UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Charakteristika odlišných pojetí výuky matematiky na příkladu dvou učitelů gymnázia

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Autor práce: Bc. Kateřina Pelcová

Vedoucí práce: doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.

PRAHA 2015

CHARLES UNIVERSITY

FACULTY OF EDUCATION

Department of Mathematics and Mathematical Education

Characteristics of Different Teaching Styles on the Example of Two Secondary Mathematics Teachers

DIPLOMA THESIS

Author: Bc. Kateřina Pelcová

Supervisor: doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.

PRAGUE 2015

Prohlášení

Tuto práci jsem vypracovala samostatně pod vedením doc. RNDr. Nadi Vondrové, Ph.D. Veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využila, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byla jsem seznámena s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Karlova má právo uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Karlova oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v Univerzitní knihovně Univerzity Karlovy.

V Praze dne 15. 7. 2015 ……………………………………………….

Poděkování

Ráda bych touto cestou poděkovala vedoucí mé práce doc. RNDr. Nadě Vondrové, Ph.D. za ochotu, cenné rady a podnětné připomínky, které mi pomohly realizovat tuto práci. Děkuji také učitelům, kteří byli ochotní účastnit se výzkumu, protože bez nich by tato práce nemohla vzniknout.

Abstrakt

Cílem této diplomové práce je charakterizovat pojetí výuky matematiky dvou učitelů gymnázia, z nichž jeden je představitelem tradičního frontálního vyučování a druhý vyznává spíše aktivní zapojení žáků do procesu učení. Jejich pojetí výuky porovnávám na výuce jednoho konkrétního tématu, a sice analytické geometrie přímky v rovině. V teoretické části práce jsou popsána zkoumaná pojetí výuky (frontální vyučování a tzv. realistická pedagogika) a vybrané výzkumy s podobným zaměřením. Vlastní výzkum sestával z náslechů v hodinách obou učitelů a závěrečného testu pro žáky. Získaná data byla analyzována kvalitativními i kvantitativními metodami.

Představitelka tradičního frontálního vyučování klade důraz na procvičování a vysvětlování nové látky. Úlohy řeší ona sama, nebo vyvolaný žák u tabule. V průběhu hodiny pokládá žákům otázky, které vyžadují převážně krátké odpovědi a jsou zaměřené na reprodukci předchozích znalostí. V hodinách učitele, který je tvůrcem a zároveň představitelem tzv. realistické pedagogiky, tráví žáci nejvíce času samostatným řešením úloh. Výklad provádí učitel formou diskuze, žákům často pokládá otázky zaměřené na aplikaci předchozích poznatků, vedoucí k formulaci vlastních myšlenek.

Klíčová slova:

pojetí výuky, frontální vyučování, realistická pedagogika, analytická geometrie přímky v rovině

Abstract

The goal of this thesis is to describe teaching styles of two secondary mathematics teachers with very different approaches. One of them represents traditional frontal instruction and one prefers students to be more actively involved in the learning process. Their styles are compared based on their teaching a concrete mathematical topic, namely plane analytic geometry of lines. Examined teaching styles (frontal instruction and so-called realistic education) and selected research with a similar focus are described in the theoretical part of the thesis. The research consisted of observations in lessons of both teachers and a final test for their students. The acquired data has been analyzed by qualitative and quantitative methods.

The teacher representing traditional frontal instruction emphasizes practising and explaining the new topic. Problems are solved by herself or one chosen student on the blackboard. Questions, which she is asking, require mainly short answers and are focused on reproduction of the previously learnt knowledge. During the lessons of the teacher who is the creator and also an exponent of the so-called realistic education, students are solving problems independently. New topics are discussed collectively, the teacher often asks questions focused on the application of previous knowledge, and this process is leading to the formulation of the students' own thoughts.

Keywords:

teaching style, frontal instruction, realistic education, plane analytic geometry of lines

Obsah

1 Úvod

Přístupy k výuce matematiky vždy byly aktuálním tématem. V poslední době získává tato oblast ještě větší publicitu zejména v kontextu toho, že výkony žáků v České republice se v mezinárodním měřítku zhoršují (Altmanová a kol., 2011). Proto se hledají nové způsoby jak tento negativní trend změnit a matematiku vyučovat lépe a efektivněji.

Podle slov jejího autora Martina Krynického je jednou z těchto možností i tzv. realistická pedagogika, která významně mění zaběhnutá schémata ve výuce matematiky, obzvláště co se týče aktivity žáků v hodinách. Autor vychází ze svých praktických zkušeností a reaguje na reálnou situaci ve školství, kde podle jeho názoru současné metody selhávají i z toho důvodu, že jsou postaveny na dvou předpokladech, které nejsou splněny: žáci se chtějí a umějí učit. (Krynický, 2010)

Cílem diplomové práce je popsat rozdíly mezi „tradiční“ frontální výukou matematiky (reprezentovanou jedním zkušeným a úspěšným učitelem) a realistickou pedagogikou (reprezentovanou zmiňovaným M. Krynickém), a to na konkrétním tématu analytické geometrie přímky v rovině. Za tímto cílem byla sbírána data během náslechů ve vyučovacích hodinách u obou zkoumaných učitelů a formou výsledků závěrečných testů žáků. Práce se nesnaží vyvodit jednoznačný závěr, který ze zkoumaných pojetí výuky je lepší, ale nabídnout čtenáři dostatečné množství údajů a podrobné shrnutí, které jemu samotnému umožní oba přístupy posoudit.

Práce je členěna následujícím způsobem. V kapitole Teoretické pozadí práce jsou stručně shrnuty metody a výsledky výzkumů zabývajících se obdobnou tématikou. Dále je zde uvedena charakteristika pojetí výuky, jež zkoumaní učitelé představují. Následující kapitola Metodologie výzkumu již přistupuje k popisu přípravy výzkumu, metod sběru a analýzy dat. Je zde také popsána samotná realizace výzkumu, stručná charakteristika zkoumaných učitelů a škol, na kterých vyučují a průběh výzkumu. Jádro práce tvoří čtvrtá kapitola nazvaná Výsledky výzkumu. Jsou zde k dispozici veškeré důležité údaje získané během samotného výzkumu. S těmito údaji se zde dále pracuje a vyvozují se z nich dílčí závěry – prvky charakteristické pro pojetí výuky obou učitelů, jejich srovnání v obecné rovině i na konkrétních ukázkách z hodin. V kapitole je dále uvedeno vyhodnocení závěrečných testů, které žáci ve zkoumaných třídách vypracovali. Veškeré poznatky získané během výzkumu jsou pak stručně shrnuty v závěru. V příloze práce lze nalézt zadání závěrečných testů žáků.

2 Teoretické pozadí práce

2.1 Vybrané výzkumy s podobným zaměřením

První část kapitoly je věnována výzkumům, které se zabývaly způsobem výuky matematiky. Prvním z nich je TIMSS[1] videostudie, druhým je The Learner's Perspective Study (Novotná, Hošpesová, 2012). Obě jsem využila k tomu, abych si ujasnila, jakých aspektů výuky si mám při pozorování všímat, respektive které aspekty výuky jsou pro vyučovací styl učitele klíčové. Třetí část kapitoly pojednává o podobných výzkumech, které se zabývaly dvěma různými pojetími výuky matematiky a jejich vlivem na znalosti žáků.

2.1.1 Teaching Mathematics in Seven Countries[2]

Jedná se o zprávu popisující výsledky TIMSS videostudie z roku 1999. Cílem této studie bylo prozkoumat a popsat způsoby výuky v matematice a přírodovědných předmětech v sedmi různých státech, které se umístily v TIMSS 1995 na předních příčkách. Výzkum byl realizován v hodinách osmých ročníků v Austrálii, České republice, Hongkongu, Nizozemsku, Švýcarsku, USA a Japonsku. Jedním z dílčích cílů výzkumu bylo popsat způsoby výuky, vyhodnotit, jakým způsobem ovlivňují učení, a identifikovat jejich podobné či odlišné znaky napříč jednotlivými státy.

V úvodní části studie je popsáno, proč je vhodné zkoumat výuku prostřednictvím záznamu na video. Použití dotazníků je problematické převážně z důvodu, že učitel si nemusí být schopen všechny události z hodiny zpětně vybavit. Navíc stejná otázka může pro různé učitele znamenat něco jiného. Při pozorování je nutné předem stanovit, které jevy se budou sledovat a jakým způsobem se bude průběh hodin zaznamenávat, aby bylo možné data objektivně porovnat. Pokud se v průběhu výzkumu vyskytne nová kategorie či objekt pozorování, nelze to již zahrnout, protože není možné prozkoumat hodiny zpětně. Tento problém řeší videonahrávky z hodin. Lze je analyzovat zpětně, opakovaně, lze kombinovat kvantitativní analýzu dat s kvalitativní. Přítomnost kamery v hodině však může ovlivnit výuku v tom smyslu, že jak učitel, tak žáci se nemusí chovat stejným způsobem jako v hodinách bez videokamery.

[1] Trends in International Mathematics and Science Study – mezinárodní výzkum výsledků vzdělávání v oblasti matematiky a přírodních věd

[2] http://nces.ed.gov/pubs2003/2003013.pdf

Studii jsem využila převážně jako inspiraci pro stanovení jevů, které budu při svém výzkumu sledovat. Předmětem videostudie byly například následující kategorie: struktura hodiny, způsob prezentace klíčových myšlenek, témata hodin, využití pomůcek při výuce, typy řešených úloh nebo množství slov pronesených učitelem a žáky. Některé z těchto kategorií jsou stručně popsány níže.

Pozorovaných jevů v kapitole týkající se struktury vyučovací hodiny je několik. Například účel aktivit v hodině (prezentace nového učiva, opakování, procvičování), způsob práce učitele a žáků (individuální práce žáků, práce ve dvojicích či skupinách, veřejná prezentace informací žáky, veřejná prezentace informací učitelem, kombinace předchozích), role domácích úkolů (v kolika hodinách byl zadán a kontrolován).

Kapitola popisující témata (či také obsah) vyučovacích hodin se zabývá složitostí řešených úloh, využitím důkazů, kontextu řešených úloh (z reálného života, zdali obsahují diagramy, obrázky, tabulky nebo grafy), jakým způsobem se úlohy řeší (žáci aplikují znalosti získané v jiném kontextu, žáci veřejně prezentují řešení, tvorba a výběr metod řešení – např. diskuze, uvedení alternativních metod řešení).

V souvislosti s řešením úloh bylo dále zkoumáno, zda žáci při řešení opakují již známé postupy či musí vymýšlet na základě získaných znalostí postupy nové. Úlohy byly rozděleny do tří kategorií, kdy pro vyřešení úlohy z kategorie „using procedures“ stačí použít známé postupy (například vyřešit rovnici). Pro vyřešení úlohy z kategorie „stating concepts“ je nutné rozumět danému matematickému pojmu (například načrtnout pravoúhlý trojúhelník). Poslední kategorie úloh je nazvána „making connections“. Tyto úlohy vyžadují propojení znalostí z různých oblastí či několika různých postupů řešení. Předmětem výzkumu byl také způsob, kterým byly úlohy v hodinách řešeny (konstatování výsledku, vysvětlení pojmů, diskuze k průběhu řešení).

Z výsledků výzkumu vyplynulo, že výuka matematiky v České republice je charakteristická několika hlavními rysy. Tím nejvýraznějším je velmi vysoký důraz na opakování učiva, které představuje průměrně 58 % času výukové hodiny, což s výjimkou USA překonává všechny ostatní zúčastněné země. Opakování učiva je zpravidla prováděno v první třetině vyučovací hodiny a zaměřuje se na opětovný výklad dříve probírané látky. Tento proces je zároveň často využíván k hodnocení žáků. To se může dít například formou veřejného zkoušení u tabule, kdy žáci musí před celým kolektivem demonstrovat své znalosti ze zkoušené oblasti a jsou za to ohodnoceni.

Z hlediska interakce mezi žáky a učitelem je pro výuku matematiky v ČR typická převládající veřejná komunikace, které se účastní celý kolektiv třídy. Interakce mezi jednotlivými žáky a učitelem jsou spíše minoritní záležitostí. Stejně tak převládá společná práce celé třídy nad samostatnou prací jednotlivých žáků nebo skupin.

Řešení úloh je typickým znakem většiny hodin matematiky v ČR a tvoří největší průměrný podíl času každé výukové hodiny (52 %). Většina úloh je zadána pouze za pomoci matematických symbolů a čísel, kdy tyto úlohy obvykle předpokládají řešení pomocí jednoho z typických postupů pro daný typ úlohy. Úlohy, ve kterých je třeba propojit různé oblasti znalostí s vlastní invencí žáka, jsou spíše minoritní záležitostí. Z hlediska složitosti převládají úlohy s nízkou obtížností (64 %), následované středně složitými úlohami (25 %) a jen malým počtem úloh s vysokou složitostí (11 %).

2.1.2 Learner's Perspective Study[3]

The Learner's Perspective Study je mezinárodní srovnávací výzkum zaměřený na výuku matematiky. Jeho cílem je dokumentace výuky na sérii po sobě jdoucích vyučovacích hodin matematiky v osmém ročníku. Tyto hodiny jsou natáčeny třemi videokamerami a neprodleně po hodině jsou také vedeny rozhovory s učiteli a žáky, které jsou rovněž zaznamenávány na video. Díky této metodě je možné porovnat výuku z perspektivy učitele, žáka i výzkumníka. Původně se studie měla týkat čtyř států, projekt se však rozrostl a momentálně se na něm podílí výzkumné týmy z šestnácti států. Výsledky výzkumu vycházejí v sérii publikací, z nichž je pro moji práci důležitá zejména první s názvem *Mathematics Classrooms in Twelve Countries: The Insider's Perspective*.

Publikace (Clarke a kol., 2003) dokumentuje výuku na sérii vyučovacích hodin ve dvanácti zemích: Austrálie, Čína, Česká republika, Filipíny, Izrael, Japonsko, Jihoafrická republika, Korea, Německo, Singapur, Švédsko a USA. Autory kapitol jsou vždy odborníci z jednotlivých zemí, což jim umožňuje ideální pozici k analýze, protože rozumí dané kultuře a školskému systému. Cílem je tedy porovnání výuky matematiky napříč širokým spektrem školských systémů v různých zemích. Je zde snaha identifikovat podobnosti a rozdíly v učebních postupech a souvislosti s vnímáním a chováním žáků. Níže jsou stručně popsány vybrané kapitoly knihy, ze kterých jsem vycházela při přípravě svého výzkumu.

[3] http://www.lps.iccr.edu.au/

Christine Keitel, autorka třetí kapitoly knihy s názvem „Setting a Task in German Schools“, se zabývá úlohami, které učitel zadává. Zkoumá, zda způsob, jakým učitel úlohu zadá, ovlivňuje porozumění žáků, jejich učení a vztah k matematice. Úlohy dělí do dvou kategorií – úlohy sloužící k procvičování postupu, dovednosti či metody a úlohy, jejichž řešení vyžaduje systematickou reorganizaci znalostí či využití nové metody nebo nového náhledu na problém. Dále zjišťuje, jakým jazykem je problém prezentován (symbolicky, v autentickém kontextu, kombinací obojího) a také způsob, jakým učitelé žákům zdůvodňují smysl úlohy (nejčastěji bylo uváděno, že úloha je tréninkem na nadcházející test).

Keiko Hino věnoval čtvrtou kapitolu s názvem „The Role of Seatwork in Three Japanese Classrooms“ aktivitě zvané „seatwork“, kdy žáci pracují na zadaném úkolu nezávisle na učiteli buď samostatně, nebo v malých skupinách. Je zde popsán postup práce učitele, který se pohybuje po třídě a sleduje nejen postup žáků v řešení problému, ale také, kteří žáci postupují předpokládaným způsobem, a kteří alternativně. Učitel při této aktivitě navádí žáky k řešení tak, že poukazuje na jejich chyby, zajímá se o způsob, jak žák přemýšlí nad řešením problému, případně odpovídá na žákovské otázky. Autor dále sleduje čas věnovaný této aktivitě, jaké problémy při ní žáci řeší, které pomůcky při práci používají (např. pracovní listy) a v neposlední řadě verbální interakce učitele s jednotlivými žáky.

Ida Ah Chee Mok popisuje v šesté kapitole s názvem „Teacher-Dominating Lessons in Shanghai: The Insiders’ Story“ výuku matematiky, kde má dominantní postavení učitel. Je zde uveden rozsáhlý rozhovor s učitelem, stejně tak názory žáků na výuku. Učitel ve své výuce klade velký důraz na to, aby žáci ovládali znalosti, na které potřebuje navázat, velmi často akcentuje význam samostatného myšlení žáků, avšak vybírá úlohy s omezenými možnostmi řešení tak, aby žáci museli dospět k závěrům, které učitel očekává. Když učitel žáky vyzýval, aby více přemýšleli, neměl na mysli, aby volně prozkoumávali různé možnosti. Spíše mu šlo o „řízené“ řešení úloh s omezenými možnostmi řešení. Tyto úlohy se nejčastěji řeší formou diskuse celé třídy, kterou řídí učitel, nebo diskusí žáků ve dvojicích. Učitel sice nechává žáky vysvětlovat své nápady vlastními slovy, ale opravuje je a zdůrazňuje význam matematicky přesného vyjadřování. Největší část hodiny (kolem 70 %) je věnována procvičování.

V jedenácté kapitole knihy s názvem „Students’ Verbal Actions in German Mathematics Classes” se autorka Astrid Begehr zabývá verbálními projevy žáků a důsledky na jejich učení se. Zkoumá, jak jsou žáci schopní a ochotní v hodinách přispívat do diskuse, kolik žáků ve třídě svými výroky přispívá a jaký je podíl učitelových otázek, kdy není po žácích požadována formulace vlastní myšlenky, ale jen krátká odpověď. Porovnávána byla délka výroků žáků a učitele (počet slov) a bylo zjištěno, že poměr příspěvků žáků a učitele v hodinách matematiky je přibližně jedna ku třem. V závěru autorka uvádí, že učitelé matematiky by se měli oprostit od pouhého navádění žáků po úzké předdefinované cestě a věnovat jim více prostoru, kdy by měli šanci vytvořit a vyjádřit své vlastní myšlenky.

Ida Ah Chee Mok a Francis Lopez-Real, autoři šestnácté kapitoly knihy s názvem „A Tale of Two Cities: A Comparison of Six Teachers in Hong Kong and Shanghai“, analyzují vyučovací hodiny šesti učitelů z hlediska jejich přístupů a aktivit, které v hodinách realizují. Tyto dělí do pěti kategorií: přístup založený na zkoumání, přímé vyučování, shrnutí, procvičování a zadání domácích úkolů. Zkoumání zde má význam řešení širokého či složitého problému s větším množstvím možných odpovědí, který je diskutován v rámci celé třídy nebo jednotlivých skupin. Přímé vyučování znamená vysvětlování učitele, který klade důraz na opakování předchozího učiva, vyžaduje přesnou terminologii, jasně definuje metody řešení a předvádí ukázkové příklady. Dále se autoři zabývají otázkou, jak často se jednotlivé aktivity v průběhu hodiny střídají, a věnují pozornost také organizaci vyučovacích hodin (práce celé třídy vedená učitelem, samostatná práce žáků, práce ve skupinách.)

V devatenácté kapitole „Constitution of the Classroom Environment: A Case Study“ analyzují autorky Helena Binterová, Alena Hošpesová a Jarmila Novotná vyučovací hodiny zkušené učitelky, která je respektována ostatními učiteli, rodiči i profesionály, z hlediska tzv. didaktického kontraktu a výskytu jevů s ním souvisejících (Topazův, Jourdainův). Tyto jevy jsou zde dokumentovány na konkrétních ukázkách z hodin. V závěru kapitoly jsou popsány tři různé výukové styly a prvky výuky učitelky, které jsou charakteristické pro jeden ze tří uvedených stylů. Cílem výzkumu bylo ukázat, že by nebylo správné vyslovit závěr, že žáci si vybudují nejlepší matematické znalosti či osobní kvality, pokud budou vyučováni právě jedním konkrétním stylem.

2.1.3 Podobné výzkumy zkoumající výukový styl dvou učitelů

V tomto oddíle je stručně shrnuta metodologie a závěry vybraných výzkumů, které se věnují porovnání dvou výukových stylů a jejich vlivu na úroveň matematického poznání žáků.

Dizertační práce s názvem *A Mixed Methods Study of the Effects of Constructivist and Traditional Teaching on Students in an After-School Mathematics Program* (Nelson-Johnson, 2007) měla za cíl porovnat vlivy konstruktivistické a tradiční metody výuky matematiky u třiceti žáků sedmého ročníku v programu „Express to Success After-School Program“. Žáci byli náhodně rozděleni do dvou skupin, kdy skupinu experimentální vyučovala matematiku sama autorka výzkumu po dobu jednoho roku, přičemž její výuka byla zaměřená na žáka a využívala kooperativního vyučování a manipulační činnosti a aktivity. Skupina kontrolní byla vyučována tradičními metodami frontální výuky, učitel kladl důraz na postupy, pravidla a základní dovednosti. Na počátku a na konci výukového experimentu žáci vypracovali test, na závěr byly s žáky vedeny rozhovory a byla sledována také docházka žáků.

Experimentální skupina dosáhla v závěrečném testu lepších výsledků než skupina kontrolní, také docházka žáků v experimentální skupině byla vyšší. Podle odpovědí žáků na otázky v závěru výzkumu autorka uvádí, že žáci vyučovaní konstruktivistickými metodami vykazovali pozitivnější přístup k matematice.

Dizertační práce *Comparison Between Computer Assisted Instruction and Traditional Method Instruction as Applied to Teaching Algebra to Urban High School Students* (Moore, 2008) zkoumá vliv výuky matematiky podporované počítačem na znalosti žáků v algebře na konci devátého ročníku. Autor analyzoval výsledky žákovských standardizovaných testů z let 1995 až 1999. Porovnával výsledky žáků, kteří byli vyučováni tradičně, a žáků, kteří měli možnost minimálně jednou týdně pracovat se softwarem Plato. Tento software je postaven na behaviorální teorii učení. Autor ve své práci popisuje také koncepci konstruktivismu a komentuje fakt, že behaviorismus je v podstatě opakem konstruktivismu.

Z analýzy dat vyplynulo, že žáci, kteří používali při výuce tento software, dosahovali na konci devátého ročníku horších výsledků ve standardizovaných testech než žáci, kteří byli vyučováni tradičně. Autor uvádí mnoho dalších podobných výzkumů, jejichž výsledek byl opačný, případně takových, kde nebyl prokázán žádný významný vliv použití počítačového softwaru na znalosti žáků. Upozorňuje také na výzkum, z jehož výsledků vyplynulo, že žáci se raději učili matematiku na počítači než s učitelem. Zmiňuje také, že učitelé tříd, jejichž výuka matematiky byla prováděna z části s využitím počítačů, někdy trávili hodně času řešením technických problémů, zatímco ti, co učili tradičně, se v tomto čase věnovali algebře.

Poslední práce, kterou v tomto oddíle zmíním, je *Srovnání výuky dvou učitelů matematiky* (Žďárská, 2014). Jejím cílem bylo porovnání výukových stylů dvou středoškolských učitelů matematiky: zkušené a uznávané učitelky, která je představitelkou tradiční metody, a Martina Krynického, představitele již zmíněné realistické pedagogiky. Autorka absolvovala několik náslechů v hodinách obou učitelů, vedla rozhovory s žáky i učiteli a v jedné ze sledovaných tříd zkoumané učitelky žáci vyplnili dotazník, kde měli možnost se k výuce vyjádřit. Na základě získaných dat autorka zhodnotila styly výuky obou učitelů, shrnula prvky, v nichž se shodují, a prvky, ve kterých se liší.

U představitelky tradičního stylu výuky nemají žáci mnoho prostoru k vlastnímu objevování, učitelka vysvětluje látku pro žáky srozumitelně, její povolání ji baví a své žáky má ráda. Podle slov autorky mají i žáci učitelku rádi a váží si jí. Autorka také komentuje přístup učitelky k žákovské chybě, která je v jejích hodinách nežádoucím jevem. Na výuce Martina Krynického hodnotí kladně pracovní atmosféru ve vyučování. Cílem učitele je, aby jej žáci vnímali jako partnera a rádce. Žáci tento přístup oceňují a svého učitele mají rádi. Za jeden z nejvýznamnějších rozdílů obou učitelů považuje autorka jejich pohled na to, co by žáci měli umět. U učitelky se jedná o řešení úloh, u učitele o schopnost samostatně myslet.

Z výzkumů uvedených výše jsem vycházela při přípravě svého výzkumu, především ve stanovení kategorií a jevů, na které se při pozorování výuky zaměřím. První kategorií byla struktura hodiny, tedy kolik času učitel věnuje stanovení cílů, opakování předchozí látky, výkladu nové látky, vlastnímu zkoumání žáků, řešení problémů (kdo problémy řeší, jaký je účel řešených problémů – opakování, objevování, vzorová úloha), procvičování a shrnutí. Druhá kategorie se týkala organizace práce – samostatná práce žáků, práce ve skupinách, společná práce (frontální). Předmětem třetí kategorie byla komunikace ve třídě a otázky učitele. Mým cílem v této oblasti bylo nalézt odpovědi na následující otázky: Vyjadřují se žáci k probírané látce? Mají možnost se vyjádřit? (Kolik času mají k dispozici, aby se vyjádřili?) Přispívají dobrovolně, nebo jsou dotazováni učitelem? Jsou schopní přispívat? (Kolik žáků je schopných přispívat?) Jaké otázky učitel klade (uzavřené, otevřené)? Formulují žáci vlastní myšlenky, nebo pouze odpovídají na jednoduché, úzce zaměřené otázky? Apod.

V průběhu výzkumu jsem tyto jevy a s nimi související výzkumné otázky několikrát upravovala vždy, když se při výuce vyskytl zajímavý prvek, který jsem uznala za vhodný dalšího zkoumání. Než jsem například začala navštěvovat hodiny u druhého učitele, nepředpokládala jsem, že situace, které se budou v hodinách řešit, budou mít často velmi podobný základ a bude možné porovnat obě pojetí výuky právě na těchto konkrétních situacích. Výsledná podoba výzkumných otázek je uvedena v oddíle 3.1.

2.2 Vymezení zkoumaných pojetí výuky

Protože se učitelka, s kterou se mi podařilo dojednat účast na výzkumu (viz oddíl 3.2), vyznačuje vyučovacím stylem, který využívá do velké míry frontální výuku, nejdříve tento způsob výuky popíši teoreticky. Podobně se dále budu zabývat pojmem tzv. realistické pedagogiky, protože tak nazval svoje pojetí výuky druhý zkoumaný učitel. Toto pojetí je dále porovnáno s konstruktivistickými přístupy k vyučování, protože k nim má z běžně popisovaných přístupů k výuce nejblíže.

2.2.1 „Tradiční“ frontální výuka

Řada výzkumů dokládá, že frontální (někdy také hromadná) výuka je nejčastějším organizačním uspořádáním žáků ve třídě, a ačkoli není považována za historicky nejstarší, je vnímána jako tradiční (Maňák, Švec, 2003). Vyučovací hodina má obvykle následující průběh: zahájení hodiny, opakování předchozího učiva, probírání nového učiva, opakování a procvičování nového učiva, kontrola a diagnóza stavu rozvoje vědomostí a dovedností, uložení domácích úkolů (Skalková, 2007).

Frontální výuka je podle inovované klasifikace výukových metod považována za komplexní metodu výuky, které „rozšiřují výukové metody o prvky organizačních forem, didaktických prostředků a reflektují též celkové cíle výchovy a vzdělávání“ (Maňák, Švec, 2003, s. 131). Frontální výuka se vyznačuje společnou prací žáků ve třídě s dominantním postavením učitele. Ten řídí, usměrňuje a kontroluje veškeré aktivity žáků. Výuka je orientována převážně na kognitivní procesy, cílem je, aby si žáci osvojili maximální rozsah poznatků. Hlavní pozornost je věnována vysvětlování učitele, spolupráce mezi žáky je podporována jen v omezeném rozsahu, vede tak často k pasivitě žáků, u nichž nepodporuje rozvoj samostatného myšlení a jednání.

Maňák a Švec dále uvádí, že nejčastějším argumentem ve prospěch frontální výuky je fakt, že se jedná o nejefektivnější formu zprostředkování učiva. Svou podstatou umožňuje učiteli předat žákům co největší množství poznatků, které jsou přehledně a logicky uspořádané. Úskalí této metody však tkví v tom, že žák se nutně nemusí výuky aktivně účastnit, nemusí předávané učivo pochopit a vlastní učení u něho z těchto důvodů vůbec neprobíhá.

Vysvětlování vs. výklad

Pro expozici nového učiva je při frontální výuce typicky používána slovní monologická metoda vysvětlování. Tato metoda „charakterizuje logický a systematický postup při zprostředkování učiva žákům, který respektuje jejich věkové zvláštnosti a vychází z aktuálního stavu jejich vědomostí a dovedností“ (Maňák, Švec, 2003, s. 57). Vysvětlování by mělo navazovat na zkušenosti žáků a stupeň osvojených poznatků. Hlavní úskalí této metody jsou podle Maňáka a Švece dvě. Učitel vysvětluje učivo příliš podrobně či pro žáky nesrozumitelným jazykem nebo učivo naopak příliš zjednodušuje ve snaze podat jej srozumitelně.

Výuková metoda zvaná výklad již v inovované klasifikaci výukových metod není zahrnuta. Metoda výkladu je formulována jako „způsob prezentace didaktické informace“ (Průcha a kol., 2003, s. 280) a jejím hlavním účelem je podle Průchy právě vysvětlování didaktické informace žákům.

2.2.2 Realistická pedagogika[4]

Termín realistická pedagogika zavedl Martin Krynický jako název pro jeho pojetí výuky vycházející z reálné situace ve školství, z učitelské praxe a osobních zkušeností. V úvodu své online učebnice v několika bodech shrnuje, jak ve škole žáci podle jeho názoru skutečně fungují, vynecháme-li 10 % nejlepších: žáci se učit nechtějí, neumějí, ve škole většinou nic nedělají, nechápou věci tak, jak jim je učitel vysvětluje, a schází jim dovednosti k samostatnému řešení problémů, což vede k tomu, že se požadovanou látku pouze mechanicky naučí a po přezkoušení zase zapomenou.

V úvodu online učebnice uvádí Krynický myšlenku, která, myslím, vystihuje, co je třeba změnit a proč je důležitá vlastní aktivita žáků při výuce (Obecné zásady realistické pedagogiky, s. 2):

> Všechny lidské činnosti se učí nacvičováním. Malí fotbalisté mají tréninky, na kterých běhají, přihrávají si, střílejí a hrají fotbal. Malý muzikant chodí na hodiny k učiteli, který s ním hraje, doma musí cvičit. Ve všech případech musí adept nějaké dovednosti trénovat tak, že provádí činnost, kterou se chce naučit.
>
> Naše školy však fungují přibližně od druhého stupně základní školy jinak. Žáci sedí v lavicích a poslouchají, jak se taková věda dělá, koukají, jak někdo jiný řeší příklady. Sami

[4] Oddíl je zpracován na základě materiálů uvedených na stránce www.realisticky.cz.

se k procvičování této dovednosti dostanou maximálně při řešení domácích úkolů (bez přítomnosti někoho, kdo by jim mohl poskytnout pomoc).

Že nepřeháním, je zřejmé už jenom z toho, jak málo se škrtá v jejich sešitech. To nejsou záznamy nepovedených pokusů a postupného zlepšování. To jsou vybroušené výkony připravené k vytištění (ovšem vytvořené učitelem). Představte si, jak by asi hráli fotbalisté, kteří by místo tréninků sledovali fotbalové zápasy zkušených profesionálů (není to těžká představa, podobných reprezentačních týmů máme v každé hospodě několik). Tady možná leží zakopaný pes nudy, kterou většina dětí podle mnoha výzkumů ve školách zažívá.

Změny, které by měla realistická pedagogika zajistit, Krynický shrnuje do několika bodů:

- Žáci o hodinách sami doopravdy něco dělají.
- Žáci se neustále učí, jak se mají učit.
- Žáci okusí pocit, že látka je pochopitelná, že je v jejich silách ji zvládnout.
- Učitel má neustálý přehled, jak žáci přijímají to, co jim předává.
- Učitel sleduje práci žáků, odhaluje nedostatky a zlozvyky ve stylu jejich práce a společně s nimi je napravuje.

Hlavní zásady realistické pedagogiky

Podle Krynického (Obecné zásady realistické pedagogiky, s. 2) jsou hlavní zásady realistické pedagogiky návratem k zásadám, které prosazoval již J. A. Komenský.

- **Zásada názornosti** (žák získává poznatky přímou zkušeností)
- **Zásada systematičnosti a soustavnosti** (učivo by mělo na sebe logicky navazovat)
- **Zásada aktivnosti** (žáci by měli získávat poznatky vlastní zkušeností)
- **Zásada trvalosti** (učivo se musí soustavně opakovat)
- **Zásada přiměřenosti** (učitel vychází z věkových a individuálních schopností dětí)

K těmto zásadám přidává další, neméně důležité:

- **Zásada pedagogického realismu** neboli uvědomění si faktu, že učitel výuku připravuje pro žáky, které učí, ne pro ty, které by učit chtěl. Podle Krynického tato zásada neznamená automatické snižování laťky, ale znamená, že učitel musí připravovat výuku tak, aby byla přínosná pro maximální možnou skupinu žáků (ne pouze pro ty nejlepší), a tím z nich (možná) jednou vychová takové žáky, jaké by chtěl.

- **Zásada okamžité ověřitelnosti** vychází z často nereálných očekávání učitele, že žáci přijmou látku tak, jak jim jí předává. Jedná se tedy o konstruování výuky tak, aby směřovala k okamžité kontrole toho, jak žáci vyučovaný obsah přijímají.
- **Zásada empirické zkušenosti** se týká učebnic, které by měly být psány, zkoušeny a upravovány podle průběhu vyučovacích hodin v konkrétních třídách na běžných školách. Kontrola jejich účinnosti by měla probíhat zejména uplatňováním okamžitého ověřování v hodinách v závislosti na reakcích žáků.
- **Zásada individualizace** se také týká učebnic, které by měly být připraveny tak, aby žáci rozdílné úrovně mohli samostatně pracovat v rámci svých možností. Připravená látka by měla umožňovat, aby si v rámci celkového rozvržení učiva pro celou třídu žáci vybírali (nebo jim učitel vybíral) individuální postupy práce. Okamžitá kontrola by pak měla umožňovat učiteli poskytovat cílenou pomoc a usměrňovat jejich práci.
- **Zásada dlouhodobého nácviku dovedností**, jejíž uplatňování závisí podle Krynického především na učiteli, protože zlepšení dovedností, které jsou nutným předpokladem smysluplné výuky, je dlouhodobou záležitostí (na rozdíl od „průtokového“ formálního okamžitého zlepšení). Učitel by na to měl žáky připravit, učebnice by měla dlouhodobý nácvik těchto dovedností podporovat.

Proaktivní metoda a učebnice

Krynický uvádí, že realistická pedagogika může být realizována různě. Sám je zastáncem výukové metody, kterou nazývá proaktivní. Tato metoda ve vysoké míře využívá výpočetní techniku a učebnici s předem připravenými hodinami. Typická proaktivní hodina probíhá následujícím způsobem (Krynický, 2010):

> Látka je připravena ve dvou souborech. Jeden obsahuje kompletní text – vysvětlení, zadání příkladů i jejich řešení. Druhý soubor pak obsahuje pouze zadání příkladů (hlavně proto, aby studenti postupující různou rychlostí mohli řešit v jednom okamžiku různé příklady).
>
> Vlastní výklad nové látky (části hodiny, které nejsou součástí příkladů) probíhá často klasickým způsobem u tabule s maximálním možným využitím diskuze se žáky. Učitel

vysvětluje pouze nutné minimum, doba výkladu je minimalizována, učitel většinou nepředvádí ukázkové příklady.

Jakmile výklad skončí, učitel promítne zadání příkladů, studenti začnou pracovat a učitel sleduje jejich práci v lavicích. Kromě toho, že může odstraňovat problémy, se kterými se studenti setkávají, vidí i to, jak látku zvládají, zda je potřeba něco dodat nebo vysvětlit před celou třídou. Správný odhad okamžiku, kdy je nutné předstoupit před celou třídu, je asi neobtížnější dovedností.

Ve chvíli, kdy je jasné, že třída příklad spočítala, učitel promítne z hlavního souboru řešení a třída pokračuje v samostatném počítání nebo učitel v další části výkladu. Doba, která uplyne od zadání příkladu do chvíle, kdy se objeví řešení, závisí kromě postupu třídy i na tom, kolik je času do konce hodiny a jak moc je konkrétní příklad důležitý. Pokud má příklad více částí, nečeká se, až budou mít všichni spočítané všechny části. Snahou je, aby si všichni zkusili alespoň část každého příkladu. Velmi často se správné řešení ani nepromítá, protože je to zbytečné.

Při komunikaci v lavicích se učitel snaží vyhnout tomu, aby „zadarmo“ prozradil, jak mají tápající postupovat. Spíše upozorňuje na nesrovnalosti, dovádí rozpory do absurdna nebo trvá na tom, aby studenti dodržovali pravidla, která mají znát.

Výsledky, ke kterým studenti dospějí, jsou často používány k další fázi výkladu.

V příspěvku *Zkuste to proaktivně* (Krynický, 2010) jsou shrnuty také základní nevýhody proaktivní výuky. První z nich se týká učebnic. Autor uvádí, že vzhledem k nutnosti neustálé konfrontace proaktivní učebnice s výukou, musí si ji učitel napsat sám. Učitel také nikdy nemá absolutní vládu nad průběhem hodiny, je třeba, aby dobře znal probíranou látku i své žáky, aby věděl, u koho lze očekávat jaké chyby. V neposlední řadě autor zmiňuje obtížnou realizaci proaktivní výuky, pokud se s ní začne jindy než na začátku studia, obzvláště pak u předmětů, které vyžadují logickou návaznost.

Je zřejmé, že učebnice hraje v realistické pedagogice důležitou roli. Učebnice, kterou používá Martin Krynický je k dispozici volně na internetu. Kromě učiva, které je rozčleněno do jednotlivých lekcí odpovídajících obsahu jedné vyučovací hodiny, obsahuje úvodní část, která popisuje, jakým způsobem s učebnicí pracovat.

Lekce zpravidla obsahuje předpoklady potřebné pro její úspěšné zvládnutí, běžný text odpovídající výkladu učitele, zadání a řešení úloh, červené a modré rámečky s poznatky, které by si žáci měli pamatovat a být schopní je používat, úlohy navíc, shrnutí nejdůležitějších poznatků z hodiny a v neposlední řadě pedagogické poznámky. Tyto poznámky jsou určené především učitelům a odrážejí zkušenosti autora učebnice. Lze tedy říci, že jednotlivé lekce jsou koncipovány jako přípravy na proaktivní hodiny.

Konstruktivistické přístupy k výuce matematiky

Realistická pedagogika se v mnoha aspektech shoduje s konstruktivistickými přístupy k výuce matematiky. Pro tyto přístupy je charakteristické aktivní vytváření poznatků v mysli žáka. Autoři didaktického konstruktivismu zformulovali deset zásad, které jsou specifické pro výuku matematiky (Hejný, Kuřina, 2009). Tyto zásady jsou uvedeny níže ve zkrácené formě podle Stehlíkové (2004).

1. Matematika je chápána jako specifická lidská aktivita, ne jen jako její výsledek.
2. Podstatnou složkou matematické aktivity je hledání souvislostí, řešení úloh a problémů, tvorba pojmů, zobecňování tvrzení, jejich prověřování a zdůvodňování.
3. Poznatky jsou nepřenosné, vznikají v mysli poznávajícího člověka.
4. Tvorba poznatků se opírá o zkušenosti poznávajícího.
5. Základem matematického vzdělávání je vytváření prostředí podněcujícího tvořivost.
6. K rozvoji konstrukce poznatků přispívá sociální interakce ve třídě.
7. Důležité je použití různých druhů reprezentace a strukturální budování matematického světa.
8. Značný význam má komunikace ve třídě a pěstování různých jazyků matematiky.
9. Vzdělávací proces je nutno hodnotit minimálně ze tří hledisek: porozumění matematice, zvládnutí matematického řemesla, aplikace matematiky.
10. Poznání založené na reprodukci informací vede k pseudopoznání, k formálnímu poznání.

V publikaci (Hejný, Kuřina, 2009) je také uveden tzv. realistický konstruktivismus, který více souvisí se školní realitou, obzvláště v tom smyslu, že není možné, aby se žáci veškerou matematiku naučili konstruováním a objevováním. Připouští možnosti sdělování informací či instrukcí k řešení úloh, stále však vychází z principu vytváření poznatků v mysli žáka. Zdůrazňuje také nutnost řešení problémů a problémových situací.

Zásady realistické pedagogiky se v mnohém zásadám didaktického konstruktivismu blíží. Například vnímání matematiky jako aktivity, s akcentem na řešení úloh samotnými žáky, vytváření podnětného prostředí – minimálně ve smyslu vhodných úloh podporujících vznik nových poznatků v myslích žáků, význam komunikace ve třídě, využití diskuze při výuce. Krynický (2010) v úvodu do problematiky teorie realistické pedagogiky uvádí, že dva extrémy (učitel informace žákům předává, ti je pasivně přijímají vs. žáci poznatky objevují zcela sami) mají „značně nereálný pohled jak na žáky, tak na učitele, školu i učivo samotné.“ Jak již bylo zmíněno výše, realistická pedagogika vychází právě z reálné situace ve školství a dle mého názoru se právě proto více přibližuje konstruktivismu realistickému. Myslím, že v ještě větší míře se principy realistické pedagogiky shodují s principy podnětné výuky, jak je představuje Vondrová (2014).

Podnětnou výukou je myšleno vyučování, které je založené na konstruktivistických přístupech, je v něm kladen velký důraz na porozumění matematice a na vlastní aktivitu žáka. Takové vyučování „klade velké nároky na učitele, který nepředkládá hotové poznatky, které má žák reprodukovat, ale ukazuje mu cesty, kterými se on sám k takovému poznání může dopracovat“ (Vondrová, 2014, s. 10).

Principy podnětné výuky (z hlediska učitele a jeho činnosti při výuce) shrnuje autorka takto:

1. Učitel probouzí zájem dítěte o matematiku a její poznávání.
2. Učitel předkládá žákům podnětná prostředí (úlohy a problémy).
3. Učitel podporuje žákův aktivní přístup k získávání poznatků.
4. Učitel rozvíjí u žáků schopnost samostatného a kritického myšlení v matematice.
5. Učitel nahlíží na chybu žáka jako na vývojové stádium žákova chápání matematiky a impulz pro další práci.
6. Učitel iniciuje a moderuje diskuse se žáky a mezi žáky o matematické podstatě problémů.
7. Učitel se u žáků orientuje na diagnostiku porozumění.

V několika z těchto principů najdeme i aspekty realistické pedagogiky. Znovu se zde objevují podobnosti v chápání matematiky jako aktivní činnosti žáka, kladení důrazu na řešení podnětných úloh, které staví na předchozích znalostech žáků a umožňují z nich budovat poznatky nové. Dále pak učitel, který vede žáky k odhalování nových poznatků, nad řešenými problémy iniciuje diskuze. Je zde také zdůrazněna práce s žákovskou chybou a diagnostika porozumění žáků. V realistické pedagogice jsou tyto principy pro práci učitele v hodině klíčové. Učitel sleduje samostatnou práci žáků a výuku přizpůsobuje v závislosti na svém pozorování.

3 Metodologie výzkumu

3.1 Cíle výzkumu, výzkumné otázky

Cílem práce je charakterizovat pojetí výuky matematiky dvou učitelů gymnázia, z nichž jeden je představitelem spíše tradičního frontálního vyučování a druhý vyznává spíše aktivní zapojení žáků do procesu učení. Tato charakteristika bude provedena prostřednictvím porovnání výuky jednoho konkrétního tématu.

Konkrétně jsem řešila následující dílčí výzkumné otázky, jejichž zodpovězení má přinést hledanou charakteristiku obou pojetí:

1. Jak učitel realizuje vybrané téma? (Kolik vyučovacích hodin věnuje jednotlivým dílčím tématům? Realizuje téma podle předem stanoveného plánu? Pokud ano, mění plán podle situace?)
2. Jakou strukturu má vyučovací hodina z hlediska času věnovaného jednotlivým činnostem? (Které činnosti v hodině vykonává učitel a které žáci?)
3. Jaké otázky učitel klade? (Jedná se převážně o otázky s jednoduchou odpovědí, nebo vyžadují po žácích formulaci vlastních myšlenek?)
4. Jak se u zkoumaných učitelů liší řešení podobné situace ve výuce?

Další výzkumné otázky souvisí se závěrečným testem, který žáci v obou zkoumaných třídách vypracovali v závěrečné hodině.

1. Liší se způsoby řešení úloh ve zkoumaných třídách?
2. Vyskytují se u žáků jedné třídy opakovaně některé konkrétní chyby?
3. S kterým typem úloh mají žáci v dané třídě nejmenší či největší problém?

3.2 Příprava výzkumu

V přípravné fázi výzkumu bylo nutné rozhodnout, jaké téma a u kterých učitelů budu v rámci svého výzkumu navštěvovat. Jisté bylo, že jedním učitelem bude Mgr. Martin Krynický, toho času vyučující na gymnáziu v Třeboni. Při výběru druhého učitele (na podzim roku 2013) jsem tedy musela vycházet z toho, ve kterých ročnících právě vyučuje matematiku, a zároveň z témat, která bude probírat v době, kdy budu mít možnost výzkum provádět.

Ukázalo se, že sehnat druhého učitele, který by byl zkušený a považovaný za dobrého učitele a navíc ochotný účastnit se výzkumu, kde je cílem porovnat jeho pojetí výuky s jiným učitelem, není snadné. Když byl dotázaný učitel ochotný, v několika případech nebylo k dispozici žádné vhodné téma. Učitel buď učil jiné ročníky, nebo téma, která bych byla schopná navštívit v Třeboni, již probral, měl rozpracované nebo měl v plánu probírat jej ve stejné době jako Martin Krynický.

Podařilo se mi nakonec domluvit se s jedním ochotným učitelem a jediné téma, které připadalo v úvahu z časového hlediska, byla analytická geometrie přímky – měl v plánu začít s tímto tématem přibližně na začátku února 2014, Martin Krynický (dále MK) po jarních prázdninách 11. března. Učitele jsem kontaktovala znovu na začátku ledna, ten mi však sdělil, že si účast na mém výzkumu rozmyslel. V tom okamžiku bylo jasné, že abych stihla začátek domluveného tématu v Třeboni, musím sehnat v horizontu maximálně jednoho týdne jiného učitele, který začne toto téma probírat v lednu či v únoru, což se mi po předchozích zkušenostech z podzimu jevilo jako nemožné.

Přálo mi ale štěstí a hned na prvním gymnáziu, na které jsem se v lednu obrátila, jsem dostala kontakt na velmi ochotnou a zkušenou učitelku (dále DB), která mi sdělila, že s daným tématem plánuje začít v následujícím týdnu, do začátku března jej bude mít jistě probrané a můžu v jejích hodinách svůj výzkum zrealizovat.

3.3 Metody sběru dat

V rámci výzkumu jsem absolvovala náslechy u obou učitelů v takovém množství, aby pokryly celé vybrané téma analytické geometrie přímky v rovině. Do hodin DB jsem docházela od 21. 1. do 19. 2. 2014, jednalo se o celkem 12 vyučovacích hodin, u MK jsem absolvovala 11 vyučovacích hodin v době od 10. 3. do 28. 3. 2014. Průběh výzkumu a obsah jednotlivých hodin je podrobně rozepsán v oddíle 3.5. V hodinách jsem si pořizovala terénní poznámky a audiozáznamy. U Martina Krynického jsem využívala i možnosti chodit v průběhu hodiny po třídě a sledovat samostatnou práci žáků. Videozáznamy hodin se mi dohodnout i kvůli nutnosti získat souhlasy od všech žáků nepodařilo.

Do svých terénních poznámek jsem si zaznamenávala vše, co zapsal učitel či žáci na tabuli, včetně náčrtků. Všechny obrázky v oddíle 4.3 jsou tedy reprodukované náčrtky učitele z tabule. Dále jsem zapisovala činnosti učitele a žáků s orientačními časovými údaji při změně činnosti, otázky, které učitel v průběhu hodiny kladl, a hlavně výroky žáků, protože žákům bylo na audiozáznamu chvílemi špatně rozumět, zejména pokud jich mluvilo více najednou. S učiteli jsem taktéž vedla ad hoc rozhovory v případě, že jsem potřebovala něco ujasnit či ověřit. Takto získanými poznatky jsem doplňovala své terénní poznámky.

Dalším zdrojem dat byl test, který jsem připravila a který žáci vypracovali v závěrečné hodině. Test jsem sestavovala tak, aby úlohy nebyly početně náročné, ale aby se týkaly co největšího množství různých jevů. V zadání se tedy vyskytují všechny tři typy rovnic přímky, úloha na určení vzájemné polohy dvou přímek, určení velikosti odchylky přímky od kladné části osy x, úloha, kde je úkolem zakreslit přímky dané rovnicemi, ale také úloha, kde je při zápisu rovnic přímek nutné vycházet z obrázku trojúhelníka a správně určit body, kterými jsou jednotlivé přímky (respektive potřebné vektory) dány. Zařadila jsem také úlohy, kde si žáci mohli přímky zapsat libovolnými rovnicemi, za účelem zjištění preferencí typů rovnic přímek ve zkoumaných třídách. Oba učitelé souhlasili s tím, že test bude hodnocen jako jakýkoli jiný test a žáci s tím byli srozuměni. Předpokládám tedy, že žáci při řešení testu vyvinuli maximální (či alespoň běžnou) snahu.

3.4 Metody zpracování dat

Na základě teoretických znalostí (Strauss, Corbinová, 1999) jsem se rozhodla získaná data analyzovat převážně kvalitativními, ale také kvantitativními metodami. Při opětovném poslechu pořízených audiozáznamů jsem identifikovala opakující se jevy (typy činností učitele a žáků). Z analýzy vyplynuly následující kategorie činností: výklad, společné řešení úloh (žáci jsou aktivní), společné řešení úloh (učitel je aktivní), samostatná práce žáků, společná kontrola úloh, opakování, zadání domácích úkolů, kontrola domácích úkolů, test, ostatní (organizace). Při přepisování audiozáznamů jsem dělila vyučovací hodiny na úseky odpovídající výše zmíněným kategoriím činností a u jednotlivých úseků zaznamenávala čas. Informace z audiozáznamů jsem doplňovala záznamy z terénních poznámek (popisy činností učitele a žáků, obrázky, výroky žáků). Vyučovací hodinu samozřejmě nelze na základě audiozáznamu kompletně zrekonstruovat. Je možné, že v některých situacích učitel reagoval na neverbální projevy žáků, které jsem nezaznamenala. Nelze také odlišit, který žák konkrétně mluví, pokud jej učitel neoslovil jménem. Ačkoli jsem si ve většině případů do svých terénních poznámek zaznamenávala i jména komunikujících žáků, jakoukoli kvantifikaci ve smyslu množství verbálně aktivních žáků v hodinách jsem vzhledem k neúplnosti dat vyloučila.

Dalším předmětem výzkumu byly otázky učitele a odpovědi žáků. Rozlišovala jsem tři druhy otázek učitele podle požadovaného typu odpovědi: ano/ne, krátká odpověď (jedno až dvě slova, např. „směrový vektor“), víceslovná odpověď. Otázky vyžadující víceslovnou odpověď jsem dále dělila na dva druhy podle účelu: žáci aplikují své poznatky (formulují vlastní myšlenky), žáci reprodukují dříve nabyté poznatky. Dále jsem zaznamenávala, zda žáci odpověděli na otázku ihned, nebo jestli učitel otázku opakoval, upřesňoval (dodával další informace), případně zda si na otázku odpověděl sám.

Závěrečný test obsahuje tři úlohy, kdy každá úloha je rozdělena na dvě až tří úlohy dílčí. Každou z těchto dílčích úloh jsem analyzovala zvlášť. Zaznamenávala jsem způsoby, kterými postupovali úspěšní řešitelé, stejně tak řešení chybná a jejich četnosti. V oddíle 4.4, který je vyhodnocení závěrečných testů věnován, je uvedeno nejen procentuální zastoupení úspěšných řešitelů jednotlivých dílčích úloh za účelem porovnání zkoumaných skupin, ale vzhledem k nízkému počtu řešitelů testu uvádím u jednotlivých popisovaných řešení i konkrétní počty žáků. Poznatky z analýzy závěrečných testů (způsoby řešení úloh, chybná řešení) jsou uvedeny do souvislostí s pojetím výuky učitele.

V přepisech audiozáznamů v ukázkách dále v práci byly provedeny následující úpravy: hovorová čeština byla z důvodu srozumitelnosti změněna na spisovnou, byla odstraněna přeřeknutí (myšlený pojem je uveden v závorce), pokud učitel řekl část věty, pak se odmlčel a větu řekl znovu, byla odstraněna část před odmlkou, stejně tak pokud bylo slovo či slovní spojení řečeno dvakrát za sebou, v přepisech je pouze jednou, čísla jsou zapsána číslicí, ne slovy, stejně tak matematické značky nejsou popsány slovy (např. = místo „rovná se“, přímka AB místo „přímka á bé“ apod.). Úpravy byly provedeny tak, aby nedošlo ke změně významu výroků.

3.5 Průběh výzkumu

Vlastní výzkum probíhal na dvou vybraných gymnáziích v zimě a na jaře 2014. První náslechy jsem absolvovala v lednu a v únoru na gymnáziu, kde vyučuje matematiku učitelka (DB), která je představitelkou spíše tradičního frontálního vyučování. Druhé pak v březnu na gymnáziu v Třeboni u Martina Krynického (MK), který je představitelem již zmíněné realistické pedagogiky.

Město, kde na gymnáziu vyučuje učitelka DB, má přibližně 20 000 obyvatel. Zdejší gymnázium je čtyřleté (vždy dvě třídy v ročníku) a osmileté (jedna třída v ročníku). Výzkum probíhal ve 3.A čtyřletého gymnázia. Ve třídě je celkem 32 žáků, z toho 7 chlapců a 25 dívek. DB zde matematiku vyučuje od prvního ročníku.

Zúčastnila jsem se celkem dvanácti vyučovacích hodin. Ačkoli má třetí ročník čtyři vyučovací hodiny matematiky týdně, do výuky zasáhly pololetní a jarní prázdniny, takže od úvodní hodiny sledovaného tématu (21. ledna) do závěrečného testu (20. února) uplynulo celkem 30 dní. Obsah jednotlivých hodin je přehledně uveden v tabulce 3.1. Z důvodu úspornosti jsou zadání úloh uvedena jen stručně.

Tabulka 3.1: Stručný obsah hodin DB

<table>
<tr><td>Hodina</td><td>Téma</td></tr>
<tr><td>1.</td><td>Parametrická rovnice přímky, polopřímky, úsečky</td></tr>
<tr><td colspan="2">Zavedení parametrického vyjádření přímky.

Úlohy:

1. Přímka zadána parametricky:
a. Zapsat souřadnice bodu a směrového vektoru, kterými je přímka zadána.
b. Zapsat jiný bod, který leží na přímce.
c. Zjistit střed úsečky (dosadit za parametr číslo $\frac{1}{2}$).
d. Dokázat, že zadaný bod neleží na přímce.
2. Dány souřadnice bodů A, B, C. Zjistit, zda leží C na přímce AB.

Domácí úkol:

• Vyjádřit přímku parametricky a rozhodnout, zda na ní leží daný bod.</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Parametrická rovnice přímky – procvičování</td></tr>
<tr><td colspan="2">Úlohy:

1. Určit těžiště trojúhelníka o daných vrcholech.
2. Zjistit, zda jsou totožné dvě přímky dané parametricky.
• Dva případy – totožné a různoběžné.
3. Určit průsečík dvou přímek daných bodem a vektorem.

Domácí úkol:

• Dány souřadnice vrcholů trojúhelníka ABC. Zapsat parametrické rovnice všech stran trojúhelníka a určit souřadnice těžiště.</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Procvičování parametrické rovnice, obecná rovnice přímky</td></tr>
<tr><td colspan="2">Úlohy:

1. Parametricky vyjádřit přímku, která prochází daným bodem a průsečíkem dvou přímek daných bodem a vektorem.
2. Zjistit průsečíky přímky dané parametricky s osami x a y.
3. Dány body A, B, C. Parametricky zapsat přímku rovnoběžnou s AB procházející C.

Zavedení obecné rovnice přímky.

4. Zapsat obecné vyjádření rovnice dané parametricky.</td></tr>
</table>

4.	**Obecná rovnice přímky (v rovině)**

Úlohy:

1. Dány dva body, sestavit obecnou rovnici přímky.

Postup sestavení obecné rovnice přímky.

2. Dány tři body a obecně zadaná přímka. Určit bod, který na přímce leží. Vymyslet další bod tak, aby na přímce ležel.
3. Dány body A, B. Zapsat obecnou rovnicí osu úsečky AB.
4. Dán bod a přímka zadaná obecnou rovnicí. Zapsat obecnou rovnici přímky rovnoběžné, která prochází daným bodem.
5. Určit vzájemnou polohu přímek daných obecně.

Domácí úkol:

- Úloha shodná s úlohou 4, ale s jinými hodnotami.
- Úloha shodná s úlohou 5, ale s jinými hodnotami.

5.	**Procvičování obecné rovnice přímky**

Úlohy:

1. Zapsat obecnou rovnicí přímku, která je dána parametricky.
2. Sestavit obecnou rovnici přímky, která prochází daným bodem a je kolmá přímku zadanou obecnou rovnicí.
3. Dány body A, B, C. Zapsat obecné rovnice dvou těžnic trojúhelníka ABC a zjistit souřadnice těžiště jako průsečíku těchto těžnic. Dále zapsat třetí těžnici parametricky a ověřit, že také prochází těžištěm.

Domácí úkol:

- Sestavit obecnou rovnici přímky, která prochází daným bodem a je kolmá na přímku zadanou parametrickou rovnicí.
- Dány souřadnice vrcholů trojúhelníka ABC. Zapsat obecné rovnice os všech tří stran, dále zjistit souřadnice středu kružnice opsané jako průsečíku dvou z nich a ověřit, zda jím prochází i třetí osa.

6.	**Směrnicový tvar rovnice přímky**

Test – parametrická rovnice přímky.

Shrnutí parametrického a obecného vyjádření přímky.

Zavedení směrnicového tvaru rovnice přímky.

Pololetní prázdniny

7.	**Směrnicový tvar rovnice přímky – procvičování**

Geometrický význam směrnice.

Úlohy:

1. Přímku danou obecnou rovnicí vyjádřit směrnicově, zakreslit do kartézské soustavy a určit úhel, který svírá s kladnou poloosou x.
2. Zapsat směrnicový tvar rovnice přímky a, která je rovnoběžná s přímkou p (dána směrnicově) a prochází daným bodem, dále zjistit úhel, který přímka svírá s kladnou poloosou x.
3. Úloha shodná s úlohou 2, ale s jinými hodnotami.

Domácí úkol:

- Určit směrnici, když jsou dány souřadnice dvou bodů, kterými přímka prochází.
- V dané směrnicové rovnici přímky dopočítat hodnotu směrnice, když jsou zadány souřadnice bodu, kterým přímka prochází.

8.	**Procvičování rovnice přímky**

Úlohy:

1. Přímka zadána obecnou rovnicí. Určit směrnici, úsek a úhel, který svírá s kladnou částí osy x.
2. Zapsat směrnicovou rovnici přímky, která je dána dvěma body.
3. Zapsat obecnou rovnici přímky, která prochází daným bodem a s kladnou poloosou x svírá daný úhel.
4. Jedna přímka dána obecnou rovnicí, druhá dvěma body. Zjistit, zda se jedná o rovnoběžky.
5. Určit parametrickou rovnici přímky, která prochází daným bodem a je rovnoběžná s přímkou zadanou směrnicově.

Domácí úkol:

- Dokončit 5. úlohu.

9.	**Parametrická rovnice přímky v prostoru[5]**

Úlohy:

1. Dokázat, že přímka daná parametricky a přímka daná obecně jsou různoběžky a nalézt jejich průsečík.

Zavedení parametrické rovnice přímky v prostoru.

2. Napsat parametrickou rovnici přímky v prostoru, když jsou dány souřadnice dvou bodů, kterými přímka prochází.

[5] Analytická geometrie přímky v prostoru nebyla plánovanou součástí zkoumaného tématu, protože jí ale DB v průběhu výzkumu věnovala jednu z hodin, je uvedena v tabulce. V dalších částech práce není tato hodina již zmiňována.

3. Zjistit, zda dané tři body v prostoru leží na jedné přímce. 4. Dány souřadnice vrcholů trojúhelníka v prostoru. Určit parametrické rovnice přímek, na kterých leží těžnice. Domácí úkol: • Zjistit souřadnice vrcholů trojúhelníka, když jsou dány obecné rovnice jeho stran.	
Jarní prázdniny	
10.	**Procvičování rovnice přímky**
Úlohy: 1. Zjistit, zda existuje průsečík osy úsečky AB s polopřímkou danou parametricky, když jsou dány souřadnice bodů A, B. 2. Přímky p, q dány obecnými rovnicemi. Zapsat směrnicovou rovnici přímky, když je dána směrnice a přímka prochází průsečíkem p a q. 3. Dány souřadnice bodů A, B, C, D. Zjistit, zda existuje průsečík os úseček AB a CD.	
11.	**Procvičování rovnice přímky**
Úlohy: 1. Zapsat obecnou rovnici tečny ke kružnici, když jsou dány souřadnice středu kružnice a tečného bodu. 2. Zjistit velikost úhlu, který svírá přímka daná obecnou rovnicí s kladnou poloosou x. 3. Určit vzájemnou polohu dvou přímek, když jedna je dána obecně a druhá parametricky. 4. Zapsat parametrickou rovnici přímky, když jsou dány souřadnice bodu, kterým přímka prochází a její směrnice. 5. Dány souřadnice bodu A a obecná rovnice přímky p. Zapsat obecnou rovnici přímky, která je kolmá na p a prochází bodem A.	
12.	**Závěrečný test**

Město Třeboň má přibližně 8 500 obyvatel, zdejší gymnázium je čtyřleté i osmileté (vždy jedna třída v ročníku). Výzkum probíhal ve třetím ročníku čtyřletého gymnázia. Ve třídě je celkem 22 žáků, z toho 10 chlapců a 12 dívek. MK zde matematiku vyučuje od prvního ročníku a je zároveň třídním učitelem.

Zúčastnila jsem se celkem jedenácti vyučovacích hodin. Třetí ročník má čtyři vyučovací hodiny matematiky týdně, takže od úvodní hodiny sledovaného tématu (10. března) do závěrečného testu (28. března) uplynulo celkem 19 dní. Stručný obsah jednotlivých hodin je přehledně uveden v tabulce 3.2.

Tabulka 3.2: Stručný obsah hodin MK

<table>
<tr><td>Hodina</td><td>Téma</td></tr>
<tr><td>1.</td><td>Parametrické vyjádření přímky I</td></tr>
<tr><td colspan="2">Zavedení parametrického vyjádření přímky.

Úlohy:

1. Zapsat parametricky rovnici přímky, když jsou dány souřadnice bodu a směrového vektoru.
2. Zapsat parametricky rovnici přímky, když jsou dány souřadnice dvou bodů, kterými přímka prochází.
3. Zapsat parametricky rovnici přímky, když jsou dány souřadnice dvou bodů, kterými přímka prochází a zjistit, zda na přímce leží jiné dva body.
4. Určit druhou souřadnici bodu tak, aby ležel na přímce.

Domácí úkol:

• Zapsat parametrickou rovnici přímky kolmé k dané přímce, která prochází daným bodem.
• Zapsat parametrickou rovnici přímky rovnoběžné s danou přímkou, která prochází daným bodem.</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Parametrické vyjádření přímky II</td></tr>
<tr><td colspan="2">Úlohy:

1. Dány souřadnice bodů A, B. Dopočítat druhou souřadnici bodu C tak, aby ležel na přímce AB a určit, ve které části přímky leží.
2. Načrtnout na přímku body, kde parametr nabývá hodnot $0{,}3$; $1{,}5$; $-0{,}5$.
3. Určit parametr pro krajní body A a B, úsečku AB, polopřímku AB, polopřímku BA.

Krácení vektoru.

4. Na přímce dané parametricky leží body K, L. Najít parametrické vyjádření úsečky KL.
5. Dány vrcholy trojúhelníka ABC. Parametricky vyjádřit přímky, na kterých leží:
a. strana AB
b. výška v_c
c. osa strany AB
d. těžnice t_a
e. střední příčka $S_{AB}S_{AC}$

Domácí úkol:

• Dokončit 5. úlohu.</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Vzájemná poloha parametricky vyjádřených přímek I</td></tr>
<tr><td colspan="2">Diskuze o vzájemné poloze přímek.</td></tr>
</table>

Úlohy: 1. Navrhnout postup, jak efektivně rozhodovat o vzájemné poloze dvou parametricky zadaných přímek. 2. Určit vzájemnou polohu dvou přímek (zadané bodem a vektorem), pokud jsou různoběžné, určit průsečík. • Dva případy – rovnoběžky a různoběžky.	
4.	**Vzájemná poloha parametricky vyjádřených přímek I-II**
Úlohy: 1. Dány body A, B, C. Sestavit parametrickou rovnici přímky AB, určit zda bod C leží na AB, případně kde. Ověřit jinak. (Jedná se o střed úsečky AB.) 2. Dány body A, B, C. Najít přímku rovnoběžnou s AB procházející C a rozhodnout, zda leží na přímce bod D. 3. Určit vzájemnou polohu přímek daných parametricky, pokud jsou různoběžné, zjistit průsečík. Domácí úkol: • Dokončit 3. úlohu.	
5.	**Vzájemná poloha parametricky vyjádřených přímek II**
Úlohy: 1. Dány body A, B, C, D. Určit vzájemnou polohu přímek AB a CD, případně jejich průsečík. 2. Určit průsečíky dvou přímek daných parametricky, na základě výsledku rozhodnout o vzájemné poloze. (Jedná se o rovnoběžky.) 3. Rozhodnout, které ze čtyř přímek jsou totožné. Každá přímka je zadána jiným způsobem (bod a směrový vektor, dva různé zápisy parametrického vyjádření, dva body). 4. Dány body A, B, C. Určit souřadnice paty výšky v_c v trojúhelníku ABC.	
6.	**Obecná rovnice přímky I**
Úlohy: 1. Dány body A, B. Zapsat parametricky rovnici přímky AB, zakreslit přímku do kartézské soustavy a najít její další vyjádření. Přímka jako lineární funkce. Normálový vektor. Odvození obecné rovnice přímky. 2. Dány body C, D. Zapsat obecnou rovnici přímky, která body prochází. 3. Zjistit, zda na přímce leží body E, F. Význam písmen x, y a a, b, c v obecné rovnici přímky.	

4. Dány body K, L. Zapsat obecnou rovnici přímky, která body prochází.

Diskuze k různým výsledkům (jedná se o násobky stejné rovnice, nijak se tedy neliší).

5. Dány body A, B, C. Zapsat obecné rovnice přímek, na kterých leží:
    a. strana AB
    b. výška v_c
    c. osa strany AB
    d. těžnice t_a
    e. střední příčka $S_{AB}S_{AC}$.

7.	**Obecná rovnice přímky II**

Úlohy:

1. Dány body A, B. Zapsat obecnou rovnici přímky AB.
2. Určit, které z pěti daných obecných rovnic určují stejnou přímku.
3. Určit, jak lze rozhodnout o rovnoběžnosti obecně zapsaných přímek. Dále zjistit, které z přímek z přechozí úlohy jsou rovnoběžné s přímkou p (dána obecně).
4. Nalézt obecnou rovnici přímky, která je rovnoběžná s přímkou zadanou obecně a prochází daným bodem.
5. Nalézt obecnou rovnici přímky, která je kolmá na přímku zadanou obecně a prochází daným bodem.
6. Určit vzájemnou polohu dvou obecně daných přímek. Pokud jsou různoběžné, určit jejich průsečík.
7. Nalézt společné body dvou přímek, kdy jedna je zadána parametricky, druhá obecně a podle počtu nalezených bodů rozhodnout o jejich vzájemné poloze.
8. Přímka je zadána bodem A a směrovým vektorem. Zapsat obecnou rovnici přímky kolmé, která prochází bodem A.

8.	**Přímková smršť**

Úlohy:

1. Dány body A, B. Parametricky vyjádřit osu úsečky AB.
2. Dány vrcholy trojúhelníka ABC.
    a. Obecnou rovnicí zapsat přímku, na které leží výška v_a.
    b. Určit obecnou rovnici přímky AC a přímky rovnoběžné s AC, která prochází bodem B.
    c. Parametrickou rovnicí vyjádřit přímku AB a výšku v_c, dále pak souřadnice paty výšky v_c.
    d. Určit souřadnice středu kružnice trojúhelníku opsané.
    e. Obecnou rovnicí zapsat přímku BC, parametricky vyjádřit přímku, na které leží výška v_a a určit jejich průsečík (patu v_a).
    f. Výšky v_b a v_c vyjádřit obecnými rovnicemi, určit souřadnice jejich průsečíku (ortocentrum) a ověřit, že jím prochází i přímka, na které leží výška v_a.
    g. Zapsat obecnou rovnicí přímku, na které leží střední příčka $S_{AC}S_{BC}$ a ověřit, že je rovnoběžná s AB.

Domácí úkol: • Dodělat vše po bod d.	
9.	**Nerovnice pro polorovinu**[6]
Úlohy: 1. Určit průsečík dvou přímek (jedna dána obecně, druhá parametricky) a na základě výsledku rozhodnout o jejich vzájemné poloze. 2. Rozhodnout, zda se přímka zadaná obecnou rovnicí protíná s úsečkou danou krajními body. Nerovnice pro polorovinu (zobecnění minulé úlohy). 3. Rozhodnout, zda dva body ježí v jedné polorovině ohraničené přímkou, která je dána obecnou rovnicí. 4. Dány body A, V, B, K. Určit, zda K leží uvnitř konvexního úhlu $\sphericalangle AVB$.	
10.	**Směrnicový tvar rovnice přímky**
Směrnicový tvar rovnice přímky jako lineární funkce. Úlohy: 1. Určit směrnicový tvar rovnice přímky a její odchylku od kladné části osy x, když je zadána obecnou rovnicí. 2. Zapsat obecnou a směrnicovou rovnici přímky, když je dána směrnice a bod, kterým přímka prochází. 3. Úloha shodná s úlohou 2, ale obecně. 4. Zapsat rovnice všech přímek, které prochází daným bodem. Souvislost mezi směrovým vektorem a směrnicí přímky.	
11.	**Závěrečný test**

[6] Analytické vyjádření poloroviny nebylo plánovanou součástí zkoumaného tématu, protože se mu ale MK v průběhu výzkumu věnoval, je tato hodina také uvedena v tabulce. V dalších částech práce již není toto téma zmiňováno.

4 Výsledky výzkumu

Kapitola je rozčleněna do čtyř oddílů, první dva jsou věnovány charakteristikám pojetí výuky obou zkoumaných učitelů. Ve třetím oddíle jsou prezentovány vybrané charakteristiky jejich pojetí výuky, na nichž lze nejlépe pozorovat odlišné prvky. Poslední oddíl se zabývá závěrečnými testy žáků, jejich vyhodnocením a propojením výsledků s výukou.

4.1 Základní charakteristika pojetí výuky DB

V hodinách matematiky DB se střídají převážně dvě činnosti. Výklad nové látky a procvičování neboli řešení úloh. Výklad odpovídá výukové metodě vysvětlování, učitelka píše na tabuli, pokud je to vhodné, tvoří náčrtky, definice diktuje z učebnice[7]. Žáci opisují z tabule, někdy je učitelka upozorní, ať si chvíli nezapisují do sešitu, ale pouze sledují výklad a poznámky si provedou později. Při výkladu klade učitelka žákům otázky týkající se látky, kterou by již měli ovládat. Kdo je schopen na otázku reagovat, bez přihlášení odpovídá. Pokud nikdo neodpovídá, učitelka vyvolá konkrétního žáka jménem, zformuluje otázku jiným způsobem, nebo si odpoví sama. Formulacím otázek obou zkoumaných učitelů je věnován oddíl 4.3.4.

Procvičování, tedy řešení úloh souvisejících s probíranou látkou, probíhá dvěma způsoby. Několik prvních úloh k nově probírané látce nejčastěji řeší učitelka na tabuli, žáky vyvolává a ti jí diktují jednotlivé kroky řešení. Pokud se úloha týká látky například z předchozí hodiny, případně již řešení obdobné úlohy předvedla učitelka, řeší úlohu (nebo část úlohy) u tabule vyvolaný žák. Ostatní by měli provádět řešení samostatně do sešitu. Faktem je, že většina žáků místo samostatné práce sleduje práci žáka u tabule, někteří případně řešiteli radí, když jsou učitelkou vyzváni.

V ukázkách níže v této kapitole lze pozorovat, že DB při výkladu často používá slovní spojení „teď budu vysvětlovat“, „potřebuji vám vysvětlit“, „potřebuji, abyste pochopili“ a podobně. Zdůrazňuje, kde se často dělají chyby, pozornost žáků podněcuje slovy „vnímejte“, „dávejte pozor“. Učitelka dbá na přehlednost, formální úpravu – „napište si to jako první, ono se to tak píše“ (viz ukázka níže v oddíle 4.3.5a z výkladu parametrické rovnice přímky).

[7] KOČANDRLE, Milan a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia*. 3. vyd. Praha: Prometheus, 2009, 220 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-390-5.

4.2 Základní charakteristika pojetí výuky MK

V hodinách matematiky MK se střídají převážně tři činnosti. Výklad nové látky, samostatná práce žáků (řešení úloh) a společná kontrola řešení úloh. Hodina začíná zpravidla samostatnou prací žáků na úloze, která se týká předchozí látky, případně navozuje nový problém. Výklad provádí MK u tabule, kam převážně kreslí, u některých úloh píše jejich řešení. Žákům pokládá otázky postavené na předchozích znalostech a prostřednictvím otázek směřuje k řešení nového problému (viz ukázka níže v oddíle 4.3.5a v úvodu výkladu parametrické rovnice přímky – souvislost analytické geometrie přímky s rýsováním přímky, se kterým již mají žáci zkušenost).

Když učitel položí otázku k zamyšlení, žáci vědí, že nemají odpovídat hned, aby odpověď neprozradili moc brzy. Žáci, kteří odpověď znají, se přihlásí. Učitel reaguje na počet hlásících se žáků, buď některého vyvolá, nebo přeformuluje či upřesní otázku, když se žáků hlásí málo. V ukázkách níže lze pozorovat nejen tento jev, ale i pro učitele typická slovní spojení, kterými podněcuje žáky k činnosti jako například „zkuste zapsat“ nebo „přemýšlejte“.

Často než učitel sám napíše něco na tabuli, nechá žáky, aby to sami zkusili do sešitu. Sešit je místem, kde se žáci nemají bát dělat chyby, ale mají možnost experimentovat. Při samostatné práci žáků učitel prochází třídu, sleduje vývoj situace u jednotlivců, a když vidí, že má s řešením problém většina žáků, položí doplňující otázku, popřípadě dodá další informace. Když mají problém pouze jednotlivci, řeší je s nimi konkrétně.

Ve chvíli, kdy má většina žáků úlohu vyřešenou, přikročí MK ke společné kontrole. Ta spočívá buď v promítnutí řešení z učebnice, které učitel stručně okomentuje, nebo úlohu vyřeší na tabuli, přičemž řešení diskutuje se žáky. Svým žákům MK nabízí tykání. V úvodu své učebnice uvádí, že „pokud má učitel se žáky při vyučování skutečně spolupracovat, musí si vybudovat vztah, který umožňuje co nejrychlejší a nejupřímnější komunikaci, k čemuž tykání určitě pomáhá“ (Poznámky o učitelích a vyučování, s. 2). K problematice tykání si s žáky se MK také vyjádřil v článku ve školním časopise, kde mimo jiné uvádí, že tykání ze strany žáků přicházelo ve chvíli, kdy byli ochotní se s ním bavit upřímně. S tím souvisí například to, že nechce, aby se před ním žáci báli dělat chyby, stejně tak aby se nebáli upozorňovat na jeho chyby (Krynický, 2010).

4.3 Porovnání vybraných charakteristik pojetí výuky DB a MK

V tomto oddíle jsou rozvedeny některé charakteristiky pojetí výuky obou učitelů, na nichž je nejlépe vidět podstata jejich odlišnosti. Jsou zde popsány rozdíly v realizaci zkoumaného tématu z několika hledisek: například činnosti učitele a žáků v hodině, otázek učitele nebo řešení konkrétních situací při výuce.

4.3.1 Rozdílná skladba hodin

Realizace tématu analytické geometrie přímky v rovině se u obou zkoumaných učitelů výrazně lišila. V tabulce výše lze nahlédnout, že postup látkou na gymnáziu, kde učí DB, byl následující. Zavedení a následnému procvičování parametrické rovnice přímky věnovala DB dvě a půl hodiny, stejně tak dvě a půl hodiny zavedení a procvičování přímky zadané obecně. Poté následovala hodina a půl věnovaná směrnicovému tvaru přímky a jeho procvičení a tři vyučovací hodiny, kdy se v úlohách objevovaly všechny tři typy rovnic přímky.

Oproti tomu MK věnoval pouze parametrické rovnici přímky celých pět vyučovacích hodin. Dále následovaly dvě hodiny věnované převážně obecné rovnici přímky (v jedné z úloh se objevila i přímka zadaná parametricky) a poté jedna vyučovací hodina s úlohami obsahujícími přímky zadané jak parametricky, tak obecně. Až na konec tématu zařadil MK jednu hodinu na téma přímky ve směrnicovém tvaru.

Tento postup látkou se mi jeví jako vhodnější hlavně z toho důvodu, že než učitel přikročí k dalšímu vyjádření přímky (obecnému), žáci se více sžijí s vyjádřením parametrickým. Až když si žáci vyzkouší všechny základní typy úloh (zápis rovnice přímky dané dvěma body, bodem a vektorem; zjišťování, zda bod na přímce leží; určování vzájemné polohy přímek a určování průsečíků) s přímkami zadanými parametricky, přejde učitel k dalšímu způsobu vyjádření přímky. Práce s novým typem rovnice není pro žáky tak náročná, když řeší úlohu, se kterou se již dříve setkali. To se do jisté míry potvrdilo i v hodině DB.

Průběh řešení první úlohy na začátku třetí hodiny DB dokazuje, že žáci ještě práci s parametrickým vyjádřením přímky nezvládají, přikročit tedy v této hodině k obecné rovnici přímky bylo, myslím, předčasné.

Úloha: Parametricky vyjádřete přímku, která prochází daným bodem A a průsečíkem dvou přímek $p(P,\vec{u})$ a $q(Q,\vec{v})$. Učitelka nejprve píše parametrické rovnice přímek p a q *(žáci diktují)*.

> U: „A co je úkolem? Napište parametrickou rovnici přímky, která prochází tím bodem A, čili to je jeden její bod, a průsečíkem těchto dvou přímek. My teď, abychom měli dva body, musíme spočítat průsečík těchto dvou přímek, který si označíme jako $P = p \cap q$, a pak ta přímka a bude dána těmi body A a P a zase jí zapíšeme parametricky. Jak spočítáme ten průsečík? Minulou hodinu jsme to dělali.“
>
> Ž: „Dosadím si tam z toho bodu A.“
>
> U: „Pozor, bod A zatím necháme na straně, chceme průsečík těchto dvou přímek. Jak se to udělalo?“
>
> Ž: „Zjistíme si ten k-násobek.“
>
> U: „Jsou to různoběžky, čili jejich společný bod musí vyhovovat oběma přímkám. Jak jsme to minulou hodinu udělali?“
>
> Ž: „Dali jsme to do rovnice.“
>
> Ž: „k-násobek.“
>
> U: „Jistě, dáme to do rovnice, zjišťujeme společný bod.“

Žákyně pak na tabuli zapsala soustavu rovnic, kterou začala řešit sčítací metodou. Učitelka jí do výpočtu vstoupila s tím, že by bylo vhodnější soustavu řešit metodou dosazovací.

> U: „Co teď musíme udělat, abychom ten průsečík určili?“
>
> Ž: „Dosadit to.“
>
> U: „Ano, musíme to dosadit, musí to vyjít do obojího. Tak když dosadíme t sem, tak bod P má jaké souřadnice?“

Žákyně dosadila vypočtené parametry do přímky p, čímž dopočítala souřadnice bodu P, pak začala dosazovat parametry i do přímky q. Učitelka jí v průběhu práce několikrát zopakovala, že by měl vyjít ten stejný bod, počítat ho je tedy zbytečné, ale žákyně ho stejně dopočítala jako bod Q.

> U: „Máme průsečík a teď nám zbývá napsat rovnici přímky a, která je dána body A a P.“

Na zápis parametrické rovnice přímky a vyvolala k tabuli učitelka jiného žáka, který neměl vůbec představu, co by měl dělat. Postup mu nadiktovali spolužáci s pomocí učitelky.

Učebnice MK je koncipována tak, že každá lekce představuje jednu vyučovací hodinu. Lze tedy říci, že učitel při výuce postupuje podle předem stanoveného plánu. Podle situace jej ale mění. Například čtvrtá vyučovací hodina, která je pojmenovaná v tabulce výše jako Vzájemná poloha přímek I–II, je hodinou navíc oproti plánu. Řešení problému (popsáno v oddíle 4.3.5d) vyžadovalo více času, než učitel předpokládal, ale protože nechtěl žákům řešení prozradit, raději věnoval vzájemné poloze přímek o hodinu více.

Realizace tématu DB odpovídá tematickému plánu, ale učitelka také upravuje výuku podle situace. Má jasnou představu o tom, jakou látku potřebuje vyložit a které typy úloh je nezbytné vyřešit. Náplň jednotlivých hodin plánuje také v závislosti na vhodném termínu testu. Například na jedenáctou vyučovací hodinu byl původně naplánován závěrečný test. Větší počet žáků třídy však nahlásil, že se budou účastnit kulturní akce, učitelka v závislosti na tom přesunula test na následující hodinu a přidala hodinu, kterou věnovala procvičování všech probraných typů rovnic přímek.

4.3.2 Struktura vyučovací hodiny

V tabulce 4.1 je uvedeno, jakou strukturu z hlediska množství času věnovaného jednotlivým činnostem měly vyučovací hodiny obou zkoumaných učitelů. Uvedené hodnoty představují procentuální zastoupení daných činností z celkového času všech zkoumaných hodin.

Tabulka 4.1: Struktura vyučovacích hodin DB a MK

Činnosti učitele a žáků	ED	MK
Výklad	20 %	17 %
Společné řešení úloh (žáci aktivní)	26 %	
Společné řešení úloh (učitel aktivní)	32 %	4 %
Samostatná práce žáků	3 %	49 %
Společná kontrola úloh	1 %	19 %
Opakování	< 1 %	< 1 %
Zadání domácích úkolů	2 %	< 1 %
Kontrola domácích úkolů		2 %
Test	4 %	
Ostatní (organizace)	11 %	8 %

Časové zastoupení jednotlivých činností samozřejmě souvisí s pojetím výuky učitele. Výklad v podání DB odpovídá výukové metodě vysvětlování, oproti tomu výklad MK byl veden převážně formou diskuze se žáky (viz oddíly 4.1 a 4.2 charakterizující pojetí výuky učitelů).

Společným řešením úloh, kdy jsou žáci aktivní, je myšlena činnost, při níž jeden z žáků řeší úlohu na tabuli pod dohledem učitele. Tato činnost je typická pro výuku DB, MK žáky k tabuli nevyvolává. V hodinách MK řeší žáci úlohy samostatně do sešitu (často pracují vlastním tempem), učitel se pohybuje po třídě a pomáhá těm, kteří nejsou schopní úlohy vyřešit.

Je zřejmé, že na rozdíl od řešení úloh žáky DB, pojetí samostatné práce MK aktivizuje opravdu všechny žáky ve třídě už jen z toho důvodu, že se řešení úloh neprovádí společně na tabuli. V tabulce lze nahlédnout, že časové zastoupení samostatné práce žáků je u MK téměř dvojnásobné než řešení úloh žákem DB u tabule.

Lze říci, že společné řešení úloh v hodinách DB, kdy je aktivní učitel (učitel sám řeší úlohu na tabuli, případně některý ze žáků diktuje postup), odpovídá společné kontrole úloh MK, kdy učitel provádí řešení úlohy na tabuli, přičemž postup diskutuje s žáky nebo promítá již hotové řešení úlohy, které komentuje. Tato činnost převažuje naopak u DB.

Řešení úloh jakoukoli formou (řešitelem je učitel/žáci/probíhá společná kontrola) tvoří u MK celkem 72 % veškerého času. V hodinách DB tvoří celkem 62 % času, přičemž řešení úloh samotnými žáky je zcela jistě časově náročnější, než řešení úlohy učitelem (nebo jednoho žáka pod dohledem učitele) u tabule.

Za zmínku také stojí poslední řádek tabulky, který zahrnuje všechen čas, který v hodině nebyl věnován přímo matematice. Množství takto stráveného času převažuje také u DB, ačkoli MK musel často v hodinách řešit různé organizační záležitosti z pozice třídního učitele. Časové prostoje v hodinách DB vznikaly z různých důvodů. Na začátku každé hodiny věnovala učitelka přibližně dvě minuty zápisu do třídnice, dále zapsání tématu, data a čísla hodiny na tabuli. Žáci MK v tomto čase většinou samostatně pracovali na úvodní úloze. V průběhu hodiny DB opakovaně řešila problém, že žáci nenosí učebnici, čekala, než vyvolaný žák přijde k tabuli, případně než služba tabuli smaže.

4.3.3 Efektivní využití hodiny

Díky elektronické formě učebnice, se kterou pracuje MK, dochází k významné úspoře času. DB v hodinách opakovaně řešila, že žáci učebnici nemají. Důležité definice, zadání úloh či domácích úkolů nejčastěji diktovala celé třídě nebo psala na tabuli. MK při výuce vždy promítal úsek elektronické učebnice, se kterým se právě pracuje, potřebné informace měli tedy všichni před sebou. Další výhodou této formy učebnice je samozřejmě fakt, že je k dispozici všem, a to kdekoli, kde je přístup k internetu.

Jak již bylo zmíněno výše, řešení úloh v hodinách DB probíhalo dvojím způsobem. V obou případech docházelo dle mého názoru ke zbytečným časovým ztrátám. Pokud úlohu u tabule řešil některý ze žáků, zadání mu vždy někdo jiný předčítal. Čtení textu jistě rozvíjí u žáků kompetence čtenářské, v tomto případě je to však na úkor matematiky. Když řešila úlohu na tabuli učitelka, vyvolávala žáky na jednotlivé kroky řešení. Ve třídě pracovalo samostatně vždy jen několik jednotlivců, ostatní pouze opisovali postup z tabule.

V hodinách MK byla snaha, aby žáci řešili úlohy převážně samostatně a individuálním tempem. Úlohy v učebnici jsou řazeny v tomto smyslu – od jednodušších po složitější, u nichž se počítá s tím, že je stihnou řešit pouze rychlejší a schopnější žáci. Například 7. hodina (Obecná rovnice přímky II) byla celá vedena právě tímto stylem. Žáci řešili úlohy samostatně a vždy, když dospěli k výsledku, mohli si zkontrolovat, zda je jejich řešení správné. MK se pohyboval po třídě, sledoval práci žáků, a pokud bylo třeba, pomáhal jim. Pomoc žákům v lavicích spočívá v tom, že se učitel pouze „snaží upozorňovat na nesrovnalosti, dovádět rozpory do absurdna nebo trvat na dodržování pravidel, která mají žáci znát“ (Obecné zásady realistické pedagogiky, s. 4).

4.3.4 Otázky učitele

Z analýzy dat vyplývá, že DB pokládá žákům v průběhu hodiny více otázek než MK. Ve zkoumaných hodinách položila DB žákům celkem 209 otázek (průměrně 20,9 ot./hod.), MK položil žákům celkem 130 otázek (průměrně 14,4 ot./hod.). Množství otázek souvisí s pojetím výuky učitele, protože v hodinách MK tvoří velkou část hodiny samostatná práce žáků (řešení úloh), při níž s nimi učitel komunikuje individuálně[8], zatímco DB pokládá žákům otázky i v průběhu řešení úloh. U obou

[8] Při komunikaci s jednotlivými žáky v lavicích MK také pokládá otázky, předmětem výzkumu jsou pouze otázky směřované k celé třídě.

zkoumaných učitelů převažují otázky vyžadující od žáků pouze krátkou odpověď (jedno slovo či slovní spojení). Procentuální zastoupení jednotlivých otázek je uvedené v tabulce 4.2.

Tabulka 4.2: Procentuální zastoupení jednotlivých druhů otázek DB a MK z hlediska délky odpovědi žáků

Odpověď žáků	DB	MK
Ano/Ne	8 %	12 %
Krátká odpověď	79 %	52 %
Víceslovná odpověď	13 %	36 %

Z tabulky 4.2 je patrné, že téměř 80 % otázek DB byly otázky vyžadující od žáků krátkou odpověď. Učitelka často pouze nechávala žáky doplnit poslední slovo ve větě. Žáci často odpovídali bez dlouhého přemýšlení a opakovali pojmy, o kterých věděli, že je učitelka vyžaduje, jako například „směrový“, „reálné“, „k-násobek“ a podobně. Tento jev lze pozorovat v ukázce řešení první úlohy 3. hodiny v oddíle 4.3.1, stejně tak v ukázce zavedení parametrické rovnice přímky v oddíle 4.3.5a.

Otázky, které vyžadovaly od žáků víceslovnou odpověď, převažují u MK. Tyto otázky jsou dále rozděleny na dva druhy: účelem otázky je, aby žák aplikoval dříve nabyté poznatky a zformuloval vlastní myšlenku, nebo aby dříve nabyté poznatky pouze reprodukoval (např.: „osa úsečky prochází jejím středem a je na ní kolmá“). Procentuální zastoupení obou druhů otázek s víceslovnou odpovědí je uvedené v tabulce 4.3.

Tabulka 4.3: Procentuální zastoupení dvou druhů otázek vyžadujících od žáků víceslovnou odpověď podle účelu otázky

Účel otázky	DB	MK
Aplikace poznatků	33 %	72 %
Reprodukce poznatků	67 %	28 %

Z otázek DB vyžadujících víceslovnou odpověď, které, jak již bylo zmíněno výše, tvořily 13 % jejích otázek směřovaných na žáky, tvoří dvě třetiny otázky, jejichž účelem bylo, aby žák pouze reprodukoval dříve nabyté poznatky. Jednalo se nejčastěji o otázky typu: „Co je těžiště trojúhelníka?“, „Jak se tvoří vektor k jinému vektoru kolmý?“ a podobně. Otázky s víceslovnou odpovědí MK byly častěji zaměřené na aplikaci poznatků. MK se snaží svými otázkami vyprovokovat žáky k tomu, aby formulovali vlastní myšlenky, zamysleli se nad problémem a navrhovali řešení. Tyto otázky začínají zpravidla slovem „proč“ nebo „jak“. Často se jedná o otázky, které by si žáci měli při řešení problémů ideálně pokládat sami – například „Co jsme to spočítali?“, „Jak je možné, že ačkoli nám vyšlo nějaké číslo, já tvrdím, že to nevyšlo?“.

Předmětem analýzy otázek bylo také zastoupení následujících jevů: žák odpověděl na otázku ihned, učitel otázku zopakoval, učitel otázku upřesňoval či dodával další informace, učitel si na položenou otázku odpověděl sám. Zjištěné procentuální zastoupení těchto jevů v hodinách DB a MK je uvedené v tabulce 4.4.

Tabulka 4.4: Procentuální zastoupení čtyř jevů souvisejících s otázkami učitele: žák odpověděl na otázku ihned, učitel opakoval otázku, učitel upřesňoval otázku, učitel si na otázku odpověděl sám

Pozorovaný jev	DB	MK
Žák odpověděl ihned	64 %	63 %
Učitel opakoval otázku	8 %	12 %
Učitel upřesňoval otázku	10 %	16 %
Učitel si na otázku odpověděl sám	18 %	9 %

Z tabulky je patrné, že MK projevoval vyšší tendenci otázky opakovat či upřesňovat. Upřesňování otázek, případně přeformulování otázky souvisí s účelem otázek MK – navést žáky pomocí otázek k řešení. Pokud žáci nereagují a učitel nechce řešení prozradit, zvolí tuto strategii. U DB lze naopak pozorovat, že častěji odpovědi na otázky uvádí sama (jednalo se převážně také o situace, kdy žáci na otázku nereagovali, nebo odpovídali chybně).

4.3.5 Rozdílné řešení stejné či podobné situace v hodině

a) Zavedení parametrického vyjádření přímky

Způsob, kterým zkoumaní učitelé přiblížili parametrické vyjádření přímky, se ve své podstatě výrazně lišil. Níže uvádím ukázky z obou úvodních hodin, protože zde lze pozorovat typické prvky dokumentující odlišnosti v pojetí výuky.

Tématem první hodiny DB nebylo na rozdíl od MK pouze parametrické vyjádření přímky, ale i polopřímky a úsečky. Odlišné pojetí zavedení rovnic polopřímky a úsečky je rozvedeno v oddíle 4.3.5b.

U: „Skončili jsme vektory a začínáme s takzvanou analytickou geometrií přímky. Vy už přímku moc dobře znáte jako graf jaké funkce?“ *(Obrací se na konkrétní žákyni.)*

Ž: „Lineární.“

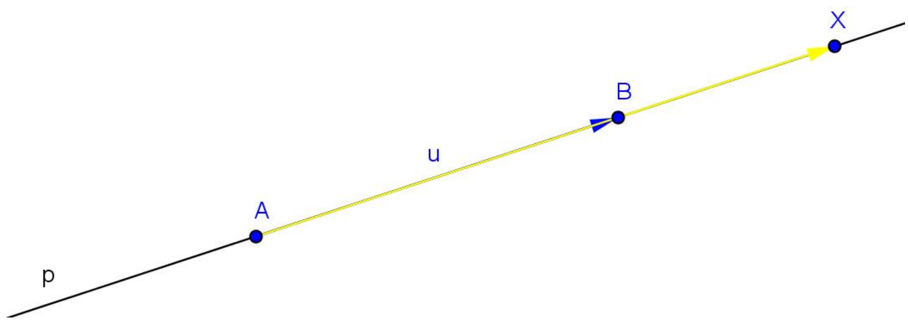
U: „Dobře. My si jí prohloubíme, protože budeme pracovat i s analytickou rovnicí přímky v prostoru, což jste zatím neměli, a tudíž si musíme vysvětlit, jakým způsobem můžeme přímku pomocí vektorů vyjádřit.

Takže si napíšete téma Parametrická rovnice přímky, polopřímky, ale i úsečky. Tam si budeme jenom vysvětlovat, jakou hodnotu ten parametr musí mít, aby všechny body vyplnily třeba jenom část té přímky – úsečku nebo polopřímku. Já bych teď vysvětlovala, vy se budete dívat a pak si to teprve zapíšeme a ukážeme si to na konkrétním příkladu, ano?

Takže teď vám potřebuji vysvětlit následující věc. Všichni víme, že přímka je jednoznačně určena kolika body? Kolik musí mít bodů, aby ta přímka byla jednoznačně určena?“

Ž: „Dva.“

U: „Dva body. Dobře. Takže si namaluji obrázek přímky. *(Kreslí na tabuli obrázek.)* A teď hlavně dávejte pozor, pak si to doděláte, ano? Máme dva body té přímky, přímku budeme zase označovat většinou p, q atd. A jak vidíte, ty body mi tu přímku určují.



Jestliže z těch bodů A a B určím vektor, je v podstatě jedno, jak ho nasměruju, ale my jsme byli zvyklí na vektor $\overrightarrow{AB}$. Takže ho označím $\vec{u}$ *(modrý)*. Tomu vektoru pak budeme říkat směrový vektor té přímky. Já to všechno pak v definici nadiktuji. Víme, jak se spočítají jeho souřadnice. Koncový mínus počáteční. $B - A$. A teď si na té přímce zvolím nějaký bod, já ho označím X, a potřebovala bych nějak popsat, co pro ten bod X bude platit, když mám ten směrový vektor té přímky. Všimněte si, že já jsem ten bod X na tu přímku namalovala vpravo do toho bodu B, ale já s tím bodem X samozřejmě můžu po té přímce posouvat, protože víme, že může mít libovolnou polohu, že se může dostat i do bodu B, může se dostat i *(vnímejte, jo?)*, může být i ztotožněný s bodem A, může ležet mezi body A a B, může ležet samozřejmě tady vlevo od A. Jestliže já si zavedu z toho bodu A a z toho bodu X tento vektor *(žlutý)*, tak ten vektor $\overrightarrow{AX}$, je vůči tomu vektoru $\vec{u}$ čím? Jaký je vztah mezi tím žlutým vektorem a mezi tím vektorem modrým?“

Ž: „k-násobek.“

U: „k-násobek. Ano. A když jsem namalovala tohle, tak to k je přibližně jaké číslo? Kolika asi tak násobek by to byl toho vektoru $\vec{u}$? Ten $\overrightarrow{AX}$.“

Ž: „1,75.“

Ž: „1,5."

U: „Třeba 1,5. Podstatné je, že ten k-násobek je větší než 1. Zatím si nemusíte psát, jenom mě vnímejte, já potřebuju, abyste mi to pochopili. Když ten bod X se ztotožní s bodem B, kolika-násobek bude $\overrightarrow{AX}$ vektoru $\vec{u}$?

ŽŽ: „Jedna?"

U: „Jedna-násobek. Ano. Když ten bod X se ztotožní s bodem A, kolika-násobek tam bude toho vektoru?"

ŽŽ: „Nula."

U: „Nula. Výborně. Když ten bod X se mi dostane mezi body A a B. Kolika-násobek tam bude?"

ŽŽ: „Nula celá…"

Ž: „Desetinné číslo."

U: „Bude to desetinné číslo. Výborně. Co když ten bod X dám přesně do středu mezi ty body A a B?"

ŽŽ: „Jedna polovina."

U: „Výborně. Jedna polovina. To znamená, za chvíli pochopíte, že i střed – protože jedna polovina – tak, jsem teď ve středu úsečky AB. Vidíte to na tom obrázku? A pochopíme asi, že ten střed úsečky se pak bude moci počítat – za chvíli jak – se budu ptát. A když s tím bodem X popojedu a budu vlevo od toho bodu A, tak pak ten žlutý vektor se stane kolika-násobkem toho $\vec{u}$?"

ŽŽ: „Záporným."

U: „Záporným. Důležité je, že záporným. A zase to záporné číslo může být desetinné, -2, -3 a tak dále. Místo k se teď dohodneme, že ten k-násobek budeme označovat t-násobek, ano? Takže já můžu teď napsat, že pro polohu toho bodu X, který je libovolným bodem té přímky, můžu zapsat, a to už byste si zapsali se mnou, že vektor $\overrightarrow{AX}$ se rovná – a měníme – místo k jsem řekla, že budeme psát jaké písmeno?"

ŽŽ: „t."

U: „Že je t-násobkem $\vec{u}$. Kde to t, abych dostala všechny body té přímky, včetně těch bodů A a B, musí být jaké?"

Ž: „Reálné."

U: „Výborně. Reálné. Musí být každé reálné číslo. Každé reálné, abych dostala každý bod té přímky." *(Píše na tabuli:)*

$$\overrightarrow{AX} = t \cdot \vec{u}$$

„Tím pádem ale vím, jak se vektor $\overrightarrow{AX}$ počítá, jenže já potřebuju vyjádřit to, co platí pro ten bod X. Takže jak se $\overrightarrow{AX}$ počítá?"

Ž: „$X - A$."

U: „$X - A$. Dobře. Zapíšeme.“ *(Píše na tabuli:)*

$$X - A = t \cdot \vec{u}$$

„A teď si vyjádřím z toho jenom ten bod X. Takže X rovná se… Co jenom udělám? Převedu na pravou stranu to áčko. Napište si ho jako první, ono se to tak píše.“ *(Píše na tabuli:)*

$$X = A + t\vec{u}$$

„A to je vlastně platnost. Vidíte, z čeho to vyplynulo. Že pro libovolný bod té přímky platí tahle rovnice. My jí říkáme, a to už bychom si napsali jako definici.

Rovnice $X = A + t \cdot \vec{u}$, kde t je libovolné reálné číslo, se nazývá parametrická rovnice přímky určená bodem A a směrovým vektorem $\vec{u}$. Říkáme mu směrový vektor. Proměnná t se nazývá parametr.“

Dále následoval výklad a definice parametrického vyjádření úsečky a polopřímky, potom se DB vrátila k rovnici přímky.

U: „Protože jsme ale v rovině, tak teď začneme pracovat se souřadnicemi. V rovině má každý bod kolik souřadnic?“

Ž: „Dvě.“

U: „Dvě. Jak bod X, tak bod A, tak vektor $\vec{u}$ má dvě souřadnice. Takže my si teď vlastně tu rovnici základní rozepíšeme v souřadnicích. Já budu pracovat s přímkou, ale stejně by se rozepsala i úsečka a polopřímka, ano? Napište si – parametrická rovnice přímky v souřadnicích. Předpokládáme, že bod X má souřadnice x, y. Bod A v té rovnici bude mít souřadnice, které budeme označovat a_1, a_2. A směrový vektor má souřadnice zase u_1,u_2. Pak parametrickou rovnici přímky v souřadnicích zapíšeme v tomto tvaru. Budeme jí označovat p – takto se to zapisuje. V nové učebnici to mají trošku jinak, to vám ještě ukážu, jak to zapisují.

Přímka p, dvojtečka. Ano? A teď bude pro první souřadnici. Tak, jako jsem vám uvedla obecně – pro ten bod platí $X = A + t\vec{u}$. To platí jak pro první souřadnici, tak pro druhou souřadnici toho bodu a i směrového vektoru, takže zapíšeme: *(Zapisuje na tabuli.)*

$$p: x = a_1 + t \cdot u_1$$
$$p: y = a_2 + t \cdot u_2$$

Pozor, jo? Tady to už jsou souřadnice – tam se nedělá tohle *(šipka)* – jako vektor, to už jsou čísla, která tam budeme dosazovat. Teď je to zapsané obecně a hned si dáme konkrétní příklad, ano? Musím dát najevo, jestli pracuji s úsečkou, polopřímkou nebo s přímkou. Vím, ze zkušenosti, že studenti tam tu hodnotu toho téčka nepíšou, ale my ji tam budeme všichni psát. Pokud se jedná o přímku, tak tam vždycky napíšu, že chci každý bod té přímky, čili že t musí být reálné číslo, ano?“

Naproti tomu v úvodní hodině tématu analytické geometrie přímky se MK věnuje pouze parametrickému vyjádření přímky. Žákům promítá lekci Parametrické vyjádření přímky I ze své učebnice.

U: „Již jsme si říkali, že analytická geometrie má za cíl přepsat rýsování do rovnic. Co jsme zatím dokázali, je zde vypsané. Bod nezobrazujeme křížkem na papíře, ale napíšeme buď dvě souřadnice, nebo tři, podle toho, jestli jsme v rovině, nebo v prostoru. A my budeme teď pořád v rovině, takže nám budou stačit ty souřadnice dvě. A směr zobrazujeme pomocí šipky, ale tu šipku můžeme také vyjádřit pomocí dvou souřadnic. Také jsme si rozlišovali – hranaté závorky znamenají bod, kulaté vektor."

Následuje samostatná práce žáků na první úloze – zakreslit do soustavy souřadnic bod a vektor o daných souřadnicích. Přibližně po dvou minutách vylosuje učitel pomocí generátoru náhodných čísel několik žáků, kteří mu jdou předvést svá řešení, ostatním promítne vyřešenou úlohu v učebnici.

U: „Cílem dnešní hodiny je naučit se zapsat pomocí rovnic přímku. Tak jak můžete přímku zadat? Jakým způsobem se zadává přímka – když ji máte narýsovat?"

Ž: „Dva body."

U: „První možnost je dvěma body. Existuje nějaká jiná možnost? Přemýšlejte. Ještě jedna možnost existuje."

Ž: „Prochází jedním bodem?"

U: „To stačí jeden bod, aby to byla přímka? Když mám jeden bod, tak už vím, jak mám udělat přímku, nebo ne?"

Ž: „Ne."

U: „Buď můžu říci, že udělám třeba kolmici na nějakou přímku přes tento bod, nebo můžu říci, že udělám co?"

ŽŽ: „Rovnoběžku."

U: „Rovnoběžku s nějakou přímkou přes tento bod. To znamená, že já zadávám tu přímku jakým způsobem? Zadávám ji tímto bodem a ta druhá informace je co?"

Ž: „Jak je natočená."

U: „Ano, a tomu se říká jak?"

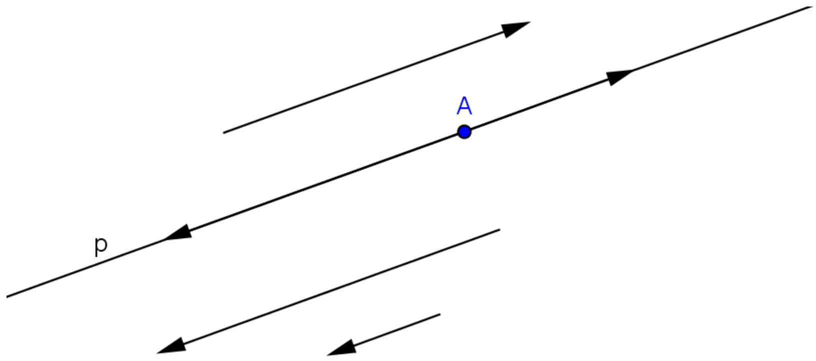
Ž: „Směr."

U: „Takže druhá možnost, jak zadat přímku je jeden bod a k tomu směr. Já tady mám bod A, tady mám přímku p, kterou chci zadat. *(Kreslí přímku procházející bodem.)* A čím bychom mohli zadat směr přímky?"

Ž: „Vektorem."

U: „Tak. Jak bude vypadat vektor, který charakterizuje směr této přímky? *(Odmlčel se.)* Udělejte si obrázek a nakreslete tam vektor, který charakterizuje směr této přímky. Bylo by dobré, kdyby u toho vektoru bylo vidět, kde začíná a kde končí."

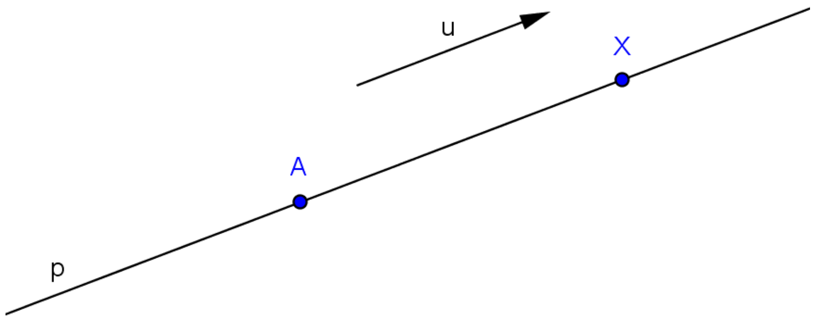
MK prochází mezi žáky, pak na tabuli zakreslí všechny možnosti polohy vektoru, které žáci do sešitů načrtli.



U: „Je to všechno dobře?“

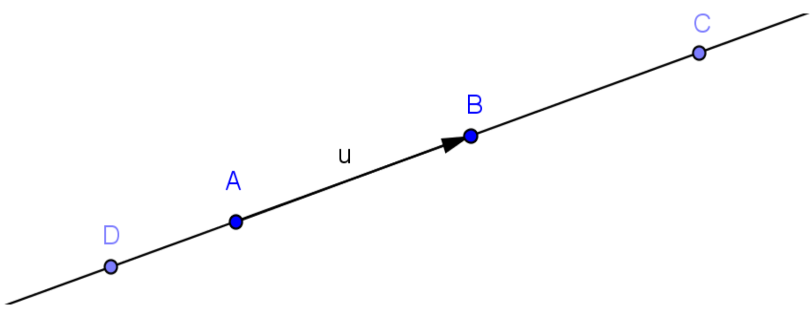
ŽŽ: „Je.“

U: „Teď nám jde o to, jak by to šlo spočítat. Budu mít ten bod A a tady budu mít ten vektor. *(Kreslí na tabuli.)* Tomu vektoru, který zadává směr té přímky, se říká směrový vektor. A náš cíl teď je sestavit rovnici, která bude fungovat tak, že v ní bude vystupovat bod A, vektor $\vec{u}$ a když ten bod bude na té přímce, tak ta rovnice vyjde, a když bude někde jinde, tak ta rovnice nevyjde. Tady si zvolím nějaký bod X.“



U: „Dokázal by někdo z vás popsat, jak bych se k tomu bodu X dostal, když vím, kolik je to A a kolik je $\vec{u}$? Jak se dostanu do bodu X, když mám k dispozici to A, tedy počáteční bod té přímky, a mám k dispozici to $\vec{u}$, ten směr.“ *(Dva žáci se hlásí.)*

U: „Jen dva? To není moc. Tak jinak.“ *(Kreslí nový obrázek.)*



U: „Je ten bod B na té přímce, nebo ne? Napište, jak se dostaneme do bodu B pomocí A a $\vec{u}$."

Ž: „Už vím!"

U: „Tak, má to někdo? To by vás mělo mít hodně. Máš to?" *(Obrací se na konkrétní žákyni.)*

U: „Ona má tohle: $B = A + \vec{u}$. Má tedy B vpravo a A plus $\vec{u}$ vlevo, ale to je jedno, ne? Tak, dokázali byste podobným způsobem napsat bod C? *(Odmlčel se.)* Úplně stejně to nejde, ale šlo by to podobně."

Ž: „$C = A + 2\vec{u}$"

U: „A co třeba bod D? Také by ho bylo možné popsat pomocí A a $\vec{u}$? Tak ho zkuste napsat. A pak zkuste přemýšlet, jak by šly zapsat všechny ostatní body. Co bychom tam museli udělat." *(Prochází mezi žáky.)*

U: „Teď jsme si zkusili napsat pár konkrétních bodů – to D je takhle, ne?" *(Píše na tabuli:)*

$$D = A - \frac{1}{2}\vec{u}$$

U: „Tak zkuste napsat bod X. Ten bod X může být kdekoliv, ale přesto jde nějak napsat. Podívejte se, jak se napsaly ty body, co tady máte, a přemýšlejte, jak by šel napsat libovolný bod na té přímce. *(Prochází mezi žáky.)* Ty zápisy bodů, které tady máme, se v něčem podobají."

U: „Tohle máte napsané, ne?" *(Píše na tabuli:)*

$$X = A + k\vec{u}$$

U: „Co tam chybí?"

Ž: „Že k jsou celá čísla."

U: „Celá?"

ŽŽ: „Všechna."

U: „Všechna jaká?"

Ž: „Reálná."

U: „Tak, je to jasné? Jaké tedy bylo k pro bod C?"

Ž: „Dva."

U: „A pro ten bod D?"

Ž: „Mínus jedna polovina."

U: „Tak. Víte, proč se tomu říká parametrické vyjádření přímky?"

Ž: „Protože k je parametr."

U: „Tak si to tam napište, že k je parametr, proto se tomu říká parametrické vyjádření přímky. Máte to v učebnici popsané v modrém rámečku. Není tam sice k, ale t, ale to neznamená nic jiného, ne? Je vám jasné, že ten zápis znamená dvě rovnice? Jednu pro x a druhou pro y. Takže si tam opište modrý rámeček, pak můžete rovnou začít dělat dvojku."

První úlohu (zapsat parametrickou rovnici přímky, když jsou dány souřadnice jejího směrového vektoru a bodu, který na ní leží) řešili žáci samostatně. Při společné kontrole MK předvedl tři možnosti zápisu výsledku s komentářem „používejte, jaký chcete, musíte být ale schopni přejít na jiný“.

Jak bylo zmíněno na začátku oddílu, v ukázkách bylo možné pozorovat mnoho typických prvků a rozdílů v pojetí výuky obou učitelů: výklad DB, kdy učitelka píše na tabuli, diktuje definice, žáci si zapisují do sešitu, případně pouze dávají pozor, když jsou k tomu učitelkou vyzváni; typická slovní spojení DB jako „dávejte pozor“, „vnímejte“, „potřebuji vám vysvětlit“.

Stejně tak typické prvky vyučovací hodiny MK: úvodní úloha, kdy žáci pracují samostatně, úvod nového tématu, kdy MK navázal analytickou geometrii přímky na žákům známé rýsování přímek; učitel podněcoval žáky slovy „zkuste zakreslit“, „přemýšlejte“. Dále bylo možno pozorovat samostatnou práci žáků v průběhu výkladu učitele – na tom, co učitel následně zakreslil na tabuli, nejprve pracovali žáci sami do sešitu. Také zde je zaznamenána situace, kdy učitel přehodnotil přístup k problému na základě malého počtu žáků schopných odpovědi.

Za zmínku také stojí zdánlivě drobný rozdíl, kdy DB při výkladu žákům oznamuje, že budou probírat parametrickou rovnici přímky, v definici dále v hodině pak diktuje „Proměnná t se nazývá parametr.“. Oproti tomu MK položil žákům otázku „Víte, proč se tomu říká parametrické vyjádření přímky?“, která nutí žáky zamyslet se nad smyslem názvu a tím, co je parametr.

b) Parametrické vyjádření úsečky a polopřímky

Jak již bylo zmíněno v předchozím oddíle, DB se parametrickému vyjádření úsečky a polopřímky věnovala v první hodině po definování parametrického vyjádření přímky.

> U: „Jaký bude rozdíl oproti přímce, když budu pracovat jen s úsečkou AB? Rovnice bude stejná, jen se tam bude něco měnit. Potřebujeme všechny body X, které budou ležet mezi body A a B, včetně A a B. Co se tam změní? X nemůže ležet ani vpravo ani vlevo.“
>
> Ž: „t bude omezené.“
>
> U: „Jak bude omezené?“
>
> ŽŽ: „Od nuly do jedné.“
>
> U: „Tak ještě jednou. Když ten bod X bude totožný s bodem A. Kolik tam bylo to t?“
>
> ŽŽ: „Nula.“

U: „A když ten bod X bude ztotožněný s bodem B?“

ŽŽ: „Jedna.“

Žáci pochopili, že je třeba omezit hodnoty parametru od nuly do jedničky, učitelka ale v tuto chvíli odbočila k úloze s trojúhelníkem, jejímž cílem je ukázat, že těžiště leží v jedné třetině těžnice trojúhelníka, tedy že parametr spadá do intervalu $\langle 0; 1\rangle$. Myslím, že tato odbočka nebyla zcela vhodná, na některých žácích bylo patrné, že jim tento příklad smysl omezení hodnot parametru nepřiblížil, spíše naopak.

Poté se učitelka vrátila k úsečce AB a zapsala její rovnici s omezením hodnot parametru t. Stejným způsobem pak zavedla parametrickou rovnici polopřímky AB a polopřímky opačné k polopřímce AB. Žáky vyvolávala, aby jí jednotlivé rovnice diktovali, nikdo z nich s tím neměl problém.

Stejnému tématu MK věnoval převážnou část druhé hodiny (Parametrické vyjádření přímky II). Hodina začala tradičně úlohou navazující na minulou látku, kterou žáci řešili samostatně. Úkolem bylo zapsat parametrickou rovnici přímky AB, když jsou dány souřadnice bodů A, B. Dále měli dopočítat druhou souřadnici bodu C tak, aby také na přímce ležel, a určit, ve které části přímky vzhledem k bodům A a B leží. Poté, co MK vylosoval několik žáků, aby šli řešení předvést, následovala společná kontrola (diskuze k řešení).

U: „Budeme se zajímat o to, co dělá ten bod C. Měli jste odpovědět na otázku, kde ten bod C asi leží. Někdo při kontrole už na to nějaký názor měl, jaký na to máte názor vy ostatní? Já to nakreslím.“ *(Kreslí přímku a na ní body A, B.)*

U: „Kde leží ten bod C?“

Ž: „Leží mezi A a B.“

U: „Proč?“

Ž: „Podle těch souřadnic – jsem se kouknul na A a na B.“

U: „Jako že souřadnice C jsou mezi souřadnicemi A a B – x-ová souřadnice C je mezi x-ovými souřadnicemi A a B, stejně tak y-ová. Má někdo nějaké jiné zdůvodnění? Napadlo by vás, jak to zdůvodnit jinak než jenom, že jsou mezi?“

Ž: „Já bych řekl, že to C leží ve třech čtvrtinách toho $\vec{u}$.“

U: „Proč?“

Ž: „Protože t mi vyšlo $\frac{3}{4}$.“

U: „Tak. Když si vzpomenete, tak my máme napsanou tu přímku tak, že máme vyjádřený bod A plus nějaký násobek tohoto vektoru. A když sem dosadíme C, vyjde nám, že t se rovná tři čtvrtiny, takže jsme se dostali do bodu C? Postavili jsme se do A a posunuli jsme se o tři čtvrtiny tohoto vektoru, takže C je přibližně tady. *(Ukazuje na náčrtek na tabuli.)* Takže to nemusíme poznávat jen odhadem z těch souřadnic, ale díky tomu, že víme, jaké je t, tak to víme docela přesně.“

Polohou bodů na přímce v závislosti na velikosti parametru se žáci zabývali také ve druhé úloze. Samotné určení omezení hodnot parametru pro úsečku či polopřímky bylo úkolem ve třetí úloze. Pro část třídy tedy nebylo třeba žádného výkladu ze strany učitele. Těm, kteří nebyli schopni vyřešit úlohy samostatně, se vysvětlení dostalo při společné kontrole úloh. Jakým způsobem probíhala společná kontrola třetí úlohy je uvedeno níže.

U: „Co musím dosadit za t, abych dostal bod A? Jsem tady *(ukazuje na bod A)* a o jaký násobek $\vec{u}$ se musím posunout, abych dostal zase bod A?“

ŽŽ: „O nic.“

U: „To znamená, že čím musím vynásobit ten vektor? Nulou, ne? Takže když chci A, t musí být rovno nule. Když chci B, tak t musí být rovno čemu? *(Čeká na odpověď žáků.)* Čím musím vynásobit ten vektor, abych se z A dostal do B?“

ŽŽ: „Jedničkou.“

U: „Ano. A ostatní už je jednoduché. Když to má být úsečka AB, tak to t je v nějakém intervalu. Tak to rychle napište.“

Ve druhé hodině se MK také věnuje krácení souřadnic směrového vektoru a tomu, jak souvisí s určováním polohy bodů na přímce. Na učitelovu otázku, zda má krácení vektoru nějaké nepříjemné důsledky, odpovídá jeden ze žáků, že „teď nevíme, kde se nachází koncový bod úsečky“. Toto nebylo v žádné z hodin DB zmíněno.

Zajímavá byla dle mého názoru také následující úloha, na níž se ukázalo, že při vyjadřování parametrické rovnice úsečky nemusí být hodnoty parametru vždy omezeny nutně na interval $\langle 0; 1\rangle$. Byla parametricky zadána přímka, dále souřadnice bodů K, L, které na přímce leží. Úkolem bylo jen vhodně omezit hodnoty parametru tak, aby se jednalo o úsečku KL.

Na fakt, že úsečka vyjádřená parametricky nemusí mít hodnoty parametru omezené vždy na interval $\langle 0; 1\rangle$, narazila DB náhodou v deváté hodině (Parametrické vyjádření přímky v prostoru) při řešení čtvrté úlohy. Úkolem bylo napsat parametrické vyjádření těžnice AA_1 v trojúhelníku ABC. V zápisu rovnice žákyně použila bod A, vektor $\overrightarrow{A_1A}$ a parametr z intervalu $\langle 0; 1\rangle$. Učitelka pomocí dosazení hodnot parametru 0 a 1 do rovnice ukázala, že nevychází souřadnice krajních bodů úsečky. Sama žákyně se pak opravila, že správně by měl být interval $\langle -1; 0\rangle$. Pokud by žákyně použila vektor $\overrightarrow{AA_1}$, což učitelka předpokládala, žáci by se v žádné úloze s jiným omezením hodnot parametru nesetkali.

c) Určování, zda bod leží na přímce

U obou vyučujících se v první hodině objevila úloha, kde bylo úkolem zjistit, zda daný bod leží na přímce vyjádřené parametricky. Následující ukázka je z hodiny DB.

> U: „Jak to dokážeme?“
>
> Ž: „Dosadíme do p.“
>
> U: „Ano. A pokud ten bod bude na té přímce ležet, tak mi musí vyjít to t z obou rovnic jaké?“
>
> Ž: „Reálné.“
>
> U: „Dobře, ale stejné. Když mi vyjde jiné, tak samozřejmě ten bod bude ležet někde mimo, už tam nebude platit ten t-násobek směrového vektoru. Tak to pojďme ukázat.“ *(Vyvolává žákyni k tabuli.)*

Ukázka řešení podobné úlohy v hodině MK.

> U: „Jak se pozná, že bod leží na té přímce? Co ta rovnice $X = [2; 3] + k \cdot (-3; -6)$ znamená? Co znamená to X?“
>
> Ž: „Bod.“
>
> U: „Jaký bod? Je to bod, který je tady *(na přímce)*. Ta rovnice říká – ten bod leží na přímce, když se k němu dostanu tímto způsobem. Stoupnu si do A *(v úloze $A[2; 3]$)* a posunu se o nějaký násobek toho směrového vektoru. Jak já teď poznám, jestli E leží na té přímce? Jakou roli hraje E v téhle rovnici?“
>
> ŽŽ: „X.“
>
> U: „Takže když E bude ležet na té přímce, tak to dopadne jak? Když to E dosadím sem – místo X – tak mi to vyjde, ne?“
>
> Ž: „A co jako vyjde?“
>
> U: „Dosaďte to tam a přemýšlejte, jestli je jasné, co vyšlo. *(Prochází mezi žáky.)* Každý, kdo dopočítá, tak si k tomu napíše, jak se z toho pozná, že bod buď na přímce leží, nebo tam neleží. Nějaký poznávací znak.“

Následuje samostatná práce žáků a pak společná kontrola výsledků. Žáci dosazují souřadnice dvou bodů, z nichž jeden na přímce leží a druhý ne. Zjistili, že u prvního bodu vyšlo k v obou rovnicích stejné, ve druhém případě ne.

> U: „Tak jak se pozná, že tam ten bod leží?“
>
> Ž: „Když jsou stejná.“
>
> U: „Proč? Proč to znamená, že nám to nevyšlo? Vždyť jsme nějaké hodnoty spočítali. Ale proč nejsou ty hodnoty dobré? *(Odmlčí se.)* Většinou, když něco nevyjde, tak žádné číslo nedostaneme, teď jsme čísla dostali, ale přesto tvrdíme, že to nevyšlo. Proč? *(Čeká na*

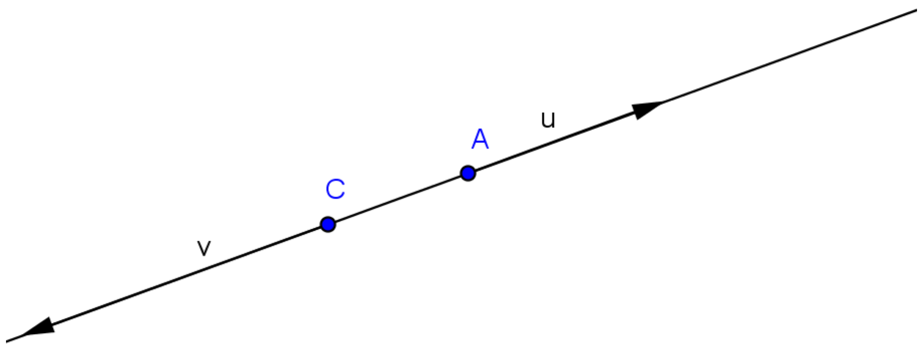
odpověď žáků.) Tak se podívejte, co ta rovnice znamená. Co nám říká ten parametr? Jak moc jsme natáhli ten vektor, abychom se dostali do toho bodu, je to tak? A můžeme natáhnout půlku vektoru jinak než druhou? To není možné, k musí být stejné, aby to vyjadřovalo, jak jsme natáhli ten vektor $\vec{u}$."

Ukázka výše dokumentuje typický prvek pojetí výuky MK. Řešení úlohy diskutuje s žáky, neprozrazuje výsledek, ale nechá je samostatně pracovat, aby si sami vyzkoušeli, co vyjde. Dále požaduje, aby každý sám zkusil vyvodit ze své práce závěr a zformulovat jej do sešitu. Podobnou úlohu řešila v hodině i DB. Řešení úlohy také diskutovala s žáky, ale když jí nikdo uspokojivě neodpověděl, řešení žákům prozradila a poté jej vyvolaná žákyně provedla za asistence učitelky na tabuli.

d) Vzájemná poloha dvou přímek

K tomuto tématu neprováděla DB žádný výklad, což se v tomto tématu podobá konceptu MK. Způsob, kterým se rozhoduje o vzájemné poloze dvou přímek, učitelka předvedla prakticky ve druhé a třetí úloze druhé hodiny (Parametrická rovnice přímky – procvičování). Úkolem bylo rozhodnout, zda jsou dvě přímky $p(A, \vec{u})$ a $q(C, \vec{v})$ zadané parametricky totožné. V prvním případě totožné byly, ve druhém ne.

U: „Představte si, že ty přímky by byly totožné." *(Kreslí obrázek.)*



U: „Co platí pro směrové vektory těch přímek?"

ŽŽ: „Je stejný."

U: „Není stejný, ale je to jeho…"

ŽŽ: „k-násobek."

U: „A kolikanásobek je vektor $\vec{v}$ toho vektoru $\vec{u}$?"

Ž: „Trojnásobek."

ŽŽ: „Mínus tři."

U: „Mínus trojnásobek. Ano. A jestliže to takhle je, tak musí určitě ten vektor $\vec{v}$ být s tím vektorem $\vec{u}$ být jaký?"

Ž: „Opačný."

U: „Máte pravdu, ale není úplně opačný, protože nemá stejnou velikost. Když je ale jeden vektor k-násobkem druhého, tak ten druhý vektor by mohl ležet na čem?" *(Kreslí do obrázku rovnoběžku.)*

Ž: „Ve stejném směru."

U: „Na rovnoběžce. Neboli, já už vidím, že jeden vektor je k-násobkem druhého, ale potřebuji zjistit, jestli ten vektor *(myslí bod C)* nebude náhodou na této rovnoběžce. Protože kdyby byl, tak pak ty přímky nebudou parametrickým vyjádřením stejné přímky. Tak jak to uděláme? Podívejte se na obrázek. Jak zjistíme, zda jsou ty přímky totožné nebo rovnoběžné různé? Když to nebude jako na tomto obrázku *(přímky totožné)*, tak ten bod C by měl ležet na té druhé přímce, ne? Takže jeho souřadnice by nevyhovovaly čemu? Rovnici té první přímky. Musím si tedy skutečně vzít ten bod C a zjistit, jestli mi leží na té přímce p. A co nám z toho musí vyjít?"

Ž: „Že to t je stejné."

U: „Dopočítejte sami. Zjistěte, jestli C na té přímce leží." *(Čeká, až žáci dosadí souřadnice.)*

Ž: „Leží."

U: „Takže z toho vyplývá – nic jiného už platit nemůže – že přímka p je rovna přímce q, jsou tedy totožné. Všichni si tedy napište závěr. Daná parametrická vyjádření jsou parametrická vyjádření téže přímky. A teď vezmeme druhý příklad, kde to nevyjde."

Učitelka zde dopředu prozrazuje, co bude výsledkem úlohy, úkolem žáků je tedy ověření skutečnosti, kterou jim DB sdělila. Žáci nemusí přemýšlet o tom, co jim vyšlo a jaký to má význam. Na rozdíl od MK zde učitelka nevyužívá motivace podněcující zvědavost, žáci již vědí, že v následující úloze budou zadané přímky rovnoběžné.

U: „Nejdříve se podíváme na souřadnice vektorů. Co tady platí?"

Ž: „Jsou stejné."

U: „Ano, tady ten k-násobek platí, on je navíc ještě stejný, takže je to jednonásobek. A myslíte si, že je jedno, jestli dosadím bod z první přímky do druhé, nebo bod z druhé přímky do té první?"

Ž: „To je jedno."

U: „Ano, tak to zkuste. Dosaďte jeho souřadnice a zjistěte, jestli parametr vyjde stejný. Dosazujeme za x a za y do té rovnice. *(Čeká, až žáci dosadí souřadnice.)* Takže vidíte co?"

ŽŽ: „Že to nevyšlo."

U: „Jakou polohu tedy vůči sobě mají ty přímky?"

ŽŽ: „Rovnoběžky.“

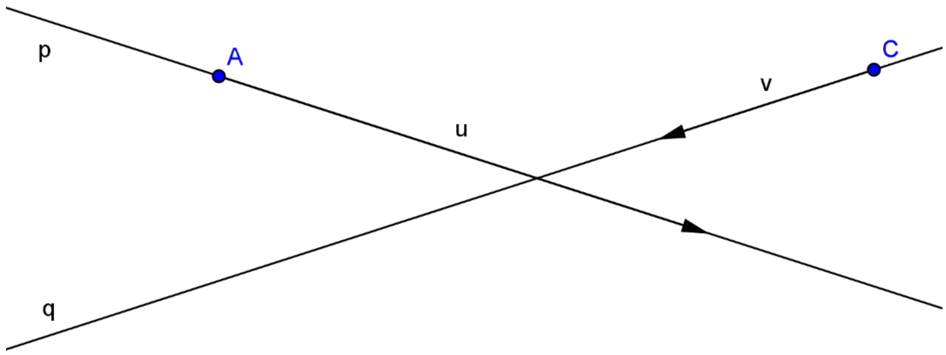
U: „Správně. Jsou rovnoběžné, protože je tam k-násobek toho směrového vektoru. I když jsme to zatím ještě nedělali, jaká ještě může být vzájemná poloha u přímek v rovině?“

Ž: „Kolmé.“

U: „To je pravda, ale tomu se říká správně…“

ŽŽ: „Různoběžné.“

U: „Ano. Když to budou různoběžky, tak jak to poznáme?“ *(Kreslí obrázek.)*



Ž: „Nebudou mít stejný ten vektor.“

U: „Ale co to znamená – stejný vektor?“

Ž: „Budou tam jiná čísla. Ten k-násobek.“

U: „Ano, už tam nebude platit ten k-násobek, protože nejsou rovnoběžné. A různoběžky mají co společného? Kolik bodů?“

Ž: „Jeden střed.“

U: „Neříkáme mu střed, ale…“

Ž: „Průnik.“

U: „Jak mu říkáme, když se ty přímky protnou?“

Ž: „Průsečík.“

U: „Tak si tam nakreslete obrázek a napište si tam, že když se jedná o různoběžné přímky, neplatí k-násobek směrových vektorů a mají právě jediný společný bod – průsečík.“

Následovala čtvrtá úloha, kde bylo cílem zapsat parametricky dvě přímky dané bodem a směrovým vektorem a určit jejich průsečík. Řešení této úlohy je popsáno dále v tomto oddíle pro porovnání s obdobnou úlohou v hodině MK.

MK věnoval vzájemné poloze parametricky zadaných přímek celkem tři vyučovací hodiny. Na začátku první z nich proběhla diskuze na toto téma.

U: „My jsme si ukazovali parametrické vyjádření přímky, ve kterém jsou informace o té přímce. Mělo by z toho vyjádření být také možné zjistit, jestli jsou přímky rovnoběžné, různoběžné a podobně *(kreslí obrázek dvou rovnoběžek $p(A,\vec{u})$, $q(B,\vec{v})$)*. Přemýšlejte. *(Čeká na odpověď žáků.)* Jak se pozná, že jsou přímky rovnoběžné?"

Ž: „Mají stejný směr."

U: „A ještě něco platí. Aby nebyly totožné."

Ž: „Nesmí mít žádný společný bod."

U: „Tak. A jak já teď z těch informací v parametrickém vyjádření *($A, B, \vec{u}, \vec{v}$)* poznám, že ty přímky mají stejný směr a nemají žádný společný bod?"

Ž: „Jeden vektor musí být násobek toho druhého."

U: „Je to jasné? Musí platit, že $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$. Ty vektory nemusí být stejné, ale jeden musí být násobkem druhého. A jak poznám, že žádný bod té přímky neleží na té druhé?"

Ž: „Že $B \neq A + k \cdot \vec{u}$."

U: „Je jasné, proč stačí zkontrolovat jen to B? Mohlo by se stát, že B by tam neleželo, ale nějaký jiný bod té přímky by tam ležel?"

Ž: „Ne."

U: „Jakmile zjistím, že mají stejný směr, tak už se to stát nemůže. Buď tam leží všechny, nebo žádný, je to jasné? *(Odmlčí se.)* Jaké jsou ještě další možnosti vzájemné polohy přímek?"

Ž: „Kolmé."

Ž: „Různoběžné."

U: „Různoběžné, ano. Ještě nějaká jiná možnost?"

Ž: „Mimoběžné."

U: „V rovině těžko."

Ž: „Souběžné – jako že jedna leží na druhé."

U: „Tak, tomu se říká totožné, že? Nakreslete si podobné obrázky jako u těch rovnoběžek a napište si k tomu, podle čeho se to dá rozhodnout."

Žáci několik minut pracovali sami, pak následovala společná kontrola.

U: „Jak zjistím, že jsou různoběžné?"

ŽŽ: „Jiný směr."

U: „A to zjistím jak?"

Ž: „$\vec{u} \neq k \cdot \vec{v}$."

U: „Ano. To, co u rovnoběžek platí, tady platit nebude. Má smysl ještě něco zjišťovat, nebo už teď víme, že jsou různoběžné?"

ŽŽ: „Nemá.“

U: „Teď už je to jisté. Jakmile nemají stejný směr a jsme v rovině, je jisté, že se někde potkat musí, ale to mě nezajímá, když jsem jenom chtěl vědět, jestli jsou různoběžné. A když jsou přímky totožné?“

Ž: „Stejný směr.“

U: „Ano. A ještě něco?“

Ž: „A a B musí být stejné.“

U: „Je to pravda?“

Ž: „Musí ležet na jedné přímce.“

U: „To je ale něco jiného. Takže co ještě musíme zjistit?“

Ž: „Jestli $B \in p$.“

U: „Tak. Když bod B bude ležet na přímce p, je jasné, že jsou totožné.“

Následovala společná diskuze, přičemž cílem bylo vytvořit postup pro efektivní rozhodování o vzájemné poloze dvou přímek.

U: „Co musíme udělat jako první, abychom mohli rozhodnout, který z těch tří případů (rovnoběžky, totožné přímky, různoběžky) to je? Kdo to ví, co se udělá nejdřív? *(Žáci se hlásí, MK je počítá.)* Šest. Tak povídej.“ *(Obrací se na konkrétního žáka.)*

Ž: „Vyzkouším ty vektory.“

U: „Ano. Zjistíme, jestli $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$, jestli je jeden vektor násobek druhého. Jak to může dopadnout? Buď to platí, nebo ne. Co když ano? Už víme, jaká je ta vzájemná poloha?“

ŽŽ: „Ne.“

U: „Jaká může být?“

ŽŽ: „Rovnoběžné, totožné.“

U: „A když jeden vektor nebude násobkem druhého?“

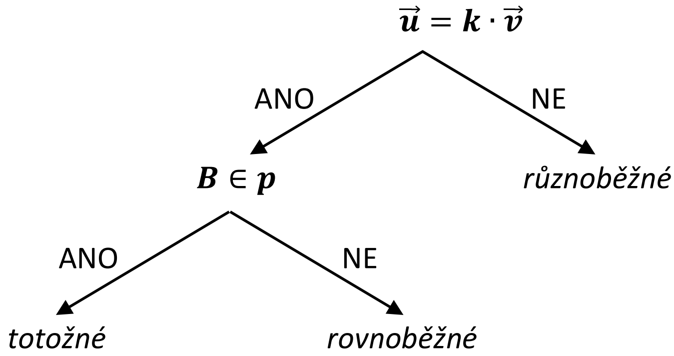
Ž: „Jsou různoběžné.“

U: „To je jisté. A co musíme ještě udělat, abychom mohli rozhodnout, jestli jsou přímky totožné nebo rovnoběžné?“

Ž: „Jestli bod B leží na p.“

U: „A zase jsou dvě možnosti – buď ano, nebo ne. Doplňte si tam ty výsledky.“

V průběhu diskuze si žáci vytvořili následující schéma.



Následovala samostatná práce žáků – řešili postupně dvě úlohy, kdy měli zjistit vzájemnou polohu přímek zadaných bodem a vektorem, a pokud jsou různoběžné, určit jejich průsečík. Úloha vedla na soustavu dvou parametricky zadaných přímek. V prvním případě byly zadané přímky rovnoběžné. Žáci postupovali podle schématu, které si předtím společně vytvořili, problémy se vyskytly pouze ojediněle. Ve druhém případě byly zadané přímky různoběžné. Učitel nechal žáky, aby si rovnice zapsali sami. Ti u obou přímek použili jako parametr k.

> U: *(Postupně ukazuje na rovnice přímek* p *a* q*)* „Toto jsou rovnice, kterým vyhovují všechny body na přímce p. A toto jsou rovnice, kterým vyhovují všechny body na přímce q. Čím je zajímavý průsečík?“
>
> Ž: „Vyhovuje oběma.“
>
> U: „Vyhovuje přímce p i přímce q. Takže když si vezmu x-ovou souřadnici toho průsečíku, tak co pro ni musí platit? Musí vyhovovat x-ové souřadnici bodu na přímce p a zároveň x-ové souřadnici bodu na přímce q. Stejně tak y-ová souřadnice. Tak to spočítejte.“

MK nechal žáky vyřešit soustavu rovnic, kde je pouze jedna neznámá. Po vyřešení rovnice pro x-ovou souřadnici, vyšlo $k = \frac{1}{2}$ a pro y-ovou souřadnici $k = -\frac{1}{3}$.

> U: „Co nám vyšlo? A co nám mělo vyjít?“
>
> Ž: „Ten bod.“
>
> U: „Tak jaké má souřadnice?“
>
> Ž: „Ten vektor, co je v přímce p, vynásobím tím, co nám vyšlo.“
>
> U: „A co nám vyšlo? Jedna polovina nebo mínus jedna třetina? Co ty čísla znamenají? Co nám mělo říci to k?“
>
> Ž: „Jak roztáhneme ty vektory.“
>
> U: „A když nám vyšla dvě různá k, co to znamená?“

Ž: „To k, které nám vyšlo z rovnice pro x, dosadíme do x-ové souřadnice a to druhé do y-ové souřadnice."

U: „Počkej, vždyť tohle k musí být vždy stejné, ne? To mi říká, jak natáhnu ten vektor. Já nemůžu natahovat jinak x-ovou a jinak y-ovou souřadnici."

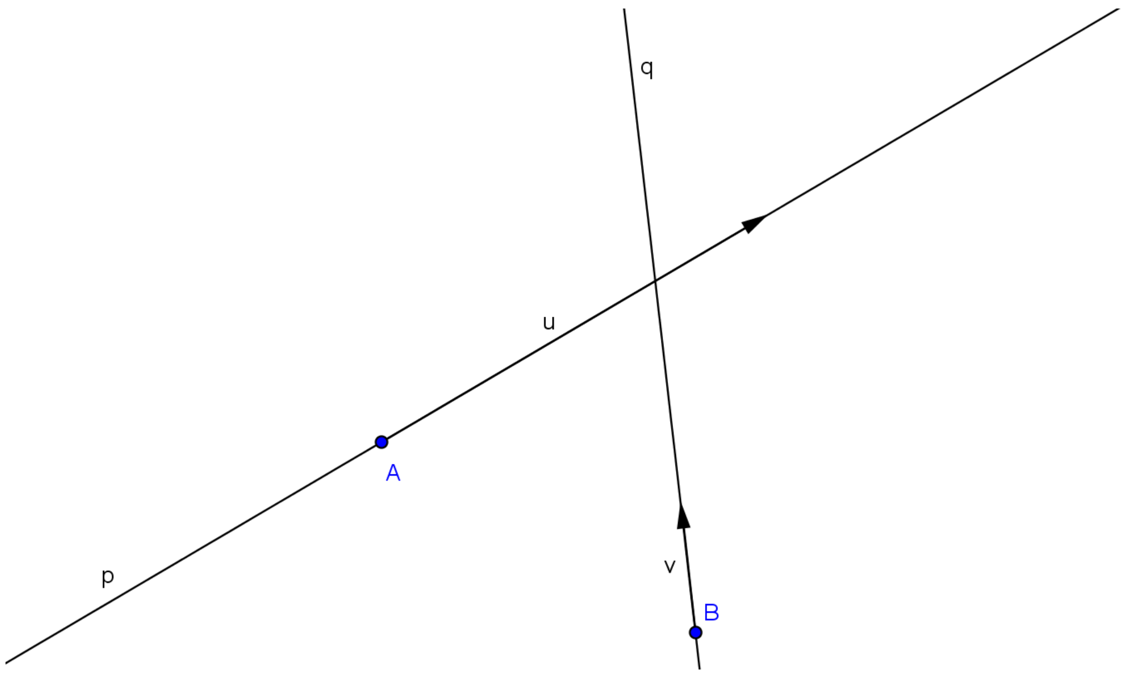
Ž: „Tak dosadíme tu jednu polovinu do p a jednu třetinu do q, a když to bude stejné, tak máme ten bod."

U: „A když to nebude stejné?"

Ž: „Tak jsme počítali špatně."

U: „My jsme počítali špatně, ale v čem je tedy chyba?"

V tu chvíli skončila hodina, MK nechal problém otevřený s tím, že se k němu vrátí v příští hodině. V následující hodině shrnul problém, promítnul žákům z učebnice to, co již měli hotové z minula, a znovu nakreslil na tabuli obrázek.



U: „Čekali jsme, že nám z obou rovnic vyjde stejné k, abychom ho mohli dosadit a dopočítat souřadnice průsečíku. Tak kde se stala chyba? *(Čeká na reakci žáků.)* Mimochodem, je to častá chyba… Podívejte se na obrázek a představte si, že to vypadá třeba takhle. Kolik by bylo k, kdybych chtěl průsečík vyjádřit pomocí bodu A a vektoru $\vec{u}$? Odhadem."

Ž: „Menší než 1."

U: „Tak, méně než jedna. Třeba $\frac{2}{3}$, je to tak? Rozumíte tomu? Kolik by mělo být to k, kdybych se díval na tu přímku q?"

Ž: „Větší než jedna."

U: „Větší než jedna – například kolik?"

Ž: „Dva, tři.“

U: „Třeba tři, řekněme. Takže co jsme udělali? Sem jsme napsali k a sem také k. Co jsme měli udělat jinak? Může být k najednou $\frac{2}{3}$ a 3?“

Ž: „Musí tam být jiné písmenko.“

U: „Tak. Pokud já to chci spočítat, třeba v přímce p nechám parametr k, ale parametru v přímce q budu říkat třeba t. Protože číslo, které potřebuju do přímky p, musí být obecně jiné než číslo, které potřebuju do přímky q. Takže musím používat dvě různá písmena. Tak si tam napište, proč to nevyšlo. Udělejte si tam ten obrázek a napište si, že parametr do přímky p je jiný než parametr do přímky q.“

Poté zapsal učitel na tabuli rovnice přímek znovu, nyní každou s jiným parametrem. Společně soustavu dopočítali a dosadili parametry jak do rovnic přímky p, tak přímky q. Ukázali si tak, že vyjde jen jeden průsečík a nezáleží na tom, z které rovnice se souřadnice dopočítávají.

První situace, kdy se v hodině DB objevily dvě parametricky zadané přímky a bylo třeba použít dvě různá označení parametru, nastala ve druhé hodině (Parametrická rovnice přímky – procvičování) při řešení již výše zmiňované druhé úlohy (cílem bylo zjistit, zda jsou dvě přímky dané parametricky totožné). Rovnice přímek v této úloze byly zadané, v první bylo použito písmeno t, ve druhé s. Následuje ukázka vysvětlení smyslu rozdílných označení parametrů.

U: „Protože budeme zkoumat, jestli je tato přímka *(p)* a tato přímka *(q)* totožná, tedy jsou to dvě parametrická vyjádření stejné přímky, tak si do té druhé nemůžu dosadit jako parametr také t, ale dosadím si tam jiné písmenko. Většinou se používá s.“

Ve čtvrté úloze stejné hodiny bylo úkolem sestavit parametrické rovnice dvou přímek daných bodem a vektorem a určit jejich průsečík.

U: „Chci spočítat jejich společný bod. Ten bod o x-ové a y-ové souřadnici leží na obou přímkách. Jeho souřadnice musí vyhovovat rovnici této přímky, ale i současně této přímky.“

Ž: „Tak si to dáme do rovnosti.“

U: „Výborně. My to dáme do rovnosti – x-ové souřadnice se sobě musí rovnat a y-ové také. Protože když ten bod spočítám, tak vyjde třeba $[1; 2]$, ale tady mi to musí vyhovovat a tady taky *(ukazuje na rovnice přímek p a q)*, protože on leží současně na obou přímkách. Co mi vznikne, když to položím sobě rovno?“

Ž: „Soustava rovnic o dvou neznámých.“

U: „Výborně. O dvou neznámých – o těch parametrech.“

Následovalo společné řešení soustavy rovnic. Jako první žáci vypočítali hodnotu parametru s.

U: „Ono už to s by nám stačilo k určení toho průsečíku. Dosadila bych ho do rovnice přímky q a spočítala to x a y. Ale dopočítáme pak ještě to t a ověříme si, že to musí platit.“

V oddíle 4.3.1 je ukázka řešení první úlohy na začátku třetí hodiny, kde se znovu zjišťují souřadnice průsečíku dvou přímek. Žákyně dosazuje postupně oba parametry, vypočítá samozřejmě dvakrát stejné souřadnice a označí je jako dva různé body. Učitelka jí v průběhu několikrát zopakuje, že se jedná o ten samý bod, nemá tedy smysl dosazovat parametry do obou rovnic. Nic podobného jsem v hodinách MK nezaznamenala (nelze samozřejmě vyloučit, že k tomu došlo někdy později, kdy jsem na náslechu již nebyla).

Za zmínku stojí také druhá úloha MK v páté hodině (Vzájemná poloha parametricky vyjádřených přímek II). Úkolem bylo určit průsečíky dvou přímek zadaných parametricky a na základě výsledku rozhodnout, jaká je jejich vzájemná poloha. Většina žáků samostatně dospěla k závěru, že přímky jsou rovnoběžné, protože jim ze soustavy rovnic vyšlo, že nemá řešení. Určování vzájemné polohy dvou přímek pomocí počtu společných bodů se u DB objevilo až na poslední hodině (Procvičování rovnice přímky) při řešení třetí úlohy, kde bylo úkolem určit vzájemnou polohu dvou přímek, když jedna je dána obecně a druhá parametricky. Úlohu žáci nejprve vyřešili tak, jak byli zvyklí – rozhodnutím, zda je směrový vektor jedné přímky násobkem směrového vektoru druhé přímky a dosazením souřadnic bodu. Pak učitelka ukázala i možnost řešení pomocí počtu společných bodů.

e) Zavedení obecné rovnice přímky

Jak již bylo zmíněno výše, DB provedla výklad obecné rovnice přímky již ve třetí vyučovací hodině věnované tématu analytické geometrie přímky. Předvedla žákům dva různé způsoby, jak lze k obecné rovnici přímky dospět. První způsob spočíval v odstranění parametru z parametrických rovnic. Učitelka pracovala s parametrickým vyjádřením konkrétní přímky, po odstranění parametru a převedení do nulového tvaru ukázala na konkrétním bodě, že vyhovuje jak původní parametrické rovnici, tak nové obecné rovnici přímky, a zdůraznila, že se jedná o stále stejnou přímku, ale pouze o její jiné vyjádření. Poté žákům nadiktovala definici obecné rovnice přímky a přešla na výklad normálového vektoru.

Načrtla na tabuli přímku, souřadnice bodu na přímce a směrového vektoru, které žáci vyčetli z parametrického vyjádření, z něhož vycházeli. Ze vzniklé obecné rovnice pak učitelka vypsala koeficienty a a b jako souřadnice vektoru, který označila $\vec{n}$ a nazvala jej normálovým vektorem. Žáků se poté zeptala na vztah vektoru směrového a normálového. Několik žáků správně odpovědělo, že jsou na sebe kolmé. Učitelka pak definovala normálový vektor přímky jako vektor na přímku kolmý a zdůraznila, že souřadnice normálového vektoru odpovídají koeficientům a a b v obecné rovnici přímky.

Následoval výklad druhého způsobu sestavení obecné rovnice přímky. DB vyšla ze směrového vektoru, výměnou souřadnic a změnou znaménka u jedné z nich vytvořila vektor normálový. Jeho souřadnice pak dosadila do obecné rovnice a vysvětlila, že neznámý koeficient c lze dopočítat dosazením souřadnic libovolného bodu za x a y. Následovala úloha, kde bylo cílem ze zadané parametrické rovnice vytvořit rovnici obecnou. Po vyřešení úlohy ještě učitelka předvedla, že osamostatněním y na jedné straně rovnice vznikne lineární funkce.

V následující hodině stručně shrnula poznatky týkající se obecné rovnice a nadiktovala žákům „obecný postup sestavení obecné rovnice přímky“. Žáci si zapsali do sešitů následující body:

1) Určíme směrový vektor přímky p neboli AB, který má souřadnice $\vec{u}_p = (u_1; u_2)$
2) Určíme normálový vektor přímky p: $\vec{n}_p = (n_1; n_2)$, tím máme dané koeficienty a, b v obecné rovnici přímky
3) Do obecné rovnice přímky dosadíme souřadnice jednoho z bodů A, B a určíme poslední koeficient c v obecné rovnici přímky.

U MK se obecná rovnice přímky objevuje poprvé až v šesté hodině. Hodina začíná jako obvykle samostatnou prací žáků. Řeší úlohu, kde mají parametricky zapsat přímku danou dvěma body, zakreslit do kartézské soustavy a najít její další vyjádření. Učitel upozorňuje na to, že jiné vyjádření přímky by mělo být jasné z obrázku a dávno už ho znají. Několik žáků si vzpomnělo na lineární funkci. Zapsali si pak přímku i ve tvaru $y = ax + b$.

> U: „Obě rovnice vyjadřují stejnou přímku, jedná se jen o jiné vyjádření. Musí být tedy možné nějakým způsobem převést jeden na druhý. Zkusíme nejdříve převést ty dvě rovnice *(parametrické vyjádření)* na tu jednu. Jak by se to dalo udělat? Jaký je mezi nimi rozdíl? V obou jsou čísla, x, y, ale v té parametrické je ještě navíc k.“
>
> Ž: „Z jedné si vyjádřím to k a dám ho do druhé.“

Odstranění parametru prováděli žáci zase samostatně. Učitel pak vyvolal diskuzi k otázce, proč je možné popsat přímku i jiným způsobem. Zopakoval, že u parametrického vyjádření byl potřeba bod a směr, a zeptal se, jak jinak lze ještě sestavit přímku.

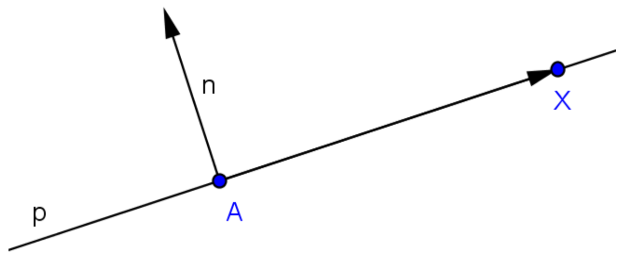
U: „My jsme ten způsob používali, když jsme rýsovali. Buď jste měli dva body, nebo?“

Ž: „Rovnoběžku.“

U: „A to je přesně toto – bod a směr. A ještě jiný způsob?“

Ž: „Kolmici.“

U: „Ano, můžeme ji také zadat pomocí bodu a směru, který je na přímku kolmý. Vektoru, který ten směr určuje, už neříkáme směrový, protože je na přímku kolmý, ale normálový.“ *(Kreslí situaci na tabuli.)*



U: „Z této situace bychom potřebovali získat rovnici, ze které bude možné poznat, jestli bod X na přímce je, nebo není. Pomocí normálového vektoru a bodu A.“ *(Doplňuje do obrázku vektor $X - A$.)*

U: „Čím je ten vektor $X - A$ zvláštní vzhledem k tomu $\vec{n}$?“

Ž: „Je kolmý.“

U: „Tak. Kdykoli bod X bude ležet na té přímce, budou na sebe kolmé. A jak poznáme, že jsou na sebe dva vektory kolmé?“

Ž: „Jejich skalární součin je nula.“

Výpočet předvedl učitel na tabuli nejprve na předchozí konkrétní úloze, poté i obecně.

$$\vec{n} \cdot (X - A) = (a, b) \cdot (x - a_1, y - a_2) = 0$$

$$a(x - a_1) + b(y - a_2) = 0$$

$$ax + by - aa_1 - ba_2 = 0$$

$$ax + by + c = 0$$

Následně shrnul, že takto lze popsat jakoukoli přímku v rovině, že se rovnici říká obecná a také důvod, proč nesmí být koeficienty a, b rovny nule. Hodina pokračovala samostatnou prací žáků, kteří si měli přečíst v učebnici modrý rámeček (popisuje obecnou rovnici přímky a zároveň vysvětluje, jak lze získat koeficienty a, b, c), poté řešit úlohy – vytvořit obecnou rovnici přímky, zjistit, zda na ní leží dané body atd. (viz tabulka 3.2).

Při dopočítávání koeficientu c učitel ukázal, že nezáleží na tom, který bod přímky se do rovnice dosazuje – postupně dosadil oba. Většinou neměli žáci se zápisem obecných rovnic problém. Někteří používali k vytvoření rovnice postup přes skalární součin vektorů. Ke konci hodiny ještě narazili na to, že obecnou rovnici lze vynásobit libovolným číslem, přitom se stále jedná o stejnou rovnici. Učitel napsal na tabuli různé rovnice, které ve třídě viděl, a zeptal se, zda jsou všechny správně.

Ukázka dokumentuje charakteristické prvky pro pojetí výuky DB i MK. Aby žáci, dle slov DB, nezapomněli, jak se obecná rovnice přímky vytváří, nadiktovala jim přesný postup, který si stačí pamatovat a dodržovat. Žáci MK naopak i první obecnou rovnici přímky vytvářeli sami – způsob určení koeficientů a, b, c byl obecně popsán v modrém rámečku, který si měli přečíst, zamyslet se nad jeho významem a následně samostatně pracovat na úloze, kde bylo třeba tyto poznatky použít.

f) Zavedení směrnicové rovnice přímky

Směrnicové rovnici přímky věnoval MK jednu vyučovací hodinu na závěr tématu. V úvodu hodiny shrnul způsoby, kterými již žáci umí přímky zapsat (parametrickou a obecnou rovnici), a zároveň komentoval smysl těchto zápisů a důvod, proč je vhodná ještě třetí (směrnicová) rovnice. V následující ukázce lze nahlédnout, jak učitel pracuje s předchozími zkušenostmi žáků s lineární funkcí.

> U: „Jestli si vzpomínáte, začínali jsme parametrickým vyjádřením přímky. A nepříjemná věc na tomto vyjádření byla, že je velice nejednoznačné. Mohli jsme volit různé body, různé tvary směrového vektoru, takže když jsme napsali dvě přímky parametricky, mnohdy nebylo jasné, jestli to jsou dvě stejné přímky nebo dvě různé přímky.
>
> Obecná rovnice, to byl krok vpřed. Tam už je to jednoznačnější. Ale přesto to bylo tak, že jsme měli třeba tuto přímku *(píše na tabuli obecnou rovnici konkrétní přímky)* a tuto přímku bylo možné zapsat ještě jinými způsoby. Stačí ji vynásobit nějakým nenulovým číslem, jedná se stále o rovnici stejné přímky, ale je zapsaná jinak.
>
> Takže ještě nejsme v cíli. My bychom potřebovali zápis jednoznačný. Napadlo by někoho z vás, jak to zařídit? Jak vylepšit tu rovnici, aby způsob, jak zapsat přímku byl jen jeden, a tudíž bylo hned jasné, která přímka to je? *(Čeká na odpověď žáků.)* Někteří z vás tento zápis používali spontánně nedávno, všichni jste ho z donucení používali kdysi dávno.“
>
> Ž: „Lineární funkce.“
>
> U: „Tak, jestli si vzpomenete na lineární funkci, její předpis byl jednoznačný. Jakmile jsme měli předpis, tak jsme věděli, která funkce to je. Předpis lineární funkce vypadal takhle, ne?

(Píše na tabuli $y = ax + b$.) Tak jak z této rovnice dostaneme něco podobného?“ *(Píše na tabuli $ax + by + c = 0$.)*

Ž: „Vyjádříme y.“

U: „Tak vyjádřete y.“ *(Nechává žáky samostatně pracovat.)*

U: „Musíme být trochu opatrní, protože jsou tam písmenka. Tak já to udělám.“ *(Píše na tabuli:)*

$$ax + by + c = 0 \quad / -ax - c$$

U: „Můžu toto udělat vždy?“ *(Žáci souhlasí, MK píše na tabuli další krok:)*

$$by = -ax - c \quad / : b$$

U: „Můžu toto udělat vždy?“

Ž: „Nesmíme dělit nulou.“

U: „Napíšu si podmínku, že b se nesmí rovnat nule.“ *(Píše na tabuli podmínku a další krok:)*

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

U: „Proč jsem to napsal takhle? Vy tam většinou máte, že $y = \frac{-ax-c}{b}$, já jsem to roztrhl na dvě části. Proč?“

Ž: „Abys tam měl jakoby ty dva členy.“

U: „Tak. Abych tam měl ty dva členy, co jsme měli u lineární funkce. Takže já to můžu napsat tímto způsobem: $y = kx + q$. Ten zlomek $-\frac{a}{b}$ je to k a $-\frac{c}{b}$ je to q. A toto je již jednoznačné. Je to vlastně předpis lineární funkce, jen tam máme jiná písmenka. Jediný problém tady je tohle, ne? *(Ukazuje na podmínku $b \neq 0$.)* To znamená, že jsou rovnice, které obecně zapsat jdou, ale nemůžeme je převést do tohoto *(směrnicového)* tvaru. Jak ty rovnice vypadají? Napište nějakou konkrétní přímku, co nejjednodušší, která by takto zapsat nešla.“

Žákyně navrhla přímku vyjádřenou rovnicí $2x + 3 = 0$, učitel navrhl přímku $x - 1 = 0$, která je ještě jednodušší, a nechal žáky, ať postupně obě přímky zakreslí. Následující ukázka je z krátké diskuze, která následovala.

U: „Jakou vlastnost mají přímky, které nelze zapsat tímto způsobem?“

Ž: „Nejsou to funkce.“

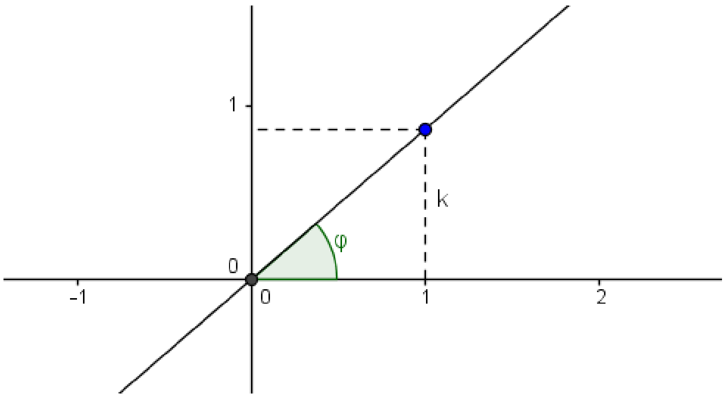
U: „Ano, nejsou to funkce. A když se podíváte na ten obrázek?“

Ž: „Jsou kolmé na x.“

U: „Takže tato podmínka *($b \neq 0$)* nám říká – takto nezapíšeš přímky, které jsou kolmé na osu x. A přímky, které jsou kolmé na osu x, to jsou ty, které nejsou funkce. Tak si to k tomu napište.“

Učitel se pak vrátil k rovnici $y = kx + q$ a stále v návaznosti na lineární funkci kladl žákům otázky na význam konstant k a q. Několik žáků odpovědělo, že k udává, jak je přímka natočená, a q, jestli je posunutá nahoru nebo dolů. Učitel poté uvedl, že konstantě k se říká směrnice právě z důvodu, že souvisí s natočením (neboli směrem) přímky. Pro porovnání s výkladem DB dále následuje ještě ukázka, kde se MK věnuje směrnici přímky.

> U: „Nás ještě zajímá to, jakým způsobem to k ten směr udává. Z jaké přímky bychom to zjistili nejsnáze? Asi z takové, kde bych si za q dal nulu, ne? Tedy $y = k \cdot x$. Kterými body bude tato přímka procházet?“
>
> ŽŽ: „$[0; 0]$.“
>
> U: „Určitě bod $[0; 0]$ a ještě nějaký – jednoduchý? Když bude x-ová souřadnice jedna, tak druhá souřadnice bude kolik?“ *(Kreslí obrázek.)*
>
> Ž: „k.“



> U: „A já se teď ptám, jak to k udává ten směr. Tady je k, tady je jedna. *(Ukazuje na tabuli.)* A poměr $\frac{k}{1}$ v tom trojúhelníčku znamená co? *(Čeká na odpověď žáků.)* Určitě je to přilehlá a protilehlá. To jsou jaké funkce?“
>
> Ž: „Tangens a kotangens.“
>
> U: „A která z nich to je?“
>
> ŽŽ: „Tangens.“
>
> U: „Takže si napište, že ta směrnice přímo udává tangens úhlu, který ta přímka svírá s osou x.“

Hodina pokračovala samostatnou prací žáků. Nejprve řešili úlohu, kde bylo úkolem převést obecnou rovnici přímky na směrnicový tvar a určit její odchylku od kladné poloosy x. Následovala úloha, kdy byla dána směrnice a souřadnice bodu, kterým přímka prochází, a úkolem bylo zapsat jak směrnicovou rovnici přímky, tak obecnou rovnici. Stejnou úlohu pak měli vyřešit ještě obecně, tedy zapsat směrnicovou rovnici přímky, která má směrnici k a prochází bodem $A[a_1; a_2]$.

Ž: „Takže to k tam zůstane?“

U: „To tam bude pořád figurovat. Jen to potřebujeme dostat do nějakého tvaru, kde budou vystupovat ty souřadnice toho bodu A.“

Učitel nechal žáky samostatně pracovat, pak s komentářem ke každému kroku provedl postup na tabuli. Souřadnice bodu A dosadil do rovnice $y = kx + q$ za x a y, vyjádřil q, a to pak znovu dosadil do rovnice $y = kx + q$.

U: „Výsledek, který já jsem po vás chtěl, je $y = kx - k \cdot a_1 + a_2$. Na tom není nic extra zajímavého, ale já ten výsledek trochu upravím a získám tak něco, co se naopak používá docela často. Když si to a_2 přesunu na druhou stranu, co by šlo udělat vpravo?“

ŽŽ: „Vytknout.“

U: *(Píše na tabuli:)*

$$y - a_2 = k(x - a_1)$$

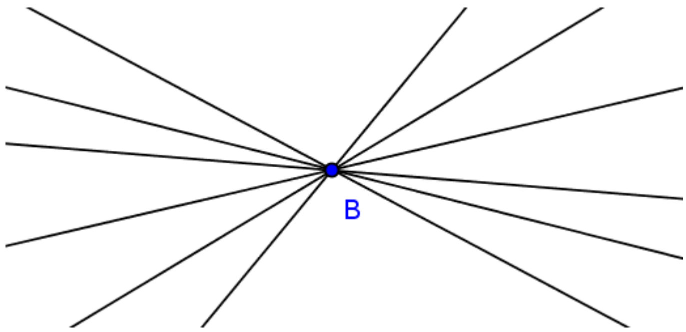
U: „Tenhle tvar je docela důležitý a my ho budeme často používat. Je to přímka se směrnicí k procházející bodem $A[a_1; a_2]$. Tento tvar je zajímavý tím, že je na první pohled vidět, že to vyjde. Že doopravdy tato přímka tím bodem A prochází. Zkuste se na to podívat, jestli by vás napadlo, proč je hned jasné, že bod A leží na té přímce. Má někdo nějaký nápad? *(Žádný žák se nepřihlásil.)* Tak vezměte ten bod a dosaďte ho do té rovnice. Uvidíte, co to udělá. *(Prochází mezi žáky.)* Takže vyjde co?“

Ž: „Vyjde, že nula se rovná nule.“

U: „Tak. To je ono. Já když potřebuji zapsat rovnici přímky, která prochází nějakým bodem a znám jeho souřadnice, tak můžu napsat tohle. *(Ukazuje na rovnici.)* Proč? Protože když ten bod se do rovnice dosadí, levá strana se mi vynuluje a pravá taky.

Důvod, proč to tady řešíme, je, že ta rovnice se docela často používá, ale lidé si nepamatují, jak se píše. Jenže je to úplně jasné. Já napíšu tu rovnici tak, aby mi ty závorky vyšly. Vlevo $y - a_2$, protože a_2 je souřadnice, kterou budu dosazovat za y, a vpravo $x - a_1$, protože a_1 je souřadnice, kterou budu dosazovat za x. A k si sem můžu napsat libovolné, na tom už stejně nezáleží, a vyjde $0 = k \cdot 0$. Je to srozumitelné?

Tento tvar se používá, když chceme napsat všechny přímky, které prochází nějakým bodem. Tentokrát vezmeme bod $B[b_1; b_2]$. Rovnice přímky, která bude procházet tímto bodem, bude vypadat takhle: $y - b_2 = k(x - b_1)$. Ale musí být všechny. Ty přímky by měly vypadat nějak takhle.“ *(Kreslí obrázek.)*



U: „Co se může u těch přímek měnit?“

ŽŽ: „k.“

U: „Tak. To může být jakékoli reálné číslo. *(Píše na tabuli $k \in \mathbb{R}$.)* Jsou teď ty přímky procházející bodem B všechny, nebo tam něco chybí? *(Čeká na odpověď žáků.)* Když se ptám, tak to znamená co?“

ŽŽ: „Že tam něco chybí.“

U: „Tak. Nikdo neříká, co tam chybí. Kdo to ví, tak si napíše, ostatní přemýšlí. Souvisí to s tím, co jsme si říkali na začátku hodiny. *(Odmlčí se.)* Říkali jsme si, že směrnicový tvar je sice jednoznačný, ale nelze jím zapsat všechno. Takže jaká přímka tam chybí?“

Ž: „Rovnoběžná s y.“

U: *(Kreslí přímku do obrázku na tabuli.)* „A ta má jakou rovnici?“

Ž: „$x = b_1$.“

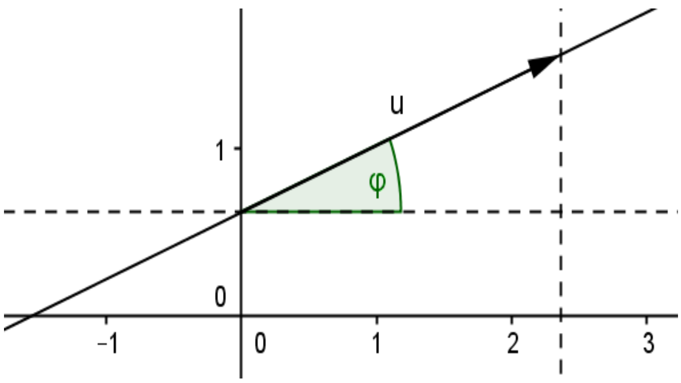
U: „Takže pokud chci zapsat všechny přímky procházející nějakým bodem, použiju tohle, ale musím tam přidat ještě tu jednu kolmou *(na osu x)*. A na tu se vždycky zapomíná.“

Následovala samostatná práce žáků na úloze, kde bylo cílem zapsat všechny přímky procházející daným bodem. Hodinu učitel zakončil diskuzí o souvislosti směrnice a směrového vektoru přímky.

U: „Řekli jsme si, že směrnice udává směr přímky. Jak jsme udávali směr přímky před tím?“

Ž: „Směrovým vektorem.“

U: „Jestliže směrnice udává směr a směrový vektor také, tak by mělo být možné z jednoho vypočítat to druhé. Jak tedy převedeme tu směrnici na směrový vektor?“ *(Píše na tabuli k a $\vec{u} = (u_1; u_2)$ a kreslí obrázek.)*



U: „Kde v tom obrázku je u_1 a u_2? To jsou souřadnice ne? u_1 je x-ová souřadnice a u_2 je y-ová souřadnice toho vektoru. A my jsme si říkali, že k je tangens toho úhlu φ, tak jak se to dá spočítat pomocí souřadnic toho vektoru?“

Ž: „$\operatorname{tg} \varphi = \frac{u_2}{u_1}$.“

U: „Tak. Nejsem si jistý, jestli toto je věc, kterou si budete pamatovat, ale stačí chápat ten obrázek.“

Že (alespoň někteří) žáci obrázek pochopili, se potvrdilo v závěrečném testu, kdy si tři žáci MK ve třetí části první úlohy pravoúhlý trojúhelník s daným vektorem a požadovaným úhlem skutečně nakreslili (viz oddíl 4.4.1).

Směrnicovému tvaru rovnice přímky věnovala DB část šesté a sedmou vyučovací hodinu. Podobně jako MK přirovnává žákům směrnicovou rovnici přímky k lineární funkci. Úvodní část výkladu DB přibližuje následující ukázka.

> U: „Dnes vám vysvětlím další, a to poslední typ rovnice přímky, která by vám měla být bližší, protože jste se s ní setkali již v prvním ročníku, když jste měli lineární funkci. Akorát si tam ta písmenka teď nazveme trošku jinak. Jmenuje se to směrnicový tvar rovnice přímky a já bych to udělala na konkrétním příkladu, abychom měli takový přehled. Čím jsme začali, pak jsme měli obecnou rovnici přímky, a teď bude její vyjádření ve směrnicovém tvaru. Pořád se bude jednat o stejnou přímku, ale můžu jí zapsat třemi různými způsoby."

Učitelka pak zapsala na tabuli parametrickou rovnici konkrétní přímky a zrekapitulovala způsoby, kterými lze z parametrické rovnice získat rovnici obecnou (vyloučením parametru a přes normálový vektor). Převod parametrické rovnice na obecnou předvedla na výše zmíněné konkrétní přímce. Žáci sledovali práci učitelky, jednotlivé kroky si z tabule opisovali do sešitu. Poté přešla DB k výkladu rovnice směrnicové.

> U: „Směrnicovou rovnici získám jednoduše tak, že na jedné straně osamostatním y a to, čemu se rovná, vyjádřím pomocí proměnné x a toho koeficientu. *(Převádí na tabuli do směrnicového tvaru rovnici přímky, se kterou pracuje.)* Tento tvar se nazývá směrnicová rovnice přímky. Vzpomínáte si, že jste to někdy už slyšeli? Ten tvar $y = ax + b$?"
>
> ŽŽ: „Ano."
>
> U: „To je lineární funkce. A grafem lineární funkce je právě…"
>
> Ž.: „Přímka."

Získanou rovnici přímky pak učitelka využila k jejímu zakreslení do kartézské soustavy souřadnic. Připomněla žákům znovu lineární funkci a jeden způsob, jak lineární funkci zakreslit – dopočítáním průsečíků s osami. Převod obecného tvaru rovnice přímky na směrnicový pak učitelka provedla i obecně, žáci si jednotlivé kroky, které prováděla na tabuli, opisovali do sešitu.

> U: „Teď si to předvedeme obecně a zavedeme si tam nový pojem – toto číslo bude takzvaná směrnice a toto úsek, který ta přímka vytíná na ose y. *(Ukazuje na koeficienty v rovnici konkrétní přímky na tabuli.)* Máme tedy obecný tvar rovnice $ax + by + c = 0$ a budeme postupovat stejně jako před chvílí – y osamostatníme vlevo." *(Provádí jednotlivé kroky na tabuli.)*

$$by = -ax - c$$

U: „Protože chci ale samostatné y, musíme rovnici vydělit b. A teď pozor. Sice bych to mohla napsat celé lomeno b, ale já se chci přiblížit tomuto tvaru *($y = ax + b$)*, takže já si to napíšu zvlášť."

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

U: „Tohle nechci, abyste si pamatovali zpaměti. Vždycky, když budete mít obecnou rovnici, dokážete do tohoto tvaru přejít. Podstatné je, že to číslo u x budeme označovat jako směrnici a toto číslo (ukazuje na podíl $-\frac{c}{b}$) budeme psát jako q. Takže přímku ve směrnicovém tvaru budeme psát $y = kx + q$, kde to k a q budou nějaká reálná čísla."

Zásadní rozdíl oproti MK se v odvození směrnicového tvaru rovnice z obecného se objevil ve chvíli, kdy DB dělí rovnici koeficientem b a nijak nekomentuje možnost, že by mohl být nulový. DB samozřejmě dále v hodině uvádí, že některé přímky směrnicovou rovnicí vyjádřit nelze, chybí však jakékoli vysvětlení.

U: „Může se také stát, že k bude nulové. Pak budeme mít přímku $y = q$. Co je to za přímku?"

ŽŽ: „Konstantní."

U: „Výborně. A jakou má tato přímka polohu vůči systému souřadnic?"

Ž: „Je rovnoběžná s osou x."

U: „Výborně. *(Kreslí přímku rovnoběžnou s osou x na tabuli.)* Pro jakékoli x je y stále stejné, neměnné, konstantní. Takže k může být nula. Ale přímky mohou být také takto *(kreslí rostoucí přímku)* nebo takto *(kreslí přímku klesající)*, ale ještě jsem sem nějakou přímku nezakreslila. Jakou?"

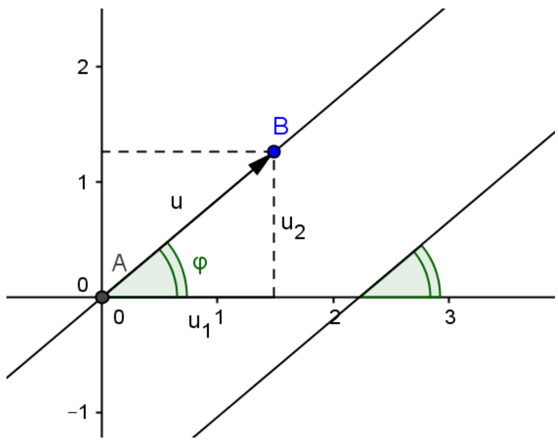
Ž: „Rovnoběžku s y."

U: „Tak. Dokážeme takovou přímku vyjádřit v tom tvaru $y = k \cdot x + q$? Třeba když tady bude mínus dvojka *(ukazuje na obrázek)*, tak jak zapíšu rovnici té přímky?"

Ž: „$x = -2$."

U: „Přesně tak. Jedině přímka, která je rovnoběžná s osou y, ta ten směrnicový tvar nemá."

Na začátku následující vyučovací hodiny učitelka zopakovala na dvou konkrétních rovnicích převod obecného tvaru na směrnicový a terminologii. Navázala výkladem geometrického významu směrnice. Na tabuli načrtla obrázek, který komentovala.



U: „Tu přímku zakreslím tak, aby procházela počátkem. Tato přímka je dána dvěma body. Já bych vám chtěla vysvětlit, jak ta směrnice souvisí se směrovým a normálovým vektorem a já si vektor můžu po přímce libovolně posouvat, tak já ho umístím přímo do počátku. Body A, B mi určují ten směrový vektor. A jak se vypočítá souřadnice směrového vektoru ze dvou bodů? Bod A má obecně souřadnice a_1, a_2, bod B má souřadnice b_1, b_2.

Já si tady v tom obrázku vytvořím pravoúhlý trojúhelník. Co v tom trojúhelníku je teď toto – vůči tomu vektoru $\vec{u}$? *(Ukazuje na odvěsny trojúhelníka.)* To je nějaká délka úsečky, jejíž velikost se spočítá jako co? $b_1 - a_1$. A to je vůči vektoru co? No jeho první souřadnice, tedy u_1. Stejně tak délka té druhé úsečky je $b_2 - a_2$, tedy u_2. A toto je úhel, který přímka svírá s kladnou poloosou x. Označíme si jej φ.

A když se na to podíváme, tak vy víte, že tangens toho úhlu – řekla jsem tangens, protože chci využít souřadnice toho směrového vektoru, tedy poměr protilehlé odvěsny k přilehlé – je poměr čeho?“

Ž: „$\frac{u_2}{u_1}$.“

U: „ To je ze směrového vektoru, ale v minulé hodině jsme pracovali s koeficienty z obecné rovnice, vyjádřili jsme si, že $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. Tedy směrnice je z normálového vektoru podíl $-\frac{a}{b}$. Můžeme si tedy napsat, že $k = \operatorname{tg} \varphi = \frac{u_2}{u_1} = -\frac{a}{b}$. *(Píše na tabuli.)*

Ta přímka samozřejmě nemusí procházet počátkem, ale může být někam v tom systému souřadnic posunutá. Ten úhel pak bude stejný, a když ho budu chtít zjistit, stačí si představit, že si tu přímku do toho počátku posunu.

A pozor. Tady vidíte, že ta přímka je rostoucí. A tangens je pro ostré úhly vždy kladný. Když bude přímka klesající, úhel je tupý a jeho tangens je jaký?“

Ž: „Záporný.“

U: „Ano. Takže směrnice bude záporná. Pod ten obrázek byste si teď ještě napsali to, co je v učebnici, já vám to nadiktuji. *(Nadiktovala definici směrnice.)* A teď si představte, že budu mít dvě přímky, jejichž směrnice budou stejné, co bude pro ty přímky platit? Jaká bude jejich vzájemná poloha?“

Ž: „Rovnoběžky.“

U: „Ano, ten úhel, který svírají s kladnou poloosou x, musí být samozřejmě stejný. Takže si napište, že dvě přímky, které jsou rovnoběžné, mají stejnou směrnici. *(Čeká, až si to žáci napíší.)* A ještě dva poslední obrázky. Nejprve přímka rovnoběžná s osou x. *(Přímku načrtla na tabuli.)* Jak bude vypadat rovnice takovéto přímky ve směrnicovém tvaru?"

Ž: „Je konstantní."

U: „Takže ta směrnice, aby tohle *(kx)* vypadlo, bude…"

Ž: „Nula."

U: „A to souvisí s tím úhlem. Protože jaký úhel asi svírá ta přímka s kladnou poloosou x? Když jsou to dvě rovnoběžky, tak říkáme, že nulový, ne? Neboli směrnice k – tangens nuly – je nula. Rovnice této přímky bude jen $y = q$. A napište si, že přímka rovnoběžná s osou x má směrnici $k = 0$.

Pak ještě máme přímku, která je rovnoběžná s osou y. *(Načrtla přímku na tabuli.)* My už jsme na to narazili v minulé hodině. Jakou rovnici by měla tato přímka, kdyby tady byla třeba trojka? *(Ukazuje na průsečíky přímky s osou x na tabuli.)* Ona je taková výjimečná. Každý bod na té přímce má x-ovou souřadnici pořád…"

Ž: „Tři."

U: „Ano. Pořád stejnou. Ypsilonová je pak libovolné reálné číslo. Takže tato přímka má rovnici $x = 3$ a vidíte, že do toho směrnicového tvaru ji vůbec nemůžu napsat, protože to samozřejmě není ani graf lineární funkce. Jaký úhel svírá ta přímka s kladnou poloosou x?"

Ž: „90 stupňů."

U: „A kolik je tangens devadesáti stupňů?"

Ž: „Nula."

Ž: „Jedna."

U: „Tak to zkuste na kalkulačce."

ŽŽ: „Error."

U: „A co to znamená?"

ŽŽ: „Že neexistuje."

U: „Ne. Že není definován. Proč není definován? Jakým podílem je definován tangens?"

Ž: „Sinus lomeno kosinus."

U: „Ano. *(Píše na tabuli $tg\ 90° = \frac{sin\ 90°}{cos\ 90°}$.)* A my víme, že kosinus devadesáti stupňů je kolik? Máte před sebou ty kalkulačky…"

Ž: „Nula."

U: „Ano. Nula. Což nejde ve jmenovateli, ne? Tedy tangens devadesáti není definován, proto vám vysvětluji, že tato přímka tu směrnici nemá. Takže si tam napište, že přímka rovnoběžná s osou y má vždy rovnici x rovná se nějakému číslu a nemá směrnicový tvar."

Rozdílů v zavedení směrnicové rovnice přímky lze pozorovat více. MK se v části hodiny věnoval rovnici $y - a_2 = k(x - a_1)$, kterou DB do výuky nezahrnula. Předpokládám, že důvodem je, že se žáci s rovnicí setkají znovu v tématu kuželosečky. Tuto rovnici se snažilo v závěrečném testu využít několik žáků, ani jeden však k výsledku nedospěl (viz oddíl 4.4.3). Faktem však je, že MK věnoval směrnicové rovnici přímky pouze jednu vyučovací hodinu a žáci s rovnicí pracovali pouze v jedné úloze.

DB naopak oproti MK uvádí pro výpočet směrnice kromě poměru souřadnic směrového vektoru přímky i poměr souřadnic normálového vektoru. Myslím, že vzhledem k tomu, že lze snadno odvodit jeden poměr z druhého, nepovažuje MK za nutné uvádět další „vzorec".

Za porovnání jistě také stojí okamžik, kdy oba učitelé při odvozování směrnicového tvaru rovnice z rovnice obecné při dělení rovnice koeficientem b dělí každý člen zvlášť. DB žákům vysvětlila, proč postupovala tímto způsobem, MK se žáků zeptal, proč si myslí, že takto postupoval. S tím souvisí zásadní rozdíl v pojetí výuky obou učitelů, kdy MK svými otázkami žáky navádí, aby k závěrům dospěli sami. V ukázce z hodiny DB lze pozorovat metodu vysvětlování a žákům kladené otázky jsou spíše uzavřené.

4.3.6 Domácí úkoly

U obou učitelů se liší také pojetí domácích úkolů. DB zadala v průběhu deseti zkoumaných hodin celkem devět úloh za úkol. Osm z nich byly úlohy velmi podobné či přímo shodné (pouze s odlišnými hodnotami) s úlohami, které byly řešeny v hodině. Jedenkrát měli žáci dokončit úlohu, kterou v hodině nestihli vyřešit. Smysl domácích úkolů DB spočívá v tom, že žáci by měli zadanou úlohu řešit doma, tím pádem samostatně, což se v průběhu hodin u většiny žáků často neděje.

MK zadal v devíti zkoumaných hodinách celkem pět úloh za domácí úkol, tedy skoro poloviční množství než DB. Z toho třikrát měli žáci doma dokončit úlohu, kterou v hodině nestihli dořešit. Ve zbylých dvou případech se jednalo o úlohu, se kterou se žáci ještě nesetkali, takže učitel při zadávání úkolu s žáky rovnou prodiskutoval způsob řešení. To souvisí s pojetím výuky MK, kdy je zvládnutí řešení některých úloh z učebnice nutné pro porozumění navazujícímu učivu. Pokud tyto úlohy nestihnou žáci z nějakého důvodu vyřešit v hodině, učitel je zadá za domácí úkol.

4.4 Vyhodnocení závěrečných testů žáků

Závěrečný test obsahoval tři úlohy, přičemž každá měla dvě nebo tři dílčí úlohy. Ve třídě DB vypracovalo test celkem 25 žáků, sedm žáků chybělo. Chyběly také dvě žákyně, které se mi v průběhu náslechů jevily jako jedny z nejaktivnějších. Absence žáků v této třídě byla celkově výrazně vyšší než ve třídě MK. V jedné z hodin (Směrnicový tvar rovnice přímky – procvičování) chybělo dokonce 16 žáků, což byla celá polovina třídy. Jedním z důvodů vysoké absence byla právě probíhající lyžařská sezóna, ale z mého hovoru s učitelkou vyplynulo, že v této třídě obvykle vždy několik žáků chybí. Ve třídě MK vypracovalo závěrečný test 21 žáků, chyběl pouze jeden. Úspěšnost žáků v řešení jednotlivých dílčích úloh závěrečného testu je uvedena v tabulce 4.5.

Tabulka 4.5: Úspěšnost žáků v řešení jednotlivých úloh závěrečného testu

	Třída DB (25 Ž)	Třída MK (21 Ž)
1. a) Zakreslení přímky p (parametrická rovnice).	32 % (8 Ž)	62 % (13 Ž)
Zakreslení přímky q (obecná rovnice).	24 % (6 Ž)	29 % (6 Ž)
b) Určení souřadnic průsečíku přímky p s osami x, y.	20 % (5 Ž)	29 % (6 Ž)
c) Určení odchylky přímky q od kladné části osy x.	24 % (6 Ž)	38 % (8 Ž)
2. a) Určení vzájemné polohy přímek (různoběžky).	44 % (11 Ž)	76 % (16 Ž)
b) Určení vzájemné polohy přímek (rovnoběžky).	24 % (6 Ž)	48 % (10 Ž)
3. a) Vyjádření osy strany trojúhelníka směrnicovou rovnicí.	36 % (9 Ž)	5 % (1 Ž)
b) Vyjádření přímky, na které leží výška obecnou rovnicí.	36 % (9 Ž)	38 % (8 Ž)
c) Určení souřadnic paty výšky.	8 % (2 Ž)	48 % (10 Ž)

4.4.1 První úloha

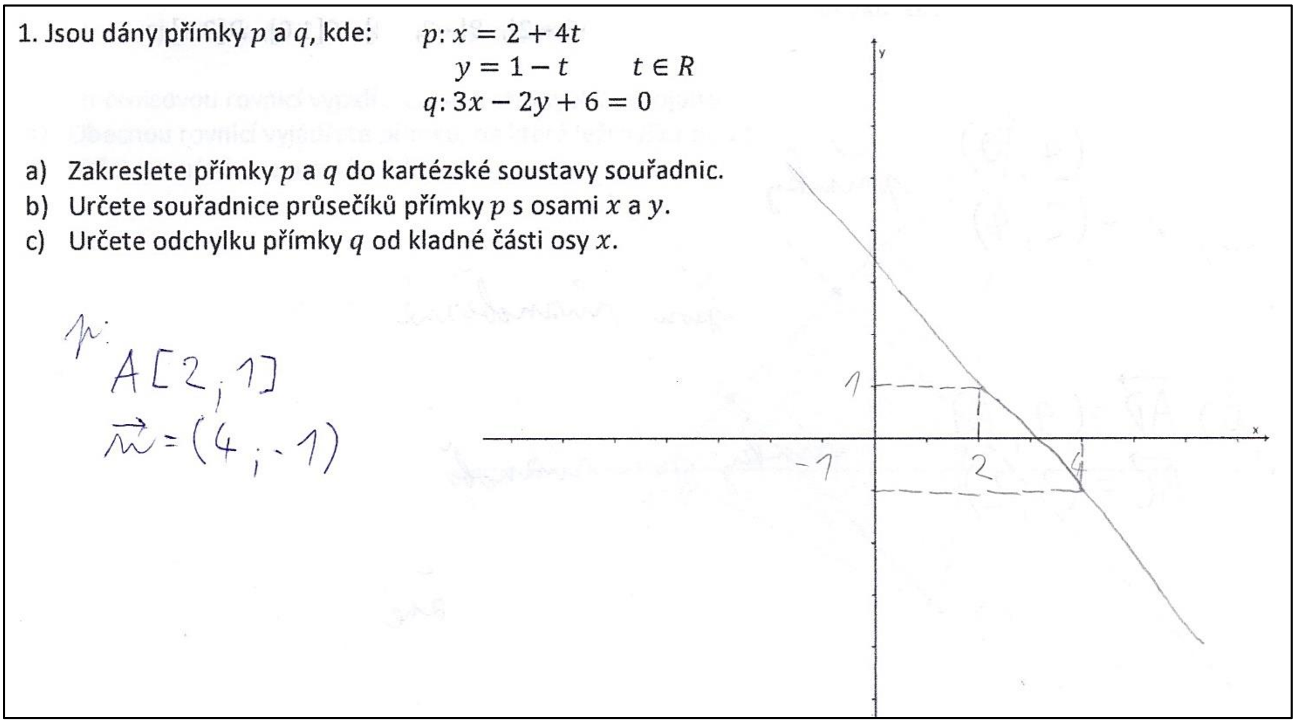
V první úloze byly zadány přímky p (parametrickou rovnicí) a q (obecnou rovnicí) a prvním úkolem bylo zakreslit obě přímky do kartézské soustavy souřadnic. V obou třídách dělalo žákům větší problém zakreslit přímku danou obecně. Správně ji zakreslilo šest žáků DB a šest žáků MK. Přímku danou parametricky zakreslilo ve třídě DB správně osm žáků, ve třídě MK třináct žáků. Myslím si, že zde se projevil rozdíl v množství času, který učitelé věnovali parametrické rovnici přímky. Ten byl, jak už bylo zmíněno výše, u MK dvojnásobný (5 hodin) než u DB (2,5 hodiny).

U obou tříd se také výrazně lišily způsoby řešení úlohy. Žáci DB nejčastěji k zakreslení přímek využívali průsečíky s osami (řešení dalšího dílčího úkolu této úlohy), nebo si dopočítávali souřadnice bodů, které na přímkách leží. Tato řešení se u žáků MK objevovala také, avšak k zakreslení přímky dané parametrickou rovnicí nejčastěji využívali její bod a směrový vektor. Ve třídě DB takto parametrickou rovnici zakreslil pouze jeden žák. Dva žáci MK postupovali podobně dokonce i při zakreslení přímky dané obecně. Využili její směrový vektor a dopočítali souřadnice jednoho bodu. Zde je, dle mého názoru, zřejmé, že větší počet žáků MK chápe smysl směrového vektoru přímky, jsou tedy schopní jej v úloze prakticky využít.

DB v první vyučovací hodině zakreslovala přímku danou parametrickou rovnicí tak, že využila souřadnice bodu, kterým je přímka dána, a dále dopočítala souřadnice dalšího bodu, který na přímce leží. Své řešení komentovala slovy „ono by to pomocí toho vektoru také šlo, ale…“. Myslím, že zakreslení přímky právě pomocí souřadnic bodu a vektoru, které ji určují, by v tu chvíli bylo dokonce z didaktického hlediska přínosnější, protože by byly využity přímo prvky určující parametrickou rovnici přímky.

Několik žáků DB si z parametrické rovnice správně vypsalo souřadnice bodu a směrového vektoru, bod zakreslili, ale nevěděli, co se souřadnicemi vektoru. V testu se pak objevovala chybná řešení, kdy žáci zakreslili souřadnice vektoru do kartézské soustavy jako další bod přímky (tři žáci DB, jeden žák MK – viz obr. 4.1 a 4.2).

Další řešení, které stojí za zmínku, provedli dva žáci DB, kteří si u přímky zadané parametricky zapsali souřadnice bodu, kterým byla přímka zadána, a ty pak vynesli na osy následujícím způsobem – x-ovou souřadnici na osu x a y-ovou souřadnici na osu y. Tyto dva body pak spojili v přímku (viz obr. 4.3). Podobně vyřešil úlohu i jeden žák MK, který stejným způsobem využil pro zakreslení přímky p souřadnic jejího bodu a pro přímku q souřadnice normálového vektoru (viz obr. 4.4).



1. Jsou dány přímky p a q, kde: $p: x = 2 + 4t$

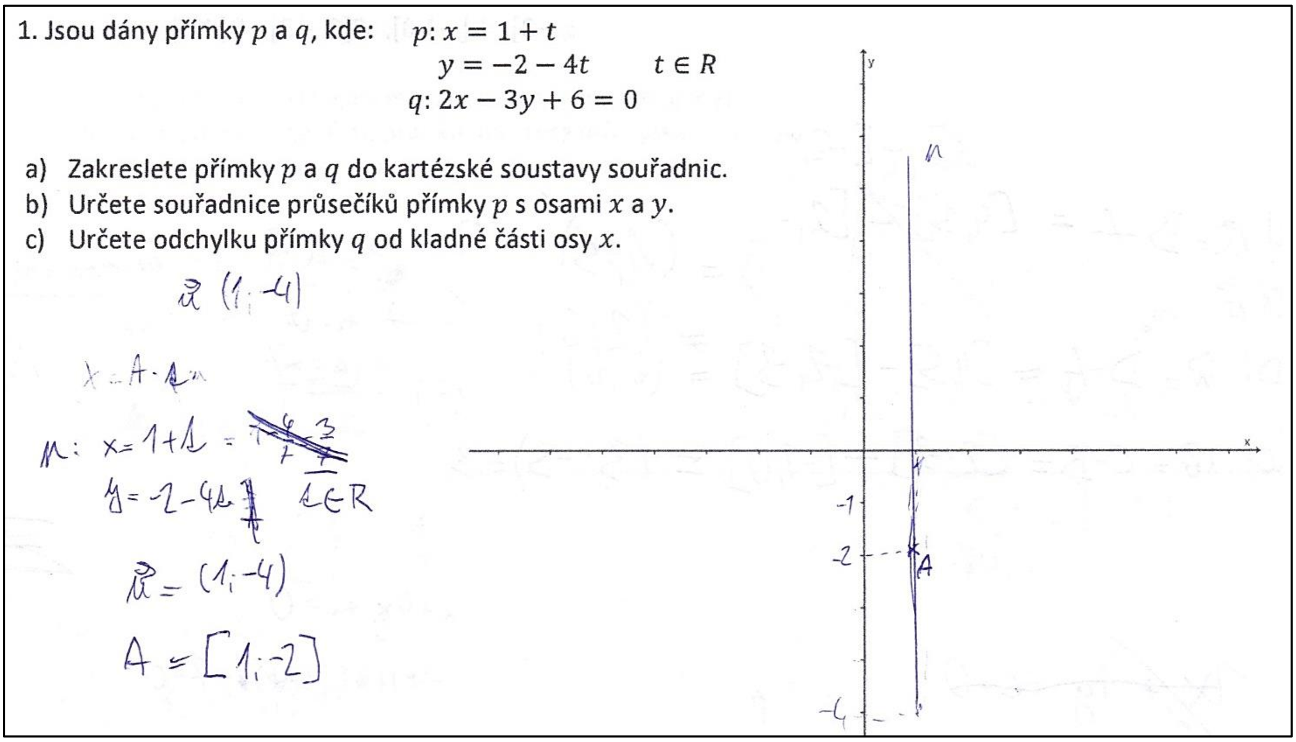
$y = 1 - t \qquad t \in R$

$q: 3x - 2y + 6 = 0$

a) Zakreslete přímky p a q do kartézské soustavy souřadnic.
b) Určete souřadnice průsečíků přímky p s osami x a y.
c) Určete odchylku přímky q od kladné části osy x.

p:
$A[2;1]$
$\vec{u} = (4;-1)$

Obrázek 4.1: Žák DB zakreslil souřadnice směrového vektoru jako souřadnice dalšího bodu přímky



1. Jsou dány přímky p a q, kde: $p: x = 1 + t$

$y = -2 - 4t \qquad t \in R$

$q: 2x - 3y + 6 = 0$

a) Zakreslete přímky p a q do kartézské soustavy souřadnic.
b) Určete souřadnice průsečíků přímky p s osami x a y.
c) Určete odchylku přímky q od kladné části osy x.

$\vec{u}\ (1;-4)$

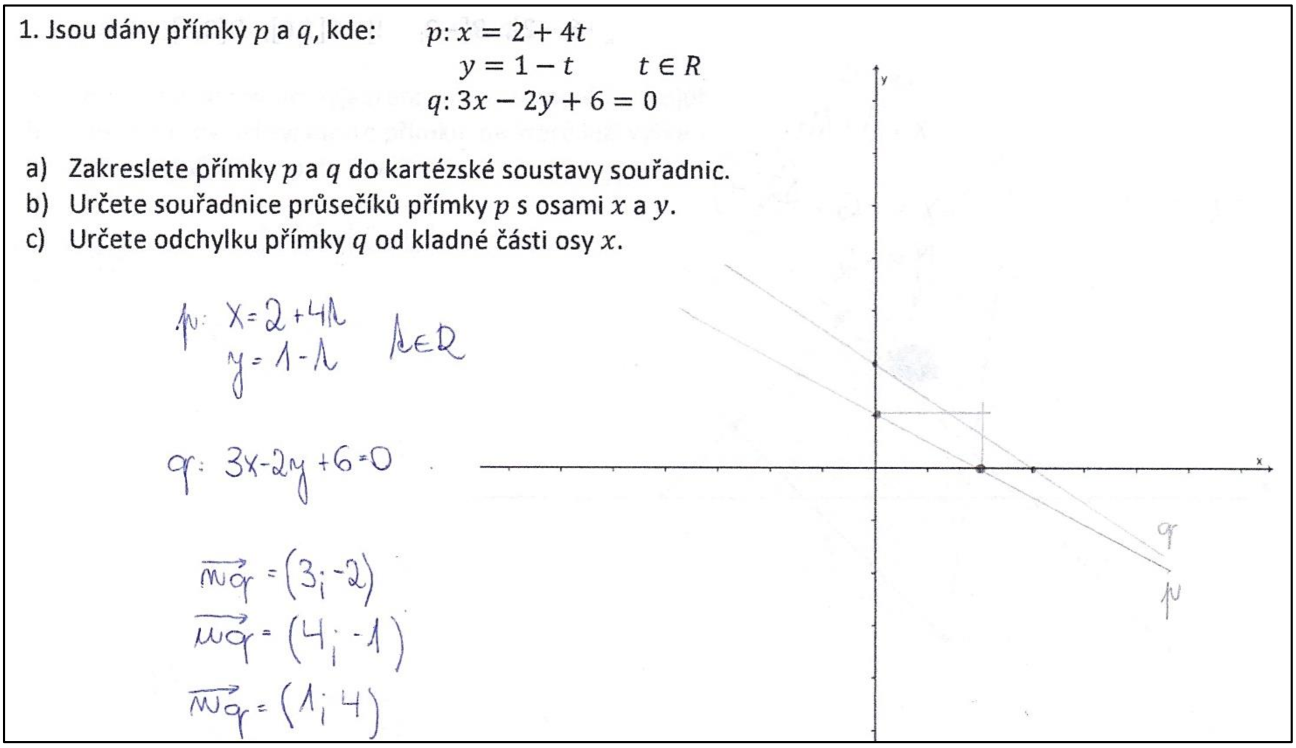
$X = A \cdot \vec{u}$

$p: x = 1 + t$
$y = -2 - 4t \qquad t \in R$

$\vec{u} = (1;-4)$

$A = [1;-2]$

Obrázek 4.2: Žák MK zakreslil souřadnice směrového vektoru jako souřadnice dalšího bodu přímky



1. Jsou dány přímky p a q, kde: $p: x = 2 + 4t$
$y = 1 - t \quad t \in R$
$q: 3x - 2y + 6 = 0$

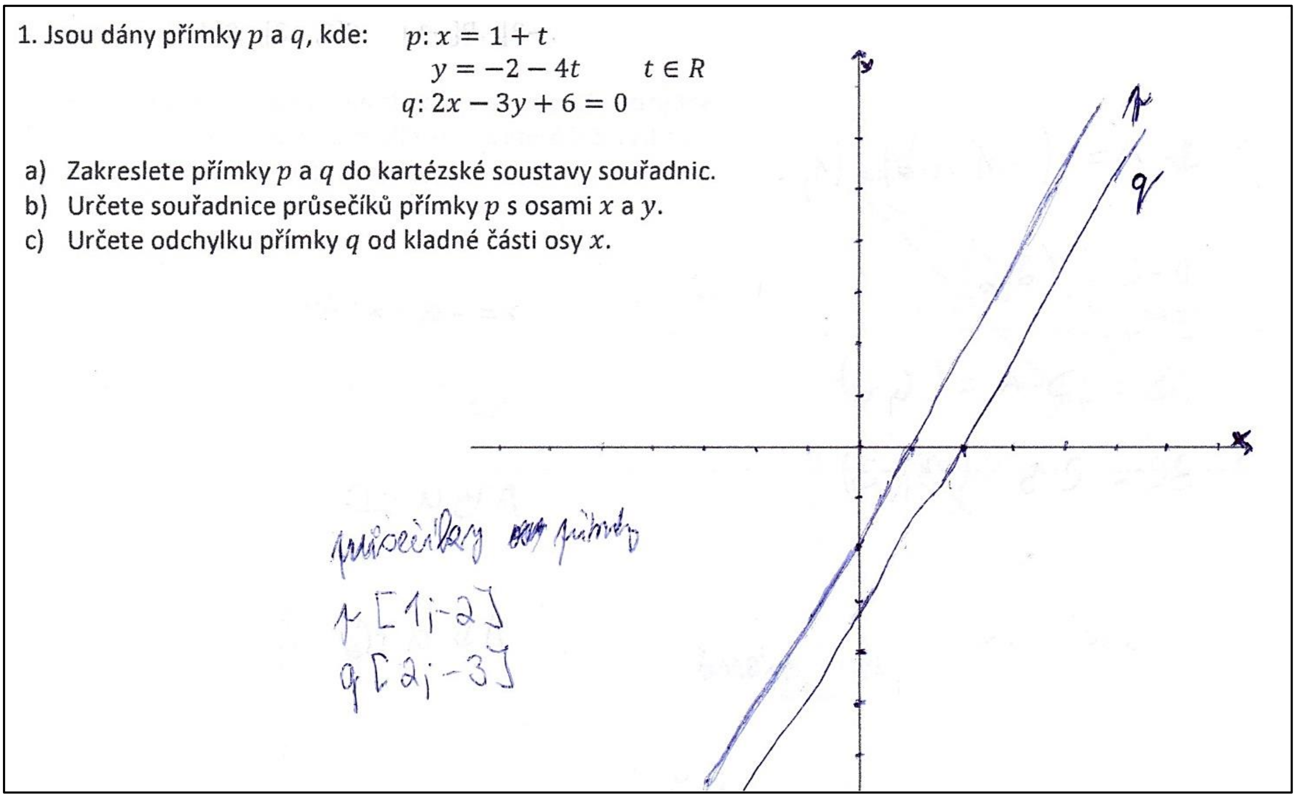
a) Zakreslete přímky p a q do kartézské soustavy souřadnic.
b) Určete souřadnice průsečíků přímky p s osami x a y.
c) Určete odchylku přímky q od kladné části osy x.

$p: x = 2 + 4\lambda$
$y = 1 - \lambda \quad \lambda \in R$

$q: 3x - 2y + 6 = 0$

$\vec{n_q} = (3; -2)$
$\vec{u_q} = (4; -1)$
$\vec{n_q} = (1; 4)$

Obrázek 4.3: Žák DB pro zakreslení přímky p využil bod o souřadnicích $[2; 1]$, x-ovou souřadnici bodu vynesl na osu x, y-ovou souřadnici na osu y, takto vzniklé body následně spojil v přímku



1. Jsou dány přímky p a q, kde: $p: x = 1 + t$
$y = -2 - 4t \quad t \in R$
$q: 2x - 3y + 6 = 0$

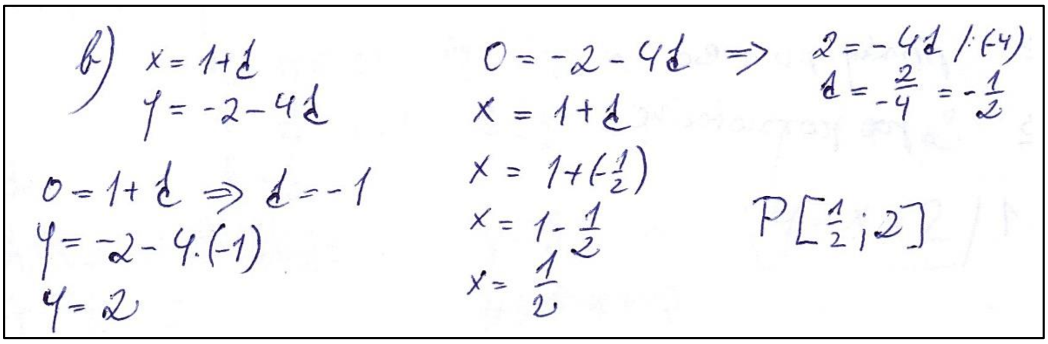
a) Zakreslete přímky p a q do kartézské soustavy souřadnic.
b) Určete souřadnice průsečíků přímky p s osami x a y.
c) Určete odchylku přímky q od kladné části osy x.

průsečíky přímky
p [1; -2]
q [2; -3]

Obrázek 4.4: Žák MK postupoval při zakreslení přímek podobně jako žák na obr. 4.3. Pro zakreslení přímky q využil místo souřadnic bodu souřadnice normálového vektoru.

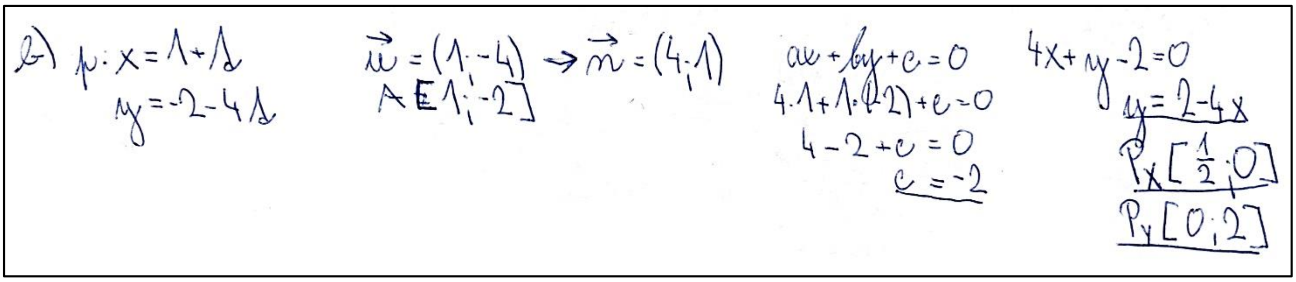
Dále stojí za zmínku, že jeden žák MK nejprve převedl rovnice na směrnicový tvar, ten pak využil k jejich zakreslení. U přímky dané obecnou rovnicí takto pracovali dokonce dva žáci. Je možné, že to svědčí o větší provázanosti poznatků a využití předchozích zkušeností s lineární funkcí. Žádný žák DB úlohu tímto způsobem neřešil.

Druhým dílčím úkolem první úlohy bylo zjistit souřadnice průsečíků přímky p (zadané parametrickou rovnicí) s osami x a y. Ve třídě DB vyřešilo tuto část úlohy správně pět žáků. Jeden z nich si nejprve převedl parametrickou rovnici na obecnou, a teprve z té určoval souřadnice průsečíků. Jeden žák správně spočítal nejprve x-ovou souřadnici průsečíku s osou x dosazením nuly za y, poté y-ovou souřadnici průsečíku s osou y dosazením nuly za x, ale výsledek pak zapsal jako souřadnice jednoho bodu (viz obr. 4.5). Tato chyba se ve třídě MK neobjevila.



Obrázek 4.5: Žák DB správně spočítal průsečíky přímky s osami, ale výsledek zapsal jako souřadnice jednoho bodu

Úlohu správně vyřešilo šest žáků MK, z čehož dva žáci převedli parametrickou rovnici nejprve na obecnou, pak na směrnicovou, a teprve poté určovali souřadnice průsečíků, což znovu ukazuje na jejich preferenci pracovat se známou lineární funkcí (viz obr. 4.6).

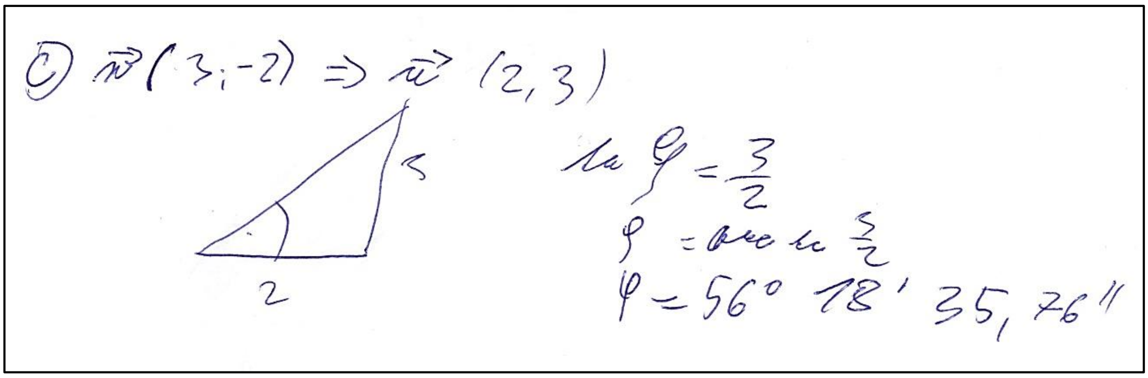


Obrázek 4.6: Žák nejprve převedl přímku do směrnicového tvaru, teprve poté určil souřadnice jejích průsečíků s osami

Osm žáků DB a deset žáků MK v této části úlohy místo zjišťování souřadnic průsečíků přímky p s osami určovalo průsečík přímek p a q. Bohužel jsem v jedné variantě zadání nevhodně zvolila přímky p a q tak, že jejich průsečík ležel přímo na ose y. Část žáků se tedy dopracovala k části výsledku i tímto způsobem.

Posledním dílčím úkolem první úlohy bylo určit odchylku přímky q (dané obecně) od kladné části osy x. Ve třídě DB vyřešilo tuto část úlohy šest žáků. Postup zvolili všichni úspěšní řešitelé stejný. Obecnou rovnici přímky převedli na směrnicovou, pak ze směrnice pomocí kalkulátoru vyjádřili velikost úhlu. Další tři žáci z této třídy v této části úlohy pouze převedli přímku na směrnicový tvar, ale velikost úhlu již nevyjádřili.

Ve třídě MK tuto část úlohy vyřešilo správně osm žáků. Polovina z nich zvolila stejný postup řešení jako žáci DB, druhá polovina vyjádřila směrnici jako poměr souřadnic směrového vektoru přímky q. Ve třídě DB nikdo takto ani postupovat nezkoušel, ačkoli při výkladu geometrického významu směrnice na začátku sedmé vyučovací hodiny (Směrnicový tvar přímky – procvičování) učitelka kreslila na tabuli obrázek, na kterém předvedla platnost rovnosti $tg\,\varphi = \frac{u_2}{u_1}$. Tři žáci MK si v této části testu pravoúhlý trojúhelník načrtli, do něj si zakreslili požadovaný úhel a vektor, se kterým pracovali (viz obr. 4.7). Je tedy zřejmé, že tito žáci vzorci, do kterého dosazovali souřadnice vektoru, skutečně rozumí a nejedná se u nich pouze o formální poznatek. Žádný žák DB si k této části úlohy nic nekreslil.

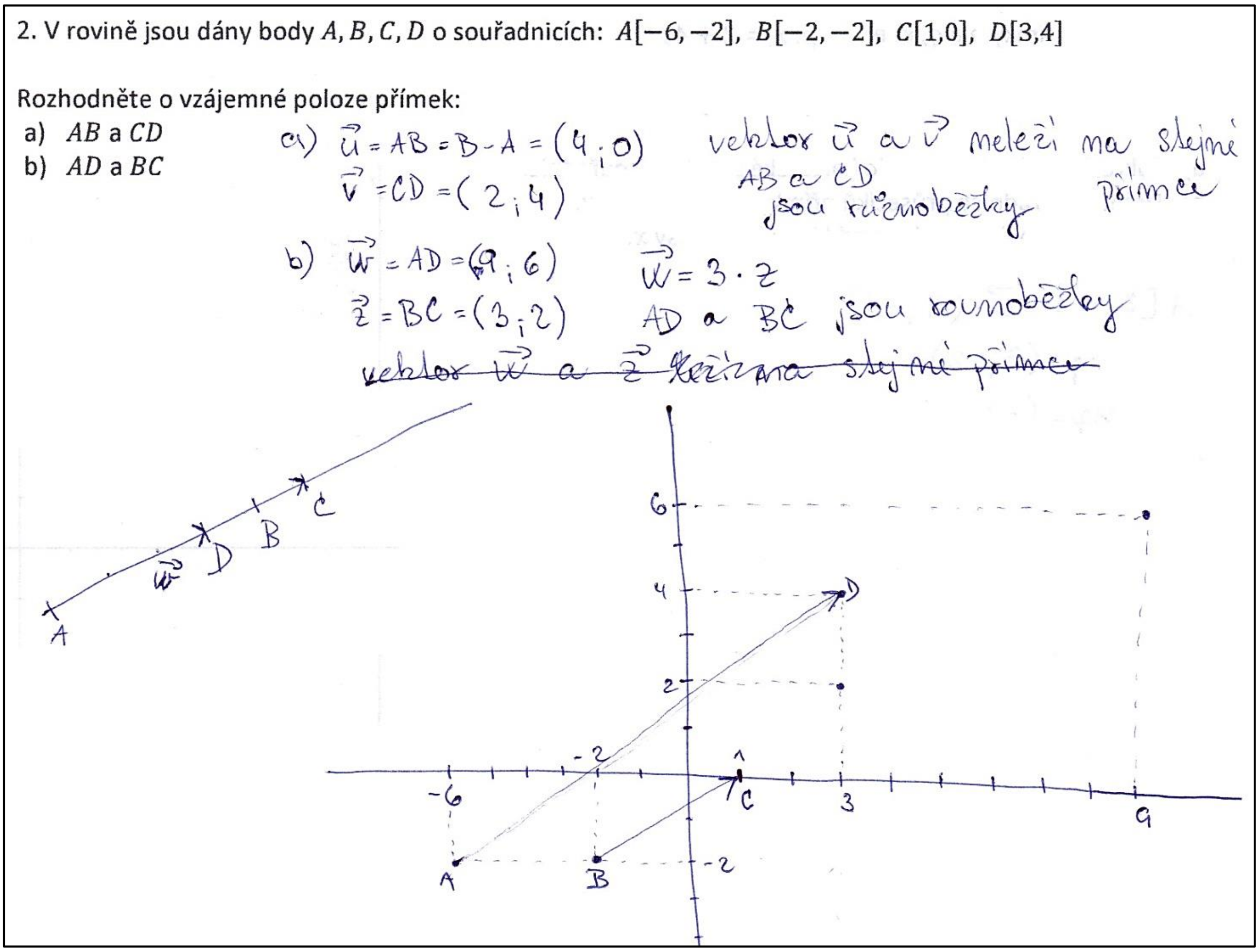


Obrázek 7: Žák MK si při použití vzorce $tg\,\varphi = \frac{u_2}{u_1}$ načrtl trojúhelník, se kterým pracuje

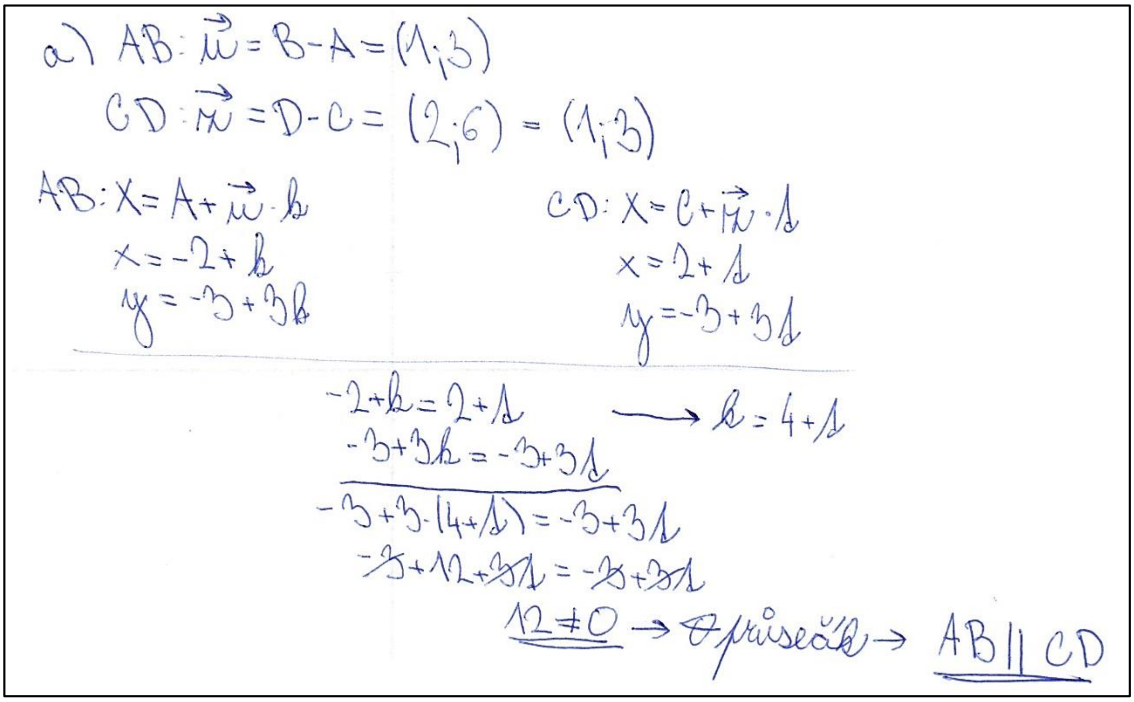
4.4.2 Druhá úloha

V druhé úloze byly zadány souřadnice čtyř bodů a úkolem bylo rozhodnout o vzájemné poloze dvou dvojic přímek. V jednom případě se jednalo o rovnoběžky, v druhém o různoběžky. Jak ve třídě DB (jedenáct žáků), tak ve třídě MK (šestnáct žáků) byli žáci úspěšnější při určování vzájemné polohy dvou různoběžek. Většina z nich postupovala stejně, určili, že směrový vektor jedné přímky není násobkem směrového vektoru druhé přímky, jedná se tedy o různoběžky. Jeden žák DB správně určil, že jeden vektor není násobkem druhého, nevyvodil však již z tohoto poznatku žádný závěr, dva další žáci napsali závěr „nejsou rovnoběžné“. Dva žáci MK rozhodovali o vzájemné poloze podle počtu průsečíků přímek. V tomto případě se nejedná o zcela efektivní řešení, vzhledem k tomu, že si museli zapsat rovnice obou přímek a soustavu rovnic vyřešit. Jeden žák MK si u obou přímek zapsal směrnice, podle kterých pak určil, že přímky nemají stejný směr, jsou tedy různoběžné.

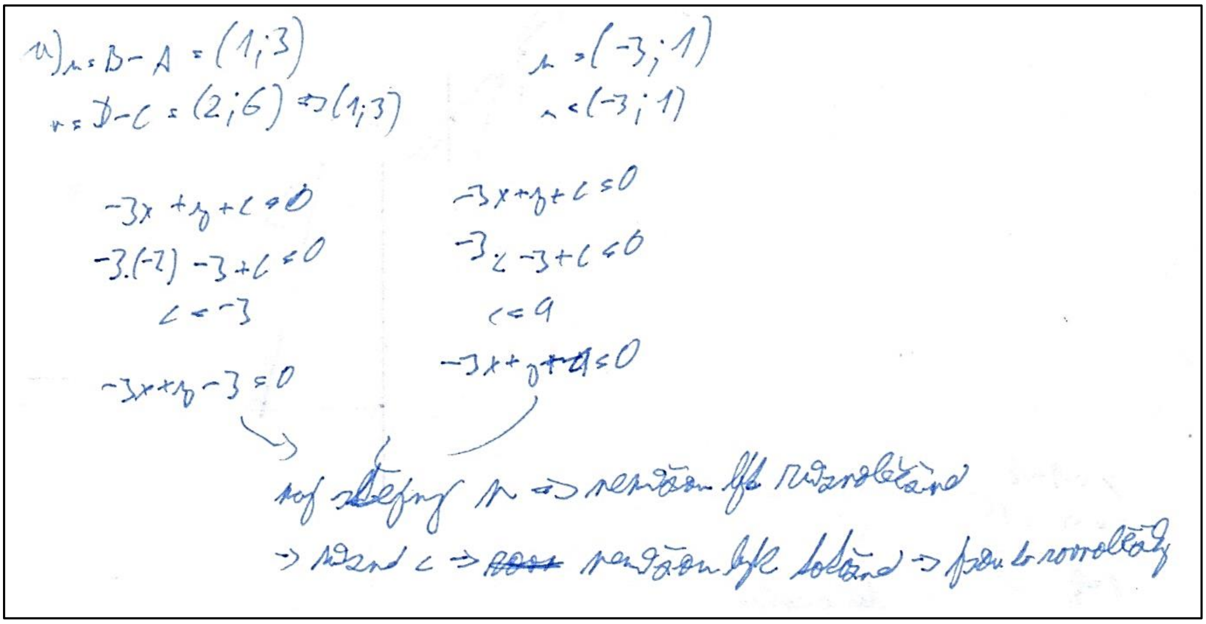
V případě dvojice rovnoběžných přímek jejich vzájemnou polohu správně určilo šest žáků DB a deset žáků MK. Tři žáci DB a čtyři žáci MK správně určili, že směrový vektor jedné přímky je násobkem směrového vektoru druhé přímky, ale již rovnou zapsali závěr, že se jedná o rovnoběžky. Možnost, že by se mohlo jednat o přímky totožné, již nebrali v úvahu. Dva žáci DB neřešili úlohu početně, ale načrtli si obrázek (viz obr. 4.8). Žádný žák MK takto úlohu neřešil. Čtyři žáci MK v této části úlohy rozhodovali o vzájemné poloze podle počtu průsečíků (viz obr. 4.9). Naopak žádný žák DB takto úlohu neřešil. Za zmínku také stojí řešení žáka MK, který si zapsal obecné rovnice obou přímek a konstatoval, že přímky se liší pouze v konstantě c, jsou to tedy přímky rovnoběžné různé (viz obr. 4.10).



Obrázek 4.8: Žák DB rozhodl o vzájemné poloze přímek pomocí náčrtku

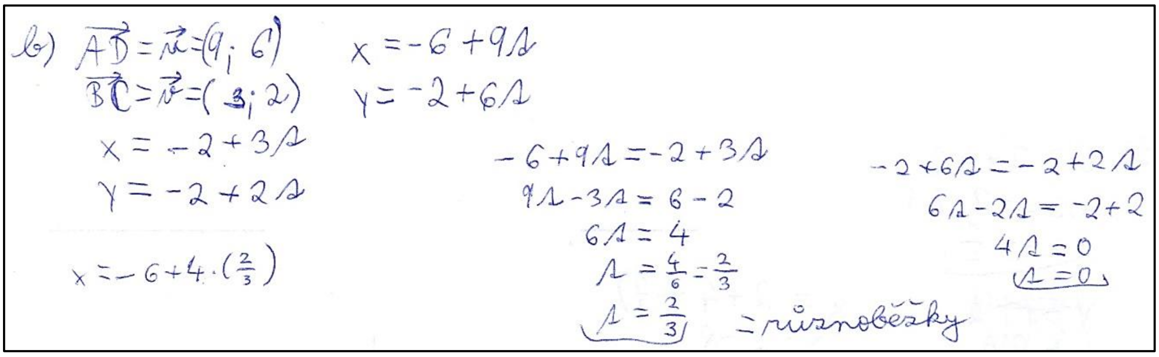


Obrázek 4.9: Žák MK rozhodl o vzájemné poloze dvou přímek podle počtu průsečíků



Obrázek 4.10: Žák MK rozhodl o vzájemné poloze dvou přímek podle jejich obecných rovnic

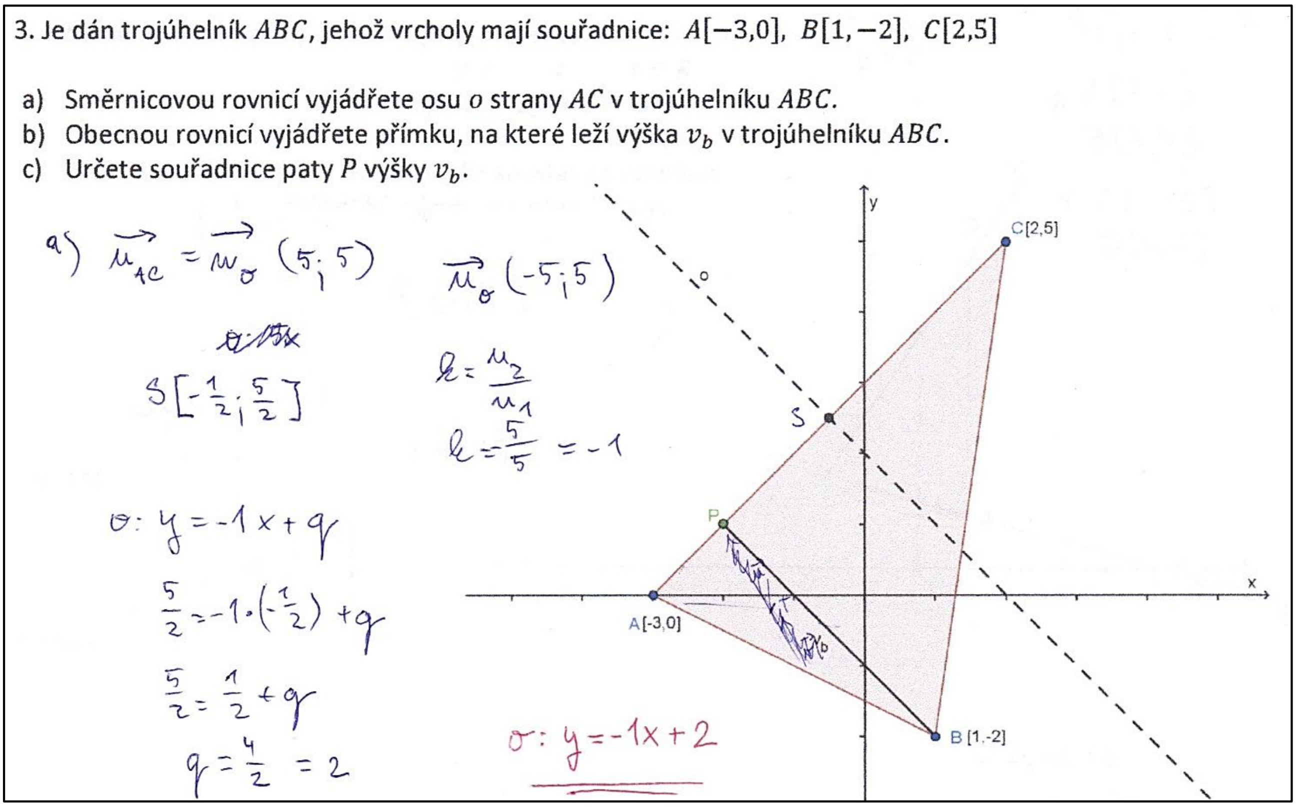
V této úloze se také projevilo, že mnoho žáků buď nečte pozorně zadání, nebo nepřemýšlí nad tím, co je jejich cílem. Celkem pět žáků DB se snažilo počítat průsečík přímek, ačkoli to vůbec nebylo v zadání. Ani jeden z nich však nevyřešil správně soustavu rovnic, ve většině případů proto, že pro obě rovnice použil stejný parametr (viz obr. 4.11). Jak již bylo uvedeno v oddíle 4.3.5d, DB v hodině před řešením obdobné úlohy pouze uvedla, že je nutné používat dvě různá označení parametru. MK této problematice věnoval konec třetí a část čtvrté hodiny, celkem přes patnáct minut času. V závěrečném testu žádný z jeho žáků tuto chybu neudělal.



Obrázek 4.11: Žák DB určuje vzájemnou polohu dvou přímek pomocí řešení soustavy dvou rovnic. Pro obě přímky v parametrickém vyjádření použil parametr t

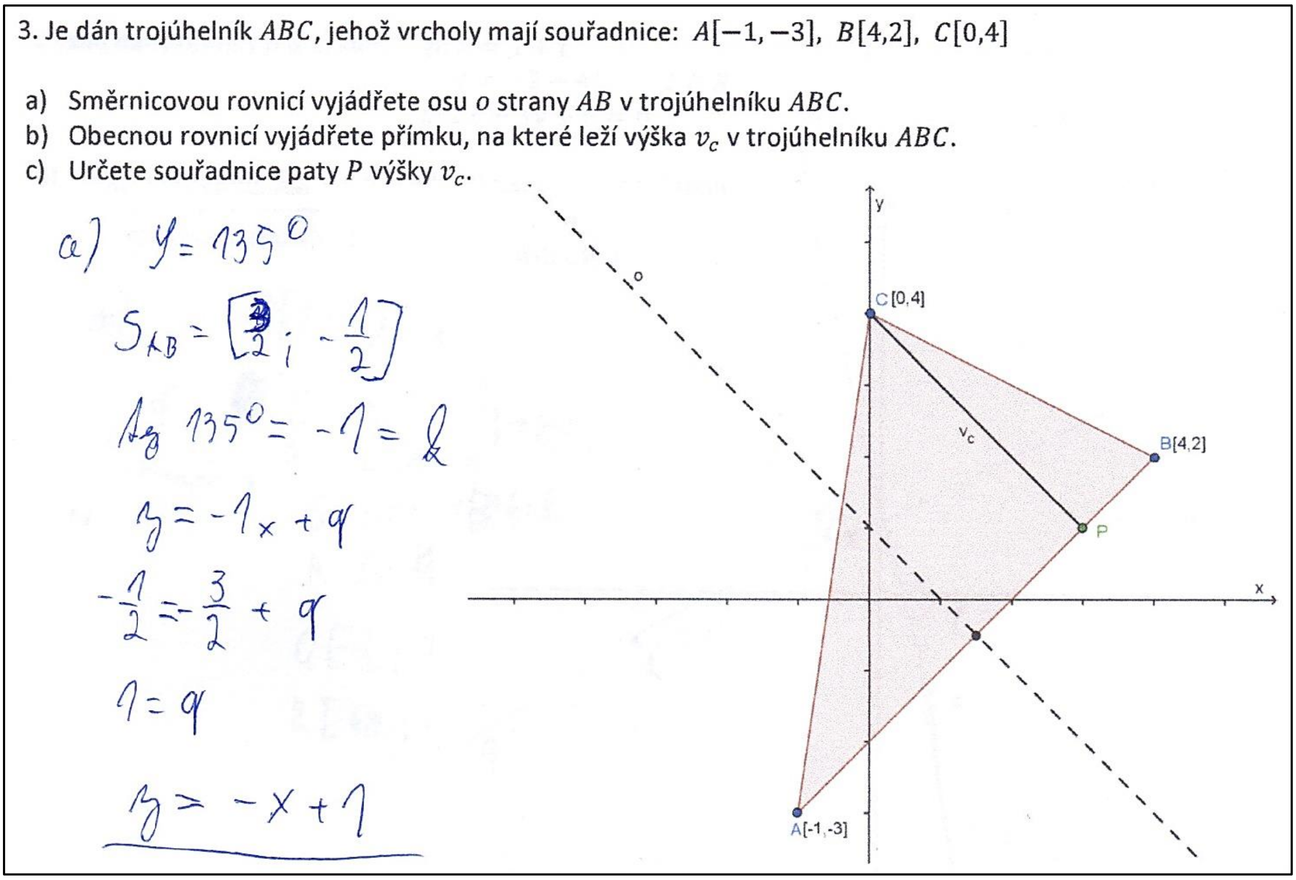
4.4.3 Třetí úloha

Ve třetí úloze byl zadán trojúhelník souřadnicemi jeho vrcholů, součástí zadání byl i náčrtek. Prvním dílčím úkolem této úlohy bylo vyjádřit osu strany trojúhelníka. Celkem devět žáků DB tuto část úlohy úspěšně vyřešilo. Sedm z nich si nejprve zapsalo rovnici osy úsečky obecně, tu pak převedli na směrnicový tvar. Dva žáci vytvářeli směrnicovou rovnici osy rovnou. Jeden z nich určil směrnici jako podíl souřadnic směrového vektoru, kvocient dopočítal dosazením souřadnic bodu ležícího na přímce (viz obr. 4.12). Druhý postupoval stejně, ale směrnici vypočítal z velikosti úhlu, který přímka svírala s kladnou částí osy x (viz obr. 4.13).


3. Je dán trojúhelník ABC, jehož vrcholy mají souřadnice: $A[-3,0]$, $B[1,-2]$, $C[2,5]$

a) Směrnicovou rovnicí vyjádřete osu o strany AC v trojúhelníku ABC.
b) Obecnou rovnicí vyjádřete přímku, na které leží výška v_b v trojúhelníku ABC.
c) Určete souřadnice paty P výšky v_b.

Obrázek 4.12: Žák DB určil směrnici jako podíl souřadnic směrového vektoru



3. Je dán trojúhelník ABC, jehož vrcholy mají souřadnice: $A[-1,-3]$, $B[4,2]$, $C[0,4]$

a) Směrnicovou rovnicí vyjádřete osu o strany AB v trojúhelníku ABC.
b) Obecnou rovnicí vyjádřete přímku, na které leží výška v_c v trojúhelníku ABC.
c) Určete souřadnice paty P výšky v_c.

a) $y = 135^0$

$S_{AB} = [\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}]$

$tg\ 135^0 = -1 = k$

$y = -1x + q$

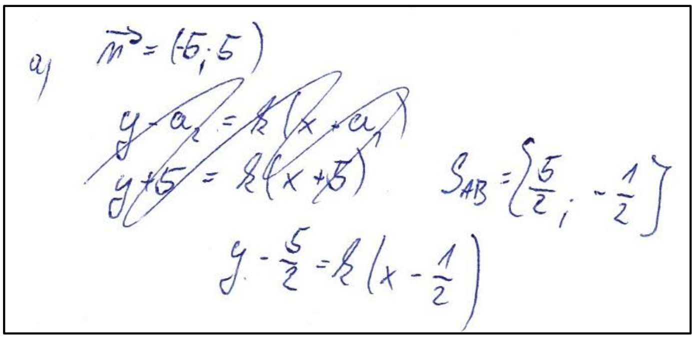
$-\frac{1}{2} = -\frac{3}{2} + q$

$1 = q$

$y = -x + 1$

Obrázek 4.13: Žák DB určil směrnici hledané přímky z velikosti úhlu, který svírá s kladnou poloosou x

Pro mě překvapivým faktem je, že tuto část úlohy vyřešil správně pouze jeden žák MK. Myslím, že vzhledem k tomu, že MK směrnicové rovnici věnoval pouze poslední hodinu, žáci neměli dostatek času, aby si práci s ní osvojili. Čtyři žáci MK se snažili k řešení využít rovnice $y - a_2 = k(x - a_1)$. Ani jeden z nich však ke správnému řešení nedospěl. Chyby se objevily různé – nedopočítaná směrnice (viz obr. 4.14), místo souřadnic a_1, a_2 (bodu, který leží na požadované přímce) dosazené souřadnice směrového vektoru, případně souřadnice bodu A (vrcholu trojúhelníka), který samozřejmě na ose neleží (viz obr. 4.15). Pět žáků MK a čtyři žáci DB použili pro zápis obecné rovnice osy nesprávný vektor. Neuvědomili si, že směrový vektor strany trojúhelníka je zároveň normálovým vektorem osy.



a) $\vec{n} = (-5; 5)$

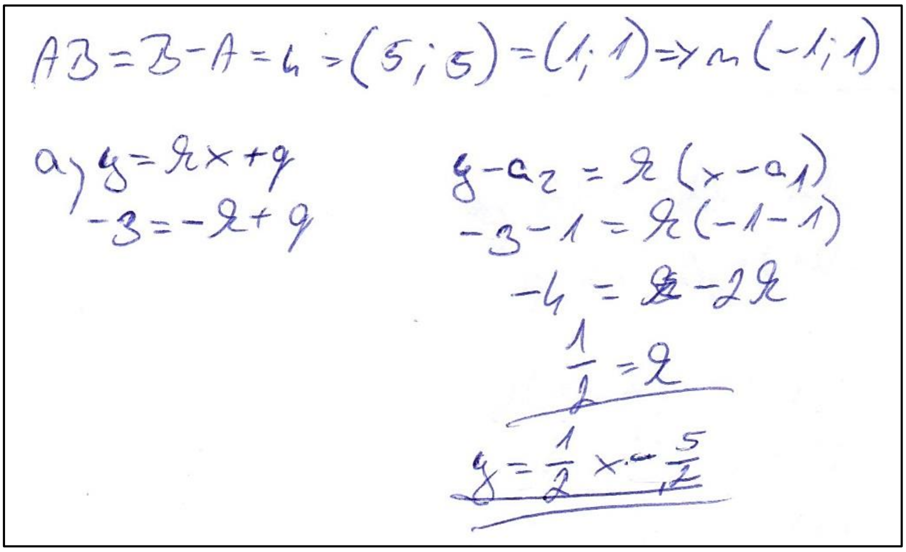
$\cancel{y - a_2 = k(x - a_1)}$

$\cancel{y + 5 = k(x + 5)}$

$S_{AB} = [\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}]$

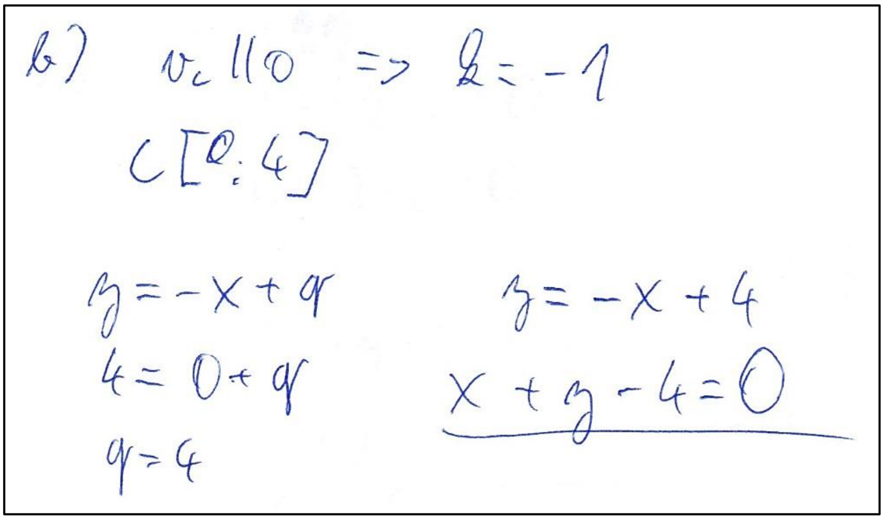
$y - \frac{5}{2} = k(x - \frac{1}{2})$

Obrázek 4.14: Žák MK vycházel při zápisu směrnicové rovnice přímky z rovnice $y - a_2 = k(x - a_1)$, nedopočítal ale směrnici

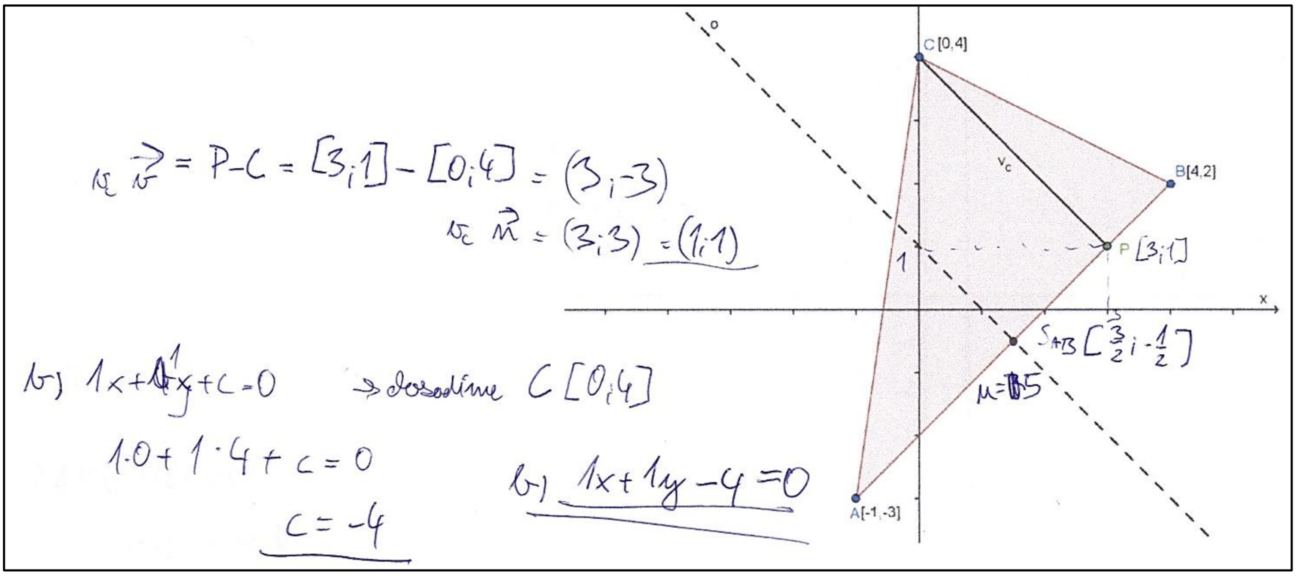


Obrázek 4.15: Žák MK dosadil za a_1, a_2 souřadnice směrového vektoru přímky a za x, y souřadnice bodu A, který na přímce neleží

Stejná chyba se vyskytovala i v druhé části úlohy, kde bylo úkolem zapsat obecnou rovnici přímky, na které leží výška trojúhelníka (rovnoběžná s osou strany z předchozí části úlohy). Rovnici správně zapsalo devět žáků DB a osm žáků MK. Za zmínku stojí řešení jednoho žáka DB, který vzhledem k rovnoběžnosti výšky a osy konstatoval, že jejich směrnice jsou shodné, využil rovnici z předchozí části úlohy, dopočítal kvocient a tuto rovnici pak převedl na obecnou (viz obr. 4.16). Čtyři žáci DB a jeden žák MK pracovali se souřadnicemi paty výšky, které však nebyly nikde zadány, pouze je odhadli z náčrtku v zadání úlohy (viz obr. 4.17). Důvod tohoto počínání mě napadá jediný. Žáci jsou zvyklí zjišťovat souřadnice směrového vektoru ze dvou bodů, které jej určují, a protože souřadnice bodu P bylo možné z obrázku vyčíst, tak je použili, ačkoli nebyly v zadání.



Obrázek 4.16: Žák DB využil rovnoběžnosti dvou přímek, konstatoval, že jejich směrnice jsou shodné, a pouze dopočítal kvocient



Obrázek 4.17: Žák MK z obrázku odhadl souřadnice bodu P, s těmi pak dále pracoval

Určení souřadnic paty výšky bylo posledním úkolem třetí úlohy. Deset žáků DB a tři žáci MK určili souřadnice paty výšky pouze tak, že je vyčetli z náčrtku, který byl součástí zadání. Dva žáci DB a deset žáků MK určilo souřadnice vyřešením soustavy dvou rovnic, kde jedna určovala přímku, na které leží výška, a druhá přímku, na které leží strana trojúhelníka. Oba žáci DB využili obecnou rovnici z předchozí části úlohy a druhou přímku si zapsali také obecně. Stejným způsobem postupovali také čtyři žáci MK. Dva žáci MK také využili obecnou rovnici přímky z přechozí části úlohy, ale druhou přímku si zapsali rovnicí parametrickou. Tři žáci si dokonce obě přímky zapsali parametrickými rovnicemi, je zde tedy možné pozorovat upřednostňování parametrických rovnic u žáků MK ve chvíli, kdy si mohou rovnici přímky zapsat libovolným způsobem. Myslím, že tato preference souvisí s větším množstvím času, který MK parametrickým rovnicím věnoval, jak již bylo zmíněno výše.

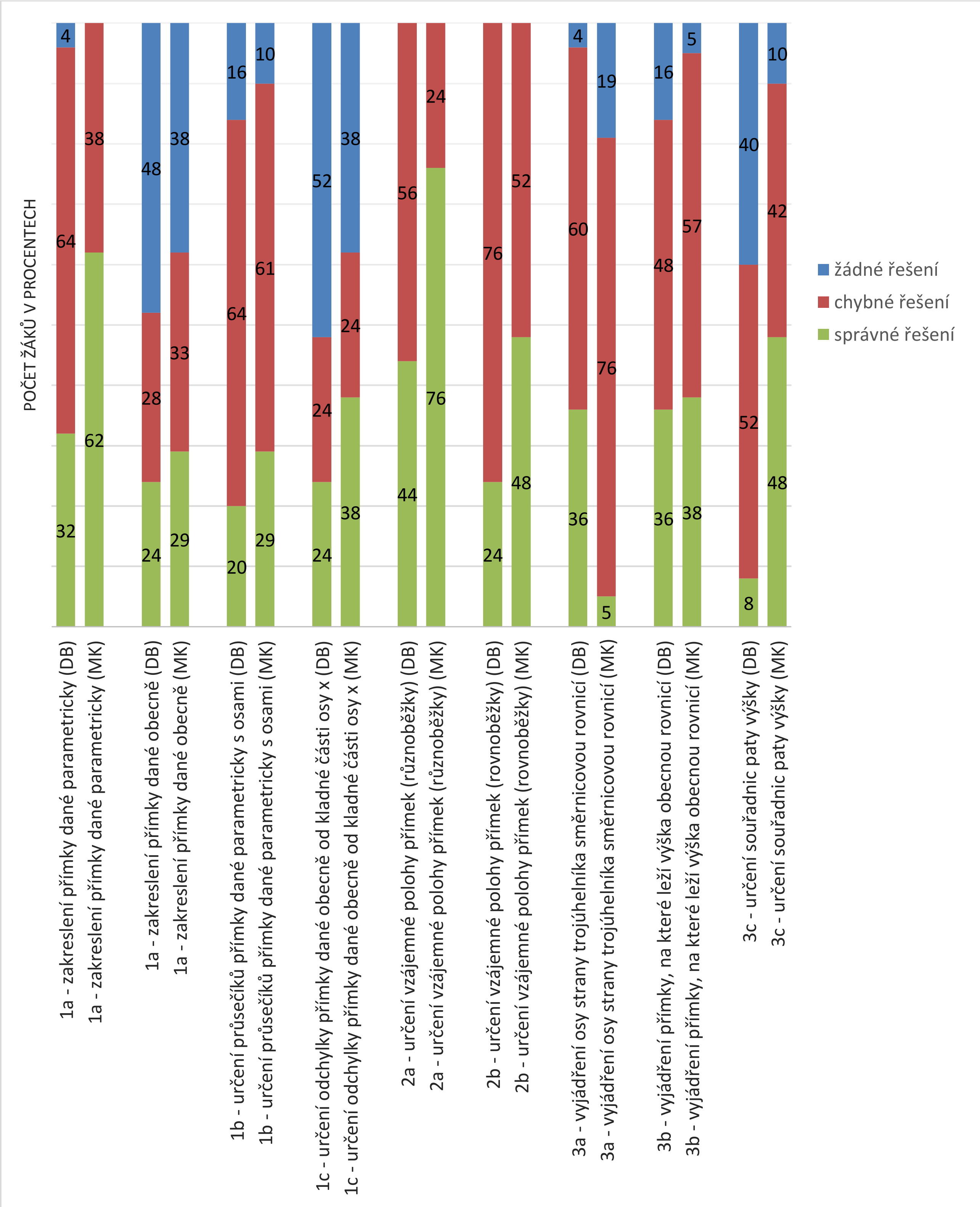
4.4.4 Shrnutí výsledků závěrečného testu

Z žákovských řešení závěrečných testů lze vyvodit několik závěrů. Jako první bych určitě uvedla, že čas, který učitel věnoval určitému problému či tématu, se pozitivně odrazil ve schopnostech žáků. Žáci DB měli více příležitostí pracovat se směrnicovou rovnicí přímky než žáci MK a rozdíly ve výsledcích úloh s touto tematikou jsou patrné. Naopak MK věnoval větší množství času rovnici parametrické a v testech jeho žáků lze pozorovat, že právě práci s touto rovnicí preferují, když mají možnost libovolně si zvolit. Dalším konkrétním příkladem je fakt, že žáci MK používali při řešení soustavy dvou parametrických rovnic dvě různá označení parametru. U několika z nich jsem zaznamenala, že soustavu začali řešit s oběma parametry označenými stejně, ale v průběhu řešení jeden z nich přejmenovali. Toto jsem v žákovských řešeních DB pozorovala jen jednou. Je zřejmé, že několikaminutové řešení tohoto problému v hodině (viz oddíl 4.3.5d) zanechá větší stopu než pouhé oznámení faktu, že je nutné parametry označit dvěma různými písmeny, bez jakéhokoli dalšího vysvětlení. Protože když člověk narazí znovu na problém, který musel už jednou řešit, je pravděpodobné, že si na danou situaci vzpomene, svou případnou chybu opraví a problém úspěšně vyřeší. Ovšem poznatek nabytý pasivně snáze zapomene a při řešení problému svou chybu nechápe, protože mu nikdy nebyl osvětlen jeho smysl.

Zajímavé je také porovnání počtů žáků v obou třídách, kteří se určitý dílčí úkol v úloze ani nepokoušeli řešit (odpovídá kategorii žádné řešení[9] na obr. 4.18 níže). Žáci MK obecně vyvíjeli vyšší snahu úlohy řešit. Jedinou výjimkou je první část třetí úlohy, která se týká směrnicové rovnice přímky. Jak už bylo zmíněno výše, MK věnoval směrnicové rovnici přímky pouze závěrečnou hodinu a žáci by bývali pravděpodobně potřebovali více času, aby si práci s ní osvojili. S tím, myslím, souvisí i vysoké procento žáků, kteří se nesnažili v první úloze určovat velikost odchylky přímky q od kladné části osy x. Na druhou stranu, jak ve třídě DB, tak ve třídě MK bylo několik jednotlivců, kteří práci se směrnicovou rovnicí preferovali. Jednalo se pravděpodobně o žáky, kteří rozumí lineární funkci a dokázali si tyto dvě znalosti propojit.

V obou třídách se mnoho žáků vůbec nesnažilo zakreslit přímku q, která byla zadána obecnou rovnicí. Předpokládám, že problém s přímkou danou obecnou rovnicí je v tom, že na například na rozdíl od rovnice parametrické z ní nelze ihned vyčíst dostatek údajů, aby ji bylo možné zakreslit. Ve třídě DB se také mnoho žáků nepokoušelo zjišťovat souřadnice paty výšky trojúhelníka ve třetí úloze. Je možné, že vzhledem k tomu, že se jednalo o poslední dílčí úlohu, mohl být na vině i nedostatek času.

[9] Žákovské řešení bylo zařazeno do této kategorie, pokud k dané části úlohy nebylo v závěrečném testu nic. Pokud se žák o řešení snažil, ale uvědomil si, že je chybné, a přeškrtl jej, takové řešení je považováno za chybné.



Obrázek 4.18: Procentuální zastoupení správných, chybných a žádných řešení jednotlivých dílčích úloh závěrečného testu ve třídách DB a MK

5 Závěr

Cílem práce bylo charakterizovat pojetí výuky matematiky dvou učitelů gymnázia, z nichž jeden je představitelem spíše tradičního frontálního vyučování a druhý vyznává spíše aktivní zapojení žáků do procesu učení. Charakteristika byla provedena prostřednictvím porovnání výuky na tématu analytické geometrie přímky. Při svém výzkumu jsem si stanovila několik výzkumných otázek, hledané odpovědi zde stručně shrnu.

Je zřejmé, že způsob výuky stejného tématu se u obou učitelů liší. Každý učitel věnuje pozornost něčemu jinému. MK věnoval nejvíce času parametrické rovnici přímky, DB klade důraz na procvičování. Z výsledků závěrečných testů žáků vyplynulo, že žáci lépe zvládali řešit úlohy týkající se témat, kterým učitel věnoval více pozornosti (například při možnosti volby libovolné rovnice přímky, žáci MK ve většině případů volili rovnici parametrickou).

S pojetím výuky také souvisí, kterým činnostem učitele a žáků je v hodinách věnováno nejvíce času. Žáci MK strávili 49 % času zkoumaných hodin samostatnou prací na úlohách, dalších 19 % času bylo věnováno společné kontrole úloh. Třetí nejčastější činností v pořadí je výklad učitele (17 %). V hodinách DB bylo také nejvíce času věnováno řešení úloh, avšak činnosti se lišily. Převažovalo řešení úloh učitelkou u tabule (32 %), dalších 26 % času řešil úlohu u tabule žák. Třetí činností v pořadí je také výklad, kterému DB věnovala 20 % veškerého času.

Odlišnosti lze také pozorovat v množství, typu a účelu otázek pokládaných oběma učiteli. DB pokládá žákům větší množství otázek než MK, což je pochopitelné, vzhledem k struktuře jejich hodin. Když DB řeší úlohu na tabuli, ptá se žáků na konkrétní pojmy, dílčí výsledky, další postup atd. Řešení úloh v hodinách MK je realizováno formou samostatné práce žáků a učitel s nimi komunikuje pouze individuálně. Téměř 80 % otázek DB tvořily otázky s krátkou odpovědí. Dalších 13 % pak otázky s víceslovnou odpovědí, ale dvě třetiny z nich vyžadovaly po žácích pouze reprodukci znalostí. V hodinách MK převažovaly také otázky s krátkou odpovědí (52 %), otázky s víceslovnou odpovědí tvořily 36 %. Většinu z těchto otázek pokládal MK za účelem aplikace znalostí žáky či formulace vlastní myšlenky. S tím souvisí také fakt, že MK častěji otázky opakuje, upřesňuje, či přeformuluje, pokud žáci na otázku nereagují. V podobných situacích DB své otázky také opakuje, případně odpovídá sama.

Jedním z hlavních principů realistické pedagogiky je aktivita žáka. MK v úvodu své učebnice uvádí, že žáky vede k tomu, aby sami do sešitu vždy něco napsali, protože „špatný pokus umožňuje odhalit příčinu nepochopení, zatímco prázdný papír neříká nic“ (Využití učebnice ve škole, s. 6). S tímto přístupem jistě souvisí fakt, že žáci MK v závěrečném testu vyvíjeli větší snahu úlohy řešit (viz obr. 4.18).

I když je těžké objektivně charakterizovat a zhodnotit pojetí výuky v duchu tzv. realistické pedagogiky, z náslechů na hodinách jsem nabyla dojmu, že realistická pedagogika představuje minimálně zajímavé pojetí výuky. Namísto tradičního jednosměrného předávání znalostí od učitele k žáku se realistická pedagogika soustředí na aktivaci vlastního myšlení žáků a jejich neustálou individuální práci v hodině. Žákům nejsou předávány hotové znalosti, které si v lepším případě procvičí a osvojí, nýbrž jsou vhodným způsobem vedeni k tomu, aby si tyto znalosti s pomocí učitele aktivně vytvářeli. Učitel v rámci realistické pedagogiky představuje jakéhosi průvodce, který žáky vhodně navádí, nechává je řešit úlohy samostatně, nad problémy přemýšlet, odvozovat důležité souvislosti, konstruovat teorie, pak na ně vzápětí kriticky nahlížet a rozporovat je. To vše může mít pozitivní dopad nejen na samotné chápání matematiky jako takové, ale také významně ovlivnit celkový vývoj člověka směrem k pozornosti, soustředění, vlastnímu myšlení a schopnosti řešit samostatně nové problémy. Toho jsem v hodinách MK byla opakovaně svědkem.

Na druhou stranu je zřejmé, že realistická pedagogika klade vysoké nároky na znalosti a schopnosti učitele. Ten musí být skutečným odborníkem ve svém oboru, a to na takové úrovni, aby byl schopen se neustále přizpůsobovat měnícím se situacím, které v hodinách vznikají. Ke každému žákovi musí přistupovat individuálně, v závislosti na jeho schopnostech. Krynický sám v úvodu své učebnice uvádí, že řízení hodiny není jednoduché a že je obtížné odhadnout správný okamžik, kdy ukázat řešení na projektoru či přikročit k vysvětlení určité problematiky, když žáci tápou. (Využití učebnice ve škole, s. 2) Toto pojetí klade větší nároky i na žáky samotné, protože jsou neustále nuceni k přemýšlení a aktivní participaci na hodinách. Přijmout nový styl výuky, na který žáci nejsou ze základních škol zvyklí, trvá podle MK obvykle rok. Po překonání této počáteční fáze ale žáci tento přístup oceňují (Žďárská, 2014).

Zajímavým úkazem, se kterým se obvykle v typické hodině matematiky nesetkáme, byly v hodinách MK diskuze nad smyslem některých matematických poznatků. V našem konkrétním případě se jednalo o smysl různých vyjádření rovnic přímek (parametrická, obecná, směrnicová). U žáků taková diskuze podpoří motivaci do dalšího učení a nezůstanou vůči novým poznatkům „v opozici“ z přesvědčení, že nejsou potřebné.

Konečně v průběhu náslechů a také při následném zpracovávání získaných dat jsem si několikrát zaznamenala situaci či řešení problému, kterým druhý zkoumaný učitel z nějakého důvodu nevěnoval pozornost. Uvědomila jsem si, že kdybych navštívila hodiny pouze jednoho učitele, pravděpodobně bych je nijak nepostrádala, ačkoli se v několika případech nejednalo pouze o drobnosti.

Na základě výsledků mého výzkumu i zkušenosti, kterou jsem získala při násleších, jsem došla k několika zajímavým poznatkům. Z pohledu výsledků závěrečného testu dopadli lépe žáci vyučovaní Martinem Krynickým. Na druhou stranu nelze z tohoto faktu vyvozovat pevné závěry, protože druhá testovaná skupina žáků trpěla v době předcházející závěrečnému testu vysokými absencemi, které podle mého názoru výsledky testu ovlivnily. Je také zřejmé, že popis charakteristik výuky obou učitelů by se dal více objasnit, kdyby bylo vykonáno více náslechů. S učiteli by také bylo možné vést rozhovory o jejich pojetích. Konečně je třeba zmínit subjektivnost výběru relevantních úryvků z výuky a jejich interpretací. Celkově malý počet žáků a pouze dvě zkoumané třídy na dvou zúčastněných školách nedovolují hledat přímou závislost mezi výsledky žáků a použité vyučovací metody.

Ač to nebylo původním cílem, mohl by být přínos této práce také dokumentárního charakteru. Realistická pedagogika má sice dobře zpracované podpůrné materiály a internetové stránky, ale teprve skutečnou návštěvou hodin nebo čtením či poslechem jejich záznamu si člověk udělá reálnou představu o tom, jak odlišně taková výuka probíhá.

Navzdory velmi pozitivnímu dojmu z realistické pedagogiky si netroufám, a nebylo by to ani objektivní, tvrdit, že tento způsob výuky matematiky by měl být vhodným nástupcem klasického frontálního stylu. Obě porovnávané výukové metody totiž mají své výhody i nevýhody. Srovnání by bylo třeba provést v daleko větším měřítku, aby bylo možné vyvodit takovéto závěry. To si ale tato práce za cíl neklade. Jejím cílem je porovnat dvě různá pojetí výuky a poukázat na jejich rozdíly. Pokud se tato práce stane inspirací pro další podobné práce a výzkumy, které následně povedou k rozšíření povědomí o realistické pedagogice (či o jiném účinném způsobu výuky matematiky), tak svůj účel splnila.

6 Literatura a zdroje

ALTMANOVÁ, Jitka et al. *Gramotnosti ve vzdělávání: Soubor studií* [online]. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2011, 98 s. [cit. 2015-07-10]. ISBN 978-80-87000-74-8. Dostupné z: http://www.vuppraha.cz/wp-content/uploads/2011/06/Gramotnosti_ve_vzdelavani_soubor_studii1.pdf

CLARKE, David, Christine KEITEL a Yoshinori SHIMIZU (eds.). *Mathematics Classrooms in Twelve Countries: The Insider's Perspective*. Taipei: Sense Publishers, 2006, xi, 390 s. Learner's perspective study, 1. ISBN 90-778-7499-2.

HEJNÝ, Milan a František KUŘINA. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. 2., aktualiz. vyd. Praha: Portál, 2009, 232 s. Pedagogická praxe (Portál). ISBN 978-80-7367-397-0.

HIEBERT, James et al. *Teaching Mathematics in Seven Countries: Results From the TIMSS 1999 Video Study* [online]. National Center for Education Statistics, 2003 [cit. 2015-07-10]. Dostupné z: http://nces.ed.gov/pubs2003/2003013.pdf

KRYNICKÝ, Martin. O tykání. *GYM*. 2010, (13): 9-12. Dostupné také z: http://www.casopisgym.cz/

KRYNICKÝ, Martin. Obecné zásady realistické pedagogiky. *Elektronické učebnice matematiky a fyziky* [online]. ©2010 [cit. 2015-07-08]. Dostupné z: http://www.realisticky.cz/

KRYNICKÝ, Martin. Poznámky o učitelích a vyučování. *Elektronické učebnice matematiky a fyziky* [online]. ©2010 [cit. 2015-07-08]. Dostupné z: http://www.realisticky.cz/

KRYNICKÝ, Martin. Realistická pedagogika. *Elektronické učebnice matematiky a fyziky* [online]. © 2010. [cit. 2015-07-08]. Dostupné z: http://www.realisticky.cz/clanky.php?id=realistickaped

KRYNICKÝ, Martin. Využití učebnice ve škole. *Elektronické učebnice matematiky a fyziky* [online]. ©2010 [cit. 2015-07-08]. Dostupné z: http://www.realisticky.cz/

KRYNICKÝ, Martin. Zkuste to proaktivně: Metoda, která změnila můj učitelský život. *Elektronické učebnice matematiky a fyziky* [online]. 2010 [cit. 2015-07-15]. Dostupné z: http://www.realisticky.cz/clanky/prilohy/obecne/03_Nove_Mesto_na_Morave_2010.pdf

MAŇÁK, Josef a Vlastimil ŠVEC. *Výukové metody: vyučovací proces, učivo a jeho výběr, metody, organizační formy vyučování*. 2., rozš. a aktualiz. vyd., [V nakl. Grada] vyd. 1. Brno: Paido, 2003, 219 s. Pedagogika (Grada). ISBN 80-731-5039-5.

MOORE, Wilfred D. *Comparison Between Computer Assisted Instruction and Traditional Method Instruction as Applied to Teaching Algebra to Urban High Schools Students*. Saint Louis, 2008. Dizertační práce. Saint Louis University.

NELSON-JOHNSON, Doris P. *A Mixed Methods Study of the Effects of Constructivist and Traditional Teaching on Students in an After-School Mathematics Program*. Santa Barbara, 2007. Dizertační práce. Fielding Graduate University.

NOVOTNÁ, Jarmila a Alena HOŠPESOVÁ. The Learner's Perspective Study: A Report. *Orbis Scholae* [online]. 2012, 6(2): 136-141 [cit. 2015-07-12]. ISSN 1802-4637. Dostupné z: http://www.orbisscholae.cz/archiv/2012/2012_2_10.pdf

PRŮCHA, Jan, Jiří MAREŠ a Eliška WALTEROVÁ. *Pedagogický slovník*. 4. aktualiz. vyd. Praha: Portál, 2003, 322 s. ISBN 80-717-8772-8.

SKALKOVÁ, Jarmila. *Obecná didaktika: vyučovací proces, učivo a jeho výběr, metody, organizační formy vyučování*. 2., rozš. a aktualiz. vyd., [V nakl. Grada] vyd. 1. Praha: Grada, 2007, 322 s. Pedagogika (Grada). ISBN 978-80-247-1821-7.

STEHLÍKOVÁ, Naďa. Konstruktivistické přístupy k vyučování matematice. In HEJNÝ, Milan, Jarmila NOVOTNÁ a Naďa STEHLÍKOVÁ (eds.). *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta, 2004, s. 11-21 [cit. 2015-07-16]. ISBN 80-7290-189-3. Dostupné z: http://class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/Download/Volne/SUMA_59.pdf

STRAUSS, Anselm L. a Juliet M. CORBIN. *Základy kvalitativního výzkumu: postupy a techniky metody Zakotvené teorie*. Vyd. 1. Brno: Albert, 1999, 196 s. SCAN. ISBN 80-858-3460-X.

VONDROVÁ, Naďa. *Úvod do didaktiky matematiky*. V Praze: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2014, 65 s. ISBN 978-80-7290-659-8. Dostupné také z: http://vzdelavani-dvpp.eu/download/opory/final/18_vondrova.pdf

ŽDÁRSKÁ, Dana. *Srovnání výuky dvou učitelů matematiky*. Praha: PedF UK v Praze, 2014. Závěrečná práce. Vedoucí práce N. Vondrová.

7 Přílohy

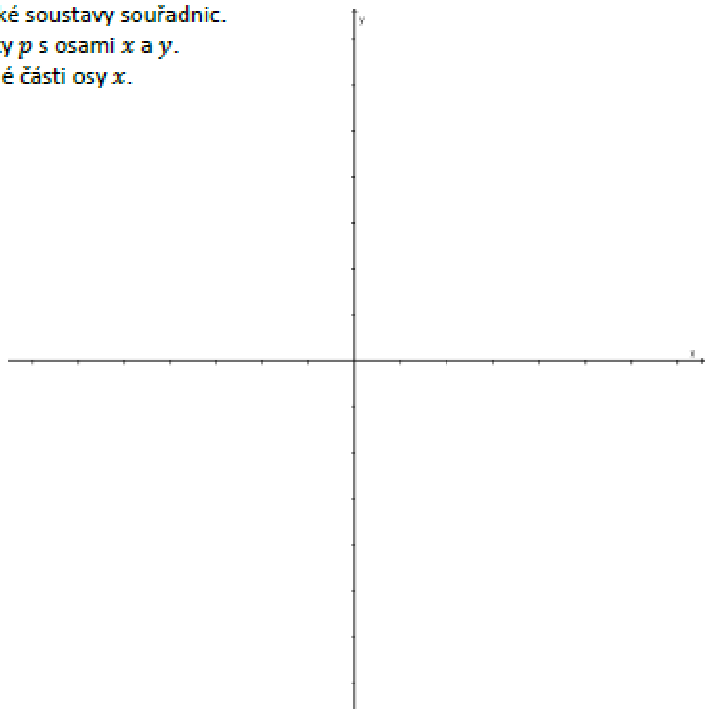
Zadání závěrečného testu (1. varianta)

A **Jméno:** ____________________

1. Jsou dány přímky p a q, kde:

$$p: x = 2 + 4t$$
$$y = 1 - t \qquad t \in R$$
$$q: 3x - 2y + 6 = 0$$

a) Zakreslete přímky p a q do kartézské soustavy souřadnic.
b) Určete souřadnice průsečíků přímky p s osami x a y.
c) Určete odchylku přímky q od kladné části osy x.



2. V rovině jsou dány body A, B, C, D o souřadnicích: $A[-6,-2]$, $B[-2,-2]$, $C[1,0]$, $D[3,4]$

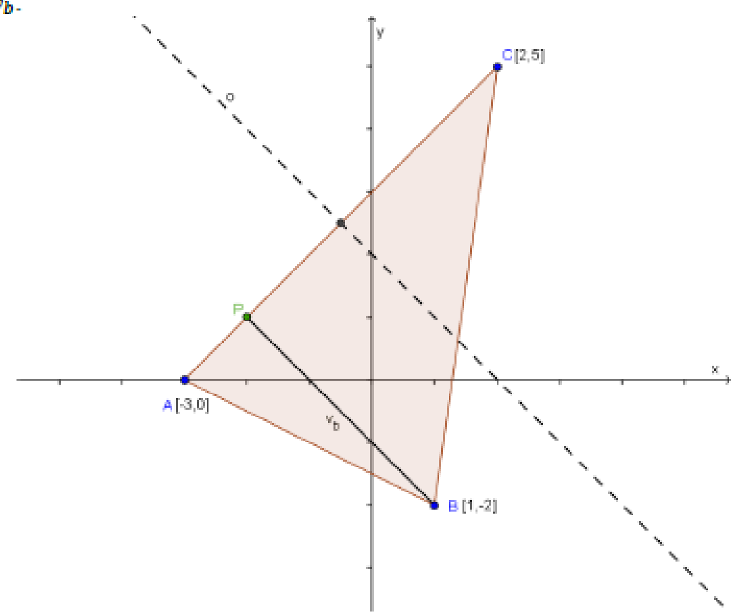
Rozhodněte o vzájemné poloze přímek:

a) AB a CD

b) AD a BC

3. Je dán trojúhelník ABC, jehož vrcholy mají souřadnice: $A[-3{,}0]$, $B[1,-2]$, $C[2{,}5]$

a) Směrnicovou rovnicí vyjádřete osu o strany AC v trojúhelníku ABC.
b) Obecnou rovnicí vyjádřete přímku, na které leží výška v_b v trojúhelníku ABC.
c) Určete souřadnice paty P výšky v_b.



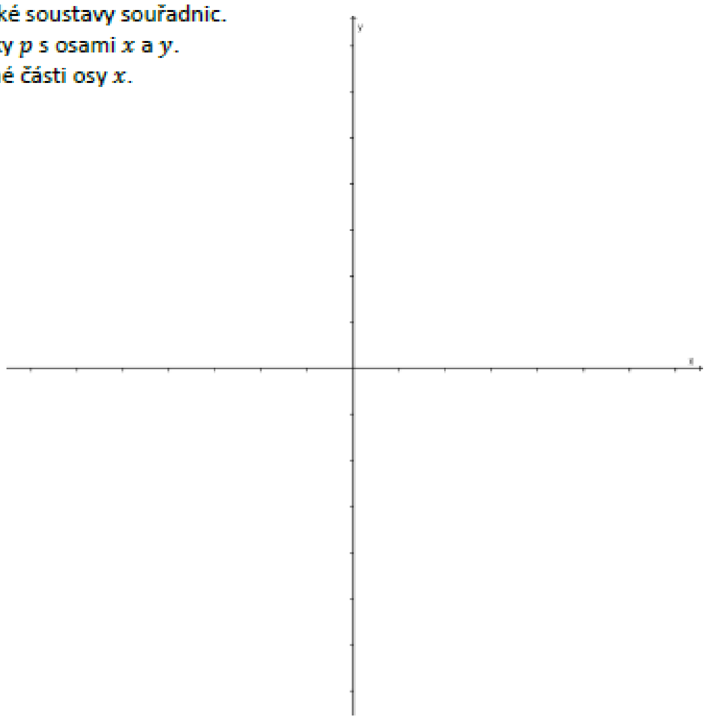
Zadání závěrečného testu (2. varianta)

B **Jméno:** ____________________

1. Jsou dány přímky p a q, kde:

$$p: x = 1 + t$$
$$y = -2 - 4t \qquad t \in R$$
$$q: 2x - 3y + 6 = 0$$

a) Zakreslete přímky p a q do kartézské soustavy souřadnic.
b) Určete souřadnice průsečíků přímky p s osami x a y.
c) Určete odchylku přímky q od kladné části osy x.



2. V rovině jsou dány body A, B, C, D o souřadnicích: $A[-2,-3]$, $B[-1,0]$, $C[2,-3]$, $D[4,3]$

Rozhodněte o vzájemné poloze přímek:

a) AB a CD

b) AD a BC

3. Je dán trojúhelník ABC, jehož vrcholy mají souřadnice: $A[-1,-3]$, $B[4,2]$, $C[0,4]$

a) Směrnicovou rovnicí vyjádřete osu o strany AB v trojúhelníku ABC.
b) Obecnou rovnicí vyjádřete přímku, na které leží výška v_c v trojúhelníku ABC.
c) Určete souřadnice paty P výšky v_c.