti při řešení jednoduchých úloh. Například řeší slovní úlohy, které vyžadují sčítání a násobení desetinných čísel. Dokážou určit ekvivalentní poměry a úměrnosti. Žáci chápou, že celek je 100 %, a dokážou odhadnout množství, které zbude po snížení o daný počet procent. Znají jednoduché mocniny a počítají se zápornými celými čísly.
>
> (Tomášek et al., 2009: s. 108)

Dalším mezinárodním srovnávacím výzkumem testujícím matematickou gramotnost žáků je PISA. PISA je dnes považována za jeden z nejdůležitějších světových výzkumů ve vzdělávání, který se koncepcí od ostatních výzkumů velmi liší (Ústav pro informace ve vzdělávání, 1999). Mezi uvolněnými úlohami výzkumu PISA z roku 2003 a 2012 jsem však vhodnou úlohu zaměřenou na aplikaci záporných čísel nenašla, proto se tímto výzkumem zde více zabývat nebudu.

1.7.2 Kalibro – projekt pro testování žáků

Autory projektu Kalibro (nejedná se o výzkum) jsou O. Botlík a D. Souček. Projekt se zaměřuje na testování žáků základních a středních škol a klade si za cíl:

- nabízet školám kvalitní a rozmanité nástroje pro sebehodnocení,
- umožňovat školám bezpečné srovnání s ostatními,
- ovlivňovat cíle a pojetí výchovy a vzdělávání na školách,
- objasňovat přínos náročného sebehodnocení pro práci školy.

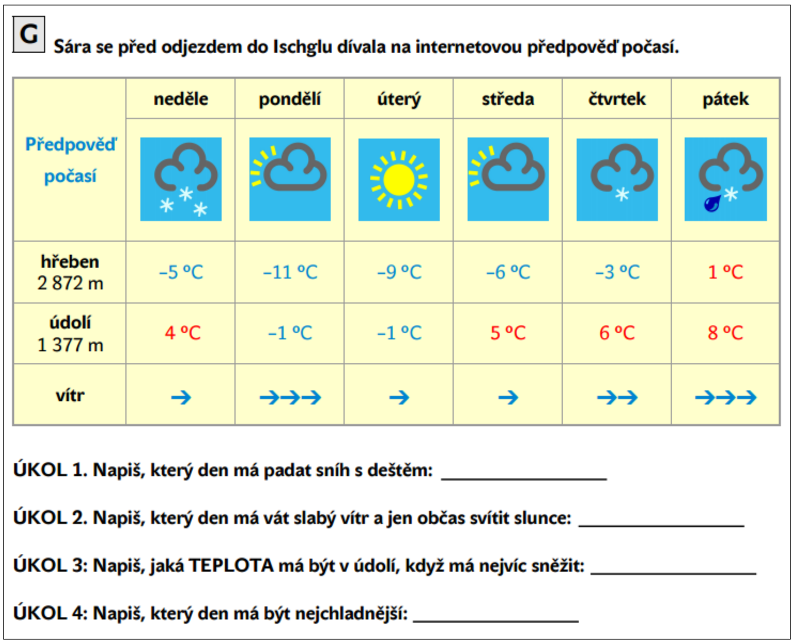
Testování probíhá každoročně, již od roku 1995, podle daného harmonogramu (podzim – dovednostní testy, zima – tradiční testy a jaro – dotazníkové šetření), a školy se ho účastní dobrovolně. Testováni jsou především žáci 3. a 5. ročníků prvního stupně a žáci 7. a 9. ročníků druhého stupně základních škol. Testování probíhá v několika oblastech: matematika, český jazyk, anglický jazyk, německý jazyk, humanitní či přírodovědný základ a další. Testy z jednotlivých oblastí jsou dostupné na stránce Kalibra (www.kalibro.eu).

Prověřování matematických znalostí se objevuje především v tradičních a dovednostních testech. **Tradiční testy** jsou určeny výhradně jednotlivým žákům vždy do jedné vyučovací hodiny a jsou sestaveny ze čtyř typů úloh:

- řešením je spočítaná či odhadnutá číselná hodnota
- řešením je uspořádání očíslované nabídky v určitém pořadí
- řešením je výběr několika, nebo žádné správné odpovědi z daného seznamu
- řešením je výběr jediné správné odpovědi (zařazeny výjimečně).

Dovednostní testy jsou určeny pro dvojici žáků do jedné vyučovací hodiny. Žáci nemají možnost výběru odpovědi z nabídky, ale musí svoje závěry samostatně formulovat vlastními slovy. Hledají tak příklady či protipříklady, zapisují své úvahy a výpočty či uvádějí argumenty. Mohou zde uplatnit i dovednosti z reálného života, jak je uvedeno na stránce Kalibra (www.kalibro.eu). V letošním školním roce se matematickému testu podrobilo asi 8 000 žáků druhého stupně ZŠ.

Na obr. 21 jsem uvedla úlohu, která se objevila v testu z prvouky pro žáky 3. ročníku základní školy (zaměřena na záporná čísla v modelu teploměr, který je znám žákům tohoto věku z každodenního života). Tato úloha měla velmi vysokou úspěšnost, celých 75 %. V prvních třech bodech měli žáci vybrat den s požadovanou vlastností a v posledním úkolu měli vybrat den, kdy bylo nejchladněji (nejnižší teplotu).



G **Sára se před odjezdem do Ischglu dívala na internetovou předpověď počasí.**

	neděle	pondělí	úterý	středa	čtvrtek	pátek
Předpověď počasí						
hřeben 2 872 m	-5 °C	-11 °C	-9 °C	-6 °C	-3 °C	1 °C
údolí 1 377 m	4 °C	-1 °C	-1 °C	5 °C	6 °C	8 °C
vítr	→	→→→	→	→	→→	→→→

ÚKOL 1. Napiš, který den má padat sníh s deštěm: ______________

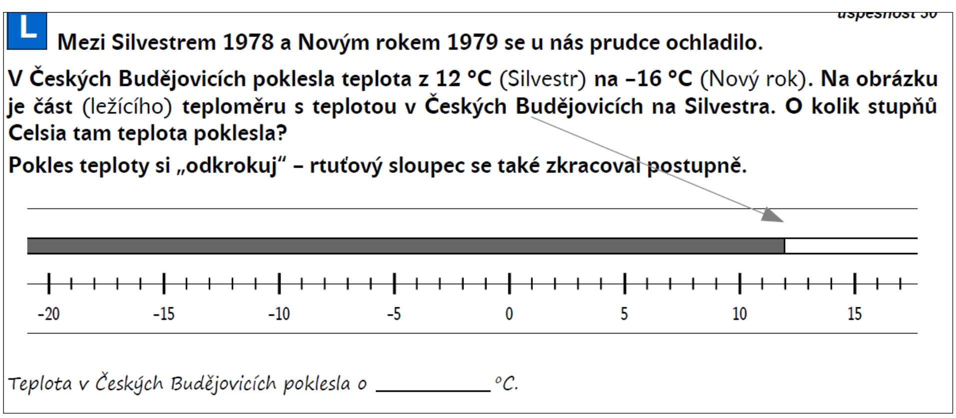
ÚKOL 2. Napiš, který den má vát slabý vítr a jen občas svítit slunce: ______________

ÚKOL 3: Napiš, jaká TEPLOTA má být v údolí, když má nejvíc sněžit: ______________

ÚKOL 4: Napiš, který den má být nejchladnější: ______________

Obr. 21: Úloha zaměřena na záporná čísla

Jako následující úlohu jsem zařadila úlohu z testu přírodovědného základu určenou žákům 3. ročníku prvního stupně základní školy (obr. 22), která je uvedena autory Botlík a Souček (2015).



L **Mezi Silvestrem 1978 a Novým rokem 1979 se u nás prudce ochladilo.**

V Českých Budějovicích poklesla teplota z 12 °C (Silvestr) **na –16 °C** (Nový rok). **Na obrázku je část** (ležícího) **teploměru s teplotou v Českých Budějovicích na Silvestra. O kolik stupňů Celsia tam teplota poklesla?**

Pokles teploty si „odkrokuj" – rtuťový sloupec se také zkracoval postupně.

Teplota v Českých Budějovicích poklesla o __________ *°C.*

Obr. 22: Úloha z testu přírodovědných znalostí

V této úloze měli žáci zjistit (případně odečíst z obrázku), o kolik stupňů poklesla teplota z hodnoty 12°C na hodnotu –16°C. V hodnocení výsledků autoři jako správnou odpověď hodnotili výsledek 28°C i –28°C. Správně úlohu vyřešilo 30 % žáků a zápornou hodnotu uvedlo pouze 0,47 % žáků. Jelikož byl v zadání úlohy uveden obrázek teploměru (číselná osa), 8 % žáků uvedlo výslednou hodnotu 29°C a 4 % žáků hodnotu 27°C. Tito žáci s největší pravděpodobností postupovali správně, ale udělali numerickou chybu.

1.7.3 CERMAT – centrum pro zjišťování výsledků vzdělání

CERMAT je centrum pro zjišťování výsledků ve vzdělání, které bylo zřízeno v roce 2006 Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy. Hlavní náplní centra je příprava společných částí pro maturitní zkoušku, dále pak vytváření standardů pro hodnocení výsledků vzdělávání na základě kurikulárních dokumentů či hodnocení výsledků vzdělávání v ČR a vytváření podmínek pro jejich uznání v EU. Nedílnou součástí je také výzkum a vývoj v oblasti forem, prostředků, nástrojů a metod hodnocení výsledků vzdělávání či vzdělávání pedagogických pracovníků.

K testování využívá CERMAT výhradně didaktických testů, jejichž ukázky nalezneme na stránce CERMATU (**www.cermat.cz**) nebo na stránkách věnovaných výhradně maturitním zkouškám (www.novamaturita.cz). CERMAT se věnuje především testováním jazyků (právo státní jazykové zkoušky) a matematiky, kterou se budu dále zabývat. V matematice zajišťuje několik typů zkoušek: maturitní zkoušky, matematika+ a nově také pilotní ověřování organizace přijímacích zkoušek na střední školy zakončené maturitní zkouškou.

Jak uvádí E. Řídká a E. Lesáková (2006) projekt „Hodnocení výsledků vzdělávání žáků 9. tříd“ začal pod záštitou MŠMT již v roce 2003 (ještě než byla agentura CERMAT zřízena). Za cíl si projekt klade do základních škol přivést hodnotící nástroj, který by mohl být využit pro vnitřní evaluaci škol, autoevaluaci žáků a současně poskytne informace i ostatním partnerům školy.

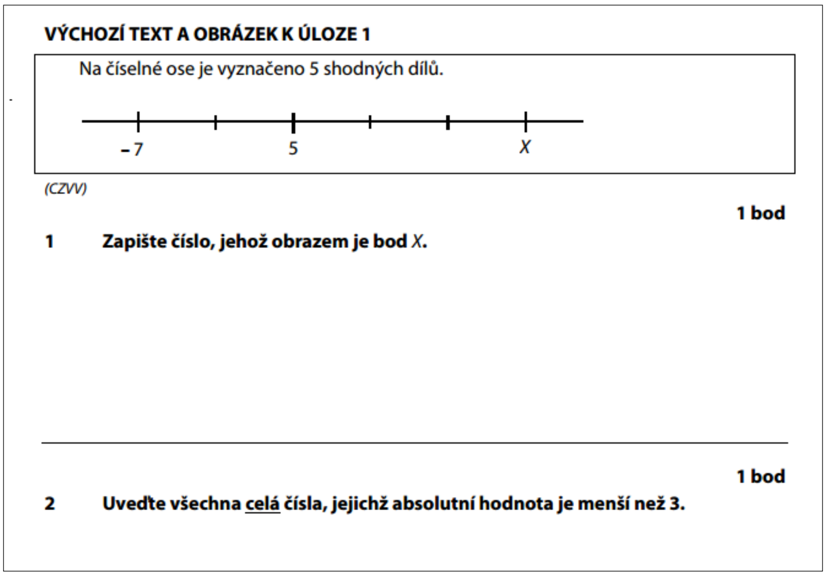
Jak uvádí E. Řídká a E. Lesáková (2006), největšího rozsahu dosáhlo testování matematických dovedností v České republice právě ve školním roce 2005/2006, kdy se do testování 9. ročníků zapojila polovina našich základních škol. Na řešení didaktického testu mají žáci 40 minut čistého času. Jelikož se ve své práci zaměřuji na problematiku záporných čísel, zařazuji zde jednu otevřenou úlohu, která se objevila v testu v roce 2005 a k níž jsou známa alespoň nějaká data. Předpokladem pro úspěšné řešení této úlohy – 3 – (–8) = je zapamatování si jednoduchého postupu, možná i proto tato úloha měla vysokou úspěšnost, a to téměř 87 %. Úspěšnost této úlohy může být u mnoha žáků ovlivněna mírou procvičování a zapamatování si daných pravidel. Problematika počítání se zápornými čísly se pak dále v didaktických testech objevuje především v algebraických výrazech nebo rovnicích.

Shrnutí úspěšnosti uvádí závěrečná zpráva z cyklu pilotních projektů 2005–2008 dostupná na stránkách (www.cermat.cz) *Hodnocení výsledků vzdělávání žáků 9. tříd ZŠ a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií*; počet účastnících se žáků se rok od roku zvyšoval. Zatímco v roce 2005 se testování dovedností v matematice účastnilo pouze necelých 11 tisíc žáků, během čtyř let se počet žáků navýšil na 68 649 žáků. Musím však podotknout, že zatímco v prvních ročnících se celková úspěšnost žáků mírně zlepšovala, v posledním ročníku úspěšnost velmi klesla (tab. 6), a to nejen ve zmiňované matematice. Výrazný pokles zaznamenali žáci základních škol, ale i žáci víceletých gymnázií, jejichž úspěšnost však byla vždy alespoň o 28 % vyšší než u žáků ZŠ. Bohužel zprávy CERMATu se nezmiňují přímo o problematice záporných čísel.

Tab. 6: Úspěšnost žáků v testech podle roků uskutečnění

Rok testování	2005	2006	2007	2008
Úspěšnost v matematice	42 %	43 %	47 %	36 %

Závěrem zmíním úlohu na obr. 23, která byla součástí maturitního testu konaného na jaře roku 2015 (výsledky žáků zatím nejsou známy). Některé další úlohy z didaktických testů pilotního testování žáků vstupujících na střední školy jsem využila ve svém výzkumu.


VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 1

Na číselné ose je vyznačeno 5 shodných dílů.

(CZVV)

1 bod

1 Zapište číslo, jehož obrazem je bod *X*.

1 bod

2 Uveďte všechna celá čísla, jejichž absolutní hodnota je menší než 3.

Obr. 23: Zadání úlohy z maturitního testu

1.7.4 Záporná čísla z pohledu učitelů matematiky

N. Vondrová a J. Žalská (2013, s. 63−66) uvádějí, že učitelé 2. stupně základních škol považují záporná čísla za jednu z problematických oblastí matematiky. Jako příčiny těchto kritických oblastí učitelé uvádějí nedostatečné pracovní nasazení žáků, nepřemýšlení, nepečlivost či přehlédnutí. Velkou roli hraje také nepochopení předchozí látky či překážky, které autoři rozdělují do tří skupin.

1. Překážky spojeny s kognitivní kapacitou a vývojem žáka.
2. Překážky didaktického původu, které jsou způsobeny výběrem didaktického stylu strategií výuky.
3. Překážky objevující se při procesu nabývání znalostí, které nemůžeme eliminovat.

Jako nejčastější problém pak učitelé matematiky uvádějí aritmetické dovednosti žáků. Tyto dovednosti učitelé zdůrazňují, protože jejich nezvládnutí bývá častou příčinou selhávání žáků při probírání matematické látky ve vyšších ročnících. Učitelé tedy kladou velký důraz na procvičující aktivity aritmetických dovedností a zařazují do svých hodin např. matematické rozcvičky a hry.

N. Vondrová a J. Žalská (2013,79−126) uvádějí, že jako nejčastější problém učitelé zmiňují chybovost při provádění operací $(-a) \cdot (-b) = c$ a $(-a) + (-b) = -d$, kde a, b, c, d jsou kladná reálná čísla. Dále učitelé uvádějí častý výskyt chyb při užívání distributivního zákonu (úpravy číselných výrazů se závorkami). Učitelé se shodují na tom, že žáci jsou schopni naučit se jednotlivá pravidla pro počítání s celými čísly, ale jakmile začnou operace spojovat dohromady, tak se jim začnou plést. Ale pochopení pojmu záporného čísla dle jejich názoru žákům problém nečiní.

Jako příčinu výskytu chyb při počítání s celými čísly učitelé shodně uvádějí nedostatečné procvičení, nepozornost, zbrklost a zapomínání pravidel (především pro násobení, jelikož pro něj neexistuje žádný názorný model, jako například stupnice teploměru pro sčítání a odčítání).

Z rozhovorů s učiteli dále vyplývá, že nejčastěji bývají k zavedení pojmu záporné číslo využity tyto modely: model číselné osy a dva reálné modely (teploměr a platební bilance). Při zavádění operace sčítání a odčítání dotazovaní učitelé využívají především číselné osy a platební bilance. Někteří vysvětlují tyto operace posunováním objektu po číselné ose.

Dotazovaní učitelé dále uvádějí, že nejlépe lze k počítání s celými čísly motivovat žáky úlohami s finanční tematikou a jediným osvědčeným způsobem, jak žáky naučit správně provádět početní operace s celými čísly, je neustálé a dlouhé procvičování řešením úloh. Jelikož žáci mají často problémy především při použití distributivního zákona u násobení a dělení, většina učitelů jim překládá mnemotechnické nebo grafické pomůcky (např. tabulku se znaménky).

2 EXPERIMENTÁLNÍ ČÁST

2.1 Metodologie

Za cíl experimentální části své diplomové práce si kladu identifikaci problémů a chyb u žáků 7. a 8. ročníků základní školy, kterých se dopouštějí při práci se zápornými čísly. Dále je mým cílem zjistit pravděpodobnou příčinu vytváření těchto chyb a nějakým způsobem je klasifikovat. Ve svém výzkumu jsem využila 10 úloh zaměřených na práci se zápornými čísly. Některé úlohy jsem vytvořila sama na základě prostudování učebnic používaných k výuce na základních školách, dvě úlohy jsem převzala z testování TIMSS 2007 a některé další vybrala z ilustračních testů CERMATu. Kompletní zadání testu jsem uvedla v příloze A.

Metodou sběru dat bylo písemné řešení testu žáky. Po jeho vypracování jsem s konkrétními žáky hovořila o řešení jednotlivých úloh a požádala je o doplnění jejich řešení a vysvětlení některých jejich kroků, abych měla podrobnější informace o jejich problémech u jednotlivých úloh. Do testování jsem zařadila žáky ze tří základních škol.

Připravené úlohy jsem jako pre-test zadala v 8.B na ZŠ Hradská, především proto, že jsem tyto žáky učila na praxi a měla jsem s nimi velmi dobrý vztah. Na vypracování testu měli žáci 35 minut, ale nejlepší z nich měli test vypracovaný již po 17 minutách. Průměrně žáci pracovali 25 minut, a proto jsem čas na vypracování v ostatních třídách zkrátila na 30 minut. Tento čas všem žákům na vypracování stačil a já měla více času na doplňující otázky.

V 8.B jsem si ověřila několik faktů:

1. Je zapotřebí žáky ubezpečit, že test není známkován a nemůže ovlivnit jejich klasifikaci. Jelikož jsem testování prováděla koncem školního roku, tento fakt žáky velmi uklidnil a byli sdílnější.
2. Je zapotřebí žáky ujistit, že jejich test nebude nikde zveřejněn. Nevyžadovala jsem podepsání testu, což žáci kvitovali s povděkem.
3. Někteří žáci sami žádali, abych jejich test poskytla jejich vyučujícím, protože věřili ve zlepšení známky na vysvědčení (byli velmi motivováni k práci).
4. Je nutné žáky upozornit, aby nepoužívali kalkulačku (eliminace metody pokus omyl).
5. Je nutné minimalizovat kontakt žáků, aby si neradili a opravdu pracovali samostatně. To se projevilo především u poslední úlohy, kde měli někteří žáci uvedena 4 čísla,

ale když jsem se zeptala, jak na ně přišli, nebyli schopni odpovědět. Bylo evidentní, že úlohu nevyřešili sami, nebo použili kalkulačku (k čemuž se většina žáků přiznala).

6. Při procházení mezi žáky jim bylo nutné připomínat, aby doplnili řešení k některým úlohám, aby bylo jasné, jak postupovali.
7. Bylo nutné žáky upozornit na to, aby neškrtali pomocné výpočty a negumovali je.
8. Velký počet žáků se ptal na svislé čáry kolem čísel. Poskytla jsem jim pouze informaci, že se jedná o absolutní hodnotu.
9. Ukázalo se, že některé žáky velmi zajímají jejich výsledky, a proto uváděli kontakt, aby jim mohly být zaslány výsledky.

Protože v ostatních třídách probíhalo testování stejným způsobem, zařadila jsem výsledky 8. B do hlavního výzkumu.

2.1.1 Účastníci experimentu

Abych získala velký vzorek žáků pro testování, oslovila jsem několik základních škol a víceleté gymnázium. Protože záporná čísla jsou probírána většinou v sedmém ročníku ZŠ, vybrala jsem k testování žáky 7. a 8. ročníků ZŠ. Na gymnáziu se mnou bohužel nechtěli z časových důvodů spolupracovat. Test jsem nechala vypracovat všechny žáky v 7. a 8. ročnících na třech vybraných základních školách. Z vypracovaných testů jsem vyřadila pouze práce žáků, kteří měli na vysvědčení v předcházejícím pololetí jedničku z matematiky, protože u nich jsem nepředpokládala (jak se potvrdilo) utváření chyb při práci se zápornými čísly. Jednalo se celkem o 14 testů. Dále jsem tedy pracovala s 85 testy žáků 7. ročníku a 100 testy žáků 8. ročníku.

Jako první školu jsem zvolila ZŠ Hradskou (Humpolec, Hradská 894), protože jsem zde absolvovala v loňském roce praxi v rámci studia. Kontaktovala jsem paní učitelku Janu S., u které jsem byla na praxi, a domluvila jsem se s panem ředitelem, že školu navštívím ve dvou dnech, kdy žáci 7. a 8. ročníků mají matematiku, a zadám jim testy k vypracování během vyučování. Jednalo se celkem o 4 třídy. Domluvili jsme se, že žáci testy vypracují v rámci opakování, a proto nebylo nutné žádat o svolení k testování rodiče.

Nejvíce žáků se zapojilo ze ZŠ Hálkova (Humpolec, Hálkova 591), kde mě pan ředitel odkázal na paní učitelku Kamilu Z., s kterou jsem se domlouvala na všech podrobnostech. Testy žákům 7. a 8. ročníků jsem zadávala v průběhu dvou dnů, kdy měli v rozvrhu matematiku. Jednalo se celkem o 5 tříd.

Pro zajímavost jsem zařadila do výzkumu i ZŠ Senožaty (Senožaty, 184), jedná se o menší školu na vesnici nedaleko Humpolce. I zde byla komunikace s panem ředitelem bezproblémová. Na škole vyučuje matematiku sám pan ředitel, ale z časových důvodů mě odkázal na fyzikáře Josefa Z., který mi umožnil zadat testy v jeho hodině fyziky, kde jsme spojili dohromady 7. i 8. ročník, protože je v obou ročnících malý počet žáků.

2.1.2 Průběh testování

Každý žák obdržel předtištěné zadání testu s 10 úlohami na jednom listu papíru formátu A4. Úlohy byly koncipovány tak, aby nebyly časově náročné. V testu byl dostatek místa pro řešení jednotlivých úloh a žáci neměli k řešení využívat kalkulačku. Na vypracování měli žáci 30 minut, pro rychlejší žáky byly připraveny dobrovolné úlohy, aby se v hodině nenudili. Dobrovolné úlohy byly vytištěny na druhé straně listu hlavního testu, což se v 8.B neosvědčilo. Někteří žáci by raději řešili doplňující úlohy, protože jim připadaly jednodušší. V dalších třídách už jsem dobrovolné úlohy předkládala pouze žákům, kteří měli test vypracovaný dříve, a já na ně neměla další otázky.

Žáky jsem upozornila na fakt, že test nebude známkován, a nebude tedy ovlivňovat jejich hodnocení z matematiky. Ubezpečila jsem je, že test je anonymní a nebude nikde zveřejňován. Požádala jsem žáky, aby detailně popisovali své postupy u jednotlivých úloh, ale bohužel ne všichni to tak udělali. Proto jsem se snažila procházet třídou a po dokončení testu si nechala některé myšlenkové pochody doplnit rozhovorem s daným žákem.

2.2 Zpracování hlavní studie

Jako zadavatel testu jsem se snažila žákům odpovídat na jejich dotazy, pokud se neptali přímo na řešení dané úlohy. Při procházení třídy jsem si všimla, že někteří žáci velké množství úloh vynechali a skončili velmi brzo. Upozornila jsem je tedy, že některé úlohy nejsou tak složité, jak mohou na první pohled vypadat, a motivovala je tak k další práci. Většina žáků poté ještě několik úloh dořešila a opravila si chybné řešení u některých úloh. Dále rozeberu řešení jednotlivých úloh a poukážu na nejčastější a nejzávažnější chyby.

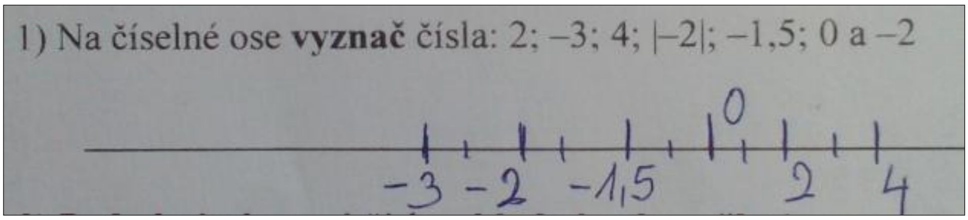
<u>1. úloha:</u>

Na číselné ose **vyznač** čísla: 2; –3; 4; |–2|; –1,5; 0 a –2

V první úloze měli žáci vyznačit uvedená čísla na číselné ose. Protože jsem předpokládala, že žáci nemusejí mít pravítko, vložila jsem pod zadání úlohy pomocnou přímku, kterou všichni žáci bez výjimky využili. Počátek a měřítko si žáci volili dle vlastního uvážení.

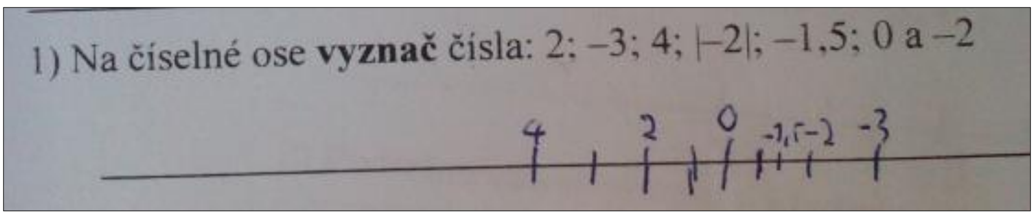
Tuto úlohu jsem zvolila jako první, protože jsem se domnívala, že žákům nebude činit obtíže. Záměrem bylo u žáků navodit pocit klidu a jistoty a ukázat, že test není tak obtížný, jak by se mohl zdát. Zadání bylo formulováno zcela jasně, a proto jsem nepředpokládala, že budou žáci v této úloze chybovat. Jediný problém by z mého pohledu mohla činit absolutní hodnota. Opak byl však pravdou a mnoho žáků mělo s úlohou značné problémy. Zcela správně vyřešilo úlohu pouze 35 žáků ze 185 testovaných, což je pouze 19% úspěšnost.

Velmi častou chybou bylo, jak jsem předpokládala, chybné zakreslení absolutní hodnoty na číselnou osu, někteří žáci ji nevyznačili vůbec, někteří ji ztotožnili s –2. Tuto chybu udělalo celkem 59 žáků. Několik žáků chybovalo v měřítku číselné osy, jednalo se o 23 žáků (obr. 24). Této chyby se žáci dopouštěli s největší pravděpodobností proto, že nejsou zvyklí s číselnou osou často pracovat. A když už s ní pracují, většinou mají vyznačený alespoň počátek, popřípadě nějaké další číslo. Dalším možným důvodem této chyby je to, že žáci vnímají číselnou osu pouze jako schéma a neuvědomují si důležitost volby měřítka. Zbylých 42 žáků udělalo jinou chybu (vyznačili navíc některá čísla, jiná vynechali). Mohlo se jednat i o chyby z nepozornosti.



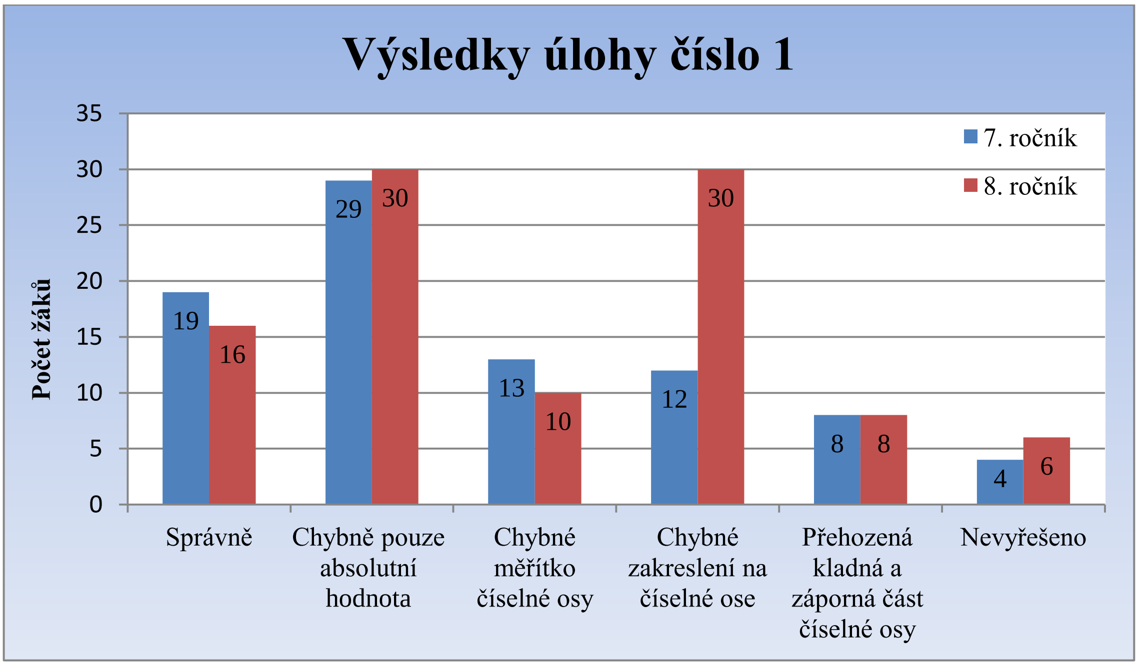
Obr. 24: Chybně určené měřítko číselné osy jedním z žáků

Velmi mě překvapilo, že 12 žáků úlohu vůbec neřešilo, protože si s ní nevědělo rady. Jako nejzávažnější chybu bych označila špatné zakreslení číselné osy. Této chyby se dopustilo 16 žáků (na číselné ose označili kladnou část vlevo od nuly a zápornou vpravo od nuly (obr. 25).



Obr. 25: Chybné zakreslení číselné osy jedním z žáků

Toto řešení mě velmi překvapilo, protože se jednalo o žáky, kteří se učí podle učebnice autorské dvojice Odvárko a Kadleček (která číselnou osu využívá). Je však otázka, do jaké míry ji využívají samotní učitelé. Výsledky první úlohy jsem shrnula do grafu na obr. 26.



Obr. 26: Nejčastější chyby v úloze 1

2) **Podtrhni záporná** čísla a **kladná zakroužkuj**:

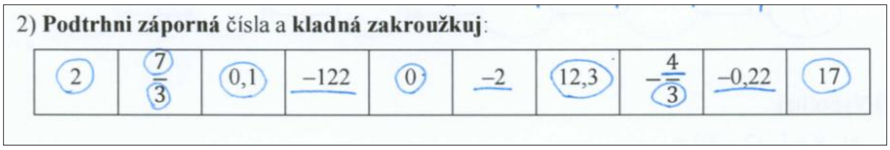
2	$\frac{7}{3}$	0,1	–122	0	–2	12,3	$-\frac{4}{3}$	–0,22	17

Ve druhé úloze měli žáci vyznačit kladná a záporná čísla. I u této úlohy jsem se domnívala, že nebude žákům činit větší obtíže; zadání bylo podle mého názoru formulováno jasně. Záměrem úlohy bylo především zaměřit pozornost žáků na záporná čísla. Jako nejčastější chybu jsem předpokládala chybné označení nuly. Bohužel moje předpoklady žáci v tomto směru zcela naplnili.

Pouze nulu chybně označilo 75 žáků z celkového počtu 185 testovaných, což odpovídá 41 % chybujících. Celkem 58 žáků označilo nulu za kladné číslo a pouze jeden žák ji označil za záporné číslo. Jako velký problém vidím, že 17 žáků označilo nulu zároveň za kladné i záporné číslo (obr. 27). Tito žáci dle mého názoru nepochopili správně pojem záporné ani kladné číslo. Jeden žák nulu označil za číslo záporné, ale ten se dopustil i dalších chyb.

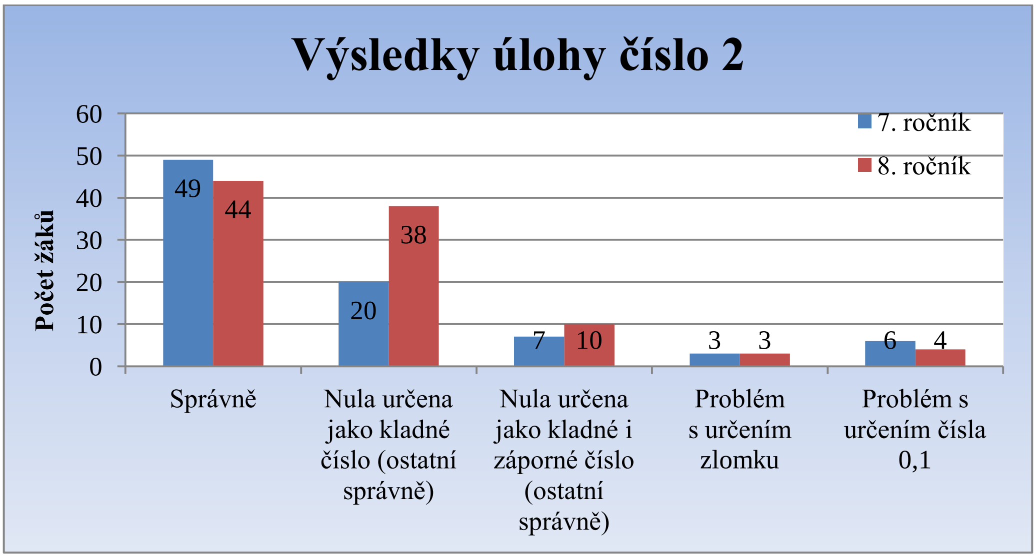
Ze zbylých 16 žáků (někteří špatně označili i nulu) udělalo 6 žáků chybu v označení zlomku. Tři žáci oba zlomky označili za záporné číslo a dva neoznačili zlomek $\frac{7}{3}$ jako kladné číslo, ale zároveň zlomek $-\frac{4}{3}$ označili správně jako číslo záporné. Velmi mě překvapilo, že jedna žákyně 8. ročníku rozložila zlomek $-\frac{4}{3}$ na dvě čísla – 4 záporné číslo a 3 kladné číslo (obr. 28). Dle mého názoru tato žákyně nemá správně uchopený pojem zlomek, který pro ni není jedno číslo, ale dvě čísla (čitatel a jmenovatel).

Obr. 27: Neporozumění pojmu kladné a záporné číslo, chybné označení nuly



Obr. 28: Chybné uchopení pojmu zlomek, žákyně nepovažuje zlomek za jedno číslo, ale za dvě různá (čitatel záporné číslo, jmenovatel kladné číslo)

Dalších 10 žáků mělo problém s označením čísla 0,1 a určili ho jako záporné, nebo ho neoznačili vůbec. Tato chyba se mi jeví jako velmi závažná, protože žáci se s největší pravděpodobností domnívají, že se jedná o číslo menší než nula. Celkové dosažené výsledky žáků v druhé úloze jsem shrnula do grafu na obr. 29.



Obr. 29: Nejčastější chyby žáků v úloze 2

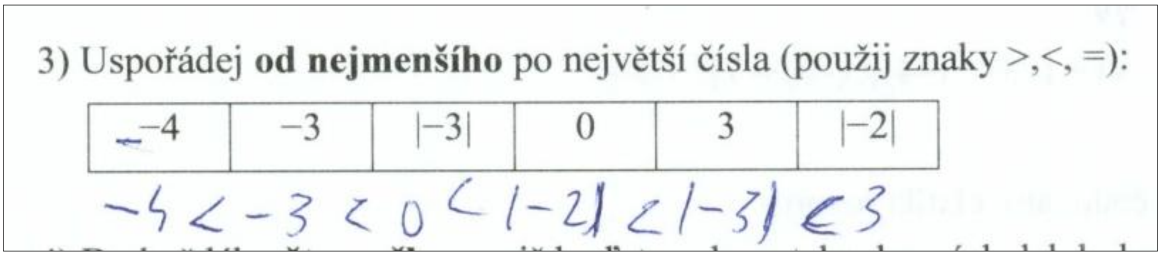
3) Uspořádej **od nejmenšího** po největší čísla (použij znaky >, <, =):

−4	−3	|−3|	0	3	|−2|

Třetí úloha měla za cíl prověřit, zda žáci ovládají porovnávání velikostí čísel a zda umí správně používat znaky (>, <, =). U této úlohy jsem předpokládala větší chybovost než u předchozích dvou úloh, ale domnívala jsem se, že nebude žákům činit velké potíže.

K mému velkému překvapení tuto úlohu vyřešilo správně pouze 17 žáků, z toho 14 žáků 7. ročníku. S úlohou mělo problém nejvíce žáků a stala se tak nejproblémovější úlohou. Možnou příčinou tak nízké úspěšnosti je pouze formální uchopení žáků pojmu absolutní hodnota. Ukazuje na to fakt, že žáci účastnící se mého testování měli absolutní hodnotu zařazenou u výuky celých čísel. A navíc by ji měli mít zopakovanou. Učitelé mi potvrdili, že úlohy na počítání s absolutní hodnotou se objevily v jejich pololetních písemných pracích, které žáci psali v týdnu předcházejícím zadání mého testu.

Největší problém v úloze činila žákům bezpochyby absolutní hodnota. Celkem 114 žáků udělalo chybu v absolutní hodnotě, což odpovídá 62 % žáků z celkového počtu žáků. Celkem 59 žáků označilo absolutní hodnotu jako záporné číslo, a v řadě porovnávaných čísel ji tak uvedlo vlevo od nuly. Jednalo se o 34 žáků 7. ročníku a 25 žáků 8. ročníku (většinou se jednalo o žáky, kteří měli s absolutní hodnotou problém i v první úloze). Dvanáct žáků uvedlo absolutní hodnotu jako kladné číslo, ale chybně ji porovnalo (obr. 30). Tato vysoká neúspěšnost svědčí o neporozumění pojmu absolutní hodnota, protože všichni žáci účastnící se výzkumu by ji měli mít v živé paměti z předchozích hodin.


3) Uspořádej **od nejmenšího** po největší čísla (použij znaky >,<, =):

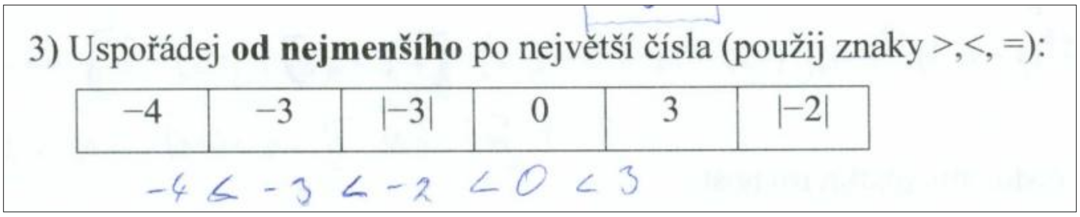
−4	−3	|−3|	0	3	|−2|

−4 < −3 < 0 < |−2| < |−3| ≤ 3

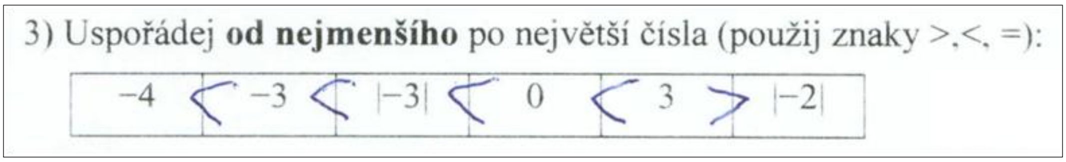
Obr. 30: Neuvědomění si rovnosti mezi absolutní hodnotou kladného čísla a číslem samotným

Dalších 25 žáků absolutní hodnotu do řady porovnávaných čísel vůbec neuvedlo a porovnali jen zbylá čtyři čísla (obr. 31). Příčinou této chyby může být jak neporozumění absolutní hodnotě, tak i snaha o zjednodušení řešení. Jiné špatné řešení uvedlo 7 žáků 7. ročníku a 10 žáků 8. ročníku.

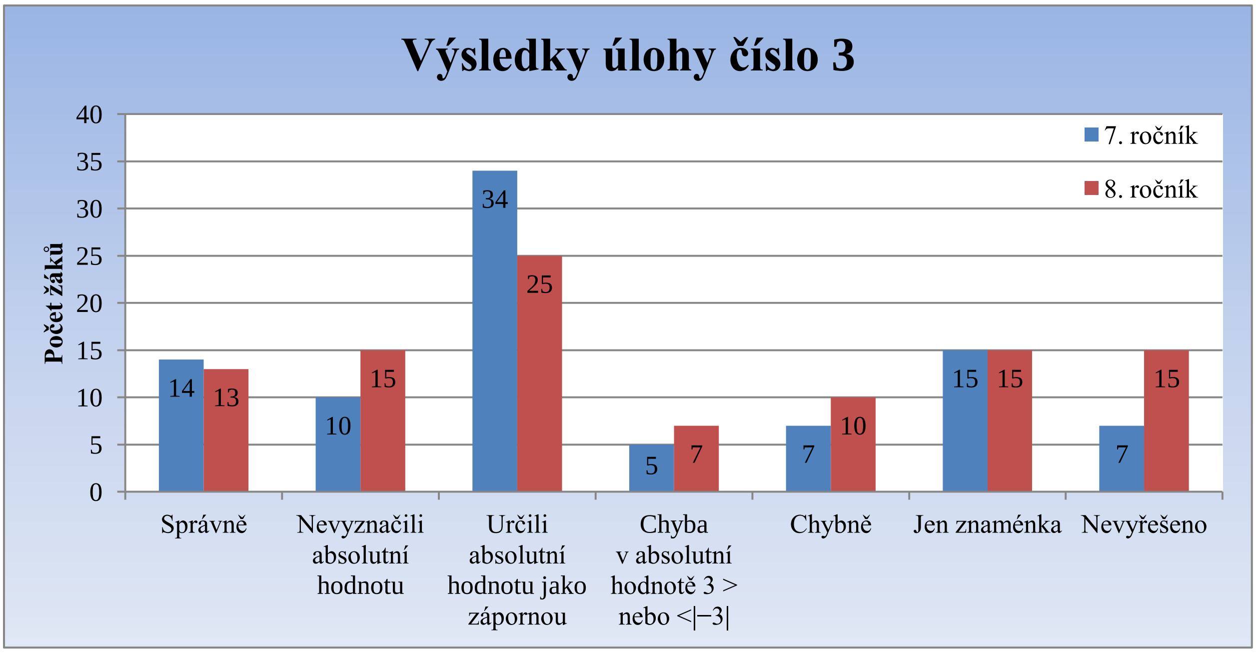
Sedmnáct žáků špatně pochopilo zadání a uvedlo tak pouze porovnávací znaménka mezi čísla v zadání (obr. 32). Vedlejší čísla tak byla po dvou porovnána správně, ale čísla nebyla uspořádána od nejmenšího po největší. Nemohu tak s jistotou říci, zda by tito žáci nevyřešili úlohu správně, kdybych je opětovně upozornila na zadání úlohy. Je možné, že se jedná o nepochopení zadání, ale není vyloučeno, že žáci zadání obešli pro ně jednodušší cestou, a vyhnuli se tak problematice, kterou neovládají. Zbylých 22 žáků se o řešení této úlohy ani nepokusilo. Celkové výsledky třetí úlohy jsou uvedeny v grafu na obr. 33.



Obr. 31: Nezačlenění čísel v absolutní hodnotě do porovnávané řady



Obr. 32: Chybné pochopení zadání, porovnání pouze vedlejších dvojic čísel



Obr. 33: Nejčastější chyby v úloze 3

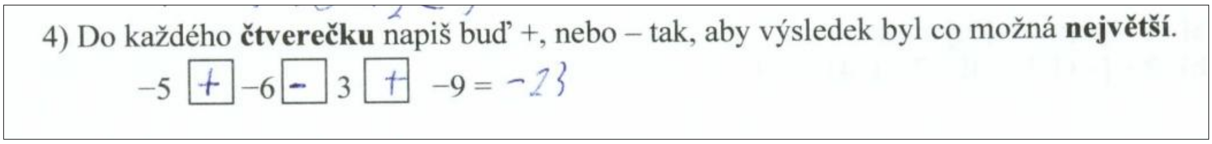
4) Do každého **čtverečku** napiš buď +, nebo – tak, aby výsledek byl co možná **největší**.

$-5\ \square\ -6\ \square\ 3\ \square\ -9 =$

Čtvrtá úloha byla zcela jiného charakteru než úlohy předešlé. Jedná se o úlohu, která se objevila v testování TIMSS v roce 2007, a protože se týká problematiky záporných čísel, i já jsem ji zařadila do testování. Nejefektivnější způsob řešení úlohy spočívá v aplikaci poznatku o počítání se zápornými čísly. Žáci však mohou úlohu řešit i zkusmo, to ale k mému velkému překvapení provedlo jenom 27 žáků. V testování TIMSS uspělo v této úloze 49 % žáků a i já jsme předpokládala podobný výsledek.

Žáci mě mile překvapili, protože dosáhli ještě lepších výsledků než žáci účastnící se výzkumu TIMSS. Správně úlohu vyřešilo 48 žáku 7. ročníku a 57 žáků 8. ročníku. Pouze 8 žáků úlohu vůbec neřešilo.

Jak jsem předpokládala, nejčastější chybou bylo doplnění znamének +, −, +. Této chyby se dopustilo 32 žáků; 15 ze 7. ročníku a 17 z 8. ročníku. Tato chyba se mi jeví jako velmi závažná, protože žáci jako největší možný výsledek uvádějí záporné číslo −23 (obr. 34). Všichni tito žáci s největší pravděpodobností mají chybně uchopený pojem záporného čísla (nechápou jeho velikost ve vztahu ke kladným číslům), ale mají naučená znaménková pravidla pro počítání s nimi.

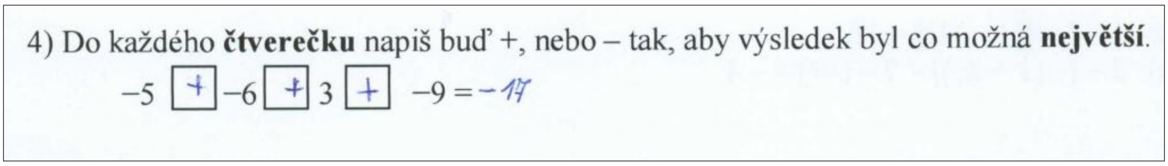


4) Do každého **čtverečku** napiš buď +, nebo – tak, aby výsledek byl co možná **největší**.

$-5\ \boxed{+}\ -6\ \boxed{-}\ 3\ \boxed{+}\ -9 = -23$

Obr. 34: Žák si neuvědomuje, že číslo – 23 je menší než číslo 13, které bylo správným řešením

Další velmi častou chybou bylo doplnění znamének +, +, +. Této chyby se dopustilo 5 žáků sedmého ročníku a 10 žáků ročníku osmého. Tito žáci všechna čísla automaticky sečetli, aniž by pracovali se znaménky daného čísla (obr. 35). Tuto chybu považuji také za velmi závažnou a zařadila bych ji k chybám úkonovým. Domnívám se, že vznikla především proto, že žáci neumějí správně provádět operace se zápornými čísly.

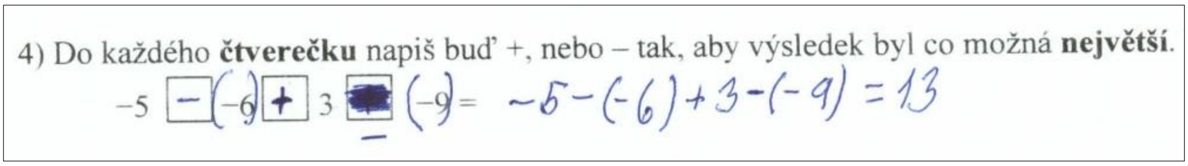


4) Do každého **čtverečku** napiš buď +, nebo – tak, aby výsledek byl co možná **největší**.

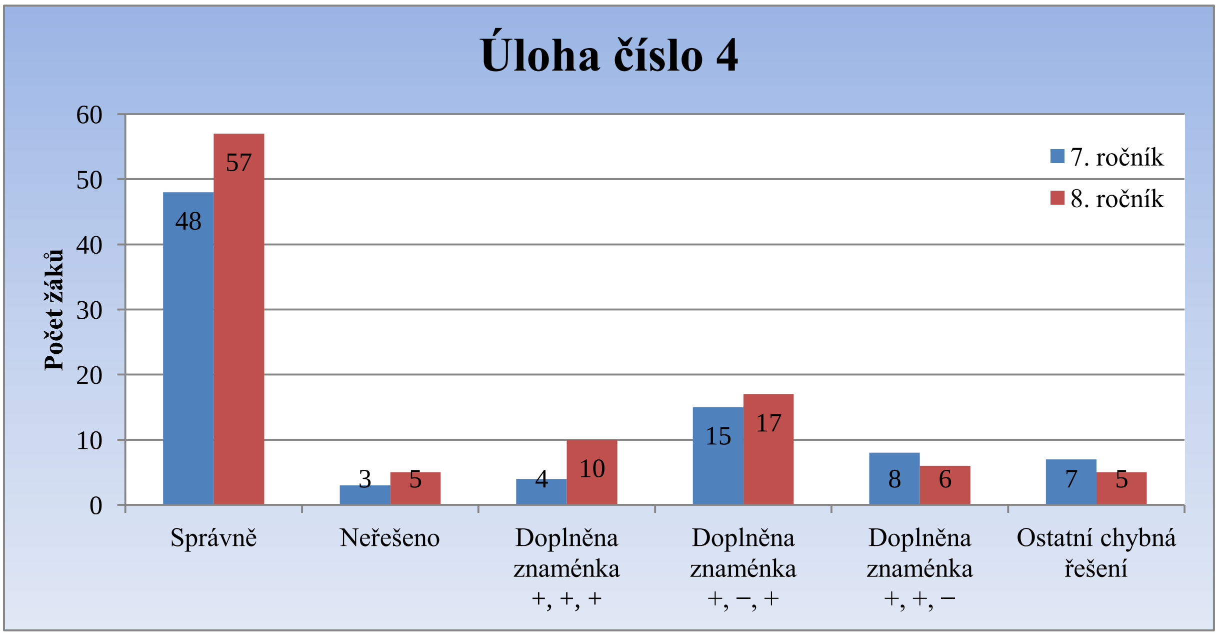
$-5\ \boxed{+}\ -6\ \boxed{+}\ 3\ \boxed{+}\ -9 = -17$

Obr. 35: Úkonová chyba žáka 7. ročníku, žák se domnívá, že největšího výsledku dosáhne, když provede součet všech uvedených čísel

Ostatních 26 žáků udělalo jinou chybu, tyto chyby vznikly podle mého názoru u některých z nepozornosti a u většiny z důvodu nesprávného počítání se zápornými čísly. Pouze 3 žáci z celkového počtu testovaných doplnili do výrazu závorky tak, aby vedle sebe nebyla dvě matematická znaménka (obr. 36). Řešení úlohy jednotlivými žáky jsem uvedla do grafu na obr. 37.

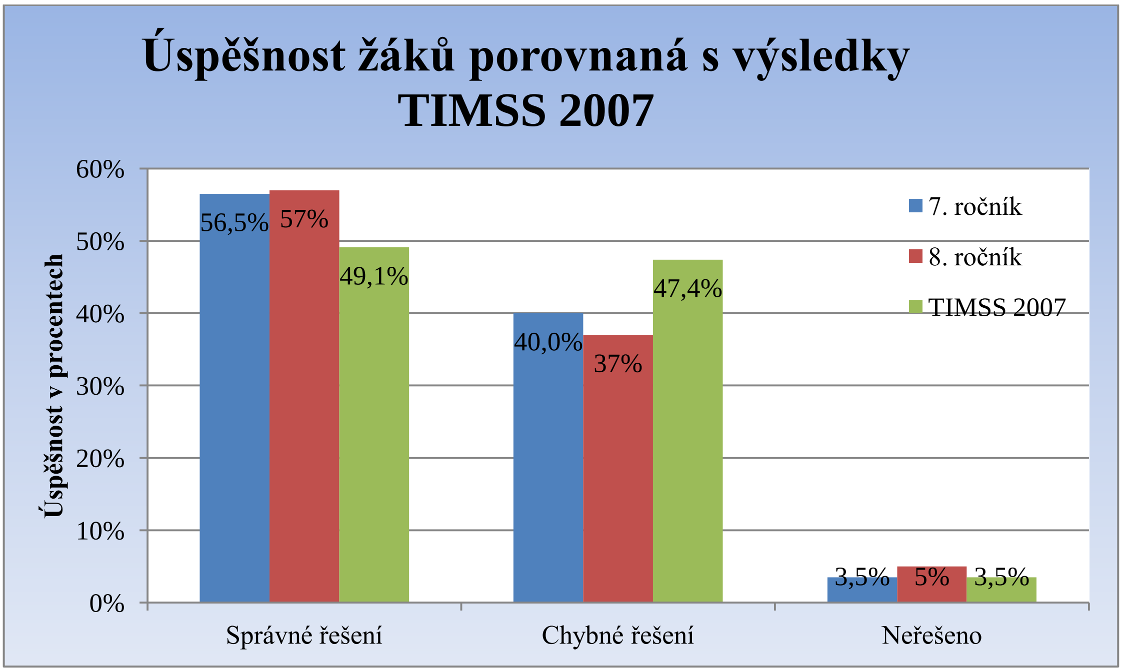

4) Do každého **čtverečku** napiš buď +, nebo – tak, aby výsledek byl co možná **největší**.
−5 − (−6) + 3 − (−9) = −5 − (−6) + 3 − (−9) = 13

Obr. 36: Ilustrace správného doplnění závorek, tento žák si jako jeden z mála uvědomuje, že nemohou stát dvě matematická znaménka vedle sebe



Obr. 37: Nejčastější chyby v úloze 4

Protože se jedná o úlohu, která se objevila v testování TIMSS 2007, uvádím v grafu na obr. 38 porovnání úspěšnosti žáků účastnících se mého testování s žáky účastnících se testování TIMSS 2007. Zprávy TIMSS bohužel nepřinášejí podrobné informace o chybách žáků, a proto je nemohou porovnat.



Obr. 38: Porovnání úspěšnosti žáků s úspěšností v testování TIMSS 2007

5) Které číslo po vydělení číslem –6 dává výsledek 12?

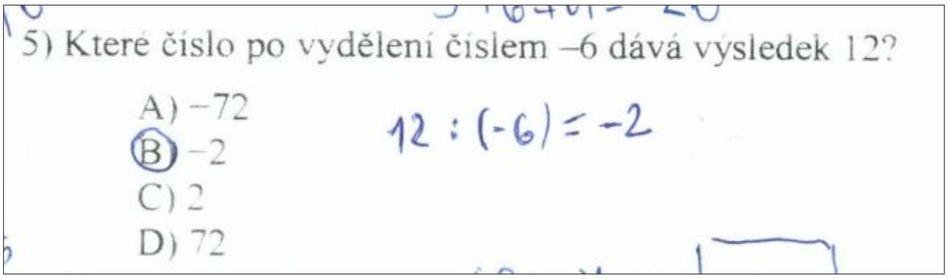
A) −72
B) −2
C) 2
D) 72

Jako pátou úlohu jsme zvolila opět úlohu, která byla zařazena v testování TIMSS 2007. Jedná se o jedinou úlohu, kde měli žáci možnost výběru odpovědi (uzavřená úloha). Cílem této úlohy bylo zjistit, zda žáci umí dělit záporným číslem.

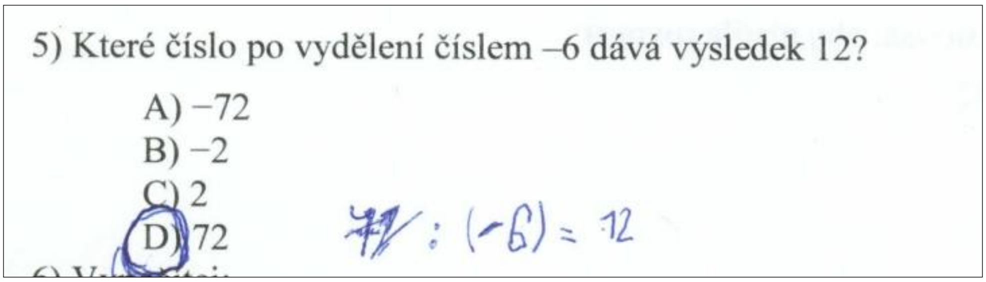
Při řešení úlohy mohli žáci využít poznatků o dělení záporným číslem nebo vyzkoušet všechny čtyři možnosti a ověřit, zda po vydělení číslem – 6 dostanou výsledek 12. Druhou možnost využilo pouze 7 žáků, všichni uvedli dané výpočty. Ostatní žáci použili k řešení poznatku o dělení záporným číslem, i když není vyloučeno, že někteří pouze hádali, protože ne všichni uvedli výpočet.Úlohu správně vyřešilo 45 žáků 7. ročníku a 76 žáků 8. ročníku, a úloha se tak stala nejúspěšnější z celého souboru. Správné řešení uvedlo celých 65 % žáků. K chybné odpovědi B (−2) se uchýlilo 13 žáků 7. ročníku a 11 žáků 8. ročníku. Tato volba odpovědi svědčí o neznalosti správného vztahu mezi dělením a násobením, o neporozumění zadání (obr. 39) či o nepozornosti.

Odpověď C (2) uvedlo pouze 6 žáků 7. ročníku, tito žáci neznají správný vztah mezi dělením a násobením, nebo mají mezeru ve znalosti „znaménkového“ pravidla při dělení záporným číslem, opět se jedná o úkonovou chybu.

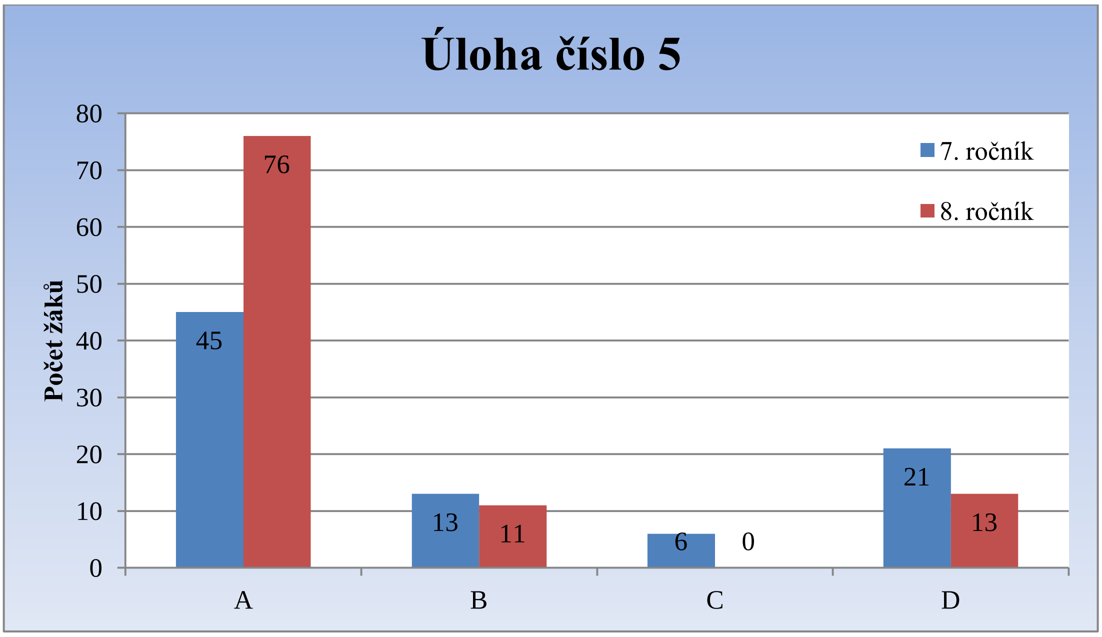
Nejčastější chybou však byla volba odpovědi D (72). Této chyby se dopustilo 13 žáků 8. ročníku a dokonce 21 žáků 7. ročníku. Chyba se jeví jako závažná, protože její příčina je v neznalosti „znaménkového“ pravidla při dělení záporným číslem; zařadila bych ji tedy opět mezi chyby úkonové (obr. 40). Výsledky žáků u úlohy pět jsem shrnula do grafu na obr. 41.



Obr. 39: Chybné pochopení zadání

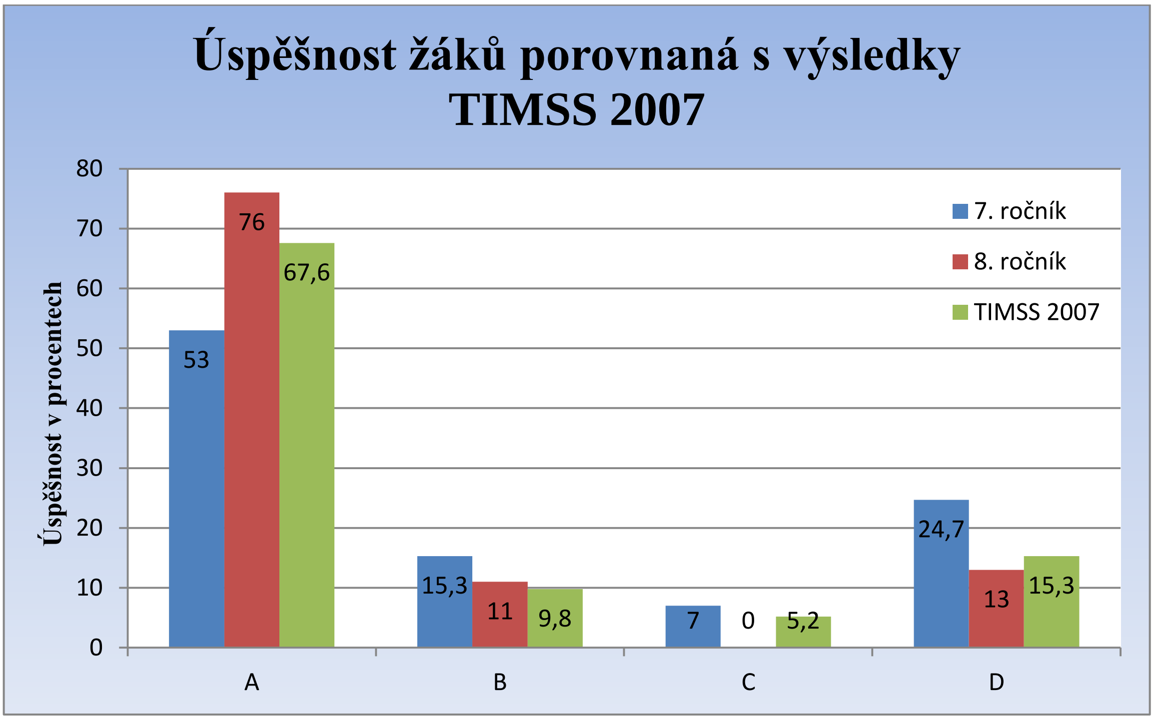


Obr. 40: Úkonová chyba žáka 7. ročníku (problém při dělení záporným číslem)



Obr. 41: Výsledky úlohy 5

Pro srovnání s výzkumem TIMSS uvádím graf na obr. 42, který ukazuje, jak si vedli mnou testovaní žáci v porovnání s žáky účastnících se šetření TIMSS 2007.



Obr. 42: Porovnání úspěšnosti žáků s úspěšností v testování TIMSS 2007

<u>6. úloha:</u>

Vypočítej:

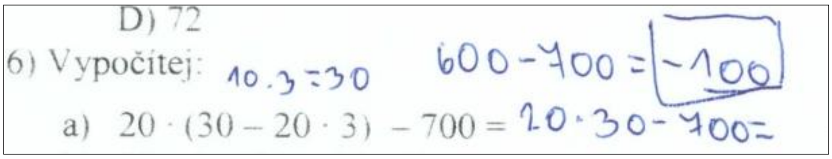
a) $20 \cdot (30 - 20 \cdot 3) - 700 =$ c) $65 - 5 \cdot (14 - 6 : 2) =$

b) $20 - 3 \cdot (30 - 30 : 2) =$ d) $2 \cdot 3 + 3 \cdot (2 - (-1)) =$

Jako šestou úlohu jsem zařadila 4 výpočty se zápornými čísly, které jsem převzala z ilustračních i ostrých testů matematiky pro žáky 2. stupně, které jsou uveřejněny na stránkách www.cermat.cz. Úlohy byly zařazeny do pilotního testování žáků při vstupu na střední školy. Dále rozeberu řešení jednotlivých výpočtů.

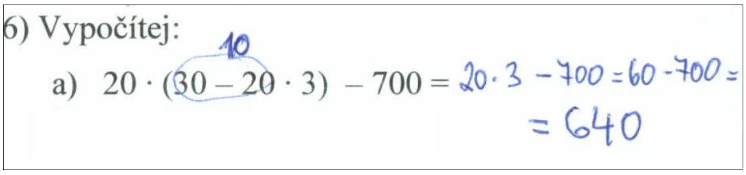
Jako první jsem zařadila výpočet $20 \cdot (30 - 20 \cdot 3) - 700 =$, který byl uveřejněn v ilustračním didaktickém testu pro 9. ročník základní školy na jaře roku 2015. U této úlohy jsem předpokládala velkou úspěšnost. Úspěšně však úlohu vyřešilo pouze 16 žáků 7. ročníku a 38 žáků 8. ročníku. Daleko k úspěchu nemělo ani dalších 6 žáků, kteří správně postupovali, ale nakonec při sčítání dvou záporných čísel, uvedli kladný výsledek. Tato chyba mohla být dílem nepozornosti, nebo důsledkem neznalosti pravidel pro počítání se zápornými čísl, to by však byla chyba závažná. I ostatní žáci dělali ve výpočtu chyby.

Předpokládala jsem, že nejčastější chybou se stane nedání přednosti násobení před odčítáním (úkonová chyba). Můj předpoklad se potvrdil. Žáci nejprve řešili závorku (tedy závorce přednost dali) tak, že odečetli 30 – 20, a posléze násobili třemi (tedy pracovali „zleva doprava“). Dále pak dali správně přednost násobení před odčítáním a nakonec odečetli číslo 700. Výsledek jim tedy vyšel –100 (obr. 43). Této chyby se dopustilo 47 žáků. Dalších 18 žáků se dopustilo podobné chyby. Postupovali stejně chybným způsobem jako předešlých 47 žáků a nakonec se ještě dopustili chyby při odčítání (600 – 700 = 100).



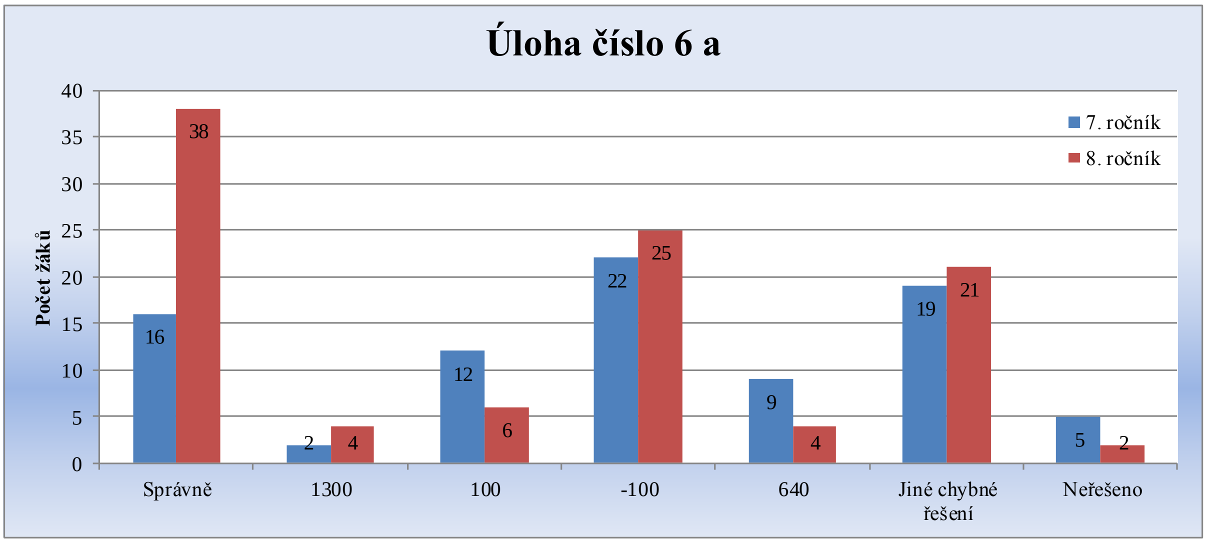
Obr. 43: Nedání přednosti násobení před odčítáním, dále řešeno správně

Dalších 13 žáků uvedlo výsledek 640. Tito žáci také nedali přednost násobení před odčítáním a navíc udělali numerickou chybu (obr. 44).



Obr. 44: Nedání přednosti násobení před odčítáním v závorce a následně chybné odečtení většího kladného čísla od menšího

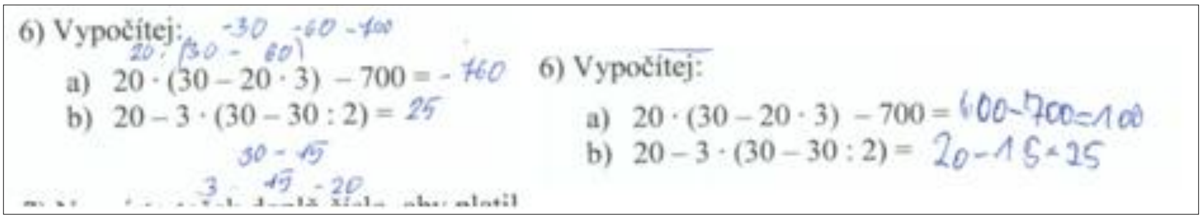
Sedm žáků se rozhodlo úlohu vůbec neřešit a zbývajících 40 žáků udělalo jinou chybu. Z velké části se jednalo o několik chyb zároveň. V jejich řešeních byly numerické chyby, chyby z nepozornosti, problémy se znaménky i chyby grafické. Výsledky žáků této úlohy shrnuje graf na obr. 45.



Obr. 45: Nejčastější chyby v úloze 6a

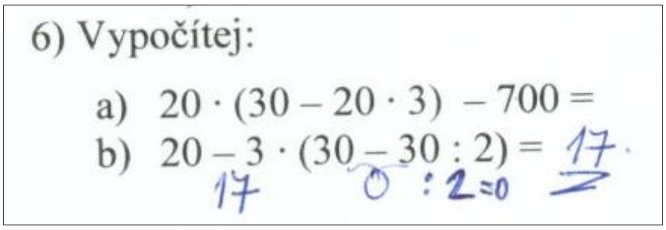
Jako druhý jsem zařadila velmi podobný výpočet 20 – 3 · (30 – 30 : 2)=, který byl uveřejněn v didaktickém testu pilotního testování žáků 9. ročníků základních škol při přijímacích zkouškách na střední školy. Předpokládala jsem podobnou úspěšnost jako u předešlého výpočtu. Žáci však byli daleko úspěšnější. Správně úlohu vyřešilo 68 žáků a velmi mě překvapilo, že bylo úspěšných mnoho žáků, kteří chybovali v předešlém výpočtu. Nejčastější chybou byl tentokrát výsledek 25, který uvedlo 30 žáků.

Tato chyba dle mého názoru u některých žáků vznikla z nepozornosti (mohlo by se jednat i o chybu velkých skoků (obr. 46) a u jiných jen potvrzuje, že neumějí odečíst větší kladné číslo od menšího.



Obr. 46: Částečně správný postup, žák vynechal násobení třemi. Druhý žák si uváděl dílčí výpočty stranou, a dopustil se tak chyby, protože znaménko mínus, které měl napsat před číslo 45, použil posléze pro odečtení čísla 20

Velmi závažnou chybu pak odhaluje postup 18 žáků, kteří dali přednost odčítání před násobením. Následně jim závorka po dělení vyšla nula. Ale udělali další chybu při násobení, kde uvedli, že tři krát nula je tři, a trojku pak odečetli od čísla 20, čímž dospěli k výsledku 17, a opět se tak dopustili závažné úkonové chyby (obr. 47).

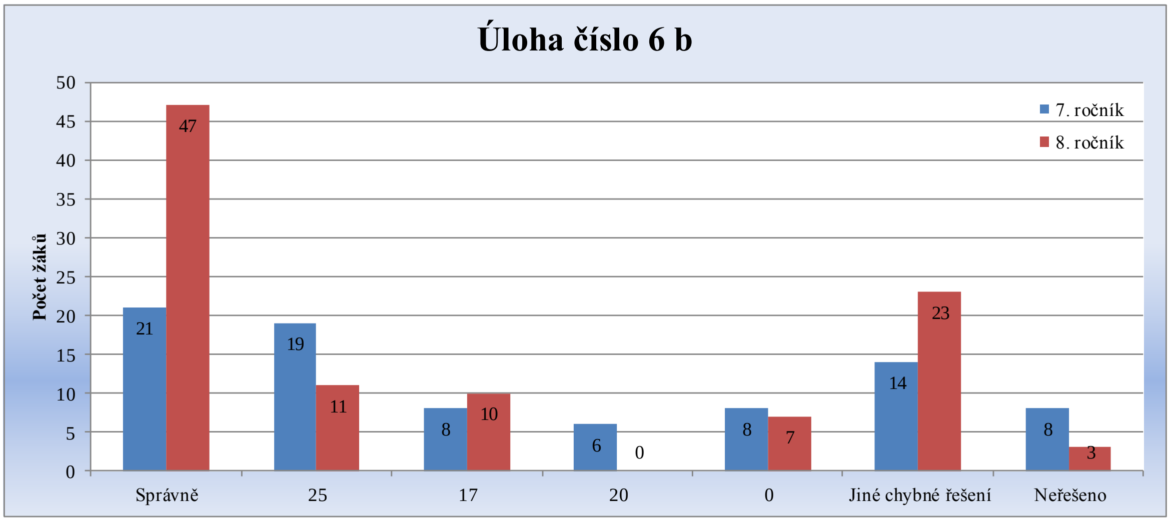


Obr. 47: Žák se dopustil zároveň dvou chyb, nejprve provedl úkonovou chybu, když nedal přednost dělení před odčítáním, a následně chybu numerickou, když uvedl součin 3 · 0 = 3

Podobné chyby se dopustilo 6 žáků sedmého ročníku, kteří také vypočítali hodnotu závorky chybně, ale při násobení nulou už si počínali správně, a uvedli tak výsledek 20.

Dalších 15 žáků uvedlo výsledek nula. Tito žáci prokázali opět neznalost přednosti provádění operací a navíc jakmile jim v závorce vyšla nula, automaticky ji napsali do výsledku.

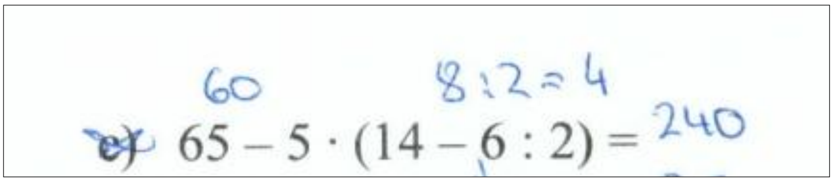
Jedenáct žáků se rozhodlo tuho úlohu neřešit a dalších 37 žáků udělalo jiné chyby. Všechny nejčastější výsledky úloh jsou zaznamenány v grafu na obr. 48.



Obr. 48: Nejčastěji se vyskytující chyby v úloze 6b

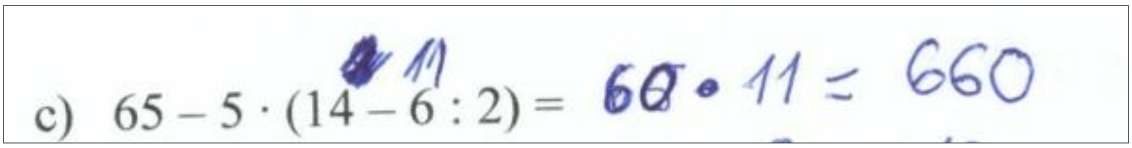
Jako třetí úlohu jsem zařadila opět podobný výpočet 65 – 5 · (14 – 6 : 2)=. U něj jsem předpokládala výrazně vyšší úspěšnost, protože byl vybrán z řádného pilotního testu pro žáky osmiletých gymnázií (testováni tak byli žáci, kteří budou nastupovat do primy). A úspěšnost opravdu velmi stoupla. Správné řešení uvedlo 100 žáků.

Dalších 85 žáků se však nevyvarovalo chyby. Nejčastější chybou byl výsledek 240. Tato chyba vznikla tak, že žáci nedali přednost dělení před odčítáním a následně násobení před odčítáním, a udělali tak více úkonových chyb zároveň (obr. 49).



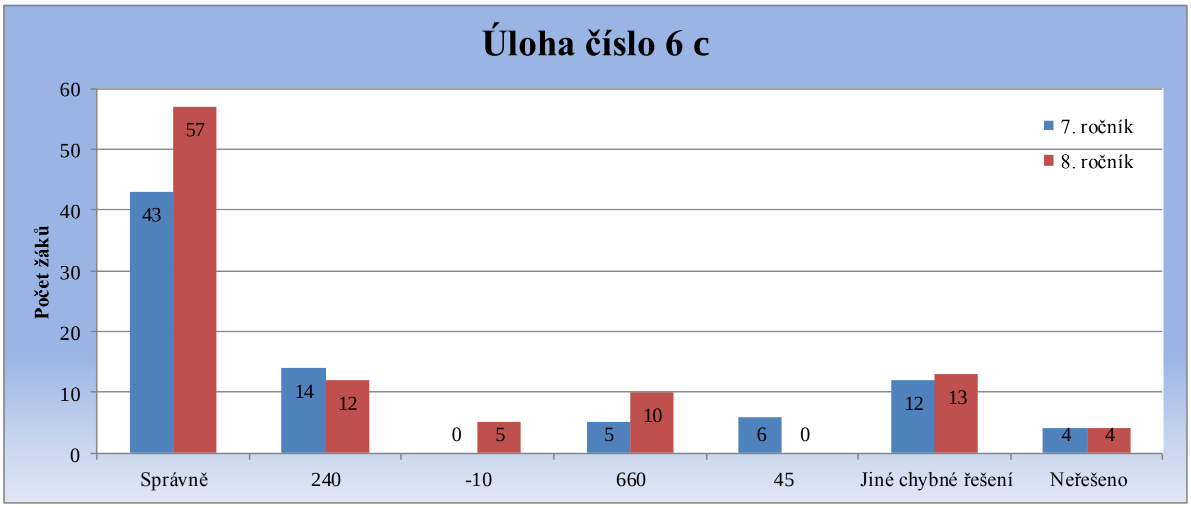
Obr. 49: Dvě úkonové chyby, nedání přednosti násobení ani dělení před odčítáním

Dalších 15 žáků uvedlo výsledek 660, protože správně vyřešili závorku, ale následně dali přednost odčítání před násobením, jak ukazuje obr. 50.



Obr. 50: Správně vyřešena závorka, ale následně dána přednost odčítání před násobením

Ostatní žáci úlohu neřešili, nebo se dopustili jiných chyb (většina kombinovala numerické chyby s neznalostí předností početních operací), jak uvádí graf na obr. 51.

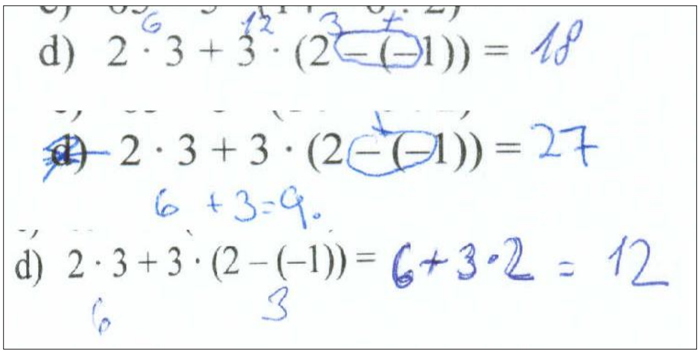


Obr. 51: Nejčastější chyby v úloze 6c

Výpočet $2 \cdot 3 + 3 \cdot (2 - (-1))$ jsem záměrně zařadila jako poslední. Jedná se o modifikaci úlohy z mezinárodního šetření TIMSS, kde byla zadána takto: Nechť $a = 3$, $b = -1$. Kolik je $2a + 3(2 - b)$? Protože žáci účastnící se mého výzkumu neumějí ještě s výrazy pracovat, zařadila jsem tuto modifikaci a byla jsem zvědavá, jestli žáci budou výrazně úspěšnější, když jsem uvedla již výraz s dosazenými hodnotami.

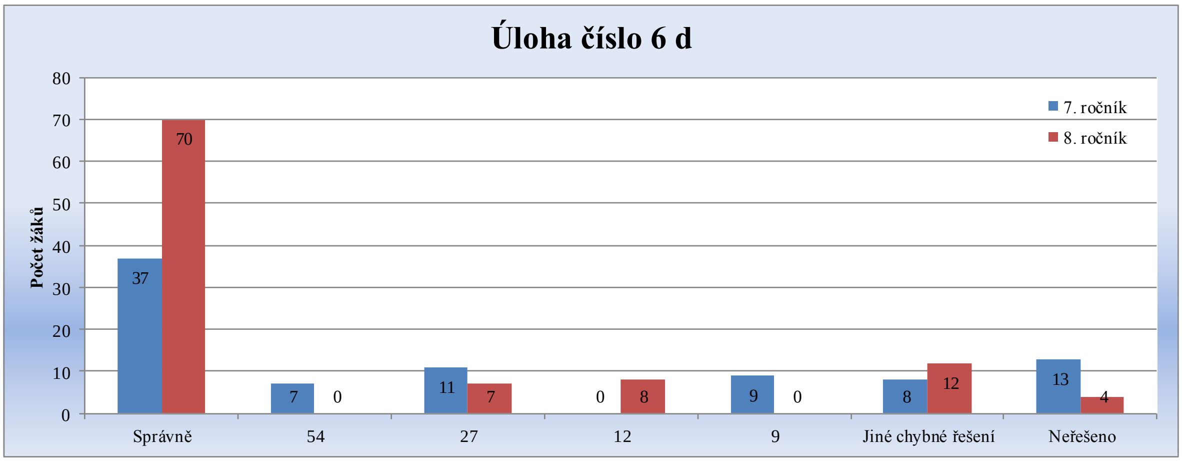
Velmi mile mě překvapilo, že úlohu vyřešilo správně 107 žáků, a byla tak šestá nejúspěšnější z celého testu. V šetření TIMSS měla úloha pouze 33% úspěšnost, ovšem výsledky nelze relevantně porovnávat, protože se zde jedná o zcela jinou úlohu (i jiný vzorek žáků).

Žáci se nejčastěji dopouštěli numerických chyb a chyb z nepozornosti, jak uvádí obr. 52. Žáci kteří uváděli výsledek 9 chybně odečetli záporné číslo v závorce. Hodnota číselného výrazu v závorce jim tedy vyšla 1, ale následně již počítali bezchybně.



Obr. 52: Chyby z úlohy 6d

Ale jak ukazují i předcházející úlohy, většina žáků má problém se správným používáním pořadí matematických operací a často tak řeší úlohy chybně. Úspěšnost žáků při řešení úlohy 6d je uvedena v grafu (obr. 53).



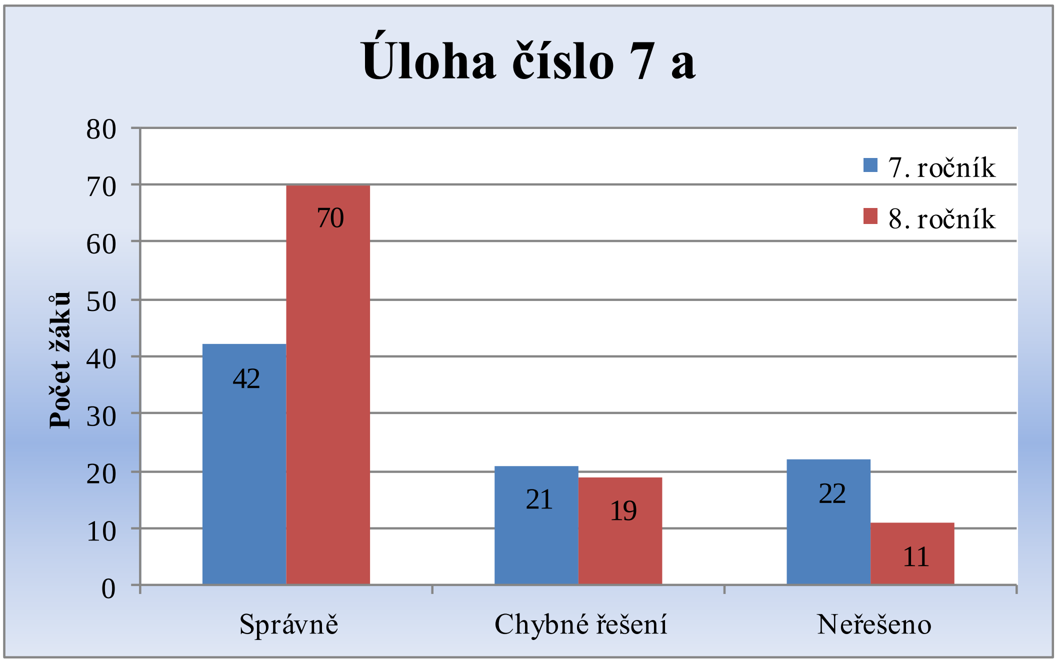
Obr. 53: Nejčastější chyby v úloze 6d

<u>7. úloha:</u>

Na místo teček doplň číslo, aby platila rovnost:

a) 140 – 5 · … = 45 b) … · 10 – 15 = – 85

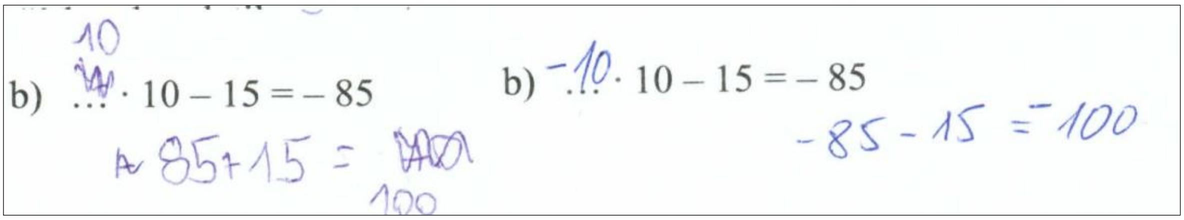
Jako sedmou úlohu jsem zařadila úlohu inverzního charakteru, která se na rozdíl od ostatních úloh v učebnicích moc často neobjevuje. Tato úloha byla využita i v ilustračním testu pilotního testování pro osmiletá gymnázia na jaře roku 2015 agenturou CERMAT.



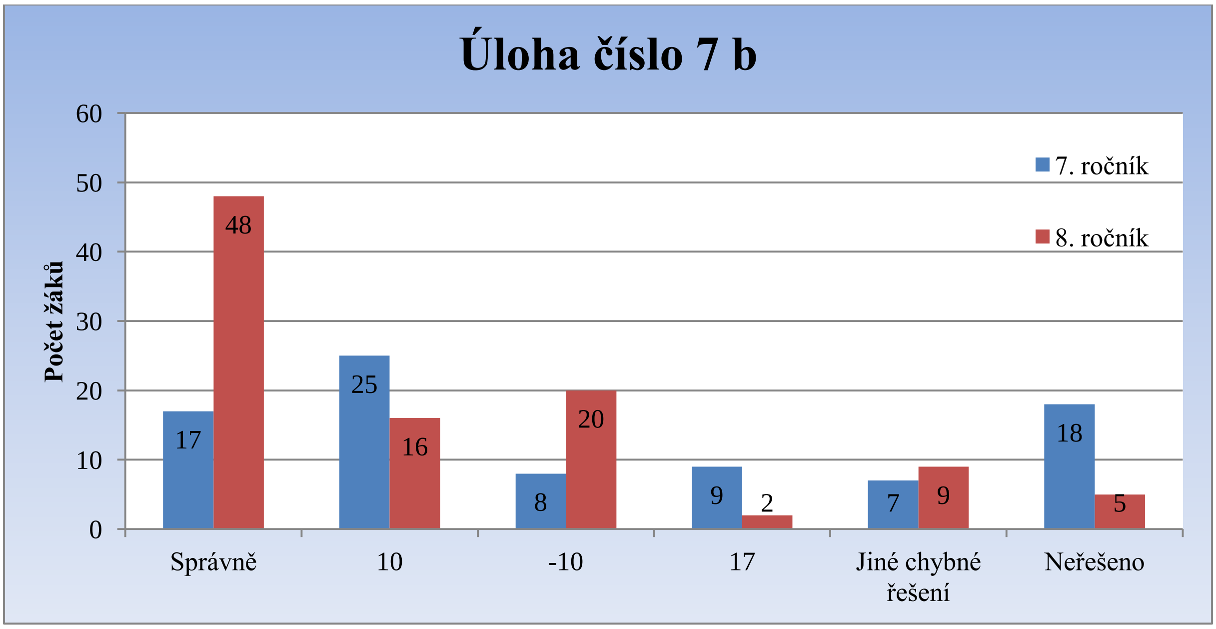
Obr. 54: Úspěšnost žáků v úloze 7a

První rovnost nedělala žákům větší obtíže a správně ji řešilo 112 žáků. K mému velkému překvapení většina žáků počítala zpaměti a neměla s výpočtem sebemenší problém. Čtyřicet žáků se dopustilo různých chyb, ale žádná nebyla více frekventovaná, a proto usuzuji, že se jednalo o numerické chyby či chyby z nepozornosti. Pro přehlednost uvádím graf na obr. 54.

Druhá rovnost již žákům činila značné problémy, správné řešení uvedlo pouze 65 žáků a ostatní chybovali nebo si nevěděli s řešením rady. Nejčastěji uváděnou chybou bylo dosazení čísla 10 a –10, což svědčí o chybném odčítání a problému s provedením vybrané početní operace (obr. 55). Domnívám se, že kdyby si žáci udělali zkoušku, většina by úlohu vyřešila správně. Ostatní časté chyby a jejich četnost jsou uvedeny v grafu (obr. 56).



Obr. 55: Chyby, které žáci udělali díky chybným použitím matematických operací



Obr. 56: Nejčastější chyby v úloze 7b

8. úloha:

Najdi chyby a oprav je:

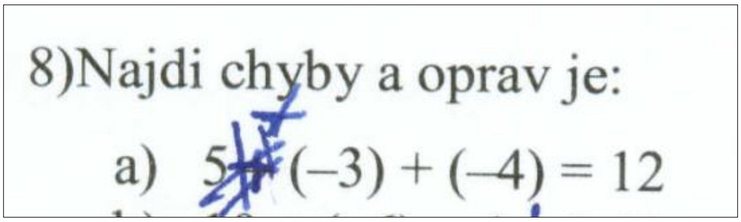
a) $5 - (-3) + (-4) = 12$

b) $10 + (-6) - 4 - (-3) = 3$

c) $-2 \cdot 5 - 6 : (-3) - (-8) = 0$

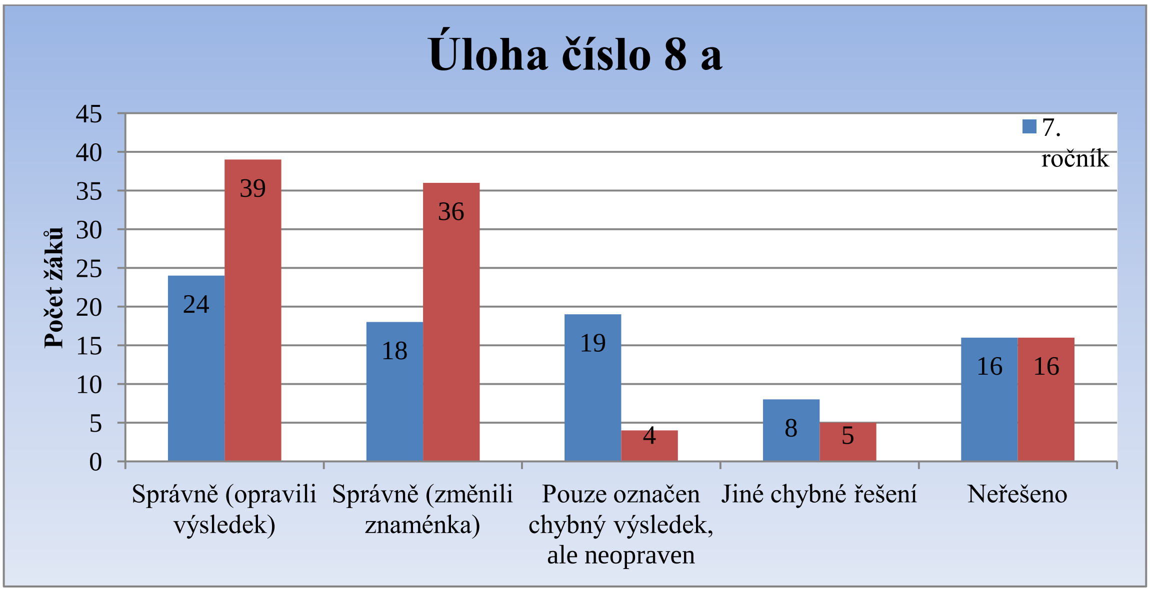
Cílem osmé úlohy bylo ověřit, zda žáci umějí pracovat se znaménky a zda ve výpočtech upřednostňují správné operace (např. násobení před sčítáním). Žáci měli jakýmkoliv způsobem opravit výpočet tak, aby byl správně. Bohužel v zadání nebylo jasně uvedeno, co mají žáci udělat, když bude výpočet uveden správně, což s velkou pravděpodobností zapříčinilo velké množství neoznačených úloh. V průběhu testování se na to někteří žáci dotazovali, ale ne všichni asi zaznamenali moji odpověď, aby správné výpočty označili. Někteří žáci proto škrtli chybný výsledek a jiní změnili znaménka operací, aby dosáhli správného řešení. Chyba byla v prvním výpočtu, zbylé dva výpočty byly záměrně provedeny správně, aby si žáci ověřili své znalosti a jen automaticky nepřeškrtli výsledek.

První výpočet správně opravilo 117 žáků, a úloha tak měla velmi vysokou úspěšnost. Více žáků se podle mého předpokladu uchýlilo k opravení výsledku (provedli tedy výpočet) z dvanácti na čtyři. Zbývající správní řešitelé změnili znaménko u čísla 4 na kladné, jak ukazuje obr. 57, a tím dosáhli správného výsledku.



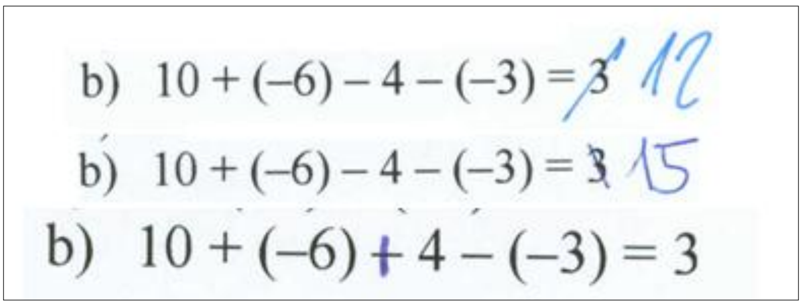
Obr. 57: Správně opravený výpočet

Dalších 23 žáků označilo výpočet za chybný, ale neopravilo ho na správný, jak po nich bylo požadováno v zadání. Jako příčinu této chyby bych určila zbrklost a nepozornost při čtení zadání. Jak můžeme vidět z grafu na obr. 58, který shrnuje výsledky této úlohy, 32 žáků se úlohu řešit ani nepokusilo a 13 žáků při snaze najít chybu udělalo ještě další chybu. Tito žáci s největší pravděpodobností nějakou chybu předpokládali, a proto se uchýlili ke změně znaménka před číslem 8 (10 žáků), zbylí tři žáci přepočítali výpočet a vyšel jim každému jiný výsledek. Jelikož nikdo z těchto 13 žáků neuvedl žádný postup, nemohou s přesností říci, jaké chyby se dopustili (předpokládám však, že udělali chybu v přednosti početních operací).



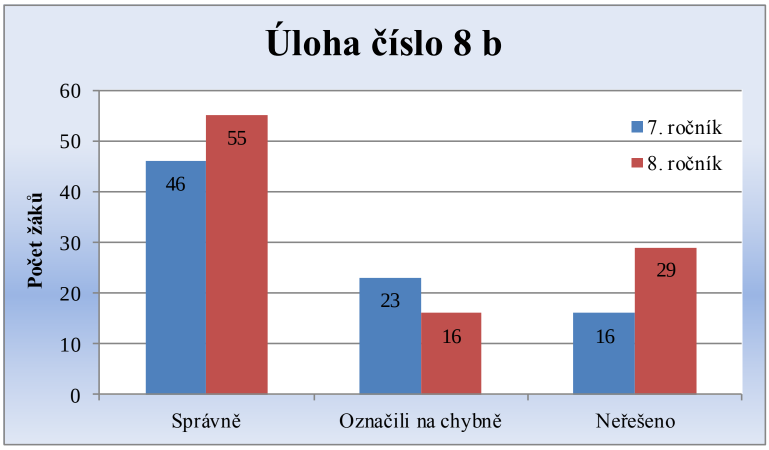
Obr. 58: Výsledky uvedené žáky v úloze 8a

Druhý výpočet byl záměrně uveden správně a předpokládala jsem, že s ním proto žáci nebudou mít výrazné problémy. Je však zarážející, že 39 žáků v něm odhalilo i několik chyb, což mě opět přesvědčuje o tom, že žáci neumějí správně řešit úlohy se zápornými čísly. Na obr. 59 jsou ukázány některé chyby, kterých se žáci dopouštěli v této úloze. Bohužel tito žáci neuváděli postup, a nejde tedy s jistotou říci, zda se jedná o chyby numerické nebo úkonové. Jelikož se žádná chyba neobjevila vícekrát, zahrnula jsem tyto chyby do ostatních (i když se jedná o chyby úkonové).



Obr. 59: Ukázka chyb, kterých se dopustili někteří žáci v úloze 8b

Jako bezchybný označilo druhý výpočet 101 žáků. Ovšem domnívám se, že i mezi 45 žáky, kteří neuvedli žádné řešení, by se našlo mnoho těch, kteří úlohu vyřešili správně, ale tento fakt nijak nezaznamenali (protože, jak již bylo řečeno, tento požadavek nebyl jasně formulován v zadání). Úspěšnost žáků v úloze 8b je vyznačena v grafu na obr. 60.



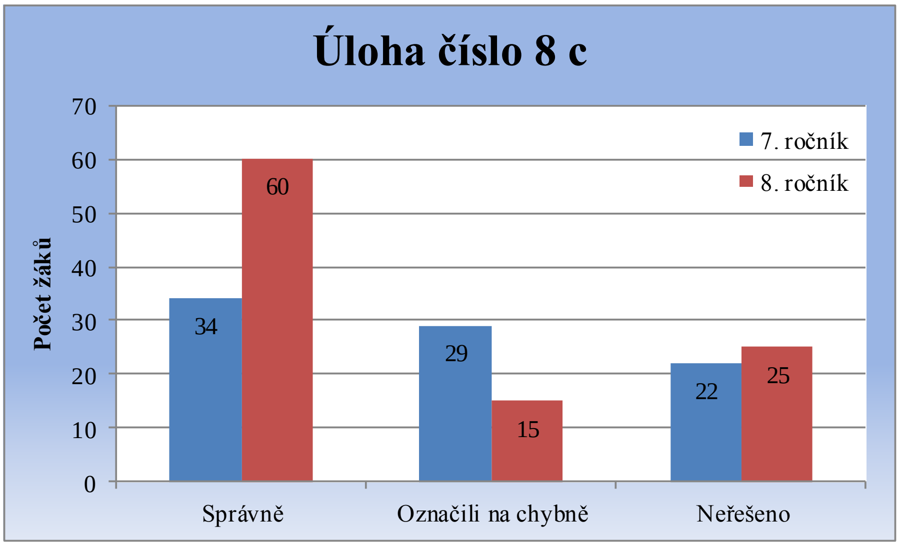
Obr. 60: Výsledky úlohy 8b

Stejně jako v úloze 8b ani v úloze 8c nebyla chyba, a dala se tak předpokládat vysoká úspěšnost řešení. Oproti předešlé úloze však úspěšnost ještě mírně klesla, o což se zasloužili především žáci 7. ročníku. Stejně jako v předešlé úloze se našlo velké množství žáků, kteří v úloze „chybu“ odhalili. Příklady chybných řešení uvádím na obr. 61. Bohužel ani v tomto případě žáci neuvedli postup, kterým postupovali, a nemohu tak jejich chyby blíže klasifikovat. Domnívám se však, že se většina žáků dopustila chyb v úkonu.

c) $-2 \cdot 5 + 6 : (-3) - (-8) = 0$ c) $-2 \cdot 5 - 6 : (-3) - (-8) = \cancel{0} - 8$

Obr. 61: Ukázka chyb, kterých se dopustili někteří žáci v úloze 8c

Jak můžeme vidět z grafu (obr. 62) shrnujícího úlohu 8c, 47 žáků úlohu neřešilo. Opět se domnívám, že takto vysoký počet je zapříčiněn tím, že žáci neoznačili výpočet za bezchybný, i když ho tak správně určili.



Obr. 62: Výsledky úlohy 8c

9. úloha:

Vypočítej:

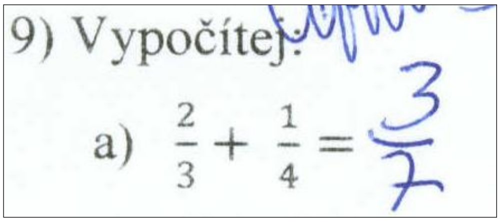
a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} =$

b) $-\frac{2}{5} - \frac{1}{3} =$

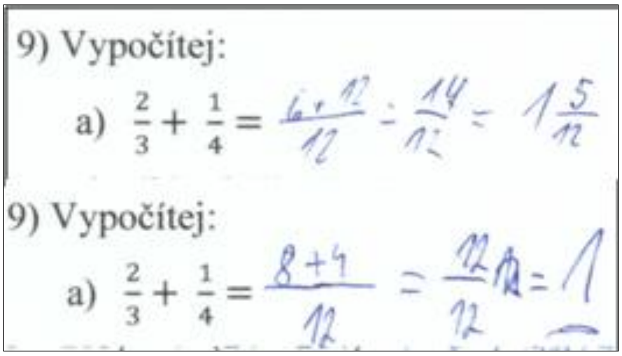
c) (21 – 211) + 2 · (22 – 212) + 3 · (23 – 213) + 4 · (24 – 214) =

V deváté úloze jsem zařadila tři výpočty. Jako první bylo uvedeno sčítání dvou zlomků, které se mi jevilo jako nejlehčí. Žáci měli prokázat znalost sčítání zlomků pomocí společného jmenovatele (kvůli úloze 9b). Asi 56 % žáků si s úlohou bez obtíží poradilo a 11 % žáků si s úlohou nevědělo rady, takže ji vynechalo (všichni žáci měli učivo zlomků probráno).

U 16 % žáků se prokázalo, že neumějí správně sčítat zlomky, nebo dokonce nemají správně uchopený pojem zlomku a jen sčítají čísla (samostatně v čitateli i ve jmenovateli), jak ukazuje obr. 63. Zbývajících 17 % žáků udělalo v řešení jinou chybu, ale žádná z chyb se vícekrát neopakovala. Ve většiny případů se dle mého soudu jednalo o chyby numerické (obr. 64) či chyby v úkonu.

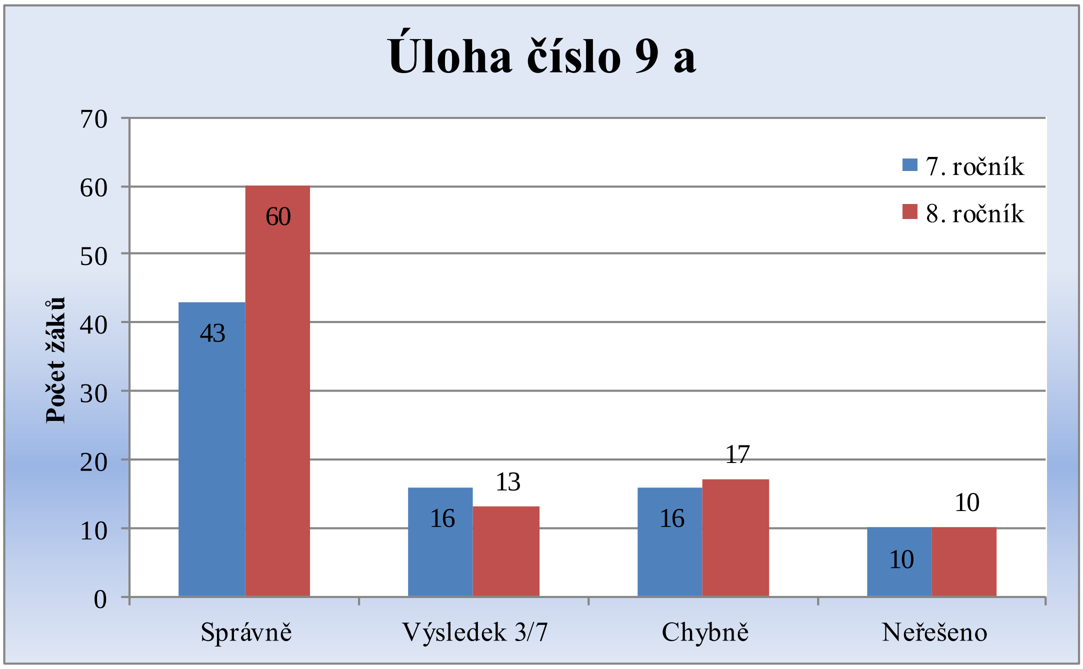


Obr. 63: Ukázka chybného sčítání zlomků



Obr. 64: Ukázka numerických chyb

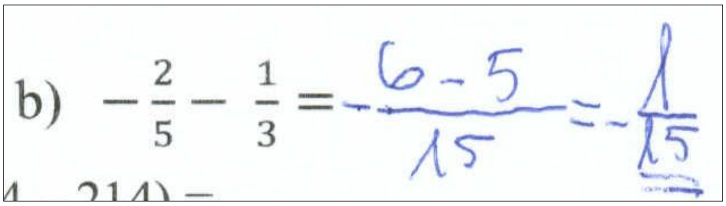
V této úloze žáci z mne neznámého důvodu neuváděli postupy svých řešení. Našli se však i 3 žáci, kteří zlomky násobili, ale neuvedli postup, proto se jen mohu domnívat, z jakého důvodu se chyby dopustili. Úspěšnost žáků v úloze 9a znázorňuje graf na obr. 65.



Obr. 65: Výsledky úlohy 9a

Jako druhé jsem zařadila sčítání záporných zlomků, kde bylo opět zapotřebí převést správně oba zlomky na společného jmenovatele, což se pro řadu žáků stalo nepřekonatelnou překážkou.

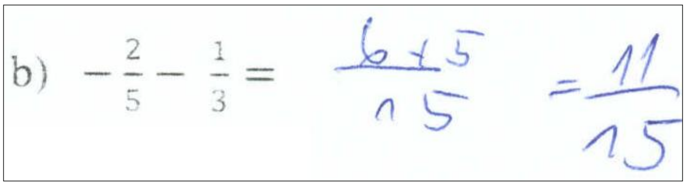
Úspěšnost řešení klesla oproti předešlé úloze na 43 %. Dalších 12 % žáků převedlo správně zlomek na společného jmenovatele, ale následně udělalo chybu ve sčítání dvou záporných čísel, jak ukazuje obr. 66.



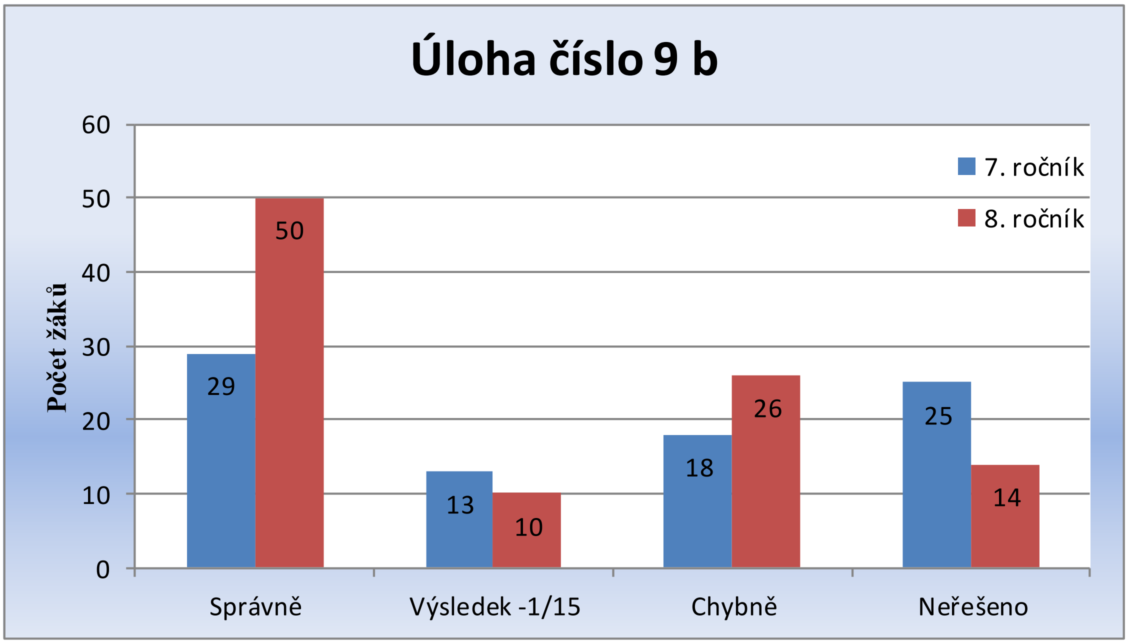
Obr. 66: Ukázka chyby odčítání kladného čísla od záporného

Velmi mě překvapilo, že 44 % žáků udělalo jiné chyby. U některých žáků se jednalo o více chyb zároveň (převedení na společného jmenovatele, odčítání kladného čísla od záporného nebo úplné vynechání znaménka mínus u prvního zlomku).

Čtyři žáci uvedli kladný výsledek, jak ukazuje obr. 67. Tato chyba vznikla mechanickým učením znaménkových pravidel (žákyně na můj dotaz uvedla, že mínus a mínus dává plus, proto výsledek bude kladný). Přehled úspěšnosti žáků v této úloze zobrazuje graf na obr. 68.



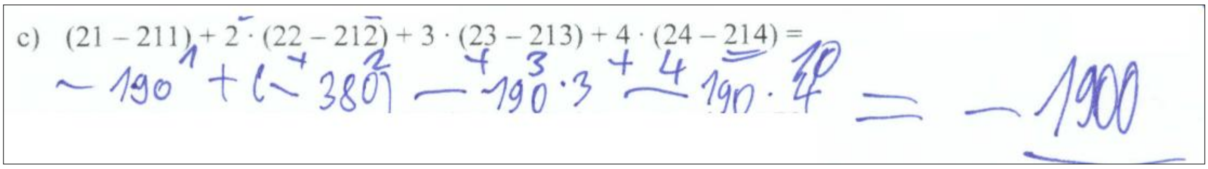
Obr. 67: Žákyně uvedla, že má-li znaménko mínus a mínus, dohromady dávají plus



Obr. 68: Výsledky úlohy 9b

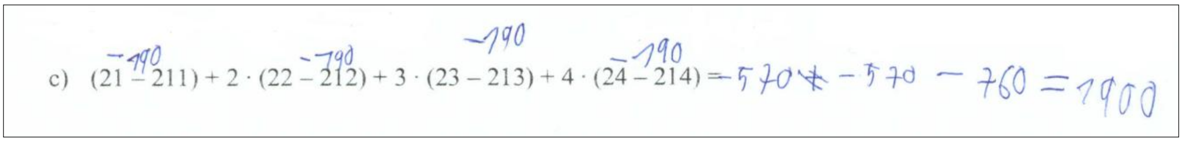
Jako třetí jsem zařadila úlohu, která se objevila v ilustračním testu pro přijímací zkoušky na šestiletá gymnázia agentury CERMAT. Jelikož je zadání úlohy na první pohled dlouhé a s trojcifernými čísly, předpokládala jsem u této úlohy nižší úspěšnost.

Úlohu správně vyřešilo 46 žáků, což odpovídá asi 25% úspěšnosti. Zarážející je pro mě fakt, že pouze jediný žák využil výhodného počítání, jak ukazuje obr. 69. Ostatní žáci závorky roznásobovali a následně odčítali.



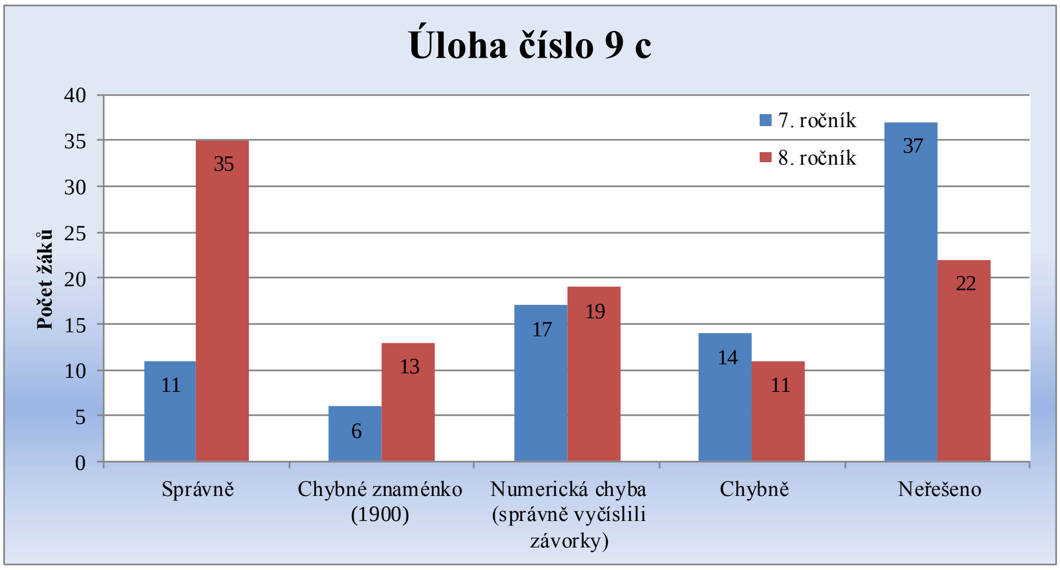
Obr. 69: Ukázka výhodného počítání, žák vytkl závorku a čísla sečetl, nemusel tak roznásobovat jednotlivé závorky a mohl násobit deseti

Zjištění, že 32 % žáků úlohu neřešilo, pro mě nebylo velkým překvapením. Dále mě zarazilo, že celých 20 % žáků se dopustilo numerické chyby. Poté co správně vyčíslili jednotlivé závorky, udělali chybu při roznásobování závorek nebo při odčítání kladného čísla od záporného (obr. 70).



Obr. 70: Ukázka numerické chyby

Častou chybou pak bylo také kladné vyčíslení závorek, kterého se dopustilo 19 žáků. Tato chyba vznikla chybným odčítáním většího kladného čísla od menšího. Jiné chybné řešení se objevilo u 25 žáků (14 %), žádné z nich se však vícekrát neopakovalo. Výsledky úlohy 9c shrnuje graf (obr. 71).



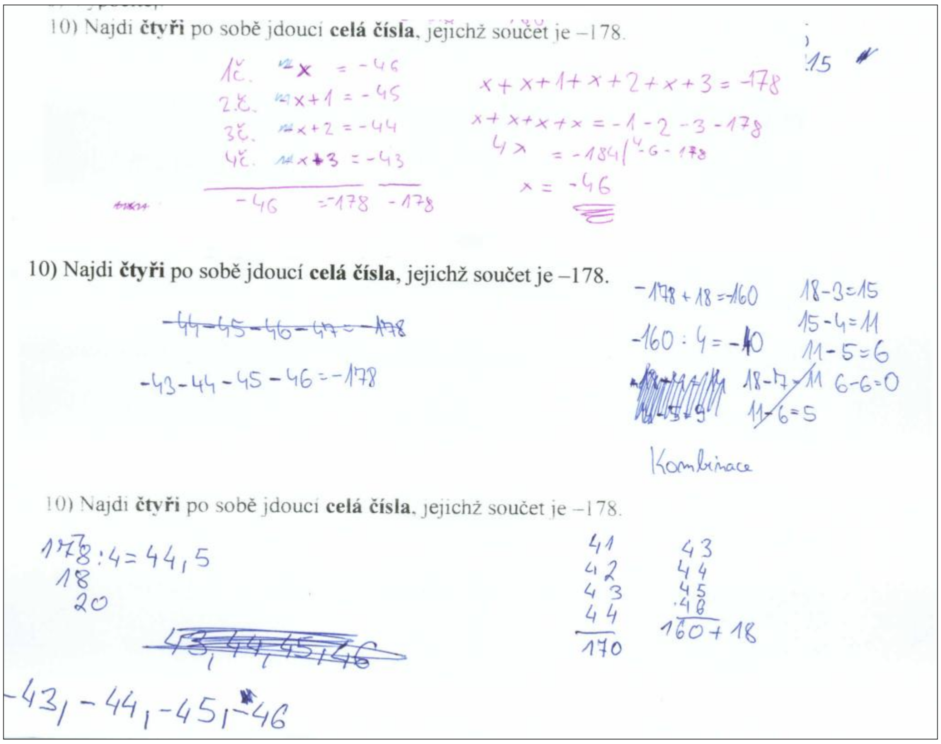
Obr. 71: Výsledky úlohy 9c

<u>10. úloha:</u>

Najdi **čtyři** po sobě jdoucí **celá čísla**, jejichž součet je –178.

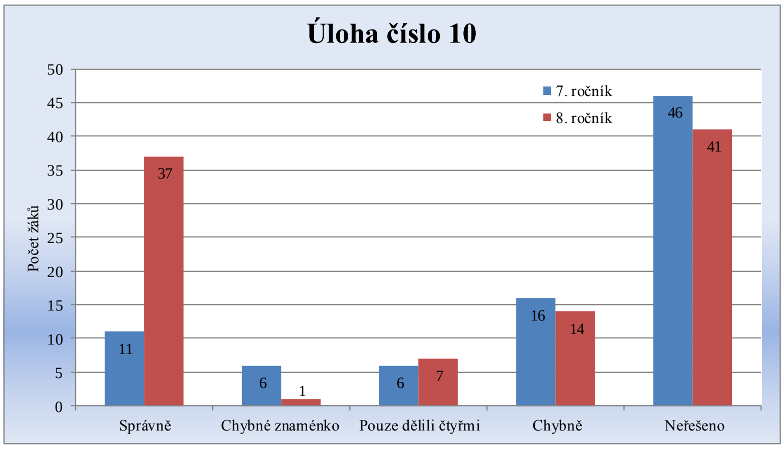
V poslední úloze jsem chtěla ověřit, zda žáci znají pojem celé číslo a jsou schopni si ze zadání vybrat důležité informace. Bohužel se ukázalo, že mnoho žáků nečte správně zadání nebo mu neporozumělo. Někteří žáci uváděli ve výsledku čísla racionální, aniž by si to uvědomovali. Jiní naopak uváděli čísla, která nejsou po sobě jdoucí. Několik žáků také uvedlo pouze tři čísla, nebo jen čísla dvě, a ani tak nedosáhli výsledku –178; tito žáci jsou ve výsledném grafu (obr. 72) zaneseni v kolonce jiných chyb.

Úlohu neřešilo rekordních 87 žáků a ke správnému výsledku došlo pouze 48 žáků, jejichž různá řešení můžeme vidět na obr. 73. Nemyslím si, že by úlohu žáci neřešili pro nedostatek času, protože většina z nich končila před uplynutím časového limitu. Spíše si s ní opravdu nevěděli rady, nebo se jim nad touto úlohou nechtělo dále přemýšlet.



Obr. 73: Příklady správných řešení úlohy 10

Dalších 7 žáků se vydalo při řešení úlohy správným směrem, ale ve výsledku uvedlo namísto záporných čísel čísla kladná, což opět dokazuje, že žáci nemají správně uchopený pojem záporné číslo a chybně ovládají početní operace s nimi. Ještě dalších 14 žáků se pokusilo úlohu řešit, ale poté co po vydělení čísla –178 číslem 4 nedostali celé číslo, dále nepokračovali a někteří uvedli, že úlohu nelze řešit.



Obr. 72: Výsledky úlohy 10

2.2.1 Klasifikace chyb

Abych mohla lépe identifikovat a analyzovat chyby žáků, které dělali při výpočtech, bylo nutné si uvědomit, jakých chyb se žáci nejčastěji dopouští. Jednu z klasifikací chyb jsem nalezla v publikaci (Bero & Hejný, 1990: s. 155). V ní se autoři věnují chybám při manipulaci s algebraickými výrazy, ale domnívám se, že podobných typů chyb se dopouštějí i žáci, kteří provádějí operace se zápornými čísly. Proto jsem ve své analýze využila podobné klasifikace chyb. Nejfrekventovanější a nejzávažnější chyby jsem se pokusila blíže popsat a doplnit konkrétními řešeními žáků.

Domnívám se, že důležitou funkcí učitele je vést žáky k poznávání, ale ještě důležitější funkcí učitele je odhalit nástrahy a problémy, které stojí žákům v jejich cestě za poznáním. Nikdo není neomylný a i žáci se při učení dopouštějí chyb. Učitel by však měl být schopen chyby včas identifikovat, aby se s chybou dále mohlo pracovat. Pokud však učitel chybu neodhalí včas, pozdější reedukace bývá často náročná, zdlouhavá a žáci při ní ztrácejí motivaci.

Úkonové chyby

$$20 \cdot (30 - 20 \cdot 3) - 700 = 20 \cdot (10 \cdot 3) - 700 = -100$$

Nejčastější příčinou úkonových chyb je selhání paměťového záznamu (Bero & Hejný, 1990: s. 156). Existuje mnoho příčin úkonových chyb, ale u většiny žáků je jejich příčinou utvoření pouze formálního poznatku, který vzniká především učením se tabulek typu „zapamatuji si“. Je proto nutné, snažit se dát žákům dostatek prostoru pro vybudování generického modelu, což by mohlo těmto chybám předejít.

Numerické chyby

$$3 \cdot (2+3) = 3 \cdot (6) = 24$$

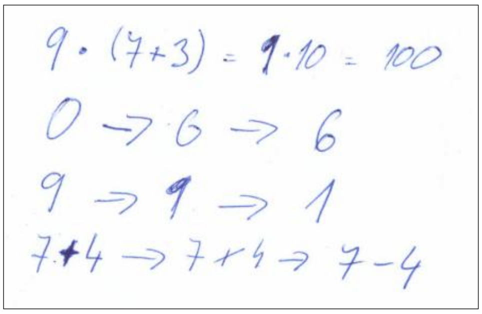
Autoři (Bero & Hejný, 1990: str. 156) považují za příčinu těchto chyb nedostatečnou automatizaci nižších výkonů. Žák se soustředí na složitější proces a na ten jednodušší už mu nezbývá dostatek soustředěnosti, a proto vzniká chyba. Já se domnívám, že velký vliv na tyto chyby má také prostředí, především hluk a časový pres.

Chyby velkých skoků

$$3 \cdot (23 - 213) + 4 \cdot (24 - 214) = - 1220$$

Tyto chyby vznikají podle autorů (Bero & Hejný, 1990: str. 157) především proto, že žáci dělají v jednom kroku více úkonů zároveň. Žáci si nezapisují dílčí kroky, a snadněji tak udělají chybu, protože se jim výpočet neuchová v paměti. Domnívám se, že příčinou tohoto druhu chyb je především časová tíseň, nebo lenost žáků vypisovat jednotlivé kroky postupu řešení. Někteří žáci se však jen chtějí předvést před spolužáky nebo přecenili své matematické schopnosti. Domnívám se, že je proto nutné stále žákům opakovat, že mají pracovat v klidu a s rozmyslem, což neplatí pouze v matematice, ale i v reálných životních situacích.

Grafické chyby



Obr. 73: Příklad grafických chyb

Grafické chyby (obr. 73) vznikají často u žáků s dysgrafií, ale nevyvarují se jich ani ostatní žáci. Žáci často zapisují své postupy velmi nekvalitně a nečitelně. Nejen že se v nich nemohou orientovat učitelé, ale neorientují se v nich ani žáci samotní. Někteří žáci se domnívají, že matematický zápis není důležitý, a proto jen rychle „čmárají“, až se sami v zápise ztratí, a dopustí se tak chyby. Domnívám se, že tyto chyby tedy vznikají z roztěkanosti, nepozornosti, ale i z pocitu časové tísně.

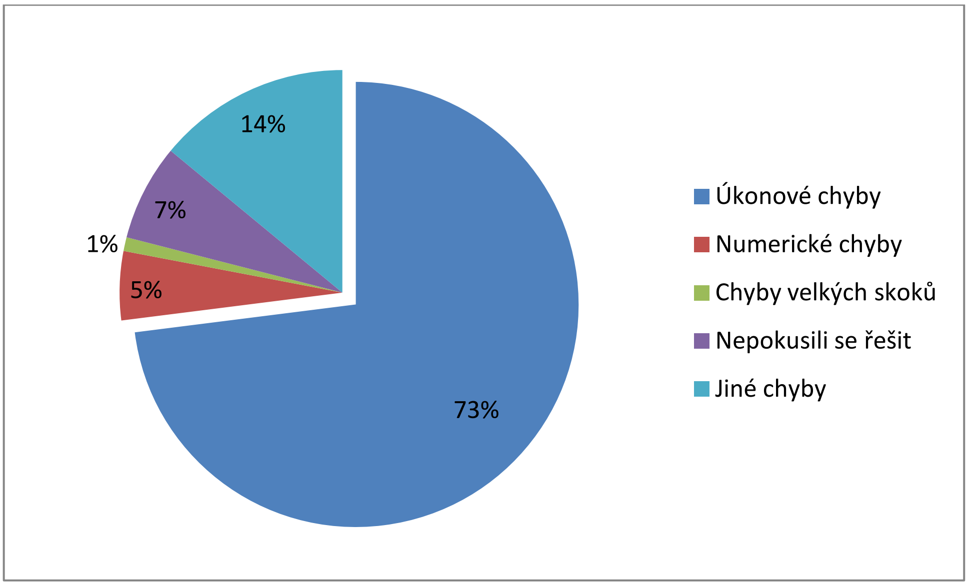
Jiné chyby

Do této kategorie zařazuji všechny ostatní chyby, které nelze zařadit do žádné z předešlých kategorií. Například chybu, kde má žák na mysli správný postup, ale chybně ho zaznamená. Tato chyba vzniká s největší pravděpodobností proto, že se žák soustředí na několik věcí zároveň a zapisuje jen některé myšlenky.

Dále se autoři zmiňují o chybách strategických a bezradnosti a bloudění, tyto chyby jsem však při analýze žákovských testů neodhalila, a proto je zde podrobněji nepopisuji.

3 Závěrečné shrnutí

Poté co jsem opětovně analyzovala testy, jsem dospěla k závěru, že nejčastěji se žáci při úlohách s celými čísly dopouštějí úkonových chyb (73 %, viz obr. 74). V žádném z mnou analyzovaných testů jsem nenašla chybu grafického charakteru ani chybu strategickou. Je to způsobeno tím, že žáci nepracovali s proměnnými a k řešení úloh stačil velmi krátký zápis. Zcela výjimečně se objevila chyba bezradnosti a bloudění, a proto jsem je zařadila k jiným chybám (14 %). Více těchto chyb by se asi objevilo, kdyby se všichni žáci, kteří se rozhodli úlohu neřešit (zbývajících 7 %), o řešení přece jen pokusili. Necelých 5 % chyb bylo původu numerického a žáci se jich dopouštěli především v úlohách 6, 8 a 9c. Necelé 1 % tvořily chyby velkých skoků. V ostatních úlohách nebylo zapotřebí provádět více matematických operací, a proto se zde numerické chyby nevyskytovaly.



Obr. 74: Zastoupení chyb

S pojmem záporné číslo by se žáci měli setkávat již na prvním stupni základní školy, jak je uvedeno v RVP pro základní vzdělávání. Obávám se ale, že tomuto pojmu učitelé nevěnují dostatek času, a velmi důležitá propedeutika tak žákům na druhém stupni chybí. Doporučila bych tedy učitelům na prvním stupni ZŠ zařadit více činností s tematikou záporného čísla, aby měli žáci dostatek času na jeho ukotvení.

Při klasifikaci jednotlivých chyb jsem měla často problém rozeznat, o jaký typ chyby se jedná, a to především u žáků, kteří neuvedli detailní řešení, a musela jsem tak složitě zkoumat, jestli si někde nezapsali pomocný výpočet a jakým způsobem dosáhli uvedeného výsledku. Jako numerické chyby jsem označila pouze ty, kde bylo jasně z daného řešení vidět, že žák postupoval správně, ale např. při sčítání čísel 2 + 4 uvedl výsledek 5. Jako úkonové chyby jsme označila takové, kde žáci nedali přednost závorce nebo nadřazenější početní operaci. Úlohy, ve kterých se žáci o řešení ani nepokusili, jsem vyčlenila zcela zvlášť (bylo by však možné zařadit je i mezi chyby bezradnosti a bloudění).

Při opětovné analýze všech testů a detailním prozkoumání řešení úloh jsme dospěla k závěru, že nejčastější chybou (kritickým místem) při řešení úloh s problematikou záporných čísel je chybné upřednostňování jednotlivých matematických operací.

Pro připomenutí uvedu chybu z úlohy 6, kde se žáci této chyby dopouštěli velmi často: $20 \cdot (30 - 20 \cdot 3) - 700 = 20 \cdot (10 \cdot 3) - 700 = -100$. Žáci správně řešili nejprve závorku, ale již nedali přednost násobení před odčítáním. Podobných úkonových chyb se žáci dopouštěli především v úlohách 6 a 8, protože šlo o úlohy s více operacemi.

Domnívám se, že žáci mají zvládnuté jednotlivé operace s celými čísly, ale neumějí je kombinovat a využívat ve složitějších výpočtech. Jakmile je zapotřebí v jedné úloze zařadit více početních úkonů, nejsou schopni správně určit a provést jejich pořadí. Bohužel úkonové chyby ještě mnohdy kombinují s chybami numerickými, tento fakt bych přikládala především malé míře procvičování a minimální domácí přípravě.

Jako cíl své práce jsem si určila hlouběji *analyzovat chyby žáků a popsat jejich příčiny*. K porovnání některých výsledků jsem pak použila výsledky některých výzkumů, které jsem uvedla v oddíle (2.2.1). Dále se tedy vrátím z mého pohledu k nejzávažnějším chybám a uvedu pro přehlednost výsledky žáků v procentech.

1. **Úloha –** Úkolem žáků bylo zakreslit čísla na číselnou osu. Jako nejčastější chybu při řešení této úlohy jsme odhalila neporozumění pojmu absolutní hodnota, této chyby se dopustilo více než 32 % žáků. Celých 22 % žáků se dopustilo chybného zakreslení čísel na číselnou osu. Jako nejzávažnější a pro mě nejpřekvapivější chybu bych pak označila přehození kladné a záporné strany na číselné ose (9 %), tuto chybu přisuzuji minimální zkušenosti žáků s řešením úloh na číselné ose. Domnívám se, že tyto úlohy by měli učitelé do výuky zařazovat častěji, aby práce s číselnou osou vstoupila více do podvědomí žáků. I přesto, že jsem úlohu považovala za snadnou, stala se druhou nejméně úspěšnou.

2. **Úloha –** Úkolem žáků bylo vybrat z řady čísel kladná a záporná čísla. Jako nejčastější chybu jsem odhalila označení nuly jako kladného čísla, této chyby se dopustilo nejméně 32 % žáků. Ještě závažnější chybu bych však viděla v označení nuly zároveň

za kladné i záporné číslo, které se dopustilo 9 % žáků. Následně 7 % žáků 7. ročníku a 4 % žáků 8. ročníku se dopustilo závažné chyby, kde vyznačili číslo 0,1 jako záporné. Touto problematikou se zabývaly autorky Stacey, Helme a Steinle (2001), které uvádějí procenta žáků v ročnících (obr. 75), kteří považují desetinné číslo za záporné. Autorky uvádějí dvě možné příčiny této chyby. Jako první je ta, že se žáci domnívají, že velikost desetinného čísla je menší než velikost nuly, a druhá že vnímají nulu jako větší než desetinné číslo. Autorky popisují, jak žákyně měla problém ukázat danou velikost vyjádřenou desetinným číslem. Domnívaly se, že příčinou je záměna desetinné čárky se znaménkem mínus. Později se ale výzkumem ukázalo, že se této chyby dopouští větší množství žáků a vychází s mechanizmu porozumění, kdy je vnímán formou konkrétního termínu.

Table 1. *Percentage of students consistently interpreting decimals as reciprocals*

Grade Level	5 (N=963)	6 (N=1465)	7 (N=2297)	8 (N=2102)	9 (N=1645)	10 (N=1066)
Percentage	7.2%	4.8%	5.2%	7.1%	4.3%	3.3%

Obr. 75: Chybné pochopení desetinného čísla

3. **Úloha** – Žáci měli za úkol porovnat řadu čísel od nejmenších po největší. Tato úloha se k mému velkému překvapení stala nejméně úspěšnou úlohou. Největší problémy žákům činila opět absolutní hodnota. Kdyby v úloze absolutní hodnota nebyla, úspěšnost by s velkou pravděpodobností velmi zrostla. Jak uvádí testy Kalibro, již žáci 3. ročníku základní školy jsou schopni z řady čísel vybrat to nejnižší asi se 75% úspěšností (jak můžeme vidět z úspěšnosti úlohy o počasí v oddílu 1.7.2).

4. **Úloha** – Tato úloha se vyskytla v šetření TIMSS 2007 a její bližší analýzu a porovnání výsledků jsem uvedla v oddílu 2.2. Musím však podotknout, že nejčastější a také nejzávažnější chybou bylo doplnění znamének tak, že jako výsledek vyšlo nejmenší možné záporné číslo. Tato chyba je způsobena neuvědomením si velikosti záporného čísla (kde leží na číselné ose). Oproti žákům účastnících se testování TIMSS 2007 se úspěšnost mnou testovaných žáků zvedla asi o 10 %, porovnání však není zcela relevantní, protože se jedná o jiný vzorek žáků. V testu tato úloha dosáhla třetí nejvyšší úspěšnosti.

5. **Úloha** – Žáci měli odpovědět na otázku, které číslo po vydělení číslem –6 dává výsledek 12. Jednalo se o uzavřenou úlohu (z TIMSS 2007), což mnohým žákům

mohlo usnadnit řešení a možná proto se úloha stala nejúspěšnější v celém testu. Nejčastější chybou se stala volba odpovědi D (72), které se dopustilo celkem 34 žáků. Tato chyba je s největší pravděpodobností způsobena neznalostí „znaménkového“ pravidla při dělení záporným čísla. Oproti žákům účastnících se testování TIMSS 2007 úspěšnost mnou testovaných žáků v 7. ročníku klesla si o 23 %. Žáci 8. ročníku si však vedli o 8 % lépe než žáci účastnící se šetření TIMSS. Předpokládám však, že kdyby neměli žáci na výběr ze čtyř možností, jejich úspěšnost by rapidně klesla.

6. **Úloha** – Úloha 6 měla čtyři dílčí úlohy a jejím cílem bylo zjistit, zda žáci umějí provádět operace s celými čísly. Bohužel u prvních dvou dílčích úloh se úspěšnost pohybovala kolem 30 %. Jak naznačovala řešení žáků, jednotlivé operace prováděli bez větších obtíží. Ukázalo se však, jak upozorňují učitelé 2. stupně z výzkumu Vondrové a Žalské (viz oddíl 1.7.4), že jakmile dojde ke spojení více operací do jedné úlohy, žáci začnou častěji chybovat. V následujících dvou dílčích úlohách byla úspěšnost kolem 50 %. Takto markantní rozdíl mě velmi překvapil, protože úlohy byly voleny s podobnou obtížností. V této úloze byl odhalen největší počet úkonových chyb (91 %). Domnívám se tedy, že by se žáci měli zaměřit především na procvičení operací se zápornými čísly.
7. **Úloha** – V této úloze měli žáci doplnit číslo na místo teček tak, aby výpočet byl uveden správně. V první části úlohy se nevyskytly žádné časté chyby a úloha se stala třetí nejúspěšnější v celém testu. U druhé části se však asi 45 % žáků dopustilo úkonové chyby.
8. **Úloha** – Žáci měli nalézt a opravit chyby v daných výpočtech. Bohužel, někteří žáci asi ze zadání nepochopili, že když je výpočet uveden správně, musejí ho nějak označit, a proto tato úloha neměla tak vysokou úspěšnost, jak jsem předpokládala. Žáci se často dopouštěli úkonových chyb, a u většiny se tak prokázala neznalost pravidel pro počítání s celými čísly.
9. **Úloha** – V úloze 9 měli žáci za úkol vyřešit 3 dílčí úlohy. První úloha byla zaměřena na sčítání zlomků, kde se ukázalo, že žáci tuto početní operaci neovládají a sčítají samostatně čitatele a samostatně jmenovatele zlomku. Této chyby se dopustilo více než 15 % žáků a dalších 40 % žáků úlohu neřešilo vůbec, nebo ji řešilo chybně. Druhá úloha byla zaměřena na odčítání zlomků a nastal zde stejný problém, jako v předešlé úloze. Žáci neumějí určit společného jmenovatel a dělají numerické

chyby. Poslední úloha byla zaměřena na sčítání záporných čísel a správně ji vyřešilo pouze 25 % žáků a 32 % žáků se ji ani nepokusilo řešit. V této úloze se žáci dopouštěli nejčastěji numerických chyb, protože zde museli počítat s trojcifernými čísly.

10. **Úloha** – Poslední úloha testu měla za cíl prověřit u žáků znalost pojmu celé číslo a ověřit, jestli umějí provádět základní operace. S úlohou si nevědělo rady rekordních 47 % žáků, což mohlo být způsobeno především tím, že se jednalo o poslední úlohu v testu a žákům už se ji nechtělo řešit; případně jim mohl dělat potíže pojem celé číslo a po sobě jdoucí čísla.

4 Závěr

Hlavním cílem mé práce bylo identifikovat obtíže žáků 7. a 8. ročníku při práci se zápornými čísly. Nejdříve jsem prostudovala problematiku záporných čísel a následně analyzovala jednotlivé učebnice, kde jsem se zaměřila především na přístup jednotlivých autorů k zavedení početních operací se zápornými čísly. Dále jsem prostudovala vybrané matematické výzkumy věnující se problematice celých čísel a na základě těchto analýz jsem vytvořila test zaměřený na problematiku záporných čísel.

Do testování jsem zařadila 185 žáků sedmých a osmých ročníků ze tří různých základních škol a analyzovala podrobně jejich řešení jednotlivých úloh. Na základě analýzy žákovských řešení jsem odhalila jako nejčastější problém úkonové chyby. Nejčastěji žáci chybovali v určování nadřazenosti daného úkonu a v použití znaménkových pravidel. Tyto chyby jsou způsobeny především tím, že žáci nemají dobře osvojenou problematiku záporných čísel, nemají osvojeny operace s porozuměním a pravidla jejich prováděná, uchopená pouze pamětí, pak zapomínají. Dospěla jsem tedy k závěru, že téma záporných čísel je pro žáky obzvláště obtížné

Pro prevenci chyb, které jsem identifikovala v práci, bych navrhla včasné a opakované zařazování problematiky záporných čísel na první stupeň základní školy, aby měli žáci dostatek času na jeho uchopení. Dále bych kladla důraz na zavedení matematických operací s porozuměním a správné ukotvení pojmu záporné číslo. Pro zavedení početních operací se mi jeví jako nejlepší model teploměru (číselná osa), který zmiňují všechny mnou analyzované učebnice, ale ještě bych doplnila model panáčka, který uvádí učebnice nakladatelství Fraus i Fortuna. Myslím si, že tento model pomůže žákům lépe přejít ke složitějším výpočtům a přes model číselné osy dospět k abstraktnímu poznání. Nelze však opomenout ani model finanční, který žáky často nejvíce motivuje k práci. Domnívám se, že kdyby se do výuky zařadilo procvičování většího množství složitějších úloh, předešlo by se tak velkému počtu úkonových chyb, kterých se žáci dopouštěli. Velký důraz bych kladla také na soustavnou domácí přípravu. Domnívám se, že zvládnutí problematiky celých čísel je velmi důležité i pro zvládnutí učiva ve vyšších ročnících. Proto bych doporučovala úlohy s touto tematikou zařazovat do procvičování častěji v průběhu studia.

Tato práce pro mě byla velkým přínosem. Umožnila mi hlouběji nahlédnout do uvažování žáků a doufám, že mi v budoucí praxi učitelky matematiky umožní vyvarovat se některých chyb a volby nevhodných postupů při výuce matematiky.

Literatura

Bero, P. & Hejný, M. (1988). Algebraické výrazy. In M. Hejný, et al., *Teória vyučovanie matematiky 2* (155 –157). Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo. ISBN 80-08-00014-7.

Binterová, H., Fuchs, E. & Tlustý, P. (2008). *Matematika 7 pro základní školy a víceletá gymnázia*. Plzeň: Fraus. ISBN 978-80-7238-679-6.

Botlík, O. & Souček, D. (2015). *Komentované výsledky projektu KALIBRO*. Praha. Dostupné z http://www.kalibro.cz/brozury.htm

CERMAT (2008). *Závěrečná zpráva z projektu Hodnocení výsledků vzdělávání žáků 9. tříd ZŠ a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií 2008.* Praha. Počet stran 37 Dostupné z http://www.cermat.cz/2008-1404034237.html

Coufalová, J. (2007). *Matematika pro 7. ročník základní školy*. Praha: Fortuna. ISBN 978-80-7168-993-5.

Čižmár, J. & Řebíčková, D. (1989). *Matematika pro 6. ročník základní školy*. Praha: SPN – pedagogické nakladatelství. ISBN 80-0424403-7.

Hejný, M. (2004). Záporná čísla. In M. Hejný, J. Novotná & N. Stehlíková (Eds.), *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky, 1. díl*. (345–342). Praha: Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta. ISBN 80-7290-189-3.

Lesáková E. & Řídká, E. Některá zjištění vyplývající z projektu „Hodnocení výsledků vzdělávání žáků 9. tříd“. In *Podíl učitele matematiky na ZŠ na tvorbě ŠVP: Studijní materiály k projektu.* 1. vyd. Praha: JČMF, 2006. počet stran 26. CD ROM. ISBN 80-7015-097-1. ISBN 80-7015-085-8.

Měření vědomostí a dovedností: nová koncepce hodnocení žáků. Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání, 1999, 76 s. ISBN 80-211-0333-7.

Odvárko, O. & Kadleček, J. (1998). *Matematika pro 7. ročník základní školy*. Praha: Prometheus. ISBN 978-80-7196-284-7.

Odvárko, O. & Kadleček, J. (1999). *Pracovní sešit z matematiky: soubor úloh pro 7. ročník základní školy*. Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-287-2.

Potužníková, E., Lokajícková, V. & Janík, T. (2014). International comparative studies on school education in the Czech Republic: Findings and challenges. *Pedagogická orientace*. (s. 185–221). DOI: 10.5817/PedOr2014-2-185. ISSN 12114669. Dostupné také z https://journals.muni.cz/pedor/article/view/618

Rendl, R. & Vondrová, N. (2014). Kritická místa v matematice u českých žáků na základě výsledků šetření TIMSS 2007. *Pedagogická orientace, 24*(1), 22–57.

Repáš, V. & Hejný, M. (1988). Záporná čísla. In M. Hejný, et al., *Teória vyučovanie matematiky 2* (83–89). Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo. ISBN 80-08-00014-7.

Stacey, K., Helme, S., & Steinle, V. (2001). Confusions between decimals, fractions and negative numbers: A consequence of the mirror as a conceptual metaphor in three different ways. In M. v. d. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 217–224). Utrecht: PME. Dostupné z https://extranet.education.unimelb.edu.au/SME/TNMY/Decimals/Decimals/backinfo/refs/pme2001.pdf

Tomášek, V., et al. (2008). *Výzkum TIMSS 2007. Obstojí čeští žáci v mezinárodní konkurenci?*. Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání. ISBN 978-80-211-0565-2.

Tomášek, V., et al. (2009). *Výzkum TIMSS 2007 – Úlohy z matematiky pro 8. ročník*. Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání. ISBN 978-80-211-0591-1.

Trejbal, J., Jirotková, D. & Sýkora, V. (1999). *Matematika 7 pro 7. ročník základní školy*. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství. ISBN 80-859-3778-6.

Trejbal, J., Jirotková, D. & Sýkora, V. (2013). *Sbírka úloh z matematiky pro 7. ročník ZŠ.* Praha: SPN - pedagogické nakladatelství. ISBN 978-80-7235-511-2.

Urbanová, J., Koman, M. & Řebíčková, D. (1988). Praha: SPN – pedagogické nakladatelství.

Vondrová, N. & Žalská, J. (2013). Kritická místa matematiky na 2. stupni základní školy v diskurzu učitelů. In Rendl, M., Vondrová, N. et al. *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů.* Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Příloha A

<u>Zadání úloh:</u>

1) Na číselné ose **vyznač** čísla: 2; –3; 4; |–2|; –1,5; 0 a –2

2) **Podtrhni záporná** čísla a **kladná zakroužkuj**:

2	$\frac{7}{3}$	0,1	–122	0	–2	12,3	$-\frac{4}{3}$	–0,22	17

3) Uspořádej **od nejmenšího** po největší čísla (použij znaky >,<, =):

−4	−3	|−3|	0	3	|−2|

4) Do každého **čtverečku** napiš buď +, nebo – tak, aby výsledek byl co možná **největší**.

–5 ☐ –6 ☐ 3 ☐ –9 =

5) Které číslo po vydělení číslem –6 dává výsledek 12?

A) −72
B) −2
C) 2
D) 72

6) Vypočítej:

a) 20 · (30 – 20 · 3) – 700 =
b) 20 – 3 · (30 – 30 : 2) =
c) 65 – 5 · (14 – 6 : 2) =
d) 2 · 3 + 3 · (2 – (–1)) =

7) Na místo teček doplň číslo, aby platila rovnost:

a) 140 – 5 · … = 45

b) … · 10 – 15 = – 85

8)Najdi chyby a oprav je:

a) 5 – (–3) + (–4) = 12
b) 10 + (–6) – 4 – (–3) = 3
c) –2 · 5 – 6 : (–3) – (–8) = 0

9) Vypočítej:

d) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} =$

e) $-\frac{2}{5} - \frac{1}{3} =$

f) (21 – 211) + 2 · (22 – 212) + 3 · (23 – 213) + 4 · (24 – 214) =

10) Najdi **čtyři** po sobě jdoucí **celá čísla**, jejichž součet je –178.

Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta

M. Rettigové 4, 116 39 Praha 1

Evidenční list žadatelů o nahlédnutí do listinné podoby práce

Jsem si vědom/a, že závěrečná práce je autorským dílem a že informace získané nahlédnutím do zveřejněné závěrečné práce nemohou být použity k výdělečným účelům, ani nemohou být vydávány za studijní, vědeckou nebo jinou tvůrčí činnost jiné osoby než autora.

Byl/a jsem seznámen/a se skutečností, že si mohou pořizovat výpisy, opisy nebo rozmnoženiny závěrečné práce, jsem však povinen/povinna s nimi nakládat jako s autorským dílem a zachovávat pravidla uvedená v předchozím odstavci tohoto prohlášení.

Poř. č.	Datum	Jméno a příjmení	Adresa trvalého bydliště	Podpis
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				
8.				
9.				
10.				