Univerzita Karlova v Praze

Filozofická fakulta

Ústav filosofie a religionistiky

Obor Filozofie

Disertační práce

Hypotetické soudy, pravdivost a tvrditelnost

Hypothetical Judgements, Truth and Assertibility

Školitel: Doc. PhDr. Vojtěch Kolman, Ph.D.

Konzultant: Prof. RNDr. Jaroslav Peregrin CSc.

Praha 2016 Mgr. Vít Punčochář

Prohlašuji, že jsem disertační práci napsal samostatně s využitím pouze uvedených a řádně citovaných pramenů a literatury a že práce nebyla využita v rámci jiného vysokoškolského studia či k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze, dne

....
Vít Punčochář

Děkuji vedoucímu této práce doc. Vojtěchu Kolmanovi za všestrannou podporu. Dále děkuji prof. Jaroslavu Peregrinovi a dr. Vladimíru Svobodovi za konzultace a cenné připomínky.

Klíčová slova

Kondicionální věty, pravdivost, tvrditelnost, sémantika, pragmatika, inkvizitivní sémantika, intuicionistická logika

Abstrakt

Základním tématem této disertační práce je logika indikativních kondicionálních vět, tj. vět, které mají obvykle tvar *Pokud A, tak B*. V klasické logice jsou tyto věty analyzovány pomocí tzv. materiální implikace, avšak tato analýza je v mnoha ohledech problematická. Část této práce je věnována rozboru problémů, se kterými se musíme potýkat, když chceme modelovat indikativní kondicionální věty pomocí standardní sémantiky klasické logiky. Je přitom kladen důraz na zdánlivě paradoxní situaci, v níž se přitom ocitáme. Některé obecné principy klasické logiky (jako třeba ten, podle něhož můžeme z věty *Platí A nebo B* odvodit větu *Pokud A neplatí, tak platí B*) vypadají na první pohled zcela nezpochybnitelně, avšak přitom mají velmi kontroverzní důsledky. V práci jsou představeny jak pokusy o obhajobu klasické logiky, tak i pokusy o její revizi.

Přístupy k logické analýze kondicionálních vět jsou v předkládané práci rozděleny na dva základní druhy: ontický a epistemický. Ontický přístup vymezuje všechny klíčové sémantické pojmy pomocí pojmu pravdivosti, která se v logice chápe jako vztah mezi větami daného jazyka a stavy světa. Oproti tomu epistemický přístup se neopírá o pojem pravdivosti, nýbrž o pojem tvrditelnosti. Základní rozdíl mezi pravdivostí a tvrditelností spočívá v tom, že tvrditelnost dané věty není relativní vůči danému stavu světa, ale vůči nějakému informačnímu stavu. V této práci je upřednostněn epistemický přístup. Existují totiž silné důvody pochybovat o tom, zda lze kondicionálním větám připisovat smysluplné podmínky pravdivosti. Na druhé straně je nepochybné, že tyto věty mají podmínky tvrditelnosti, tj. mohou být v jistých kontextech (či informačních stavech) oprávněně tvrzeny a v jiných nikoli.

Hlavním přínosem disertační práce je rozpracování nového epistemického sémantického přístupu nazvaného *sémantika striktní tvrditelnosti*. Cílem textu je ukázat, že tento přístup poskytuje vhodné nástroje pro logickou analýzu přirozeného jazyka a zejména některých problematických jevů souvisejících s kondicionálními větami. Sémantika striktní tvrditelnosti ve své nejzákladnější podobě vede k nestandardní epistemické sémantice klasické (výrokové) logiky. Hlavní předností tohoto systému však je, že otevírá prostor pro řadu rozšíření a zobecnění, která nejsou v rámci standardní sémantiky klasické logiky nijak přímočaře dostupná. Pomocí těchto rozšíření jsou pak řešeny problémy klasické logiky, zejména pak problematické jevy, které se objevují

při interakci implikace s negací a disjunkcí.

Tato práce je rozdělena do čtyř částí. První tři části se věnují filosofickým aspektům problematiky kondicionálních vět. Ve čtvrté části jsou formulovány a dokázány původní matematické výsledky, které se vztahují k sémantice striktní tvrditelnosti. Z matematického hlediska představuje tato sémantika nestandardní přístup, který lze chápat jako jakousi syntézu tzv. relační (kripkovské) a algebraické sémantiky. Ve své obecné verzi poskytuje tento systém nové nástroje k analýze logických systémů, které se nacházejí mezi intuicionistickou a klasickou logikou.

Keywords

Conditionals, truth, assertibility, semantics, pragmatics, inquisitive semantics, intuitionistic logic

Abstract

The main topic of this thesis is the logic of indicative conditionals, i.e. sentences of the form *If A then B*. In classical logic, these sentences are analysed with the help of the so-called material implication. However, the analysis is problematic in many respects. Some chapters of the thesis are devoted to the explanation of the problems, which one necessarily faces when analysing conditionals with the apparatus of standard classical logic. The stress is laid upon the fact that here we are led to a paradoxical situation: some general principles of classical logic (e.g. the principle according to which one can infer *If not-A then B* from *A or B*) seem to be unquestionable, but they have very controversial consequences. In the thesis, attempts are presented to defend classical logic as well as to revise it.

The approaches to the logical analysis of conditionals are classified into two basic kinds: the first one might be called ontic and the second one epistemic. The ontic approach defines all crucial semantic notions in terms of the concept of truth that is modelled in logic as a relation between sentences of a given language and states of affairs. In contrast, the epistemic approach is not based on the concept of truth but on the concept of assertibility. The basic difference between truth and assertibility is that assertibility is not relative to a given state of affairs but to an information state. In this work, the epistemic approach is preferred because there are significant reasons to doubt whether it is possible to assign to conditionals meaningful truth conditions. On the other hand, these sentences certainly have assertibility conditions, i.e. in some contexts (or information states) they can be justifiably asserted and in others not.

The main contribution of the thesis is the development of a new epistemic semantic framework called *semantics of strict assertibility*. It is argued that this framework provides us with useful tools for logical analysis of natural language, and it helps us to solve some problematic phenomena related to conditionals. Semantics of strict assertibility, in its most basic form, leads to a nonstandard epistemic semantics of classical (propositional) logic. However, the main advantage of this framework is that it allows for several extensions and generalizations that are not directly available in the standard semantics for classical logic. With the help of these extensions, some problematic features of classical logic can be easily solved (in particular, problems arising

from the interaction of implication with negation and disjunction).

The thesis is divided into four parts. The first three parts are focused on philosophical problems connected to conditionals. In the final part, there are formulated and proved original mathematical results that are related to the semantics of strict assertibility. From the mathematical viewpoint, the proposed framework can be understood as a synthesis of the so-called relational and algebraic semantics. In its general version, this synthesis provides new tools for the analysis of intuitionistic logic and its extensions.

Obsah

Úvod

Daniel Dennett nás ve své knize *Kinds of Minds* vybízí k tomu, abychom si představili tzv. skinnerovské tvory, kteří nemají pevně fixované behaviorální vzorce a jednají na základě strategie pokus-omyl. Proti takovýmto tvorům mají nespornou výhodu tzv. popperovští tvorové, kteří disponují nějakou vnitřní reprezentací vnějšího prostředí a díky této reprezentaci mohou ve vnitřním prostředí simulovat reálnou situaci a na ní nanečisto testovat možné důsledky svého chování. Takovými popperovskými tvory jsme nepochybně i my lidé, a jelikož u nás má vnitřní reprezentace vnějšího prostředí jazykový charakter, Dennett v této souvislosti uvádí Popperovu poznámku, že vzhledem k této dispozici si můžeme dovolit nechat místo sebe umírat své hypotézy.[1]

Domnívám se, že takovéto testování odehrávající se ve vnitřním prostředí popperovských tvorů můžeme chápat jako předobraz hypotetického myšlení, jehož produktem jsou pak hypotetické neboli kondicionální věty. Cílem předkládané práce je prozkoumat logický mechanismus fungování těchto vět.

Nicholas Rescher začíná svoji knihu věnovanou kondicionálním větám těmito slovy:

> Hypotetické uvažování [*iffy* thinking] je jedním z charakteristických prostředků toho druhu bytostí, kterým jsme se my lidé stali. Z hlediska intelektu je homo sapiens obojživelníkem, který žije a funguje ve dvou velmi odlišných sférách — v oblasti existující reality, kterou můžeme zkoumat pomocí pozorování, a v oblasti hypotetické projekce, kterou můžeme zkoumat v kreativní imaginaci. A tato druhá schopnost se stává klíčovou také pro tu první, když se chceme dostat za úroveň pouhé deskripce k racionálnímu vysvětlení. (Rescher, 2007, str. 1)

Kognitivní psychologové v podobném duchu uvádí, že slovo *jestliže* [if]

> fascinovalo filosofy po staletí a stimulovalo podobný zájem v nově vyvinutých disciplínách lingvistiky a kognitivní psychologie. Kondicionální konstrukce *jestliže …, pak …* se zdá být vtělením samotné esence

[1] Viz (Dennett, 1996).

> usuzování. Použití kondicionálního *jestliže* vyžaduje učinit předpoklady, tvořit hypotézy, zvažovat současné či budoucí možné světy. Pokud určitá podmínka byla, je či mohla by být splněna, pak z toho pro nás plynou důsledky.
>
> Není tedy překvapivé, že studium hypotetického usuzování pomocí vět formy *jestliže p, pak q* ... tvoří hlavní část psychologie deduktivního usuzování. (Evans, Newstead & Byrne, 1993, str. 29)

V souladu s tím se klasický autor v oblasti vývojové psychologie Jean Piaget domnívá, že hypotetické myšlení je zcela klíčové pro myšlení formální, které představuje dovršení vývoje lidských kognitivních schopností. K tomuto dovršení dochází podle Piagetovy teorie v rámci vývojového stádia *formálních operací*. Když se Piaget spolu s Bärbel Inhelderovou chystají popsat toto finální stádium kognitivního vývoje člověka, které následuje po vývojovém stádiu tzv. *konkrétních operací*, píšou:

> Konkrétní operace se týkají jenom tvrzení nebo představ, které jsou pokládány za pravdivé, a netýkají se pouhých hypotéz. Velkou změnou ve stádiu, kterým se nyní budeme zabývat, je naopak skutečnost, že subjekt rozlišuje formu a obsah, a tak se stává schopným správně uvažovat o výrocích, kterým nevěří nebo ještě nevěří, tj. o výrocích, kterými se zabývá jako ryzími hypotézami. Stává se tedy schopným vyvozovat nutné důsledky z pravd pouze možných. A to je začátek hypoteticko-deduktivního neboli formálního myšlení. (Inhelderová & Piaget, 2007, str. 119)

Stejně tak důležité se jeví hypotetické myšlení (resp. jeho produkt: kondicionální věty) z hlediska logiky. Všechny základní logické výrazy se zdají být nepostradatelné pro cokoli, co jsme vůbec ochotni označit jako jazyk. Mezi těmito základními výrazy má však výsadní postavení implikace, spojka kondicionálních vět. Belnap s Andersonem to ve svém klasickém díle formulují těmito slovy:

> Ačkoli existuje mnoho kandidátů na *logické spojky* jako konjunkce, disjunkce, negace, kvantifikátory a pro některé autory také identita, my se domníváme, že srdce logiky leží ve spojení *jestliže ..., pak —*. (Anderson & Belnap, 1975, 3)

Cílem těchto citací bylo motivovat čtenáře a poukázat na význam našeho tématu a jeho filosofickou, logickou a psychologickou důležitost. V této práci budou kondicionální věty studovány čistě z logického hlediska. Ukazuje se, že tento problém je nadmíru spletitý a při jeho řešení narážíme na četná úskalí. Přestože kondicionální věty hrají v našich životech klíčovou roli a neobešli bychom se bez nich při takových kognitivních aktivitách, jako je rozhodování, plánování, vysvětlování či predikování, snažíme-li se popsat logiku těchto vět, dostáváme se do paradoxních situací. Adam Rieger vystihl stav, v němž se v souvislosti s naším problémem nacházíme, když poznamenal, že všechny teorie kondicionálních vět mají s jistou nutností kontraintuitivní důsledky, neboť „naše předteoretické intuice jsou jednoduše nekonzistentní“ (Rieger, 2013, str. 3172). Ukazuje se totiž, že jisté velmi plausibilní obecné principy mají nepřijatelné důsledky. Na tuto paradoxní skutečnost budu v práci klást značný důraz. Je nepochybně důvodem toho, že přes enormní intelektuální úsilí a množství literatury, která byla na toto téma napsána, nemáme doposud k dispozici žádnou celkově uspokojivou a všeobecně přijatou logickou teorii kondicionálních vět.

V této práci je rozpracován sémantický přístup, který se neopírá o pojem pravdivosti, jak je tomu obvyklé, nýbrž místo toho klade do centra sémantiky pojem tvrditelnosti. Zásadní rozdíl mezi pravdivostí a tvrditelností spočívá v tom, že pravdivostní hodnota vět je relativní a vyhodnocuje se vůči stavům světa, zatímco jejich tvrditelnost je relativní vůči informačním stavům. Sémantika založená na pojmu tvrditelnosti je tedy epistemická. Oproti tomu můžeme charakterizovat sémantiku opírající se o pojem pravdivosti jakožto ontickou. Posun od pravdivosti k tvrditelnosti může vést k posunu na úrovni dalších sémantických pojmů jako je logická platnost či neplatnost vět, logická ekvivalence, vyplývání a konzistence. Například vyplývání je běžně považováno za vztah zachovávání či přenášení pravdivosti: závěr vyplývá z předpokladů, není-li možné, aby předpoklady byly pravdivé a závěr nikoli. V epistemické sémantice zachovává vyplývání tvrditelnost: závěr vyplývá z předpokladů, není-li možné, aby předpoklady byly tvrditelné a závěr nikoli. Uvidíme, že tato modifikace má vážné důsledky – a to jak na úrovni logické analýzy přirozeného jazyka, tak i na úrovni matematické reprezentace vztahu vyplývání.

Navržený sémantický přístup je vytvořen primárně s ohledem na kondicionální věty. Avšak není možné studovat logiku kondicionálních vět v izolaci od ostatních logických výrazů, neboť je určena zejména tím, jak implikace s těmito výrazy interaguje. Ke studiu každé logické spojky je tedy třeba zvolit holistický přístup a studovat ji ve světle logiky ostatních spojek. Proto ve své práci budu věnovat značné množství pozornosti též zejména disjunkci a negaci, jejichž interakce s implikací má obzvlášť matoucí rysy.

Epistemický přístup, který se chystám rozpracovat v této práci, vede k novému technickému aparátu využitelnému ke studiu logických systémů, které se nacházejí mezi intuicionistickou a klasickou logikou. Jedná se o jakousi nestandardní perspektivu, z jejíhož hlediska lze novým způsobem uchopit staré otázky a která též otevírá prostor pro kladení otázek zcela nových. Z matematického hlediska se jedná o přístup, který se nachází někde mezi dvěma standardními přístupy – relační (kripkovskou) sémantikou a algebraickou sémantikou – a představuje jakousi jejich syntézu. Jak filosofickou motivaci, tak i hlavní matematické výsledky související s tímto přístupem jsem již popsal v řadě textů, zejména pak v (Punčochář, 2013, 2014a,b,c, 2015a,b, 2016a,b,c).

Práce je rozčleněna do čtyř částí. V první části nastíním některé obecné otázky a zavedu základní pojmy a rozlišení. Mezi hlavní rozlišení patří rozdíl mezi ontickým a epistemickým přístupem. Druhá část představuje některé významné teorie v rámci ontického přístupu. Jedná se o standardní sémantiku klasické logiky, o teorii striktní implikace a Stalnakerovu logiku kondicionálních vět. Třetí část představuje dvě teorie, které lze zařadit pod hlavičku epistemického přístupu: pravděpodobnostní a intuicionistickou logiku. V dalších kapitolách třetí části formuluji vlastní aparát sémantiky tvrditelnosti s ohledem na jeho filosofickou motivaci. Ve čtvrté části pak uvádím původní matematické výsledky, které se sémantiky tvrditelnosti týkají.

V celé této práci budu používat určitou terminologickou zkratku, která je inspirována anglickou literaturou. Místo *kondicionální* či *podmínkové věty* budu používat kratší a tedy praktičtější termín *kondicionály*, který se v češtině obvykle užívá v jiném smyslu, totiž ve smyslu podmiňovacího slovesného způsobu.

Část I

Základní terminologická výbava

Kapitola 1

Základní pojmy a rozlišení

V této kapitole se budu věnovat některým základním otázkám a rozlišením, které souvisejí s problematikou kondicionálů. Nejprve se budu věnovat problematice vymezení této třídy vět. Navrhnu jedno sémantické a jedno syntaktické vymezení, ale poukáži na to, že obě tato vymezení mají jisté nevyhnutelné nedostatky. V rámci této třídy pak rozliším kondicionály indikativní a subjunktivní. Poté vysvětlím některá další základní rozlišení jako pravdivost/ tvrditelnost, ontický přístup/ epistemický přístup, sémantika/ pragmatika, objektový jazyk/ metajazyk.

1.1 Co jsou to kondicionální věty?

Jako kondicionály budu označovat věty tvaru *Pokud A, B*, příp. *Kdyby A, B*, kde A, B jsou nějaké věty jako např.

A Petr přijde o práci.

B Petr nebude mít peníze na splácení hypotéky.

Po dosazení a nezbytné úpravě tedy dostáváme kondicionály

1. Pokud Petr přijde o práci, nebude mít peníze na splácení hypotéky.

2. Kdyby Petr přišel o práci, neměl by peníze na splácení hypotéky.

Větám A a B budu v souladu se zaběhnutým územ říkat antecedent a konsekvent kondicionálu *Pokud A, B*, resp. *Kdyby A, B*. Tím jsem však ještě nepodal uspokojivé vymezení třídy všech vět, které bych chtěl označovat jako kondicionální. Např. věta

3. Jestliže Petr přijde o práci, nebude mít peníze na splácení hypotéky.

není ve tvaru *Pokud A, B*, a přesto je kondicionální. Mohl bych se tedy pokusit upřesnit vymezení a formulovat tuto definici:[1]

D1 Řekneme, že věta C je kondiconální, je-li synonymní s nějakou větou tvaru *Pokud A, B* či *Kdyby A, B*.

Přes svoji vágnost je toto vymezení užitečné v tom, že nám dává jisté kritérium, podle něhož jsme schopni v řadě konkrétních případů rozhodnout, zda se jedná o kondicionál či nikoli. Zvažme např. věty:

4. Když Petr přijde o práci, nebude mít peníze na splácení hypotéky.

5. Když Petr přišel o práci, neměl peníze na splácení hypotéky.

Tyto věty jsou ze syntaktického hlediska velmi podobné. Liší se pouze ve slovesném čase. Sémantický rozdíl je patrný, pokusíme-li se je přímočaře přetransformovat podle uvedené definice. Zatímco první věta zjevně říká to samé jako *Pokud Petr přijde o práci, nebude mít peníze na splácení hypotéky*, druhá (alespoň ve svém obvyklém použití) není s výsledkem transformace – tj. s větou *Pokud Petr přišel o práci, neměl peníze na splácení hypotéky* – synonymní. Věta 5 spíše říká něco jako *Petr přišel o práci a následně neměl peníze na splácení hypotéky.* Navržené vymezení tedy vede k závěru, že první věta kondicionálem je, zatímco druhá nikoli.

Nevýhodou vymezení D1 je, že operuje s pojmem synonymie, který je notoricky problematický. Je dokonce otázkou, zda nelze vůbec *každou* větu vyjádřit synonymně ve tvaru *Pokud A, B.* Podle jistých měřítek totiž např. věta

6. Praha je hlavní město České republiky.

kterou bychom nechtěli klasifikovat jako kondicionál, neříká nic jiného, než (ne zrovna přirozená) věta

7. Pokud je Praha tím, čím je, pak je hlavním městem České republiky.

Bylo by možné např. argumentovat, že věty 6 a 7 ze sebe vzájemně vyplývají či že jsou pravdivé za stejných okolností, a kdo považuje identitu podmínek pravdivosti za kritérium identity významu vět, musí tyto dvě věty považovat za synonymní. Podle vymezení D1 bychom pak měli považovat větu 6 za kondicionál, což je ovšem nežádoucí důsledek. Obecně řečeno, (přinejmenším problematickým) důsledkem vymezení D1 je, že žádná kondicionální věta není synonymní s žádnou větou, která není kondicionální.

Z druhé strany si zase můžeme povšimnout toho, že i mezi větami tvaru *Pokud A, B* se najde mnoho kontroverzních případů, jejichž „hypotetický“ charakter je pochybný. Příkladem může být věta

[1] Podobné vymezení najdeme např. v (Bennett, 2003, str. 4).

8. Pokud není talentovaný, je alespoň snaživý.

Ta se zdá být synonymní s větou *Není sice talentovaný, avšak je alespoň snaživý*, u které lze o kondicionalitě přinejmenším pochybovat. Další skupinu problematických případů uvedu v oddílu 1.2.

Snad je na základě zmíněných komplikací patrné, že vymezení D1 lze pokládat jen za jakousi heuristickou pomůcku a nikoli za přísnou definici třídy kondicionálních vět. Uvedu ještě jeden pokus o vymezení této třídy, který je (v kontrastu s předchozím) syntaktický v tom smyslu, že odkazuje pouze na tvar věty a vyhýbá se sémantickým pojmům, jako je synonymie. Bohužel vymezení tohoto druhu jsou obvykle nepostačující. Definice typu

> Daná věta je kondicionální právě tehdy, když je tvaru ...

nefungují z toho důvodu, že kondicionály nabývají velmi rozmanitých podob, jak naznačují následující příklady.

9. Jestli zítra bude pršet, zůstaneme doma.
10. Pakliže byl drzý, měl by být pokárán.
11. Budou-li hrát *Včera, dnes a zítra*, budou mít vyprodáno.
12. Když stihneme vlak, budeme tam včas.
13. Za předpokladu, že se budete chovat slušně, bude vám snížen trest na polovinu.
14. Nutnou podmínkou pro to, aby člověk mohl jít k volbám, je jeho plnoletost.

Je těžké postihnout tuto rozmanitost vyčerpávajícím způsobem. Následující vymezení, které je inspirováno definicí v (Declerck & Reed, 2001, str. 9), si neklade nároky na úplnost či exaktnost.

D2 Kondicionální věta (či kondicionál) je dvouvětné souvětí, v němž jedna věta je uvozena výrazem *pokud*, *jestli(že)*, *když*, *pouze když*, *kdyby*, *(dokonce) i když*, *(dokonce) i kdyby*, pomocí *-li* nebo pomocí nějakého jiného obdobného výrazu. Z třídy kondicionálních vět však explicitně vylučujeme takové dvouvětné útvary, v nichž je jedna z vět uvozena výrazem *jako kdyby* (resp. *jako když*) či výrazem *jestli* ve smyslu *zda*.

Z třídy kondicionálních vět jsou tedy explicitně vyloučeny věty jako

15. Chová se, jako kdyby mu to tu celé patřilo.

16. Nevím, jestli to udělal úmyslně.

Pomineme-li vágnost vymezení D2, kterou mu dodávají zejména slova *nebo pomocí nějakého jiného obdobného výrazu*, musíme konstatovat, že na jedné straně vymezení nepokrývá např. takové případy, jako je věta 13, kterou bychom mezi kondicionály zařadit chtěli, na druhé straně pokrývá mnoho problematických případů, jako je např. i výše uvedená věta 5, kterou jsme na základě vymezení D1 z třídy kondicionálů vyloučili.

V tomto oddílu jsem zformuloval jedno sémantické a jedno syntaktické vymezení třídy kondicionálních vět. Ani jedno z uvedených vymezení není bezvýhradně uspokojivé. Pravděpodobně žádná vyčerpávající definice ani není možná a s pojmem kondicionální věty se to má jako s pojmem hry u Wittgensteina, který ve slavné pasáži uvádí, že není nic, co by bylo všem hrám společné a co bychom tedy mohli využít pro definici tohoto pojmu. Existuje zde jen jakási komplikovaná síť podobností a příbuzností, které se všelijak objevují a mizí, jak přecházíme od jednoho příkladu hry k druhému (Wittgenstein, 1953, paragraf 66). Podobnou síť, zdá se, tvoří také kondicionální věty. Na periférii této sítě se nacházejí problematické případy, jejichž přijetí či zavrhnutí není více než otázkou terminologické konvence.

Těžkosti s vymezením kondicionálů však nepovažuji za důvod zcela rezignovat na hledání jistých opakujících se vzorců a logických jevů, které vykazují dostatečnou míru obecnosti, a na snahu tyto obecné jevy zachytit nějakou logickou teorií. Skutečnost, že nemohu na začátku této práce podat uspokojivou definici jejího předmětu, nepovažuji za velký nedostatek. Ztotožňuji se v tomto ohledu s Bennettem, který říká, že

> ve filosofii musíme často začít s hrubými kritérii – či s pouhým výčtem příkladů – abychom postihli dostatek členů nějaké třídy. Následnou analýzu toho, jak fungují, pak můžeme považovat za implicitní definici této třídy. (Bennett, 2003, 4-5)

V literatuře nepanuje shoda, co se týče problematických případů. Např. Declerck & Reed (2001) zahrnují mezi kondicionály mnohé věty, které jiní autoři zahrnout odmítají. Sem by spadala třeba následující věta, kterou třeba Bennett (2003, str. 5) explicitně vylučuje a která se v některých rysech podobá našemu příkladu 5.

17. Když jsi podal žádost ty, podám ji taky.

Rescher zase kupodivu chápe obrat *jako kdyby* (resp. *jako když*) jako variantu kondicionálního výrazu a mezi kondicionály tedy řadí i některé věty, které byly explicitně vyloučeny ve vymezení D2 (viz Rescher, 2007, str. 11).

1.2 Sušenkové kondicionály

Kdybychom trvali na tom, že kondicionální věty musí mít nějakou esenciální vlastnost, která z nich činí přirozený větný druh a kterou lze tedy použít při vymezení tohoto druhu, pak bychom za tuto vlastnost museli označit právě kondicionalitu, tedy to, že antecedent a konsekvent jsou ve vztahu podmíněnosti. Avšak i to lze zpochybnit, jak dokládají tyto příklady:

18. Jsou věci, které lidem nemůžeš říkat do očí, pokud víš, co tím myslím.

19. Pokud si chceš přečíst Hamleta, je v mé knihovně.

20. Pokud potřebuješ peníze, máš jich dost na svém účtu.

21. Pokud máš chuť, na stole jsou sušenky.

Takovýmto větám se podle Austinova příkladu 21 říká *biscuits conditionals*. Za povšimnutí stojí, že z věty *Na stole jsou sušenky, pokud máš chuť* můžeme odvodit větu *Na stole jsou sušenky, ať už máš chuť či nikoli*. To, zdá se, odporuje představě podmíněnosti jedné věty druhou a je to v kontrastu s takovými neproblematickými kondicionály jako např. *Na stole jsou sušenky, pokud je Karel nesnědl*, z čehož v žádném případě nemůžeme odvodit *Na stole jsou sušenky, ať už je Karel snědl či nikoli*.

Tyto „sušenkové kondicionály“ jsou netypické v tom, že se zdají být ekvivalentní se svým konsekventem. Např. pokud mám ve své knihovně Hamleta, pak mohu oprávněně vyslovit větu 19, která na druhou stranu implikuje to, že mám ve své knihovně Hamleta. Můžeme tedy pochybovat, zda se vůbec v těchto případech jedná o kondicionály. A najdeme skutečně autory, kteří se domnívají, že nikoli. Příkladem je třeba Rescher, který zdůrazňuje, že takové věty „jsou oděny do kondicionální formy, avšak nejsou v souladu s ideou konsekvence, tedy s tím, že jedno plyne z druhého.“ (Rescher, 2007, str. 3).

Spor o to, zda tento typ vět podřadit pod kondicionály, sehrál roli v diskuzích o svobodné vůli a ilustruje tak vysokou relevanci problému kondicionálních vět ve vztahu k tradičním filosofickým otázkám. Existence svobodné vůle předpokládá, že jsou situace, v nichž člověk může jednat jinak, než jak ve skutečnosti jedná. Determinismus je pak tvrzení, že každá událost je jednoznačně určena svými příčinami, což znamená, že v dané situaci se nemohlo stát nic jiného, než co se skutečně stalo, neboť jinak bychom připouštěli možnost více různých následků při jednoznačné danosti příčin. Důsledkem determinismu tedy je, že nikdy nikdo nemohl jednat jinak, než jak ve skutečnosti jednal.

Moore (1912) rozpouští očividný rozpor mezi těmito tezemi poukazem na víceznačnost výrazu *moci*. Věty typu *Mohl jsem klidně vstát a odejít* denodenně používáme a považujeme je za pravdivé (na rozdíl od vět jako *Mohl jsem uběhnout sto metrů za pět vteřin*). Zdá se, že pokud uznáme, že tyto věty jsou někdy pravdivé, musíme uznat existenci svobodné vůle.

Znamená to pak, že náš svět není deterministický? Dle Moorea nikoli. Celý Mooreův trik vypadá takto: Tvrzení jako *Mohl jsem klidně vstát a odejít* implicitně předpokládá dodatek *kdybych si to zvolil* a jedná se tedy o hypotetický a nikoli kategorický výrok. Dodatek *kdybych si to zvolil* modifikuje význam slova *moci*. Ve větě *Nikdo nemohl jednat jinak, než jak ve skutečnosti jednal*, míní-li se jako výraz determinismu, tento implicitní dodatek není přítomen. Slovo *mohl* zde tedy znamená něco jiného než ve větě *Mohl jsem vstát a odejít* a ke sporu nedochází. V diskuzích o svobodné vůli se tento vlivný postřeh označuje jako *kondicionální analýza*. Na tomto argumentu Moore zakládá svoji verzi kompatibilismu, tj. teze, že svobodná vůle je s determinismem slučitelná čili kompatibilní.

Austin (1961) namítá Mooreovi, že dodatek *kdyby(ch) si to zvolil* je redundantní, neboť pokud někdo mohl jednat jinak, než jak ve skutečnosti jednal, pak to mohl právě nezávisle na tom, co si zvolil. V jistém slova smyslu zde tedy kondicionalita není ve hře. Dle Austina věta *Mohu to učinit, pokud se tak rozhodnu* svým tvarem vypadá jako skutečný kondicionál, ale ve skutečnosti jím není, neboť je ekvivalentní s větou *Mohu to učinit*. Tato věta se svou logikou tedy podobá větě 21, tj. větě *Na stole jsou sušenky, pokud máš chuť*, která také vypadá jako kondicionální, avšak jak jsem již uvedl, žádný vztah podmíněnosti nevyjadřuje, neboť informuje, že na stole jsou sušenky, ať už má adresát této věty chuť či nikoli.

Austin zdůrazňuje, že zdánlivost kondicionality se stává zjevnou zejména tím, že pro věty tohoto typu neplatí logické pravidlo kontrapozice:

Pokud A, B/Pokud ne-B, ne-A.[2]

Pro mnoho kondicionálních vět toto pravidlo vypadá velmi plausibilně. Např. z věty

22. Pokud je Karel právník, pak má (jistě) dobrý plat.

můžeme spolehlivě odvodit

23. Pokud Karel nemá dobrý plat, pak to (jistě) není právník.

[2]Tento zápis čteme takto: Z věty tvaru *Pokud A, B* můžeme odvodit větu *Pokud ne-B, ne-A*. Zápis *Pokud ne-B, ne-A* je zkratkou za *Pokud není pravda, že B, není pravda, že A*.

Avšak u žádné z vět 18-21 analogické odvození oprávněné není. Vypadá např. nerozumně, odvodíme-li z věty *Pokud potřebuješ peníze, máš jich dost na svém účtu* větu *Pokud nemáš na svém účtu peníze, tak peníze nepotřebuješ.*

Uvedený jev, totiž že pro tento druh vět kontrapozice nefunguje, lze interpretovat dvěma způsoby. Můžeme spolu s Austinem odmítnout zařadit tyto věty mezi kondicionály. Nebo můžeme spolu s mnoha autory jejich zařazení mezi kondicionály uznat, ale pak musíme vysvětlit, proč v uvedených příkladech kontrapozice nefunguje, přestože se ve většině ostatních případů jedná o spolehlivý princip. Osobně se kloním k druhé variantě.

Aby bylo patrné, že popsaný problém s kontrapozicí je systematický, uvádím ještě další případy, kde kontrapozice selhává ve specifickém tvaru: *Pokud A, ne-B / Pokud B, ne-A.*

24. Pokud pachatel (vůbec) zanechal nějaké stopy, pak žádné zjevné.

25. Pokud udělal chybu, tak ne velkou.

26. Pokud přijdu pozdě, tak ne o moc.

27. Pokud se dá vůbec nazývat učitelem, tak ne dobrým.

28. Jestli se bojíš, tak to není poznat.

Tyto z logického hlediska vzájemně příbuzné věty mají s výše uvedenými sušenkovými kondicionály společné to, že se zdají být ekvivalentní se svým konsekventem. Právě z tohoto důvodu u nich také selhává kontrapozice.

Silným obecným argumentem, který ukazuje, že podmíněnost konsekventu antecedentem paradoxně není esenciální vlastností kondicionálních vět, je poukaz na to, že právě absenci podmíněnosti můžeme vyjádřit i pomocí kondicionálů, a to třeba takovýmto způsobem: Pravdivost věty B na větě A nijak nezávisí. B je pravdivá, ať už je věta A pravdivá či nikoli. Tedy B je pravdivá, pokud je pravdivá A, a B je pravdivá, i pokud A pravdivá není.

1.3 Indikativní a subjunktivní kondicionály

Zabývali jsme se zatím otázkou, co je a co není kondicionální větou. I když jsem nepodal žádnou exaktní odpověď, předpokládejme dále, že máme o tomto typu vět jistou základní představu. Můžeme tedy přistoupit k otázce, jak se tyto věty dále dělí, tj. jakou další klasifikaci v rámci tohoto typu bychom měli přijmout. Už z výše řečeného je patrné, že tyto věty netvoří jednotný jazykový typ, který by podléhal nějaké univerzální logice. Tuto námitku lze podpořit ilustrací toho, že různé kondicionální věty fungují velmi různým způsobem. Zvažme opět příklady:

29. Pokud sníš tyto houby, budeš mít halucinace.
30. Pokud se v bytě svítí, Novákovi jsou doma.
31. Pokud je dnes pondělí, tak včera byla neděle.
32. Pokud máš chuť, na stole jsou sušenky.

Ve větě 29 je patrný kauzální vztah. Událost vyjádřená v antecedentu kauzálně vede k události vyjádřené v konsekventu a tento fakt nás ospravedlňuje daný kondicionál tvrdit. Ve větě 30 takovýto kauzální vztah není patrný. Pokud je zde kauzalita přítomná, její směr je opačný směru tohoto kondicionálu. To, že se v bytě svítí, není příčinou toho, že jsou Novákovi doma. Spíše to, že jsou Novákovi doma, může být příčinou toho, že se v bytě svítí. Ve větě 31 již nenajdeme žádný kauzální vztah. Antecedent může posloužit jako racionální důvod platnosti konsekventu, ale to, co je vyjádřeno v antecedentu a konsekventu, zajisté není svázáno vztahem příčinnosti. S větou 32 jsme se již setkali. Zde jako by chyběl vůbec jakýkoli kondicionální vztah mezi antecedentem a konsekventem. Antecedent pouze poukazuje na situaci, v níž je relevantní vyslovení konsekventu.

Rozmanitost fungování kondicionálních vět je značná. Proto je otázkou, zda lze vůbec budovat obecnou logickou teorii těchto vět. Existuje něco jako společné logické jádro, které všechny tyto věty sdílejí a na základě kterého by bylo možné budovat obecnou logiku kondicionálních vět? Nebo je naopak nezbytné nejprve provést klasifikaci do dostatečně jednotných podskupin a až poté pro každou takovou skupinu zvlášť charakterizovat její speciální logiku?

Velká část relevantní logicko-filosofické literatury se shoduje v tom, že je nutné třídu kondicionálních vět klasifikovat, ale akceptuje minimalistickou klasifikaci do dvou základních tříd.[3] I když vhodná terminologie zde bývá častým předmětem sporů, budeme říkat, že první z těchto tříd tvoří indikativní, druhou subjunktivní kondicionály. Rozdělení je částečně předznačeno ve vymezení D1. Jednoduchým, i když hrubým gramatickým kritériem, podle něhož lze v typických případech rozhodnout, do které třídy daná věta spadá, je toto:

> Pokud jsou přítomná slovesa v podmiňovacím způsobu, jedná se o subjunktivní kondicionál. V opačném případě jde o kondicionál indikativní.

Podobné vymezení najdeme třeba v (Bennett, 2003, str. 10). Doposud jsme uváděli jako příklady především indikativní kondicionály. K již uvedeným větám můžeme přidat následující.

[3] Zde bychom mohli uvést velmi dlouhý seznam příkladů. Tak alespoň namátkou, s touto základní klasifikací pracuje např. (Bennett, 2003), (Lycan, 2001), (Mares, 2004), (Gauker, 2005), (Veltman, 1985).

33. Pokud lže, tak i krade.

34. Když všechno půjde tak, jak má, vrah bude dopaden do konce týdne.

35. Jestliže sečteme dvě lichá čísla, získáme číslo sudé.

Mezi subjunktivní hypotetické soudy pak spadají takové věty jako

36. Kdybych měl víc peněz, více bych cestoval.

37. Kdyby Petr stihl vlak, tak by tady už byl.

38. Kdybych já měl křídla, to bych se, kamarádi, jinak uplatnil.[4]

Tato práce se téměř výhradně zabývá indikativními kondicionály. Subjunktivním kondicionálům je věnována alespoň kapitola 3, kde také řeknu něco více o tom, v čem spočívá rozdíl mezi těmito dvěma typy. K této problematice se pak ještě vrátím v oddílech 6.4 a 12.4.

Specifickým rysem indikativních kondicionálů je, že jejich typické užití se děje – na rozdíl od subjunktivních kondicionálů – v kontextech, kde antecedent představuje jistou otevřenou možnost. Z tohoto důvodu budu v příkladech indikativních kondicionálů často volit věty v budoucím čase, tak jako třeba v příkladu 34. Výhodou takových vět je, že otevřenost antecedentu je vzhledem k budoucímu času zaručena automaticky. Situace by byla jiná, kdybychom větu formulovali v minulém čase:

39. Pokud šlo všechno tak, jak mělo, vrah byl dopaden do konce týdne.

Užití této věty dává smysl pouze v takovém kontextu, kde mluvčí neví, jestli šlo všechno tak, jak mělo, a jestli byl vrah dopaden do konce týdne. Formulace v budoucím čase nám obvykle automaticky sugeruje nějaký typický kontext užití dané věty. Formulace v minulém čase v tomto ohledu často selhává. Proto se mi zdá přehlednější užívat v příkladech věty v budoucím čase. Na tomto rozhodnutí však nezávisí nic podstatného a každá obecná teze, která bude ilustrována takovými příklady, by mohla být ilustrována (třebaže někdy méně přehledně) pomocí vět v čase minulém či přítomném. Tato poznámka je podstatná zejména proto, že budu někdy hovořit o pravdivostních hodnotách antecedentu a konsekventu a je notorickým předmětem sporů, zda věty o budoucnosti mají pravdivostní hodnotu. Tento spor však budu nadále ignorovat, jelikož se domnívám, že je založen na nedorozumění. Věta *Zítra nastane* A je pravdivá v daném čase, když následujícího dne nastane A. To považuji za truismus, který nehodlám nijak zpochybňovat. Věty o budoucnosti mají tedy jasné podmínky pravdivosti. Věta o tom, co se stane zítra, má

[4] Větu 38 v Čapkových *Bajkách a podpovídkách* vyslovil výkal.

pravdivostní hodnotu i tehdy, když jedinou možnou metodou, jak tuto hodnotu zjistit, je počkat do následujícího dne. Z tohoto důvodu se domnívám, že naznačené podmínky pravdivosti nijak nezávisejí ani na determinismu – jak by se mohlo nabízet – a jsou tedy zcela neškodné.

Kondicionály je možné klasifikovat z mnoha dalších hledisek. Logicko-filosofický přístup obvykle abstrahuje od mnoha odlišností mezi jednotlivými kondicionálními větami a tyto odlišnosti považuje za logicky irelevantní. Logicko-filosofické hledisko je tedy zaměřeno více na podobnosti než na rozdíly, a proto je výsledná klasifikace minimalistická. Proti tomu stojí maximalistické lingvistické hledisko, které vychází z bohatého empirického materiálu a jehož cílem je co nejúplnější a nejpestřejší klasifikace (viz např. Declerck & Reed, 2001). Takový přístup tedy akcentuje spíše rozdíly než podobnosti. Charakter této práce je jednoznačně logicko-filosofický. Spokojím se tedy spíše s minimalistickou klasifikací. Z logického hlediska by však měl být rozhodně zohledněn ještě rozdíl mezi obecnými a partikulárními kondicionálními větami. Obecnými kondicionály míním věty jako

40. Pokud člověk okrádá druhé, trest ho nemine.

partikulárními pak např.

41. Pokud ty peníze ukradl pan Procházka, koupil si za ně alkohol.

Volně řečeno, v obecných kondicionálech vyjadřujeme obecný vztah dvou typů událostí (typ člověka okrádajícího druhé a následný trest). V partikulárních pak vztah dvou konkrétních událostí (krádež peněz panem Procházkou a následný nákup alkoholu).

Mezi těmito dvěma typy kondicionálů nebudu vždy striktně rozlišovat, nebude-li to ohrožovat obsah výkladu. Obecně však za primární budu považovat partikulární kondicionály, které vskutku spojují dvě jednotlivé věty A, B ve výslednou strukturu *Pokud A, B.* Naproti tomu obecné kondicionály jsou spíše věty tvaru

Pro každé x, pokud P(x), Q(x).

Např. v našem příkladě

42. Pro každé x, pokud x je člověk okrádající druhé, pak x bude potrestán.

Obecné kondicionály tedy z logického pohledu nejsou prostým spojením dvou úplných vět, nýbrž mají komplexnější logickou strukturu, která v sobě kondicionální spojení obsahuje jako svoji složku.

1.4 Pravdivost a tvrditelnost

I partikulární kondicionální věty jsou však složitým jazykovým útvarem. Jejich použití představuje komplexní řečový akt, který lze považovat za syntézu dvou aktů jednodušších. V prvním aktu A stanovíme hypotetickou podmínku a v rozsahu této podmínky učiníme druhý akt B. Akt B může mít rozmanitou povahu, v důsledku čehož rozlišujeme takové řečové akty jako kondicionální otázky, příkazy, sliby, tvrzení atd. To ilustrují následující věty:

43. Pokud zavolá, co mu mám říct?
44. Pokud zítra bude hezky, posekej trávník!
45. Pokud mi půjčíš peníze, slibuji, že ti je do týdne vrátím.
46. Pokud nás chytnou, půjdeme sedět.

Nás v této práci bude zajímat zejména logická povaha vět, jejichž použití klasifikujeme jako akt kondicionálního tvrzení. Kondicionální tvrzení pokládáme za specifický případ tvrzení (podobně jako kondicionální otázka či příkaz je specifickým případem otázky či příkazu).

Kondicionální věty, kterými se budeme zabývat, tak spadají do obecnější kategorie vět, kterým se říká *výroky*. Termín *tvrzení* používám ve smyslu řečového aktu, v němž je kladen nějaký výrok. Výrok je obvykle vymezován jako věta, která je nositelem pravdivostní hodnoty, tj. je pravdivá nebo nepravdivá. V této práci budu preferovat jiné vymezení: Výrok je výraz, který lze tvrdit v tom smyslu, že jeho (typické) použití klasifikujeme jako akt tvrzení. Přestože následující věta je nepravdivá, její vyslovení je nepochybně aktem tvrzení a jedná se tedy o výrok.

47. Obvod Země na rovníku je 10 000 km.

Označíme-li výrazy, jejichž užití představuje akt tvrzení, jako *potenciálně tvrditelné*, pak můžeme konstatovat, že např. věta

48. Kolik planet má naše sluneční soustava?

není potenciálně tvrditelná a není tedy výrokem ve smyslu výše řečeného. Otázka, zda skupina výrazů, které jsou nositeli pravdivostní hodnoty, je identická s potenciálně tvrditelnými výrazy, představuje jeden z hlavních problémů této práce. Centrální tezí pak bude, že tyto dvě skupiny výrazů jsou odlišné: Co je nositelem pravdivostní hodnoty, to je potenciálně tvrditelné, avšak budu hájit názor, že ne vše, co je potenciálně tvrditelné, je také nositelem pravdivostní hodnoty. Uvedu argumenty, podle nichž právě kondicionály představují významný příklad vět, které jsou potenciálně tvrditelné, avšak nemají podmínky pravdivosti.

Tvrzení jednoduché věty A je tvrzení, že věta A je pravdivá. Avšak není nijak patrné, že by měl tento slogan platit i v případě složených vět. Tvrzení kondicionální věty *Pokud A, B* nemusí být interpretováno jako tvrzení, že tato věta je pravdivá, nýbrž třeba právě jako kondicionální tvrzení, že věta B je pravdivá za předpokladu, že je pravdivá věta A. Tento subtilní rozdíl nemusí být zatím zcela srozumitelný. Později se mu budu věnovat podrobněji. Bude však užitečné, když již nyní načrtnu některé základní pojmy související s touto problematikou. To je úkolem následujícího oddílu.

1.5 Ontický a epistemický přístup

Tak jako se věty, které jsou nositeli pravdivostní hodnoty, dělí na pravdivé a nepravdivé, tak můžeme také rozdělit věty, které jsou potenciálně tvrditelné, na oprávněně a neoprávněně tvrditelné. V kontextu velmi rozšířené filosofické představy související s tzv. korespondenční teorií pravdy, která sahá až k Aristotelovi, jsou pravdivostní hodnoty vět relativní vůči stavům světa. To znamená, že musí být fixován nějaký stav věcí (stav světa), relativně vůči němuž věta nabývá svoji pravdivostní hodnotu. Bez tohoto stavu by žádnou pravdivostní hodnotu neměla. Slovy Wittgensteina:

> Věta může být pravdivá nebo nepravdivá jen tak, že je obrazem skutečnosti. (Wittgenstein, 1922, 4.06)

Oproti tomu pojmy oprávněné a neoprávněné tvrditelnosti nejsou relativní vůči stavu světa, nýbrž spíše vůči nějakému systému přesvědčení či, jak budu říkat, vůči informačnímu stavu. Jako příklad zvažme vyšetřování nějakého zločinu a předpokládejme, že A je věta *Pachatelem zločinu je X*, kde X je jméno nějaké konkrétní osoby. Vzhledem ke stavu světa je věta A buď pravdivá, nebo nepravdivá. To, zda může vyšetřovatel větu A oprávněně tvrdit či nikoli, je jiná otázka, která je relativní vůči tomu, v jakém stavu se nachází vyšetřování, čili kolik evidence bylo během vyšetřování nashromážděno. Určitý stav vyšetřování představuje nějaký informační stav. S vývojem vyšetřování, tj. se změnou informačního stavu, se může měnit status věty A, co se její oprávněné tvrditelnosti týče, avšak její pravdivostní hodnota zůstává stále stejná.

Budu-li hovořit v této práci o *tvrditelnosti*, budu mínit právě oprávněnou tvrditelnost. Na základě terminologie, která byla zatím zavedena, je tedy jasné, že tvrditelné může být pouze to, co je potenciálně tvrditelné, ale některé potenciálně tvrditelné věty nejsou tvrditelné ve smyslu oprávněné tvrditelnosti. Výsledek předchozích úvah je shrnut jako následující princip, který bude hrát později klíčovou roli:

> Tvrditelnost je relativní vůči danému informačnímu stavu, zatímco pravdivost je relativní vůči danému stavu světa.

Situace se komplikuje tím, že u mnoha vět (ne-li u všech) je také třeba vzít v potaz kontext jejich výpovědi k tomu, aby byla určena jejich pravdivostní hodnota. A jak ještě uvidíme, kontext je jen speciální případ informačního stavu. Věta *Petr měl včera v osm hodin večer schůzku s milenkou* nemá bez dalšího žádnou pravdivostní hodnotu, i když ji vztáhneme k nějakému stavu světa. Důvodem je, že z této věty samotné není patrné, o jakém Petrovi je řeč a jaký den měla mít dotyčná osoba schůzku. Tyto parametry je nejprve potřeba dourčit, což se stane v kontextu konkrétního užití této věty. Jsou-li tyto parametry dourčeny, pak věta získá relativně vzhledem k danému stavu světa nějakou pravdivostní hodnotu. Obvykle se tento notoricky známý fenomén řeší tak, že řekneme, že kontext dourčil, jakou propozici věta vyjadřuje, a následně může být vyhodnocena pravdivostní hodnota této propozice. Tvrditelnost závisí na informačních stavech (či kontextech) jiným způsobem než pravdivost. Zjednodušeně tedy lze říct, že kontext dourčí, jakou propozici věta vyjadřuje, a poté se vyhodnocuje pravdivost vůči jednotlivým světům a tvrditelnost vůči informačním stavům.

Logicko-filosofická literatura, která se váže k problematice kondicionálních vět, je velmi bohatá a nepřehledná. Avšak můžeme v ní jasně identifikovat dva základní přístupy, v nichž se jednotliví autoři liší. Podobně jako Hansson (1995) budu první z těchto přístupů označovat jako *ontický* a druhý jako *epistemický*. Ontický přístup vychází z přesvědčení, že sémantická analýza věty musí spočívat v identifikaci jejích podmínek pravdivosti. Prototypickým vyjádřením této představy je Wittgensteinova teze:

> Rozumět větě znamená vědět, co je zkrátka tak, když je pravdivá. (Wittgenstein, 1922, 4.024)

Ontický přístup aplikuje toto východisko i na případ kondicionálních vět. Ovšem jak již bylo zmíněno a jak později podrobně vyložím, proti tomuto hledisku byly formulovány vážné argumenty, které zpochybňují předpoklad, že kondicionálům lze vůbec nějakou pravdivostní hodnotu smysluplně připisovat.

Pokud odmítneme to, že kondicionální věta je nositelem pravdivostní hodnoty, musíme zvolit nějaký alternativní způsob sémantické analýzy. Ten může být založen na pozorování, že i kdyby nebylo možné mluvit o pravdivosti či nepravdivosti, je nepochybné, že v jistém kontextu či vzhledem k jistému informačnímu stavu jsme či nejsme oprávněni danou kondicionální větu akceptovat či tvrdit. Sémantická teorie pak může spočívat ve formulaci podmínek, které musí být splněny, aby kondicionální věta byla (oprávněně) tvrditelná. Podmínky pravdivosti jsou nahrazeny podmínkami tvrditelnosti. V tom spočívá epistemický přístup.

Klasická logika se svou standardní sémantikou, které se budu věnovat v kapitole 4, je příkladem ontického přístupu k sémantice. V souvislosti s kondicionálními větami jsou významnými představiteli ontického přístupu také teorie Roberta Stalnakera a Davida Lewise. Mezi představitele epistemického přístupu spadají např. Ernest Adams, Dorothy Edgingtonová a Jonathan Bennett. Přístup preferovaný v této práci je epistemický.

1.6 Sémantika a pragmatika

Epistemický přístup odporuje tradiční představě, že tvrditelnost je pojem, který spadá do oblasti pragmatiky a nikoli sémantiky. Rozlišení mezi pragmatikou a sémantikou je obvykle připisováno Charlesi Morrisovi, který v (Morris, 1938) charakterizoval syntax jako nauku o vztazích mezi znaky v abstrakci od toho, co označují a jak je používáme; sémantiku jako nauku o znacích s ohledem na to, jak se vztahují k mimojazykové skutečnosti, tedy k tomu, co označují, k jejich významu, avšak v abstrakci od uživatelů jazyka; a konečně pragmatiku jako nauku o znacích ve vztahu k jejich uživatelům. Takto vymezené rozlišení mezi sémantikou a pragmatikou se stalo pro řadu logiků určitým paradigmatem zejména díky Carnapovi (viz zejména Carnap, 1942). Carnapův přístup je však také předmětem kritiky (viz např. Peregrin, 1999). Možnost vést ostrou hranici mezi sémantikou a pragmatikou byla zpochybněna filosofií pozdního Wittgensteina a jeho tendencí ztotožnit význam výrazu se způsoby jeho užití (viz Wittgenstein, 1953). Z tohoto hlediska se jeví rozlišení mezi sémantikou a pragmatikou jako problematické. Užitečnost tohoto rozlišení byla naopak ilustrována v (Grice, 1967), klasickém díle, které nastartovalo intenzivní zájem o oblast pragmatiky a o které se budeme silně opírat i v této práci.

Jak bude patrné, každá sémantická teorie kondicionálních vět má nevyhnutelně některé nežádoucí aspekty, k jejichž vysvětlení je potřeba pragmatika. Každá sémantická teorie tedy vyžaduje pragmatiku jako svůj doplněk. Pro tento účel je rozlišení mezi sémantikou a pragmatikou klíčové. Pro rozdíl mezi těmito dvěma oblastmi svědčí fakt, že je možné říkat pravdu a přitom hovořit zavádějícím způsobem. To poukazuje na fakt, že lze odlišit podmínky pravdivosti od podmínek vhodného užití dané věty. První tradičně spadá do sémantiky a druhé do pragmatiky. Kontroverzním bodem této práce, který ovšem zdaleka není bezprecedentní, bude jakýsi posun ve vnímání hranice mezi sémantikou a pragmatikou. Jisté aspekty pojmu tvrditelnosti, který je obvykle vnímán jako čistě pragmatický pojem, budou integrovány do oblasti sémantiky. Hranice mezi pragmatikou a sémantikou tím však nebude zrušena, jen mírně modifikována. Podrobně bude tato problematika vyložena v třetí části práce.

1.7 Objektový jazyk a metajazyk

Mezi základní rozlišení přidám na závěr ještě jedno, které je klíčové pro celou moderní logiku. Jde o rozlišení mezi objektovým jazykem a metajazykem. Předmětem této práce je logika kondicionálních vět přirozeného jazyka. Metodou zkoumání je pak vytváření matematických modelů jejich fungování. Tyto modely využívají jednoduchých, uměle vytvořených, formálních jazyků. Takto vytvořený formální jazyk je objektem, který neslouží ke komunikaci, ale pouze k tomu, abychom na něm nahlédli nějaké zákonitosti. Je tedy jazykem, o kterém něco vypovídáme, ale jímž nehovoříme, a proto ho označujeme jako *objektový jazyk*, neboť vystupuje pouze ve funkci objektu našeho studia. Jazyk, který při zkoumání fakticky užíváme k formulaci teorií, označujeme jako *metajazyk*.

Takto chápané pojmy objektového jazyka a metajazyka se poněkud odchylují od původního pojetí, se kterým pracuje Tarski (1944). U Tarského je rozlišení mezi objektovým jazykem a metajazykem dáno kontextem – nejde tedy o absolutní kategorie. Každý jazyk se v jistém kontextu může stát objektovým jazykem a v jiném metajazykem. Naproti tomu bude v této práci objektový jazyk pojat jako fixně objektový, tj. stále bude hrát roli objektu a nikdy nebude vystupovat ve funkci metajazyka.

Základním objektovým jazykem, který budu hojně využívat, je standardní jazyk výrokové logiky. Věty tohoto jazyka, kterým též říkáme formule, jsou vystavěny z nějaké sady atomických formulí pomocí operátorů negace ($\neg$), konjunkce ($\wedge$), disjunkce ($\vee$) a implikace ($\rightarrow$). Mezi základní symboly tohoto jazyka patří též závorky. Přesně řečeno, množina formulí tohoto jazyka je definována jako nejmenší množina posloupností základních symbolů obsahující všechny atomické formule (jakožto jednočlenné posloupnosti) a splňující následující podmínky:

Pokud φ je formule, $\neg\varphi$ je také formule.

Pokud φ, ψ jsou formule, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi)$ jsou také formule.

Tento jazyk budu označovat jako L a budu ho příležitostně modifikovat tím, že k němu budu přidávat další operátory. Ve čtvrté, závěrečné části práce, která má vysoce technický charakter, budu (z technických důvodů) používat variantu jazyka L, v níž je negace odstraněna ze sady základních symbolů a místo ní je používána konstanta pro spor ($\bot$). Negace pak může být dodatečně definována jako implikace sporu ($\neg\varphi =_{def} \varphi \to \bot$). Atomické výroky objektového jazyka budu označovat písmeny

$$p, q, r, \ldots$$

Řecká písmena

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varphi, \psi, \chi, \ldots$$

budu používat jako proměnné za věty daného objektového jazyka. V méně formálních úvahách, kde budu hovořit o přirozeném jazyce přímo, tedy nikoli prostřednictvím objektového jazyka, budu používat (jako doposud) proměnné

A, *B*, *C*, ...

které zastupují věty přirozeného jazyka.

1.8 Shrnutí

V této kapitole jsem se zabýval některými základními pojmy této práce. Ukázal jsem, že kondicionální věty tvoří obtížně vymezitelný celek, v rámci kterého můžeme rozlišit indikativní a subjunktivní kondicionály. Tato práce se bude věnovat především indikativním kondicionálům. Dále jsem popsal rozdíl mezi ontickým a epistemickým přístupem k sémantické analýze kondicionálů. Centrálním pojmem prvního z těchto přístupů je pojem pravdivosti, u druhého je to pojem tvrditelnosti. Epistemický přístup nás tedy nutí pracovat s netradičním pojetím rozdílu mezi sémantikou a pragmatikou, protože centrální pragmatický pojem (tvrditelnost) staví do centra sémantiky. Na závěr kapitoly jsem stručně představil rozdíl mezi objektovým jazykem a metajazykem a zavedl standardní jazyk výrokové logiky jako formální objektový jazyk, se kterým budeme nadále pracovat.

Kapitola 2

Možné světy

Pojem možného světa se stal v průběhu dvacátého století jedním z klíčových nástrojů moderní logiky (viz Copeland, 2002; Divers, 2002) a bude hrát důležitou roli i v této práci. K úspěchu pojmu možného světa přispěla řada autorů, zejména pak Ludwig Wittgenstein (1922), Rudolf Carnap (1947), Jaakko Hintikka (1962) a Saul Kripke (1959, 1963a,b, 1965a,b). Poslední ze jmenovaných autorů ukázal ve zmíněných pracích potenciál tohoto pojmu tím, že s jeho pomocí formuloval elegantní formální sémantiku pro intuicionistickou logiku a rozmanité systémy modální logiky zahrnující systémy striktní implikace C.I. Lewise. Později se s některými z těchto systémů, které původně existovaly pouze v axiomatické podobě, seznámíme blíže (viz kapitoly 5 a 9). V této kapitole se zaměřím na čistě filosofické aspekty pojmu možného světa. K možným světům se dostaneme skrze fenomén extenzionality a intenzionality, který úzce souvisí s Fregovou distinkcí mezi smyslem a významem.

2.1 Smysl a význam

Za otce moderní logiky je považován Gottlob Frege. Základní systém jeho logiky se poprvé objevil v knize *Begriffsschrift* (Frege, 1879). Nyní však bude vhodnější, když se podíváme na jinou Fregovu slavnou práci, totiž článek (Frege, 1892), kde si autor v úvodu klade otázku, jak je možné, že věta, která tvrdí identitu, tj. je tvaru $X = Y$, představuje v mnoha případech velmi netriviální tvrzení, a má tedy vysokou informační hodnotu. Fregovým klasickým příkladem je věta

49. Večernice je totožná s Jitřenkou.

Výraz *je totožná s* v této větě se chová ze syntaktického hlediska podobně jako jakýkoli jiný dvoumístný predikát. Tento výraz spojuje dvě jména a vytváří z nich větu. Podobně výraz *je vyšší než* spojuje dvě jména a vytváří tím např. větu *Petr je vyšší než Karel.* Avšak věta *Petr je vyšší než Karel* vypovídá něco o Petrovi a Karlovi a její informační hodnota spočívá v tom, že nám sděluje jistý netriviální vztah mezi těmito lidmi. Tento vztah je objektivní v tom smyslu, že je to vztah mezi objekty ve světě, vztah existující nezávisle na tom, jaké výrazy k označení těchto objektů používáme. V analogii k tomuto případu bychom mohli očekávat, že i výraz identity vyjadřuje nějaký objektivní vztah.

Avšak pak by věta 49 říkala pouze to, že planeta Venuše (kterou označuje jak výraz *Večernice*, tak i výraz *Jitřenka*) je totožná sama se sebou. Taková věta by byla zcela neinformativní, resp. říkala by totéž co věta *Večernice je totožná s Večernicí.* Tak tomu zjevně není. Věta 49 nám sděluje nějakou netriviální informaci. Jak je to možné? To je základní otázka Fregova článku.

Frege říká, že abychom vyřešili tento problém, měli bychom vzít v úvahu nejen to, co výrazy označují, nýbrž také jak to označují. A je-li zde řeč o výrazech, jde v tomto kontextu především o jména, jelikož výraz identity spojuje právě jména. Přičemž Frege chápe jména poněkud jinak, než jsme běžně zvyklí. Do této kategorie výrazů nespadají pouze běžná jména jako *Aristotelés*, *Praha*, *Venuše*, ale také výrazy jako *autor spisu Etika Nikomachova*, *hlavní město ČR*, či *planeta, která je nejblíže Slunci.* Jde tedy i o výrazy, které úspěšně, nebo také někdy neúspěšně, označují jediný objekt a kterým bychom s Russellem mohli říkat *určité deskripce.* Zdá se, že Frege – podobně jako Russell – chápe běžná jména (např. *Aristotelés*) jako pouhé zkratky za nějakou sadu takovýchto deskripcí. Tak například výraz *Večernice* chápejme pro jednoduchost jako zkratku za výraz *první viditelný objekt na večerním nebi* a výraz *Jitřenka* nechť je zkratkou za *poslední viditelný objekt na ranním nebi* (přičemž máme na mysli objekty odlišné od Slunce a Měsíce).

Frege rozlišuje mezi významem jména a smyslem jména. Význam jména je ten objekt, který jméno označuje. Smyslem jména je pak způsob danosti významu, tj. způsob, jakým jméno svůj objekt označuje. Říkáme, že výraz označuje svůj význam a vyjadřuje svůj smysl. Jeden objekt může být dán různými způsoby. Tak např. výrazy *Večernice* a *Jitřenka* mají stejný význam, ale odlišný smysl, a právě v tom spočívá informační hodnota věty 49.

Fregova terminologie je poněkud matoucí, protože pod termínem *význam* (Bedeutung) si často představíme spíše to, co Frege míní *smyslem.* Slovo *smysl* (Sinn) se v tomto kontextu nabízí díky působivé paralele se smyslovým vnímáním. Jeden a tentýž předmět mohu vnímat různými smysly, např. zrakem i hmatem. Jde tedy o dva různé způsoby danosti téhož podobně jako u výrazů.

Avšak tato paralela je v jistém ohledu poněkud zavádějící. Smyslová danost (zraková, hmatová, atd.) je subjektivní. Naproti tomu Fregův smysl výrazu je objektivní. V žádném případě se nejedná o subjektivní představu. Frege tuto okolnost ilustruje na elegantní analogii s dalekohledem. Představme si, že pozorujeme dalekohledem měsíc. Samotný měsíc jakožto objekt našeho pozorování si můžeme připodobnit k významu výrazu. Obraz v dalekohledu je pak analogický smyslu. Je jednostranným způsobem danosti měsíce, ale je objektivní v tom ohledu, že ho může sledovat více lidí. Můžeme říct, že je to určitá objektivně fixovaná perspektiva. Obraz na sítnici jednotlivce je analogický představě. Každý má svůj vlastní, soukromý obraz.

Z hlediska logiky výroků je klíčové, že Frege chápe výroky také jako specifická jména, takže jim připisuje, podobně jako ostatním jménům, jak smysl, tak význam. Pro smysl výroků vyhrazuje Frege termín *myšlenka*. Avšak v souladu s výše řečeným nechápe ani myšlenku subjektivně jako obsah mysli jednotlivce, nýbrž jako intersubjektivní, sdělitelnou entitu, která se jen takto může stát trvalým majetkem nějakého společenství. Myšlenka odpovídá tomu, čemu se obvykle říká propozice. Frege rozpracoval pojem myšlenky ve svém článku z pozdějšího období (Frege, 1918).

Vyvstává otázka, co je významem výroku? Co je tím, čehož způsobem danosti je myšlenka? Zde přichází Frege s překvapivou odpovědí. Významem výroku je pravdivostní hodnota. To znamená, že výrok označuje pravdivostní hodnotu stejně jako výraz *Aristotelés* označuje Aristotela. Myšlenku tedy musíme vnímat jako způsob danosti pravdivostní hodnoty. Frege zdůvodňuje tento svůj překvapivý postřeh pomocí tzv. principu kompozicionality, kterému se někdy také říká Fregův princip:

> Význam celku je určen významem částí a tím, jak se tyto části skládají.

Je to právě pravdivostní hodnota, která je funkčně závislá na tom, co znamenají jména ve větách jako *Jitřenka je planeta a nikoli hvězda*. Nahradíme-li v této větě jméno *Jitřenka* za jiné s odlišným smyslem, ale stejným významem (např. *Večernice*), změní se smysl, ale nemůže se změnit pravdivostní hodnota. Ke změně pravdivostní hodnoty celé věty může dojít jen tehdy, když nahradíme dané jméno za nějaké takové, které má jiný význam (např. když jméno *Jitřenka* nahradíme jménem *Slunce*). Frege navíc říká, že je to jedině usilování či zájem o pravdivostní hodnotu, který nás nutí ptát se u nějakého příběhu, zda jména v tomto příběhu mají kromě smyslu i nějaký význam.

Dle standardní interpretace[1] tedy Frege dospěl k závěru, že významem věty je pravdivostní hodnota na základě principu kompozicionality aplikovaného na úroveň významu. Frege se přitom musel vypořádat s takovými případy, kdy princip kompozicionality pro významy zjevně neplatí. Vezměme si

[1]Nestandardní pohled na tuto problematiku je formulován v (Kolman, 2002).

následující příklad. Předpokládejme, že mi zvýšili plat, z čehož mám zajisté radost, a navíc předpokládejme, že jsem včera prohrál nějakou sázku, z čehož radost nemám. Zvažme následující dvě věty:

50. Mám radost, že mi zvýšili plat.

51. Mám radost, že jsem prohrál sázku.

Věta 50 je pravdivá, zatímco věta 51 je nepravdivá. Přitom větu 50 lze získat tak, že nahradíme pravdivou větu *Zvýšili mi plat* jinou pravdivou větou *Prohrál jsem sázku.* Pravdivostní hodnota celku tedy není jednoznačně určena pravdivostními hodnotami svých částí a zdá se tedy, že princip kompozicionality pro významy v tomto případě neplatí. Frege problém řeší tak, že řekne, že v takovýchto případech, tedy zejména v případech, kdy se daná věta A vyskytuje jako vedlejší věta nějakého souvětí, nemá věta A svůj obvyklý význam, nýbrž v takových kontextech má nepřímý význam, kterým je její obvyklý smysl. Můžeme tedy říci, že v roli vedlejší věty neoznačuje věta pravdivostní hodnotu, jako když stojí osamoceně, ale označuje svůj smysl. Jelikož např. smysl věty *Zvýšili mi plat* je jiný než smysl věty *Prohrál jsem sázku*, nedochází při tomto pojetí k narušení principu kompozicionality.

2.2 Intenze a extenze

Carnap (1947) se pokusil o tzv. explikaci Fregových pojmů smyslu a významu, což znamená, že navrhl jisté přesněji vymezené pojmy, které mohou sloužit ke stejným účelům jako Fregovy vágnější pojmy. Explikát Fregova smyslu označuje Carnap jako *intenzi* a explikát Fregova významu označuje jako *extenzi.*

Extenzi a intenzi nepřipisuje Carnap pouze singulárním výrazům (jménům) a větám, ale také predikátům, o kterých se Frege v souvislosti s pojmy smyslu a významu vyjadřuje velmi nejasně.[2]

Carnap chápe extenzi predikátu jako množinu objektů, je-li predikát jednomístný, a jako relaci v případě vícemístného predikátu. V případě jednomístných predikátů je intenzí vlastnost objektů, v případě vícemístných predikátů je to vztah mezi objekty. Tak např. extenze predikátu *být politikem* je množina politiků a intenze je vlastnost, kterou tento predikát vyjadřuje.

Každému z uvedených základních typů výrazů tedy odpovídá nějaký typ entit na úrovni extenze a jiný typ entit na úrovni intenze, což je shrnuto v následující tabulce.

[2] K tomu viz např. (Vlasáková, 2013).

typ výrazu	typ jeho extenze	typ jeho intenze
výrok	pravdivostní hodnota	propozice
predikát	množina či relace	vlastnost či vzah
singulární výraz	jednotlivý objekt	individuový pojem

Pro myšlenku, že extenzí výroku je jeho pravdivostní hodnota, Carnap (1947, str. 26) zformuloval argument, který je nezávislý na Fregově argumentu. Jak jsem již uvedl, Frege vnímá výroky jako speciální případ jmen a tvrdí, že výrok označuje pravdivostní hodnotu podobným způsobem jako jméno označuje pojmenovaný předmět. Carnap ukazuje, že ke stejnému závěru lze dospět tak, že výroky chápeme jako krajní případ predikátů. Pro n-členný predikát je charakteristické, že k němu musíme připojit n singulárních výrazů (jmen), abychom získali větu. Samotné věty pak mohou být chápány jako 0-členné predikáty. Máme-li dva n-členné predikáty P a Q, kdy platí, že jejich extenze jsou totožné? To nastane právě tehdy, když nastává následující případ:

> Pro každé $a_1, \ldots, a_n$ platí, že $P(a_1, \ldots, a_n)$ má stejnou pravdivostní hodnotu jako $Q(a_1, \ldots, a_n)$.

Zobecněním této úvahy pro $n = 0$ dostáváme, že dvě věty A a B chápané jako 0-členné predikáty mají stejnou extenzi právě tehdy, když mají stejnou pravdivostní hodnotu. Extenzi výroku pak můžeme s pravdivostní hodnotou přímo ztotožnit. Touto alternativní cestou tedy dospíváme ke stejnému závěru jako Frege.

Carnap se také vyhýbá výše zmíněnému Fregovu manévru s vedlejšími větami, které jakožto vedlejší věty nemají podle Frega svůj obvyklý význam, nýbrž mají význam nepřímý, který je jejich obvyklým smyslem. V Carnapově pojetí má výraz fixně danou extenzi a intenzi. Kontexty, v nichž funguje princip kompozicionality pro extenze, tedy kde extenze celku je jednoznačně určena extenzemi částí a tím, jak se tyto části skládají, nazývá Carnap extenzionální kontexty. Věty 50 a 51 poukazují na fakt, že větný kontext *Mám radost, že ...* není extenzionální. Z hlediska našeho textu tedy vyvstává otázka, zda-li lze kontext *Pokud ..., ...* chápat jako kontext extenzionální.

U extenzionálních kontextů stačí znát extenzi částí, abychom mohli určit extenzi celku. A známe-li extenzi částí, mělo by být možné určit extenzi celku, aniž bychom znali intenzi částí. Z tohoto hlediska se zdá být např. kontext *Každé ... je ...* jednoznačně extenzionální. To lze doložit následující úvahou. Předpokládejme, že je dána věta

52. Každý krastl je orbitrární.

Předpokládejme dále, že víme, že predikáty *být krastl* a *být orbitrární* vyjadřují nějakou vlastnost, tj. mají smysl, avšak my tento smysl neznáme, tedy neznáme intenzi těchto výrazů a v tomto ohledu jim nerozumíme. Někdo nám však podá úplný výčet objektů, které mají vlastnost *být krastl* a které mají vlastnost *být orbitrární*. Sdělí nám tedy, jaká je extenze těchto výrazů. My pak budeme schopni rozhodnout, zda je věta 52 pravdivá či nikoli, přestože nevíme, jakou propozici věta vyjadřuje a jaké vlastnosti vyjadřují predikáty v ní obsažené. Věta je pravdivá právě tehdy, když je extenze prvního výrazu podmnožinou extenze druhého výrazu. Jak vidíme, extenzi celku zde lze určit čistě na základě znalosti extenze částí, a to i bez znalosti intenze částí.

Zatímco extenze jsou relativně neproblematické, na úrovni intenze se pořád ještě vyskytují poněkud záhadné, těžko uchopitelné entity. Carnapova další explikace těchto pojmů však motivovala moderní pojetí, podle kterého je intenze ztotožněna s extenzí relativizovanou vůči jednotlivým možným světům. Přesněji řečeno:

> Intenze je funkce z možných světů do extenzí.

Propozice je tak uchopena jako funkce z možných světů do pravdivostních hodnot. Jelikož takováto funkce je vždy charakteristickou funkcí nějaké množiny možných světů, lze tak identifikovat propozice jednoduše jako množiny možných světů. Vlastnost je chápána jako funkce přiřazující možným světům množiny objektů, vztah jako funkce přiřazující možným světům relace a individuový pojem jako funkce, která každému možnému světu přiřadí nějaký objekt.

Takto se nám tedy do hry dostává pojem možného světa. Dále ukáži, že v logice vystupují možné světy ve dvou zcela odlišných smyslech.

2.3 Logické možné světy a možné světy jako možné stavy věcí

Jedním z hlavních cílů téměř jakékoli logické teorie je formulovat kritérium, které vymezí (často jen pro jistý výsek jazyka), které věty a úsudky jsou logicky platné a které nikoli, které věty jsou logicky ekvivalentní, a které množiny vět jsou logicky konzistentní a které logicky nekonzistentní.[3] Logická platnost vět a úsudků, logická ekvivalence a konzistence má být přitom formální, tj. určena formou vět, nikoli jejich obsahem. To předpokládá, že ve

[3]V celém textu budu používat termín *logická platnost vět* ve smyslu logické pravdivosti. Nebudu používat termín *logická pravdivost*, který je sice běžnější, ale má vzhledem k tomuto textu nežádoucí konotace: logická pravdivost jakožto univerzální pravdivost. Vzhledem k tomu, že později bude mé vymezení logické platnosti záviset na pojmu tvrditelnosti – a nikoli na pojmu pravdivosti –, volím již nyní neutrální termín *platnost* namísto zatíženého termínu *pravdivost*.

větě jsou jisté výrazy, které se vztahují k formě, a jiné, které se vztahují k obsahu. Vedou se nekonečné spory o to, kde je hranice mezi formálními a obsahovými termíny, a je zjevné, že tato hranice musí být vedena do jisté míry uměle. Avšak je zjevné, že výrazy, které vykazují nezávislost na specifickém diskurzu a jsou použitelné napříč všemi obory, mají blíže formálnímu pólu. Naproti tomu výrazy silně vázané na nějaký specifický diskurz chápeme spíše jako obsahové. V důsledku toho se všichni shodují, že např. ve větě

53. Každý člověk je smrtelný.

budou výrazy *každý* a *je* připsány formě, zatímco výrazy jako *člověk* a *smrtelný* obsahu.

Logická platnost je určená výrazy, které náleží k formě. Logika je věda studující právě tyto formální výrazy. A právě to z ní dělá vědu nejvyšší obecnosti, neboť, jak jsem již uvedl, výrazy, jejichž význam logika studuje, tedy formální výrazy jako např. kondicionální spojení *Pokud …, …*, by měly být použitelné napříč všemi diskurzy.

Věta 53 je sice pravdivá, ale není logicky platná, protože existuje věta stejné formy, která je nepravdivá. Např.

54. Každý právník je čestný.

To ilustruje, že pravdivost věty *Každý člověk je smrtelný* nemůže být určena formou této věty. Přijmeme-li poněkud kontroverzní předpoklad, že každý výraz můžeme označit buď za obsahový, nebo za formální, lze obecně formulovat následující kritérium logické platnosti, které je inspirováno Bolzanovým pojetím logiky.[4]

> Vezměme si danou větu A a nahraďme všechny obsahové výrazy proměnnými.[5] Tímto krokem získáme formu věty. Poté zvážíme, které věty mají stejnou formu. Tyto věty získáme tak, že za proměnné zpátky dosazujeme obsahové výrazy odpovídající kategorie. Pokud pro každé takové dosazení získáme pravdivou větu, pak je původní věta A logicky platná (tj. pravdivá na základě své formy). Pokud pro nějaké takové dosazení získáme nepravdivou větu, tak věta A logicky platná není.

Tak například vezmeme-li si větu 53, její formu můžeme reprezentovat jako *Každé X je Y*. Dosazujeme-li za X a Y zpátky výrazy kategorie predikátů, dostaneme se takto např. také k větě 54, která je nepravdivá. Tudíž věta 53 není logicky platná. Zvažme ještě např. větu

[4] Viz (Bolzano, 1837).

[5] Předpokládáme přitom, že proměnné jsou rozdělené do stejných kategorií jako výrazy a každý výraz nahrazujeme proměnnou odpovídající kategorie.

55. Každý člověk je smrtelný nebo nějaký člověk není smrtelný.

Formu této věty lze zachytit takto:

56. *Každé X je Y nebo nějaké X není Y.*

Dosazujeme-li za proměnné zpátky predikáty, získáme následující seznam tzv. instancí této formy:

57. Každý právník je čestný nebo nějaký právník není čestný.
58. Každý muž je svobodný nebo nějaký muž není svobodný.
59. Každá rostlina je vystavěna z buněk nebo nějaká rostlina není vystavěna z buněk.
60. Každá věta, kterou Petr řekl, je pravdivá nebo nějaká věta, kterou Petr řekl, není pravdivá.
61. Každé město je hlavní město nebo nějaké město není hlavní město.

    atd.

Celý seznam pochopitelně bude velmi dlouhý (dokonce nekonečně dlouhý, předpokládáme-li volnost při tvorbě komplexních predikátů), ale všechny věty v tomto seznamu budou pravdivé.[6] Věta 55 je tedy logicky platná.

Od tohoto přístupu, v němž zvažujeme všechny věty stejné formy, se dostaneme k přístupu klasické logiky tím, že si uvědomíme, že omezíme-li se na

[6] Je přitom zřejmé, že zde předkládám poněkud idealizovaný obrázek a nechávám stranou řadu problémů, které by měly být objasněny, pokud by zde bylo žádoucí toto pojetí formulovat pečlivěji. Např. u věty 60 předpokládám, že je určeno, o jakém Petrovi a o jakých jeho větách je řeč. Zajímavým problémem také je, že pokud bychom postupovali mechanicky podle zadání, v seznamu by se objevila řada vět, které nedávají dobrý smysl, např. *Každý muž je hlavní město nebo nějaký muž není hlavní město*. U těchto výrazů nemusí být jasné, jakou hodnotu bychom jim měli připsat a dalo by se též říci, že žádnou hodnotu nemají. Pak by však takové výrazy sloužily jako protipříklady. Jedna možnost zde je říci, že věta *Petr je hlavní město* není pravdivá jednoduše proto, že Petrovi nelze pravdivě připsat predikát *být hlavním městem*. Pak je tedy také pravda, že nějaký muž není hlavní město, což znamená, že je pravdivá i disjunkce *Každý muž je hlavní město nebo nějaký muž není hlavní město*. Zmíněný problém souvisí se zajímavým faktem, že v přirozených jazycích můžeme formulovat věty, které jsou gramaticky správně utvořené, a přesto máme tendenci říci, že nemají žádný smysl. Např. podle Carnapa (1932) je tento fenomén důsledkem nedokonalosti přirozených jazyků. Jeho příkladem je věta *Caesar je prvočíslo*, u které se domnívá, že je gramaticky korektní jen díky tomu, že přirozený jazyk nemá dostatek slovních kategorií, a třeba výrazy *vojevůdce* a *prvočíslo* spadají pod stejný slovní druh. V ideálním jazyce by se toto stát nemělo a každá gramaticky správně utvořená věta by měla mít smysl.

extenzionální kontexty, pravdivostní hodnota věty bude funkčně závislá na tom, jakou extenzi mají mimologické části, což jsem ilustroval příkladem 52 (*Každý krastl je orbitrární*). Nemusíme tedy variovat celé věty dané formy, stačí, variujeme-li možné extenze proměnných reprezentujících obsahové části věty. Formě věty tedy nepřiřazujeme celé konkrétní instance této formy, ale pouze přiřadíme extenzi každé obsahové proměnné. Takovému přiřazení se obvykle říká interpretace. Výše uvedené bolzanovské kritérium můžeme nyní nahradit kritériem, které je charakteristické pro Tarského sémantiku, která v současné době představuje zcela paradigmatický přístup:

> Vezměme si danou větu A a nahraďme všechny obsahové výrazy proměnnými. Tímto krokem získáme formu věty. Poté zvážíme všechny možné interpretace, tj. funkce, které přiřadí každé proměnné nějakou extenzi vhodnou pro danou kategorii výrazu. Jestliže věta vytváří extenzionální kontext, je její pravdivostní hodnota funkčně závislá na tom, jakou extenzi mají obsahové symboly. Je-li dána forma věty A, každá interpretace určuje nějakou pravdivostní hodnotu. Pokud získáme pro každou interpretaci hodnotu *pravda*, je původní věta A logicky platná (tj. pravdivá na základě své formy). Pokud při nějakém takovém přiřazení získáme hodnotu *nepravda*, tak věta A logicky platná není.

Z hlediska tohoto kritéria vychází věta 55 též jako logicky platná. Dostali jsme se tedy ke standardnímu kritériu moderní logiky: logická platnost je definována jako pravdivost v každé interpretaci. Obdobné kritérium lze též formulovat pro vyplývání, logickou ekvivalenci a konzistenci.

> Závěr logicky vyplývá z předpokladů, když neexistuje interpretace mimologických symbolů (ve smyslu výše formulovaného kritéria), při které by byly předpoklady pravdivé a závěr nepravdivý. Dvě věty jsou logicky ekvivalentní, když mají stejnou pravdivostní hodnotu při každé interpretaci. Množina vět je logicky konzistentní, když existuje interpretace mimologických symbolů, při které jsou pravdivé všechny věty dané množiny.

Chceme-li celý podnik postavit na pevnou půdu a používat exaktní metody, musíme uvedená kritéria aplikovat na dobře definovaný formální jazyk, jako je např. náš výrokový jazyk L. V tomto jazyce jsou místa pro obsah reprezentována atomickými formulemi a těm tedy přiřazujeme v rámci dané interpretace extenzi, tj. pravdivostní hodnotu, neboť jsou to výrazy kategorie vět. V tomto velmi specifickém případě je tedy interpretace definována jako funkce z atomických výroků do pravdivostních hodnot.

Interpretace jsou různé způsoby, jak výrazům přiřadit extenzi. Tyto způsoby bývají někdy vykládány jako (logické) možné světy. Avšak tento způsob užití termínu *možný svět* je problematický, neboť v tomto smyslu nemusí být ani pravdy matematiky pokládány za nutné pravdy. Interpretace pouze vlévají do logické formy obsah, který je redukován na extenzi. Jde tedy o udělení významu těm částem formulí, které sice reprezentují místa pro obsah, avšak samy o sobě žádný obsah nemají. Co je možným světem v tomto pojetí, je relativní vzhledem k tomu, kde vedeme hranici mezi logickými (formálními) a mimologickými (obsahovými) výrazy. Jak tato hranice má být přesně vedena, není předem jasné a do jisté míry je to otázkou konvence. Přijmeme-li však pohled klasické logiky, pak ani věta $1 + 1 = 2$ není nutně pravdivá (ve smyslu logické nutnosti), neboť její forma je $a \circ a = b$ a existuje logicky možný svět (interpretace), v němž je tato věta nepravdivá. Např. když a interpretujeme jako číslo 5, b jako číslo 12 a $\circ$ jako operaci násobení.

Proti takto pojatým logickým možným světům můžeme postavit možné světy jakožto způsoby toho, jak by věci mohly být (viz Etchemendy, 1990). Konkrétní plnokrevná věta, která již má (na rozdíl od formálního výrazu) konkrétní obsah, by mohla být pravdivá a mohla by být nepravdivá. Předpokládáme tedy, že je zde nějaký prostor možností či možných stavů věcí a celky vyplňující tento prostor označujeme jako možné světy.

Možné světy jakožto možné stavy věcí hrají zásadní roli ve Wittgensteinově pojetí logiky, které formuloval ve svém *Traktátu* (Wittgenstein, 1922). Toto pojetí možností relativních vzhledem k již interpretovaným výrazům je také nezbytné pro logiku těch složek jazyka, které vytvářejí neextenzionální kontexty. Těmi jsou např. modality a je otázkou, které se budeme ještě dále věnovat, zda je takovým výrazem také kondicionální spojení *pokud ..., ...*.

V následujících třech oddílech vyložím tři koncepce možných světů pojatých v tomto druhém slova smyslu jako stavy věcí: teorii Davida Lewise, Saula Kripkeho a Roberta Stalnakera.

2.4 Možné světy podle Davida Lewise

Možné světy můžeme tedy chápat jako alternativy vůči *aktuálnímu světu.* Aktuální svět je náš svět, tj. svět takový, jaký ve skutečnosti je. Aktuální svět je, slovy Wittgensteina, určitá totalita faktů – to je aspoň obrázek, kterého se můžeme pro začátek držet. Dovedeme si představit, že by svět mohl být jiný, než jaký ve skutečnosti je. Svět by se mohl lišit od aktuálního světa v mnoha ohledech, jak nás přesvědčuje bezpočet literárních děl. Čteme-li určitý smyšlený příběh, předpokládáme, že je děj součástí nějaké totality. Je součástí nějakého celku, který představuje určitou alternativu vůči našemu aktuálnímu světu. Tato totalita je jedním z možných světů.

Možné světy však před námi nevyvstávají jen v literárních dílech. Vztahuje se k nim běžné, každodenní uvažování. Kdykoli zvažujeme nějaké možnosti toho, jak by věci mohly být a vyvstává před nás několik alternativ, např. když uvažujeme, kdo na nás mohl vyzradit nějakou choulostivou informaci, kdo vyhraje příští volby či jak by mohl být rozmístěn nábytek v našem bytě, konstruujeme v mysli možné světy. Tyto světy si nepředstavujeme do všech detailů, ale kdykoli pomyslíme na nějakou možnou situaci, je v tom přítomen i implicitní předpoklad, že tato situace je částí určitého celku, který teprve je možným světem. Tento epistemický pohled na možné světy považuji za velmi plodný a budu ho dále rozvíjet v třetí části této práce.

Metafyzicky ladění filosofové a logikové vedli a vedou komplexní debatu ohledně povahy a ontologického statusu možných světů. Velmi vyhrocenou koncepci možných světů formuloval David Lewis nejprve v D. Lewis (1973a, kapitola 4) a poté v rozvedené podobě v (D. Lewis, 1986). Stalnaker (1976) označuje Lewisův postoj jako *extrémní realismus* a shrnuje jeho hlavní charakteristiky ve čtyřech tezích:

(a) Možné světy existují.

(b) Jiné možné světy jsou entity stejného druhu jako náš aktuální svět.

(c) Přídavné jméno „aktuální" je indexický výraz.

(d) Možné světy nemohou být redukovány na jiné entity.

Možné světy jsou tedy podle Lewise stejně reálné jako aktuální svět. Nelze sice říct, že existují *aktuálně*, jelikož aktuálně existovat znamená existovat v aktuálním světě, avšak to neubírá nic na jejich realitě. V řadě možných světů existují tvorové, kteří jsou z masa a kostí tak jako my a tak jako my prožívají utrpení a radost. Lewis se domnívá, že možné světy se neliší od aktuálního světa co do druhu, nýbrž jen v tom, co konkrétního se v nich děje. Aktuální svět není ničím výjimečným. Obyvatelé jiného možného světa mají jinou perspektivu. Z jejich hlediska je aktuální svět ten, ve kterém žijí, a nikoli náš svět, který označujeme jako aktuální my. Výraz *aktuální* tedy funguje analogicky běžným indexickým výrazům jako *já*, *tady*, *teď*, které něco označují v závislosti na osobě, místě, resp. čase mluvčího. Zejména analogii s časem vidí Lewis jako velmi ilustrativní. Současnost je jen jedním časovým okamžikem mezi ostatními. Od ostatních časových okamžiků se neliší svým druhem. Současnost nenazýváme současností kvůli tomu, že by tento okamžik byl něčím zvláštní, ale jen kvůli tomu, že se jakožto mluvčí právě v tomto okamžiku nacházíme. K poslední z uvedených tezí, tedy k tezi (d), Lewis říká:

> Rozhodně odmítám ztotožnit možné světy s jazykovými entitami ... Když v souvislosti s možnými světy hovořím o realismu, míním to

> doslovně. Možné světy jsou tím, čím jsou, a nejsou ničím jiným. Pokud se mě někdo zeptá, jakého druhu jsou, nemohu dát odpověď, kterou dotazující pravděpodobně očekává, totiž nějaký návrh, jak redukovat možné světy na něco jiného. (D. Lewis, 1973a, str. 85)

Zde Lewis reaguje na rozmanité návrhy redukovat možné světy na takové entity jako např. maximální konzistentní množiny propozic, tj. ztotožnit možný svět se vším tím, co je v něm pravdivé.

Lewisova koncepce působí poněkud provokativně. Přeci jen máme tendenci aktuálnímu světu připsat poněkud jiný status než pouhým možnostem. Jaké má Lewis důvody pro svoje kontroverzní pojetí možných světů? Lewis říká, že účelem filosofie není vyvrátit či zdůvodnit naše běžná přesvědčení, nýbrž rozšířit je a uspořádat do přehledného systému. Mezi naše naivní přesvědčení patří třeba ta, která máme o běžných objektech našeho okolí jako jsou stoly a židle. Patří sem však také modální přesvědčení o těchto objektech, podle kterých by např. mohly být tyto věci rozmístěny nějak jinak než jsou. Realismus ohledně možných světů považuje Lewis za jediný úspěšný způsob systematizace těchto přesvědčení. (D. Lewis, 1973a, 88)

Lewisova koncepce tak může být vnímána jako specifická filosofická interpretace toho, co se stalo běžnou praxí formální modální logiky, a zejména kripkovské sémantiky, totiž že modální výrazy *je možné, že* a *je nutné, že* jsou interpretovány jako kvantifikátory, jejichž doména, přes kterou kvantifikují, je množina možných světů. Tedy např. tvrzení, že tyto stoly a židle *by mohly* být rozmístěny tak a tak, je analyzováno jako tvrzení o existenci možného světa, v němž tyto stoly a židle *jsou* rozmístěny tak a tak.

Stalnaker (1976) na Lewisově přístupu vyzdvihuje následující:

> Rétorická síla Lewisovy argumentace spočívá v názoru, že možné světy ve skutečnosti nejsou takovými cizorodými entitami, jak by metafyzická příchuť tohoto termínu mohla naznačovat. Lewis nechce tvrdit, že nás běžný jazyk zavazuje k extravagantní metafyzické teorii. Spíše tvrdí, že co se zdá být extravagantní metafyzickou teorií, je ve skutečnosti pouze jiný výraz pro naše běžná přesvědčení. Věřit v existenci možných světů je jako vyprávět příběhy. Děláme to celý náš život. (Stalnaker, 1976, str. 66-67)

2.5 Možné světy podle Saula Kripkeho

Metafyzický přístup k problematice možných světů svádí k takovým specifickým otázkám, jako je třeba problém identity objektů napříč možnými světy. Může se jeden a tentýž objekt vyskytovat ve dvou různých světech? Lewise vede jeho teorie k závěru, že nikoli. Možné světy jsou od sebe absolutně separované, v různých světech musí být tedy různé objekty. Avšak pak se zdá být celá teorie špatně použitelná pro analýzu normálních modálních vět, kvůli které byla vytvořena. Vezměme třeba větu:

62. Petr mohl vyhrát.

Podle sémantiky založené na pojmu možného světa je tato věta pravdivá (vzhledem k danému kontextu, který dourčí, o jakého Petra jde a v čem soutěžil) právě tehdy, když existuje možný svět s, v němž je Petr vítězem. Avšak je-li tomu tak, pak Petr existuje ve světě s, který může být odlišný od aktuálního světa. V takovém případě existuje jeden a tentýž Petr ve dvou různých možných světech. Lewis tento problém řeší pomocí tzv. teorie protějšků, na základě které řekne, že přísně vzato ve světě s není objekt identický s Petrem existujícím v aktuálním světě, ale je tam jeho protějšek, tedy osoba, která se v podstatných rysech Petrovi podobá. A říkáme-li, že Petr mohl vyhrát, říkáme tím, že v nějakém možném světě nějaký Petrův protějšek vyhrál. Do technických detailů byla tato teorie rozpracována již v článku (D. Lewis, 1968), jehož cílem je ilustrovat, že modální a tedy neextenzionální kontexty je možno analyzovat pomocí extenzionálního aparátu klasické predikátové logiky.

Avšak takové řešení není příliš přesvědčivé, protože věta 62, zdá se, říká, že Petr sám (a ne nějaký jeho protějšek) by mohl být vítězem. To také namítá Lewisovi Saul Kripke, který v (Kripke, 1983) v souvislosti s teorií vlastních jmen formuluje svůj velmi odlišný pohled na možné světy. Kripke obrazně říká, že možný svět není nějakou vzdálenou krajinou, do které bychom mohli nahlédnout dalekohledem a porovnat, zda objekty v něm jsou identické s objekty v našem světě. Možný svět není něco, co bychom objevovali. Možné světy stipulujeme či konstruujeme kolem objektů, které známe z našeho světa. Ve větách, jako je 62, fixujeme objekty prostřednictvím vlastních jmen (Petra pomocí jména *Petr*) a kolem takto fixovaných objektů rozvrhneme možný svět (samozřejmě nikoli do všech jeho detailů). Jelikož vlastní jména slouží k tomuto účelu, jsou to – v Kripkeho terminologii – tzv. rigidní designátory, neboli výrazy označující z definice stejný objekt ve všech možných světech. V tom se také liší od určitých deskripcí, jako je třeba výraz *Platónův nejvýznamnější žák*, které se nevztahují k objektům rigidně, tj. označují v různých světech různé objekty. Identita napříč možnými světy tedy není něco, co bychom mohli dodatečně nějak zjišťovat podle nějakých kriterií. Naopak předpoklad této identity je nutnou podmínkou pro konstituci možného světa. Možné světy obvykle tvoříme z objektů našeho světa.

Tyto metafyzické úvahy jsou motivovány užitím běžného jazyka, v němž můžeme říci např., že vítěz posledních prezidentských voleb mohl tyto volby nevyhrát, nikoli ale, že Zeman mohl nebýt Zemanem (i když ovšem můžeme říci, že Zeman se nemusel jmenovat Zeman – avšak to je něco jiného). V těchto příkladech se právě ukazuje rozdíl mezi tím, jak užíváme jména a určité deskripce v modálních kontextech, což jde také proti Fregově a Russellově tendenci ztotožnit význam jmen (resp. toho, co za jména normálně považujeme) s významem nějakého souboru určitých deskripcí.

2.6 Možné světy podle Roberta Stalnakera

Kritický postoj k Lewisově koncepci možných světů formuluje také Stalnaker (1976), který – právě ve snaze vymezit se vůči Lewisovi – označuje svůj filosofický postoj k těmto entitám jako *umírněný realismus*. Z výše uvedených Lewisových tezí přijímá teze (a), (c), (d) a odmítá tezi (b). Odmítá tedy, že bychom měli možné světy pokládat za entity stejného druhu jako je náš aktuální svět. Důvodem je, že pokud ztotožníme možné světy se způsoby, jak by věci mohly být, pak bychom je měli pokládat za abstraktní entity. Způsob, jak náš svět je, není identický s naším světem samotným, je to vlastnost našeho světa. Způsob, jak náš svět je, není to, co je zničeno, je-li zničen náš svět.

Avšak spíše než takovéto subtilní metafyzické úvahy, zdají se být pro Stalnakera důležité metodologické ohledy. Viděli jsme, že Lewis pokládá za úkol filosofické teorie systematizovat naše předteoretická přesvědčení. Stalnaker dodává, že nestačí tato přesvědčení systematizovat, ale je třeba ještě ukázat, proč jsou tato přesvědčení racionální. Lewisova teorie nechává naprosto otevřené a nevysvětlitelné, jak víme, co se děje v jiných možných světech pojatých jako reálně existující místa, která jsou však natolik odlehlá, že netvoří ani součást našeho aktuálního světa. Podle Stalnakerovy koncepce jsou možné světy reálně existující součásti našeho aktuálního světa, který je celkem toho, co reálně existuje. Možné světy jsou abstraktními entitami, jelikož jsou abstrahovány z našich racionálních aktivit, a jejich povaha by měla být vysvětlena s odkazem na tyto aktivity. Rozlišování mezi určitými alternativami (možnostmi) je společným podstatným rysem takových aktivit, jako je zkoumání, rozhodování, výměna informací, předpovídání budoucnosti, poskytování nějaké rady, diskutování, vyjednávání, ospravedlňování určitého jednání, atd. Pojem možného světa můžeme vnímat jako technický nástroj, který nám pomáhá reprezentovat strukturu těchto aktivit.

Je tedy patrné, proč Stalnaker zastává tezi, že možné světy existují, nikoli však, že to jsou entity stejného druhu jako svět aktuální. Aktuální svět má jiný status než pouhé neaktualizované možnosti. To se zdá být v rozporu s tím, že slovo aktuální je pokládáno za indexický výraz, avšak Stalnaker se domnívá, že zde rozpor není. I v rámci umírněného realismu můžeme aplikovat indexickou analýzu přídavného jména *aktuální*. Stalnaker k tomu říká:

> Hledisko aktuálního světa *je* absolutní hledisko a je obsaženo v pojmu aktuality, že tomu tak musí být. Můžeme uznat, že fiktivní postavy oprávněně ze svého hlediska prohlašují sebe a své okolí za plnokrevnou realitu tak, jako to činíme my s naším světem. Avšak jejich hledisko je fiktivní, takže co je oprávněné z tohoto hlediska, nemá žádný dopad, co se otázek reality týče. (Stalnaker, 1976, str. 69)

Ještě se pozastavme u teze, že možné světy nejsou redukovatelné na jiné entity, kterou podobně jako Lewis zastává i Stalnaker: S pojmem možného světa pracují tito autoři jako s primitivním, nedefinovaným pojmem. Zejména v tomto ohledu převažují u Stalnakera metodologické důvody, které nyní stručně vyložím na konkrétnější otázce týkající se vztahu pojmů možného světa a propozice.

Jak již bylo zmíněno, možné světy bývají někdy definovány jako určité speciální (maximální konzistentní) množiny propozic. Jindy zase propozice bývají definovány jako množiny možných světů. Je zřejmé, že nelze tyto definice držet zároveň, neboť takto by se staly obě kruhové. V rámci výstavby určité teorie se musíme rozhodnout, kterému z těchto pojmů dáme přednost, který bude pro nás základnější. Mohli bychom se klonit k tomu, že základnějším pojmem by měl být ten, který je méně obskurní či více průhledný s ohledem na naše intuice. Méně známé by pak mohlo být definováno pomocí více známého. Někteří by se pak mohli klonit k závěru, že pojem propozice je méně problematický než pojem možného světa, a proto bychom s ním měli začít. Takovým přístupem bychom se však podle Stalnakera míjeli smyslem filosofické analýzy.

Filosofická analýza nám může projasnit obskurní pojem jak tím, že ho redukuje na jiné pojmy, tak i tím, že na něj redukuje jiné pojmy. Základní pojmy nemusí být vždycky ty nejprůzračnější. Stalnaker říká, že důležitější než obeznámenost s daným pojmem jsou jisté strukturální otázky. Z metodologického hlediska bychom měli dát přednost analýze, která redukuje vysoce strukturované skupiny entit na méně strukturované skupiny entit. Množiny propozic vykazují vysokou míru strukturovanosti. Mezi propozicemi jsou rozmanité vztahy vyplývání, kompatibility a podobně. Množiny možných světů jsou relativně nestrukturované. Teorie vysvětlující komplikované vztahy mezi propozicemi na základě jednoduchých vztahů mezi množinami možných světů má vysokou explanační sílu a z tohoto metodologického důvodu je výhodnější spíše redukovat propozice na možné světy než naopak.

V této práci, a zejména pak v její třetí části, budu s pojmem možného světa pracovat ve Stalnakerově pragmatickém duchu, jehož známky jsou ovšem patrné i u Lewise. Z tohoto pragmatického hlediska se ospravedlnění pojmu možného světa neukáže nejlépe v přímočaré filosofické odpovědi na otázku, co to možný svět je, ale v tom, že jsou možné světy úspěšně použity při logické analýze přirozeného jazyka. Ryze filosofická odpověď na otázku, jakými entitami možné světy jsou, nehraje při logické analýze nijak zásadní roli. To je ilustrováno faktem, že David Lewis a Robert Stalnaker vytvořili logické teorie subjunktivních kondicionálů, které, jak uvidíme, se z logického hlediska od sebe liší jen v detailech. Přitom zastávali velmi odlišnou filosofickou koncepci možných světů. Ta však neměla zásadní dopad na jejich logické systémy.

Podobně jako Stalnaker nebudu klást příliš velký důraz na metafyzický nádech termínu možný svět. Možné světy chápu vždy relativně vůči nějakému jazyku. Tento jazyk přitom může být velmi specifický a omezený. Např. vzhledem k jazyku nějaké hry mohou možné světy reprezentovat všechny možné průběhy hry. Prostor možných světů – tedy možných průběhů hry – je v tomto omezeném rámci vymezený pravidly hry. Nepožaduji tedy úplnost možného světa v nějakém absolutním slova smyslu, ale vždy jen relativně vzhledem k danému jazyku a kontextu.

2.7 Shrnutí

V této kapitole jsem se zabýval pojmem možného světa. Vyšel jsem od Fregova rozlišení mezi smyslem a významem a Carnapova projektu nahradit tyto pojmy intenzí a extenzí. Tím jsme se dostali k vymezení intenzí jakožto funkcí z možných světů do extenzí. Možné světy přitom lze chápat dvojím způsobem. Jednak jako interpretace proměnných, které reprezentují místa pro obsah v nějaké formě věty, dále pak jako možné stavy věcí. K druhému pojetí se vážou rozmanité koncepce. Představil jsem zejména koncepci Davida Lewise, podle kterého jsou možné světy entitami stejného druhu jako náš aktuální svět. Dále jsem uvedl dvě teorie možných světů, které se vůči Lewisovi vymezují. Jednalo se nejprve o koncepci Saula Kripkeho, který se s Lewisem rozchází zejména v otázce identity objektů napříč různými možnými světy. Nakonec jsem se ztotožnil s přístupem Roberta Stalnakera, který vidí možné světy jako abstraktní entity abstrahované z racionálních aktivit, pro něž je specifické, že v jejich rámci rozlišujeme mezi různými možnostmi. Stalnaker se navíc domnívá, že spíše než abstraktní metafyzická debata o povaze pojmu možného světa, může legitimitu tohoto pojmu obhájit to, že je užitečný v rámci úspěšné logické teorie.

Kapitola 3

Kontrafaktuály

V oddílu 1.3 jsem zavedl rozdíl mezi indikativními a subjunktivními kondicionály. Indikativním kondicionálem je třeba věta *Pokud jsem nezamkl auto, jistě ho někdo vykradl*, jeho subjunktivní obměnou je věta *Kdybych nezamkl auto, jistě by ho někdo vykradl.* Jde tedy o to, zda se vyskytují přítomná slovesa v podmiňovacím způsobu.[1] Tématem této práce jsou zejména kondicionální věty indikativní. Subjunktivní kondicionály, kterým se též někdy říká *kontrafaktuály*, jsou však úzce příbuzným jazykovým útvarem, a proto jim věnuji alespoň tuto kapitolu.[2]

3.1 Kdo zavraždil Kennedyho

Termín *kontrafaktuály* používá např. i David Lewis ve svém klasickém díle o subjunktivních kondicionálech (D. Lewis, 1973a). Tento termín vychází z pozorování, že subjunktivního tvaru užíváme často v případech, kdy jsme si vědomi nepravdivosti antecedentu. Tak tomu skutečně je, jak si můžeme ověřit na takových příkladech jako

63. Kdybych měl víc peněz, víc bych cestoval.

Stačí si k této větě představit typický kontext jejího užití. Jelikož u indikativních kondicionálů tento efekt chybí, nabízí se spatřovat v předpokladu nepravdivosti antecedentu podstatný rozdíl mezi těmito dvěma tvary. Avšak zdá se, že aby byl tento rozdíl relevantní z hlediska logiky, musela by nepravdivost antecedentu vždy tvořit *součást obsahu* subjunktivního kondicionálu,

[1] Zde je terminologie, kterou používám, poněkud matoucí. Termínem *kondicionál* se obvykle v češtině míní právě podmiňovací způsob slovesa. Jak jsem již vyjasnil v Úvodu, z důvodu pohodlnosti používám tento termín jako zkratku za výraz *kondicionální věta.*

[2] Některé pasáže z následujícího oddílu jsou v upravené podobě převzaty z (Punčochář, 2014b).

tj. při užití takové věty by musela být nepravdivost antecedentu *spolutvrzena* (případně presuponována). Že tomu tak obecně není, lze velmi snadno doložit i na abstraktní úrovni, pokud si uvědomíme, že tvrdím-li větu tvaru *Nevím, zda A, ale kdyby platilo A, pak by platilo B*, neodporuji si ve stejném smyslu, v jakém si odporuji, když tvrdím *Nevím, zda A, ale není pravda, že A*.

Spíše se tedy zdá, že nepravdivost antecedentu při užití subjunktivního hypotetického soudu není spolutvrzena, i když bývá často *signalizována*,[3] podobně jako signalizujeme (avšak netvrdíme) určitý kontrast či nesoulad, když používáme výraz *ale*. Na tuto pozoruhodnou skutečnost v případě výrazu *ale* upozornil již Frege (viz např. Frege, 1918) a vypůjčíme-li si jeho terminologii, mohli bychom tedy říci, že myšlenka vyjádřená negací antecedentu netvoří součást myšlenky vyjádřené v subjunktivním kondicionálu.

Avšak můžeme jít dokonce ještě dále a doložit, že nepravdivost antecedentu není v jistých případech ani signalizována. Můžeme se ocitnout v situaci, kdy antecedent nějakého kondicionálu je pravdivý (nemusíme sice v dané situaci o této skutečnosti vědět, avšak nepředpokládáme, že antecedent pravdivý není) a přesto lze daný kondicionál přirozeně použít v subjunktivním tvaru. Pro ilustraci si představme, že vyšetřujeme vraždu. Ve skutečnosti je vrahem zavražděné její manžel, avšak vyšetřování není u konce, a i když je manžel mezi podezřelými, nemáme o jeho vině prozatím dostatek důkazů. Uvažujeme o možných scénářích vraždy a zcela legitimně přitom použijeme větu:

64. Kdyby byl vrahem zavražděné její manžel, motivem vraždy by byla žárlivost.

Přitom antecedent této věty je pravdivý a my se nacházíme ve stavu, kdy možnost této pravdivosti připouštíme (i když připouštíme též možnost nepravdivosti), takže o skutečnou kontrafaktualitu zde jít nemůže.

Inspirováni příkladem Alana Andersona, resp. Stalnakerovou modifikací tohoto příkladu,[4] můžeme předchozí větu ještě upravit, aby vyniklo, že kontrafaktualita v silném slova smyslu zde nevystupuje.

65. Kdyby byl vrahem zavražděné její manžel, objevili bychom přesně ty indicie, které jsme také skutečně našli.

Tento hypotetický soud nemůže být kontrafaktuální, neboť byl formulován na podporu tvrzení, že antecedent je pravdivý. Kdyby toto tvrzení předpokládalo nepravdivost antecedentu, zpochybňovalo by samo sebe.

[3] Tento termín používá v technickém slova smyslu Jackson (1979). V kapitole 7 se tomuto tématu budu věnovat podrobněji.

[4] Viz (Anderson, 1951) a (Stalnaker, 1975).

Avšak přes tyto komplikace budu nadále pro subjunktivní kondicionály používat též někdy termín *kontrafaktuály*. Důvodem je, že kontrafaktualita skutečně hraje v případě subjunktivních kondicionálů podstatnou roli, i když se musíme vyhnout tomu, že bychom ji pokládali za nutnou podmínku jejich tvrditelnosti. Kontrafaktualita nehraje roli pozitivní, nýbrž negativní. Zjednodušeně řečeno, podstatné je nikoli to, že subjunktivní kondicionály *jsou* kontrafaktuální, nýbrž to, že indikativní kondicionální věty *nejsou* kontrafaktuální. Je-li totiž něco skutečným kontrafaktuálním tvrzením, musí to být jedině kondicionální věta v subjunktivním tvaru.

Proti obecné tezi, že kondicionální věty indikativní a subjunktivní se liší ve významu, může zprvu svědčit pozorování, že u mnoha jednotlivých hypotetických soudů transformace z indikativního tvaru na subjunktivní nemá žádný viditelný sémantický efekt. Vezměme si třeba následující dvě věty, které jsou v indikativním tvaru

66. Pokud sečteme dvě lichá čísla, získáme číslo sudé.

67. Pokud zítra bude pršet, nikam nepůjdu.

a přetransformujme je na subjunktivní tvar:

68. Kdybychom sečetli dvě lichá čísla, získali bychom číslo sudé.

69. Kdyby zítra pršelo, nikam bych nešel.

Zdá se, že nedošlo k žádnému zásadnímu významovému posunu. Obě varianty říkají v podstatě to samé. Avšak tak tomu evidentně není vždy. To dobře ilustrují následující dva příklady.

70. Pokud Petr Bezruč nenapsal Slezské písně, tak je napsal někdo jiný.

71. Kdyby Petr Bezruč nenapsal Slezské písně, tak by je napsal někdo jiný.

Zde jsme bezpochyby svědky důležitého rozdílu, který evidentně má co činit s kontrafaktualitou. Na základě znalosti faktu, že Slezské písně jsou skutečnou básnickou sbírkou, bychom měli sklon akceptovat větu 70 v indikativním tvaru, avšak nikoli větu 71 v subjunktivním tvaru. Povšimněme si zde, že tvrzení věty 71 (na rozdíl od 70) skutečně signalizuje nepravdivost antecedentu, tj. signalizuje, že Petr Bezruč ve skutečnosti napsal Slezské písně. Uvedené dvě věty jsou variací na klasické příklady, které do literatury uvedl významný stoupenec epistemického přístupu Ernest Adams (1970) a které byly od té doby v různých obměnách mnohokrát opakovány. Jedná se o tyto věty:

72. Pokud Oswald v Dallasu nezastřelil Kennedyho, pak to neudělal ani nikdo jiný.

73. Kdyby Oswald v Dallasu nezastřelil Kennedyho, pak by to neudělal ani nikdo jiný.

Situace je zde inverzní vzhledem k dvojici vět 70 a 71. Jelikož víme, že Kennedy byl v Dallasu zastřelen, měli bychom silný sklon odmítnout větu 72 v indikativním tvaru, ale přitom bychom asi akceptovali větu 73 v subjunktivním tvaru.

Další Adamsův příklad ilustrující rozdíl mezi indikativními a subjunktivními kondicionály si představíme (v mírně upravené podobě) spolu s následujícím kontextem: Předpokládejme, že máme dva podezřelé z vraždy pana Nováka. Prvním z podezřelých je pan Procházka a druhým pan Černý. Situace je pro jednoduchost taková, že nikdo jiný kromě těchto pánů nemohl zločin spáchat. Na základě vyšetřování se ukáže, že pan Procházka měl – na rozdíl od pana Černého – k vraždě silný motiv a také se u něj našla vražedná zbraň. V této situaci máme sice dobrý důvod tvrdit větu

74. Pokud pana Nováka nezavraždil pan Procházka, pak ho zavraždil pan Černý.

avšak nikoli větu

75. Kdyby pana Nováka nezavraždil pan Procházka, pak by ho zavraždil pan Černý.

Na základě těchto příkladů identifikoval Adams jeden z podstatných obecných rozdílů mezi indikativními a subjunktivními kondicionály a navíc se zdá, že na jisté úrovni lze tento rozdíl skutečně vidět jako rozdíl logický: Když akceptujeme indikativní kondicionál *Pokud A, B* a dozvíme se, že jeho antecedent A je pravdivý, představuje to pro nás vždy racionální důvod usoudit na konsekvent B. Naproti tomu přijmeme-li nejprve subjunktivní kondicionál *Kdyby A, B* a následně se dozvíme, že antecedent A je pravdivý, může nás to oprávněně vést nikoli k přijetí konsekventu, nýbrž k odmítnutí dříve přijatého kondicionálu, protože na rozdíl od indikativních kondicionálů může (i když nemusí) být přijetí subjunktivního kondicionálu založeno na předpokladu, že antecedent je nepravdivý, a je-li tento předpoklad vyvrácen, ztrácíme důvod tvrdit danou kondicionální větu. Na základě tohoto pozorování Adams uzavírá, že modus ponens, tj. pravidlo, které umožňuje z kondicionálu a jeho antecedentu odvodit konsekvent, je obecně platným principem pro indikativní kondicionály, nikoli však pro subjunktivní. Ovšem tento závěr vychází z velmi nestandardního pravděpodobnostního a navíc dynamického pojetí platnosti odvozovacího pravidla.[5]

[5] Adamsově pravděpodobnostní logice v její statické verzi se budu věnovat v kapitole 8. Dynamická verze jeho logiky je popsána v (Adams, 1998, kapitola 5).

Abychom Adamsovu úvahu ilustrovali na příkladu, předpokládejme, že se nacházíme ve výše popsaném kontextu, v němž došlo k vraždě pana Nováka. V tomto kontextu popíráme větu 75 a místo ní akceptujeme větu následující:

76. Kdyby pan Procházka nezavraždil pana Nováka, pak by byl pan Novák dnes naživu.

Předpokládejme dále, že zjistíme, že pan Procházka ve skutečnosti není vrahem pana Nováka. Jistě nám to nedává oprávnění, abychom na větu 76 aplikovali modus ponens a tvrdili, že pan Novák je dnes naživu. (Vždyť jsme viděli jeho mrtvolu.) Spíše ztrácíme důvod zastávat platnost věty 76. Na druhé straně jsme v takové situaci jistě oprávněni aplikovat modus ponens na indikativní kondicionál 74 a na tomto základě odvodit, že pana Nováka zavraždil pan Černý.

Tento jev můžeme pozorovat také v souvislosti s větami 72 a 73. Předpokládejme, že druhou větu akceptujeme a první nikoli. Místo věty 72 bychom přijali větu 77, která je v jistém smyslu jejím opakem:

77. Pokud Oswald v Dallasu nezastřelil Kennedyho, pak to udělal někdo jiný.

Kdybychom se nyní na základě vyšetřování dověděli, že ve skutečnosti Kennedyho v Dallasu nezastřelil Oswald, pak bychom na toto nové přesvědčení a na větu 77 mohli aplikovat modus ponens a usoudit, že Kennedyho v Dallasu zastřelil někdo jiný. Modus ponens bychom přitom nemohli aplikovat na subjunktivní kondicionál 73. Přesvědčení, že Kennedyho v Dallasu nezastřelil Oswald, by naopak představovalo důvod pro odmítnutí tohoto tvrzení.

Máme zde zcela systematický jev, ze kterého můžeme vytvořit obecné pravidlo. Toto pravidlo představuje kritérium, na základě kterého můžeme rozlišit mezi (i) tím, kdy bychom měli být ochotni tvrdit pouze subjunktivní kondicionál a nikoli jeho indikativní variantu, a (ii) tím, kdy bychom měli být ochotni tvrdit obojí:[6]

> Předpokládejme, že jsou dány nějaké dvě věty A a B a řekněme, že jsme ochotni tvrdit z nich utvořený subjunktivní kondicionál *Kdyby A, B*. Pokud by nás zjištění, že antecedent A je pravdivý, oprávněně vedlo spíše k odmítnutí tvrzení *Kdyby A, B* než k přijetí konsekventu B, pak je racionální popřít odpovídající indikativní kondicionál *Pokud A, B*. Ten můžeme tvrdit právě v těch případech, kdy nás zjištění pravdivosti antecedentu vede k přijetí konsekventu.

[6] Viz Adams (1970, str. 93)

I když toto kritérium nedává přímou odpověď na otázku, v čem se (z logického hlediska) indikativní kondicionály liší od subjunktivních, vystihuje určitý podstatný aspekt této odlišnosti.

3.2 Metajazykové teorie kontrafaktuálů

Bohatá literatura vztahující se k problematice kontrafaktuálních vět, byla vedle Adamse podnícena zejména dnes již klasickým textem Nelsona Goodmana (1947). Autor začíná těmito slovy:

> Analýza kontrafaktuálních kondicionálních vět není žádným malicherným gramatickým cvičením. Pokud postrádáme prostředky k interpretaci kontrafaktuálů, můžeme skutečně stěží tvrdit, že máme adekvátní filosofii vědy. Uspokojivá definice vědeckých zákonů, uspokojivá teorie konfirmace či dispozičních výrazů (což zahrnuje ... téměř každý objektivní predikát jako „být červený“) by řešily velkou část problému kontrafaktuálů. Opačně by nám také řešení problému kontrafaktuálů poskytlo odpověď na kritické otázky týkající se zákonů, konfirmace a významu potenciality. (Goodman, 1947, str. 113)

Jak jsem již uvedl, antecedent kontrafaktuálu je v typickém případě nějaké nepravdivé tvrzení. Např. ve větě

78. Kdyby Petr neurazil svého šéfa, nebyl by vyhozen z práce.

vystupuje jako antecedent nepravdivé (alespoň tak předpokládejme) tvrzení *Petr neurazil svého šéfa*. S kontrafaktuály se pojí řada problémů a jedním z nich je už samotná identifikace věty, která se nachází v antecedentu. Jaké tvrzení je např. antecedentem následujícího kontrafaktuálu?

79. Kdyby tato kostka byla kulatá, ...

Nabízí se odpověď, že tvrzení *Tato kostka je kulatá*. Pak by ovšem antecedent byl dokonce nekonzistentním a tedy v principu nesplnitelným tvrzením, což zjevně představuje nežádoucí problém, který je třeba odstranit.

Vedle takovýchto problémů, které se vztahují na specifické případy kontrafaktuálních vět, však Goodman vyzdvihuje jeden velmi obtížný a závažný obecný problém týkající se kontrafaktuality vůbec. Jde o tzv. *problém relevantních podmínek*.

Goodmanův výchozí bod představuje volně formulované kritérium pravdivosti pro kontrafaktuální věty:

> Kontrafaktuální věta je pravdivá, když její antecedent v konjunkci s některými relevantními pravdivými větami implikuje konsekvent.

Goodman osvětluje toto kritérium na příkladu věty

80. Kdybych škrtl touto sirkou, začala by hořet.

Tato věta je pravdivá (na základě uvedeného kritéria), protože škrtnutí sirky spolu s několika dalšími relevantními podmínkami, které jsou v současné situaci splněny (sirka je suchá, nepoškozená, je zde dostatek kyslíku, atd.) implikuje hoření sirky. Prvním velkým Goodmanovým problémem, který vyvstává v souvislosti s kontrafaktuály, je objasnit, jaké podmínky jsou pro daný kontrafaktuál relevantní. Jinými slovy, otázkou je, které pravdivé věty bychom vůbec měli při vyhodnocování kontrafaktuálu konjunktivně připojit k antecedentu, chceme-li zjistit, zda tato konjunkce implikuje konsekvent. Druhým problémem pak je, jaká je povaha této implikace. I když k antecedentu přidáme některé pravdivé věty, jak bylo naznačeno v předchozím příkladu, zdá se, že konsekvent nebude logickým důsledkem výsledné konjunkce, nýbrž důsledkem v nějakém slabším slova smyslu. Závěr není odvozen podle logických zákonů, nýbrž podle přírodních či fyzikálních zákonů. Druhý Goodmanův problém se tedy týká povahy fyzikálních či kauzálních zákonů jakožto pravidel inference. Celkově skeptický výsledek Goodmanových úvah spočívá v tom, že ukazuje, že každý pokus o specifikaci a zpřesnění uvedeného kritéria selhává.

Co se prvního z těchto dvou témat týče, postupuje Goodman tak, že rozebírá nabízející se alternativy, jak specifikovat, jaké pravdivé věty by měly být ponechány a připojeny k antecedentu, testujeme-li pravdivost nějakého kontrafaktuálu. U každého takového pokusu ukazuje jeho nepřijatelnost. Jistě není možno připojit k antecedentu všechny pravdivé věty, neboť jedná-li se o typický kontrafaktuál, mezi pravdivými větami se nachází též negace antecedentu a množina předpokladů, z nichž bychom chtěli odvodit konsekvent, by se tak stala spornou a každý skutečný kontrafaktuál by tak vycházel jako pravdivý. Avšak není postačující, omezíme-li se na množinu těch pravdivých vět, které jsou kompatibilní (ať už v logickém či nějakém slabším smyslu) s antecedentem, neboť jejich konjunkce kompatibilní být nemusí. Např. – adaptuji-li Goodmanův příklad na naše poměry – věta *Petr je v České republice* je kompatibilní s každou z následujících vět, nikoli však s jejich množinou:

81. Petr není v Čechách.

82. Petr není na Moravě.

83. Petr není ve Slezsku.

84. Česká republika sestává z Čech, Moravy a (části) Slezska.

Postupné zvažování toho, co je třeba opravit, abychom se vyhnuli podobným problémům, vede Goodmana k tomu, že množina relevantních vět není v dané situaci fixně stanovena, spíše je třeba kvantifikovat přes množiny pravdivých vět určitého typu. Z těchto úvah vyvstává nepřehledná modifikace výše uvedeného kritéria.

> Kontrafaktuální věta je pravdivá, když existuje množina pravdivých vět S, která nevyplývá z negace antecedentu A, je kompatibilní s antecedentem A, konsekventem B i s jeho negací, a společně s A zákonitě vede k B (v tom smyslu, že B lze na základě daných zákonů odvodit z této množiny obohacené o A), přičemž neexistuje množina pravdivých vět, která nevyplývá z negace A, je kompatibilní s A, s B i s negací B, a pro kterou platí, že společně s A zákonitě vede k negaci B.

Není třeba tento návrh blíže analyzovat, neboť ani on není uspokojivým řešením naší otázky. Množina S, jejíž existence má být garantována, by mohla obsahovat pravdivé věty, které jsou sice kompatibilní s A, avšak nebyly by pravdivé, kdyby A bylo pravdivé. Goodman uvádí pro ilustraci následující větu:

85. Kdybych škrtnul touto sirkou, byla by mokrá.

Tuto větu bychom v dané situaci považovali za nepravdivou, avšak z hlediska navrženého kritéria vychází jako pravdivá, neboť množinu S bychom mohli volit tak, že se v ní bude nacházet pravdivá věta *Sirka nehoří*, která společně s antecedentem kontrafaktuálu 85 a s dalšími pravdivými větami (sirka je nepoškozená, je zde dostatek kyslíku, atd.) implikuje, že sirka je mokrá.

Goodman tedy dospívá k závěru, že kompatibilita je nepostačující požadavek a že se tedy neobejdeme bez silnějšího požadavku, podle kterého množina S musí být navíc tzv. *udržitelná* (cotenable) spolu s A. Tento technický termín je definován takto: S je *udržitelná* spolu s A, když neplatí, že kdyby A bylo pravdivé, pak by něco z S bylo nepravdivé. Tím se však celá analýza stává kruhovou, resp. dostává se do nekonečného regresu:

> Abychom určili pravdivostní hodnotu daného kontrafaktuálu, zdá se, že musíme (mimo jiné) určit, zda existuje vhodné S, které je udržitelné spolu s A a splňuje nějaké další požadavky. Avšak abychom určili, zda dané S je či není udržitelné spolu s A, musíme určit pravdivostní hodnotu kontrafaktuálu *Kdyby A bylo*

> *pravdivé, pak by S nebylo pravdivé.* Ale to znamená určit nějaké vhodné S_1 udržitelné spolu s A, které vede k negaci S, a tak dále. Ocitáme se tedy v nekonečném regresu či v kruhu, neboť společná udržitelnost je definována pomocí kontrafaktuálů a význam kontrafaktuálů je definován pomocí společné udržitelnosti... Ačkoli nerad, musím připustit, že v tuto chvíli nevidím žádný způsob, jak překonat tento problém. (Goodman, 1947, str. 122)

Podobně bezradně končí úvaha nad druhým Goodmanovým problémem, který se týká povahy obecných zákonů, na jejichž základě odvozujeme konsekvent kontrafaktuálu z jeho antecedentu (obohaceného o množinu relevantních pravdivých vět). O zákonech Goodman mluví jako o inferenčních pravidlech, které nám umožňují přechod od premis k závěru. Avšak tyto zákony lze zároveň formulovat jako specifická obecná tvrzení. Goodman uvažuje především nad tím, jak odlišit takto vyjádřené zákony od obecně, avšak nahodile pravdivých vět, které v kontrafaktuální situaci postulované antecedentem mohou pozbýt svoji platnost a nejsou tak využity při odvození konsekventu z antecedentu. Příkladem je věta *Všechny mince v mé kapse jsou stříbrné*, kterou nevyužijeme při vyhodnocování věty *Kdyby tato zlatá mince byla v mé kapse, byla by stříbrná.* Avšak každý pokus odlišit zákony od pouhých obecných tvrzení končí neúspěchem.

Goodmanova teorie kontrafaktuálních vět se v hrubých obrysech shoduje s tím, jak tyto věty analyzují další autoři jako Chisholm (1946) či Rescher (1964). David Lewis (1968) shrnuje tento přístup pod názvem *metajazykové teorie kontrafaktuálů*, a to z toho důvodu, že stanovuje pro kontrafaktuály (výše uvedenou) podmínku pravdivosti, ve které vystupují specifickým způsobem jazykové entity: Kontrafaktuální věta je pravdivá (resp. tvrditelná), když její antecedent v konjunkci s některými dalšími relevantními pravdivými větami implikuje konsekvent. D. Lewis sám navrhuje alternativní teorii, se kterou se seznámíme v následujícím oddílu. Jak ovšem ještě blíže vysvětlím v oddílu 3.4, Lewisovu teorii a metajazykové teorie lze z určité perspektivy vidět jako dvě strany téže mince.

3.3 Podobnost možných světů

Lewisova teorie kontrafaktuálů předložená v (D. Lewis, 1973a,b) představuje dodnes jisté paradigma v dané oblasti.[7] Lewis vychází z toho, že k analýze kontrafaktuálů nelze přímočaře použít materiální implikaci, tj. implikaci kla-

[7] V českém jazyce o teorii kontrafaktuálů Davida Lewise pojednává Childers & Majer (2010).

sické logiky.[8] To je zcela zřejmé, neboť materiální implikace je pravdivostně funkční spojka, která funguje tak, že spojíme-li pomocí ní věty A a B, získáme větu, která je pravdivá právě tehdy, když A je nepravdivá nebo B je pravdivá. Vzhledem k tomu, že kontrafaktuály mají v typickém případě nepravdivý antecedent, byly by automaticky vyhodnocovány jako pravdivé, což by celou analýzu trivializovalo.

Ovšem vhodným kandidátem na formální reprezentaci kontrafaktuálů není podle Davida Lewise ani striktní implikace, kterou se budeme podrobně zabývat v kapitole 5 a kterou zavedl jiný Lewis, totiž Clarence Irving. Podle kripkovské sémantiky pro striktní implikaci platí, že A striktně implikuje B právě tehdy, když B je pravdivé ve všech A-světech, tj. ve všech možných světech, ve kterých je pravdivé A.[9] D. Lewis říká, že takováto podmínka není pro analýzu kontrafaktuálů přijatelná. Jedním z jejích důsledků je zákon, podle kterého můžeme vždy zesílit antecedent.

Jestliže A striktně implikuje C, pak A *a* B striktně implikuje C.

Jestliže je totiž C pravdivé ve všech světech, v nichž je pravdivé A, pak musí být též pravdivé ve všech světech, v nichž je pravdivé A *a* B. D. Lewis se ovšem domnívá, že analogický zákon pro kontrafaktuály nemůže platit, což můžeme podpořit příkladem následujících dvou vět, u nichž si lze představit, že první lze smysluplně v nějaké odpovídající situaci vyslovit jakožto pravdivou, aniž by to platilo u druhé z nich:

86. Kdyby tu byl Petr, zeptal bych se ho na Janu.

87. Kdyby tu byl Petr a byla by tu s ním i Jana, zeptal bych se ho na Janu.

Důvodů, proč D. Lewis odmítá striktní implikaci, je více. Další z nich odpovídá tomu, že pokud A striktně implikuje *ne-B*, tak neexistují žádné světy, v nichž by platilo A *a* B, což pro libovolné C znamená, že A *a* B striktně implikuje jak C, tak i *ne-C*. To je v rozporu z pozorováním, že můžeme mít řetězec vět A, B, C, D, ... takových, že pro ně zároveň nastávají následující případy:

Platí *Kdyby A, tak ne-B*, a přitom neplatí *Kdyby A, tak B*.

Platí *Kdyby A a B, tak ne-C*, a přitom neplatí *Kdyby A a B, tak C*.

[8] Pozoruhodné je, že se D. Lewis (1976) domnívá, že nám materiální implikace poskytuje adekvátní podmínky pravdivosti pro indikativní kondicionály.

[9] Kripkovská sémantika, jak ji známe dnes, byla vytvořena asi padesát let poté, co C. I. Lewis zavedl svoji striktní implikaci. Nicméně mezitím vznikla řada teorií, které kripkovskou sémantiku anticipovaly (viz Copeland, 2002). Sedlár (2009) dokonce ukazuje, že už i C. I. Lewis pracoval s možnými světy.

Platí *Kdyby A a B a C, tak ne-D*, a přitom neplatí *Kdyby A a B a C, tak D.*

⋮

D. Lewis (1973b, str. 419) v této souvislosti uvádí následující příklad:

88. Kdyby Albert přišel na večírek, nevzal by s sebou Betty, protože je mu jasné, že kdyby přišel na večírek a vzal by s sebou Betty, Carl by nezůstal, jelikož kdyby Albert přišel na večírek spolu s Betty a Carl by zůstal, Daisy by s ním už netancovala ...

Lewisova pozitivní teorie se nápadně podobá teorii Roberta Stalnakera, která ovšem byla aplikována také na indikativní kondicionály, a probereme ji proto podrobněji v kapitole 6. Lewisův přístup ke kontrafaktuálům je ontický. Jeho podmínka pravdivosti pro tento typ vět zní takto:

> Kontrafaktuální věta s antecedentem A a konsekventem B je pravdivá právě tehdy, když věta B je pravdivá ve všech nejbližších A-světech.[10]

Oproti podmínce vymezující striktní implikaci se tedy změnilo jen to, že je doplněna restrikce na *nejbližší A-světy*. Lze však doložit, že tímto manévrem se odstraní výše uvedené problémy spojené se striktní implikací. Blízkost je zde míněna ve smyslu celkové podobnosti. Kontrafaktuál se tedy vyhodnocuje podle toho, zda jeho konsekvent platí v těch aktuálnímu světu nejpodobnějších světech, ve kterých platí antecedent. Pojem podobnosti možných světů je zjevně beznadějně nejasný a vágní, ale to Lewisovi nevadí. I když se jedná o vágní pojem, my mu dobře rozumíme. Je tedy přesně tím, co potřebujme, abychom podali analýzu něčeho, co je samo beznadějně vágní — a kontrafaktuály beznadějně vágní jsou. Síla Lewisovy analýzy spočívá v tom, že je schopen s pojmem podobnosti operovat navzdory jeho vágnosti dostatečně jasně a konzistentně.

Celková podobnost, říká Lewis, spočívá v bezpočtu jednotlivých podobností a odlišností v bezpočtu aspektech, které jsou vzájemně vyváženy podle

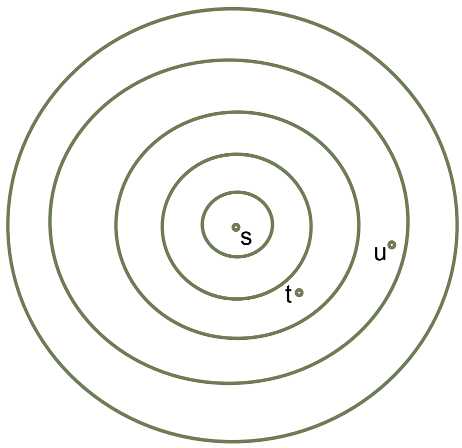
[10] Lewis z jistých důvodů tuto podmínku ještě dále upravuje a jeho finální verze zní takto:

> Kontrafaktuální věta s antecedentem A a konsekventem B je pravdivá právě tehdy, když existuje svět, v němž je pravdivé *A a B* a který je blíže aktuálnímu světu, než všechny světy, v nichž je pravdivé *A a ne-B* (pokud ovšem vůbec existují nějaké možné A-světy, jinak je kontrafaktuál vyhodnocen jako pravdivý automaticky).

Důvody, proč dává ve výsledku Lewis přednost této podmínce, nechám stranou a spokojím se v tomto neformálním výkladu s výše uvedenou jednodušší podmínkou pravdivosti. Blíže k tomuto problému viz (D. Lewis, 1973a,b).

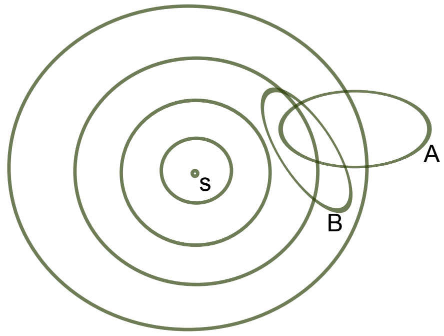
relativních důležitostí, které připisujeme těmto aspektům. Vágnost celkového srovnávání podobnosti možných světů je stejným druhem vágnosti, která vyvstává, když řeknu, že Seattle se podobá Los Angeles. Podobá se? Záleží, na co klademe důraz a čemu připisujeme větší důležitost, zda architektuře, průmyslu, politické orientaci občanů, podnebí, veřejné dopravě, atd. Situace je analogická, když např. řekneme, že dva lidé jsou si podobní. A stejný význam dává Lewis také tvrzení, že dva možné světy jsou si podobné.

Stává se, že nějaké vágní pojmy jsou vágní paralelním způsobem. To je přesně to, co hledáme při analýze kontrafaktuálů. D. Lewis analyzuje vágní kontrafaktuální věty pomocí vágního pojmu podobnosti možných světů, se kterým ovšem dovede zacházet dostatečně přesným způsobem, takže je schopen na jeho základě vytvořit formální sémantiku zcela exaktním způsobem. Nebudu zde zacházet do technických podrobností, pouze uvedu, že podobnost je modelována pomocí tzv. systému sfér, který vytváří určitou strukturu na množině možných světů. Kolem aktuálního světa s jsou tedy rozmístěny možné světy v jednotlivých, do sebe vnořených sférách, jak naznačuje následující obrázek:



Jednotlivé sféry představují stupně podobnosti, takže pokud svět t je uvnitř a svět u vně nějaké sféry, znamená to, že svět t je více podobný aktuálnímu světu s než svět u. Za tímto obrázkem se skrývá představa, že uspořádání do sfér je dáno kontextem, který rozhodne o tom, podle jakého hlediska jsou světy srovnávány. Srovnání se však neděje na základě logických, nýbrž na základě mimologických kritérií. Uspořádání světů tedy není fixně stanoveno na úrovni logiky a je variabilní napříč různými modely Lewisova sémantického systému.

V takto zpřesněné sémantice se vyhodnocování kontrafaktuálu *Kdyby A, B* děje následujícím způsobem. Vezmeme nejmenší sféru kolem aktuálního světa, kde jsou nějaké A-světy, a ptáme se, zda v rámci této sféry je konsekvent pravdivý ve všech přítomných A-světech, jak je znázorněno na obrázku. Právě v takovém případě je kontrafaktuál vyhodnocen jako pravdivý.



Problémy Lewisovy analýzy jsou však přece jen problémy s pojmem celkové podobnosti. Brzy po uveřejnění (D. Lewis, 1973a) se objevily závažné protipříklady k Lewisově sémantice. Uvedu pro ilustraci dva z nich. První formuloval Kit Fine v recenzi Lewisovy knihy (Fine, 1975). Představme si, že se nacházíme v roce 1972, tedy v době studené války mezi USA a Sovětským svazem. Řekněme, že americký prezident Nixon může rozhodnout o svržení atomové bomby na Sovětský svaz, a předpokládejme též, že takový čin by jistě rozpoutal třetí světovou válku. Předpokládejme dále, že Nixon může vydat rozkaz o svržení bomby pomocí toho, že zmáčkne nějaký spínač. V takové situaci bychom vyhodnotili jako pravdivou větu:

89. Kdyby Nixon zmáčkl příslušný spínač, rozpoutala by se třetí světová válka.

Tato věta však, zdá se, není pravdivá podle Lewisovy sémantiky, protože náš svět se radikálně liší od těch, ve kterých došlo ve dvacátém století k třetí světové válce. Takové světy jsou našemu světu vzdálené a blíže se nacházejí světy, v nichž Nixon zmáčkl příslušný spínač a k válce nedošlo – třeba z toho důvodu, že nastaly technické potíže, které zapříčinily, že spínač nebyl funkční, a Nixon si následně svůj čin rozmyslel.

Příklad poukazující na podobný problém vymyslel Pavel Tichý a uveřejnil ho v (Tichý, 1976). Předpokládejme, že Jones se striktně řídí podle následujícího pravidla: Je-li špatné počasí, vždy nosí klobouk. Je-li dobré počasí, někdy nosí klobouk a někdy ne, podle okamžitého náhodného rozhodnutí. Předpokládejme, že dnes je špatné počasí a Jones má na hlavě klobouk. Jelikož světy, v nichž je hezké počasí a Jones má na hlavě klobouk, jsou blíže než světy, v nichž je hezké počasí a Jones nemá na hlavě klobouk, tak by podle Lewisovy analýzy měla být pravdivá věta

90. Kdyby bylo hezké počasí, Jones by měl na hlavě klobouk.

To se zdá být v rozporu s tím, jak bychom v dané situaci kontrafaktuál vyhodnocovali. Je přirozené předpokládat, že není nijak jednoznačně určeno, jestli by Jones měl na hlavě klobouk, kdyby bylo hezké počasí. V dané situaci je pravda, že kdyby bylo hezké počasí, Jones by mohl mít na hlavě svůj klobouk, a je také pravda, že kdyby bylo hezké počasí, Jones by mohl nemít na hlavě svůj klobouk.

Přestože uvedené příklady poukazují na problematičnost pojmu podobnosti možných světů, nedomnívám se, že by celkově znehodnotily Lewisovu sémantiku. Pouze dokládají, že pojem podobnosti nelze brát příliš doslovně. Představa, že (vzhledem k danému kontextu) jsou světy uspořádány podle podobnosti, lze nahradit představou určitého selekčního mechanismu, který (opět s ohledem na daný kontext) vybere světy, které jsou v dané chvíli relevantní, a v rámci této třídy relevantních světů se pak ptáme, zda je konsekvent pravdivý všude tam, kde je pravdivý antecedent. Výběr je relativní k tomu, v jakém stavu světa se nacházíme a jaký antecedent je ve hře. To, které světy jsou v dané situaci relevantní, nelze specifikovat na úrovni logiky, přesto lze na této bázi formulovat exaktní formální sémantiku, která definuje určitou logiku kontrafaktuálů. Jak to lze provést, ukáži podrobněji v kapitole 6 na příbuzné Stalnakerově teorii, která též operuje s pojmem selekčního mechanismu, resp. s analogickým pojmem výběrové funkce.

Tím jsme se ovšem dostali k podobnému problému, na který jsme narazili v rámci metajazykových teorií kontrafaktuálů, kde ovšem nešlo o to, které světy jsou v dané chvíli relevantní, nýbrž o to, které věty je třeba připojit k antecedentu, abychom se mohli zeptat, zda dohromady s antecedentem implikují konsekvent – a na tomto základě posléze vyhodnotit celý kontrafaktuál. I zde lze situaci reprezentovat tak, že je ve hře nějaký (kontextově podmíněný) selekční mechanismus, který vybírá sadu relevantních pravdivých vět, které jsou kompatibilní s antecedentem. Tato dualita sahá dále, jak ukáži v následujícím oddílu.

3.4 Dvě strany téže mince

Sám Lewis říká, že jeho analýza se v podstatných rysech shoduje s analýzou metajazykovou. Tuto tezi potvrdil ve svém článku např. i Sven Ove Hansson (1995), který ukazuje ekvivalenci Lewisova přístupu s přístupem metajazykovým (kterému říká derivační teorie, derivability theory). Obě teorie lze formulovat v takové formě, že v nich hraje klíčovou roli jakýsi selekční mechanismus, v případě Lewisovy teorie vybírá sadu relevantních možných světů, v případě metajazykové teorie vybírá sadu relevantních pravdivých vět. V obou případech je selekční mechanismus citlivý na kontext a operuje relativně vzhledem k danému antecedentu a aktuálnímu světu. Tyto selekční mechanismy jsou však na sebe převoditelné.

Předpokládejme nejprve, že máme k dispozici selekční mechanismus, který vybírá relevantní pravdivé věty v rámci metajazykové teorie kontrafaktuálů. Můžeme si ho představit tak, že vybírá vždy ty věty, které popisují takové relevantní aspekty aktuálního světa, které mají být promítnuty do postulované kontrafaktuální situace, takže jsou i v ní zachovány jakožto pravdivé. Na základě takovéhoto selekčního mechanismu můžeme tedy vždy vzít také všechny ty možné světy, v nichž jsou pravdivé všechny vybrané věty. Takto získáme selekční mechanismus vybírající množiny možných světů, který potřebujeme v rámci Lewisovy teorie.

Nyní naopak předpokládejme, že máme k dispozici selekční mechanismus vybírající relevantní množiny možných světů. Ten si můžeme představit tak, že vybere vždy ty světy, které se shodují s aktuálním světem v relevantních rysech. Tyto rysy mohou být popsány v podobě vět, které jsou pravdivé ve všech vybraných možných světech. Takovýmto způsobem tedy můžeme odvodit selekční mechanismus vybírající množiny pravdivých vět, který potřebujeme v rámci metajazykových teorií.

Hansson přesněji formuloval a dokázal, v jakém ohledu jsou tyto transformace pouhými změnami perspektivy, takže oba přístupy lze chápat jako ekvivalentní. Dále pak identifikoval tři základní problémy, kterým obě tyto (a potenciálně jakékoli jiné) teorie kontrafaktuálů musí čelit.

(1) mimologická povaha selekčního mechanismu,

(2) cirkularita analýzy,

(3) problémy s posuny kontextu.

O prvních dvou problémech jsme hovořili již výše. Nelze specifikovat a priori na úrovni logiky, jak má v dané situaci selekční mechanismus vypadat a co má být přesně vybráno. Logika může zkoumat pouze vzorce, které jsou invariantní vůči jakémukoli výběru. Výběr může být na úrovni logiky omezen určitými formálními požadavky, nemůže však být určen jednoznačně. (To bude ještě lépe vidět v kapitole 6.) Jak bylo naznačeno již u Goodmana, selekční mechanismus nemůže být definován čistě prostřednictvím logických pojmů jako je pravdivost či kompatibilita.

Na problém jisté nevyhnutelné cirkularity upozornil, jak jsme viděli, také již Goodman. Je však třeba zdůraznit, že tato cirkularita se vztahuje spíše na filosofické zdůvodnění celé analýzy, nebrání však ve vytvoření formální sémantiky, která je formulována korektním, nekruhovým způsobem.

Třetí bod poukazuje na to, jak silně jsou subjunktivní kondicionály, resp. selekční mechanismy, které můžeme vidět za jejich vyhodnocováním, citlivé na kontext. Hansson to ilustruje na příkladu věty, kterou najdeme i v Lewisově knize:

91. Kdyby klokani neměli ocas, tak by přepadávali dopředu.

Tato věta by mohla být oprávněně považována za pravdivou v kontextu mechaniky, ale nikoli v kontextu evoluční biologie. Ke stejnému účelu bychom mohli použít věty, které uvádí Roderick Chisholm (1946):

92. Kdyby byl Apollón člověk, byl by smrtelný.

93. Kdyby byl Apollón člověk, alespoň jeden člověk by byl nesmrtelný.

Kdyby někdo v antickém Řecku tvrdil větu 92 a někdo jiný by mu oponoval větou 93, znamenalo by to, že se tito lidé neshodují právě v selekčním mechanismu, který v prvním případě fixuje jako relevantní tu skutečnost, že všichni lidé jsou smrtelní, a nikoli (domnělý) fakt, že Apollón je jakožto bůh nesmrtelný; ve druhém případě však fixuje Apollónovu božskou přirozenost pojící se s nesmrtelností a nechává přitom padnout fakt, že všichni lidé jsou smrtelní.

Ke kontrafaktuálům se pojí řada dalších drobnějších problémů. Jak jsem uvedl již výše, v řadě případů je např. problematické už to, jaká věta se nachází v antecedentu. Výše jsme uvedl Goodmanův příklad 79 ilustrující tento jev. Goodman uvádí ještě tento:

94. Kdybych byl Juliem Caesarem, nežil bych ve dvacátém století.

95. Kdyby byl Julius Caesar mnou, žil by ve dvacátém století.

Obě věty se zdají být z jistého hlediska ospravedlnitelné. Antecedent obou těchto kondicionálních vět lze považovat za jedno a totéž tvrzení identity mne (resp. Goodmana) a Julia Caesara. Avšak za předpokladu této identity jsou konsekventy ve vzájemném rozporu, což představuje vzhledem k přijatelnosti obou vět problém. Z toho je vidět, že otázka, jaké tvrzení se nachází v antecedentu a konsekventu daného kontrafaktuálu, nemusí mít vždy přímočarou odpověď.

Rozsáhlá literatura vztahující se k problematice kontrafaktuálů naznačuje, o jak bohaté téma se jedná. V této práci však kontrafaktuály vystupují jen okrajově, jako jazykový útvar příbuzný indikativním kondicionálům, které tvoří vlastní téma práce. Indikativním kondicionálům se budu podrobně věnovat v následujících kapitolách.

3.5 Shrnutí

V této kapitole jsem se zabýval subjunktivními kondicionály. Nejprve jsem se zabýval otázkou, zda a případně v čem se sémanticky odlišují od indikativních kondicionálů. Uvedl jsem, v čem Ernest Adams spatřoval podstatný logický rozdíl mezi těmito typy vět. Jedná se o to, že indikativní kondicionál je vždy připraven pro aplikaci pravidla modus ponens, přidáme-li k němu antecedent. Z jistého dynamického hlediska to u subjunktivních kondicionálů platit nemusí, protože doplnění antecedentu může mít ten efekt, že raději odmítneme kontrafaktuál, než abychom aplikovali modus ponens a přijali konsekvent. Dále jsem představil tzv. metajazykový přístup k analýze kontrafaktuálů, jehož zastáncem byl např. Nelson Goodman. Podle tohoto přístupu je kontrafaktuál pravdivý, když jeho konsekvent jistým způsobem vyplývá z antecedentu a nějaké sady relevantních vět. Vedle metajazykového přístupu jsem představil i teorii Davida Lewise založenou na podobnosti možných světů: Daný kontrafaktuál je pravdivý, když konsekvent je pravdivý ve všech nejbližších možných světech, v nichž je pravdivý antecedent. Na závěr jsem naznačil, že metajazykový přístup a Lewisova teorie jsou v jistém smyslu ekvivalentní.

Část II

Ontický přístup

Kapitola 4

Materiální implikace

V této kapitole vyložím základy klasické výrokové logiky s ohledem na to, jakou roli v ní hraje implikace, která reprezentuje kondicionální spojení. Jedná se tedy o výklad elementární látky, avšak při tomto výkladu se zaměřím vedle zavedení základního technického aparátu klasické logiky na filosofické otázky, které při obvyklých výkladech klasické logiky zůstávají často nevyjasněny. Zvážím mimo jiné také důvody pro a proti tomu považovat implikaci klasické logiky (tzv. materiální implikaci) za užitečný model fungování kondicionálních vět v přirozeném jazyce.

4.1 Pravdivostně funkční implikace

Předpokládejme, že je dána binární výroková spojka O. Ze syntaktického hlediska to znamená, že pokud A a B jsou smysluplné oznamovací věty, pak můžeme vytvořit též větu $O(A, B)$. Co nyní znamená, řekneme-li, že spojka O je extenzionální? Tím je míněno, že extenze věty $O(A, B)$ je jednoznačně určena extenzemi vět A a B. Význam spojky O pak můžeme uchopit jako funkci, která přiřadí extenzím vstupních vět extenzi celku. Jelikož extenzemi vět jsou pravdivostní hodnoty, význam binární spojky O lze uchopit jako dvouargumentovou pravdivostní funkci, která přiřazuje dvojicím pravdivostních hodnot pravdivostní hodnoty.

Pro disjunkci a konjunkci je toto extenzionální pojetí relativně neproblematické. Navíc negaci lze uchopit jako jednoargumentovou pravdivostní funkci otáčející pravdivostní hodnotu. Těmto třem operátorům tedy můžeme přiřadit následující funkce, kde, jak je běžné, 1 reprezentuje pravdivostní hodnotu *pravda* a 0 reprezentuje pravdivostní hodnotu *nepravda*:

x	y	$f_\wedge(x,y)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

x	y	$f_\vee(x,y)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

x	$f_\neg(x)$
1	0
0	1

Otázkou nyní je, zda lze také spojení vyskytující se v indikativních kondicionálních větách (tedy implikaci) považovat za extenzionální operátor. Chceme-li vymezit význam implikace ve stejném duchu jako význam konjunkce či disjunkce, máme na výběr z šestnácti dvouargumentových funkcí.

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0

x	y	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Funkci f_8 jsme přiřadili konjunkci, funkci f_2 disjunkci. Jakou funkci bychom měli přiřadit implikaci? Jak ukážeme dále, lze argumentovat, že v tomto extenzionálním rámci existuje jen jediný rozumný kandidát na význam implikace, a to funkce f_5:

x	y	$f_\rightarrow(x,y)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Tedy řekneme, že kondicionální věta je pravdivá právě tehdy, když její antecedent je nepravdivý nebo konsekvent pravdivý. Ekvivalentně řečeno, kondicionální věta je nepravdivá právě tehdy, když antecedent je pravdivý a konsekvent nepravdivý. Bertrand Russell pro tuto spojku, jejíž význam je chápán jako funkce f_5, zavedl označení, které se ujalo, totiž *materiální implikace*.

Mluvíme-li o tom, že materiální implikace modeluje určitým způsobem kondicionální spojení, vztahuje se to pouze na indikativní kondicionály. Typické kontrafaktuály mají nepravdivý antecedent. Kdyby se vyhodnocovaly podle tabulky materiální implikace, znamenalo by to, že jsou všechny tyto typické kontrafaktuály pravdivé, což je absurdní. Ještě budeme dále zvažovat, jestli je přijatelné stanovit, že každý indikativní kondicionál, který má nepravdivý antecedent, je pravdivý. U kontrafaktuálů lze tento požadavek ihned odmítnout.

Proč je mezi dvouargumentovými spojkami funkce f_5 jediným rozumným kandidátem na reprezentaci indikativního kondicionálního spojení? Všichni se shodují na tom, že současná pravdivost antecedentu a nepravdivost konsekventu je postačující podmínkou nepravdivosti celé implikace. Je však velmi kontroverzní, že by se mělo jednat také o nutnou podmínku. Jinými slovy, druhý řádek tabulky funkce f_5 je přijatelný z hlediska kondicionálních vět, ale ostatní řádky (zejména třetí a čtvrtý) jsou problematické. Nicméně volba jakékoli alternativní pravdivostní funkce by zde vedla k důsledkům, které jsou naprosto nepřijatelné. To lze podložit např. následujícím argumentem: Je truismem, řekneme-li

96. Pokud je pravdivá věta A *a* B, pak je pravdivá věta A.

Nemusíme zkoumat, jakou pravdivostní hodnotu mají věty A, B, abychom ověřili, že věta 96 je pravdivá. Chtěli bychom tedy, aby naše sémantika byla nastavena tak, že formule $(p \wedge q) \rightarrow p$ bude pravdivá za všech okolností, nezávisle na tom, jakou pravdivostní hodnotu mají formule p a q. Předpokládejme, že bychom implikaci přiřadili jakožto její význam funkci f, která by se od funkce f_5 lišila v prvním, třetím nebo čtvrtém řádku. Pokud by se funkce f od funkce f_5 lišila v prvním řádku, pak by byla formule $(p \wedge q) \rightarrow p$ nepravdivá v situaci, kdy by p i q byly obě pravdivé. Pokud by se funkce f od funkce f_5 lišila v třetím řádku, pak by formule $(p \wedge q) \rightarrow p$ byla nepravdivá v situaci, kdy by p byla pravdivá a q nepravdivá. Kdyby se funkce f od funkce f_5 lišila ve čtvrtém řádku, pak by formule $(p \wedge q) \rightarrow p$ byla nepravdivá v situaci, kdy by p i q byly obě nepravdivé. Chceme-li se vyhnout těmto důsledkům a přesto zůstat v extenzionálním rámci, musíme přijmout funkci f_5 jako význam implikace.[1]

Vymezení implikace jakožto určité pravdivostní funkce má dlouhou tradici. Stejným způsobem analyzoval kondicionální věty již stoik Filón z Megary a podle něho se též někdy materiální implikace označuje jako *implikace filónská*. Je známo, že Filónův učitel Diodoros Kronos formuloval alternativní podmínku pro kondicionální věty připomínající spíše striktní implikaci, kterou se budeme zabývat v kapitole 5. Podrobněji k tomu viz např. (Sanford, 1989).

[1] Tento argument byl převzat ze (Smith, 2003).

4.2 Pravdivost formule v interpretaci a vyplývání

Pokud jsme přiřadili nějakou pravdivostní funkci každému logickému operátoru jazyka L, můžeme nyní definovat pojem pravdivosti formule v dané interpretaci. Zopakujme, že interpretace je funkce přiřazující mimologickým symbolům nějakou jejich extenzi. V jazyce L jsou mimologickými symboly atomické formule, jedná se tedy o výrazy kategorie vět a jejich extenzemi jsou pravdivostní hodnoty. Interpretace je tedy funkce přiřazující atomickým výrokům pravdivostní hodnoty. Tuto funkci můžeme pomocí rekurzivní definice rozšířit tak, že přiřazuje nějakou pravdivostní hodnotu každé formuli jazyka L. Přiřazování probíhá v souladu s následujícími podmínkami:

(a) $I(\neg\varphi) = f_{\neg}(I(\varphi))$,

(b) $I(\varphi \wedge \psi) = f_{\wedge}(I(\varphi), I(\psi))$

(c) $I(\varphi \vee \psi) = f_{\vee}(I(\varphi), I(\psi))$

(d) $I(\varphi \rightarrow \psi) = f_{\rightarrow}(I(\varphi), I(\psi))$

Alternativní způsob, jak vymezit pravdivostní hodnotu formule v interpretaci, je pomocí tzv. Tarského definice pravdy. Podmínky pravdivosti pak vypadají takto:

(a) Formule $\neg\varphi$ je pravdivá v interpretaci I právě tehdy, když formule φ není pravdivá v interpretaci I.

(b) Formule $\varphi \wedge \psi$ je pravdivá v interpretaci I právě tehdy, když formule φ je pravdivá v interpretaci I a formule ψ je pravdivá v interpretaci I.

(c) Formule $\varphi \vee \psi$ je pravdivá v interpretaci I právě tehdy, když formule φ je pravdivá v interpretaci I nebo formule ψ je pravdivá v interpretaci I.

(d) Formule $\varphi \rightarrow \psi$ je pravdivá v interpretaci I právě tehdy, když platí, že pokud je formule φ pravdivá v interpretaci I, pak je formule ψ též pravdivá v interpretaci I.

Zvláštností této definice je, že vymezuje podmínky pravdivosti bez explicitního odkazu na samostatný význam výrokových operátorů. Kdo se tedy domnívá, že výrazy *není pravda, že*, *a*, *nebo*, *jestliže* jsou synkategorematické, tj. nemají samostatný význam, ale jen přispívají k celkovému významu vět, v nichž se vyskytují, a kdo by tedy oponoval, že těmto výrazům nemůžeme přiřadit pravdivostní funkce jakožto jejich význam, ten může využít Tarského definici pravdy a vyhnout se tak zcela práci s pravdivostními funkcemi. Vzhledem k tomu, že předchozí dvě definice jsou ekvivalentní, domnívám se, že to, zda považujeme logické operátory za synkategorematické či nikoli, je otázkou konvence a je více méně na nás, jak se v této věci v rámci teorie rozhodneme.

Zajímavé na Tarského definici pravdy také je, že představuje subtilní interakci mezi metajazykem a objektovým jazykem. Např. význam výrazu $\vee$ je vymezen pomocí odpovídajícího metajazykového výrazu *nebo*. Stejně tak je tomu se všemi ostatními logickými operátory jazyka L. Vzhledem k našemu tématu je též pozoruhodné, že první tři podmínky předchozí definice jsou poměrně nekontroverzní a jednoznačné.[2] Avšak čtvrtá podmínka pro implikaci, tak jak je formulována, není takto neproblematická. Na úrovni metajazyka není zcela automaticky jasné, jaké jsou pravdivostní podmínky tvrzení *pokud je formule φ pravdivá v interpretaci I, pak je formule ψ též pravdivá v interpretaci I*. Co když např. nastává případ, že formule φ není pravdivá v interpretaci I? Jak máme v takovém případě rozumět uvedené podmínce. Musíme zde explicitně stanovit, že v takovém případě je tato metajazyková kondicionální věta pravdivá a že je pravdivá vždy kromě případu, kdy je její antecedent pravdivý a konsekvent nepravdivý, že tedy toto metajazykové spojení používáme jako materiální implikaci. Tyto komplikace naznačují, že s extenzionalitou kondicionálního spojení není něco v pořádku a že předložená analýza v tomto ohledu nemusí být zcela adekvátní.

Máme-li definován pojem pravdivosti formule v interpretaci, můžeme definovat další sémantické pojmy jako třeba pojem logické platnosti.

`Definice 4.2.1` *Formule jazyka L je logicky platná v klasické výrokové logice, když je pravdivá v každé interpretaci.*

Klíčovým sémantickým pojmem je pak pojem vyplývání, který je definován jako přenos pravdivosti. Zatímco malými řeckými písmeny značím jednotlivé formule, velká řecká písmena budou označovat množiny formulí.

`Definice 4.2.2` *Formule φ vyplývá z množiny formulí Δ (symbolicky píšeme $\Delta \models \varphi$) právě tehdy, když v každé interpretaci, ve které jsou pravdivé všechny formule z Δ, je pravdivá i formule φ (čili právě tehdy, když neexistuje interpretace, ve které by bylo pravdivé vše z Δ, a nebyla by zde pravdivá formule φ.)*

Zavedeme též pojem logické ekvivalence, pro který rezervujeme symbol $\equiv$, a pojem konzistence.

[2] Pouze snad je dobré u třetí podmínky této definice explicitně stanovit, že metajazykové *nebo* používáme nevylučujícím způsobem.

`Definice 4.2.3` *Formule φ, ψ jsou logicky ekvivalentní v klasické výrokové logice (symbolicky píšeme $\varphi \equiv \psi$) právě tehdy, když $\varphi \models \psi$ a $\psi \models \varphi$ (tj. právě tehdy, když mají v každé interpretaci stejnou pravdivostní hodnotu. Množina formulí je konzistentní, když existuje interpretace, ve které jsou všechny formule z této množiny současně pravdivé.*

Pro další text bude výhodné, když zavedeme symbol materiální implikace ($\supset$) jako symbol definovaný pomocí negace a konjunkce:

$$\varphi \supset \psi =_{def} \neg(\varphi \wedge \neg\psi).$$

V klasické logice, jak jsme ji právě vymezili, pak platí:

$$\varphi \supset \psi \equiv \varphi \to \psi.$$

V klasické logice $\neg, \wedge, \vee$ lze ekvivalentně definovat materiální implikaci také pomocí negace a disjunkce ($\varphi \supset \psi =_{def} \neg\varphi \vee \psi$)).

4.3 Algebra propozic

Standardní sémantika klasické výrokové logiky, kterou jsem popsal v předchozích dvou oddílech, vymezuje význam výrokových spojek pomocí operací na extenzích vět (tj. operací na pravdivostních hodnotách). Nyní se podíváme na alternativní způsob, jak vymezit sémantiku klasické logiky. Tento způsob vymezuje význam výrokových spojek pomocí operací na intenzích vět (tj. operací na propozicích). Ve výsledku nejde o nic jiného než o základní množinové operace.

Předpokládejme, že je dána nějaká neprázdná množina možných světů W.[3] Propozice (vzhledem k W) chápeme jako podmnožiny množiny W. Valuace je libovolná funkce, která každé atomické formuli jazyka L přiřadí nějakou propozici. Každou takovou funkci můžeme rozšířit jednoznačným způsobem tak, že přiřadí nějakou propozici každé formuli jazyka L. Nechť V je nějaká takováto valuace. Přiřazování se řídí následujícími podmínkami:

$$V(\neg\varphi) = W - V(\varphi),$$

$$V(\varphi \wedge \psi) = V(\varphi) \cap V(\psi),$$

$$V(\varphi \vee \psi) = V(\varphi) \cup V(\psi),$$

[3] Prvkům množiny W sice budeme říkat *možné světy*, ale není třeba specifikovat, o jaké objekty se zde přesně jedná. Možné světy mohou být reprezentovány libovolnými objekty. Množina W tedy může být libovolná neprázdná množina.

$$V(\varphi \to \psi) = (W - V(\varphi)) \cup V(\psi).$$

Konkrétní algebraický model klasické logiky je každá dvojice sestávající z nějaké neprázdné množiny (možných světů) W a valuace (přiřazující atomům podmnožiny množiny W). V algebraické sémantice definujeme, že formule φ je logicky platná, když pro každý takovýto model $\langle W, V\rangle$ platí $V(\varphi) = W$. Dále řekneme, že formule φ logicky vyplývá z množiny formulí Δ, když pro každý konkrétní algebraický model $\langle W, V\rangle$ platí, že pokud $V(\psi) = W$ pro každou formuli $\psi \in \Delta$, tak i $V(\varphi) = W$. Dále stanovíme, že formule φ, ψ jsou logicky ekvivalentní, když v každém konkrétním algebraickém modelu platí rovnost $V(\varphi) = V(\psi)$. A konečně řekneme, že množina formulí je konzistentní, když existuje konkrétní algebraický model, v němž průnik propozic přiřazených formulím z této množiny je neprázdný (či ekvivalentně: když existuje konkrétní algebraický model, v němž každé formuli z množiny je přiřazena množina všech světů W).

Nechť je dán konkrétní algebraický model $\langle W, V\rangle$. Relativně vůči tomuto modelu můžeme každému světu s z W přiřadit interpretaci atomů I_s definovanou pro každý atom p takto:

$$I_s(p) = 1 \text{ právě tehdy, když } s \in V(p).$$

Lze lehce ověřit, že tento vztah se rozšíří na každou formuli φ jazyka L, takže máme:

$$I_s(\varphi) = 1 \text{ právě tehdy, když } s \in V(\varphi).$$

Z toho plyne, že formule je logicky platná podle algebraické sémantiky právě tehdy, když je logicky platná podle sémantiky založené na Tarského definici pravdy. Takto se shodují i odpovídající pojmy logického vyplývání, logické ekvivalence a konzistence.

4.4 Abstraktní algebraická sémantika

Myšlenka aplikovat algebraické metody v logice se objevuje již u Leibnize[4] a později je do detailů rozpracována u George Boolea, zejména v jeho dílech (Boole, 1847, 1854). Algebra propozic, kterou jsem popsal v minulém oddílu, ukazuje souvislost mezi logickými operátory a algebrou množin. Boole naznačil cestu, jak uvedený postup zobecnit. Můžeme si povšimnout, že při vymezení algebraické sémantiky jsme nepotřebovali jednotlivé možné světy, pouze jejich množiny a operace na těchto množinách. Abstraktní vymezení algebraické sémantiky abstrahuje od toho, že propozice jsou množiny možných

[4] K tomu viz např. (Peckhaus, 1997).

světů. Propozice tedy na této abstraktní úrovni vystupují jako primitivní, nedefinované entity, na nichž jsou zavedeny jisté operace řídící se jistými abstraktními zákony. Klíčovým pojmem je zde pojem Booleovy algebry.

Booleova algebra je abstraktní algebraická struktura, která má tvar $\mathcal{B} = \langle P, \times, +, -, 0, 1\rangle$, kde P je neprázdná množina (jejíž prvky označujeme jako *propozice*), $\times$ a $+$ jsou binární operace přiřazující dvojicím prvků z P prvky z P, $-$ je unární operace přiřazující prvkům z P prvky z P a $0, 1$ jsou dva vyznačené prvky z P.[5] Přitom požadujeme, aby pro libovolné propozice a, b, c z P platil následující systém rovnic:

$$
\begin{array}{ll}
a + b = b + a & a \times b = b \times a \\
a + (b + c) = (a + b) + c & a \times (b \times c) = (a \times b) \times c \\
a + (b \times a) = a & a \times (b + a) = a \\
a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c) & a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c) \\
a + (-a) = 1 & a \times (-a) = 0
\end{array}
$$

Podmínce v prvním řádku říkáme *komutativita*, ve druhém *asociativita*, ve třetím *absorpce*, ve čtvrtém *distributivita* a v pátém *komplementarita*. Valuace V v Booleově algebře $\mathcal{B}$ je funkce, která každé atomické formuli přiřadí nějakou propozici, tedy nějaký prvek z P. Tato funkce pak může být rozšířena tak, že přiřazuje nějaký prvek každé formuli jazyka L. Rozšíření je definováno pomocí těchto podmínek:

$$V(\neg\varphi) = -V(\varphi),$$

$$V(\varphi \wedge \psi) = V(\varphi) \times V(\psi),$$

$$V(\varphi \vee \psi) = V(\varphi) + V(\psi),$$

$$V(\varphi \rightarrow \psi) = -V(\varphi) + V(\psi).$$

Booleova algebra obohacena o valuaci může být označována jako abstraktní algebraický model klasické logiky. Nyní opět můžeme definovat logickou platnost, vyplývání, logickou ekvivalenci a konzistenci. Formule je logicky platná, když je jí přiřazena v každém abstraktním algebraickém modelu hodnota 1. Formule (závěr) vyplývá z dané množiny formulí (předpokladů), když v každém abstraktním algebraickém modelu, kde všechny předpoklady nabývají hodnotu 1, nabývá hodnotu 1 i závěr. Dvě formule jsou logicky ekvivalentní,

[5] Symboly 0 a 1 nyní vystupují v jiném smyslu než v předchozích oddílech. Nyní se nejedná o vyznačené (a jediné) pravdivostní hodnoty, nýbrž o vyznačené propozice – propozici tautologickou a kontradiktorickou.

když mají stejnou hodnotu v každém abstraktním algebraickém modelu. A množina formulí je konzistentní, když existuje abstraktní algebraický model, v němž všechny formule z množiny nabývají hodnotu 1.

Abstraktní algebraická sémantika je skutečně zobecněním algebraické sémantiky zavedené v předchozím oddíle. To je patrné z faktu, že pro danou množinu možných světů W tvoří množina jejích podmnožin spolu s operacemi průniku, sjednocení, doplňku a vymezenými prvky W a $\varnothing$ (prázdná množina) Booleovu algebru. Tento typ zobecnění je pro celou moderní logiku charakteristický a bude hrát zásadní roli i v sémantickém systému, který bude navržen v této práci. Viz zejména oddíl 10.6.

4.5 Inferencialistická koncepce významu

Nyní se ale vraťme k filosofickým otázkám souvisejícím s (klasickou) logikou. Viděli jsme, že v rámci standardní sémantiky klasické výrokové logiky se každému logickému operátoru včetně implikace přiřadí nějaká pravdivostní funkce jakožto význam tohoto operátoru. Poukázal jsem na to, že takový krok není nezbytný, neboť ho můžeme obejít pomocí Tarského definice pravdy, v níž se pro jednotlivé operátory zavádějí kontextuální podmínky pravdivosti. Zvolíme-li tuto cestu, nepřiřazujeme danému operátoru O nějaký objekt, který ztělesňuje význam tohoto operátoru, nýbrž pouze stanovíme, za jakých podmínek jsou pravdivé věty, které operátor O obsahují (jako hlavní spojku).

Nyní se podíváme na zcela odlišný přístup k sémantice výrokové logiky, který je inspirovaný zejména Wittgensteinovou filosofií a tezí, která tvoří její jádro:

> Význam výrazu spočívá ve způsobech správného používání tohoto výrazu.

Tato myšlenka je spojována zejména s pozdním Wittgensteinem (1953). V náznacích se však objevuje již ve Wittgensteinově raném Traktátu (Wittgenstein, 1922), přestože výsledné Wittgensteinovo stanovisko je v mnoha ohledech silně protitraktátovské.

Na Wittgensteina v mnohém ohledu navazují současní inferencialisté, jako je zejména Robert Brandom (1994) a Jaroslav Peregrin (2014). Stejně jako on se domnívají, že o významu jazykových výrazů lze mluvit jen s ohledem na to, jak se tyto výrazy používají. Význam je konstituován v rozmanitých jazykových praxích. Avšak místo samotných „způsobů použití výrazů" kladou inferencialisté důraz na konstitutivní roli pravidel, kterými se tato užití řídí. Brandom se navíc na rozdíl od Wittgensteina domnívá, že existuje jedna jazyková praxe, která je celému jazyku ústřední. Jedná se o tzv. hru na požadování a udávání důvodů. Udáváme důvody pro to, co tvrdíme, a požadujeme po ostatních, aby též udávali důvody pro to, co tvrdí. Vztahy odůvodnění mezi větami jazyka vytváří z jazyka komplikovanou strukturu. Inferencialisté tvrdí, že význam výrazu je dán tím, jaké místo výraz v této struktuře zaujímá. Např. pro význam věty je konstitutivní to, z jakých vět tato věta vyplývá a jaké věty z ní vyplývají. V tomto ohledu inferencialismus navazuje na rané dílo Rudolfa Carnapa (1934) a na Michaela Dummetta (1977) a jejich důkazově teoretické pojetí sémantiky. Dummett vztahoval tento přístup zejména na logické výrazy a hájil tezi, že jejich význam by měl být vymezen pomocí inferenčních pravidel. V následujícím oddílu je podrobně popsáno, jakým způsobem to lze realizovat.

4.6 Introdukční a eliminační pravidla

Nyní tedy aplikujeme inferencialistické hledisko na logiku. Chceme-li vymezit význam logických operátorů z inferencialistického hlediska, musíme se ptát, jakou roli hrají v inferencích. Co lze odvodit z věty, která má například tvar konjunkce, a z čeho lze naopak odvodit větu tohoto tvaru? To lze specifikovat ve tvaru tzv. inferenčních pravidel. Pro konjunkci lze formulovat dvě základní pravidla charakterizující její chování:

EK Z konjunkce $\varphi \wedge \psi$ můžeme odvodit φ i ψ.

IK Z φ a ψ můžeme odvodit $\varphi \wedge \psi$.

Tato pravidla můžeme symbolicky popsat takto:

EK (i) $\varphi \wedge \psi/\varphi$, (ii) $\varphi \wedge \psi/\psi$,

IK $\varphi, \psi/\varphi \wedge \psi$.

Jak je obvyklé, budeme prvnímu z těchto pravidel říkat *eliminační pravidlo pro konjunkci* (proto zkratka EK) a druhému *introdukční pravidlo pro konjunkci*. Eliminační pravidlo totiž říká, jakým způsobem můžeme konjunkci eliminovat v tom smyslu, že určíme, co z ní lze odvodit. Introdukční pak ukazuje, jak ji lze zavést, čili z čeho ji lze odvodit. Tomu odpovídá pozorování, že v eliminačním pravidle se nachází symbol pro konjunkci vlevo od symbolu pro odvození a nikoli vpravo. V introdukčním pravidle je tomu naopak.

EK a IK určují způsoby použití konjunkce v inferencích, a můžeme tedy – pokud přijmeme wittgensteinovský slogan, že význam je užití – tato odvozovací pravidla pokládat za konstitutivní pro význam konjunkce, což je přesně krok, který podnikají inferencialisté.

Též ostatní spojky můžeme charakterizovat pomocí odvozovacích pravidel. Avšak v porovnání s konjunkcí je u všech ostatních operátorů situace značně komplikovanější. Vezměme si nyní disjunkci. Základní odvozovací technikou, v níž využíváme disjunkci, je tzv. důkaz po případech. Zvažme následující úsudek:

> Vrahem je manžel zavražděné nebo její milenec, pan XY. Hypoteticky předpokládejme, že vrahem je manžel zavražděné. Manžel zavražděné je velice žárlivý člověk a věděl o vztahu své manželky s XY. Neměl přitom jiný motiv k vraždě, takže v takovém případě by motivem vraždy byla žárlivost. Nyní hypoteticky předpokládejme, že vrahem zavražděné byl její milenec, pan XY. Ten je také velmi žárlivým člověkem a máme evidenci, že byl přesvědčen, že není jediným milencem zavražděné. Jelikož také k vraždě neměl jiný motiv, usuzujeme i v tomto případě, že motivem vraždy byla žárlivost. Tedy v každém případě byla motivem vraždy žárlivost.

V tomto úsudku jsme vyšli z tvrzení A *nebo* B. Nejprve jsme hypoteticky předpokládali A a z tohoto předpokladu jsme odvodili C. Poté jsme hypoteticky předpokládali B, a z tohoto předpokladu jsme též odvodili C. Na základě těchto dvou úvah jsme odvodili C, takže již nyní nezávisí na hypotetických předpokladech.

Vidíme, že tento postup má komplikovanější strukturu než pravidla EK, IK. Využíváme možnosti učinit hypotetický předpoklad. Hypotetický předpoklad však strukturuje celou úvahu v novém rozměru. Kladením hypotetického předpokladu zakládáme nový poddůkaz, ve kterém se dostáváme na nižší úroveň. Jakmile tento poddůkaz skončí, ocitáme se opět na vyšší úrovni, na které již hypotetický předpoklad není k dispozici.

Introdukční pravidlo pro disjunkci je jednoduché: disjunkci můžeme odvodit z jakéhokoli disjunktu. Obě pravidla můžeme formulovat v následující podobě:

ED χ můžeme odvodit z disjunkce $\varphi \vee \psi$ tak, že odvodíme χ jak z hypotetického předpokladu φ, tak i z hypotetického předpokladu ψ.

ID $\varphi \vee \psi$ můžeme odvodit jak z φ, tak i z ψ.

Symbolicky můžeme tato pravidla zapsat takto:

ED $\varphi \vee \psi, [\varphi/\chi], [\psi/\chi]/\chi$,

ID (i) $\varphi/\varphi \vee \psi$, (ii) $\psi/\varphi \vee \psi$.

$[\varphi/\chi]$ přitom čteme takto: χ je odvozeno z hypotetického předpokladu φ.

Nyní přejdu k případu, který je pro naše téma stěžejní. Jaká inferenční pravidla charakterizují implikaci? Jak lze implikaci použít v inferencích? Zdá se, že základní způsob použití je ten, že z implikace a jejího antecedentu odvodíme konsekvent. Jedná se o eliminační pravidlo pro implikaci, které budeme značit EI a které je známé pod názvem *modus ponens*. Komplikovanější případ představuje introdukční pravidlo, označované též jako *kondicionální důkaz* či *pravidlo dedukce*. Jedná se o techniku, kdy větu tvaru implikace odvodíme tak, že odvodíme konsekvent z antecedentu. Není překvapivé, že v tomto pravidle opět využijeme možnosti tvořit hypotetické předpoklady. Obě pravidla vypadají takto:

EI Z $\varphi \to \psi$ a φ můžeme odvodit ψ.

II $\varphi \to \psi$ můžeme odvodit tak, že ψ odvodíme z hypotetického předpokladu φ.

Symbolicky:

EI $\varphi \to \psi, \varphi/\psi$,

II $[\varphi/\psi]/\varphi \to \psi$.

Doplníme ještě pravidla pro negaci. Vystačíme si opět s dvěma pravidly, ta se však v klasické logice odchylují svojí povahou od ostatních pravidel. Zejména zde nesedí rozdělení na eliminační a introdukční pravidlo. Pravidla lze formulovat takto:

OS Libovolná formule spolu se svou negací vedou ke sporu.

ND Formuli lze odvodit tak, že hypoteticky předpokládáme její negaci a odvodíme z ní spor.

První pravidlo nazýváme odvození sporu, druhé důkaz sporem či nepřímý důkaz. Vidíme, že v obou pravidlech se vyskytuje pojem sporu, proto bude vhodné, přidáme-li do jazyka nový symbol $\perp$ reprezentující spor. Můžeme tento symbol chápat třeba jako zkratku za formuli $p \wedge \neg p$ nebo ho můžeme přijmout jako nový primitivní symbol. Obě pravidla pak lze formulovat v kompaktním tvaru následujícím způsobem:

OS $\varphi, \neg\varphi/\perp$,

ND $[\neg\varphi/\perp]/\varphi$.

Celý systém pravidel tedy můžeme shrnout do následující tabulky:

konjunkce	EK: (i) $\varphi \wedge \psi/\varphi$ (ii) $\varphi \wedge \psi/\psi$	IK: $\varphi, \psi/\varphi \wedge \psi$
disjunkce	ED: $\varphi \vee \psi, [\varphi/\chi], [\psi/\chi]/\chi$	ID: (i) $\varphi/\varphi \vee \psi$, (ii) $\psi/\varphi \vee \psi$
implikace	EI: $\varphi \to \psi, \varphi/\psi$	II: $[\varphi/\psi]/\varphi \to \psi$
negace	OS: $\varphi, \neg\varphi/\bot$	ND: $[\neg\varphi/\bot]/\varphi$

S pomocí těchto pravidel lze konstruovat důkazy a odvození. Termín *odvození* používám ve smyslu odvození z určité množiny předpokladů. (Každý předpoklad je formulí jazyka klasické výrokové logiky.) Pojem důkazu lze chápat jako speciální případ odvození. Jedná se o odvození z prázdné množiny předpokladů. Konstrukce odvození se řídí těmito pravidly: Nejprve sepíšeme pod sebe všechny předpoklady. Každý další krok musí mít jednu z následujících tří podob:

(a) Jedná se o aplikaci nějakého pravidla z výše uvedené tabulky na kroky předchozí.

(b) Nebo se jedná o zavedení nového hypotetického předpokladu.

(c) Případně se jedná o prosté zopakování nějaké formule, která je uvedena v důkazu výše.

Co se týče možnosti (a), aplikace pravidel budu ilustrovat na příkladech. Co se týče možnosti (b), můžeme kdykoli zavést jakýkoli hypotetický předpoklad. Zavedení nějakého hypotetického předpokladu odpovídá založení nového poddůkazu. V rámci poddůkazu smíme využívat hypotetický předpoklad, ale jakmile poddůkaz skončí, hypotetický předpoklad pozbývá své platnosti a již nemůže být dále využíván. Odvození formule ψ z hypotetického předpokladu φ neznamená nic jiného, než že poddůkaz, který začíná kladením hypotetického předpokladu φ končí formulí ψ.

Graficky bude postupu důkazu odpovídat vertikální směr a založení poddůkazu pomocí hypotetického předpokladu bude zobrazeno horizontálním posunem směrem vpravo:

1	φ_1	předpoklad
2	$\vdots$	
3	φ_n	
4	ψ_1	hypotetický předpoklad
5	$\vdots$	
6	ψ_m	
7	χ_1	
8	$\vdots$	
9	χ_k	
10	$\vdots$	

V tomto schématickém odvození můžeme identifikovat dvě úrovně. Na hlavní úrovni se nacházejí formule $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \chi_1, \dots, \chi_k, \dots$. Formule ψ_1 představuje hypotetický předpoklad, který zakládá nový poddůkaz, tj. novou úroveň v celém odvození. Na této druhé úrovni se nacházejí formule $\psi_1, \dots, \psi_m$. Jednotlivé formule odvozené na druhé úrovni nemají na hlavní úrovni status odvozených formulí a nemohou být ani na hlavní úrovni použity jako vstupy pro další odvození. Avšak celé odvození formule ψ_m z formule ψ_1 může být např. na hlavní úrovni použito jako vstup kondicionálního důkazu, a tak by třeba formule χ_1 mohla být tvaru $\psi_1 \to \psi_m$.

Uvedli jsme jako možnost (c), že v důkazu můžeme každou formuli zopakovat, je-li to potřeba. Tato možnost opakování formulí je podřízena restrikci, podle níž můžeme opakovat pouze formule, které nezávisejí na neaktuálních hypotetických předpokladech. Např. ve výše uvedeném schématickém odvození nemůžeme formule $\psi_1, \dots, \psi_m$ opakovat poté, co jsme uzavřeli příslušný poddůkaz, tj. např. v bodě 9, jelikož závisejí na hypotetickém předpokladu ψ_1, který už není aktuální.

Význam možnosti zopakovat formule ukazuje např. následující jednoduché odvození formule $q \to p$ z formule p.

1	p	předpoklad
2	q	hypotetický předpoklad
3	p	1, opakování formule
4	$q \to p$	2-3, II

Je možno zakládat poddůkazy v rámci poddůkazů a tímto může vzniknout libovolný počet vnoření a odvození mohou mít velmi rozmanitou strukturu, jak naznačí následující příklad.

Celý kalkul se vztahuje na objektový jazyk klasické výrokové logiky. Avšak uvedená pravidla nepředstavují umělé teoretické konstrukty, nýbrž se v přirozené podobě zcela běžně využívají zejména v matematické inferenční praxi. Abych tento fakt ilustroval, uvedu jeden neformální příklad odvození, který posléze formalizuji v kalkulu přirozené dedukce. Předpokládejme, že je určeno nějaké přirozené číslo n. Jedná se o konkrétní číslo, avšak my neznáme jeho přesnou hodnotu. Víme o něm však následující informace:

(a) Jestliže n je sudé číslo, n^2 je také sudé číslo.

(b) Jestliže n je sudé číslo, n není liché číslo, a jestliže n není liché číslo, n je sudé číslo.

(c) Jestliže n^2 je sudé číslo, n^2 není liché číslo, a jestliže n^2 není liché číslo, n^2 je sudé číslo.

Z těchto vět chceme čistě za pomocí logických inferenčních pravidel odvodit větu:

(d) Jestliže n^2 je liché číslo, pak n je také liché číslo.

Můžeme postupovat podle následující úvahy: Hypoteticky předpokládejme, že n^2 je liché číslo. Na základě tohoto předpokladu chceme odvodit, že n je také liché číslo. To odvodíme sporem. Hypoteticky tedy předpokládejme, že n není liché číslo. Z (b) pomocí eliminace konjunkce odvodíme, že pokud n není liché číslo, pak n je sudé číslo. Aplikujeme-li na tuto větu a na druhý hypotetický předpoklad modus ponens (eliminace implikace), získáme, že n je sudé číslo. Na tuto větu a na (a) znovu aplikujeme modus ponens a odvodíme, že n^2 je také sudé číslo. Z (c) pomocí eliminace konjunkce získáme, že jestliže n^2 je také sudé číslo, pak n^2 není liché číslo. Pomocí modu ponens odvodíme, že n^2 není liché číslo. To je však ve sporu s tím, že n^2 je liché číslo. Odvodili jsme tedy spor z hypotetického předpokladu, že n není liché číslo. Pomocí nepřímého důkazu tedy můžeme usoudit, že n je liché číslo. Celkově jsme tedy odvodili, že n je liché číslo, z hypotetického předpokladu, že n^2 je liché číslo. Tedy pomocí kondicionálního důkazu můžeme usoudit, že (d) platí.

Toto odvození (d) z (a), (b), (c) nyní formalizujeme a zapíšeme v kalkulu přirozené dedukce. Ve hře jsou čtyři elementární věty, kterým přiřadíme různé atomické výroky:

n je sudé číslo	formalizujeme jako p
n je liché číslo	formalizujeme jako q
n^2 je sudé číslo	formalizujeme jako r

n^2 je liché číslo formalizujeme jako s

Celý úsudek má tedy následující formu:

$$p \to r, (p \to \neg q) \wedge (\neg q \to p), (r \to \neg s) \wedge (\neg s \to r) / s \to q$$

Tento úsudek je platný v tom smyslu, že v kalkulu přirozené dedukce můžeme konstruovat odvození závěru tohoto úsudku z jeho předpokladů:

1	$p \to r$	předpoklad
2	$(p \to \neg q) \wedge (\neg q \to p)$	předpoklad
3	$(r \to \neg s) \wedge (\neg s \to r)$	předpoklad
4	s	hypotetický předpoklad
5	$\neg q$	hypotetický předpoklad
6	$\neg q \to p$	2 EK
7	p	5,6 EI
8	r	1,7 EI
9	$r \to \neg s$	3 EK
10	$\neg s$	8,9 EI
11	$\bot$	4,10 OS
12	q	5-11 ND
13	$s \to q$	4-12 II

V této kapitole jsem popsal dva přístupy k výrokovým logickým operátorům. Standardní sémantický přístup ztotožňuje význam těchto operátorů s jistými pravdivostními funkcemi či s algebraickými operacemi na propozicích. Naproti tomu jsem formuloval inferencialistické hledisko, podle něhož je obecně pro význam výrazu konstitutivní to, jakou roli zaujímá v inferenční praxi. V případě výrokových operátorů je možno tuto myšlenku specifikovat tak, že pro každý operátor určíme odvozovací pravidla, která řídí „chování" tohoto operátoru.

Přestože se na první pohled standardní sémantická perspektiva velmi odlišuje od perspektivy inferencialistické, při bližším zkoumání se ukazuje, že tyto perspektivy spolu pozoruhodným způsobem korespondují. Tento fakt je vyjádřen v tzv. větě o úplnosti, kterou nyní zformuluji.[6]

`Věta 4.6.1` *Pro libovolnou množinu formulí Δ a libovolnou formuli φ platí, že φ je odvoditelná z Δ právě tehdy, když φ vyplývá z Δ.*

[6] Důkaz je uveden např. v (Kolman & Punčochář, 2015).

V tomto oddílu jsem použil jistou variantu Fitchova kalkulu přirozené dedukce, který byl zaveden v (Fitch, 1952). Tento kalkul spadá do širší třídy tzv. kalkulů přirozené dedukce, které vytvořil Gerhard Gentzen (1935). Vedle tohoto typu kalkulů existuje ještě řada kalkulů dalších, jako jsou hilbertovské kalkuly, sekventové kalkuly, rezoluční kalkuly atd. Výhodou kalkulu přirozené dedukce – a zejména jeho varianty, která byla popsána v tomto oddílu – je to, že velmi dobře koresponduje s reálnou důkazovou praxí v matematice. Tento kalkul v sobě integruje možnost kladení hypotetických předpokladů, která je často v jiných typech kalkulů odstraněna, čímž se proces dokazování a odvozování linearizuje. Zejména v hilbertovských kalkulech je důkaz definován jako prostá posloupnost formulí splňující jisté podmínky. Odstranění hypotetických předpokladů ze systému má určité teoretické výhody, avšak jednak se tím zkomplikuje práce v kalkulu samotném, a dále se tím odstraní rys, který v reálném procesu odvozování hraje klíčovou roli a je obzvlášť důležitý vzhledem k našemu tématu kondicionálních vět. Reálné dokazování není lineární proces a je tedy jistou deformací, definuje-li se důkaz jako prostá posloupnost vět.

4.7 Je logika deskriptivní nebo normativní?

Mezi základní problémy filosofie logiky patří otázka, v jakém smyslu a do jaké míry je logika normativní vědou. V devatenáctém století byla patrná tendence směšovat logiku s psychologií. Názor, že logika je pouze odvětví psychologie a je tedy deskriptivní disciplínou, se tradičně označuje jako *psychologismus*. Tento postoj byl reprezentován především Johnem Stuartem Millem (1843). Koncem devatenáctého století se proti psychologismu zvedla vlna odporu, jejíž hlavními představiteli byli Frege a Husserl.[7] Zejména jejich přičiněním byla ve dvacátém století logika považována většinou za čistě normativní vědu.

Domnívám se, že logika je do jisté míry deskriptivní a do jisté míry normativní. Přirozený fenomén, ke kterému se logika do značné míry deskriptivně vztahuje, je určitá normativní praxe: praxe hodnocení správnosti a nesprávnosti úsudků. Argumentační praxe odehrávající se v přirozeném jazyce je normativní praxe. Argumenty a úsudky jsou hodnoceny na přirozené (tj. předvědecké) úrovni jako správné a nesprávné. Existují jisté elementární úsudkové kroky, které kompetentní mluvčí jazyka rozpozná (bez ohledu na to, co mu říká věda o logice) jako legitimní. To, že kompetentní mluvčí jazyka vyhodnotí nějaký úsudek jako legitimní, je pro logiku relevantní. Jazykový cit poskytuje jakási data, se kterými logika musí zacházet podobně jako deskriptivní vědy s empirickým materiálem. Cílem je vytvořit obecný model, který

[7] Viz např. (Frege, 1884) a (Husserl, 1900).

je v souladu se stabilními elementárními daty. Navíc navrhne-li někdo nějaký logický systém, můžeme ho v jistém smyslu falsifikovat tím, že poukážeme na data, která s ním nejsou v souladu.

Ovšem tato analogie s empirickými vědami má své nedostatky. Připouštím, že logika má jistý omezený potenciál zpětně působit na argumentační praxi a diktovat jí své normy. V takovém případě nevystupuje čistě deskriptivně, nýbrž normativně. K tomu došlo zejména v matematice. Dochází zde tedy k oboustrannému působení, kdy logické zákony poměřujeme pomocí konkrétních úsudků na úrovni přirozeného jazyka a naopak tyto úsudky můžeme poměřovat pomocí obecných zákonů. Cílem je dosažení toho, čemu se říká *reflektivní ekvilibrium*.[8]

Přijmeme-li však stanovisko, že logika je do jisté míry deskriptivní, můžeme ji určitým způsobem testovat. Logika poskytuje jisté kritérium správnosti úsudků a my se můžeme ptát, do jaké míry je toto kritérium spolehlivé. U řady úsudků přirozeného jazyka jsme jakožto kompetentní mluvčí tohoto jazyka oprávněni ohodnotit daný úsudek, tj. posoudit nezávisle na logice, zda je tento úsudek správný či nikoli. Řekli bychom např., že úsudek 97 je platný, zatímco úsudek 98 nikoli.

97. Každý člověk je smrtelný. Každý právník je člověk. Tedy každý právník je smrtelný.

98. Obžalovaný se jmenuje Vladimír a jeho jméno tedy začíná na *v*. Slovo *vinen* také začíná na *v*. Tedy obžalovaný je vinen.

Můžeme se ptát, do jaké míry naše hodnocení jednotlivých úsudků odpovídá tomu, jak jsou tyto úsudky ohodnoceny z hlediska nějakého daného logického systému S. Můžeme zvažovat jednotlivé úsudky, hodnotit je na základě jazykového citu a poté je formalizovat a ptát se, zda formalizovaný závěr vyplývá z formalizovaných premis v systému S. V tomto smyslu můžeme sledovat, v jakých případech se naše hodnocení shoduje se systémem S.

Takové porovnávání však naráží na řadu překážek. Nejprve je třeba vzít na vědomí, že logika předkládá kritérium formální platnosti úsudků. U řady úsudků, které bychom hodnotili jako platné, závisí platnost jednoznačně na obsahu a nikoli na formě. Např. úsudek 99 bychom označili jako platný.

99. Dnes je pondělí. Tudíž zítra je úterý.

Ale tato platnost je závislá na specifickém významu slov „pondělí“ a „úterý“, „dnes“ a „zítra“, která jistě náleží spíše obsahu než formě. Úsudek 100 platný není, přestože má stejnou formu jako úsudek 99.

[8] Viz (Peregrin & Svoboda, 2013) a (Goodman, 1955).

100. Dnes je pondělí. Tudíž zítra je středa.

Neměli bychom tedy očekávat, že formální logika vyhodnotí úsudek 99 jakožto platný. Dále je třeba zohlednit, že každý logický systém pracuje s určitým objektovým jazykem, který má vždy jistá omezení. Jazyk L výrokové logiky je velmi limitovaný. Např. úsudek 97 můžeme formalizovat pouze jako $p, q/r$. Jazyk L nemá prostředky k tomu, aby zachytil vnitřní logickou strukturu přítomných vět, a na základě toho vyhodnotí daný úsudek jako neplatný, přestože my bychom řekli, že je nejen platný, ale dokonce logicky platný. K adekvátní reprezentaci úsudku 97 potřebujeme aparát predikátové logiky (případně si zde lze vystačit s Aristotelovou sylogistikou). Přestože tuto neshodu mezi naším ohodnocením úsudku a tím, jak úsudek hodnotí výroková logika, lze považovat za jistý nedostatek systému výrokové logiky, nelze z toho usuzovat, že výroková logika potřebuje revizi. Ve zcela zřejmém smyslu není ani žádoucí, aby úsudek 97 byl vyhodnocen jakožto platný již na úrovni výrokové logiky. Tím chci pouze ilustrovat, že testování daného logického systému tím, že sledujeme, zda ohodnocuje jednoduché úsudky v souladu s naším jazykovým citem, je komplikované. A situaci dále znepřehledňuje fakt, že do hry vstupuje řada pragmatických faktorů. Tak např. úsudek 101, který klasická logika vyhodnotí jakožto logicky platný, by řada lidí označila přinejmenším jako problematický.

101. Sedím. Tedy sedím nebo běžím.

Avšak existují důvody, proč bychom měli považovat tento úsudek za logicky platný a naše pochybnosti v této věci vysvětlit na úrovni pragmatiky. Tento odkaz na pragmatiku sehrál klíčovou roli při snahách ospravedlnit klasickou logiku a zejména to, jak jsou v ní modelovány kondicionální věty. Tomuto tématu se budeme věnovat velmi podrobně v kapitole 7.

Přes všechny tyto komplikace se nicméně domnívám, že logická teorie by měla být testována na přirozeném jazyce a mělo by být systematicky zkoumáno, u jakých úsudků se rozchází s naším jazykovým citem a kdy je s ním ve shodě. V následujícím oddílu uvidíme, že klasická logika při tomto testování fatálně selhává. Velké množství úsudků hodnotí natolik v rozporu s přirozeným jazykem, že to výrazně podkopává její autoritu. U příkladů, které nyní uvedeme, nelze rozpor mezi naším jazykovým citem a výrokovou logikou ignorovat tak jednoduše jako u úsudků 97, 99 a 101.

4.8 Problematické úsudkové formy

Nyní uvedu seznam vybraných příkladů, u nichž se zdá, že klasická logika selhává, pokud ji chápeme jako model pro přirozený jazyk. Budu je souhrnně nazývat *paradoxy materiální implikace*. Nejprve vždy předložím určitou úsudkovou formu, která je platná z hlediska klasické výrokové logiky. Tedy formule v závěru této úsudkové formy podle klasické výrokové logiky logicky vyplývá formulí, které tvoří předpoklady. Poté uvedu úsudek v přirozeném jazyce, který odpovídá oné formě a který je (na úrovni přirozeného jazyka) zjevně problematický. Příklady jsou buď nově vymyšleny, nebo je čerpám z rozmanitých zdrojů, zejména však z (Lojko, 2012) a (Routley et al., 1983). V případě potřeby je libovolně upravuji. Paradoxy člením do čtyř skupin.

I. skupina paradoxů

102. $q/p \to q$

 Zítra se zúčastním běžeckého závodu. Tedy pokud si dnes zlomím nohu, tak se zítra zúčastním běžeckého závodu.

103. $\neg p/p \to q$

 Komunisté nevyhrají v příštích volbách. Tedy pokud komunisté vyhrají v příštích volbách, budou prosazovat pravicovou politiku.

II. skupina paradoxů

104. $p \to \neg q/q \to \neg p$

 Pokud Petr udělal chybu, tak ne velkou. Tedy pokud Petr udělal velkou chybu, tak neudělal chybu.

105. $q \to r, p \to q/p \to r$

 Pokud si koupím nové auto, nebudu mít na nájem. Pokud vyhraju milion, koupím si nové auto. Tedy pokud vyhraju milion, nebudu mít na nájem.

106. $p \to q/(p \wedge r) \to q$

 Pokud si dám do kávy cukr, bude mi víc chutnat. Tudíž pokud si dám do kávy cukr a benzín, bude mi víc chutnat.

III. skupina paradoxů

107. $\neg(p \to q)/p$

 Není pravda, že pokud komunisté vyhrají v příštích volbách, tak budou prosazovat pravicovou politiku. Tedy komunisté vyhrají v příštích volbách.

108. $\neg(p \to q)/\neg q$

Není pravda, že pokud dnes zemřu, tak zítra budu žít. Tedy zítra nebudu žít.

109. $\neg(p \to q)/q \to p$

Není pravda, že pokud si vylosuji číslo 3, tak si vylosuji číslo větší než 5. Tedy pokud si vylosuji číslo větší než 5, tak si vylosuji číslo 3.

110. $\neg(p \to q)/\neg p \to q$

Není pravda, že pokud rozbiješ zrcadlo, budeš mít smůlu. Tedy pokud nerozbiješ zrcadlo, budeš mít smůlu.

111. $\neg p \to \neg(q \to r), \neg q/p$

Pokud Bůh neexistuje, pak není pravda, že budu-li se modlit, Bůh mé modlitby vyslyší. Nebudu se modlit. Tedy Bůh existuje.

IV. skupina paradoxů

112. $/(p \to q) \vee (q \to p)$

Pokud je Petrovi 23, tak mu je více než 50, nebo pokud je Petrovi více než 50, tak je mu 23.

113. $(p \wedge q) \to r/(p \to r) \vee (q \to r)$

Pokud zapneme spínač A a (současně) spínač B, rozsvítí se světlo. Tedy pokud zapneme spínač A, rozsvítí se světlo, nebo pokud zapneme spínač B, rozsvítí se světlo.

114. $/((p \wedge \neg q) \to r) \vee ((q \wedge \neg p) \to r)$

Pokud je tento obrazec rovnostranný a není to čtyřúhelník, tak je to čtverec, nebo pokud je tento obrazec čtyřúhelník a není rovnostranný, tak je to čtverec.

115. $(p \to q) \wedge (r \to s)/(p \to s) \vee (r \to q)$

Pokud je Petr v Paříži, pak je ve Francii, a pokud je v Mnichově, pak je v Německu. Tedy pokud je Petr v Paříži, pak je v Německu, nebo pokud je v Mnichově, pak je ve Francii.

116. $(p \wedge q) \to (s \vee t)/(p \to t) \vee (q \to s)$

Pokud je Petrovi méně než 24 a více než 21, pak je mu 23 nebo 22. Tedy pokud je Petrovi méně než 24, pak je mu 22, nebo pokud je Petrovi více než 21, pak je mu 23.

Přestože výběr je do jisté míry nahodilý, domnívám se, že se jedná o reprezentativní vzorek ilustrující věrně problematická místa klasické logiky. Paradoxy nacházející se v první skupině se staly nejvíce ze všech uvedených středem pozornosti a byla jim věnována značná část debat věnujících se problémům klasické logiky ve vztahu k přirozenému jazyku. Domnívám se, že to jen odvedlo pozornost od skutečných problémů, jaké ilustrují paradoxy ve třetí a čtvrté skupině. Ve třetí skupině k problémům vede interakce implikace s negací a ve čtvrté interakce implikace s disjunkcí. Stanovisko, které budu hájit v této práci, je toto: Platnost úsudkových forem první a druhé skupiny lze jistým způsobem obhájit. To však není možné u paradoxů třetí a čtvrté skupiny. Domnívám se, že není žádný uspokojivý způsob, jak přímočaře obhájit platnost takových úsudků jako je např. 115. Přestože nás to nutí k odmítnutí přímočaré korespondence mezi klasickou logikou a přirozeným jazykem, uvidíme, že nás to ještě nemusí vést k absolutnímu odmítnutí klasické logiky jakožto vhodného nástroje, který lze při analýze přirozeného jazyka úspěšně použít. V kapitolách 10-12 navrhnu způsob, jak klasickou logiku rozšířit tak, abychom získali nástroje k řešení těchto paradoxů.

4.9 Některé argumenty ve prospěch materiální implikace

V předchozím oddílu jsme viděli, že klasická logika se v mnoha případech potýká se závažnými problémy, interpretujeme-li ji jako kritérium logické platnosti úsudků přirozeného jazyka. K této okolnosti můžeme zaujmout různé postoje: Jednak bychom mohli reagovat tak, že prohlásíme, že je třeba klasickou logiku revidovat, nahradit logikou lepší, která více koresponduje s přirozeným jazykem. V následujících kapitolách se seznámíme s několika pokusy o takovou revizi.

Alternativním způsobem, jak reagovat na problémy klasické výrokové logiky, je říci, že její umělý jazyk se nevztahuje deskriptivně k přirozenému jazyku a přirozený jazyk tak pro klasickou logiku není nijak závazný. Jazyk obdařený sémantikou klasické logiky je z tohoto hlediska zcela umělým konstruktem. Tento konstrukt se však řídí striktními pravidly a to představuje jeho nespornou výhodu oproti vágnímu přirozenému jazyku. Pro některé vědecké účely by proto mohlo být výhodné přirozený jazyk nahradit tímto jazykem „ideálním". Problémem tohoto stanoviska je, že klade propast mezi přirozeným a umělým jazykem a zamlčuje přitom, že umělý jazyk se k přirozenému přeci jen nějak vztahovat musí. Musí být nějaký důvod, proč spojku $\wedge$ s její sémantikou nazýváme konjunkcí a nikoli třeba disjunkcí, a proč $\rightarrow$ reprezentuje zrovna kondicionální spojení. Navíc pokud by mělo být v principu možné pro nějaké vědecké účely nahradit přirozený jazyk jazykem umělým, muselo by být možné v umělém jazyce vyjadřovat myšlenky, které bylo předtím možné vyjádřit v jazyce přirozeném a z toho by mělo být tedy jasné, jak se oba jazyky k sobě vztahují. Nějaký vztah výrokových operátorů k jejich korelátům v přirozeném jazyce musí existovat a je třeba objasnit, jakou povahu tento vztah má. Typickou reakcí by zde asi bylo, že se jedná jen o jistou aproximaci či idealizaci přirozených výrazů, ale pak se nám vrací zpět otázka, proč se v některých ohledech tato aproximace s přirozeným jazykem tak zásadně rozchází a zda není možné tento nesoulad napravit. Tím se jen vracíme k problému, zda je možné klasickou logiku úspěšně revidovat.

Kdybychom se rozhodli, že nechceme klasickou logiku revidovat, měli bychom zformulovat její obhajobu a vysvětlit, proč se máme smířit s jejími nežádoucími důsledky nebo proč je nemáme chápat jako nežádoucí. Standardní strategií při vyrovnávání se s paradoxy je zapojení pragmatiky. Vysvětlí se např., proč bychom měli daný úsudek považovat za sémanticky platný, ale pragmaticky závadný, a ukáže se, že naše intuitivní odmítavá reakce na úsudek je způsobena právě jeho pragmatickou závadností. Tomu se budu podrobně věnovat v kapitole 7.

V tomto oddílu uvedu některé argumenty, které lze formulovat ve prospěch analýzy kondicionálních vět založené na materiální implikaci. Domnívám se, že tyto argumenty dohromady ukazují, že klasickou logiku nelze při logickém modelování kondicionálů ignorovat. Každý pokus o analýzu těchto vět se musí s materiální implikací nějak vyrovnat.

1. První argument nepovažuji za zvláště silný, ale jistou relevanci je mu také třeba přiznat. Přestože sémantika implikace založená na pravdivostních funkcích nepůsobí zcela přirozeným dojmem, podíváme-li se na klasickou logiku z inferencialistického hlediska, situace se rázem změní. Všechna odvozovací pravidla v systému přirozené dedukce klasické logiky působí přijatelným dojmem. Žádné z těchto pravidel není na první pohled problematické. A zvláště pravidla pro implikaci jsou, zdá se, plausibilní. Přesto dohromady tato pravidla umožňují u každé z problematických úsudkových forem 102-116 odvodit závěr z předpokladů. To je specifickým rysem problematiky kondicionálních vět: Přijatelné obecné principy mají nepřijatelné důsledky. Přesto plausibilitu inferenčních pravidel, která v klasické logice charakterizují jednotlivé spojky, nelze zcela ignorovat.

2. Druhý argument se opírá o pozorování, že na úrovni přirozeného jazyka jsou následující dva typy výroků ekvivalentní:

(a) Každé P je Q.

(b) Pro každý objekt platí, že pokud spadá pod P, tak spadá pod Q.

Konkrétními příklady jsou třeba tyto:

117. Každý právník má vysoký plat.

118. Pro každého platí, že je-li to právník, tak má vysoký plat.

Přestože druhá z uvedených vět není zcela přirozená, těžko by někdo tvrdil, že tyto dvě věty říkají něco jiného. Dochází zde k tomu, že subsumpce jednoho pojmu pod druhý je nahrazena tvrzením platnosti kondicionálu pro každý jednotlivý objekt:

(a) P je subsumováno pod Q.

(b) Pro každé x platí kondicionál: pokud $P(x)$, $Q(x)$.

Ale zároveň platí, že každé P je Q právě tehdy, když pro žádné x neplatí $P(x)$ a zároveň ne-$Q(x)$. Jinými slovy, každé P je Q právě tehdy, když pro každé x platí odpovídající materiální implikace. Na základě této korespondence se nabízí analyzovat kondicionály prostřednictvím materiální implikace.

Skutečnost, že materiální implikace dobře funguje u obecných kondicionálů, lze také využít k vysvětlení, že klasická logika funguje velmi dobře v matematickém diskurzu. Tvrdíme-li totiž v matematice nějakou kondicionální větu, vyskytuje se v ní zpravidla nějaká volná proměnná, jako např. v následujícím příkladě

119. Pokud n je dělitelné šesti, tak je n dělitelné třemi.

V takových případech se jedná o tvrzení tvaru *Pro každé x, pokud P(x), Q(x)* a materiální implikace je zde namístě, neboť v tvrzení 119 pouze subsumujeme pojem *být dělitelný šesti* pod pojem *být dělitelný třemi.*

3. Třetí argument, který zde uvedu, považuji za nejpádnější. Souvisí s argumentem předchozím, ale zaměřuje se na konkrétní kondicionály, nikoli na obecné. Budu předpokládat, že sémantika negace, disjunkce a konjunkce, založená na pravdivostních funkcích, je adekvátní. Otázkou je, zda je adekvátní též analogická analýza implikace. To lze redukovat na otázku, zda tvrzení *Pokud A, B* je ekvivalentní s tvrzením *Není pravda, že A a ne-B.* Zdá se, že ekvivalence zde je přinejmenším v tom smyslu, že jedno mohu odvodit (na úrovni přirozeného jazyka) z druhého. Jestliže mám informaci, že platí *Pokud A, B*, tak z toho mohu jistě odvodit *Není pravda, že A a ne-B.* To je nekontroverzní směr. Avšak pozoruhodné je, že odvození je legitimní i v opačném směru. Jestliže mám informaci, že *Není pravda, že A a ne-B*, tak z toho mohu legitimně odvodit *Pokud A, B.*

Na podporu právě řečeného jsem uskutečnil menší empirický experiment.[9] Vzhledem k tomu, že ho zde nebudu prezentovat se všemi náležitostmi, které si metodologie vědeckých experimentů žádá, zmiňuji ho spíše jen pro ilustraci problému. Oslovil jsem 53 studentů psychologie na FF UK se žádostí o vyplnění testu s těmito pokyny:

> Následující test sestává ze čtyř úsudků a Vaším úkolem bude rozhodnout, zda se jedná o úsudky správné či chybné. U každého úsudku zakroužkujte, zda je podle Vás správný či chybný. Neexistuje žádné jednoznačné řešení. Rozhodněte se na základě vlastního „selského rozumu". Odpověď by neměla být zbrklá, ale ani byste neměli přemýšlet příliš dlouho. Úlohy jsou na sobě vzájemně nezávislé.

V jedné verzi následoval seznam těchto čtyř úsudků:

(1) Předpokládejme, že není pravda, že by šli současně Jarda a Franta na pivo. Z toho můžeme usoudit, že pokud šel Jarda na pivo, pak Franta nešel.

(2) Předpokládejme, že pokud šel Jarda na pivo, pak Franta nešel. Z toho můžeme usoudit, že pokud Jarda nešel na pivo, pak Franta šel.

(3) Předpokládejme, že není pravda, že pokud šel Jarda na pivo, pak Franta nešel. Z toho můžeme usoudit, že Jarda šel na pivo.

(4) Předpokládejme, že pokud šel Jarda na pivo, pak Franta nešel. Z toho můžeme usoudit, že není pravda, že by šli současně Jarda a Franta na pivo.

Ve druhé verzi se jednalo o tyto úsudky:

(1) Předpokládejme, že není pravda, že by náš protihráč měl současně srdcového krále a srdcové eso. Z toho můžeme usoudit, že pokud má srdcového krále, pak nemá srdcové eso.

(2) Předpokládejme, že pokud náš protihráč má srdcového krále, pak nemá srdcové eso. Z toho můžeme usoudit, že pokud nemá srdcového krále, pak má srdcové eso.

(3) Předpokládejme, že není pravda, že pokud náš protihráč má srdcového krále, pak nemá srdcové eso. Z toho můžeme usoudit, že náš protihráč má srdcového krále.

[9] Děkuji dr. Pavlovi Uhlářovi z Katedry psychologie FF UK, že mi umožnil v rámci své výuky tento experiment realizovat.

(4) Předpokládejme, že pokud má náš protihráč srdcového krále, pak nemá srdcové eso. Z toho můžeme usoudit, že není pravda, že by náš protihráč měl současně srdcového krále a srdcové eso.

V obou případech tedy studenti hodnotili konkrétní úsudky následujících forem:

(1) $\neg(p \wedge q)/p \rightarrow \neg q$,

(2) $p \rightarrow \neg q/\neg p \rightarrow q$,

(3) $\neg(p \rightarrow q)/p$,

(4) $p \rightarrow \neg q/\neg(p \wedge q)$.

Formy (1), (3) a (4) jsou z hlediska klasické logiky platné, forma (2) je neplatná. Zajímaly mě především úsudky formy (1) a (4). Zbylé dva úsudky byly přidány především proto, aby to zvýšilo šanci, že se budou hodnotit úsudky (1) a (4) nezávisle na sobě. Ovšem z jistého hlediska jsou úsudky (2) a (3) také zajímavé samy o sobě. Výsledek experimentu plně podpořil moji hypotézu. Hlavní údaje shrnuji v následující tabulce, kde v prvním řádku najdeme, o který úsudek se jedná, v druhém řádku je uveden počet všech odpovědí, ve třetím řádku počet kladných odpovědí, tj. takových, kde dotazovaný označil úsudek za platný, a ve čtvrtém řádku je uveden počet záporných odpovědí, kdy úsudek byl vyhodnocen jako chybný.

úsudek (1)	úsudek (2)	úsudek (3)	úsudek (4)
53	53	53	53
46	8	3	46
7	45	50	7

Z výsledků je patrná silná tendence posoudit úsudky (1) a (4) jako platné a (2) a (3) jako neplatné. Studenti většinou uváděli, že nemají osobní zkušenost s výukou logiky. Výsledek je v souladu s tezí, že na úrovni přirozeného jazyka jsou věty forem $\neg(p \wedge q)$ a $p \rightarrow \neg q$ vzájemně odvoditelné, což hraje výrazně do karet materiální implikaci. V tomto světle je ovšem pozoruhodná jednoznačná tendence odmítnout úsudek (3) formy $\neg(p \rightarrow q)/p$. Ten jsem také uvedl mezi paradoxy materiální implikace pod číslem 107. Přitom platnost této úsudkové formy je důsledkem identifikace kondicionálů s materiální implikací, a tedy důsledkem přijetí forem (1) a (3). Vypadá to, že zde tedy platí, co jsem již uvedl výše, totiž že přijatelné principy mají paradoxně nepřijatelné důsledky. Obrátíme-li to, můžeme říci, že každá snaha revidovat klasickou logiku a vytvořit takové kritérium logické platnosti, které by klasifikovalo problematické úsudkové formy jako neplatné, vede k tomu, že nás to donutí klasifikovat jako neplatné i jiné úsudkové formy, které bychom rádi udrželi jako platné. S tímto problémem, jak uvidíme, se potýká každá snaha o nápravu klasické logiky.

4. Dalším příkladem základní úsudkové formy, která působí velmi přirozeně, ale která velmi rychle vede k identifikaci kondicionálů s materiální implikací, je tento:

$$\varphi \vee \psi / \neg\varphi \to \psi.$$

Na tom zakládá Paul Grice (1989, str. 84-85) svůj argument, který se co do obsahu velmi podobá tomu, co jsem popisoval v předchozích odstavcích v souvislosti se zmíněným empirickým experimentem. Grice však argument prezentuje v podobě antinomie v kantovském stylu. Úvaha sestává z teze a antiteze a má přibližně následující podobu:

I. Teze: 1. Předpokládejme, že materiální implikace A *implikuje* B je pravdivá. 2. Tedy věta A je nepravdivá nebo věta B je pravdivá. 3. Tedy pokud je věta A pravdivá, pak je věta B pravdivá. 4. Tedy věta *Pokud A, B* je pravdivá.

II. Antiteze: Pokud z předpokladu 1. v předchozím odstavci vyplývá 4., pak také platí, že pokud neplatí 4. pak neplatí 1. To znamená, že pokud věta *Pokud A, B* není pravdivá, pak je pravdivá věta A a není pravdivá věta B. Pak by ale z *Není pravda, že pokud A, pak B* plynulo *A a není pravda, že B*. Jelikož z negace indikativního kondicionálu neplyne v přirozeném jazyce antecedent a negace konsekventu, nemůže platit úvaha v předchozím odstavci.

Pointou Gricovy antinomie je okolnost, že zatímco úvaha prezentovaná v tezi se zdá být zcela v pořádku, její důsledek popsaný v antitezi působí nepřijatelným dojmem, což vypadá jako skutečný paradox. Teze sama v podstatě opět ukazuje, že kondicionální spojení přirozeného jazyka odpovídá materiální implikaci.

5. Poslední argument, který zde uvedu, je převzat (v mírně upravené podobě) od Allana Gibbarda z (Gibbard, 1981, str. 234-235). S předchozími má společné to, že také ukazuje, že přijmeme-li několik málo principů, které všechny působí jako nutně platné, jsme zavázáni k tomu říci, že kondicionální spojení přirozeného jazyka koresponduje s materiální implikací.

Předpokládejme, že jsme zavedli (sémanticky či syntakticky) logiku operátorů $\wedge$, $\vee$, $\neg$ tak jak tomu je v klasické logice. Zvažujeme jak determinovat logiku operátoru $\to$, který má reprezentovat spojení *Pokud ..., ...* přirozeného jazyka. Ať už má být výsledná logika tohoto operátoru jakákoli, zdá se přirozené předem požadovat, aby platily následující tři principy:

(a) $\varphi \to (\psi \to \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \to \chi$.

(b) $\varphi \to \psi \vDash \varphi \supset \psi$.

(c) Jestliže $\varphi \models \psi$, pak $\models \varphi \to \psi$.

$\models \varphi \to \psi$ je zkratka za tvrzení, že $\varphi \to \psi$ vyplývá z prázdné množiny předpokladů. Toto tvrzení je ekvivalentní s tím, že $\varphi \to \psi$ je logicky platná.

Má-li $\to$ reprezentovat kondicionální spojení, zdá se, že uvedené principy nejsou kontroverzní. Podle (a) říká věta *Jestliže A, tak C, pokud B* to samé jako věta *Jestliže A a B, tak C*. Chtěli bychom od formálního systému pro kondicionální věty, aby např. následující dvě věty byly vyhodnoceny jako logicky ekvivalentní:

120. Jestliže nemáš lístek, tak pokud tě bude kontrolovat revizor, zaplatíš pokutu.

121. Jestliže nemáš lístek a bude tě kontrolovat revizor, zaplatíš pokutu.

Princip (b) říká pouze to, že když je tvrzení A pravdivé a B nepravdivé, pak je nepravdivé kondicionální tvrzení *Pokud A, B*. To odpovídá tomu, že lze přijmout druhý řádek tabulky implikace, který říká přesně to samé, totiž že implikace je nepravdivá, pokud je její antecedent pravdivý a konsekvent nepravdivý.

Princip (c) říká opět něco nekontroverzního, totiž že pokud B logicky vyplývá z A, pak věta *Pokud A, B* musí být logicky platná.

Z těchto tří zdánlivě nevinných principů vyplývá, že implikace $\to$ je ekvivalentní s materiální implikací $\supset$, tj. že platí:

$$\varphi \to \psi \equiv \varphi \supset \psi.$$

Zdůvodnění vypadá takto: Díky principu (b) stačí dokázat, že $\varphi \supset \psi \models \varphi \to \psi$. Na základě sémantiky konjunkce a negace platí $(\varphi \supset \psi) \wedge \varphi \models \psi$ a z principu (c) pak plyne, že $\models ((\varphi \supset \psi) \wedge \varphi) \to \psi$. Princip (a) vede k tomu, že $\models (\varphi \supset \psi) \to (\varphi \to \psi)$. Dle (b) pak máme i $\models (\varphi \supset \psi) \supset (\varphi \to \psi)$. Z toho plyne na základě sémantiky konjunkce a negace, že $(\varphi \supset \psi) \models (\varphi \to \psi)$, což jsme chtěli dokázat.

Povšimněme si, že Gibbardův předpoklad (a) byl zbytečně silný. Důkaz by prošel i tehdy, kdybychom předpokládali pouze $(\varphi \wedge \psi) \to \chi \models \varphi \to (\psi \to \chi)$. Když následujícím způsobem zesílíme princip (c), obejdeme se bez (a) zcela.

(c)* Jestliže $\Delta \cup \{\varphi\} \models \psi$, pak $\Delta \models \varphi \to \psi$.

Tento zesílený princip odpovídá tomu, že pokud věta B vyplývá z nějaké množiny vět M obsahující větu A, pak věta *Pokud A, B* vyplývá z množiny, kterou získáme z množiny M tak, že z ní odebereme větu A.

Požadovaný důkaz je velmi jednoduchý: Jelikož platí $\varphi \supset \psi, \varphi \models \psi$, pak dle principu (c)* platí též $\varphi \supset \psi \models \varphi \to \psi$, což nyní získáváme jednoduše bez (a). Přes svoji závažnost tento výsledek není nijak překvapivý, uvědomíme-li si, že princip (c)* v podstatě odpovídá kondicionálnímu důkazu, čili introdukčnímu pravidlu pro implikaci. Princip (c) představuje speciální případ principu (c)*, kdy předpokládáme, že množina Δ je prázdná.

Jak Gibbardův, tak i Gricův argument představují silné důvody pro přijetí materiální implikace, neboť ukazují, že odmítneme-li materiální implikaci jako vhodný prostředek k analýze indikativních kondicionálů, musíme odmítnout některé principy, které se zdají být nutně platné. Kdo však přijme výše uvedené argumenty jako platné, musí nějak vysvětlit, jak je možné, že materiální implikace má řadu nežádoucích důsledků, jejichž výčet byl podán v oddíle 4.8. Existuje řada pokusů o takové vysvětlení. Většinou mají pragmatický charakter. K tomuto tématu se vrátím v kapitole 7. V následujících dvou kapitolách představím dva nejvýraznější pokusy o revizi klasické logiky v rámci ontického přístupu.

4.10 Shrnutí

V této kapitole jsem se zabýval materiální implikací. Vymezil jsem standardní sémantiku klasické výrokové logiky. Tato sémantika modeluje logické spojky jako operátory operující na extenzích vět, tj. na pravdivostních hodnotách. Vedle toho jsou v rámci algebraické sémantiky logické spojky pojaty jako operátory na intenzích vět, tj. na propozicích. Představil jsem též inferencialistický přístup, který přistupuje k logickým spojkám ze zcela odlišné perspektivy. Dle inferencialistů je význam spojek konstituován tím, jak jsou tyto spojky používány v inferencích, což může být specifikováno pomocí introdukčních a eliminačních pravidel. Poté, co jsem vymezil klasickou výrokovou logiku několika alternativními, avšak ekvivalentními způsoby, zabýval jsem se otázkou, nakolik nám poskytuje spolehlivé kritérium logické platnosti úsudků, v nichž jsou přítomné kondicionály. Ukázal jsem řadu příkladů, u nichž se zdá, že klasická logika v tomto ohledu selhává. Jelikož v uvedených příkladech sehrála vždy klíčovou roli implikace, která je v centru našeho zájmu, budu uvedené problematické úsudkové formy, které klasická logika hodnotí jako platné, označovat jako paradoxy materiální implikace. Na závěr jsem uvedl řadu argumentů, které dokládají, že přes tyto paradoxy je třeba brát klasickou logiku vážně.

Kapitola 5

Striktní implikace

Proti standardní sémantice materiální implikace lze vznést námitku, že kondicionály mají určitý modální náboj. U kontrafaktuálů je to zjevné, ale platí to i pro indikativní kondicionály. Abychom mohli smysluplně použít nějakou kondicionální větu, musí být ve hře nějaký prostor možností (či možných světů) vůči kterému se tato věta vyhodnocuje. Uvedeme-li antecedent výrazem *pokud*, jakoby se tím přesouváme hypoteticky do těch možných světů, v nichž antecedent platí, a následným vyslovením konsekventu tvrdíme, že v těchto světech platí i konsekvent. Takovýto obrázek odpovídá striktní implikaci, která je tématem této kapitoly. Uvidíme, že striktní implikace je modalizovaná materiální implikace. *A striktně implikuje B* odpovídá tvrzení *Nutně platí, že A materiálně implikuje B.* To vyhovuje také představě, že kondicionální věta může být pravdivá jen tehdy, když je mezi antecedentem a konsekventem nějaký nutný vztah, a nestačí tedy pouhá vhodná konstelace pravdivostních hodnot.[1]

5.1 Počátek moderní modální logiky

Clarence Irving Lewis je obecně považován za otce moderní modální logiky. Modality možnosti a nutnosti se u něj zprvu objevují jako neartikulovaná součást modifikovaných verzí výrokových spojek disjunkce, implikace a negace, se kterými Lewis pracuje novým způsobem a snaží se nově fixovat jejich význam vhodným axiomatickým systémem. Pro nás je podstatné, že v Lewisově díle vznikla modální logika na základě kritiky materiální implikace.

Článek (C. I. Lewis, 1912), který bezesporu patří mezi zakládající práce současné modální logiky, problematizuje především principy, které jsem v minulé kapitole uvedl v první skupině paradoxů materiální implikace:

[1]Některé části této kapitoly byly převzaty v upravené podobě z (Punčochář, 2009).

(a) Pravdivý výrok je implikován jakýmkoli výrokem.

(b) Nepravdivým výrokem je implikován jakýkoli výrok.

C. I. Lewis tvrdí, že je podstatný rozdíl mezi materiální implikací, pro kterou jsou uvedené zákony charakteristické, a tím, co se za implikaci pokládá v běžné řeči. Skutečně používaná implikace bere v potaz obsah vět, které spojuje, a nespokojí se pouze s jejich pravdivostní hodnotou. Překvapivě C. I. Lewis (1918) nezpochybňuje to, že implikace je definovatelná jako disjunkce ($\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$). Tímto se však přesouvá celý problém na disjunkci. Existují dva způsoby, jak můžeme (nevylučující) disjunkci chápat. V (C. I. Lewis, 1912, str. 523) jsou ilustrovány na následujících větách:

122. Caesar byl zavražděn nebo je měsíc celý ze zeleného sýru.

123. Matilda mě nemiluje nebo existuje někdo, kdo mě miluje.

V obou případech je alespoň jeden z členů disjunkce pravdivý. Mezi spojovanými výroky jsou však odlišné vztahy. Na rozdíl od první věty, kde je alespoň jeden z členů pravdivý jaksi pouze náhodou, ve druhé větě není vůbec možné, aby oba její členy byly zároveň nepravdivé. Jinými slovy, *nutně* nastává, že alespoň jeden z členů je pravdivý. A spojku *nebo* ve druhé větě lze mínit i tak, že vyjadřuje tento vnitřní významový vztah spojovaných vět.

Situace by se dala uchopit také prostředky klasické predikátové logiky. Rozdíl dvou uvedených případů by vynikl v tom, že bychom po formalizaci dostali z druhé věty logicky platnou formuli a z první nikoli. C. I. Lewis však postupoval jinak. Dnes bychom řekli, že metavlastnost formulí *být logicky platnou* nepojal na metaúrovni, ale zakomponoval ji do objektového jazyka, konkrétně do spojky disjunkce.

Pozoruhodné je, že o několik desítek let později byla Carnapem v knize (Carnap, 1947) zavedena jedna z prvních formálních sémantik pro modální logiku, která byla založena na podobném přímočarém překladu logické platnosti do objektového jazyka.[2] V uvedené knize též Carnap rozpracovává pojmy extenze a intenze. Avšak v podobném smyslu s těmito pojmy operoval již C. I. Lewis. Disjunkci klasické výrokové logiky, která operuje pouze na pravdivostních hodnotách a je užita ve větě 122, označuje jako *extenzionální*. Disjunkci věty 123, vyjadřuje-li obsahový vztah spojovaných výroků, označuje jako *intenzionální*. A dále se zabývá jejich vztahy a odlišnostmi: (1) Intenzionální disjunkce libovolných výroků implikuje jejich extenzionální disjunkci, ale naopak to neplatí. (2) Jsou-li dány dva libovolné empirické výroky (jejichž intenzionální disjunkce není pravdivá) a chceme-li zjistit pravdivostní

[2]K tomu viz (Punčochář, 2010).

hodnotu jejich extenzionální disjunkce, musíme se obrátit k faktům a zjišťovat, zda jsou pravdivé samotné tyto výroky. Fakty zde mají na výsledek podstatný vliv. Oproti tomu zcela nezávisle na faktech můžeme rozhodnout, je-li pravdivá jejich intenzionální disjunkce. Jak je patrné z druhé z výše uvedených vět, faktický stav nemůže pravdivost intenzionální disjunkce nijak ovlivnit. (3) Pro extenzionální disjunkci jakožto disjunkci klasické výrokové logiky platí De Morganův zákon: formule $\neg(\varphi \vee \psi), \neg\varphi \wedge \neg\psi$ jsou logicky ekvivalentní. De Morganův zákon neplatí pro intenzionální disjunkci, neboť její negace neznamená negaci jejích členů, ale negaci samotného disjunktivního vztahu mezi členy (C. I. Lewis, 1912, str. 524).

Pokud definujeme implikaci pomocí extenzionální disjunkce, získáváme klasickou materiální implikaci. Pokud ji však definujeme pomocí disjunkce intenzionální, získáváme zcela novou spojku: tzv. striktní implikaci. Charakter materiální implikace byl v té době fixován v axiomatickém systému, který se objevil v *Principia Mathematica* (Russell & Whitehead, 1910-1913). Podle C. I. Lewise je tento kalkul „nepravdivý" ve stejném smyslu, v jakém může být „nepravdivá" např. axiomatizace geometrie (C. I. Lewis, 1912, str. 530). Dokonce uvádí, že kalkul materiální implikace je nepravdivý tak, jako je nepravdivá neeukleidovská geometrie, což je z dnešní perspektivy poněkud zavádějící přirovnání.

Praktický užitek implikace se objevuje zvláště při testování hypotéz, jejichž pravdivost či nepravdivost nám zatím není známa. Každá hypotéza má své logické důsledky, které nezávisejí na její faktické pravdivostní hodnotě. Zcela nezávisle na stavu světa implikuje (v přirozeném a tedy dle C. I. Lewise striktním smyslu) výroky, které následně můžeme zvažovat a konfrontovat se světem. Tvrzení, že *A implikuje B*, v tomto procesu odpovídá tvrzení, že *B vyplývá z A*. Materiální implikace je zde nepoužitelná. Pokud by hypotéza byla nepravdivá, materiálně by implikovala libovolné tvrzení (C. I. Lewis, 1912, str. 529).

Pro C. I. Lewise tak vyvstal úkol charakterizovat zákony přirozené (tedy striktní) implikace vhodnějším kalkulem, než jaký podali (pro materiální implikaci) Russell s Witeheadem. Jeden z významných pokusů o vybudování tohoto systému se objevil v Lewisově první knize věnované logice (C. I. Lewis, 1918). Striktní implikace zde nebyla zavedena v souladu s původními úvahami pomocí intenzionální disjunkce. Mezi primitivními symboly byly kromě atomických formulí $(p, q, r, \ldots)$ spojky negace $(\neg)$, konjunkce $(\wedge)$ a jedna nová modální spojka, totiž silná negace neboli nemožnost $(-)$.[3] Pomocí těchto spojek definuje Lewis několik operátorů, zejména pak striktní implikaci a

[3] Odchyluji se výrazně od původní Lewisovy notace, abych zachoval jednotu používaných symbolů v celém textu.

ekvivalenci:

$\varphi \rightarrow \psi =_{def} -(\varphi \wedge \neg\psi)$ striktní implikace

$\varphi \leftrightarrow \psi =_{def} (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ striktní ekvivalence

Lewis definuje také další modality, především možnost (jako nepravdivost nemožnosti), nutnost (jako nemožnost nepravdivosti) a některé zřetězené (nemožnost možnosti a možnost možnosti). K formulaci kalkulu však nejsou použity. Původní Lewisův kalkul striktní implikace sestává z těchto axiomů (C. I. Lewis, 1918, str. 294-295):

A1 $(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p)$

A2 $(q \wedge p) \rightarrow p$

A3 $p \rightarrow (p \wedge p)$

A4 $(p \wedge (q \wedge r)) \rightarrow (q \wedge (p \wedge r))$

A5 $p \rightarrow \neg\neg p$

A6 $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$

A7 $-p \rightarrow \neg p$

A8 $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (-q \rightarrow -p)$

Lewis uvádí tři odvozovací pravidla pro svůj kalkul:

P1 Substituce za atomické výroky: Jestliže formule φ je dokazatelná, pak nahradíme-li všechny výskyty libovolného atomu p ve φ libovolnou formulí ψ, výsledek tohoto nahrazení bude opět dokazatelná formule.

P2 Modus ponens pro striktní implikaci: Jestliže jsou dokazatelné formule φ a $\varphi \rightarrow \psi$, pak je dokazatelná i formule ψ.

P3 Adjunkce: Jestliže jsou dokazatelné formule φ, ψ, pak je dokazatelná i formule $\varphi \wedge \psi$.

Ukázalo se, že první pokus o kalkul striktní implikace byl neúspěšný. V roce 1920 předvedl Emil Leon Post, že v tomto kalkulu je dokazatelná formule:

$-p \leftrightarrow \neg p.$

Tím dochází k redukci striktní implikace na materiální. Kalkul nakonec není ničím jiným než axiomatizací klasické výrokové logiky. Teorémy tohoto kalkulu jsou přesně ty formule, které jsou logicky platné v klasické logice. Toto zjištění vedlo později Lewise k tomu, že požadoval, aby v novém vydání *A Survey of Symoblic Logic* v roce 1960 byla zcela vypuštěna kapitola, v níž je uvedený kalkul předložen (viz C. I. Lewis, 1960, str. vii).

Oskar Becker (1930, str. 504-505) uvádí názorný příklad, proč je nezbytné zamítnout ekvivalenci A8 jako platný princip pro striktní implikaci. Předpokládejme, že máme osudí, v němž je omezený počet očíslovaných kuliček. Kuličky jsou postupně z osudí taženy a po vytažení vraceny zpět. Tímto způsobem nám vzniká posloupnost vytažených čísel. Nyní předpokládejme, že formule q reprezentuje větu:

124. Číslo 19 se vyskytne mezi prvními sty vytaženými čísly.

Výrok p reprezentuje větu:

125. Číslo 19 se vyskytne mezi prvními dvěma sty vytaženými čísly.

Za této situce je nepravdivá pravolevá implikace axiomu A8, tj. tvrzení

$$(-q \to -p) \to (p \to q).$$

Platí totiž, že pokud číslo 19 nemůže být mezi prvním stem tažených čísel, pak nemůže být ani mezi prvními dvěma sty taženými čísly. Důvodem je, že číslo nemůže být mezi prvním stem tažených čísel pouze tehdy, když se vůbec v osudí nevyskytuje a nemůže být taženo nikdy. Platí tedy

$$-q \to -p.$$

Avšak neplatí, že

$$p \to q,$$

tj., že výskyt čísla 19 mezi prvními dvěma sty taženými čísly striktně implikuje výskyt čísla 19 mezi prvními sty taženými čísly.

5.2 Lewisovy kalkuly $S1 - S5$

Ač byl první Lewisův pokus o axiomatizaci neúspěšný, znamenal podnět k intenzivnímu zkoumání striktní implikace a do tohoto podniku se zapojilo mnoho dalších autorů. Sám C. I. Lewis svůj systém poopravil tak, že axiom (A8) zjednodušil na implikaci:

A9 $(p \to q) \to (-q \to -p)$.

Výsledný kalkul se shodoval s tím, co bylo v (C. I. Lewis & Langford, 1932) nazváno logikou $S3$. Opravený systém již nebyl redukovatelný na systém materiální implikace, avšak pro svého autora stále nebyl uspokojivý. Ten dále pochyboval o intuitivní správnosti některých jeho teorémů. Zejména se jednalo o dokazatelnou formuli:

(∗) $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$.

Za účelem odstranění zpochybňovaného teorému systém ještě oslabil, ale protože si stále nebyl jistý, že se tím skutečně stala formule (∗) nedokazatelná, zformuloval ještě jednu, slabší verzi. Vznikly tak systémy $S1$ a $S2$. Na druhé straně se seznámil s axiomy Oskara Beckera, které se týkaly zřetězených modalit. Jejich zakomponováním byly vytvořeny systémy $S4$ a $S5$.

Všechny tyto systémy se objevily v knize *Symbolic Logic* (C. I. Lewis & Langford, 1932). Základní slovník se zde znovu mění. Symbol pro nemožnost byl nahrazen operátorem možnosti ($\Diamond$).[4] Pro zjednodušení zavedeme také operátor nutnosti ($\Box$), který v *Symbolic Logic* použit nebyl:

$$\Box\varphi =_{def} \neg\Diamond\neg\varphi.$$

K odvozovacím pravidlům P1-P3 je explicitně přidáno pravidlo zaměnitelnosti ekvivalentních formulí:

P4 Nahrazení ekvivalentních formulí: Jestliže formule φ je dokazatelná a obsahuje jako svoji podformuli formuli ψ, která je dokazatelně ekvivalentní s formulí χ, pak nahradíme-li ve φ libovolný výskyt formule ψ formulí χ, výsledek tohoto nahrazení bude opět dokazatelná formule.

Základ pro $S1$ tvoří axiomy A1-A6 plus axiom:

A10 $(p \wedge (p \to q)) \to q$.

$S2$ vznikne obohacením $S1$ o axiom:

A11 $\Diamond(p \wedge q) \to \Diamond p$.

Již jsme zmínili, že $S3$ je tvořen axiomy A1-A7 a A9. $S4$ dostaneme přidáním následujícího axiomu k $S1$:

A12 $\Box p \to \Box\Box p$.

[4] Na tomto základě je také třeba poopravit definici striktní implikace: $\varphi \to \psi =_{def} \neg\Diamond(\varphi \wedge \neg\psi)$. Také v axiomech A7 a A9 nahrazujeme symbol $-$ pomocí $\neg\Diamond$. Další drobné a nepodstatné odlišnosti oproti původní formulaci axiomů zanedbáme.

A konečně $S5$ je určen rozšířením $S1$ o axiom:

A13 $\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$.

Ukázalo se, že systémy $S1$-$S5$ jsou hierarchicky uspořádané, tj. systém s větším číslem je vždy ostře silnější než systém s číslem menším. Až na jediný bod byl tento výsledek předveden již v prvním vydání *Symbolic Logic* (C. I. Lewis & Langford, 1932). Lewis sice už v té době věděl, že v $S3$ jsou dokazatelné formule A10, A11 a tedy všechny axiomy logiky $S2$, ale chyběl mu ještě důkaz toho, že $S3$ je *ostře* silnější než $S2$. Podal ho později W. T. Parry, přičemž bylo také zdůvodněno, že problematizovaná formule ($*$) není teorémem systému $S2$. Tím si tento kalkul získal Lewisovu důvěru a ten ho začal považovat za nejadekvátnější verzi axiomatiky striktní implikace (viz Parry, 1970, str. 134).

My se však dále zaměříme pouze na logiky $S4, S5$, které jsou dnes z Lewisových kalkulů považovány za nejvýznamnější. Již jsem zmínil, že přidání axiomů A12, A13 bylo inspirováno Oskarem Beckerem. Poté, co byl opraven původní Lewisův kalkul a byla vytvořena logika nesoucí později označení $S3$, poukázal Becker na to, že v ní můžeme definovat nekonečně mnoho vzájemně neredukovatelných modalit. Např. v následující posloupnosti nejsou žádné dvě formule (striktně, ani materiálně) ekvivalentní:[5]

$$\Diamond p,\ \Diamond\Diamond p,\ \Diamond\Diamond\Diamond p,\ \Diamond\Diamond\Diamond\Diamond p,\ \ldots.$$

Mezi dvojice operátorů $\Diamond$ bychom mohli vkládat negace $(\ldots\Diamond\neg\Diamond\ldots)$ a získávali bychom další neekvivalentní modality. Tato bohatost se Beckerovi zdála nežádoucí, a proto zkoumal, jaký vliv mohou mít dodatečné axiomy na redukci modalit. Tak např. obohatil kalkul o axiom A13, čímž získal ještě před vydáním (C. I. Lewis & Langford, 1932) systém ekvivalentní s $S5$. Ukázal, že v něm existuje pouze šest základních modalit (Becker, 1930, str. 507-511):

1. φ *pravdivost*,
2. $\neg\varphi$ *nepravdivost*,
3. $\Diamond\varphi$ *možnost*,
4. $\neg\Diamond\varphi$ *nemožnost*,
5. $\Diamond\neg\varphi$ *možnost nepravdivosti*,
6. $\neg\Diamond\neg\varphi$ *nemožnost nepravdivosti* čili *nutnost*,

Každá formule tvaru $x\varphi$, kde x je libovolný řetězec znaků $\neg$ a $\Diamond$, je v $S5$ dokazatelně (striktně i materiálně) ekvivalentní s některou z těchto formulí.

[5] Tj. v $S3$ nelze mezi těmito formulemi ekvivalence dokázat.

5.3 Kripkovská sémantika pro modality

C. I. Lewis ukázal, že definujeme-li materiální implikaci $\supset$ pomocí negace a konjunkce (jak jsme to také učinili v kapitole 4), můžeme již v $S1$ dokázat všechny teorémy Russellova výrokového kalkulu. To také naznačuje, proč jsou dnes systémy $S1$-$S5$ chápány spíše jako rozšíření klasické výrokové logiky než jako její alternativy či modifikace.

Pro Lewisovy kalkuly vytvořil adekvátní sémantiku Saul Kripke v řadě článků (Kripke, 1959, 1963a,b, 1965b). V tomto oddílu představíme kripkovskou sémantiku pouze pro logiky $S4$ a $S5$, které jako jediné z Lewisových logik spadají pod současný termín *normální modální logika.* V současné době bývají tyto logiky obvykle formulovány v jazyce klasické výrokové logiky obohaceném o modality možnosti a nutnosti. Vezměme modální jazyk L^m založený na operátorech $\neg, \wedge, \vee, \Box$, kde $\Box$ je modalita nutnosti. Definovanými spojkami jsou materiální implikace ($\supset$) a operátor možnosti ($\Diamond\varphi =_{def} \neg\Box\neg\varphi$).

V současné době jsou tedy logiky $S4$ a $S5$ vnímány jako logiky výrazů *nutně platí, že* a *možná platí, že.* Je zjevné, že ze syntaktického hlediska fungují tyto výrazy podobně jako výraz „není pravda, že“. Můžeme je tedy chápat jako výrokové operátory: Např. výraz *nutně platí, že* můžeme aplikovat na výrok A a získáme nový výrok *Nutně platí, že A*. Od negace se však operátory nutnosti a možnosti liší v tom podstatném ohledu, že jejich sémantiku nelze adekvátně formulovat v extenzionálním rámci. Není možné přiřadit jim jednoargumentové pravdivostní funkce jakožto jejich významy. To lze doložit následujícím příkladem. Zvažme větu

126. Nutně platí, že pět je větší než dvě.

Věta 126 je tvaru *Nutně platí, že A*, kde věta A říká, že pět je větší než dvě. Věta A je pravdivá a věta 126 je též pravdivá. Avšak nahradíme-li větu A za nějakou pravdivou, avšak kontingentní větu, např. za *Franta si dá dnes po práci pivo*, získáme větu

127. Nutně platí, že Franta si dá dnes po práci pivo.

která je – přinejmenším při určité interpretaci nutnosti – nepravdivá. Pravdivostní hodnota věty *Nutně platí, že A* tedy nemůže záviset pouze na pravdivostní hodnotě věty A, protože – jak jsme viděli – může dojít k tomu, že když nahradíme větu A za jinou větu se stejnou pravdivostní hodnotou, změní se pravdivostní hodnota celku.

Modality nutnosti a možnosti jsou v moderní logice obvykle analyzovány jako kvantifikátory specifického typu. Specifická je především množina, přes kterou se zde kvantifikuje. Je to množina možných světů. Je-li dána nějaká taková množina, můžeme stanovit následující kritérium modalizované pravdivosti:

Věta A je nutně pravdivá

právě tehdy, když

věta A je pravdivá v každém možném světě.

Kritérium pro modalitu možnosti je symetrické:

Věta A je možná pravdivá

právě tehdy, když

věta A je pravdivá alespoň v jednom možném světě.

Hodnota těchto přepisů spočívá v tom, že umožňují podat sémantiku modálního, a tedy intenzionálního jazyka v čistě extenzionálním metajazyce. Sémantika si tak na metaúrovni vystačí s klasickou predikátovou logikou obohacenou o principy teorie množin. To ve výsledku představuje netriviální a překvapivé zjištění, že sémantika modálního jazyka má (resp. může mít) ryze matematický charakter.

Na výše uvedených kritériích Kripke založil svoji formální sémantiku modalit, kterou nyní představím. Opírá se o definice tzv. kripkovského rámce a kripkovského modelu. Začnu s jednoduchou verzí kripkovské sémantiky, se kterou si vystačíme v případě logiky $S5$.

`Definice 5.3.1` *Kripkovský rámec logiky $S5$ je definován jako neprázdná množina W (možných světů). Model logiky $S5$ je dvojice $\langle W, V\rangle$, kde W je kripkovský rámec logiky $S5$ a V je funkce, která každému atomickému výroku přiřadí intenzi v množině W, tj. nějakou podmnožinu množiny W.*

Relaci pravdivosti mezi světy a formulemi jazyka L^m definujeme rekurzivně v analogii s Tarského definicí pravdy v klasické logice. Předpokládejme, že $\mathcal{M} = \langle W, V\rangle$ je model logiky $S5$. Následující podmínky jsou relativní vůči modelu $\mathcal{M}$. Nechť $s \in W$.

(a) Atomická formule p je pravdivá v s právě tehdy, když $s \in V(p)$.

(b) Formule $\neg\varphi$ je pravdivá v s právě tehdy, když φ není pravdivá v s.

(c) Formule $\varphi \wedge \psi$ je pravdivá v s právě tehdy, když formule φ je pravdivá v s a formule ψ je pravdivá v s.

(d) Formule $\varphi \vee \psi$ je pravdivá v s právě tehdy, když formule φ je pravdivá v s nebo formule ψ je pravdivá v s.

(e) Formule $\Box\varphi$ je pravdivá v s právě tehdy, když formule φ je pravdivá v každém světě z množiny W.

Máme-li pojem pravdy, můžeme definovat standardním způsobem další sémantické pojmy logiky $S5$ jako je logická platnost, vyplývání, logická ekvivalence a konzistence. Logická platnost se opět definuje jako univerzální pravdivost a vyplývání jako přenos pravdivosti: φ je logicky platná v $S5$, když pro každý model $\mathcal{M} = \langle W, V \rangle$ logiky $S5$ a každý svět $s \in W$ platí, že φ je pravdivá v s (vzhledem k $\mathcal{M}$). Formule φ vyplývá v $S5$ z množiny formulí Δ, když pro každý model $\mathcal{M} = \langle W, V \rangle$ logiky $S5$ a každý svět $s \in W$ platí, že pokud je v s (vzhledem k $\mathcal{M}$) pravdivé vše z Δ, pak je v s pravdivá také formule φ. Dvě formule jsou logicky ekvivalentní, když pro každý svět každého modelu platí, že jsou v něm buď obě pravdivé, nebo obě nepravdivé. Množina formulí je konzistentní, když existuje svět nějakého modelu, kde jsou všechny formule z množiny pravdivé.

Nyní zformuluji kripkovskou sémantiku v její obecné podobě.

`Definice 5.3.2` *Kripkovský rámec je definován jako dvojice $\langle W, R \rangle$, kde W je neprázdná množina (možných světů), R je binární relace (dosažitelnosti) na množině W. Kripkovský model je trojice $\langle W, R, V \rangle$, kde $\langle W, R \rangle$ je kripkovský rámec a (ohodnocení či valuace) V je funkce, která každé atomické formuli přiřadí nějakou podmnožinu množiny W.*

Předpokládejme, že $\langle W, R \rangle$ je kripkovský rámec. Pro každý svět $s \in W$ definujeme množinu dosažitelných světů W_s:

$$W_s = \{t \in W; sRt\}.$$

Relativně vůči danému kripkovskému modelu $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ definujeme opět relaci pravdivosti mezi světy a formulemi jazyka L^m. Podmínky (a)-(d) pro atomické formule, negaci, konjunkci a disjunkci jsou stejné jako v předchozím případě. Podmínka pro nutnost je mírně modifikována. Nutnost v rámci obecné kripkovské sémantiky je chápána jako relativní nutnost, pro niž platí restrikce na množinu dosažitelných světů. Nechť $s \in W$.

(e)^m Formule $\Box\varphi$ je pravdivá v s právě tehdy, když formule φ je pravdivá v každém světě z množiny W_s.

Sémantické pojmy jsou nyní definovány standardním způsobem v analogii k případu logiky $S5$. Logika této obecné sémantiky se označuje jako logika K. Logiku $S4$ získáme tak, že v definici kripkovského rámce doplníme podmínku, že relace dosažitelnosti je reflexivní a tranzitivní, tj. obecně platí podmínky:

reflexivita: sRs,

tranzitivita: pokud sRt a tRu, pak sRu.

Kripkovské rámce (resp. modely), kde je splněna tato podmínka, budu označovat jako kripkovské rámce (resp. modely) logiky $S4$. Je snadné ověřit, že bychom ekvivalentní sémantiku pro logiku $S5$ získali tak, že vedle reflexivity a tranzitivity doplníme do obecné kripkovské sémantiky další podmínku kladenou na relaci dosažitelnosti, totiž symetrii:

symetrie: pokud sRt, pak tRs.

Logika $S4$ je tedy logikou reflexivních a tranzitivních rámců a logika $S5$ je logikou rámců, kde relace dosažitelnosti je tzv. relací ekvivalence.

Logiky K, $S4$ a $S5$ lze vymezit též axiomatickým způsobem. Standardní axiomatický systém tzv. hilbertovského typu pro logiku K obsahuje každou formuli, kterou lze získat substitucí z nějaké logicky platné formule klasické logiky (přitom zde klasickou logiku omezujeme na jazyk bez symbolu $\rightarrow$). Dále přidáme následující schéma:

K $\Box(\varphi \supset \psi) \supset (\Box\varphi \supset \Box\psi)$,

Každá instance tohoto schématu je konkrétním axiomem logiky K. Odvozovacími pravidly jsou modus ponens (mp) a necesitace (nec):

mp Z formulí φ a $\varphi \supset \psi$ lze odvodit ψ.

nec Je-li φ dokazatelná formule, je dokazatelná i $\Box\varphi$.

Pokud v tomto kalkulu nějakou formuli dokazujeme (tj. odvozujeme z prázdné množiny předpokladů), můžeme používat obě pravidla bez restrikce. Je však třeba si dávat pozor, pokud něco odvozujeme z neprázdné množiny předpokladů. V takovém případě smíme použít pravidlo *nec* pouze na takové formule, které nebyly odvozeny s pomocí těchto dodatečných předpokladů.

Logiku $S4$ můžeme formulovat jako rozšíření logiky $S5$ o schémata:

T $\Box\varphi \supset \varphi$,

4 $\Box\varphi \supset \Box\Box\varphi$.

A logiku $S5$ získáme jako rozšíření logiky $S4$ o schéma:

5 $\Diamond\varphi \supset \Box\Diamond\varphi$.

Kalkul logiky K (resp. $S4$, resp. $S5$) je korektní a úplný vůči kripkovské sémantice logiky K (resp. $S4$, resp. $S5$). Navíc platí, že předložené systémy pro logiky $S4$ a $S5$ jsou s původními Lewisovými ekvivalentní.

5.4 Kripkovská sémantika pro striktní implikaci

Striktní implikaci lze v jazyce L^m definovat předpisem:

$$\varphi \rightarrow \psi =_{def} \Box(\varphi \supset \psi).$$

S ohledem na to, že nám jde primárně o to, jak se z pohledu Lewisových logik mění chování implikace, zvolíme nyní druhou, méně obvyklou variantu a sémantiku logik $S4$ a $S5$ definujeme pro základní výrokový jazyk L neobsahující modality. Implikace $\rightarrow$ však bude interpretována jako striktní implikace a z tohoto hlediska bude mít jazyk L stejnou vyjadřovací sílu jako jazyk L^m, neboť v něm můžeme definovat modalitu nutnosti následujícím předpisem:

$$\Box\varphi =_{def} \neg\varphi \rightarrow \varphi.$$

Práce se základním jazykem L nám umožní porovnat materiální a striktní implikaci s ohledem na to, jakou relaci důsledku vymezují.

Je nyní patrné, že pravdivostní hodnota formulí tvaru implikace nebude v kripkovské sémantice relativní pouze vůči jednomu možnému světu, ale vůči nějakému prostoru možností, tj. vůči nějaké množině světů. Pojmy kripkovského rámce a kripkovkséého modelu zůstávají stejné. Nyní definujeme relaci pravdivosti mezi světy a formulemi jazyka L. Podmínky pro atomické formule, negaci, konjunkci a disjunkci jsou stejné jako v předchozím oddílu. Podmínku pro modalitu nutnosti nyní vynecháme, protože ta se v jazyce L nenachází. Je však třeba nově zformulovat podmínku pro striktní implikaci $\rightarrow$. Nechť je tedy dán kripkovský model logiky $S4$ (resp. $S5$) a nějaký jeho svět $s \in W$. Podmínka pro striktní implikaci vypadá takto:

> Formule $\varphi \rightarrow \psi$ je pravdivá v s právě tehdy, když ψ je pravdivá v každém světě z množiny W_s, ve kterém je pravdivá formule φ.

Nyní následuje standardní definice logické platnosti, vyplývání, ekvivalence a konzistence.

5.5 Kalkuly přirozené dedukce pro striktní implikaci

Pro srovnání materiální a striktní implikace je užitečné, vnímáme-li klasickou logiku i logiky $S4$ a $S5$ jako logiky v tomtéž jazyce (jazyce L) a ptáme se přitom, v jakých ohledech je třeba upravit kalkul přirozené dedukce zavedený v předchozí kapitole, abychom získali $S4$, resp. $S5$. Následující ne příliš známé kalkuly jsou převzaty z (Prawitz, 1965). Pro logiku $S4$ máme kalkul:

konjunkce	EK: (i) $\varphi \wedge \psi/\varphi$ (ii) $\varphi \wedge \psi/\psi$	IK: $\varphi, \psi/\varphi \wedge \psi$
disjunkce	ED: $\varphi \vee \psi, [\varphi/\chi], [\psi/\chi]/\chi$	ID: (i) $\varphi/\varphi \vee \psi$, (ii) $\psi/\varphi \vee \psi$
implikace	EI: $\varphi \rightarrow \psi, \varphi/\psi$	II4: $[\varphi/\psi]^*/\varphi \rightarrow \psi$
negace	OS: $\varphi, \neg\varphi/\bot$	ND: $[\neg\varphi/\bot]/\varphi$

Všechna pravidla jsou stejná jako v klasické logice s výjimkou introdukčního pravidla pro implikaci, které je nyní specifickým způsobem omezeno. Popíšu nyní, v čem toto omezení spočívá. Řekneme, že formule jazyka L je *striktní*, pokud je to formule tvaru implikace, tj. její tvar je $\varphi \rightarrow \psi$. Pravidlo II4 nám umožňuje odvodit formuli $\varphi \rightarrow \psi$ tak, že odvodíme ψ z hypotetického předpokladu φ. Omezení spočívá v tom, že z těch formulí, které máme k dispozici před stanovením hypotetického předpokladu φ, smíme použít v rámci odvození ψ z φ pouze ty, které jsou striktní. Toto omezení by mohlo být ilustrováno také následujícím způsobem. Předpokládejme, že máme odvození tohoto tvaru

1	$\ddots$	
2	$\mid\ \vdots$	
3	$\mid\ \chi$	
4	$\mid\ \vdots$	
5	$\mid\ \mid\ \ddots$	
6	$\mid\ \mid\ \mid\ \varphi$	hypotetický předpoklad
7	$\mid\ \mid\ \mid\ \vdots$	
8	$\mid\ \mid\ \mid\ \psi$	
9	$\mid\ \mid\ \varphi \rightarrow \psi$	z 6-8 užitím pravidla II4

Předpokládejme, že χ není striktní formule. Potom je toto odvození v souladu s pravidlem II4 pouze tehdy, když výskyt χ v kroku 3 není použit v derivaci ψ z φ v krocích 6-8.

Kalkul přirozené dedukce pro logiku $S5$ získáme tak, že pravidlo II4 nahradíme pravidlem II5. To se od pravidla II4 liší pouze v tom, že při odvození implikace smíme v dosahu hypotetického předpokladu použít nejen striktní formule, ale i jejich negace.

Dále budeme využívat též odvozené introdukční pravidlo pro negaci:

IN $[\varphi/\bot]/\neg\varphi$.

Toto pravidlo je odvoditelné z pravidla ND v následujícím smyslu. Předpokládejme, že spor $\bot$ je odvoditelný z hypotetického předpokladu φ. Pak můžeme konstruovat toto odvození

1	$\vert\ \neg\neg\varphi$	hyp
2	$\vert\ \vert\ \neg\varphi$	hyp
3	$\vert\ \vert\ \bot$	1,2 OS
4	$\vert\ \varphi$	2-3 ND
5	$\vert\ \bot$	předpoklad $[\varphi/\bot]$
6	$\neg\varphi$	1-5 ND

Kdykoli bude IN použito v následujícím textu, budeme vědět, že jeho výskyt by mohl být eliminován tak, že nahradíme odvození sporu $\bot$ z předpokladu φ výše uvedeným odvozením.[6]

Lze lehce ověřit, že všechna pravidla uvedeného systému jsou korektní vůči sémantice logiky $S4$ (resp. $S5$). Pro zdůvodnění korektnosti pravidla II4 bychom potřebovali ověřit, že platí následující tvrzení, v němž Δ^s označuje množinu všech striktních formulí z množiny Δ:

Jestliže ψ vyplývá v $S4$ z $\Delta^s \cup \{\varphi\}$, tak $\varphi \to \psi$ vyplývá v $S4$ z Δ.

To lze zdůvodnit takto: Předpokládejme, že ψ vyplývá v $S4$ z $\Delta^s \cup \{\varphi\}$. Nechť je dán nějaký kripkovský model $\mathcal{M}$ logiky $S4$ a svět s tohoto modelu, v němž je pravdivé vše z Δ. Chceme ukázat, že v s musí být pravdivá také formule $\varphi \to \psi$. Tak tomu skutečně je, protože v každém dosažitelném světě t, ve kterém je pravdivá formule φ, je pravdivé vše z množiny $\Delta^s \cup \{\varphi\}$, a náš předpoklad pak zajišťuje i pravdivost formule ψ.

Podobně se dokáže i korektnost pravidla II5 vůči sémantice logiky $S5$. Problém úplnosti těchto dvou systémů lze převést na problém úplnosti známějších hilbertovských axiomatických systémů pro logiky $S4$ a $S5$, které jsem představil v předchozím oddílu.[7] Vzhledem k tomu, že to v (Prawitz, 1965) není podrobněji rozebráno, a také z ilustrativních důvodů, ukáži nyní, jak lze tento převod uskutečnit. Je potřeba se přitom vyrovnat s tím, že standardní axiomatické systémy jsou formulovány pro jiný jazyk, totiž pro jazyk L^m.

1. Začněme s axiomem K, který má v jazyce L^m následující tvar (automaticky odstraňujeme dvojitou negaci):

$$\neg(\Box\neg(\varphi \wedge \neg\psi) \wedge (\Box\varphi \wedge \neg\Box\psi)).$$

A tedy po převodu do jazyka L má tvar

$$\neg(((\varphi \wedge \neg\psi) \to \neg(\varphi \wedge \neg\psi)) \wedge ((\neg\varphi \to \varphi) \wedge \neg(\neg\psi \to \psi))).$$

[6] V předchozím jakož i v následujících odvozeních je *hyp* zkratkou za *hypotetický předpoklad.*

[7] Důkaz úplnosti standardních hilbertovských kalkulů pro uvedené modální logiky lze nalézt např. v (Blackburn, de Rijke & Venema, 2001).

Toto schéma budu zkráceně zapisovat jako $\neg\vartheta$. V kalkulu přirozené dedukce logiky $S4$ můžeme pro libovolnou formuli tohoto tvaru formulovat následující důkaz:

1	ϑ	hyp
2	$(\varphi \wedge \neg\psi) \to \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$	1 EK
3	$(\neg\varphi \to \varphi) \wedge \neg(\neg\psi \to \psi)$	1 EK
4	$\neg\varphi \to \varphi$	3 EK
5	$\neg(\neg\psi \to \psi)$	3 EK
6	$\neg\psi$	hyp
7	$\neg\psi$	hyp
8	$\neg\varphi$	hyp
9	φ	4,8 EI
10	$\perp$	8,9 OS
11	φ	8-10 ND
12	$\varphi \wedge \neg\psi$	7,11 IK
13	$\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$	2,12 EI
14	$\perp$	12,13 OS
15	ψ	7-14 ND
16	$\neg\psi \to \psi$	6-15 II4
17	$\perp$	5,16 OS
18	$\neg\vartheta$	1-17 IN

2. Nyní odvodíme axiom T, který má v jazyce L^m tvar

$$\neg(\Box\varphi \wedge \neg\varphi).$$

V jazyce L jde pak o tvar

$$\neg((\neg\varphi \to \varphi) \wedge \neg\varphi).$$

Pro toto schéma sestrojíme opět důkaz v kalkulu přirozené dedukce logiky $S4$:

1	$(\neg\varphi \to \varphi) \wedge \neg\varphi$	hyp
2	$\neg\varphi \to \varphi$	1 EK
3	$\neg\varphi$	1 EK
4	φ	2,3 EI
5	$\perp$	3,4 OS
6	$\neg((\neg\varphi \to \varphi) \wedge \neg\varphi)$	1-5 IN

3. Přejdeme nyní k axiómu 4, který lze v jazyce L^m formulovat takto:

$$\neg(\Box\varphi \wedge \neg\Box\Box\varphi).$$

V jazyce L pak získáváme tento tvar

$$\neg((\neg\varphi \to \varphi) \wedge \neg(\neg(\neg\varphi \to \varphi) \to (\neg\varphi \to \varphi))),$$

který budu zkracovat jako $\neg\vartheta$. Libovolnou formuli tohoto tvaru lze dokázat následujícím způsobem:

1	$\mid\ \vartheta$	hyp
2	$\mid\ \neg\varphi \to \varphi$	1 EK
3	$\mid\ \neg(\neg(\neg\varphi \to \varphi) \to (\neg\varphi \to \varphi))$	1 EK
4	$\mid\ \mid\ \neg(\neg\varphi \to \varphi)$	hyp
5	$\mid\ \mid\ \neg\varphi \to \varphi$	2
6	$\mid\ \neg(\neg\varphi \to \varphi) \to (\neg\varphi \to \varphi)$	4-5 II4
7	$\mid\ \bot$	3,6 OS
8	$\neg\vartheta$	1-7 IN

Modus ponens pro $\supset$, tedy pravidlo tvaru $\neg(\varphi \wedge \neg\psi), \varphi/\psi$, je odvoditelným pravidlem již v kalkulu klasické výrokové logiky a jeho platnost se beze změny přenáší do kalkulu logiky $S4$ (i $S5$). Zdůvodnění odvoditelnosti pravidla necesitace (které má v jazyce L tvar $\varphi/\neg\varphi \to \varphi$) je jednoduché. Předpokládejme, že φ je dokazatelná formule. Pak lze konstruovat následující odvození:

1	$\mid\ \neg\varphi$	hyp
2	$\mid\ \varphi$	předpoklad dokazatelnosti φ
3	$\neg\varphi \to \varphi$	1-2, II4

Povšimněme si, že aby tento důkaz byl v souladu s kalkulem logiky $S4$, je třeba, aby formule φ byla dokazatelná. Nestačí předpoklad, že je odvoditelná z nějakých dodatečných předpokladů, protože pokud by závisela na nějakém předpokladu, který nemá tvar implikace, nemohli bychom tento předpoklad použít v poddůkazu, který je založen formulí $\neg\varphi$.

Úhrnem jsem ukázali, že v kalkulu přirozené dedukce pro logiku $S4$ je dokazatelné vše, co je dokazatelné v hilbertovském kalkulu, o kterém víme, že je úplný vůči logice $S4$. Tedy tento kalkul přirozené dedukce musí být také úplný. Abychom to samé ukázali též pro kalkul přirozené dedukce logiky $S5$, musíme zdůvodnit, že je v něm dokazatelný axiom (5), který má v jazyce L^m tento tvar

$$\neg(\neg\Box\neg\varphi \wedge \neg\Box\neg\Box\neg\varphi).$$

V jazyce L tomu odpovídá:

$$\neg(\neg(\varphi \to \neg\varphi) \wedge \neg((\varphi \to \neg\varphi) \to \neg(\varphi \to \neg\varphi))),$$

což opět zkrátíme jako $\neg\vartheta$ a dokážeme v kalkulu přirozené dedukce pro logiku $S5$:

1	ϑ	hyp
2	$\neg(\varphi \to \neg\varphi)$	1 EK
3	$\neg((\varphi \to \neg\varphi) \to \neg(\varphi \to \neg\varphi))$	1 EK
4	$\varphi \to \neg\varphi$	hyp
5	$\varphi \to \neg\varphi$	hyp
6	$\bot$	2,5 OS
7	$\neg(\varphi \to \neg\varphi)$	5-6 IN
8	$(\varphi \to \neg\varphi) \to \neg(\varphi \to \neg\varphi)$	4-7 II5
9	$\bot$	3,8 OS
10	$\neg\vartheta$	1-9 IN

Tím jsme ukončili důkaz úplnosti kalkulu přirozené dedukce.

5.6 Zhodnocení striktní implikace

Cílem tohoto oddílu je zamyslet se nad otázkou, jestli pokus C. I. Lewise o revizi klasické logiky byl úspěšný. Z hlediska paradoxů materiální implikace uvedených v oddílu 4.8 je pozoruhodné, že každá úsudková forma mezi těmito paradoxy je vyhodnocena logikou $S4$ i $S5$ stejně. To naznačuje, že rozdíl mezi těmito logikami, ač významný z hlediska logiky modalit, se nezdá být tak významný z perspektivy logiky kondicionálních vět. To ostatně souvisí s tím, že obě tyto logiky jsou klasifikovány jako logiky jednoho typu, totiž logiky striktní implikace. Avšak vzápětí se přeci jen s určitým rozdílem setkáme.

Z hlediska logik $S4$ a $S5$ jsou jako platné vyhodnoceny úsudkové formy druhé skupiny paradoxů materiální implikace. Konkrétně se jedná o kontrapozici ($p \to \neg q/q \to \neg p$), tranzitivitu ($q \to r, p \to q/p \to r$) a zesílení antecedentu ($p \to q/(p \wedge r) \to q$). Paradoxy ostatních skupin, tedy paradoxy třídy I, III a IV, jsou vyhodnoceny jako neplatné. Např. u základních paradoxů, tj. paradoxů třídy I, můžeme podat následující zdůvodnění. (1) To, že je pravdivý atom q v daném světě, ještě nijak nezaručuje, že je pravdivý v každém dosažitelném světě, ve kterém je pravdivý atom p. (2) To, že je nepravdivý atom p v daném světě, nijak nezaručuje, že atom q je pravdivý v každém dosažitelném světě, ve kterém atom p pravdivý je.

Lze považovat za úspěch koncepce striktní implikace, že se podařilo diskvalifikovat úsudky tříd I, III a IV. Avšak jak by mělo být zřejmé z oddílu 4.9, takový úspěch je téměř nutně vykoupen nějakým nežádoucím efektem. Se ztrátou problematických úsudkových forem ztrácíme i nějaké žádoucí, jako např.

(a) $p \vee q / \neg p \to q$,

(b) $(p \wedge q) \to r / p \to (q \to r)$.

U první z nich je důvod zřejmý. To, že v daném světě je pravdivé p či q, nijak nezaručuje, že q je pravdivé ve všech světech, v nichž p pravdivé není.

Druhá z uvedených forem poukazuje, domnívám se, na zásadní problém striktní implikace, který se objeví, když se implikace řetězí. Formule tvaru $p \to (q \to r)$ má z hlediska sémantiky striktní implikace velmi nepřirozený význam, který neaproximuje to, jak bychom rozuměli větám tohoto tvaru v přirozeném jazyce. Zde je však patrný určitý rozdíl mezi logikami $S4$ a $S5$ a uvedený problém je evidentní zejména v logice $S5$. Představme si nějaký model logiky $S5$ a nějaký jeho svět, z jehož hlediska je atom p možný – tedy pravdivý v nějakém dosažitelném světě. Pak je formule $p \to (q \to r)$ pravdivá právě tehdy, když je pravdivá formule $q \to r$.[8] Představme si např. pod p, q, r tyto věty:

Koupím si los s číslem 36. p

Bude vylosováno číslo 36. q

Vyhraji v loterii. r

Předpokládejme, že se nacházím v situaci, kdy si chci zakoupit los v loterii. Z hlediska striktní implikace logiky $S5$ mají v takové situaci následující věty stejnou pravdivostní hodnotu, což je podivné:

Pokud bude vylosováno číslo 36, vyhraji v loterii.

Pokud si koupím los s číslem 36, tak bude-li vylosováno číslo 36, vyhraji v loterii.

[8]Je-li pravdivá formule $q \to r$, je pravdivá ve všech světech, a tedy i v těch, kde je pravdivá formule p. To znamená, že $p \to (q \to r)$ je pravdivá. Předpokládejme nyní, že $p \to (q \to r)$ je pravdivá. To znamená, že v možném světě, v němž je pravdivá formule p, je pravdivá i formule $q \to r$. Pak ale tato implikace musí být pravdivá v každém světě.

Logika $S4$ je v tomto ohledu méně problematická a může se konkrétně uvedenému nežádoucímu jevu vyhnout. Nicméně úsudková forma (b) je v ní také neplatná, což se může projevit nežádoucím způsobem zejména v případech, kdy zvažujeme větu tvaru $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ a antecedent p je v aktuálním světě shodou okolností pravdivý. Zvažme následující příklad, který je v upravené podobě převzat z článku (Bledin, 2014). Jde pouze o variantu slavného příkladu z (McGee, 1985), který bude později (zejména v oddílu 10.1) hrát klíčovou roli.

Představme si, že vyšetřujeme vraždu a mezi podezřelými jsou dvě ženy: paní Procházková a paní Poláková. Ostatní podezřelí jsou muži. Ve skutečnosti spáchala zločin paní Procházková. Zvažme větu

> Pokud vraždu spáchala žena, pak jestliže to nebyla paní Procházková, byla to paní Poláková.

Věta se zdá být v uvedené situaci pravdivá, je-li prostor dosažitelných možností vymezen stavem vyšetřování. Avšak mezi dosažitelnými světy, v nichž je pravdivý antecedent (*Vraždu spáchala žena*), je i aktuální svět, v němž vraždu skutečně spáchala žena. Tedy v aktuálním světě by měla být pravdivá také věta *Pokud nespáchala zločin paní Procházková, byla to paní Poláková.* Avšak to je v rozporu s předpokladem, že mezi podezřelými jsou též muži a měly by být tedy dosažitelné také světy, v nichž zločin nespáchala paní Procházková, ani paní Poláková, ale někdo jiný. S tímto problémem se nedovede přirozeně vypořádat ani sémantika logiky $S5$, ani sémantika logiky $S4$, což je pádný důvod pro její odmítnutí. Jak jsem již zmínil, podobný jev budu dále analyzovat v kapitole 10.

5.7 Shrnutí

V této kapitole jsem se zabýval pokusem revidovat klasickou logiku, který spočívá v návrhu C. I. Lewise nahradit materiální implikaci implikací striktní. Představil jsem historické motivy, které vedly k zavedení striktní implikace. Ty souvisejí především se snahou blokovat základní paradoxy striktní implikace, podle kterých je pravdivé implikováno čímkoli a nepravdivé implikuje cokoli. Uvedl jsem původní Lewisovy kalkuly striktní implikace $S1-S5$ a zaměřil jsem se dále především na logiky $S4$ a $S5$. Pro ně jsem zavedl standardní kripkovskou sémantiku. Ukázal jsem také, jak je třeba upravit introdukční pravidlo pro implikaci v kalkulu přirozené dedukce klasické logiky, abychom získali adekvátní kalkul striktní implikace logik $S4$ a $S5$. Nakonec jsem poukázal na to, že přestože řeší zavedení striktní implikace řadu problémů, přidělává si tím problémy nové.

Kapitola 6

Stalnakerova implikace

V této kapitole se budu zabývat pokusem o revizi klasické logiky, který podnikl Robert Stalnaker. Původním Stalnakerovým cílem bylo vytvořit logiku pro subjunktivní kondicionály a jeho sémantika je velmi podobná Lewisově sémantice kontrafaktuálů, se kterou jsme se již v obrysech seznámili v oddílu 3.3. Stalnaker však na rozdíl od Lewise dospěl k závěru, že stejný aparát lze využít i při analýze indikativních kondicionálů.[1]

6.1 Motivační úvahy

Logické systémy pro kontrafaktuály (např. ten Davida Lewise) bývají někdy motivovány postřehem, že reprezentuje-li $\varphi \rightarrow \psi$ subjunktivní kondicionál, máme jisté důvody odmítnout logickou platnost následujících úsudkových forem, které jsou platné z hlediska klasické logiky.

(a) $q/p \rightarrow q$,

(b) $\neg p/p \rightarrow q$,

(c) $p \rightarrow \neg q/q \rightarrow \neg p$,

(d) $q \rightarrow r, p \rightarrow q/p \rightarrow r$,

(e) $p \rightarrow q/(p \wedge r) \rightarrow q$.

Cílem logického systému pro kontrafaktuály pak může být předložení takového obecného kritéria logické platnosti, které tyto úsudkové formy klasifikuje jako neplatné, aniž by tím zároveň diskvalifikovalo takové intuitivně přijatelné formy jako třeba

[1] Některé pasáže z této kapitoly jsou v upravené podobě převzaty z (Punčochář, 2014b).

(*) $p \to q, p \to r / p \to (q \wedge r)$.

V případě subjunktivních kondicionálů můžeme k těmto formám (a)-(e) uvést tyto protipříklady

(a)$^+$ Dnes jsem se zúčastnil běžeckého závodu. Tedy běžeckého závodu bych se zúčastnil, i kdybych si včera zlomil nohu.

(b)$^+$ Ve volbách nevyhráli komunisté. Tedy kdyby ve volbách vyhráli komunisté, prosazovali by pravicovou politiku.

(c)$^+$ Kdyby udělal chybu, tak by to nebyla velká chyba. Tudíž kdyby udělal velkou chybu, tak by neudělal chybu.

(d)$^+$ Kdybych si koupil nové auto, neměl bych na nájem. Kdybych vyhrál milion, koupil bych si nové auto. Tudíž kdybych vyhrál milion, neměl bych na nájem.

(e)$^+$ Kdybych si dal do kávy cukr, víc by mi chutnala. Tudíž kdybych si dal do kávy cukr a benzín, víc by mi chutnala.

Avšak jak jsme již viděli v oddílu 4.8, úsudkové formy (a)-(e) lze chápat jako problematické, i když interpretujeme $\varphi \to \psi$ jako indikativní kondicionál. Protipříklady lze totiž převést do indikativního tvaru a stále budeme mít úsudky těžko přijatelné. Viděli jsme, že klasická logika klasifikuje úsudkové formy (a)-(e) všechny jako logicky platné. Logika striktní implikace klasifikuje formy (a) a (b) jako neplatné, ale formy (c)-(e) jako platné. Vzhledem k uvedeným protipříkladům se zdá být legitimní snahou hledat logiku indikativních kondicionálů diskvalifikující všechny formy (a)-(e) a přitom zachovávající platnost základních principů indikativního usuzování, jako je modus ponens či (*). Stalnakerova sémantika právě k takové logice vede.

6.2 Ramseyho test

Stalnaker původně představil základy své teorie kondicionálů v (Stalnaker, 1968), formální detaily pak rozpracoval s Richmondem Thomasonem v (Stalnaker & Thomason, 1970). Původně je tato teorie formulována výhradně pro subjunktivní kondicionály, ale později v (Stalnaker, 1975) ji autor aplikuje i na indikativní tvar.

Velká část logicko-filosofické literatury o kondicionálních větách se nějakým způsobem explicitně vztahuje k jedné poznámce pod čarou Franka Ramseyho z roku 1929, kde je vyjádřeno to, čemu se dnes říká Ramseyho test:

> Pokud se dva lidé dohadují o tom, zda platí „q, pokud p“ a nemají jasno v tom, zda platí p, přidají p hypoteticky k sadě svých přesvědčení a na tomto základě se dohadují, zda platí q. (Ramsey, 1929, str. 155).

V této podobě se Ramseyho test týká indikativních kondicionálů, jak je patrné z podmínky, že diskutující nemají jasno o tom, zda platí p. Tato podmínka hraje významnou roli pouze při indikativním užití kondicionálních vět. Stalnaker nejprve Ramseyho test upravil tak, aby ho bylo možné aplikovat i na subjunktivní kondicionály, u kterých často víme, že jejich antecedent je nepravdivý:

> Kondicionální větu vyhodnoť následujícím způsobem: Nejprve (hypoteticky) přidej antecedent mezi svá přesvědčení; poté svá přesvědčení uprav tak, abys zachoval konzistenci (aniž bys změnil hypotetickou platnost antecedentu); potom rozhodni, jestli je konsekvent pravdivý. (Stalnaker, 1968, str. 102)

Stalnakerův přístup je ontický. To znamená, že se domnívá, že je třeba řešit logický problém kondicionálů (tj. otázku, jakou roli hrají tyto věty v usuzování) na základě podmínek pravdivosti.

Avšak uvedený test je epistemický, nepředkládá podmínky pravdivosti, pouze představuje kritérium akceptovatelnosti daného kondicionálu relativně vůči nějakému systému přesvědčení (informačnímu stavu). Přesto Stalnaker přijímá tento test jako vhodný návod, který nás instruuje, jak formulovat adekvátní podmínky pravdivosti.

Dle uvedeného kritéria je kondicionál akceptovatelný vzhledem k určitému systému přesvědčení, když integrace antecedentu v tomto systému vede k přesvědčení o pravdivosti konsekventu. Stalnaker potřebuje uvedenou podmínku akceptovatelnosti modifikovat na kritérium pravdivosti. Za jakých okolností je daný kondicionál pravdivý? Stalnaker říká, že „pojem *možného světa* je přesně tím, co potřebujeme k této modifikaci, neboť možný svět je ontologický korelát systému hypotetických přesvědčení.“ (Stalnaker, 1968, str. 102).

6.3 Ontické výběrové funkce

Ontická reformulace Ramseyho testu s pomocí pojmu možného světa vede k následujícímu kritériu, které formuluji jak pro indikativní tak pro subjunktivní kondicionály v souladu se (Stalnaker, 1975).

> Nechť s je možný svět, ve kterém je pravdivá věta A a který se jinak minimálně liší od aktuálního světa. Kondicionální věta s antecedentem A a konsekventem B je pravdivá (resp. nepravdivá) v aktuálním světě právě tehdy, když věta B je pravdivá (resp. nepravdivá) ve světě s.

Tedy věta *Pokud A, B* (resp. *Kdyby A, B*) je pravdivá, když B je pravdivá (ne nutně ve světě takovém, jaký je, ale) ve světě, který by byl aktuální, kdyby věta A byla pravdivá. Pro čistě formální artikulaci této podmínky pravdivosti, která umožňuje jednoznačné vymezení formální sémantiky kondicionálních vět, bylo třeba zavést pojem výběrové funkce, která přiřazuje (aktuálnímu) světu a antecedentu svět, který by byl aktuální, kdyby byl antecedent pravdivý. Přesněji řečeno, výběrová funkce přiřadí každé dvojici $\langle$možný svět, věta$\rangle$ nějaký možný svět, v němž je daná věta pravdivá. Pravdivostní podmínku pro kondicionální věty je pak možno artikulovat takto:

> Kondicionální věta s antecedentem A a konsekventem B je pravdivá ve světě s právě tehdy, když věta B je pravdivá ve světě $f(A, s)$.

Na úrovni logiky nelze udat přesný charakter výběrové funkce, neboť je silně závislý na kontextu promluvy. Lze jen formulovat nějaké obecné formální podmínky, které musí každá takováto funkce splňovat. Podstatné je, že musí respektovat jisté uspořádání možných světů vzhledem ke světu s, neboť výběr je (stejně tak jako u D. Lewise) založen na pojmu podobnosti. Vybraný svět by měl být v relevantním ohledu co nejpodobnější aktuálnímu světu. Jedním důsledkem je, že výběrová funkce musí vybrat aktuální svět, kdykoli je to možné, tj. kdykoli je v něm pravdivý antecedent. (To vyplývá z toho, že každý svět je více podobný sám sobě než kterémukoli jinému světu.)

Dále, což jsem již uvedl, musí být ve vybraném světě pravdivý antecedent. Může se stát, že antecedent není možný, tedy že neexistuje možný svět, v němž je pravdivý. Tuto komplikaci řeší Stalnaker určitým technickým opatřením. Zavádí tzv. absurdní svět λ, ve kterém je z definice vše pravdivé. Není-li antecedent pravdivý v žádném z možných světů, vybere výběrová funkce svět λ. Avšak naopak také platí, že absurdní svět je vybrán pouze v tomto případě. Je-li mezi možnými světy takový, v němž je antecedent pravdivý, jistě bude podobnější aktuálnímu světu než svět absurdní a při výběru bude mít tedy přednost.

Poslední obecnou formální podmínkou, kterou Stalnaker klade na výběrové funkce, je tato:

> Pokud A je pravdivé v $f(B, s)$ a B v $f(A, s)$, tak $f(B, s) = f(A, s)$.

Tato podmínka zajišťuje, že pokud svět s_1 je nějakým výběrem upřednostněn před světem s_2, tak už jiný výběr nemůže upřednostnit svět s_2 před světem s_1.

Podstatné je, že uvedené podmínky neurčují výběrovou funkci jednoznačně, což je v pořádku, neboť bližší charakter pojmu podobnosti je určen mimologickými aspekty dané situace.

Stalnakerova sémantika se nápadně podobá sémantice Davida Lewise. V oddílu 3.3 jsme viděli, že Lewisův systém lze definovat také v termínech výběrové funkce, která ovšem k dané větě a možnému světu nevybírá jeden možný svět, nýbrž nějakou množinu možných světů. Abychom vyznačili tento rozdíl, můžeme používat pro takové výběrové funkce velké písmeno F. Stalnekerovo kritérium pak musíme upravit v rámci Lewisova systému takto:

> Kondicionální věta s antecedentem A a konsekventem B je pravdivá ve světě s právě tehdy, když věta B je pravdivá ve všech světech množiny $F(A, s)$.

Zásadním rozdílem mezi logikami Roberta Stalnakera a Davida Lewise je v takzvaném principu podmíněného vyloučeného třetího:

$$(\varphi \rightarrow \psi) \vee (\varphi \rightarrow \neg\psi).$$

Ten je platným principem Stalnakerovy logiky, nikoli však Lewisovy. Tento princip zároveň vede k platnosti úsudkových forem tvaru

$$\neg(\varphi \rightarrow \psi)/\varphi \rightarrow \neg\psi.$$

což koresponduje s pozorováním, že negace kondicionální věty *Ne-(pokud A, B)* je v přirozeném jazyce v mnoha případech míněna jako podmíněná negace, tj. jako *Pokud A, ne-B*. Např. řekneme-li *Není pravda, že pokud neexistuje bůh, tak mé modlitby budou vyslyšeny*, můžeme tím mínit to samé jako větou *Pokud neexistuje bůh, mé modlitby nebudou vyslyšeny*. K tomuto tématu se ještě vrátím v oddílu 12.2.

6.4 Kontext a jeho hranice

Jak jsem výše uvedl, pro Stalnakera je sémantika subjunktivních kondicionálů shodná se sémantikou kondicionálů indikativních. V tom se liší od D. Lewise, který se domnívá, že při analýze indikativních kondicionálů si vystačíme s materiální implikací. V čem však podle Stalnakera spočívá rozdíl mezi indikativními a subjunktivními kondicionály, když jejich sémantika je stejná? Stalnaker vysvětluje tento rozdíl na úrovni pragmatiky. Abych mohl vyložit, jakým způsobem postupuje, musím zavést pojem kontextu.

Obsah řečového aktu nezávisí jen na syntaktických a sémantických vlastnostech výrazů, které jsou v aktu použity, ale také na jistých faktech, které se týkají situace, v níž je tento akt vykonán (např. na čase, v němž se akt odehrál, na tom, kdo akt vykonal a kdo je adresátem, atd.). Kontext chápe Stalnaker právě jako zdroj takovýchto informací, vzhledem k nimž je řečový akt interpretován. Je dokonce rozumné ztotožnit kontext s těmito informacemi:

> Závislost na kontextu znamená závislost na jistých faktech, ale tyto fakty musí být dostupné, nebo musí být možné předpokládat, že jsou dostupné účastníkům komunikace. Navrhuji tedy ztotožnit kontext (v určitém momentu diskurzu) se sadou informací, o kterých lze v daném momentu předpokládat, že jsou k dispozici účastníkům diskurzu. (Stalnaker, 1998, str. 5)

Kontext tedy můžeme chápat jako určitý *informační stav*. Pro informace, z nichž kontext sestává, používá Stalnaker také termín presupozice mluvčího (Stalnaker, 1975, str. 273). Ztotožníme-li kontext s množinou takovýchto presupozic, můžeme ho též reprezentovat jako množinu možných světů, které jsou s těmito informacemi slučitelné (v tom smyslu, že v nich jsou všechny tyto informace pravdivé). Této množině říká Stalnaker kontextová množina:

> Můj centrální předpoklad je, že kontext by měl být chápán jako množina informací, o nichž lze předpokládat, že jsou dostupné účastníkům řečové situace. *Kontextová množina* je definována jako množina možných světů, které jsou kompatibilní s těmito informacemi. (Stalnaker, 1999, str. 6)

Nyní již mohu představit Stalnakerovo pragmatické objasnění rozdílu mezi indikativními a subjunktivními kondicionály, které najdeme v (Stalnaker, 1975). Výběrová funkce f_s pro subjunktivní kondicionály může vzhledem k danému kontextu přiřazovat jiné hodnoty než výběrová funkce f_i pro odpovídající indikativní kondicionál. Z hlediska f_i totiž musí být splněna podmínka, že světy v kontextové množině mají k sobě blíže než světy mimo tuto množinu. Tedy funkce f_i vybírá primárně světy z kontextové množiny a respektuje její hranice.

Ovšem pro jisté účely může mluvčí mít zájem na tom použít takovou výběrovou funkci, která sahá za hranice kontextové množiny. To znamená, že za jistých okolností může být účelné potlačit určité kontextové presupozice a narušit tím bariéru, kterou tvoří hranice kontextu. Subjunktivní tvar je podle Stalnakera právě konvencionální jazykový prostředek, který indikuje, že některé presupozice byly potlačeny, což vzhledem k subjunktivním kondicionálům znamená, že výběrová funkce f_s může překročit hranice kontextové množiny. Speciální případ, kdy je žádoucí, aby výběrová funkce mohla dosáhnout za hranice kontextové množiny, nastává tehdy, když je antecedent kontrafaktuální v tom smyslu, že není kompatibilní s presupozicemi kontextu. (Např. v případě, že víme, že vrah použil nůž, lze uvažovat takto: Kdyby byl vrahem zahradník, nepoužil by nůž. Tudíž vrahem musí být někdo jiný.)

V oddílu 3.1 jsem uvedl, že ne všechny subjunktivní kondicionály jsou kontrafaktuální. Tvrdil jsem také, že skutečné kontrafaktuální výroky (které nyní můžeme chápat jako takové, jejichž antecedent je nepravdivý již na základě informací konstituujících daný kontext) musí být formulovány v subjunktivním modu. To Stalnaker vysvětluje jako důsledek následující pragmatické maximy:

> Indikativní kondicionál lze smysluplně vyslovit pouze v kontextu, který je kompatibilní s antecedentem.

Přestože je evidentní, že indikativní kondicionály nefungují vždy stejně jako kondicionály subjunktivní, viděli jsme, že dle Stalnakera je tato odlišnost vysvětlitelná na úrovni pragmatiky a nemá žádný dopad na sémantiku. Pojem kontextu, který je v tomto vysvětlení nepostradatelný, totiž vůbec netvoří součást sémantické teorie. Není tedy ani jasné, jak by Stalnakerovo vysvětlení mohlo být použito na úrovni sémantiky založené na ontickém přístupu. Důsledkem je, že Stalnakerova logika indikativních hypotetických soudů je totožná s jeho logikou subjunktivních hypotetických soudů. Krátce se k tomuto problému vrátím v oddílu 12.4.

6.5 Formální vymezení Stalnakerovy sémantiky

V tomto oddílu vymezím Stalnakerovu sémantiku přesněji. Prvním krokem je tradičně vymezení pojmu modelu. Jde o rozšíření kripkovského modelu o výběrové funkce. Co se výběrových funkcí týče, volím zde cestu, která se mírně rozchází s tím, jak Stalnaker postupuje v (Stalnaker, 1968). Výběrové funkce nebudou operovat na samotných větách (resp. formulích), ale na jejich sémantických korelátech, tedy propozicích, které jsou větami vyjádřeny. Propozice zde budou, jak je tomu běžné, pojaty jako množiny možných světů. Tento přístup má oproti tomu, kdy výběrové funkce operují na samotných větách, řadu výhod. V posledku jde však o odlišné vymezení téhož, tedy předložená sémantika je skutečně ekvivalentní té Stalnakerově.

`Definice 6.5.1` *Modelem budeme rozumět pětici* $\mathcal{M} = \langle W, R, f, \lambda, V\rangle$*, kde* $\langle W, R, V\rangle$ *je kripkovský model s reflexivní relací dosažitelnosti,* $\lambda \notin W$ *a* f *je funkce přiřazující každé dané propozici* X *(tj. podmnožině množiny* W*) a možnému světu* s *(tj. prvku množiny* W*) nějaký možný svět* $f(X,s)$*, který je dosažitelný z* s *prostřednictvím relace* R*, případně absurdní svět* λ*. Tedy pro* $X \subseteq W$*,* $s \in W$ *a* $W_s = \{t \in W; sRt\}$ *platí, že* $f(X,s) \in W_s$ *nebo* $f(X,s) = \lambda$*. Přitom funkce* f *splňuje následující podmínky. Nechť* X, Y *jsou podmnožiny množiny* W *a* $s \in W$*. Pak platí:*

(1) Pokud $f(X,s) \neq \lambda$*, pak* $f(X,s) \in X \cap W_s$*.*

(2) Pokud $f(X, s) = \lambda$, pak $X \cap W_s = \varnothing$.

(3) Pokud $s \in X$, pak $f(X, s) = s$.

(4) Pokud $f(X, s) \in Y$ a $f(Y, s) \in X$, pak $f(X, s) = f(Y, s)$.

Podmínky (1)-(4) odpovídají obecným podmínkám kladeným na výběrové funkce, které jsem neformálně popsal v oddílu 6.3. Dalším krokem je vymezení sémantických podmínek pro jazyk L relativně vůči světům v daném modelu. Nechť $\mathcal{M} = \langle W, R, f, \lambda, V \rangle$ je model Stalnakerovy sémantiky. $||\varphi||$ bude značit množinu těch světů z W, v nichž je formule φ pravdivá. Z definice stanovíme, že v absurdním světě λ je pravdivá každá formule jazyka L. Pro ostatní světy platí, že sémantické podmínky pro operátory $\neg, \wedge, \vee$ jsou stejné jako ve standardní kripkovské sémantice – shodují se tedy s podmínkami klasické logiky. Zbývá dourčit podmínku pro implikaci:

$\varphi \to \psi$ je pravdivá v s právě tehdy, když ψ je pravdivá v $f(||\varphi||, s)$.

Nyní je vše nachystáno k vymezení relace vyplývání.

`Definice 6.5.2` *Formule φ vyplývá ve Stalnakerově sémantice z množiny formulí Δ právě tehdy, když φ je pravdivá v každém světě každého modelu $\mathcal{M}$ Stalnakerovy sémantiky, v němž jsou pravdivé všechny formule z Δ.*

Je zřejmé, jak by vypadala definice dalších sémantických pojmů jako logická platnost, logická ekvivalence a konzistence. Tím je Stalnakerova sémantika vymezena. Můžeme nyní nahlédnout, proč jsou v ní platnými např. všechny úsudkové formy, které jsou instancemi následujících schémat:

$\varphi, \varphi \to \psi / \psi,$

$\varphi \to \psi, \varphi \to \chi / \varphi \to (\psi \wedge \chi).$

Předpokládejme, že v nějakém možném světě s nějakého modelu je pravda φ a $\varphi \to \psi$. To znamená, že ψ musí být pravdivá v $f(||\varphi||, s)$. Jelikož však φ je pravdivá v s, $f(||\varphi||, s) = s$. Tedy ψ je pravdivá v s.

Předpokládejme nyní, že v nějakém možném světě s nějakého modelu je pravda $\varphi \to \psi$ a $\varphi \to \chi$. To znamená, že ψ je pravdivá v $f(||\varphi||, s)$ a χ je pravdivá v $f(||\varphi||, s)$. To znamená, že i $\psi \wedge \chi$ je pravdivá v $f(||\varphi||, s)$. Tedy $\varphi \to (\psi \wedge \chi)$ je pravdivá v s.

Můžeme také nahlédnout, proč úsudkové formy (a)-(e) uvedené v oddílu 6.1 nejsou vyhodnoceny jako platné:

(a) $q/p \to q$. I když je v daném světě pravdivá q, výběrová funkce nás pro antecedent p může přenést do světa, v němž q pravdivá není.

(b) $\neg p / p \to q$. To, že v daném světě není pravdivá p, nijak neznamená, že q musí být pravdivá ve světě, kam nás zavede výběrová funkce pro antecedent p.

(c) $p \to \neg q / q \to \neg p$. Předpokládejme, že nás výběrová funkce přenese pro argument p ze světa s do světa t, kde neplatí q. Tedy v s je pravdivá formule $p \to \neg q$. Nic ale nebrání tomu, aby nás zároveň stejná funkce přenesla pro argument q do (nějakého vzdálenějšího) světa s, kde platí p. V takovém případě není v s pravdivá formule $q \to \neg p$.

(d) $q \to r, p \to q / p \to r$. Předpokládejme, že výběrová funkce f nás pro argument p přenese z s do t, kde je pravdivá q. Pro argument q nás přenese z s do u, kde je pravdivá r. Tedy v s jsou pravdivé obě formule $q \to r$ i $p \to q$. Není ale nijak vynuceno, že $t = u$ a v t nemusí platit r. V takovém případě v s neplatí $p \to r$.

(e) $p \to q / (p \wedge r) \to q$. To, že q je pravdivá ve světě, kam nás přenese výběrová funkce pro argument p, neznamená, že je pravdivá i ve světě, kam nás přenese výběrová funkce pro argument $p \wedge r$.

Povšimněme si též, že Stalnakerova implikace je částečně pravdivostně funkční, totiž pouze v prvních dvou řádcích tabulky. To koresponduje s dojmem, že jsou to zejména poslední dva řádky tabulky materiální implikace, které lze považovat za problematické.

φ	ψ	$\varphi \to \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	?
0	0	?

Když je antecedent pravdivý, tak výběrová funkce vybere aktuální svět a implikace je pravdivá nebo nepravdivá podle toho, zda je pravdivý nebo nepravdivý konsekvent. Když je však antecedent nepravdivý, nelze na základě pravdivostní hodnoty konsekventu určit pravdivostní hodnotu implikace, neboť ta se vyhodnocuje podle toho, jakou má konsekvent pravdivostní hodnotu ve vybraném možném světě, který v tomto případě není světem aktuálním.

Je-li úsudek platný podle Stalnakerovy logiky, je platný též v klasické logice. Z každého protipříkladu klasické logiky pro danou formu lze totiž jednoduše vytvořit model Stalnakerovy sémantiky, který je též protipříkladem k této formě. V tomto smyslu je Stalnakerova logika oslabením klasické logiky. Uvidíme v oddílu 6.7, že oslabuje klasickou logiku velmi výrazným způsobem. Přesto Stalnakerova logika není ani silnější ani slabší než logiky striktní implikace $S4$ a $S5$. V nich platí např. paradoxy druhé skupiny z oddílu 4.8, které neplatí ve Stalnakerově logice. Naopak, jak již bylo zmíněno, ve Stalnakerově logice je platná každá úsudková forma tvaru

$$\neg(\varphi \to \psi)/\varphi \to \neg\psi,$$

což neplatí z hlediska logik striktní implikace. Za předpokladu, že φ není nemožné, tj. že v daném světě neplatí $\varphi \to \neg\varphi$, získáme dokonce ekvivalenci formulí $\neg(\varphi \to \psi)$ a $\varphi \to \neg\psi$. Negace implikace se z perspektivy Stalnakerovy logiky jeví jako podmíněná negace. K plausibilitě tohoto vztahu se ještě vyjádřím v oddílu 12.2.

Stalnakerova logika jakožto celek sice není ani slabší ani silnější než logiky striktní implikace, avšak ze sémantiky samotné je patrné, že dává smysl říci, že striktní implikace je silnější než Stalnakerova implikace, a ta je zase silnější než implikace materiální. Když konsekvent platí v každém dosažitelném možném světě, ve kterém platí antecedent, tak platí i ve světě vybraném. A platí-li konsekvent ve světě vybraném, pak v aktuálním světě buďto neplatí antecedent, anebo – platí-li v aktuálním světě antecedent – platí v něm i konsekvent, neboť v tomto případě je vybraným světem právě svět aktuální.

6.6 Deduktivní systém Stalnakerovy logiky

Deduktivní aparát (hilbertovského typu) pro Stalnakerovu logiku, resp. její predikátovou verzi, byl vypracován v (Stalnaker & Thomason, 1970). Ekvivalentní systém přirozené dedukce, jehož verzi představím v tomto oddílu, byl zaveden v (Thomason, 1970). Formulujeme-li takovýto kalkul pro jazyk L, získáme systém, který je – podobně jako v případě logiky striktní implikace – téměř identický se systémem přirozené dedukce klasické logiky, pouze dojde k jisté modifikaci introdukčního pravidla pro implikaci. Systém lze definovat takto:

konjunkce	EK: (i) $\varphi \wedge \psi/\varphi$ (ii) $\varphi \wedge \psi/\psi$	IK: $\varphi, \psi/\varphi \wedge \psi$
disjunkce	ED: $\varphi \vee \psi, [\varphi/\chi], [\psi/\chi]/\chi$	ID: (i) $\varphi/\varphi \vee \psi$, (ii) $\psi/\varphi \vee \psi$
implikace	EI: $\varphi \to \psi, \varphi/\psi$	II^s: $[\varphi/\psi]^s/\varphi \to \psi$
negace	OS: $\varphi, \neg\varphi/\bot$	ND: $[\neg\varphi/\bot]/\varphi$

Modifikované introdukční pravidlo pro implikaci II^s funguje rámcově standardním způsobem: Implikaci $\varphi \to \psi$ odvodíme tak, že odvodíme ψ z hypotetického předpokladu φ. Podobně jako v případě striktní implikace ale nemůžeme v rámci odvození ψ z φ využívat všechny formule, které jsme měli k dispozici předtím, než jsme stanovili hypotetický předpoklad φ.

Předpokládejme tedy, že chceme pomocí pravidla II^s odvodit formuli $\varphi \to \psi$. Bude pohodlné, zavedeme-li si tuto terminologii: Vnitřkem odvození budu mínit odvození ψ z hypotetického předpokladu φ. Vnějškem odvození budu mínit ty formule, které jsme měli k dispozici, než jsme učinili hypotetický předpoklad φ. Otázkou tedy je, jak může vnitřek odvození interagovat s vnějškem a co z vnějšku odvozní můžeme použít v jeho vnitřku. V kalkulu přirozené dedukce pro klasickou logiku jsme mohli libovolnou formuli z vnějšku použít či přenést do vnitřku. V kalkulu přirozené dedukce pro striktní implikaci jsme mohli takto použít či přenést jen určité specifické formule. V případě Stalnakerovy logiky nemůžeme přenést žádnou formuli z vnějšku do vnitřku odvození. Některé formule však můžeme přesto určitým způsobem použít. Povolené kroky jsou popsány následujícími čtyřmi pravidly. Kritický krok dovození, který uvedená pravidla legitimují, je krok 6 v případě (a)-(c) a krok 8 v případě (d).

$$
\text{(a)}\quad
\begin{array}{r|l}
1 & \varphi \to \chi \\
2 & \vdots \\
3 & \quad \ddots \\
4 & \quad\quad \varphi \qquad \text{hypotetický předpoklad} \\
5 & \quad\quad \vdots \\
6 & \quad\quad \chi \\
7 & \quad\quad \vdots \\
8 & \quad\quad \psi \\
9 & \quad \varphi \to \psi \qquad \text{z 4-8 užitím pravidla II}^s
\end{array}
$$

$$
\text{(b)}\quad
\begin{array}{r|l}
1 & \neg\chi \to \chi \\
2 & \vdots \\
3 & \quad \ddots \\
4 & \quad\quad \varphi \qquad \text{hypotetický předpoklad} \\
5 & \quad\quad \vdots \\
6 & \quad\quad \chi \\
7 & \quad\quad \vdots \\
8 & \quad\quad \psi \\
9 & \quad \varphi \to \psi \qquad \text{z 4-8 užitím pravidla II}^s
\end{array}
$$

	1	$\neg(\varphi \to \chi)$	
	2	$\vdots$	
	3	$\ddots$	
	4	φ	hypotetický předpoklad
(c)	5	$\vdots$	
	6	$\neg\chi$	
	7	$\vdots$	
	8	ψ	
	9	$\varphi \to \psi$	z 4-8 užitím pravidla II^s
	1	$\varphi \to \xi$	
	2	$\xi \to \varphi$	
	3	$\xi \to \chi$	
	4	$\vdots$	
	5	$\ddots$	
(d)	6	φ	hypotetický předpoklad
	7	$\vdots$	
	8	χ	
	9	$\vdots$	
	10	ψ	
	11	$\varphi \to \psi$	z 6-10 užitím pravidla II^s

Tím je kalkul jednoznačně vymezen. Je třeba poznamenat, že když učiníme hypotetický předpoklad φ za účelem aplikace pravidla ED či ND, v sémantickém čtení se tím neposouváme ze světa s, ve kterém se nacházíme, pouze hypoteticky předpokládáme, že v *tomto* světě je pravdivá formule φ. Naproti tomu, když učiníme hypotetický předpoklad φ za účelem aplikace pravidla II^s, posouváme se ze světa s do světa $f(||\varphi||, s)$. Korektnost pravidel (a)-(d) je tedy ospravedlněna následujícími úvahami:

(a) Sémantické zdůvodnění pravidla (a) představuje v podstatě jen zopakování sémantické podmínky pro implikaci. Pokud je formule $\varphi \to \chi$ pravdivá ve světě s, pak je formule χ pravdivá ve světě $f(||\varphi||, s)$.

(b) Pokud je formule $\neg\chi \to \chi$ pravdivá ve světě s, znamená to, že je formule χ pravdivá v každém světě dosažitelném z s, tedy i ve světě $f(||\varphi||, s)$.

(c) Pokud je formule $\neg(\varphi \to \chi)$ pravdivá ve světě s, znamená to, že formule χ není pravdivá ve světě $f(||\varphi||, s)$. V tomto světě je tedy pravdivá formule $\neg\chi$.

(d) Poslední pravidlo je ospravedlněno podmínkou (4) z definice 6.5.1. Předpokládejme, že ve světě s jsou pravdivé formule $\varphi \to \xi$, $\xi \to \varphi$, $\xi \to \chi$. Dle podmínky podmínkou (4) z definice 6.5.1 to znamená, že $f(||\varphi||, s) = f(||\xi||, s)$. Jelikož χ je pravdivá v $f(||\xi||, s)$, musí být též pravdivá v $f(||\varphi||, s)$.

Pro ilustraci ukáži, jak lze v tomto kalkulu odvodit formuli

$$(p \to (q \vee r)) \supset ((p \to q) \vee (p \to r)),$$

kde $\supset$ je materiální implikace definovaná pomocí negace a konjunkce. Tam, kde při odvození odkazuji na klasickou logiku, míním tím, že lze odvození provést stejně jako v klasické logice bez užití introdukčního pravidla pro implikaci.

1	$(p \to (q \vee r)) \wedge \neg((p \to q) \vee (p \to r))$	hyp
2	$p \to (q \vee r)$	1 EK
3	$\neg((p \to q) \vee (p \to r))$	1 EK
4	$\neg(p \to q)$	3 klasická logika
5	$\neg(p \to r)$	4 klasická logika
6	p	hyp
7	$q \vee r$	2,6 pravidlo (a)
8	$\neg q$	4,6 pravidlo (c)
9	r	7,8 klasická logika
10	$p \to r$	6-9 II^s
11	$\perp$	5,10 OS
12	$\neg((p \to (q \vee r)) \wedge \neg((p \to q) \vee (p \to r))$	1-11 IN

Jak bylo zdůvodněno v (Thomason, 1970) s odkazem též na výsledky v (Stalnaker & Thomason, 1970), uvedený kalkul je nejen korektní, ale i úplný vůči sémantice Stalnakerovy logiky.

Pozoruhodnou okolností je, že Stalnakerova sémantika byla filosoficky motivována Ramseyho testem, který zhruba odpovídá kondicionálnímu důkazu

$$[\varphi/\psi]/\varphi \to \psi$$

a sémantickému principu, který kondicionální důkaz ospravedlňuje:

$$\chi_1, \ldots, \chi_n \models \varphi \to \psi \text{ právě tehdy, když } \chi_1, \ldots, \chi_n, \varphi \models \psi$$

Právě tento princip ale v Stalnakerově logice neplatí, což právě koresponduje s tím, že introdukční pravidlo pro implikaci je třeba určitým způsobem omezit.

6.7 Zhodnocení Stalnakerovy logiky

Z hlediska paradoxů materiální implikace je Stalnakerova logika úspěšným projektem, neboť v ní neplatí žádná z problematických úsudkových forem uvedených v oddílu 4.8. Téměř automaticky vyvstává námitka, že za to platíme příliš vysokou cenu, neboť tato logika oslabuje klasickou logiku příliš. Vyhodnocuje totiž jako neplatné některé velmi plausibilní úsudkové formy. Zejména pak

$$p \vee q / \neg p \to q,$$

$$(p \vee q) \to r / (p \to r) \wedge (q \to r),$$

$$p \to (q \to r) / (p \wedge q) \to r.$$

Stalnaker (1975) explicitně reaguje na fakt, že jeho logika vyhodnocuje jako logicky neplatnou první z uvedených úsudkových forem. Domnívá se, že tato forma není sice logicky platná, ale přesto je pragmaticky přijatelná v tom smyslu, že v každém kontextu, kde je tvrditelný předpoklad úsudku této formy, je tvrditelný i jeho závěr. V takových kontextech, kde je tvrditelná věta *A nebo B*, musí být z pragmatického hlediska otevřená možnost, že je pravda *A a ne-B* a – což je zde podstatné – otevřená možnost, že je pravda *Ne-A a B*. Ale nemůže být otevřená možnost, že *Ne-A a ne-B*. A v takovýchto kontextech, říká Stalnaker, je také tvrditelný indikativní kondicionál *Pokud ne-A, B*. Přesto však samotná pravdivost věty *A* v aktuálním světě nijak negarantuje pravdivost kondicionálu *Pokud ne-A, B*, i když garantuje pravdivost věty *A nebo B* (nikoli však ještě její tvrditelnost v daném kontextu).

Stalnakerův postup je tedy v tomto případě inverzní vůči Griceovu postupu, který představím v příští kapitole. Stalnaker hájí slabou logiku a některé úsudkové formy považuje za logicky neplatné, ale pragmaticky přijatelné. Grice hájí silnou (klasickou) logiku a některé úsudkové formy pak identifikuje jako logicky platné, avšak pragmaticky nepřijatelné.

6.8 Shrnutí

V této kapitole jsem představil Stalnakerovu logiku kondicionálních vět ze sémantického i syntaktického hlediska. Tato logika je založena na představě, že kondicionál je pravdivý, když jeho konsekvent je pravdivý v tom možném světě, v němž je pravdivý antecedent a který se jinak nejvíce podobá aktuálnímu světu. Stalnakerova sémantika byla nejprve zavedena s cílem modelovat subjunktivní kondicionály, ale později tuto analýzu Stalnaker vztáhl i na indikativní kondicionály. Rozdíl mezi indikativními a subujunktivními kondicionály pak řeší mimo sémantiku – tedy na pragmatické úrovni. Jde o to, že indikativní kondicionály respektují hranice kontextové množiny (množiny možných světů, které jsou kompatibilní s presupozicemi kontextu), zatímco subjunktivní kondicionály sahají za tyto hranice. Kalkul přirozené dedukce pro Stalnakerovu logiku získáme tak, že vezmeme kalkul klasické logiky a specifickým způsobem omezíme introdukční pravidlo pro implikaci.

Kapitola 7

Pragmatická obhajoba materiální implikace

V kapitole 4 jsem uvedl jak teoretické důvody pro užití klasické logiky při analýze kondicionálních vět, tak i zdrcující protipříklady, které od přijetí klasické logiky odrazují a motivují k hledání alternativních systémů, jako je třeba logika striktní implikace či Stalnakerova logika. Argumenty uvedené v oddílu 4.9 a nedostatky alternativních teorií (viz oddíly 5.6 a 6.7) ukazují, že stojí za to pokusit se klasickou logiku obhájit, i přes tyto zdrcující protipříklady. V této kapitole představím dvě významné strategie, jak bránit klasickou logiku před zjevnými protipříklady. Autory těchto obranných manévrů jsou Paul Grice a Frank Jackson. V obou případech bude třeba zohlednit vedle sémantické roviny též rovinu pragmatickou. Tím se dostane do hry téma, které bude hrát klíčovou roli v další části práce.

7.1 Konverzační implikatury

V učebnicích se setkáme s rozdělením na stoupence tzv. filosofie ideálního jazyka, kam bývá obvykle řazen raný Wittgenstein, Rudolf Carnap a Bertrand Russell, a stoupence filosofie přirozeného jazyka, jakými byli vedle pozdního Wittgensteina především představitelé tzv. Oxfordské školy – jmenovitě John Austin, Gilbert Ryle, Peter Strawson a John Searle. Pro první z obou skupin je charakteristické nahlížet jazyk skrze nějaký idealizovaný formální aparát (řekněme klasické logiky). Neshoduje-li se pak tento aparát s přirozeným jazykem, tím hůře pro přirozený jazyk. V uměle vytvořeném jazyce, který máme zcela pod kontrolou, nalézáme inferenční vzorce vysoké obecnosti, které dohromady tvoří kompaktní systém. Takový přesný jazyk pak může být pokládán za vhodný vědecký nástroj – spolehlivější než nedokonalý jazyk přirozený. Naproti tomu se filosofové přirozeného jazyka domnívají, že projekt suplování přirozeného jazyka nějakým jazykem umělým je neuskutečnitelný. Tito autoři respektují obyčejný jazyk s veškerou jeho vágností a nepravidelností. Snaží se zachytit méně obecné, hůře vymezitelné inferenční vzorce, jež se projevují v běžném použití běžných výrazů.

Paul Grice se zdá být na první pohled typickým filosofem přirozeného jazyka. Může pak být překvapivé, povšimneme-li si, že důležitým bodem jeho filosofie jazyka je úplná identifikace významu přirozených výrazů *a*, *nebo*, *jestliže*, *není pravda, že* s významem formálních výrazů $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$, jak je stanoven klasickou logikou. Tím se vymezuje proti názoru, na kterém se do jisté míry mohou shodnout obě uvedené skupiny filosofů, totiž že jsou zde dvě různé logiky, na jedné straně exaktní formální logika „ideálního" jazyka, jehož výrazy mají jednoznačně vymezený význam, a na druhé straně určitá vágní neformální logika přirozeného jazyka, jejíž usuzovací pravidla si nemohou činit nárok na absolutní obecnost a připouštějí mnoho výjimek. Podle Grice je formální logika logikou přirozeného jazyka.

Grice se tak stal hlavní postavou hájící tezi, že význam indikativního kondicionálního spojení je adekvátně vymezen pravdivostní tabulkou klasické výrokové logiky. Zdání rozdílu a možné protipříklady zde vznikají, když se nevezmou v úvahu jisté teoreticky popsatelné obecné principy komunikace, které ovlivňují způsoby užívání logických spojek v jistých kontextech, aniž by však modifikovaly význam a od něj odvozenou logiku těchto spojek, která je podle Grice totožná s logikou klasickou. Jeho argumentace v této věci je aplikací jeho slavné, obecné teorie konverzačních implikatur, se kterou se seznámíme v tomto oddílu.

Grice (1967) předpokládá, že výrazy mají určitý konvenčně stanovený obsah či význam. Z dané výpovědi můžeme odvodit informace na základě obsahu výrazů vyskytujících se v této výpovědi. Tak např. řekne-li mi někdo, že Tomáš je Brně, mohu z obsahu této výpovědi odvodit, že Tomáš není v Německu. Je však zcela obvyklé, že z výpovědi odvozujeme i to, co ve významu užitých slov není nijak obsaženo. Z Karlovy výpovědi *Václav Havel byl dobrý prezident* např. odvodíme, že Karel je přesvědčen, že Václav Havel byl dobrý prezident. Avšak ze samotného obsahu věty *Václav Havel byl dobrý prezident* nijak nevyplývá věta *Karel je přesvědčen, že Václav Havel byl dobrý prezident.*

V tomto smyslu se v jazyce vyskytují dvě vrstvy toho, co všechno pronesení nějaké věty implikuje. První vrstva je dána čistě významem slov, druhá faktem užití slov v jistém kontextu. Ovšem kontext dourčuje (někdy více, někdy méně – ale v jisté míře snad téměř vždy), co je danou výpovědí vyjádřeno. Řekne-li Tomáš *Mám hlad*, je obsahem jeho výpovědi, že on – tj. Tomáš – má (v tu a tu dobu) hlad, a ke znalosti toho, co bylo řečeno, je potřeba mít informaci o tom, kdo je mluvčím a v jakém čase k výpovědi došlo. Avšak povšimněme si zde podstatného rozdílu. V tomto případě je přijatelné tvrzení, že věta *Tomáš má hlad* vyplývá z obsahu toho, co Tomáš řekl. Avšak jiné je to s příkladem předchozího odstavce. V obsahu toho, co Karel řekl (ať už tento obsah byl jakkoli dourčen kontextem) nijak nevystupuje informace o Karlově přesvědčení.

Grice tento rozdíl ilustruje na následujícím příkladu: Řekneme-li *Je to Angličan, takže musí být statečný*, doslova tím vyjadřujeme, že věta *Musí být statečný* je odůvodněna větou *Je to Angličan*, neboť to přesně udává význam slova *takže*. Avšak řekneme-li jen *Je to Angličan, musí být statečný*, implikuje to též, že první věta je důvodem druhé, i když to není výslovně vyjádřeno. Uvedu ještě jeden, trochu komplexnější příklad. Představme si, že se zeptám Petra, kde je Tomáš. Petr odpoví *Před chvílí jsem ho potkal a říkal, že jde do knihovny.* Z této odpovědi usoudím, že Petr nemá důvod myslet si, že Tomáš není v knihovně. Předpokládám, že Petr je kooperativní osoba, která mi chce v dané situaci pomoct. Informace o tom, že Tomáš oznámil svůj záměr jít do knihovny, naznačuje, že by mohl být v knihovně, a Petr by jednal velmi nekooperativně, kdyby měl důvod myslet si, že Tomáš v knihovně není – třeba proto, že byl svědkem toho, jak Petr poté, co sdělil svůj záměr jít do knihovny, měl telefonický hovor, díky němuž musel změnit své plány. Avšak pozoruhodné opět je, že tato informace – totiž že Petr nemá důvod myslet si, že Tomáš není v knihovně – nijak nevyplývá z obsahu toho, co Petr řekl. Neexistuje žádný vztah vyplývání mezi obsahy vět:

128. Petr potkal Tomáše, který mu řekl, že jde do knihovny.

129. Petr nemá důvod myslet si, že Tomáš nejde do knihovny.

Tedy větu 129 jsem vyvodil nikoli pouze z obsahu Petrova sdělení, tj. z věty 128, nýbrž z něčeho, co tento obsah překračuje. Právě takovéto inference zakládají možnost, že výpověď může být zavádějící, přestože je pravdivá. A tato možnost ospravedlňuje rozlišení mezi sémantikou a pragmatikou.

Hlavním tématem Griceova textu je vysvětlit mechanismus takovýchto *implikatur*, které Grice označuje jako nekonvenční, neboť nejsou vyvozeny z konvenčního obsahu použitých slov. Významnou podtřídu nekonvenčních implikatur tvoří tzv. konverzační implikatury, které jsou běžnou součástí mezilidské komunikace. Konverzační implikatury jsou založeny na tzv. kooperačním principu, který můžeme formulovat v této podobě:

> Snaž se, aby tvůj konverzační příspěvek byl přiměřený situaci.

Tento princip Grice větví s explicitním poukazem na Kantovu terminologii (která se však vztahuje ke zcela jiné problematice) na čtyři konkrétnější maximy:

(1) Maxima kvantity: Sděluj přiměřené množství informací!

(2) Maxima kvality: Snaž se mluvit pravdu a sděluj jen to, pro co máš dostatek evidence!

(3) Maxima relace: Snaž se, aby tvoje výpověď byla relevantní!

(4) Maxima způsobu: Vyhni se obskurním výrazům, buď stručný a uspořádaný!

Kromě těchto existuje v komunikaci mnoho dalších maxim (např. estetických, sociálních, morálních, atd.), avšak Grice zde zajímají především maximy, které jsou relevantní z hlediska efektivní výměny informací. Tyto maximy lze zobecnit na normy každé efektivní mezilidské interakce. Např. pomáháli osoba X osobě Y s opravou auta, pak pokud Y potřebuje čtyři šrouby, očekává, že mu X podá skutečně čtyři a ne dva či šest šroubů (kvantita) a očekává, že to budou pravé šrouby, ne nějaké gumové či takové, o kterých B ví, že jsou poškozeny (kvalita), očekává dále, že mu nezačne místo šroubů nabízet nějakou zajímavou knihu (relace) a že když mu podá potřebné šrouby, tak mu je dá tak, aby na ně viděl, a neschová je třeba za kolo automobilu (způsob).

Podobně v jazykové komunikaci obvykle očekáváme – nemáme-li nějaký zřetelný důvod domnívat se, že toto očekávání nebude naplněno –, že náš partner nezatajuje relevantní informace, ale ani nesděluje informace, které sám považuje za nadbytečné (kvantita), dále, že má evidenci pro to, co říká (kvalita), a že mluví k aktuálnímu tématu (relace) a snaží se nám informace sdělit pochopitelným způsobem (způsob). Nejen, že toto vše předpokládáme, z těchto předpokladů vyvozujeme závěry. Např. z vyslovené věty *je to Angličan, musí být statečný* usoudíme, že mluvčí si o dané osobě myslí, že je statečná, *protože* je to Angličan či *protože* Angličané jsou stateční, i když co se konvenčního významu týče, nenajdeme ve větě nic, co by toto *protože* udávalo. Je to maxima relace, která nás vede k tomuto závěru. Předpokládáme, že mluvčí vyslovil tyto dvě věty hned po sobě, protože spolu nějak souvisejí, a souvislost, která se nabízí, je ta, že první věta figuruje jako důvod pro druhou. Podobně z věty 128 můžeme usoudit ve výše uvedeném kontextu na větu 129, protože předpokládáme, že Petr jedná v souladu s maximami relace a kvantity a že se nám tedy snaží sdělit relevantní informace v přiměřeném množství.

Takovéto implikatury mají podle Grice poměrně komplikovanou strukturu, kterou lze popsat zhruba takto: Osoba X komunikuje s osobou Y; X vysloví větu A; Y nemá žádný důvod předpokládat, že X nezohledňuje v komunikaci konverzační maximy; avšak vzhledem ke konverzačním maximám může X tvrdit A, jen pokud se domnívá, že B; X ví, že Y rozpozná, že X v dané situaci musí s ohledem na maximy předpokládat, že B (a přitom X ví, že Y ví, že X ví); X neudělá nic, aby zabránil tomu, že Y se domnívá, že X se domnívá, že B; tedy X svou výpovědí konverzačně implikuje B.

7.2 Konverzační implikatury a logické spojky

Nemusíme zde sledovat, jak Grice s pomocí svých maxim a s pomocí rozlišení mezi *něco říkat* a *něco implikovat* vysvětluje takové fenomény, jako je ironie či metafora. Jde nám především o aplikaci této koncepce na problém implikace. Tím se zevrubně Grice zabývá v článku *Indicative conditionals* publikovaném jako součást série textů (Grice, 1967).

Výhrada C. I. Lewise proti materiální implikaci se dá formulovat takto: Součástí obsahu tvrzení *Pokud A, B* není pouze materiální implikace, ale také nějaká dodatečná informace, že A nějak nutně souvisí s B, že B v určitém smyslu vyplývá z A, tedy něco více než jen výraz vhodné kombinace pravdivostních hodnot vět A a B. Označme si takovouto dodatečnou informaci (ať už je to cokoli) jako DI.

Stanovisku, že DI je součástí konvenčního obsahu věty *Pokud A, B* budu říkat *teorie silné implikace*. Rozpracování tohoto stanoviska může mít různé konkrétní podoby od původních systémů C. I. Lewise až po v současné době hojně rozvíjené relevanční logiky, které prosazují tezi, že součást obsahu pravdivého kondicionálu je i sdělení, že jeho antecedent je nějak relevantní vůči konsekventu.[1] Stanovisku, že význam věty *Pokud A, B* je dostatečně adekvátně zachycen tabulkou materiální implikace, budu říkat *teorie materiální implikace*.

Grice posuzuje tyto dvě teorie a argumentuje, že z metodologického hlediska bychom měli dát přednost teorii materiální implikace. Hlavní myšlenkou celé argumentace je, že bychom DI měli chápat spíše jako běžně se vyskytující výsledek konverzační implikatury než jako součást konvenčního významu indikativních kondicionálů. Vhodným kandidátem na konvenční význam je podle Grice pouhá tabulka materiální implikace.

Grice poukazuje na to, že existují kontexty, v nichž se DI vůbec nevyskytuje, a nápadné je, že jsou to právě takové kontexty, kde se systematicky porušují kooperační maximy. Jedná se například o logické úlohy, v jejichž zadání se systematicky zatajují některé relevantní informace. Představme si, že někdo vymýšlí úlohu, v níž je třeba odhalit, kdo má jaké karty. Předpokládejme, že součástí řešení je, že Petr má krále a nemá sedmičku. Tvůrce úlohy zná předem správné řešení, jelikož však jde v tomto kontextu o to dospět

[1] K relevančním logikám viz např. (Mares, 2004), (Routley et al., 1983).

k řešení úvahou, záměrně porušuje konverzační maximy a sdělí informace nepřímo. V úloze pak mohou vystupovat takové věty jako *Pokud Petr má krále, pak má eso, pokud nemá krále, pak má sedmičku.* V těchto kontextech je tvrzení kondicionálů založeno čistě na pravdivostně funkčních důvodech a přítomnost DI zde zcela chybí.

Přijmeme-li Griceův (trochu problematický) předpoklad, že některá užití indikativních kondicionálů nedoprovází vyjádření DI, pak to znamená, že teorie silné implikace v některých případech selhává a není tedy dostatečně obecná. Podle této teorie mají kondicionální věty v kontextech, kde součástí vyjádření není DI, jiný význam než v kontextech, kde ve výpovědi DI identifikovat můžeme. Musíme pak rezignovat na jednotnou koncepci významu indikativních kondicionálů. Grice pokládá za metodologicky výhodnější předložit takovou teorii, která udrží jednotu významu indikativních kondicionálů napříč různými kontexty s tím, že případné odlišnosti v „chování" kondicionálů a jejich citlivost na kontext vysvětlíme spíše pomocí obecných principů komunikace než na základě specifických významů jednotlivých slov. Takovou teorií je právě teorie materiální implikace doplněná o teorii konverzačních implikatur.

Bennett (2003) v této souvislosti mluví o tzv. sémantickém occamismu. Grice sám poukazuje na princip Occamovy břitvy aplikovaný na významy výrazů. Chceme-li určit význam nějakého výrazu, měli bychom to udělat pokud možno co nejúspornějším způsobem a nevkládat do významu specifika objevující se při jednotlivých užitích výrazu. Např. ve větě *Nasedl na kolo a odjel* se zdá, že výraz *a* vyjadřuje časové uspořádání událostí. Co je popsáno ve větě napravo od *a*, časově následuje za tím, co je popsáno ve větě vlevo. Kdybychom tuto podmínku identifikovali jako součást významu výrazu *a*, vyvstal by problém s případy, kdy je *a* použito a o časovou následnost nejde (např. *Země obíhá kolem Slunce a Měsíc obíhá kolem Země*). Museli bychom říci, že *a* v těchto případech znamená něco jiného než *a* ve větě *Nasedl na kolo a odjel*, což je neuspokojivý závěr. Pokud je to možné, je výhodnější vysvětlit přítomnost informace o časové následnosti na základě něčeho takového, jako jsou konverzační implikatury. Stejné je to s přítomností DI v případě kondicionálních vět.

V kontextech, v nichž jde o efektivní výměnu informací a kde tedy platí konverzační maximy, lze přítomnost DI odvodit pomocí následující úvahy. Můžeme předpokládat, že zajímá-li někoho pravdivostní hodnota věty *Pokud A, B*, pak ho zajímají také pravdivostní hodnoty vět A a B. Tvrdit *Pokud A, B* je méně informativní než tvrdit *Není pravda, že A* i než tvrdit B. Pokud by tedy někdo tvrdil *Pokud A, B* v situaci, kdy by např. věděl, že věta A je nepravdivá, pak by se provinil proti maximě kvantity — sděloval by méně informací, než kolik je žádoucí a kolik ví. Chceme-li se vyhnout konfliktu s konverzačními maximami, můžeme tvrzení *Pokud A, B* vyslovit jedině v tom případě, kdy pro něj máme jiné než pravdivostně funkční důvody. Musíme vědět, že nastává jedna z přípustných kombinací pravdivostních hodnot antecedentu a konsekventu, aniž bychom přesně tyto hodnoty znali. To lze v typickém případě tehdy, když existuje nějaká nutná souvislost mezi A a B typu DI. V takovém případě lze tedy DI odvodit v souladu s teorií konverzačních implikatur.

7.3 Zhodnocení Griceova řešení

Je zjevné, jak s pomocí maximy kvantity můžeme vysvětlit, proč jsou problematické základní paradoxy materiální implikace, tj. úsudky typu:

> *B/Pokud A, B.*
>
> *Není pravda, že A/Pokud A, B.*

V běžných případech nás zajímá, jestli platí *Pokud A, B*, jen kvůli tomu, že nás zajímá, jak je to s větami A a B. Mám-li informaci, že B, mám sdělit tuto informaci a nikoli slabší *Pokud A, B*. Podobně, mám-li informaci *Není pravda, že A*. Zdá se nám podivné odvodit *Pokud A, B* z B (resp. z *Není pravda, že A*), protože v typickém případě *Pokud A, B* konverzačně implikuje *Není mi známo, že by B byla pravda* a *Není mi známo, že by A byla nepravda*. Tedy odvodím-li např. *Pokud A, B* z B, odvozuji z B něco, z čeho konverzačně vyplývá, že mi není známo, že B. Takové odvození se jeví jako pragmaticky nepoužitelné.

Domnívám se, že Griceova argumentace míří správným směrem, avšak v té podobě, v jaké ji formuluje Grice, je nepostačující. Některé běžně uváděné paradoxy materiální implikace (zejména ty právě zmíněné) pomocí ní sice dokážeme vysvětlit, ale u jiných není naprosto jasné, jak postupovat. Mám na mysli zejména interakci implikace s disjunkcí či negací, tedy paradoxy materiální implikace III. a IV. skupiny, které jsem formuloval v oddílu 4.8. Vezměme si třeba úsudky tvaru:

> *Není pravda, že pokud A, tak B. Tudíž A.*

Např. úsudek

> Není pravda, že pokud je v místnosti méně než šest lidí, tak je tam více než deset lidí. Tudíž v místnosti je méně než šest lidí.

V takovém případě nám konverzační implikatury nijak nepomohou vysvětlit, proč tento úsudek shledáváme jako závadný. Ostatně sám Grice přiznává, že jeho teorie nepřináší uspokojivé řešení v případě popírání kondicionálních vět (viz Grice, 1989, str. 83). Přesto se domnívám, že každá logická teorie musí být doplněna nějakou pragmatickou teorií v podobném duchu, jak to popisuje Grice.

7.4 Konvenční implikatury a pojem stability

Frank Jackson (1979, 1981) se podobně jako Grice pokouší hájit tezi, že tvrdíme-li větu tvaru *Pokud A, B*, netvrdíme nic jiného, než že věty A a B mají jednu ze tří přípustných kombinací pravdivostních hodnot a v tomto smyslu je klasická logika adekvátním nástrojem při analýze indikativních kondicionálů. Jackson se domnívá, že podmínky pravdivosti těchto vět jsou vyčerpávajícím způsobem vymezeny tabulkou materiální implikace. Avšak uvidíme, že na rozdíl od Grice nechce Jackson zcela redukovat význam kondicionálů na tyto pravdivostní podmínky.

Jacksonovo stanovisko je podobné Griceovu v tom, že se snaží vysvětlit paradoxy materiální implikace s odkazem na podmínky tvrditelnosti. Zcela esenciální, nutnou (avšak ne obecně postačující) podmínkou tvrditelnosti nějaké věty A je pro Jacksona vysoká subjektivní pravděpodobnost, kterou větě A musíme připisovat, abychom byli oprávněni ji tvrdit. To ostatně koresponduje s Griceovou maximou kvality. Než představím samotnou Jacksonovu teorii, podívejme se, proč Jackson není spokojen s Griceovým řešením či obecně s typem řešení, které se odkazuje na maximu kvantity. V (Jackson, 1979) jsou uvedeny následující důvody.

1. Tvrzení negace antecedentu má mít z hlediska maximy kvantity v rámci Griceova vysvětlení přednost před tvrzením celé implikace, pokud pro toto tvrzení máme dostatek evidence. Avšak tento důležitý článek Griceovy argumentace, zdá se, neplatí univerzálně. Jsou případy, kdy je pravděpodobnost negace antecedentu velmi vysoká, a přesto může být v daném kontextu neproblematické tvrdit celou implikaci, jako např. v případě věty

130. Pokud Slunce náhle zmizí, Země se octne během chvíle v temnotě.

2. Podobně někdy může být vhodné tvrdit kondicionální větu, i když její konsekvent je vysoce pravděpodobný. Můžeme tak např. bez problémů říci (zde uvádím vlastní příklad)

131. Na výlet pojedeme, ať už bude jakékoli počasí. To znamená, že pokud bude hezky, tak pojedeme, a pokud bude pršet, tak taky pojedeme.

3. Důležitým důvodem je, že řešení založené na maximě kvantity nechává otevřenou otázku, proč se tak výrazně může lišit míra tvrditelnosti u logicky

ekvivalentních vět. Např. věty tvaru *Není pravda, že A, a pokud A, tak B* a *Není pravda, že A, a pokud A, tak C* jsou z hlediska klasické logiky logicky ekvivalentní – obě jsou ekvivalentní větě *Není pravda, že A*. Avšak první z následujících vět se co do tvrditelnosti velmi liší od druhé.

132. Slunce zítra opět vyjde a pokud ne, tak to pro nás nebude mít žádný zvláštní důsledek.

133. Slunce zítra opět vyjde a pokud ne, tak náš svět zanikne.

4. Úsudek od *A* k *A nebo B* se nezdá být tak kontroverzní jako úsudek od *Není pravda, že A* k *Pokud A, B*. Podle vysvětlení opírajícího se o maximu kvantity by však tyto úsudky měly vyjít nastejno.

Jackson se z těchto důvodů domnívá, že vysvětlení založené na konverzačních maximách je nepostačující. Paradoxy materiální implikace nemůžeme spolehlivě odvysvětlit pomocí obecných principů efektivní komunikace, jejichž důsledkem jsou konverzační implikatury. Jackson tedy nabízí alternativní teorii, která se opírá o dva klíčové pojmy. Jednak se jedná o pojem *konvenční implikatury* v kontrastu ke konverzačním implikaturám. Dále pak pojem, pro který budu používat termín *stabilita* (Jackson používá v originále slovo *robustness*).

Co jsou to konvenční implikatury, lze nejsnáze vysvětlit na prototypickém příkladu výrazu *ale* a jeho sémantické odlišnosti od výrazu *a*. Téměř všichni se shodují v konstatování, že věty *A a B* a *A, ale B* mají stejné podmínky pravdivosti – jsou pravdivé právě tehdy, když jsou pravdivé obě věty *A* i *B*. To je vysvětleno třeba také v (Frege, 1918). Avšak na rozdíl od *a*, užití výrazu *ale* signalizuje, že je zde nějaký kontrast či rozpor (avšak nikoli logický rozpor) jako je tomu např. u vět

134. Soupeř byl lepší, ale zápas jsme nakonec vyhráli.

V typickém případě signalizujeme užitím výrazu *ale*, že existuje nějaký kontrast mezi větami, které tímto výrazem spojujeme. Tak je tomu i u věty 134. To však není pravidlem, jak přesvědčivě dokládá Jackson (1979). Zvažme příklad:

135. Petr mívá dobré přednášky, ale zrovna je v Americe.

Tuto větu můžeme vyslovit v diskuzi o tom, jakého přednášejícího pozvat. Není zde žádný kontrast mezi spojovanými větami, ale signalizuje se zde kontrast mezi Petrovým pobytem v Americe a potřebou jeho dostupnosti v případě, že by byl zvaným přednášejícím.

Podstatné je, že tento kontrast, ať už se týká čehokoli, není ve větě spolutvrzen. Řeknu-li *A, ale B*, neříkám tím *A a B a existuje zde nějaký kontrast.*

V takovém případě by totiž absence kontrastu vedla ke zjevné nepravdivosti věty. Tak tomu ale není, jak lze ilustrovat třeba na následujícím příkladě, kde se žádný kontrast nevyskytuje:

136. Soupeř byl lepší, ale nakonec vyhrál.

O takové větě bychom v situaci, kdy soupeř byl lepší a vyhrál, neřekli, že je nepravdivá, ale souhlasili bychom, že není vhodné takovou větu tvrdit. Z toho je patrné, že signalizace kontrastu se neodehrává na úrovni podmínek pravdivosti, nýbrž na úrovni podmínek tvrditelnosti. Zároveň však tato signalizace souvisí se specifickým významem samotného výrazu *ale* a nelze ji nijak vysvětlit na úrovni obecných principů komunikace. Jinými slovy, tato signalizace je konvenční, nikoli konverzační implikatura. Můžeme tedy říci, že věty *A a B* a *A, ale B* mají stejné podmínky pravdivosti, avšak přesto se liší co do významu, neboť mají odlišné podmínky tvrditelnosti. V tomto pojetí je tedy třeba zohlednit podmínky tvrditelnosti při specifikaci významu daného výrazu.

Druhým klíčovým pojmem vedle pojmu konvenční implikatury je pojem stability. Předpokládejme, že nová informace I zásadním způsobem snižuje naše přesvědčení, že A, ale nemá významný dopad na naše přesvědčení, že B. V takové situaci řekneme, že B je stabilní vzhledem k I, zatímco A není stabilní vzhledem k I, což můžeme ilustrovat následujícími větami:

A Volby vyhraje strana X.

B Zcela bezvýznamná strana Y se nedostane do parlamentu.

I Vyšlo najevo, že X je úzce napojena na ruskou mafii.

Klíčové je, že máme jazykové prostředky, které signalizují stabilitu nějaké věty vůči dané informaci. Pojem stability pak figuruje v podmínkách tvrditelnosti. Pro ilustraci uvádí Jackson výraz *nicméně*, který sice přispívá k podmínkám tvrditelnosti, ale neovlivňuje podmínky pravdivosti. Věta *Nicméně A* je pravdivá právě tehdy, když je pravdivá věta A. Výraz *nicméně* v této větě signalizuje stabilitu věty A vzhledem k tomu, co bylo řečeno dříve. Signalizace podobného druhu výrazně usnadňují porozumění danému sdělení.

7.5 Konvenční implikatury a logické spojky

Jackson se domnívá, že je konvenční součástí významu logických spojek, že při jejich použití dochází na úrovni tvrditelnosti k různým signalizacím. Tvrdíme-li *A nebo B*, naznačujeme stabilitu disjunkce vzhledem k negacím obou disjunktů. Dle Jacksona jsou podmínky pravdivosti *A nebo B* dostatečně vymezeny pravdivostní tabulkou klasické logiky. Podmínky tvrditelnosti lze specifikovat takto:

(i) Pravděpodobnost *A nebo B* je dostatečně vysoká.

(ii) Pravděpodobnost *A nebo B* zůstane dostatečně vysoká, dozvíme-li se, že věta *A* je nepravdivá.

(iii) Pravděpodobnost *A nebo B* zůstane dostatečně vysoká, dozvíme-li se, že věta *B* je nepravdivá.

Na tomto příkladě jsou též vidět meze vysvětlení založených pouze na maximě kvantity. Předpokládejme pro jednoduchost, že ČSSD a KSČM jsou jediné levicové strany, které lze volit. Dále předpokládejme, že je z kontextu naprosto jasné, že Petr by nikdy nevolil KSČM. V takovém případě může být tvrditelná věta 137, nikoli však věta 138, přestože z hlediska maximy kvantity tyto věty vyjdou nastejno.

137. Petr bude volit levicovou stranu.

138. Petr bude volit ČSSD nebo KSČM.

Důvodem, který by zde identifikoval Jackson, je, že užitím věty 138 signalizujeme něco nepravdivého, totiž že tato věta je stabilní vzhledem k větě *Petr nebude volit ČSSD*. K žádné takové signalizaci nedochází, užijeme-li místo toho větu 137.

Nyní se konečně dostáváme ke kondicionálním větám. Jak bylo řečeno, Jackson se domnívá, že podmínky pravdivosti jsou adekvátně zachyceny tabulkou materiální implikace. Podmínky tvrditelnosti pak vypadají takto: Tvrdíme-li *Pokud A, B*, tvrdíme materiální implikaci a signalizujeme, že je stabilní vzhledem k antecedentu. Kondicionál *Pokud A, B* je tvrditelný, když

(i) Pravděpodobnost materiální implikace *Ne-(A a ne-B)* je dostatečně vysoká.

(ii) Pravděpodobnost této materiální implikace zůstane dostatečně vysoká i tehdy, dozvíme-li se, že platí antecedent *A*.

Tedy tvrdíme-li indikativní kondicionál, tvrdíme pravdivost odpovídající materiální implikace a signalizujeme, že je tato materiální implikace stabilní vůči antecedentu. Pozoruhodné je, že tvrzení kondicionálu nesignalizuje stabilitu vůči negaci konsekventu. To ilustrují kondicionály, kterými jsme se zabývali v oddílu 1.2:

139. Pokud máš chuť, na stole jsou sušenky.

140. Pokud pachatel zanechal nějaké stopy, pak žádné zjevné.

141. Pokud přijdu pozdě, tak ne o moc.

142. Jestli se bojí, tak to není poznat.

V každém z těchto případů vede dodatečná informace, že konsekvent je nepravdivý, k odmítnutí celého kondicionálu. Jsme-li např. přesvědčeni, že platí 140, a zjistíme-li pak, že pachatel zanechal zjevné stopy, jsme nuceni od svého původního přesvědčení ustoupit.

Jacksonova koncepce připomíná Adamsovu diagnózu rozdílu mezi indikativními a subjunktivními kondicionály, kterou jsem vysvětlil v oddílu 3.1. Podmínky tvrditelnosti zdůrazňují centrální význam odvozovacího pravidla modus ponens pro indikativní kondicionály. Garantují právě jeho použitelnost: Pokud jsem v situaci, kdy jsem oprávněn tvrdit *Pokud A, B* a obdržím informaci A, mohu použít modus ponens a odvodit B, neboť mám nyní k dispozici jak materiální implikaci, tak i její antecedent. Podmínky tvrditelnosti však negarantují ve stejném smyslu použitelnost pravidla modus tollens (které však stále přenáší pravdivost).

7.6 Zhodnocení Jacksonova řešení

Také Jackson formuluje svoji teorii zejména proto, aby vysvětlil základní paradoxy materiální implikace a obhájil tak analýzu založenou na klasické logice. Podívejme se, jak takové vysvětlení může vypadat. Nejprve se podívejme na „paradoxní" úsudek tvaru

B/Pokud A, B.

Za A a B dosaďme následující věty:

A Vyjde najevo, že strana X je úzce napojena na ruskou mafii.

B V příštích volbách vyhraje strana X.

Předpokládejme, že jsme vysoce přesvědčeni, že B. Ani B, ani materiální implikace *Ne-(A a ne-B)* není stabilní vzhledem k A. V takové situaci bychom byli ochotni tvrdit B, nikoli však *Pokud A, B*.

Nyní k úsudkům tvaru

Není pravda, že A/Pokud A, B.

Za A a B dosaďme nyní tyto věty:

A V příštích volbách vyhrají komunisté.

B Komunisté budou prosazovat pravicovou politiku.

Předpokládejme, že jsme vysoce přesvědčení, že neplatí A. Materiální implikace *Ne-(A a ne-B)* není stabilní vzhledem k A. V takovém případě bychom byli ochotni tvrdit *Není pravda, že A*, ale nikoli *Pokud A, B.*

Přestože tato konkrétní vysvětlení jsou velmi působivá a účinná, neřeší Jacksonova teorie – stejně tak jako Griceova – další paradoxy materiální implikace z oddílu 4.8. Zejména se jedná o úsudky, v nichž jsou kondicionální věty vnořeny do větších větných celků (a v nichž dochází např. k interakci implikace s negací či disjunkcí). Jak uvidíme v další kapitole, sémantický přístup založený na teorii pravděpodobnosti má s těmito větami potíže z jistých principiálních důvodů. Jacksonova koncepce tak nestačí k úplnému obhájení teze, že klasická logika formuluje adekvátní podmínky pravdivosti pro indikativní kondicionály.

7.7 Shrnutí

V této kapitole jsem představil dvě strategie – Griceovu a Jacksonovu –, jak udržet materiální implikaci a vysvětlit její paradoxy (zejména ty základní: pravdivé je implikováno čímkoli a nepravdivé implikuje cokoli). Oba autoři přitom zohledňují rovinu tvrditelnosti. Na základě sémantického occamismu hájí Grice stanovisko, že je třeba modelovat význam implikace přirozeného jazyka co nejúspornějším způsobem. Nejúspornější možností je pak identifikovat tento význam s tabulkou materiální implikace. Řadu jevů, které se vážou k implikaci a které tabulka nepostihuje, lze pak podle Grice vysvětlit na pragmatické úrovni. Např. dojem, že by mělo existovat nějaké nutné spojení mezi antecedentem a konsekventem pravdivého kondicionálu, lze vysvětlit tím, že kondicionál nemůžeme v souladu s maximami efektivní komunikace tvrdit na základě znalosti konkrétních pravdivostních hodnot spojovaných vět, i když musíme při tomto tvrzení vědět, že nějaká vhodná kombinace hodnot nastává. To víme typicky tehdy, když existuje nějaký nutný vztah mezi antecedentem a konsekventem. Z toho plyne, že nutný vztah figuruje při tvrzení kondicionálu jako konverzační implikatura.

Jackson též odlišuje podmínky pravdivosti a podmínky tvrditelnosti kondicionálních vět. Podmínky pravdivosti ztotožňuje s pravdivostní funkcí materiální implikace, avšak na rozdíl od Grice se domnívá, že podmínky pravdivosti nestačí ke specifikaci významu kondicionálů. K významu podstatně přispívají i podmínky tvrditelnosti, které lze popsat takto: Kondicionál je tvrditelný, když máme informaci, že s vysokou pravděpodobností neplatí současně antecedent a negace konsekventu, a tato informace je stabilní vůči antecedentu, tj. nebudeme nuceni ji odmítnout, přijde-li informace, že antecedent platí. Na tomto základě lze vysvětlit, že základní paradoxy sice přenášejí pravdivost, nikoli však tvrditelnost.

Jacksonův pravděpodobnostní přístup je pro nás zároveň určitým přemostěním do další části této práce, v jejíž první kapitole představím Adamsovu logiku, která je založena právě na podmínkách tvrditelnosti, které modeluje s pomocí teorie pravděpodobnosti.

Část III

Epistemický přístup

Kapitola 8

Pravdivost vs. pravděpodobnost

Viděli jsme, že Frank Jackson požadoval, aby součástí specifikace významu kondicionálních vět byly vedle podmínek pravdivosti též podmínky tvrditelnosti. Řada autorů se však domnívá, že kondicionální věty žádné podmínky pravdivosti nemají a jediné, co nám zbývá, jsou pak podmínky tvrditelnosti. To otevírá dveře čistě epistemickému přístupu k sémantické analýze kondicionálních vět. Tato kapitola se zabývá povahou a limity epistemického přístupu založeného na pojmu subjektivní pravděpodobnosti.

8.1 Mají kondicionály podmínky pravdivosti?

Ať už mají kondicionální věty pravdivostní hodnotu či nikoli, jistě je jejich tvrzení někdy více, jindy méně oprávněné. Existuje celá škála přijatelnosti dané kondicionální věty. Věta

143. Pokud přijde více než dvacet lidí, tak přijde více než deset lidí.

se zdá být jistější než věta

144. Pokud podezřelý zločin nespáchal, nebude odsouzen.

a ta je zase jistější než věta

145. Pokud si dnes zlomím nohu, tak zítra uběhnu sto metrů za deset vteřin.

Můžeme říci, že tyto věty mají odlišnou míru přijatelnosti či pravděpodobnosti. Užije-li se v tomto kontextu pojem pravděpodobnosti, míní se tím tzv. subjektivní pravděpodobnost. Termín *subjektivní* zde svádí k názoru, že do logiky zavádíme psychologické pojmy a provinujeme se tím proti její normativní povaze. To je však nedorozumění. Teorie subjektivní pravděpodobnosti, jak ji rozpracoval např. Richard Jeffrey (2004), je čistě normativní disciplína popisující principy racionálního uvažování ve stavu nejistoty.

Připisujeme-li kondicionálním větám subjektivní pravděpodobnost, říkáme tím pouze tolik, že jejich hodnota je relativní vůči zdroji informací, vzhledem k němuž jsou posuzovány. Dva různí lidé se mohou nacházet v různých informačních stavech a v důsledku pak mohou mít oba racionální důvod jednu a tutéž kondicionální větu vyhodnotit zcela opačně. Ilustruji tento efekt na příkladu, který ve volně rekonstruované podobě přebírám od Bennetta (2003, str. 85).

Představme si nádrž, ze které můžeme vypustit vodu buď východním směrem, nebo západním směrem, nebo oběma směry. V budově u nádrže je ovládací zařízení obsahující dva spínače: s_1 a s_2. Není-li zařízení aktivováno, neteče voda v žádném směru. K aktivaci zařízení musí být zapnut alespoň jeden ze spínačů. Je-li zapnut jen spínač s_1, teče voda pouze západním směrem, je-li zapnut jen spínač s_2, teče voda pouze východním směrem, a konečně jsou-li zapnuty oba spínače s_1 i s_2, teče voda oběma směry. Petr je u východní strany nádrže a vidí, že tímto směrem voda neteče. Má dobrý důvod tvrdit kondicionál

146. Pokud je zařízení nyní aktivováno, pak teče voda z nádrže pouze západním směrem.

Pavel je u západní strany nádrže a vidí, že tímto směrem voda neteče. Má dobrý důvod tvrdit kondicionál

147. Pokud je zařízení nyní aktivováno, pak teče voda z nádrže pouze východním směrem.

Avšak věty 146, 147 jsou v jistém smyslu vzájemně nekompatibilní. Nejsou sice rozporuplné podle klasické logiky, ale vzhledem k prostoru možností, který je vymezen popsaným kontextem, se nemůžeme nacházet v situaci, v níž bychom mohli smysluplně a oprávněně tvrdit obě uvedené věty zároveň. Pokud bych dostal informaci od Petra, že platí 146, a od Pavla, že platí 147, správně bych z toho vyvodil, že společný antecedent těchto kondicionálů je nepravdivý a že tedy zařízení není aktivováno. Tím bych však zároveň ztratil oprávnění tvrdit jakýkoli z těchto kondicionálů v jeho indikativní podobě.

Vzájemná nekompatibilita vět 146 a 147 je patrná také z toho, že na otázku

148. Pokud je zařízení aktivováno, teče voda z nádrže západním směrem?

by Petr odpověděl *ano* a Pavel *ne*. Oba by přitom ke své odpovědi měli dobré důvody.

Termín *subjektivní pravděpodobnost* by mohl být možná vhodněji nahrazen termínem *relativní pravděpodobnost* – neboť tato pravděpodobnost je relativní vůči nějakému zdroji informací, což je v opozici k objektivní či absolutní pravděpodobnosti určené samotným stavem světa – ať už tento pojem znamená cokoli, je-li vůbec smysluplný.

Je tedy snad zjevné, že kondicionálům můžeme připisovat subjektivní pravděpodobnosti. Otázkou nyní je, zda lze také kondicionálům smysluplně připisovat pravdivostní hodnoty, tj. zda pro ně existují nějaké podmínky pravdivosti. Dorothy Edgingtonová (1986) předložila přesvědčivý argument, že tomu tak není. Struktura argumentu vypadá takto: Kdyby měla daná kondicionální věta podmínky pravdivosti, pak by pravděpodobnost připsaná této větě musela být pravděpodobnost toho, že její podmínky pravdivosti jsou splněny. Edgingtonová ukazuje, že pravděpodobnost kondicionální věty nemůže být pravděpodobnost toho, že jsou splněny její podmínky pravdivosti (ať už je těmito podmínkami cokoli). Či jinak: Ukazuje, že pro libovolné potenciální podmínky pravdivosti existuje epistemická situace, kdy se rozchází pravděpodobnost, že jsou tyto podmínky splněny, a pravděpodobnost, kterou připíšeme danému kondicionálu. Závěrem je, že kondicionální věty podmínky pravdivosti nemají.[1]

Nejprve Edgingtonová dokládá, že pravděpodobnost kondicionální věty není pravděpodobnost odpovídající materiální implikace. Předpokládejme např., že se chystám hodit (standardní) kostkou. Zvažme otázku, jakou pravděpodobnost připsat v takové situaci větě

149. Pokud padne sudé číslo, bude to dvojka.

Přirozená odpověď zde je, že jedna třetina. Avšak pravděpodobnost odpovídající materiální implikace, tj. věty

150. Nepadne sudé číslo nebo padne dvojka.

jsou dvě třetiny. Tento příklad velmi dobře ilustruje odlišnost pravděpodobnosti kondicionálu a odpovídající materiální implikace. Zároveň motivuje princip, který je známý pod názvem *Adamsova teze:*

> Pravděpodobnost věty *Pokud A, B* je podmíněná pravděpodobnost – tedy pravděpodobnost věty *B* za předpokladu, že platí *A*.

Pro ilustraci Adamsovy teze uvádím ještě Adamsův příklad, v němž ještě více vynikne rozdíl mezi oběma způsoby výpočtu pravděpodobnosti. Představme

[1] Zde nás poněkud zrazuje český termín *pravděpodobnost*, který jakoby indikuje, že má-li něco pravděpodobnost *jedna*, mělo by to mít též pravdivostní hodnotu *pravda*. Tuto jazykovou sugesci je třeba v tomto oddílu ignorovat.

si, že přede mnou leží pečlivě zamíchaný balíček obsahující 52 standardních karet. Chystám se otočit dvě karty. Jakou pravděpodobnost bychom připsali kondicionálu

151. Pokud první karta bude eso, druhá karta bude též eso.

Intuitivně bychom řekli, že pravděpodobnost nebude vysoká. To je ve shodě s výpočtem pravděpodobnosti podle Adamsovy teze. Za předpokladu, že první karta, kterou otočím, bude eso, zbude v balíčku 51 karet a mezi nimi budou tři esa. Tedy pravděpodobnost, že i druhá otočená karta bude eso, je $3/51$, tj. přibližně $0,059$. S tím kontrastuje výpočet pravděpodobnosti odpovídající materiální implikace, tedy pravděpodobnosti věty

152. První karta nebude eso nebo druhá karta bude eso.

Pravděpodobnost toho, že první karta nebude eso, je $48/52$. Pravděpodonost, že první karta bude eso a druhá též, je $4/52 \times 3/51$. Celková pravděpodobnost je tedy $48/52 + 4/52 \times 3/51$, tj. přibližně $0,928$, což je v rozporu s intuicí velmi vysoká pravděpodobnost.

Dorothy Edgingtonová – stejně tak jako Frank Jackson – přijímá Adamsovu tezi a obhajuje ji v mnoha textech.[2] Tato teze mimo jiné koresponduje s pozorováním, že pravděpodobnost implikace se nezdá být přímo závislá na pravděpodobnosti antecedentu. Můžeme tak mít např. vysoce nepravděpodobný kondicionál s vysoce nepravděpodobným antecedentem jako v případě věty:

153. Pokud v příštích volbách vyhrají komunisté, budou prosazovat pravicovou politiku.

Avšak je-li antecedent vysoce nepravděpodobný, pravděpodobnost odpovídající materiální implikace je automaticky vysoká.

Tato pozorování ukazují, že vskutku pravděpodobnost kondicionálu nemůže být ztotožněna s pravděpodobností odpovídající materiální implikace, což představuje závažný argument proti obecnější tezi, že podmínky pravdivosti pro indikativní kondicionály mohou být vymezeny v podobě pravdivostní funkce, jelikož jediná pravdivostní funkce, která zde přichází v úvahu, je funkce materiální implikace.

Pro spor tedy dále spolu s Edgingtonovou předpokládejme, že podmínky pravdivosti indikativních kondicionálů nejsou vymezitelné pomocí pravdivostní funkce. To znamená, že musí nastat alespoň jedna z následujících čtyř situací:

[2] Viz např. (Edgingtonová, 1986, 1995, 2001, 2006).

(1) Kondicionál *Pokud A, B* má pravdivostní podmínky, které nejsou pravdivostně funkční v případě, že A a B jsou pravdivé věty.

(2) Kondicionál *Pokud A, B* má pravdivostní podmínky, které nejsou pravdivostně funkční v případě, že A je pravdivá a B nepravdivá.

(3) Kondicionál *Pokud A, B* má pravdivostní podmínky, které nejsou pravdivostně funkční v případě, že A je nepravdivá a B pravdivá.

(4) Kondicionál *Pokud A, B* má pravdivostní podmínky, které nejsou pravdivostně funkční v případě, že A a B jsou nepravdivé věty.

Dalším úkolem je projít všechny tyto případy a ukázat, že žádný z nich nemůže nastat. Každá z těchto možností totiž předpokládá možnost epistemické situace, která je absurdní. To je důležitý aspekt celého argumentu, který je dobré zdůraznit. Jednotlivé možnosti se nevyvrací na ontické rovině, nýbrž na rovině epistemické.

(1) První situace odpovídá možnosti, že pravdivost obou vět A i B nestačí k určení pravdivostní hodnoty věty *Pokud A, B*. Může tedy nastat situace, kdy

A a B jsou pravdivé, a *Pokud A, B* je také pravdivá,

a může nastat situace, kdy

A a B jsou pravdivé a *Pokud A, B* je nepravdivá.

V tomto ohledu by se věta *Pokud A, B* podobala například větě *B, protože A*, která má také tuto vlastnost: Pravdivost obou vět k pravdivosti celku nestačí – ten může a nemusí být pravdivý podle dalších okolností.

Edgingtonová upozorňuje, že v případě kondicionálních vět je důsledkem takové situace to, že někdo si může být (na základě racionálních důvodů) jistý, že A je pravdivé a že také B je pravdivé, a přitom nemusí mít dostatek informací k tomu, aby určil, zda také *Pokud A, B* je pravdivé. Z druhé strany však lze nahlédnout, že taková situace není možná. Má-li někdo naprostou jistotu, že A i B, pak má i jistotu, že platí B za předpokladu, že platí A (o kterém ví, že je splněn). Má tedy jistotu, že platí *Pokud A, B*.

(2) Vyvrácení druhé situace je nejméně kontroverzní. Ta by totiž znamenala, že pravdivost věty A a nepravdivost věty B neurčuje pravdivostní hodnotu věty *Pokud A, B*. To ale dále znamená, že si někdo může být jist, že A a že není pravda B, a přesto nemusí mít dostatek informací k tomu, aby určil pravdivostní hodnotu věty *Pokud A, B*. To zjevně nemůže nastat. V takové situaci si je jist, že za předpokladu A (o kterém ví, že je splněn) neplatí B.

(3) Třetí situace znamená, že nepravdivost věty A a pravdivost věty B neurčuje pravdivostní hodnotu věty *Pokud A, B*. To však znamená, že může nastat tato situace: Někdo si je jist, že B je pravdivá věta, přitom si však není jist, jak je to s pravdivostní hodnotou věty A, a zároveň nemá dostatek informací k tomu, aby určil pravdivostní hodnotu věty *Pokud A, B*.

Edgingtonová ilustruje absurditu této situace pomocí příkladu. Podstatné je, že tento konkrétní příklad poukazuje na obecný problém, který by se projevil, i kdyby ve hře byly jiné věty. Poukazuje tedy na obecný problém s případem (3). Dejme tomu, že vytýkám Janovi, že neodpověděl na můj dopis. On namítá, že odpověděl. Nevím, zda mu mám věřit. V takové situaci mám dobrý důvod tvrdit:

154. Pokud Jan odeslal odpověď na můj dopis, neobdržel jsem ji.

Avšak podle důsledku třetí situace bychom v takovém případě mohli uvažovat takto: Předpokládejme, že Jan odeslal odpověď. Pak antecedent i konsekvent jsou pravdivé, a tedy i celý kondicionál 154 (za předpokladu, že jsme uznali, že situace 1. byla vyvrácena). Nyní předpokládejme, že Jan moji odpověď neodeslal. V takovém případě je antecedent nepravdivý a konsekvent pravdivý. To však ještě neurčuje hodnotu celého kondicionálu, která závisí na dalších okolnostech, o nichž nemám dostatek informací, a nejsem proto oprávněn tento kondicionál tvrdit. Takovýto způsob uvažování je zjevně absurdní.

(4) Čtvrtá situace znamená, že nepravdivost vět A i B neurčuje pravdivostní hodnotu věty *Pokud A, B*. Zde nás Edgingtonová vybízí, abychom si představili situaci, v níž víme, že A a B mají stejnou pravdivostní hodnotu, ale nevíme jakou. Řekněme třeba, že víme, že Jan a Marie strávili včerejší večer spolu, ale nevíme, jestli šli na večírek. Pak větami A a B mohou být tyto:

A Jan šel na večírek.

B Marie šla na večírek.

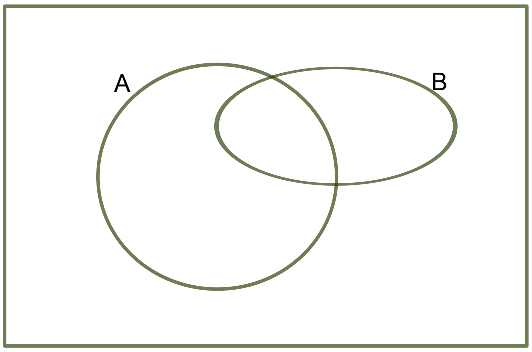
V takové situaci bychom měli být oprávněni tvrdit *Pokud A, B*, tedy

155. Pokud Jan šel na večírek, Marie šla také.

Avšak předpoklad čtvrté situace vede k následující úvaze: Kondicionál 155 je pravdivý, pokud Jan šel spolu s Marií na večírek (a pokud jsme přijali vyvrácení situace 1.). Avšak je také možné, že Jan a Marie na večírek nešli. V takovém případě může být věta 155 nepravdivá v závislosti na dalších okolnostech, o kterých nemám dostatek informací. Nejsem tedy oprávněn větu 155 tvrdit. Tato úvaha je také zjevně absurdní a její absurdita není vázaná na uvedený konkrétní příklad, ale projevila by se stejným způsobem, i kdybychom uvedené věty nahradili nějakými jinými. Tím je tedy vyvrácena i poslední z možností, a celkově tedy to, že kondicionální věty mají podmínky pravdivosti, které nejsou pravdivostně funkční. Jelikož bylo dříve ukázáno, že nemají ani podmínky pravdivosti, které jsou pravdivostně funkční, znamená to, že nemají žádné podmínky pravdivosti.

Edgingtonová závěr svého argumentu interpretuje tak, že kondicionály nevyjadřují propozice. Neexistuje propozice P taková, že tvrzení *Nastává* P by bylo ekvivalentní s podmíněným tvrzením, že nastává B, pokud nastává A. Kondicionální tvrzení obsahuje dva řečové akty: kladení podmínky a tvrzení v rozsahu této podmínky. Edgingtonová říká, že „tato dvojitá ilokuční síla je *ne*redukovatelná“ (Edgingtonová, 1986, str. 5).

Vizuálně lze tuto myšlenku přiblížit tak, že si představíme nějaký prostor otevřených možností (možných světů). Nekondicionálním větám A, B odpovídají nějaké propozice, které jsou reprezentovány jako podmnožiny této množiny možných světů.



Dle toho, jakou část z prostoru tyto propozice zabírají, je určena pravděpodobnost, kterou lze připsat větám A, B. Zároveň je určena podmíněná pravděpodobnost B za předpokladu, že platí A. Stačí se omezit na plochu pokrytou propozicí, kterou vyjadřuje věta A, a ptáme se, jakou část z ní zabírá propozice, kterou vyjadřuje věta B. Tím je dána pravděpodobnost věty *Pokud A, B.* Avšak v prostoru možných světů není žádná propozice, která by odpovídala větě *Pokud A, B.* Žádnou množinu možných světů nemůžeme této větě adekvátně přiřadit.

8.2 Logika pravděpodobnosti

Nemají-li kondicionální věty podmínky pravdivosti, tj. nelze-li jim smysluplně připisovat pravdivostní hodnotu, nedává smysl, abychom relaci vyplývání (vztaženou na jazyk, který kondicionály obsahuje) definovali jako relaci přenášející pravdivost. Je tedy třeba provést revizi základních logických pojmů. Ernest Adams (1965, 1975, 1998) vytvořil alternativní logický systém, v němž standardní kritérium

> Úsudek je logicky platný právě tehdy, když není možné, aby předpoklady byly pravdivé a závěr nepravdivý.

modifikuje tak, že dosazuje namísto pojmů *pravdivosti* a *nepravdivosti* pojmy *pravděpodobnosti* a *nepravděpodobnosti*. V přímočarém přepisu tedy získáváme kritérium

> Úsudek je logicky platný právě tehdy, když není možné, aby předpoklady byly (vysoce) pravděpodobné a závěr (vysoce) nepravděpodobný.

Takovéto kritérium má za cíl reflektovat běžnou úsudkovou praxi, v níž je zcela obvyklé, že usuzujeme z nejistých předpokladů. Je zde potřeba vyhnout se nedorozumění, ke kterému může přítomnost pojmu pravděpodobnosti svádět. Nejde zde o snahu vymezit pravděpodobnostní či induktivní inference tvaru:

> Jelikož $A_1, \ldots, A_n$ jsou pravdivé věty, tak asi platí, že B je také pravdivá.

Jde zde spíše o deduktivní úsudky tvaru:

> Jelikož $A_1, \ldots, A_n$ jsou vysoce pravděpodobné, tak nutně platí, že B je také vysoce pravděpodobná.

Např. víme-li, že Petr se nesnese s Pavlem, a můžeme-li si být téměř jisti, že dnes proto nebudou na večírku oba zároveň, víme-li dále, že Petr dnes téměř jistě přijde, můžeme z toho deduktivně usoudit, že Pavel dnes s vysokou pravděpodobností nepřijde.

Ovšem v uvedené podobě není pravděpodobnostní kritérium logické platnosti obecně spolehlivé, což dokládá tzv. paradox loterie. Řekněme, že v nějaké loterii bylo vytvořeno n losů a jeden z nich má být vylosován jako výherní. Předpokládejme, že n je velmi vysoké číslo, a zvažme úsudek

156. Vyhraje los č. 1 nebo vyhraje los č. 2 nebo … nebo vyhraje los č. $n-1$ nebo vyhraje los č. n, los č. 1 nevyhraje, los č. 2 nevyhraje, …, los č. $n-1$ nevyhraje. Tudíž vyhraje los č. n.

Tento úsudek bychom měli zjevně klasifikovat jako logicky platný. Přitom každá z n premis je vysoce pravděpodobná a závěr je vysoce nepravděpodobný.

S ohledem na paradox loterie a spřízněné jevy Adams pracuje s modifikovanou verzí pravděpodobnostního kritéria, která si vypomáhá pojmem nepravděpodobnosti. Nepravděpodobnost věty je hodnota, kterou získáme, když odečteme pravděpodobnost této věty od jedné.

> Úsudek je logicky platný právě tehdy, když není možné, aby nepravděpodobnost jeho závěru byla vyšší než součet nepravděpodobností jeho předpokladů.

Proti tomuto kritériu již paradox loterie nepředstavuje protipříklad. Cílem tohoto oddílu je rekonstruovat Adamsovo přesné vymezení pravděpodobnostního kritéria pro daný formální jazyk. Začněme jazykem bez kondicionálů. Budeme tedy nejprve pracovat s omezenou verzí jazyka L, kterou budeme nazývat L_1 a kterou získáme tak, že z jazyka L odstraníme implikaci. Formule jazyka L_1 jsou tedy vystavěny z atomických formulí pomocí spojek $\neg, \wedge, \vee$. Pro formule jazyka L_1 budeme používat proměnné $\alpha, \beta, \ldots$

Nyní můžeme přiřadit každé formuli jazyka L_1 pravděpodobnost či, jak můžeme také říkat, stupeň jistoty. Tento stupeň bude reprezentován reálným číslem v uzavřeném intervalu $[0, 1]$. Stupeň jistoty formule α budeme označovat jako $j(\alpha)$. Tedy j je funkce přiřazující formulím reálná čísla mezi nulou a jedničkou.

V praxi jsme si sice jednotlivými větami více či méně jistí, těžko bychom však tuto míru jistoty dokázali jednoznačně charakterizovat nějakým číslem z intervalu $[0, 1]$. Zavedení funkce j je tedy bezpochyby výraznou idealizací. Hodnota této idealizace spočívá v tom, že můžeme specifikovat normativní zákony racionality, kterým by se každá takováto funkce měla podřizovat. Jinými slovy, některé funkce přiřazující větám reálná čísla z intervalu $[0, 1]$ lze apriori vyloučit, jelikož představují iracionální distribuce stupňů jistoty. Např. by bylo iracionální, kdybychom větě A *a* B přiřadili větší stupeň jistoty než větě A.[3]

Na funkci j tedy můžeme klást další podmínky, které (při jisté idealizaci) každá racionální distribuce stupňů jistoty musí splňovat. Jak poznamenává Jeffrey, nejde tedy o to, že by lidé skutečně takto přesně připisovali větám stupně jistoty, jde o to, že každé možné zpřesnění se musí řídit jistými zákony, má-li být racionální (viz Jeffrey, 2004, str. 2). To nás vede k následující oficiální definici.

[3]Porušování těchto normativních pravděpodobnostních zákonů, kterého se lidé systematicky dopouštějí, zkoumali Daniel Kahneman a Amos Tversky. Viz např. (Kahneman, 2011).

`Definice 8.2.1` *Distribuce stupňů jistoty je každá funkce j přiřazující formulím jazyka L_1 reálná čísla z intervalu $[0, 1]$ a splňující tyto podmínky:*

P1 Pokud α je logicky platná, tak $j(\alpha) = 1$.

P2 Pokud α, β jsou logicky ekvivalentní, tak $j(\alpha) = j(\beta)$.

P3 Pokud α, β jsou logicky nekompatibilní, tak $j(\alpha \vee \beta) = j(\alpha) + j(\beta)$.

Logickou platnost, ekvivalenci a nekompatibilitu přitom chápeme ve smyslu klasické logiky.

Podmínky P1-P3 úzce souvisejí s Kolmogorovovými axiomy pravděpodobnosti. Tyto podmínky mají řadu důsledků. Pro ilustraci můžeme odvodit zákon, který se nám bude hodit v oddílu 8.4:

Pokud je α kontradikce klasické logiky, pak $j(\alpha) = 0$.

Jelikož $\neg\alpha \vee \alpha$ je logicky platná a $\neg\alpha, \alpha$ jsou nekompatibilní, dostáváme díky podmínkám $P1$ a $P3$, že $j(\neg\alpha) + j(\alpha) = 1$. Předpokládáme-li navíc, že α je kontradikce, pak $\neg\alpha$ je logicky platná, a tedy podle P1 platí $j(\neg\alpha) = 1$. Z toho už lehce plyne, že $j(\alpha) = 0$.

Druhý zákon, který také níže využijeme, říká

$$j(\alpha) + j(\beta) = j(\alpha \wedge \beta) + j(\alpha \vee \beta).$$

Ke zdůvodnění využijeme logických ekvivalencí:

α je ekvivalentní s $(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \neg\beta)$.

β je ekvivalentní s $(\beta \wedge \alpha) \vee (\beta \wedge \neg\alpha)$.

U obou ekvivalencí jsou přitom disjunkty na pravé straně vzájemně nekompatibilní. Platí tedy rovnosti

$$\begin{aligned}
&j(\alpha) + j(\beta) = \\
&= j((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \neg\beta)) + j((\beta \wedge \alpha) \vee (\beta \wedge \neg\alpha)) = \\
&= j(\alpha \wedge \beta) + j(\alpha \wedge \neg\beta) + j(\beta \wedge \alpha) + j(\beta \wedge \neg\alpha) = \\
&= j(\alpha \wedge \beta) + j((\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\beta \wedge \alpha) \vee (\beta \wedge \neg\alpha)) = \\
&= j(\alpha \wedge \beta) + j(\alpha \vee \beta).
\end{aligned}$$

Nyní směřujeme k definici vyplývání pro jazyk L_1 založené na již zmíněném neformálním pravděpodobnostním kritériu:

> Úsudek je logicky platný právě tehdy, když není možné, aby nepravděpodobnost jeho závěru byla vyšší než součet nepravděpodobností jeho předpokladů.

Abychom vyjádřili přesně toto kritérium ve vztahu k jazyku L_1, přiřadíme každé distribuci stupňů jistoty j funkci j^*, která je definována takto:

$$j^*(\alpha) = 1 - j(\alpha).$$

Vyjadřuje-li $j(\alpha)$ pravděpodobnost, kterou připisujeme formuli α, pak $j^*(\alpha)$ vyjadřuje nepravděpodobnost této formule. Co se vhodné terminologie týče, musíme zde být opatrní, protože je-li $j(\alpha)$ stupeň jistoty, je zavádějící $j^*(\alpha)$ označovat jako stupeň nejistoty, jak by se mohlo nabízet. Je-li totiž $j^*(\alpha) = 0$, není to absolutní nejistota, co se formule α týče, nýbrž jistota opaku.

Nyní již Adamsova definice platnosti úsudků v pravděpodobnostní logice. Vyplývání vymezené touto definicí budeme označovat jako p-vyplývání.

`Definice 8.2.2` *Nechť $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta$ jsou formule jazyka L_1. Řekneme, že formule β p-vyplývá z formulí $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, když pro každou distribuci stupňů jistoty j platí*

$$j^*(\beta) \leqslant j^*(\alpha_1) + \ldots + j^*(\alpha_n).$$

Závěr vyplývá z předpokladů, když nepravděpodobnost jeho závěru nikdy nepřevyšuje součet nepravděpodobností předpokladů. To v typickém případě znamená, že když je pravděpodobnost předpokladů dostatečně vysoká, musí být vysoká i pravděpodobnost závěru, jak to bylo požadováno v původním pravděpodobnostním kritériu logické platnosti. (Extrémní případy, jako paradox loterie a analogické úsudky, zde představují výjimku.)

Možné pozitivní vymezení pravděpodobnostního kritéria využívající přímo samotné funkce j je formulováno v následující větě, kterou Adams pro p-platnost dokázal (viz např. Adams, 1998, str. 152). Toto kritérium je složitější než to předchozí, avšak přímočařeji popisuje p-vyplývání jako přenos pravděpodobnosti.

`Věta 8.2.3` *Nechť $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta$ jsou formule jazyka L_1. Formule β p-vyplývá z formulí $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ právě tehdy, když pro každé $\delta > 0$ existuje $\epsilon > 0$ tak, že pro každou distribuci stupňů jistoty j platí, že pokud $1 - \epsilon \leqslant j(\alpha_i)$ pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$, tak $1 - \delta \leqslant j(\beta)$.*

Dalším pozoruhodným výsledkem je extenzionální shoda relace p-vyplývání s relací vyplývání klasické logiky, omezíme-li se na jazyk L_1.

`Věta 8.2.4` *Nechť $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta$ jsou formule jazyka L_1. Formule β p-vyplývá z formulí $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ právě tehdy, když β vyplývá z $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ na základě klasické logiky.*

Přehledné a jednoduché zdůvodnění platnosti tohoto tvrzení najdeme např. v (Edgingtonová, 2006). Dorothy Edgingtonová zde také ilustruje užitečnost tohoto výsledku příkladem: Pokud máme dvě premisy, jejichž pravdivostí jsme si na 99 procent jistí, můžeme si být jistí na 98 procent, že je pravdivý i závěr, který z těchto premis odvodíme na základě klasické logiky. Edgingtonová dále dodává, že když si ovšem vezmeme klasicky platný úsudek, jenž má 100 premis, které přijímáme s 99-ti procentní jistotou, jeho závěr může mít až nulovou pravděpodobnost, což se podobá situaci paradoxu loterie.

Nyní do hry vstupují kondicionální věty. Do jazyka L_1 přidáme implikaci, avšak ve velmi omezeném smyslu. Jednak může vystupovat jen jako hlavní spojka. Jak uvidíme v oddílu 8.4, toto omezení je zcela zásadní. Dále v jejím antecedentu nesmí vystupovat kontradikce. Výsledný jazyk budu značit jako L_2. Formule jazyka L_2 jsou tedy formule jazyka L_1 a formule tvaru $\alpha \to \beta$, kde $\alpha, \beta \in L_1$ a α není kontradikce (klasické logiky). Druhé omezení, které se týká kontradikcí, může být zdůvodněno principem, jenž má v přirozeném jazyce, zdá se, univerzální platnost:

> Indikativní kondicionál lze smysluplně použít jen tehdy, když je jeho antecedent epistemicky možný.

Tento princip jsem již uvedl v kapitole 6. Epistemická možnost antecedentu, tj. jeho nenulová subjektivní pravděpodobnost, se zdá být podstatným způsobem svázána s indikativní formou věty. Není-li tato podmínka splněna, užíváme místo indikativního tvaru tvar subjunktivní. Můžeme tedy zavést gramatickou konvenci, která vůbec neumožňuje na místo antecedentu indikativního kondicionálu dosadit věty, které jsou z principu nemožné. V případě formálního jazyka se jedná o kontradikce.

Nechť je dána nějaká distribuce stupňů jistoty j a formule $\alpha \in L_1$ taková, že $j(\alpha) \neq 0$. Funkce j určuje novou distribuci stupňů jistoty j_α, která je pro každé $\beta \in L_1$ definována předpisem

PP $j_\alpha(\beta) = \frac{j(\alpha \wedge \beta)}{j(\alpha)}$.

Je lehké ověřit, že j_α je sama o sobě skutečně zase distribuce stupňů jistoty. Nyní můžeme rozšířit funkci j tak, že přiřazuje hodnoty z intervalu $[0, 1]$ formulím jazyka L_2. Dodatečné implikace se vyhodnocují pomocí předpisu

AT $j(\alpha \to \beta) = j_\alpha(\beta)$.

To není nic jiného než přesná formulace Adamsovy teze, která identifikuje pravděpodobnost kondicionálu jako podmíněnou pravděpodobnost konsekventu za předpokladu platnosti antecedentu.

Funkce j nyní operuje na jazyce L_2, ale povšimněme si drobné technické komplikace, která vzniká tím, že j není definováno pro takové implikace $\alpha \to \beta$, kde $j(\alpha) = 0$. Obecně se tedy nejedná o totální funkci na jazyce L_2.

V souladu s výše popsanou konvencí definujeme $j^*(\alpha \to \beta)$ jako $1 - j_\alpha(\beta)$. Posledním krokem při budování celého systému je definice p-vyplývání pro jazyk L_2.

`Definice 8.2.5` *Nechť $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi$ jsou formule jazyka L_2. Formule ψ p-vyplývá z formulí $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ právě tehdy, když pro každou distribuci stupňů jistoty j takovou, že hodnoty $j(\varphi_1), \ldots, j(\varphi_n), j(\psi)$ jsou definovány, platí*

$$j^*(\psi) \leqslant j^*(\varphi_1) + \ldots + j^*(\varphi_n).$$

Věta 8.2.3 stále platí, i když její znění rozšíříme na jazyk L_2. Avšak věta 8.2.4 již pro jazyk L_2 neplatí. Podle očekávání se tedy v otázce platnosti úsudků zahrnujících kondicionály pravděpodobnostní logika rozchází s logikou klasickou. V následujícím oddílu si představíme podrobněji, v čem tato divergence spočívá.

8.3 Platné a neplatné úsudkové formy

I když ekvivalence formulovaná ve větě 8.2.4 neplatí, formulujeme-li ji pro jazyk L_2, zůstává v platnosti alespoň vztah jednosměrný.

`Věta 8.3.1` *Nechť $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi$ jsou formule jazyka L_2. Pokud ψ p-vyplývá z formulí $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, tak ψ vyplývá z formulí $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ podle klasické logiky.*

Pravděpodobnostně platné úsudky jsou tedy zároveň klasicky platné. Zde je několik příkladů schémat obecně platných podle pravděpodobnostního kritéria:

(a) $\alpha \to \beta, \alpha / \beta$.

(b) $\alpha \to \beta, \alpha \to \gamma / \alpha \to (\beta \wedge \gamma)$,

(c) $\alpha \to \beta / \alpha \to (\beta \vee \gamma)$,

(d) $\alpha \to \beta, \neg\beta / \neg\alpha$.

Pro ilustraci zdůvodníme podle definice p-vyplývání platnost úsudku (b). Musíme tedy zdůvodnit, že pro libovolnou distribuci stupňů jistoty j (definovanou na příslušných formulích) musí platit:

$$j^*(\alpha \to (\beta \wedge \gamma)) \leqslant j^*(\alpha \to \beta) + j^*(\alpha \to \gamma),$$

tj.

$$1 - j_\alpha(\beta \wedge \gamma) \leqslant (1 - j_\alpha(\beta)) + (1 - j_\alpha(\gamma)).$$

To nastává právě tehdy, když

$$j_\alpha(\beta) + j_\alpha(\gamma) \leqslant j_\alpha(\beta \wedge \gamma) + 1.$$

U této podmínky již vidíme, že skutečně platit musí, neboť víme, že

$$j_\alpha(\beta) + j_\alpha(\gamma) = j_\alpha(\beta \wedge \gamma) + j_\alpha(\beta \vee \gamma) \text{ a } j_\alpha(\beta \vee \gamma) \leqslant 1.$$

Např. úsudkové formy z I. a II. skupiny paradoxů materiální implikace nejsou platné podle pravděpodobnostního kritéria:

(e) $q/p \to q$,

(f) $\neg p/p \to q$,

(g) $p \to \neg q/q \to \neg p$,

(h) $q \to r, p \to q/p \to r$,

(i) $p \to q/(p \wedge r) \to q$.

Uveďme ještě jednou příklady problematických úsudků těchto forem:

(e)* Zítra se zúčastním běžeckého závodu. Tedy pokud si dnes zlomím nohu, tak se zítra zúčastním běžeckého závodu.

(f)* V příštích volbách nevyhrají komunisté. Tedy pokud v příštích volbách vyhrají komunisté, tak budou prosazovat pravicovou politiku.

(g)* Pokud udělal chybu, tak ne velkou. Tudíž pokud udělal velkou chybu, tak neudělal chybu.

(h)* Pokud si koupím nové auto, nebudu mít na nájem. Pokud vyhraju milion, koupím si nové auto. Tudíž pokud vyhraju milion, nebudu mít na nájem.

(i)* Pokud si dám do kávy cukr, bude mi víc chutnat. Tudíž pokud si dám do kávy cukr a benzín, bude mi víc chutnat.

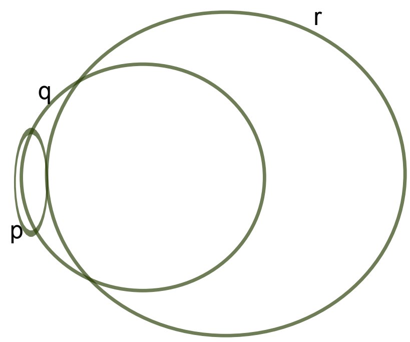
K úsudkovým formám (e)-(i) uvedu alespoň hrubý, neformální a intuitivní komentář, aby bylo patrné, proč z hlediska pravděpodobnostní sémantiky neplatí. Lze si přitom povšimnout, že toto vysvětlení je aplikovatelné na konkrétní příklady (e)*-(i)*. Zároveň toto řešení paradoxů první a druhé skupiny můžeme porovnat s tím, jaké bylo uvedeno v oddílu 6.5 na základě Stalnakerovy logiky.

(e) $q/p \to q$. Předpokládejme, že vzhledem k celému epistemickému prostoru možností je formule q vysoce pravděpodobná. Přesto p může platit především v těch (několika málo) otevřených možnostech, kde q neplatí. V takovém případě musíme formuli $p \to q$ připsat nízkou pravděpodobnost.

(f) $\neg p/p \to q$. Předpokládejme, že vzhledem k celému epistemickému prostoru možností má formule p velmi nízkou pravděpodobnost. To však nijak neznamená, že q musí platit v těch (několika málo) otevřených možnostech, kde p platí. Tedy formule $p \to q$ může mít nízkou pravděpodobnost.

(g) $p \to \neg q/q \to \neg p$. Předpokládejme, že pravděpodobnost q je velmi nízká, ale těch několik málo epistemických q-možností spadá mezi p-možnosti. Přitom naprostá většina p-možností nespadá mezi q-možnosti. V takovém případě je pravděpodobnost $p \to \neg q$ vysoká a pravděpodobnost $q \to \neg p$ nízká.

(h) $q \to r, p \to q/p \to r$. Předpokládejme, že pravděpodobnost p je velmi nízká, ale v naprosté většině p-možností platí q. Tedy pravděpodobnost $p \to q$ je vysoká. Přitom pravděpodobnost q je o mnoho vyšší než pravděpodobnost p a naprostá většina q-možností zároveň spadá mezi r-možnosti. Tedy pravděpodobnost $q \to r$ je též vysoká. Přesto se může stát, že těch několik málo p-možností (které většinou spadají mezi q-možnosti) nespadá mezi r-možnosti. Takže pravděpodobnost $p \to r$ je nízká. Ilustrujme alespoň tento příklad obrázkem:



(i) $p \rightarrow q/(p \wedge r) \rightarrow q$. Předpokládejme, že naprostá většina p-možností (tj. epistemických možností, v nichž platí p) spadá zároveň mezi q-možnosti. Tedy pravděpodobnost $p \rightarrow q$ je vysoká. Přesto se může stát, že mezi p-možnostmi platí r jen v těch (několika málo) možnostech, kde q neplatí. V takovém případě je pravděpodobnost $(p \wedge r) \rightarrow q$ nízká.

Ne náhodou jsem jako příklady úsudků, které nejsou platné z hlediska pravděpodobnostního kritéria, vybral stejné úsudky, jakými jsme se zaobírali v případě Stalnakerovy logiky. Mezi Stalnakerovým a Adamsovým systémem existuje pozoruhodná souvislost, kterou objevil a prokázal Allan Gibbard (1981). Jeho výsledek říká, že na jazyku L_2 se tyto systémy extenzionálně shodují.

Věta 8.3.2 *Nechť* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi$ *jsou formule jazyka* L_2. ψ *p-vyplývá z formulí* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *právě tehdy, když* ψ *vyplývá z formulí* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *podle Stalnakerovy logiky.*

To znamená, že deduktivní systém pro Stalnakerovu logiku z oddílu 6.6 lze použít i pro Adamsovu logiku. Dále je z toho patrné, že Adamsova logika, stejně jako Stalnakerova, musí čelit takovým námitkám, že klasifikuje jako neplatné také takové základní úsudkové formy jako

$$p \vee q/\neg p \rightarrow q.$$

Viděli jsme, jak si s touto námitkou poradil Stalnaker. V rámci pravděpodobnostního přístupu reaguje Edgingtonová na tuto námitku podobným způsobem:

> Pokud nemám ohledně vět A a B žádné jednoznačné přesvědčení, ale přitom jsem přesvědčen, že A *nebo* B, pak musím být [na základě principů pravděpodobnosti] přesvědčen, že pokud neplatí A, platí B. To je normální situace, v níž přesvědčení A *nebo* B hraje v mé mysli vůbec nějakou aktivní roli... Avšak pokud moje přesvědčení A *nebo* B je založeno pouze na přesvědčení A, pak tato inference není ospravedlněná... Mám třeba přesvědčení, že je na 90 procent osm hodin... Tedy, zvažuji-li vůbec tuto otázku, musím mít alespoň 90-ti procentní přesvědčení, že je osm hodin nebo jedenáct hodin. To mi ale nedává žádné oprávnění usoudit, že pokud není osm hodin, tak je jedenáct hodin. (Edgingtonová, 1986, str. 19-20)

8.4 Lewisův výsledek

Adamsova pravděpodobnostní sémantika je velmi elegantní a funguje velmi dobře pro úsudky obsahující jednoduché kondicionální věty. Adamsova teze se zdá být velmi přirozeným principem. Cílem tohoto oddílu je však upozornit na dva závažné nedostatky pravděpodobnostního přístupu.

Prvním problémem je, že vydáme-li se právě naznačenou cestou, musíme se vzdát jednoho z nejzákladnějších principů, na nichž jsou standardně logické teorie budovány – totiž principu kompozicionality. Pravděpodobnostní sémantika není kompozicionální. Např. pravděpodobnost věty A *a* B není jednoznačně určena pravděpodobnostmi vět A a B. Právě v tomto ohledu se podstatně liší pravděpodobnostní logika od zdánlivě příbuzných fuzzy logik, jejichž cílem je modelovat úsudky s vágními výrazy. Fuzzy logiky připisují větám stupně pravdivosti, které jsou obvykle též z intervalu $[0, 1]$. Stupně pravdivosti se však liší od stupňů pravděpodobnosti právě v tom, že jsou kompozicionální.[4]

Druhým (a domnívám se, že závažnějším) problémem s pravděpodobnostní logikou je okolnost, že nelze žádným jednoduchým a přirozeným způsobem odstranit omezení, na jehož základě se implikace může vyskytovat pouze jako hlavní spojka. Jak ukázal David Lewis, nelze přirozeným způsobem rozšířit pravděpodobnostní sémantiku na celý jazyk L. Avšak je zjevné, že v běžném jazyce kondicionální věta může přirozeně figurovat jako část jiné věty. Můžeme kondicionály negovat, spojovat konjunkcí i disjunkcí, můžeme je klást do antecedentů i konsekventů komplexnějších kondicionálů. Dobrým příkladem posledně zmíněného typu, tedy příkladem věty tvaru $(p \to q) \to r$, který se v přirozeném jazyce přeci jen nevyskytuje tak často, je věta převzatá z (Arló-Costa, 1999):

157. Jestliže se světlo rozsvítí, když zmáčknu vypínač, tak elektrikář dokončil svoji práci.

Není pochyb, že tato věta je přirozenou součástí našeho jazyka. S větami formy $p \to (q \to r)$ jsme se již setkali, ale přesto uvedu ještě jeden příklad.

158. Jestliže dnes půjdu na večírek, budu rád, potkám-li tam Marii.

Je velkým nedostatkem, nemůžeme-li takovéto věty přímočaře zachytit v našem formálním jazyce. Pravděpodobnostní logika se tedy vyhýbá řadě paradoxů materiální implikace – zejména paradoxům třetí a čtvrté skupiny, ve kterých dochází k interakci implikace s disjunkcí a negací – tím, že odpovídající úsudky v jejím jazyce nemůžeme ani formulovat. To však není žádné uspokojivé řešení. Adams (1975) sice problém tematizuje, ale jeho reakce působí poněkud ad hoc. O jisté systematické řešení problému se pokouší např. McGee (1989), ale ani jeho systém nebyl obecně akceptován.

[4] K fuzzy logice viz např. (Hájek, 1998).

Aby byl patrný smysl Lewisova výsledku, který ukazuje, že žádné přirozené rozšíření pravděpodobnostní analýzy na celý jazyk L není možné, předvedu dále původní verzi jeho argumentu, která byla uveřejněna v (D. Lewis, 1976).

Pro spor předpokládejme, že je dáno nějaké takové přirozené rozšíření pravděpodobnostní sémantiky na celý jazyk L. Necháme otevřeno, jak takové rozšíření vypadá, budeme pouze předpokládat, že v něm dochází k iterovanému podmiňování a že princip AT platí, i když za α a β dosadíme libovolné formule jazyka L. Dalším předpokladem, který v argumentu využijeme a který, zdá se, není nijak problematický, je obecná platnost zákona:

DP $j((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \neg\psi)) = j(\varphi \wedge \psi) + j(\varphi \wedge \neg\psi)$.

Vzhledem k tomu, že formule $\varphi \wedge \psi$ a $\varphi \wedge \neg\psi$ jsou z hlediska klasické logiky nekompatibilní, musí dle podmínky P3 z definice 8.2.1 tato rovnost platit, jsou-li φ, ψ formule z jazyka L_1. Náš dodatečný předpoklad je, že tato rovnost platí pro libovolné formule jazyka L.

V první části argumentu dokážeme, že pro libovolné α, β (pro jednoduchost předpokládejme, že jsou to formule z L_1) platí:

(1) $j_\beta(\alpha \to \beta) = 1$.

(2) $j_{\neg\beta}(\alpha \to \beta) = 0$.

To může být zdůvodněno následujícím postupem:

$$j_\beta(\alpha \to \beta) = (j_\beta)_\alpha(\beta) = \frac{j_\beta(\alpha\wedge\beta)}{j_\beta(\alpha)} = \frac{\frac{j((\alpha\wedge\beta)\wedge\beta)}{j(\beta)}}{\frac{j(\alpha\wedge\beta)}{j(\beta)}} = \frac{\frac{j(\alpha\wedge\beta)}{j(\beta)}}{\frac{j(\alpha\wedge\beta)}{j(\beta)}} = 1.$$

$$j_{\neg\beta}(\alpha \to \beta) = (j_{\neg\beta})_\alpha(\beta) = \frac{j_{\neg\beta}(\alpha\wedge\beta)}{j_{\neg\beta}(\alpha)} = \frac{\frac{j((\alpha\wedge\beta)\wedge\neg\beta)}{j(\neg\beta)}}{\frac{j(\alpha\wedge\beta)}{j(\neg\beta)}} = \frac{\frac{0}{j(\neg\beta)}}{\frac{j(\alpha\wedge\beta)}{j(\neg\beta)}} = 0.$$

Navíc pro α a β platí:

(3) $j(\alpha) = j_\beta(\alpha) \times j(\beta) + j_{\neg\beta}(\alpha) \times j(\neg\beta)$,

jak se můžeme přesvědčit pomocí těchto rovností:

$$j(\alpha) = j((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \neg\beta)) = j(\alpha \wedge \beta) + j(\alpha \wedge \neg\beta) =$$

$$= \frac{j(\alpha\wedge\beta)}{j(\beta)} \times j(\beta) + \frac{j(\alpha\wedge\neg\beta)}{j(\neg\beta)} \times j(\neg\beta) =$$

$$= j_\beta(\alpha) \times j(\beta) + j_{\neg\beta}(\alpha) \times j(\neg\beta).$$

Nyní díky výše zmíněnému dodatečnému předpokladu DP můžeme říci, že (3) platí obecně, ať už za α a β dosadíme cokoli. Dosadíme tedy za α formuli $\alpha \rightarrow \beta$ a dostaneme s využitím (1) a (2), že platí

TR $j(\alpha \rightarrow \beta) = j(\beta)$.

Důkaz:

$$j(\alpha \rightarrow \beta) = j_\beta(\alpha \rightarrow \beta) \times j(\beta) + j_{\neg\beta}(\alpha \rightarrow \beta) \times j(\neg\beta) =$$

$$= 1 \times j(\beta) + 0 \times j(\neg\beta) = j(\beta).$$

Dokázali jsme tedy, že stupeň jistoty kondicionálu musí být stejný jako stupeň jistoty jeho konsekventu. To je však velmi absurdní podmínka. Vezměme věty

A Zítra zanikne Slunce.

B Zítra zanikne život na Zemi.

Věta *Pokud A, B* je vysoce pravděpodobná, ale věta B příliš pravděpodobná není. Lewisův výsledek se obvykle označuje jako *triviality result* z toho důvodu, že odvozená podmínka TR může být splněna jen velmi triviálními jazyky. Existuje řada variant a zobecnění Lewisova výsledku se stále slabšími předpoklady.[5] Tím se potvrzuje, že se jedná o podstatný problém pravděpodobnostního přístupu, který nelze nijak přirozeně obejít.

8.5 Shrnutí

V této kapitole jsem uvedl argument Dorothy Edgingtonové, jehož cílem je ukázat, že kondicionální věty nemají podmínky pravdivosti, nýbrž pouze podmínky tvrditelnosti. Přijmeme-li závěr tohoto argumentu, nemůžeme se spokojit se standardním kritériem vyplývání jakožto přenosu pravdivosti. Úsudky obsahující kondicionální věty by takto nemohly být vůbec vyhodnoceny. Adams vytvořil logický systém, který se opírá o jiné kritérium, podle něhož relace vyplývání nepřenáší pravdivost, ale pravděpodobnost. Pravděpodobnost kondicionálních vět je v jeho systému ztotožněna s podmíněnou pravděpodobností, tj. s pravděpodobností konsekventu za předpokladu, že antecedent je pravdivý. Logika určená pravděpodobnostní sémantikou vnitřně úzce souvisí logikou Roberta Stalnakera. Adamsova logika pravděpodobnosti řeší elegantním a přesvědčivým způsobem některé paradoxy materiální implikace, ale naráží na jisté podstatné meze, které odhalil David Lewis. Tuto logiku lze použít jen na velmi omezený jazyk, v němž se implikace může vyskytovat pouze jako hlavní spojka věty. Každý pokus o rozšíření této logiky na plnohodnotný výrokový jazyk L z podstatných důvodů kolabuje.

[5] Viz např. (Etlin, 2009).

Kapitola 9

Intuicionistická logika

V této kapitole se budu věnovat intuicionistické logice, která je patrně nejznámější a podle mnohých též nejvýznamnější alternativou klasické logiky. Cílem intuicionistické logiky není primárně revidovat logiku kondicionálních vět. Jak uvidíme, je to zejména negace, jejíž pojetí se v intuicionistické logice podstatně mění. Kapitolu o intuicionistické logice na tomto místě uvádím ze tří hlavních důvodů: 1. Podle standardní interpretace je sémantika intuicionistické logiky epistemická, nikoli ontická jako sémantika klasické logiky. Lze tedy na rozdílu mezi klasickou a intuicionistickou logikou ilustrovat rozdíl mezi epistemickým a ontickým přístupem, který je pro tuto práci zcela zásadní. Jak uvidíme, v tomto ohledu intuicionistická logika úzce souvisí s přístupem, který navrhnu ve zbytku této práce. 2. Intuicionistická logika mění primárně logické chování negace, avšak to má sekundárně též dopad na logiku implikace. Tento známý fakt ukazuje, že logiku kondicionálních vět nelze formulovat izolovaně, bez ohledu na logiku ostatních operátorů. Ukazuje to, že k logice jednotlivých spojek je třeba přistupovat holisticky. 3. Další důvod pro představení intuicionistické logiky je srovnávací. Jak uvidíme, intuicionistická logika úzce souvisí s logikou striktní implikace $S4$, která již byla vytvořena s jasným ohledem na kondicionální věty.[1]

9.1 Filosofická východiska intuicionismu

Intuicionistická logika má svůj zdroj ve svérázné filosofii matematiky, kterou v první polovině dvacátého století formuloval matematik a filosof L.E.J. Brou-

[1]Některé části této kapitoly jsou v upravené podobě převzaty z (Kolman & Punčochář, 2015, kapitola 21).

wer.[2] Na této filosofii byla založena určitá verze konstruktivní matematiky. Ta představuje jistou alternativu vůči matematice klasické opírající se o klasickou predikátovou logiku a teorii množin. Můžeme vyzdvihnout tři výrazné a vzájemně související aspekty Brouwerova pojetí matematiky:

1. Subjektivismus: Matematika je primárně subjektivní aktivita. Je v podstatě formou introspektivní konstruktivní aktivity a jejím předmětem jsou tedy konstrukce se subjektivitou nerozlučně spjaté. Brouwerův žák (a tvůrce intuicionismem inspirované logiky) Arend Heyting to formuloval tak, že „z intuicionistického hlediska je matematika studiem jistých funkcí lidské mysli" (Heyting, 1956, str. 10). Matematika má svůj zdroj v apriorním názoru času chápaném v kantovském duchu. (Brouwer považuje prostor jakožto formu vnějšího názoru za vyvrácený možností neeuklidovských geometrií.) Percepce pohybu času je podle Brouwera základní charakteristikou subjektivity. Nějaký moment života se ve vědomí času rozpadá na dvě kvalitativně odlišné části a tento rozpad je zdrojem veškeré mnohosti.

2. Nezávislost na jazyku: Matematika je primárně nezávislá na jazyku. Názor času není pojem, je to něco, co jazyku předchází. Jazyk slouží pouze jako intersubjektivní médium, které musíme použít, chceme-li matematiku sdělit druhým subjektům. Jazyk také slouží jako pomocný prostředek pro paměť, ale má své podstatné nedostatky a není schopen plně uchopit subjektivní matematické konstrukce. Je pozoruhodné, že nezávislost na jazyku předpokládal např. také Cantor, avšak ze zcela protichůdného stanoviska. Podle Cantora svět matematických entit existuje nezávisle na lidských subjektech, a tedy i na jejich jazyku. Oproti tomu Brouwer zdůrazňuje subjektivní původ matematiky a jazyk je pro něho bytostně spojen s intersubjektivitou.

3. Nezávislost na logice: Matematika předchází logice – nikoli naopak. Logika je pouze soubor pravidelností, které byly odpozorovány při sledování jazyka, jímž je matematika sdělována. Tedy intuicionismus nebyl původně pokus o vybudování alternativní logiky, jak by se dnes mohlo zdát. Spíše to byl názor, že logika je pro matematiku nepodstatná, protože logika se týká formy, zatímco matematika obsahu – a obsah formě předchází. Přesto Brouwer postupem času uznal některá logická schémata jako platné pravidelnosti a Heyting na jejich základě zkonstruoval intuicionistickou logiku. Avšak ani Heyting, který zmírnil Brouwerovo kritické stanovisko vůči logice, se nedomníval, že by jeho logika mohla představovat disciplínu poskytující základy matematice. Logické principy jsou podle Heytinga pouze matematické teorémy nejvyšší obecnosti. Nemohou tedy předcházet matematice, nýbrž jsou

[2] Brouwer své pojetí logiky a matematiky formuloval v mnoha textech. Mezi nejvýznamnější patří zejména (Brouwer, 1905, 1907, 1908, 1914). Při výkladu intuicionistické filosofie matematiky se budu opírat především o Heytingovu skvělou práci (Heyting, 1956) a o sedmou kapitolu Kolmanovy knihy (Kolman, 2008).

v ní v nejlepším případě obsaženy.

Brouwerova averze vůči logice byla motivována přesvědčením, že jednotlivé kroky v matematickém důkazu musí přenášet a prohlubovat určitý mentální stav – a to vhled do konstrukcí, se kterými se v důkazu pracuje. Žádné skutečné poznání nějaké matematické disciplíny nemůže narůstat bez odpovídajícího nárůstu vhledu do této disciplíny. Aby byla dokázána nějaká pravda, je třeba, aby byla zakoušena určitým způsobem. Matematické poznání není prostě znalostí jistých matematických pravd, ale je konstituováno určitým typem kognitivního stavu. Spíše než systém pravd je matematika systémem mentálních aktivit. Naproti tomu logika dle Brouwera od této subjektivní stránky odhlíží. Krok v důkazu má pouze přenášet pravdivost, takže z důkazu se může stát pouhá manipulace se symboly podle jistých syntaktických pravidel (jak jsme se s tím setkali v případě kalkulu přirozené dedukce). Můžeme slepě aplikovat pravidla a ztratit přitom kontakt se zkoumaným předmětem. Podle intuicionismu tedy čistě logická (syntaktická) inference nemůže nic přidat k matematickému poznání. To je výtka vůči logice, kterou Brouwer sdílí s takovými mysliteli jako byl Descartes či Poincaré.[3] Toto pojetí je v příkrém rozporu s epistemologickou představou, podle níž spočívá hodnota logických inferencí právě v tom, že nám pomáhají překračovat přímou zkušenost. Intuicionisté se domnívají, že cílem matematického dokazování není zkušenost překračovat, nýbrž rozvíjet a rozšiřovat.

Pro intuicionismus je podstatný určitý posun v pojetí matematické pravdivosti. Chceme-li porozumět Brouwerově intuicionismu, musíme opustit zažitou (a pro mnohé matematiky velmi přirozenou) platónskou představu, podle níž existuje statický svět matematických pravd, který je sice objevován, avšak nijak podstatně nedotčen prací jednotlivých matematiků. Podle Brouwera nelze matematické pravdy oddělit od matematických konstrukcí, skrze které k těmto pravdám dospíváme. Matematické pravdy jsou v podstatě výsledky těchto konstrukcí a můžeme říct, že až s těmito konstrukcemi vznikají. Prakticky to znamená, že pravdivost ztotožníme s dokazatelností. Nedokazatelná matematická pravda, to je z intuicionistického hlediska contradictio in adjecto.

Tím jsme vedeni k tzv. BHK-interpretaci[4] logických operátorů, ve které se skrývá náznak formální sémantiky intuicionistické logiky. V kapitole o klasické logice jsme viděli dva přístupy k logice. Jeden se opíral o pojem pravdivosti a druhý o pojem dokazatelnosti. Z hlediska BHK-interpretace oba tyto pojmy splývají. Podmínky pravdivosti jsou tak nahrazeny podmínkami dokazatelnosti. Podmínky dokazatelnosti však z intuicionistického hlediska

[3] K tomu viz zejména (Detlefsen, 1990).

[4] Jedná se o počáteční písmena jmen Brouwer, Heyting a Kolmogorov.

mohou být dány stejně rekurzivním způsobem jako podmínky pravdivosti v Tarského definici pravdy. U každého operátoru se ptáme, zda a jak je možné otázku dokazatelnosti komplexní formule redukovat na otázku dokazatelnosti jejích částí. Jelikož BHK-interpretace nepředstavuje ještě exaktně definovanou formální sémantiku, nebudeme ji formulovat pro objektový jazyk. Navíc zmíníme podmínky pro kvantifikátory, které jsou pro intuicionistickou logiku důležité s ohledem na její zamýšlenou aplikaci v matematice. BHK-interpretace vypadá následujícím způsobem:

> Důkaz věty A *a* B je dán dvěma důkazy – jednak důkazem věty A a dále důkazem věty B.
>
> Důkaz věty A *nebo* B je dán jedním důkazem – a to důkazem věty A nebo důkazem věty B.
>
> Důkaz věty A *implikuje* B je dán konstrukcí, která transformuje každý důkaz věty A v důkaz věty B.
>
> Důkaz věty *Není pravda, že* A je dán konstrukcí, která transformuje každý potenciální důkaz věty A ve spor.
>
> Důkaz věty *Existuje x takové, že* A je dán konstrukcí objektu a a důkazem věty A^*, kterou získáme z věty A tak, že v ní nahradíme proměnnou x jménem objektu a.
>
> Důkaz věty *Pro každé x platí* A je dán konstrukcí, která pro každý objekt a konstruuje důkaz věty A^* (kterou opět získáme z věty A tak, že v ní nahradíme proměnnou x jménem objektu a).

Heyting (1956, str. 101-102, 106-107) tyto podmínky explicitně nazývá podmínkami tvrditelnosti. BHK-interpretace představuje vágní, ne zcela formální určení významu logických operátorů. To je zřejmé z toho, že není v tomto vymezení přesně stanoveno, co to je důkaz a co je to konstrukce. BHK-interpretaci tedy nemůžeme považovat za exaktně vymezenou sémantiku. Je však zřejmé, že interpretujeme-li tímto způsobem logické spojky, vede nás to k odmítnutí platnosti některých principů klasické logiky. Nejvýznamnějším příkladem je princip vyloučeného třetího vyjádřený schématem

> *A nebo ne-A.*

Tento princip v intuicionistickém čtení získává zcela jiný význam než v klasické interpretaci. Z hlediska BHK-interpretace říká, že pro každé matematické tvrzení A je možné zkonstruovat důkaz tvrzení A nebo zformulovat konstrukci, která by libovolný případný důkaz tvrzení A přetransformovala v důkaz sporu. To odpovídá principiální možnosti rozhodnout všechny matematické otázky. Předpoklad rozhodnutelnosti každého matematického problému zastává třeba Hilbert, proti němuž se Brouwer vymezuje. Ve slavné přednášce nazvané *Matematické problémy*, kterou proslovil v roce 1900 v Paříži, říká Hilbert následující:

> Je axiom řešitelnosti každého problému zvláštní charakteristikou samotného matematického myšlení, či je snad obecným zákonem inherentním lidské mysli, že všechny otázky, které klade, musí být zodpověditelné? ... Toto přesvědčení o řešitelnosti každého matematického problému je mocným stimulem pro každého pracujícího matematika. Slyšíme v sobě neustálé volání: Zde je problém. Hledej jeho řešení. Můžeš ho najít pouhým rozumem, protože v matematice není žádné ignoramibus. (viz např. Feferman, 1998, str. 3-4)

Dle intuicionistů nelze rozhodnutelnost všech matematických otázek tvrdit a priori, a proto ani nelze a priori přijmout princip vyloučeného třetího. Ovšem a posteriori tento princip také přijmout nemůžeme, neboť aktuálně existuje mnoho nerozhodnutých matematických otázek.

Princip vyloučeného třetího není jediným principem, který je platný z hlediska klasické, nikoli však z hlediska intuicionistické logiky. Významnou úlohu hraje též princip dvojí negace

A platí právě tehdy, když neplatí, že neplatí A.

Tento princip lze rozložit na dvě implikace. První z nich (*Jestliže platí A, pak neplatí, že neplatí A*) je z intuicionistického hlediska platným principem. Pokud máme důkaz věty A, pak jistě každý důkaz toho, že A vede ke sporu, vede ke sporu. Avšak druhá implikace (*Jestliže neplatí, že neplatí A, pak platí A*) již platným principem intuicionistické logiky není. To, že předpoklad rozporuplnosti věty A vede ke sporu, nemusí vést automaticky k důkazu věty A. Jaký může mít takové tvrzení smysl, to si ukážeme v následujícím oddílu.

Na úrovni predikátové logiky prvního řádu intuicionisté zpochybňují např. princip

Pokud neplatí, že pro všechna x A, pak existuje x, pro které neplatí A.

To, že jsme schopni prokázat, že věta *Pro všechna x platí A* vede ke sporu, ještě neznamená, že jsme schopni zkonstruovat nějaký konkrétní objekt a a zformulovat konstrukci, která transformuje každý potenciální důkaz věty A^* (kterou získáme z věty A tak, že v ní nahradíme proměnnou x jménem objektu a) na důkaz sporu. Neplatnost tohoto principu je tedy zejména důsledkem konstruktivního čtení existenčního kvantifikátoru.

9.2 Protipříklady ke klasickým principům

V tomto oddílu předložíme některé matematické příklady, na nichž je patrné, z jakého důvodu intuicionisté odmítají některé principy klasické logiky (zejména princip vyloučeného třetího a princip dvojí negace) a seznámíme se blíže s intuicionistickým způsobem myšlení. Příklady zde uvedené čerpám z (Heyting, 1956), (van Dalen, 2001) a (Kolman, 2008).

Podle Brouwera a Heytinga klasická logika funguje poměrně spolehlivě, omezíme-li se na každodenní komunikaci, která má co dělat pouze s konečnými objekty. Selhává tehdy, když je ve hře nekonečno, a není tedy vhodná pro matematiku, kde se s nekonečnem setkáváme na každém kroku. Zejména ji nelze aplikovat na reálná čísla, která sama o sobě jsou nekonečnými objekty. Abychom to ilustrovali a přiblížili tak čtenáři intuicionistický způsob uvažování, sestrojíme dvě reálná čísla a, b, pro něž nejsme (podle intuicionistů) oprávněni tvrdit následující dvě tvrzení:

(A) Číslo a je nebo není rovno nule.

(B) Pokud není pravda, že b není racionální, pak b je racionální.

K tomu, abychom mohli tato dvě čísla definovat, musíme se stručně seznámit s intuicionistickou teorií reálných čísel. Předpokládejme, že máme již vybudovanou teorii přirozených, celých a racionálních čísel. Pro zavedení čísel reálných je klíčová následující definice.

`Definice 9.2.1` *Definujeme, že daná posloupnost racionálních čísel* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je cauchyovská, když pro každé přirozené číslo* k *existuje přirozené číslo* l *takové, že pro každé přirozené číslo* m *platí* $|a_{l+m} - a_l| < \frac{1}{k}$.

Tedy posloupnost je cauchyovská, když pro libovolně malou vzdálenost x existuje nějaký člen posloupnosti takový, že všechny následující členy nejsou od sebe vzdáleny více než x. Každou cauchyovskou posloupnost chápeme jako generátor určitého reálného čísla. Přísně vzato, reálná čísla nelze přímo s cauchyovskými posloupnostmi ztotožnit, protože existují různé cauchyovské posloupnosti, které generují stejné reálné číslo. Např. posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde pro každé přirozené číslo n:

$$a_n = \frac{1}{2^n} \qquad \text{a} \qquad b_n = -\frac{1}{2^n}$$

Obě tyto posloupnosti generují stejné číslo, totiž číslo 0, přestože se liší ve všech svých členech. Tuto technickou komplikaci lze překonat pomocí definice ekvivalentních generátorů.

`Definice 9.2.2` *Řekneme, že dvě cauchyovské posloupnosti* $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, b = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *jsou ekvivalentní, když pro každé přirozené číslo* k *existuje přirozené číslo* l *takové, že pro každé přirozené číslo* m *platí* $|a_{l+m} - b_{l+m}| < \frac{1}{k}$.

Tedy dvě cauchyovské posloupnosti jsou ekvivalentní, když pro libovolně malou vzdálenost x existuje nějaký index takový, že od tohoto indexu dále nejsou od sebe odpovídající si členy těchto posloupností vzdáleny více než x. Lze lehce ověřit, že ekvivalence cauchyovských posloupností je skutečně relace ekvivalence (tj. reflexivní, symetrická a tranzitivní relace). Ekvivalentní cauchyovské posloupnosti generují jedno a totéž reálné číslo. Reálná čísla lze tedy přesně definovat jako ekvivalenční třídy ekvivalentních cauchyovských posloupností. Avšak nadále se pro jednoduchost dopustíme jisté nepřesnosti a budeme si reálná čísla představovat jako jednotlivé cauchyovské posloupnosti. Reálné číslo a je dobře definováno, když jsme schopni pro něj udat příslušnou cauchyovskou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, což znamená, že jsme schopni pro každé číslo n udat hodnotu a_n, a jsme schopni doložit, že výsledná posloupnost je skutečně cauchyovská. Na reálných číslech pak lze zavést standardní početní operace a do struktury reálných čísel lze přirozeným způsobem vnořit čísla přirozená, celá a racionální.

Pro další úvahy bude podstatné, že z intuicionistického hlediska jsme oprávněni o daném reálném čísle z tvrdit, že je racionální, pouze když jsme schopni předložit celá čísla x a y taková, že $z = \frac{x}{y}$. Než se pustíme do konstrukce dvou avizovaných reálných čísel, připomeňme si jeden z nejznámějších otevřených problémů současné matematiky, tzv. Goldbachovu domněnku. Je to tvrzení, které říká, že

> každé sudé číslo větší než dvě je součtem dvou prvočísel.

Goldbach formuloval jistou verzi této domněnky v roce 1742 a dodnes se ji nikomu nepodařilo dokázat ani vyvrátit. Pro každé konkrétní sudé číslo lze pochopitelně v konečném čase ověřit, zda je či není součtem dvou prvočísel. A skutečně to bylo ověřeno pro všechna sudá čísla od 4 do 4×10^{18}, což jistě svědčí ve prospěch pravdivosti této domněnky. Avšak zatím se nepodařilo zdůvodnit, že toto tvrzení je skutečně pravdivé pro všechna sudá čísla větší než dvě. Na základě Goldbachova problému definujme vlastnost přirozených čísel G:

> Přirozené číslo n má vlastnost G právě tehdy, když n je sudé číslo, které je větší než dvě a které nelze vyjádřit jako součet dvou prvočísel.

Goldbachovu domněnku lze nyní formulovat tak, že neexistuje přirozené číslo, které by mělo vlastnost G. Vlastnost čísel H definujeme takto:

> Přirozené číslo n má vlastnost H právě tehdy, když existuje přirozené číslo, které je menší nebo rovno n a má vlastnost G.

Je-li dáno přirozené číslo n, jsme schopni rozhodnout, zda má vlastnost H či nikoli. Prostě procházíme sudá čísla od 4 do n a postupně ověřujeme, zda některé z nich má vlastnost G. Je zjevné, že pokud má nějaké číslo vlastnost H, pak i všechna čísla vyšší mají vlastnost H.

Definujeme nyní posloupnost racionálních čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pro každé n stanovíme:

> Pokud n nemá vlastnost H, pak $a_n = (\frac{1}{2})^n$.
>
> Pokud n má vlastnost H, pak $a_n = 1$.

Prvních několik členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vypadá takto:

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$

Dá-li nám někdo číslo n jsme schopni vyčíslit hodnotu a_n. To znamená, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je dobře definovaná posloupnost racionálních čísel a není těžké ověřit, že tato posloupnost je cauchyovská. Generuje tedy nějaké reálné číslo a. Jsme oprávněni tvrdit, že pokud existuje sudé číslo větší než dvě, které není součtem dvou prvočísel, pak $a = 1$. Pokud takové číslo neexistuje, pak $a = 0$. Přesto podle intuicionistů nemůžeme tvrdit výše uvedenou větu (A), tj. větu *Číslo a je nebo není rovno nule.* Abychom tuto disjunkci mohli obhájit, museli bychom (při intuicionistickém čtení disjunkce) být schopni obhájit alespoň jeden z disjunktů, což zatím neumíme. Dokud nebudeme mít řešení Goldbachovy domněnky, nebudeme mít z intuicionistického hlediska oprávnění tvrdit (A).

Z hlediska klasické logiky je věta (A) logicky platná a její pravdivost tak předchází pravdivosti či nepravdivosti jednotlivých matematických vět, jako je např. Goldbachova domněnka. Z hlediska intuicionismu není vyloučeno, že větu (A) lze dokázat, ale její dokazatelnost závisí na potvrzení či vyvrácení Goldbachovy domněnky. Tímto způsobem tedy převrací intuicionismus pořádek věcí.

Zavedeme ještě jednu posloupnost racionálních čísel $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, kterou definujeme indukcí. Nejprve stanovíme, že $b_1 = 0$. Nyní předpokládejme, že b_n je již definováno, a na jeho základě definujeme číslo b_{n+1}.

> Pokud n nemá vlastnost H, pak $b_{n+1} = b_n + \frac{3}{10^n}$.
>
> Pokud n má vlastnost H, pak $b_{n+1} = b_n$.

Prvních několik členů posloupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ vypadá takto:

$$0, \tfrac{3}{10}, \tfrac{33}{100}, \tfrac{333}{1000}, \tfrac{3333}{10000}, \ldots$$

Dá-li nám někdo číslo n, jsme schopni vyčíslit hodnotu b_n. To znamená, že $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je dobře definovaná posloupnost racionálních čísel, a lze lehce ověřit, že je cauchyovská. Generuje tedy nějaké reálné číslo b. Jsme oprávněni tvrdit, že pokud neexistuje sudé číslo k větší než dvě, které není součtem dvou prvočísel, pak $b = \frac{1}{3}$. Uvažujme, k čemu dojde, pokud takové číslo existuje. Řekněme, že k je nejmenší číslo s touto vlastností. Pak k je také první číslo, které má vlastnost H. To znamená, že $b_{k+1} = b_k$, a obecně platí pro každé přirozené číslo m, že $b_{k+m} = b_k$. Pak ale číslo b musí být též rovno číslu b_k. Celkově by tedy platilo:

$$b = b_k = \frac{\overbrace{33\ldots3}^{(k-1)-\text{krát}}}{10^k} = \frac{10^k-1}{3\times10^k}.$$

Ukázali jsme, že pokud existuje sudé číslo větší než dvě, které není součtem dvou prvočísel, pak b je racionální číslo.

Nyní předpokládejme, že b není racionální číslo. Z toho plyne, že neexistuje sudé číslo větší než dvě, které není součtem dvou prvočísel (to lze zdůvodnit sporem: předpokládejme, že by takové číslo existovalo, pak by b bylo racionální, což je ve sporu s předpokladem, že b racionální není). Ale výše jsme ukázali, že v tomto případě $b = \frac{1}{3}$, což je opět ve sporu s předpokladem, že b není racionální. Předpoklad, že b není racionální číslo, je tedy sporný. Můžeme tedy tvrdit:

> Není pravda, že b není racionální číslo.

Přitom však nemůžeme tvrdit:

> Číslo b je racionální číslo.

Důvodem je, že nejsme schopni předložit celá čísla x a y taková, že $b = \frac{x}{y}$. Tím jsme zdůvodnili, že nejsme oprávnění tvrdit výše uvedenou větu (B), tj. větu *Pokud není pravda, že b není racionální, pak b je racionální.*

Brouwer s Heytingem vytvořili celou řadu podobných protipříkladů ke klasickým principům. Nazýváme je slabými protipříklady, neboť nepředstavují vyvrácení těchto principů v nějakém silném slova smyslu. Tyto příklady lze použít na podporu tvrzení, že v jednotlivých případech nejsme oprávněni některé klasické logické principy aplikovat. Avšak každý takový příklad je závislý na jistém empirickém faktu – totiž že lidstvo doposud nedokázalo vyřešit nějaký matematický problém. V případě našich dvou případů se jednalo o Goldbachovu domněnku. Jakmile bude vyřešena, přestanou tyto příklady plnit svoji funkci. Avšak dokud nebude vyřešen každý matematický problém, vždy bude možné za Goldbachovu domněnku substituovat něco jiného tak, aby příklady byly použitelné.

Naše dva protipříklady jsme označili za slabé, protože nepředstavují vyvrácení vět (A) a (B), nýbrž pouze poukazují na to, že věty (A) a (B) nejsou tvrditelné a priori před veškerou matematikou. Brouwer se však se slabými příklady nespokojil a zformuloval jistou silnou formu vyvrácení principu vyloučeného třetího. To může vyznít poněkud překvapivě v kontextu následujícího textu, kde je ukázáno, že intuicionistická logika představuje oslabení klasické logiky. Nemělo by být tedy pro intuicionisty možné pozitivně dokázat, ani vyvrátit (tj. převést na spor) něco, co nelze dokázat či vyvrátit v klasické logice. A jelikož v klasické logice nelze vyvrátit klasické principy, nemělo by být možné klasické principy vyvrátit ani v intuicionistické logice. Avšak zde je třeba vzít v potaz, že intuicionismus není jen nový způsob myšlení, který je Heytingem formalizován a přetaven v intuicionistickou logiku. Brouwer s Heytingem budují v rámci svého intuicionistického projektu celou alternativní matematiku a přijímají některé mimologické matematické principy, pro které mají jisté intuicionistické důvody a které v klasické matematice neplatí. To znamená, že intuicionistická matematika je nejen neúplná vůči matematice klasické, je vůči ní navíc také nekorektní.

V intuicionistické matematické analýze se pomocí nestandardních matematických principů podařilo Brouwerovi dokázat následující překvapivou větu:[5]

Každá totální funkce z kontinua do kontinua je spojitá.

Z této věty plyne, že intuicionistické kontinuum nelze rozdělit na dvě neprázdné části. Kdyby to totiž bylo možné, tj. kdyby existovaly dvě neprázdné množiny reálných čísel X, Y takové, že $X \cap Y$ by byla prázdná množina a $X \cup Y$ množina všech reálných čísel, pak by bylo možné definovat totální funkci z kontinua do kontinua, která by prvkům množiny X přiřazovala třeba číslo 1 a prvkům množiny Y číslo 0. Taková funkce by nebyla spojitá a dostali bychom se do sporu s větou o spojitosti všech totálních funkcí.

Intuicionistické kontinuum se tedy do jisté míry podobá aristotelskému kontinuu, neboť není pouhou množinou bodů. Spíše je souvislým celkem, který nelze roztrhat na kusy. Pro nás je důležité, že na základě takovéhoto kontinua lze formulovat jisté silné vyvrácení principu vyloučeného třetího. To může být překvapivé zejména vzhledem k poznámce o Aristotelovi, který princip vyloučeného třetího zastával a právě u něj můžeme najít první formulaci tohoto principu. Avšak skutečně lze v intuicionistické matematice pozitivně dokázat tvrzení

[5] Důkaz je rekonstruován v (Kolman, 2008, kapitola 7).

Není pravda, že pro každé reálné číslo x, x je nebo není větší než 0.

Kdyby totiž pro každé reálné číslo x platilo, že x je nebo není větší než 0, pak bychom mohli vyčerpávajícím způsobem rozdělit kontinuum na ta čísla, která jsou větší než nula, a na ta čísla, která nejsou větší než nula. Takové rozdělení na dvě části by však bylo ve sporu s povahou intuicionistického kontinua. Avšak z uvedené věty (intuicionisticky) neplyne tvrzení

Existuje reálné číslo x, pro které neplatí, že x je nebo není větší než 0.

Toto tvrzení již intuicionisté tvrdit nemohou, neboť nejsou schopni zkonstruovat konkrétní číslo x, pro které by bylo možné odvodit spor z tvrzení *x je nebo není větší než* 0.

9.3 Kripkovská sémantika informačních stavů

První pokus o formalizaci intuicionistické logiky provedl Kolmogorov (1925). Další formalizaci podal Heyting v roce 1928 na výzvu Královské holandské matematické společnosti. Později uveřejnil tento formalizmus v sérii textů (Heyting, 1930a,b,c). Mezi další významné texty zakládající intuicionistickou logiku patří (Glivenko , 1928, 1929). Nejprve byla intuicionistická logika vymezena axiomaticky, později se objevila řada alternativních sémantických vymezení. Patrně nejpopulárnější formální sémantiku pro intuicionistickou logiku vytvořil Saul Kripke (1965a). Tato sémantika je velmi podobná kripkovské sémantice pro modální logiky. Je také založena na pojmech kripkovského rámce a kripkovského modelu. Tentokrát však kripkovský model nebude představovat strukturu možných světů, nýbrž nějaký systém informačních stavů.

`Definice 9.3.1` *Kripkovský rámec v intuicionistické logice je uspořádaná dvojice $\langle W, R\rangle$, kde W je libovolná neprázdná množina a R je reflexivní a tranzitivní binární relace na množině W. Kripkovský model intuicionistické logiky je uspořádaná trojice $\langle W, R, V\rangle$, kde $\langle W, R\rangle$ je kripkovský rámec a V je funkce přiřazující každé atomické formuli nějakou podmnožinu množiny W. Požadujeme navíc, aby funkce V splňovala tzv. podmínku perzistence, která říká, že pokud $a \in V(p)$ a aRb, pak i $b \in V(p)$. Množině W říkáme prostor informačních stavů, prvky množiny W označujeme jako (informační) stavy, relaci R nazýváme relace dosažitelnosti a funkce V se jmenuje ohodnocení či valuace atomických formulí.*[6]

[6]Poznámka k notaci: Když jsem formuloval kripkovský rámec pro modální logiky, používal jsem pro prvky nosné množiny W označení $s, t, \ldots$. V kontextu intuicionistické

Jak je naznačeno v předchozí definici, kripkovský rámec intuicionistické logiky reprezentuje určitou informační strukturu složenou z informačních stavů. Relace dosažitelnosti určuje nějaké uspořádání informačních stavů, které indikuje možné procesy získávání informací. Fakt, že aRb, interpretujeme tak, že je možno dostat se v procesu získávání informací z informačního stavu a do informačního stavu b. Stav b tedy musí být informačně alespoň tak bohatý jako stav a (za idealizujícího předpokladu, že v procesu poznávání pouze získáváme nové informace a nikdy neztrácíme či nezavrhujeme informace staré). Touto interpretací je také zdůvodněna podmínka perzistence kladená na ohodnocení atomů. Pokud je v nějakém informačním stavu k dispozici informace reprezentovaná atomem p, pak také musí být tato informace k dispozici v každém z dosažitelných, tj. informačně bohatších stavů.

Nechť je dán nějaký kripkovský rámec $\langle W, R\rangle$. Analogicky ke kripkovské sémantice pro modální logiky definujeme pro každý stav $a \in W$ množinu dosažitelných stavů W_a:

$$W_a = \{b \in W; aRb\}.$$

Množina W_a je tedy množinou všech stavů b, s nimiž je stav a v relaci R. Nyní definujeme relaci tvrditelnosti mezi stavy v kripkovských modelech a formulemi jazyka L. Tato relace je tedy relativní vůči danému kripkovskému modelu. Relaci tvrditelnosti definujeme rekurzivně v analogii s Tarského definicí pravdy pomocí následujících podmínek. Předpokládejme, že $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ je kripkovský model intuicionistické logiky a $a \in W$. Následující podmínky jsou relativní vůči modelu $\mathcal{M}$:

(a) Atom p je tvrditelný v a právě tehdy, když $a \in V(p)$.

(b) Formule $\neg\varphi$ je tvrditelná v a právě tehdy, když φ není tvrditelná v žádném stavu $b \in W_a$.

(c) Formule $\varphi \wedge \psi$ je tvrditelná v a právě tehdy, když φ je tvrditelná v a a ψ je tvrditelná v a.

(d) Formule $\varphi \vee \psi$ je tvrditelná v a právě tehdy, když φ je tvrditelná v a nebo ψ je tvrditelná v a.

(e) Formule $\varphi \rightarrow \psi$ je tvrditelná v a právě tehdy, když pro každé $b \in W_a$, jestliže φ je tvrditelná v b, tak ψ je tvrditelná v b.

---

logiky budu používat označení $a, b, \ldots$. Cílem je naznačit rozdíl v zamýšlené interpretaci. Zatímco v ontické kripkovské sémantice modálních logik reprezentují prvky množiny W možné světy, v epistemické sémantice intuicionistické logiky reprezentují informační stavy.

Formule je logicky konzistentní v intuicionistické logice, když je tvrditelná v nějakém stavu nějakého kripkovského modelu (intuicionistické logiky). Formule je intuicionisticky logicky platná, když je tvrditelná v každém stavu každého kripkovského modelu. Formule intuicionisticky vyplývá z množiny předpokladů, když je tvrditelná v každém stavu každého modelu, v němž jsou tvrditelné všechny předpoklady. Dvě formule jsou logicky ekvivalentní v intuicionistické logice, když jsou ve všech kripkovských modelech tvrditelné ve stejných stavech.

Vidíme, že na rozdíl od Adamsovy pravděpodobnostní sémantiky tvrditelnosti je kripkovská sémantika zcela kompozicionální. Vezměme si příklad kripkovského modelu $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$, kde

$$W = \{a, b\},$$

$$R = \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, b \rangle\},$$

$$V(p) = \{b\}, V(q) = \{a, b\}.$$

Omezili jsme se na dva atomické výroky p a q. Tento model může posloužit jako protipříklad jak k principu vyloučeného třetího, tak k principu dvojí negace. Např. ve stavu a není tvrditelný ani atom p, ani jeho negace $\neg p$ (neboť p je tvrditelný v dosažitelném stavu b). To znamená, že v a není tvrditelná ani formule $p \vee \neg p$. Ani v jednom ze stavů a, b není tvrditelná formule $\neg p$. To znamená, že v a je tvrditelná formule $\neg\neg p$. Avšak již jsme řekli, že v a není tvrditelná formule p, takže v a není tvrditelná ani formule $\neg\neg p \rightarrow p$. V a jsou tvrditelné např. formule $q, \neg\neg(p \vee \neg p)$ či $p \rightarrow (q \rightarrow p)$.

Dalším z významných klasicky platných principů, který není logicky platný v intuicionistické logice, je jeden z DeMorganových zákonů. Konkrétně selhává platnost následujícího schématu: $\neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$. Doložíme to na následujícím protipříkladu. Vezměme si kripkovský model $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$, kde

$$W = \{a, b, c\},$$

$$R = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle\},$$

$$V(p) = \{b\}, V(q) = \{c\}, V(r) = \{b, c\}.$$

V žádném stavu tohoto modelu nejsou tvrditelné oba atomy (p i q) zároveň. Z toho plyne, že ve stavu a je tvrditelná formule $\neg(p \wedge q)$. Přitom v a není tvrditelná ani formule $\neg p$ (neboť z a je dosažitelný stav b, ve kterém je tvrditelný atom p), ani formule $\neg q$ (neboť z a je dosažitelný stav c, ve kterém je tvrditelný atom q). To znamená, že v a není tvrditelná formule $\neg p \vee \neg q$.

Tedy v a není tvrditelná ani formule $\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$. V každém stavu modelu $\mathcal{M}$ jsou tvrditelné např. formule $p \rightarrow \neg q$, $r \rightarrow (p \vee q)$ či $\neg\neg r$.

Zformuluji několik základních obecných vlastností kripkovské sémantiky intuicionistické logiky. Důkazy lze nalézt např. v (Kolman & Punčochář, 2015). Nejprve je dobré si povšimnout, že vlastnost perzistence se přenáší z atomických formulí na všechny formule jazyka L. To je v souladu s pojetím relace dosažitelnosti jako relace informačního uspořádání. Je-li nějaká informace k dispozici v daném stavu, je k dispozici také v každém informačně bohatším stavu.

`Věta 9.3.2` *Nechť φ je libovolná formule jazyka L, $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ je kripkovský model a pro $a, b \in W$ platí aRb. Pak jestliže φ je tvrditelná v a (vzhledem k modelu $\mathcal{M}$), tak φ je tvrditelná také v b (vzhledem k modelu $\mathcal{M}$).*

Toto tvrzení lze ověřit indukcí podle složitosti formule φ. Detaily necháme na čtenáři.

Nyní zvážíme, jaký je vztah intuicionistické logiky k logice klasické. Existuje jeden speciální kripkovský rámec $\mathcal{F} = \langle W_{\mathcal{F}}, R_{\mathcal{F}}\rangle$, který vypadá takto:

$$W_{\mathcal{F}} = \{a\},$$

$$R_{\mathcal{F}} = \{\langle a, a\rangle\}.$$

$\mathcal{F}$ tedy obsahuje pouze jeden stav, který je dosažitelný sám ze sebe. Vezměme si libovolnou interpretaci I klasické výrokové logiky, tj. funkci z atomických formulí do pravdivostních hodnot. K této interpretaci můžeme sestrojit jednoduše ohodnocení atomických formulí V_I v rámci $\mathcal{F}$. Pro každý atom p definujeme

Pokud $I(p) = 1$, pak $V_I(p) = \{a\}$.

Pokud $I(p) = 0$, pak $V_I(p) = \varnothing$.

V a je tedy daná atomická formule pravdivá právě tehdy, když je klasicky pravdivá v interpretaci I. Indukcí lze lehce ověřit, že se tato vlastnost přenáší na všechny formule: Nechť I je tedy klasická interpretace a $\mathcal{M}_I = \langle W_{\mathcal{F}}, R_{\mathcal{F}}, V_I\rangle$. Pro každou formuli φ platí:

> φ je pravdivá v I právě tehdy, když φ je tvrditelná v a vzhledem k modelu $\mathcal{M}_I$.

Z toho lehce plyne následující věta.

`Věta 9.3.3` *Intuicionistická logika je slabší než logika klasická v tom smyslu, že pokud je φ logicky platná z hlediska intuicionistické logiky, pak je φ také logicky platná z hlediska klasické logiky.*

Důkaz je nyní jednoduchý. Předpokládejme, že φ není logicky platná z hlediska klasické logiky. Pak existuje klasická interpretace I, ve které je tato formule nepravdivá. Pak je také nepravdivá ve stavu a intuicionistického modelu $\mathcal{M}_I$, což znamená, že φ není logicky platná ani z hlediska intuicionistické logiky.

Intuicionistická logika je tedy sice slabší než logika klasická, přesto v sobě klasickou logiku pozoruhodným způsobem odráží, a lze obrazně říci, že je-li něco logicky platné v klasické logice, intuicionistická logika o tom ví. Tento fakt je vyjádřen v následující větě, kterou dokázal původně Glivenko (1929).

`Věta 9.3.4` *Libovolná formule φ jazyka L je logicky platná z hlediska klasické logiky právě tehdy, když je formule $\neg\neg\varphi$ logicky platná z hlediska intuicionistické logiky.*

Významným rozdílem mezi klasickou a intuicionistickou logikou je, že intuicionistická disjunkce je konstruktivní. To znamená, že je-li nějaká formule tvaru disjunkce logicky platná (v intuicionistické logice), pak je taky logicky platný alespoň jeden z disjunktů. Tuto vlastnost pochopitelně klasická disjunkce nemá. Např. $p \vee \neg p$ je klasická tautologie, avšak ani p, ani $\neg p$ nejsou klasické tautologie. Tvrzení o konstruktivní disjunkci se dokáže velmi elegantním způsobem. Důkaz je založen na pozorování, že když máme protipříklad (kripkovský model) k formuli φ a protipříklad k formuli ψ, můžeme tyto dva modely jednoduše k sobě svázat jedním novým stavem a výsledkem bude model, který je protipříkladem k disjunkci $\varphi \vee \psi$.

`Věta 9.3.5` *Pokud je formule $\varphi \vee \psi$ logicky platná v intuicionistické logice, pak též formule φ nebo formule ψ je logicky platná v intuicionistické logice.*

Posledním výsledkem, který zde zmíním, je známý vztah intuicionistické logiky k logice $S4$. Intuicionistická logika se odráží v logice $S4$ skrze tzv. Gödelův překlad * z jazyka L do jazyka L^m definovaný rekurzivně takto:

$p^* = \Box p$ pro každý atom p.

$(\neg\varphi)^* = \Box\neg\varphi^*$.

$(\varphi \wedge \psi)^* = \varphi^* \wedge \psi^*$.

$(\varphi \vee \psi)^* = \varphi^* \vee \psi^*$.

$$(\varphi \to \psi)^* = \Box(\varphi^* \supset \psi^*).$$

Skrze tento překlad je intuicionistická logika vnořená v logice $S4$, jak to popisuje následující věta.

`Věta 9.3.6` *Formule φ jazyka L je logicky platná v intuicionistické logice právě tehdy, když formule φ^* je logicky platná v logice $S4$.*

9.4 Topologická sémantika

Kripkovská sémantika nebyla historicky první sémantikou intuicionistické logiky. Již v roce 1938 vytvořil Alfred Tarski topologickou sémantiku pro intuicionistickou logiku. Tato sémantika představuje zobecnění algebraické sémantiky pro klasickou logiku, kterou jsem představil v oddílu 4.3. V algebraické sémantice systém propozic odpovídá systému podmnožin dané množiny možných světů. Každá množina možných světů reprezentuje nějakou propozici. Tarského zobecnění spočívá v tom, že systém propozic v sobě může mít „díry" v tom smyslu, že některé množiny možných světu nereprezentují žádnou propozici. Avšak ne každá množina množin možných světů představuje možný systém propozic. Systémy propozic vykazují určitou strukturu. Tarski (1938) požadoval, aby měly tyto systémy strukturu topologického prostoru.

`Definice 9.4.1` *Topologický prostor je dvojice $\langle W, \tau\rangle$, kde W je libovolná neprázdná množina a τ je nějaká množina podmnožin množiny W splňující následující podmínky:*

(a) $\varnothing, W \in \tau$ (tj. τ obsahuje prázdnou množinu a celou množinu W),

(b) pokud $A, B \in \tau$, tak $A \cap B \in \tau$ (tj. množina τ je uzavřena na konečné průniky),

(c) pokud $S \subseteq \tau$, tak $\bigcup S \in \tau$ (tj. množina τ je uzavřena na libovolná sjednocení).

Množiny systému τ se v topologické terminologii nazývají otevřené množiny a z hlediska topologické sémantiky představují jednotlivé propozice. Valuace v topologickém prostoru je funkce, která přiřadí každému atomu jazyka L nějakou propozici, tj. nějaký prvek množiny τ. Valuace lze přirozeným způsobem rozšířit na celý jazyk L podobně jako v algebraické sémantice klasické logiky. Abychom toto rozšíření mohli zformulovat, potřebujeme jeden významný topologický pojem, totiž pojem vnitřku dané množiny. Relativně vůči danému topologickému prostoru $\langle W, \tau\rangle$ definujeme pro každou množinu $A \subseteq W$ vnitřek množiny A jako sjednocení všech otevřených množin obsažených v množině A. Vnitřek množiny A značíme jako $Int(A)$. Tedy $Int(A) = \bigcup\{B \in \tau; B \subseteq A\}$. Vzhledem k tomu, že množina τ je uzavřena na libovolná sjednocení, je vnitřek každé množiny otevřenou množinou. Navíc je jasné, že $Int(A) \subseteq A$.

Předpokládejme, že V je valuace v topologickém prostoru $\langle W, \tau\rangle$, tj. funkce přiřazující každé atomické formuli nějakou otevřenou množinu z τ. Valuaci V rozšíříme na celý jazyk L pomocí následujících podmínek, které připomínají podmínky z algebraické sémantiky pro klasickou logiku:

$$V(\neg\varphi) = Int(W - V(\varphi)),$$

$$V(\varphi \wedge \psi) = V(\varphi) \cap V(\psi),$$

$$V(\varphi \vee \psi) = V(\varphi) \cup V(\psi),$$

$$V(\varphi \to \psi) = Int((W - V(\varphi)) \cup V(\psi)).$$

Aplikace operace vnitřku u negace a implikace zaručuje, že je každé formuli skutečně přiřazena propozice, tj. otevřená množina topologického prostoru. Topologickým modelem intuicionistické logiky je trojice $\langle W, \tau, V\rangle$, kde $\langle W, \tau\rangle$ je topologický prostor a V je valuace v tomto prostoru. Formule φ je intuicionisticky platná, když pro každý model $\langle W, \tau, V\rangle$ tohoto typu platí $V(\varphi) = W$. Analogicky jako v algebraické sémantice klasické logiky se pak definují i další sémantické pojmy. Lze ukázat, že tyto pojmy se pak extenzionálně kryjí s odpovídajícími pojmy vymezenými pomocí kripkovské sémantiky.

Topologickou sémantiku zde uvádím s ohledem na to, že představuje určitý typ zobecnění základní algebraické sémantiky pro klasickou logiku a zcela analogický typ zobecnění uskutečním v oddílu 10.5 poté, co v oddílu 10.4 navrhnu systém tzv. *základní sémantiky tvrditelnosti*. Zobecněnou verzi pak budu označovat jako *topologickou sémantiku tvrditelnosti*.

9.5 Algebraická sémantika

Základní algebraickou sémantiku pro klasickou logiku lze zobecnit ještě v jiném směru tak, jak jsem to představil v oddílu 4.4. Systém propozic reprezentovaných jako podmnožiny dané množiny lze nahradit abstraktní algebraickou strukturou – v případě klasické logiky se jedná o Booleovu algebru. Systém všech podmnožin dané množiny představuje speciální případ Booleovy algebry. V tomto smyslu zobecnění lze ještě dále zobecnit i topologickou sémantiku intuicionistické logiky. Systém otevřených množin topologického prostoru tvoří tzv. Heytingovu algebru.

Heytingova algebra je abstraktní algebraická struktura, která má tvar $\mathcal{H} = \langle P, +, \times, \Rightarrow, 0\rangle$, kde P je neprázdná množina (jejíž prvky můžeme označovat jako *propozice*), $+$, $\times$ a $\Rightarrow$ jsou binární operace přiřazující dvojicím prvků z P prvky z P a 0 je vyznačený prvek z P. Přitom požadujeme, aby struktura $\mathcal{S} = \langle P, +, \times\rangle$ tvořila tzv. svaz, tj. aby platily pro libovolné propozice a, b, c z P následující rovnice:

$$\begin{array}{ll} a + b = b + a & a \times b = b \times a \\ a + (b + c) = (a + b) + c & a \times (b \times c) = (a \times b) \times c \\ a + (b \times a) = a & a \times (b + a) = a \end{array}$$

Na základě operace $+$ pak můžeme definovat relaci $\leqslant$ mezi prvky z P tímto způsobem:

$a \leqslant b$ právě tehdy, když $a + b = b$.

Jelikož $\langle P, +, \times\rangle$ je svaz, tak $\leqslant$ je relace neostrého uspořádání, tj. reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní relace. Aby struktura $\mathcal{H}$ byla Heytingovou algebrou, požadujeme dále, aby 0 byl nejmenší prvek struktury:

$0 \leqslant a$, pro každý prvek $a \in P$.

Dále požadujeme, aby obecně platila ekvivalence:

$a \times b \leqslant c$ právě tehdy, když $a \leqslant b \Rightarrow c$.

Každá Heytingova algebra má také nejvyšší prvek. Je jím $a \Rightarrow a$ (pro libovolné $a \in P$). Prvku $a \Rightarrow b$ se říká relativní pseudokomplement prvku a vzhledem k b. Je-li $\mathcal{B} = \langle P, +, \times, -, 0, 1\rangle$ Booleova algebra, pak $\mathcal{H} = \langle P, +, \times, \Rightarrow, 0\rangle$, kde $a \Rightarrow b$ je definováno jako $-a + b$, je Heytingova algebra. Systém otevřených množin topologického prostoru tvoří také Heytingovu algebru, kde $+$ je sjednocení, $\times$ je průnik, 0 je prázdná množina a $A \Rightarrow B$ je definováno jako $Int((W - A) \cup B)$.

Valuace v Heytingově algebře je funkce V přiřazující každému atomickému výroku nějaký prvek algebry. Valuaci lze opět induktivně rozšířit přirozeným způsobem tak, že přiřazuje nějaký prvek každé formuli jazyka L:

$V(\neg\varphi) = V(\varphi) \Rightarrow 0,$

$V(\varphi \wedge \psi) = V(\varphi) \times V(\psi),$

$V(\varphi \vee \psi) = V(\varphi) + V(\psi),$

$V(\varphi \to \psi) = V(\varphi) \Rightarrow V(\psi).$

Následuje definice základních sémantických pojmů, o nichž se pak dá dokázat, že extenzionálně korespondují s těmi, které byly zavedeny v kripkovské sémantice intuicionistické logiky. Přechod od topologické sémantiky intuicionistické logiky k abstraktní algebraické sémantice, kterou jsem zavedl v tomto oddílu, bude korespondovat s přechodem od topologické sémantiky tvrditelnosti, kterou navrhnu v oddílu 10.5 k algebraické sémantice tvrditelnosti, kterou navrhnu v oddílu 10.6. To je také hlavní důvod, proč jsem na tomto místě tento typ zobecnění zmínil.

9.6 Harmonie odvozovacích pravidel

Velice pozoruhodný jev se nám odkrývá, položíme-li si otázku, jak by vypadal adekvátní kalkul přirozené dedukce intuicionistické logiky. Připomeňme, že kalkul přirozené dedukce klasické logiky sestává z pravidel shrnutých v následující tabulce.

konjunkce	EK: (i) $\varphi \wedge \psi/\varphi$ (ii) $\varphi \wedge \psi/\psi$	IK: $\varphi, \psi/\varphi \wedge \psi$
disjunkce	ED: $\varphi \vee \psi, [\varphi/\chi], [\psi/\chi]/\chi$	ID: (i) $\varphi/\varphi \vee \psi$, (ii) $\psi/\varphi \vee \psi$
implikace	EI: $\varphi \to \psi, \varphi/\psi$	II: $[\varphi/\psi]/\varphi \to \psi$
negace	OS: $\varphi, \neg\varphi/\bot$	ND: $[\neg\varphi/\bot]/\varphi$

Pro každý operátor kromě negace lze pravidla rozdělit na eliminační a introdukční. Mezi introdukčními a eliminačními pravidly je vztah určité harmonie, a to ve zcela konkrétním smyslu. Abstraktní vymezení této harmonie je poněkud nepřehledné a bude níže objasněno na příkladech: Řekneme, že introdukční pravidlo je ve vzájemné harmonii s eliminačním pravidlem, když zavedená formule (tj. závěr introdukčního pravidla) je (i) v kontextu eliminačního pravidla nejsilnější formulí, která může být z premis introdukčního pravidla odvozena a (ii) v kontextu introdukčního pravidla nejslabší formulí, která může být eliminačním pravidlem eliminována.

Jak uvidíme na příkladech, toto vymezení lze lehce upravit tak, aby bylo možno vzít v úvahu případy s více introdukčními či eliminačními pravidly, jako tomu je např. u konjunkce, ke které se váže jedno introdukční a dvě eliminační pravidla.

Harmonie mezi pravidly není žádnou samozřejmostí. Kdybychom namátkou zformulovali introdukční a eliminační pravidlo pro nějaký nový operátor, pak by tato pravidla pravděpodobně ve vzájemné harmonii nebyla. Vezměme si třeba nějaký nový dvouargumentový výrokový operátor $\oplus$. Přiřadíme mu introdukční pravidlo shodné s tím, které jsme formulovali pro konjunkci a eliminační pravidlo shodné s tím, které jsme formulovali pro disjunkci. Máme tedy dvě pravidla $\varphi, \psi/\varphi \oplus \psi$ a $\varphi \oplus \psi, [\varphi/\chi], [\psi/\chi]/\chi$. Tato pravidla nejsou ve vzájemné harmonii.

Ověřme, že např. pravidla, která se vážou ke konjunkci, jsou ve vzájemné harmonii. Nejprve předpokládejme, že máme k dispozici eliminační pravidla $\varphi \wedge \psi/\psi$ a $\varphi \wedge \psi/\psi$. S jejich pomocí máme ukázat, že $\varphi \wedge \psi$ je nejsilnější formule, kterou lze odvodit z formulí φ, ψ. To znamená, že cokoli je odvoditelné z φ, ψ, je odvoditelné též z $\varphi \wedge \psi$. Předpokládejme tedy, že γ je odvoditelná z φ, ψ, což symbolicky zapisujeme jako $\varphi, \psi \vdash \gamma$. Máme ukázat, že $\varphi \wedge \psi \vdash \gamma$. To lze učinit velice jednoduše:

1	$\varphi \wedge \psi$	předpoklad
2	φ	1 EK
3	ψ	1 EK
4	γ	2,3, předpoklad $\varphi, \psi \vdash \gamma$

Tím jsme zdůvodnili první bod. Nyní předpokládejme, že máme k dispozici introdukční pravidlo $\varphi, \psi/\varphi \wedge \psi$. S jeho pomocí máme ukázat, že $\varphi \wedge \psi$ je nejslabší formulí, ze které můžeme odvodit obě formule, φ i ψ. Předpokládejme tedy, že $\gamma \vdash \varphi$ a $\gamma \vdash \psi$. Máme ukázat, že $\gamma \vdash \varphi \wedge \psi$. To lze udělat opět velmi jednoduše:

1	γ	předpoklad
2	φ	1, předpoklad $\gamma \vdash \varphi$
3	ψ	1, předpoklad $\gamma \vdash \psi$
4	$\varphi \wedge \psi$	2,3 IK

Tím jsme zdůvodnili vzájemnou harmonii introdukčního pravidla IK s eliminačními pravidly EK. Podrobně zdůvodním ještě harmonii pravidel pro implikaci.

Předpokládejme nejprve, že máme k dispozici eliminační pravidlo EI. S jeho pomocí máme ukázat, že $\varphi \rightarrow \psi$ je nejsilnější formule, kterou lze odvodit z toho, že jsme schopni odvodit ψ z φ. Předpokládejme tedy, že γ je formule, kterou lze odvodit z toho, že jsme schopni odvodit ψ z φ (symbolicky $[\varphi/\psi] \vdash \gamma$). Musíme ukázat, že $\varphi \rightarrow \psi \vdash \gamma$. To lze udělat takto:

1	$\varphi \rightarrow \psi$	předpoklad
2	$\quad\varphi$	hyp
3	$\quad\psi$	1,2 EI
4	γ	2-3, předpoklad $[\varphi/\psi] \vdash \gamma$

Nyní předpokládejme, že máme k dispozici introdukční pravidlo II. S jeho pomocí máme ukázat, že $\varphi \rightarrow \psi$ je nejslabší formule taková, že přidáme-li k ní φ, můžeme odvodit ψ. Předpokládejme tedy, že γ je nějaká formule s touto vlastností, tj. $\gamma, \varphi \vdash \psi$. Máme ukázat, že $\gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$:

1	γ	předpoklad
2	$\quad\varphi$	hyp
3	$\quad\psi$	1,2, předpoklad $\gamma, \varphi \vdash \psi$
4	$\varphi \rightarrow \psi$	2,3, II

Vzájemnou harmonii můžeme podobným způsobem pozorovat také mezi ID a ED. Ovšem pokud budeme zkoumat pravidla OS a ND, která se týkají negace, zjistíme, že narušují tuto systematičnost. Nelze o nich říci, že jsou ve vzájemné harmonii, a nelze dokonce ani říci, že pravidlo ND je introdukční pravidlo pro negaci $\neg$, protože v závěru tohoto pravidla není formule tvaru $\neg\varphi$. Co bychom mohli udělat, abychom tento nedostatek napravili a získali harmonická pravidla též pro negaci? Nabízí se nahradit pravidlo ND jeho alternativou IN:

IN $[\varphi : \bot]/\neg\varphi$.

Tato alternativa skutečně představuje regulérní introdukční pravidlo pro negaci, které je navíc v harmonii s pravidlem OS (které lze chápat jako pravidlo eliminační), což nyní ověříme. Předpokládejme, že máme k dispozici OS. Musíme ověřit, že pro libovolnou formuli γ takovou, že $[\varphi/\bot] \vdash \gamma$, platí $\neg\varphi \vdash \gamma$:

1	$\neg\varphi$	předpoklad
2	$\quad\varphi$	hyp
3	$\quad\bot$	1,2 OS
4	γ	2,3, předpoklad $[\varphi/\bot] \vdash \gamma$

Nyní předpokládejme, že máme k dispozici IN. Musíme ověřit, že pro libovolnou formuli γ takovou, že $\varphi, \gamma \vdash \bot$, platí $\gamma \vdash \neg\varphi$:

1	γ	předpoklad
2	$\mid\ \varphi$	hyp
3	$\mid\ \perp$	1,2, předpoklad $\varphi, \gamma \vdash \perp$
4	$\neg\varphi$	2,3 IN

Jaký je dopad záměny pravidla ND za IN? Zatímco jsme v podkapitole 5.5 viděli, že IN je odvoditelné z ND, pravidlo ND z IN odvoditelné není. IN je tedy slabší v tom smyslu, že dosadíme-li ho za ND do systému pravidel, celý systém tím oslabíme. Je překvapivým výsledkem, že adekvátní kalkul pro intuicionistickou logiku získáme tak, že přidáme k takto oslabenému systému pouze pravidlo umožňující ze sporu odvodit cokoli (tedy pravidlo *ex falso quodlibet*):

EFQ $\perp/\varphi$.

Toto pravidlo je odvoditelné, máme-li k dispozici ND, takže v kalkulu přirozené dedukce pro klasickou výrokovou logiku nemusí být explicitně uvedeno. Avšak vyměníme-li ND za IN, pravidlo EFQ odvodit nelze.

Všechna pravidla úplného a korektního kalkulu přirozené dedukce pro intuicionistickou logiku jsou shrnuty v následující tabulce, kde pravidlo OS označuji nyní jako EN, abych zdůraznil symetrii pravidel, kterou jsme nyní získali.

konjunkce	EK: (i) $\varphi \wedge \psi/\varphi$ (ii) $\varphi \wedge \psi/\psi$	IK: $\varphi, \psi/\varphi \wedge \psi$
disjunkce	ED: $\varphi \vee \psi, [\varphi/\chi], [\psi/\chi]/\chi$	ID: (i) $\varphi/\varphi \vee \psi$, (ii) $\psi/\varphi \vee \psi$
implikace	EI: $\varphi \rightarrow \psi, \varphi/\psi$	II: $[\varphi/\psi]/\varphi \rightarrow \psi$
negace	EN: $\varphi, \neg\varphi/\perp$	IN: $[\varphi/\perp]/\neg\varphi$
spor	EFQ: $\perp/\varphi$	

Je tedy pozoruhodným faktem, že na rozdíl od klasické negace můžeme intuicionistickou negaci charakterizovat pomocí dvojice jednoduchých pravidel – jednoho introdukčního a jednoho eliminačního –, která jsou ve vzájemné harmonii podobně jako pravidla pro všechny ostatní operátory. Z tohoto hlediska se intuicionistická logika jeví jako velmi elegantní a přirozený systém.

Pozoruhodné též je, že z inferencialistického hlediska to na první pohled může vypadat tak, že intuicionistická logika se od klasické liší pouze s ohledem na negaci. Všechny ostatní operátory se řídí stejnými pravidly jako v klasické logice. Ovšem zde se výrazně projevuje potřeba vnímat význam operátorů holisticky, tj. v kontextu ostatních pravidel. Logika implikace není určená pouze tím, jaká máme pravidla pro implikaci, ale i tím, jaká máme pravidla pro ostatní operátory. To se ve vztahu klasické a intuicionistické logiky projevuje obzvlášť výrazně. Vezmeme-li totiž kalkul přirozené dedukce pro intuicionistickou logiku a přidáme-li k němu pravidlo ND, které se týká zdánlivě pouze negace, umožní nám to dokázat nové principy, v nichž negace vůbec nefiguruje. Užijeme-li zde standardní technický termín, můžeme to formulovat tak, že přidání pravidla ND není konzervativní. To lze vysvětlit tak, že pravidlo ND – spíše než by pouze charakterizovalo negaci – poskytuje jistou důkazovou techniku (nepřímý důkaz), která umožní dokázat nové věci týkající se ostatních spojek. Technika nepřímého důkazu např. umožňuje dokázat tzv. Peircův princip, v němž ze spojek figuruje jen implikace:

$$((p \to q) \to p) \to p.$$

Tento princip v intuicionistické logice neplatí. Avšak přidáme-li k ní techniku nepřímého důkazu (čímž získáme klasickou logiku), můžeme postupovat takto:

1	$(p \to q) \to p$	hyp
2	$\quad \neg p$	hyp
3	$\quad\quad p$	hyp
4	$\quad\quad \bot$	2,3 OS
5	$\quad\quad q$	4, EFQ
6	$\quad p \to q$	3-5 II
7	$\quad p$	1,6 EI
8	$\quad \bot$	2,7 OS
9	p	2-8 ND
10	$((p \to q) \to p) \to p$	1-9 II

S ohledem na přirozený jazyk sice tento princip nemá velký význam, ale fakt, že se týká pouze implikace, dokládá, že intuicionistická implikace není identická s implikací klasické logiky, přestože je v kalkulu charakterizována stejnými pravidly.

9.7 Zhodnocení

Intuicionistická logika nebyla původně vytvořena pro analýzu přirozeného jazyka. Ovšem to ostatně platí i o logice klasické. Stojí za povšimnutí, že intuicionistická logika je jediným z logických systémů doposud zavedených v této práci, který se neshoduje s klasickou logikou ani na fragmentu jazyka L bez implikace. Vzhledem k paradoxům materiální implikace lze říci, že v intuicionistické logice neplatí žádný z paradoxů III. a IV. skupiny, platí zde však paradoxy I. a II. skupiny.

Přijmeme-li kripkovskou sémantiku jako kanonickou sémantiku intuicionistické logiky, vyvstává vzhledem k přirozenému jazyku především problém s disjunkcí. V kripkovské sémantice je disjunkce tvrditelná pouze tehdy, když je tvrditelný alespoň jeden z disjunktů. Tento požadavek je smysluplný v kontextu konstruktivní matematiky a v kapitole 11 uvidíme, že v určitých specifických případech je tento princip použitelný i v aplikaci na přirozený jazyk. Avšak v typických případech je disjunkce tvrditelná, i když není tvrditelný ani jeden z disjunktů. Mohu mít např. dostatek evidence pro tvrzení *Letošní mistrovství světa v hokeji vyhraje Kanada nebo Rusko* (např. vím-li, že se tyto týmy mají dnes večer utkat ve finále), avšak nemusím přitom mít dostatek evidence ani pro tvrzení *Letošní mistrovství světa v hokeji vyhraje Kanada*, ani pro tvrzení *Letošní mistrovství světa v hokeji vyhraje Rusko*. Ostatně v typických případech se nezdá v přirozeném jazyce nijak problematický ani princip vyloučeného třetího: Mám dostatek evidence, že Petr buďto je, nebo není v knihovně, i když nevím přesně, kde Petr je. Tento typ disjunkce, která je tvrditelná, aniž by musely být tvrditelné její členy, v kripkovské sémantice intuicionistické logiky nefiguruje.

V kapitole 10 zavedu sémantiku tvrditelnosti s ohledem na tuto specifickou povahu disjunkce. Ve své základní podobě povede ke klasické logice, ale v oddílech 10.5 a 10.6 ukážu, jak ji lze zobecnit tak, že vede k jisté nestandardní sémantice intuicionistické logiky, která se uvedenému problému s disjunkcí vyhýbá.

9.8 Shrnutí

V této kapitole jsem představil intuicionistickou logiku, která je vedle Adamsovy pravděpodobnostní logiky dalším reprezentantem epistemického přístupu. Ukázal jsem, jak byla motivována Brouwerovou filosofií matematiky, přestože Brouwer sám měl k logice negativní postoj. Zavedl jsem kripkovskou sémantiku pro intuicionistickou logiku, která je založena na podmínkách tvrditelnosti vztahujících k sobě informační stavy a formule jazyka L. Vedle kripkovské sémantiky jsem stručně představil i topologickou a abstraktní algebraickou sémantiku. Poté jsem pro intuicionistickou logiku zavedl kalkul přirozené dedukce, který získáme z kalkulu pro klasickou logiku tak, že silnou verzi nepřímého důkazu $[\neg\varphi/\bot]/\varphi$ nahradíme jeho slabou verzí $[\varphi/\bot]/\neg\varphi$ a doplníme princip ex falso quodlibet ($\perp/\varphi$), který je odvoditelný ze silné, nikoli však ze slabé verze nepřímého důkazu. Nakonec jsem poukázal na to, že kripkovská sémantika pro intuicionistickou logiku je těžko aplikovatelná na přirozený jazyk, a to zejména z toho důvodu, že přijímá princip, že disjunkce je tvrditelná jen tehdy, když je tvrditelný alespoň jeden z jejích disjunktů.

Kapitola 10

Sémantika striktní tvrditelnosti

Viděli jsme, že centrálním pojmem standardní sémantiky klasické logiky a některých jejích alternativ, jako je logika striktní implikace či logika implikace založené na výběrových funkcích, je pojem pravdivosti, který je však na úrovni logiky uchopen nikoli jako absolutní, nýbrž jako relativní pojem, vztahující k sobě možné světy a formule daného formálního jazyka. Tento přístup k formální sémantice jsme označili jako ontický a postavili ho do protikladu k přístupu epistemickému, který vychází z pojmu tvrditelnosti.

Se sémantikou epistemického typu jsme se zatím setkali ve dvojí podobě. Jednak v podobě pravděpodobnostní sémantiky, kde tvrditelnost byla ztotožněna s vysokou mírou subjektivní pravděpodobnosti, a dále v podobě intuicionistické logiky, kde tvrditelnost vystupovala jako striktní tvrditelnost (v níže objasněném smyslu). Přestože pravděpodobnostní sémantika je velmi přitažlivá a přesvědčivým způsobem modeluje řadu přirozených jevů, viděli jsme, že tento přístup naráží na některé podstatné překážky, které brání jeho definitivnímu rozpracování: Jednak se svou přirozeností vzpírá kompozicionální výstavbě, ale hlavně vede k podstatnému omezení jazyka.

V této kapitole navrhnu a v následujících rozpracuji sémantický přístup, který je založen na pojmu striktní tvrditelnosti a je v tomto ohledu příbuzný sémantice intuicionistické logiky. Uvidíme také, že skutečně tento přístup s intuicionistickou logikou úzce souvisí i z technického hlediska, nabízí však navíc prostor pro překonání jistých jejích nedostatků. Základní motivace nahradit pojem pravdivosti pojmem tvrditelnosti je však společná s pravděpodobnostním přístupem. Domnívám se, že některé typy vět – typicky kondicionální věty, ale také třeba modální výrazy tvaru *Možná, že A* – mají primárně podmínky tvrditelnosti a postrádají přirozené podmínky pravdivosti. To vše však ještě bude předmětem podrobného výkladu.[1]

[1]Některé úvahy této kapitoly byly formulovány též v (Punčochář, 2013, 2015b, 2016a).

10.1 K rozdílu mezi pravdivostí a tvrditelností

Cílem tohoto oddílu je objasnit, co míním striktní tvrditelností. Podívejme se nejprve na motivační příklad, který ukazuje, jaký dopad může mít obecně přechod od podmínek pravdivosti k podmínkám tvrditelnosti. Zvažme následující větu:

159. Možná prší, avšak neprší.

Otázkou je, zda bychom tuto větu měli považovat za kontradikci, tedy logicky neplatnou větu. Z logického hlediska je to věta tvaru *Možná A a není pravda, že A*. Z hlediska standardní modální logiky založené na podmínkách pravdivosti se nejedná o kontradikci (stačí, abychom vzali možný svět, v němž není pravdivé A, z něhož je však dosažitelný svět, v němž A pravdivé je). Avšak kdyby někdo tvrdil větu 159, jistě bychom měli tendenci říci, že si protiřečí, a tento rozpor nijak nezávisí na obsahu dané věty, nýbrž pouze na její formě, resp. na významu logických výrazů, které se ve větě vyskytují. Je-li tedy sémantika založena na pojmu tvrditelnosti, je rozumné od ní očekávat, že vyhodnotí větu 159 jakožto kontradikci. Tento jev evidentně souvisí s tzv. Mooreovým paradoxem (viz např. Moore, 1942).

Na tomto jednoduchém příkladu je velmi jasně vidět, že přechod od pravdivosti k tvrditelnosti vede k reálnému rozdílu na úrovni takových logických pojmů, jako je logická platnost, neplatnost a vyplývání. Domnívám se, že předchozí příklad též ilustruje, proč bychom měli v souvislosti s modálními výrazy preferovat analýzu založenou na pojmu tvrditelnosti. Zejména lze argumentovat, že věty jako *Možná prší* nemají podmínky pravdivosti, tj. není to povaha aktuálního světa, která rozhoduje o tom, zda je tato věta pravdivá či nepravdivá. Musí být ve hře nějaký informační stav, který určuje nějaký prostor otevřených možností, a jedině vůči tomu lze pak větu vyhodnotit jako platnou či neplatnou, či přesněji řečeno tvrditelnou či nikoli. Z tohoto důvodu má daná věta primárně podmínky tvrditelnosti, které nejsou relativní vůči jednotlivým světům tak, jako podmínky pravdivosti, nýbrž jsou relativní vůči informačním stavům. Informační stavy lze pak pojmout jako množiny otevřených možností, resp. množiny možných světů.

Relaci dosažitelnosti kripkovské sémantiky pro modální logiku lze též interpretovat epistemickým způsobem.[2] Každý svět s určuje množinu dosažitelných světů W_s, kterou lze pojmout jako informační stav. To tedy znamená, že každému světu je přiřazen nějaký informační stav, např. stav vyšetřování nějakého zločinu či informační stav nějakého „agenta". Vůči tomu se pak

[2]Při této interpretaci je pak přirozené klást na relaci dosažitelnosti takové podmínky jako je reflexivita a tranzitivita.

vyhodnocují modální výrazy. V takovém pojetí by např. věta *Je možné, že vrahem je zahradník* mohla být pojata jako pravdivá či nepravdivá podle toho, jestli informační stav určený v aktuálním světě reálným stavem vyšetřování obsahuje možný svět, v němž je vrahem zahradník. Nežádoucím důsledkem takového pojetí je, že větná forma příkladu 159 z toho vychází jakožto nekontradiktorická, přestože takovou větu nelze konzistentně tvrdit. Důvodem tohoto nežádoucího efektu je, že se v takto načrtnuté sémantice stírá rozdíl mezi pravdivostí prosté nemodální věty (ve světě) a tvrditelností modálního výrazu (v informačním stavu tímto světem určeným) – obojí je identifikováno jako pravdivost ve světě. Že se tímto postupem skutečně slučují dvě nesourodé věci, by mělo být patrné z následujícího příkladu.[3]

Předpokládejme, že se nacházíme v době před americkými prezidentskými volbami v roce 1980. Ve volbách figurovali tři kandidáti, kteří měli reálnou šanci na úspěch (pro jednoduchost předpokládejme, že jiní kandidáti se o post prezidenta neucházeli):

Ronald Reagan (republikán),

Jimmy Carter (demokrat),

John Anderson (republikán).

Ve skutečnosti se kandidáti ve volbách umístili v uvedeném pořadí, tj. volby vyhrál Reagan, Carter se umístil na druhém místě, Anderson na třetím. Formulujeme dvě věty:

A Volby vyhraje republikán.

B Pokud Reagan nevyhraje volby, vyhraje Anderson.

Nyní zvažme argument, který má formu modu ponens:

Jestliže A, tak B. A. Tudíž B.

Dosadíme-li za A a B celé věty, bude mít argument následující podobu:

160. Jestliže vyhraje republikán, tak pokud nevyhraje Reagan, vyhraje Anderson. Vyhraje republikán. Tedy pokud nevyhraje Reagan, vyhraje Anderson.

[3] V předchozím příkladu sehrály podstatnou úlohu modality, které nefigurují v základním jazyku L výrokové logiky. Problematice modalit se budu stručně věnovat později, v oddílu 12.3. Následující příklad se týká výhradně kondicionálních vět.

Vann McGee (1985) formuloval tento příklad jako protipříklad k pravidlu modus ponens. Domnívá se, že tento úsudek spolu s uvedeným kontextem skutečně ukazuje, že v jistých případech máme dobré důvody přijmout premisy nějakého úsudku, který má tvar modu ponens, přestože nejsme oprávněni akceptovat jeho závěr. Předpokládejme v našem zjednodušeném scénáři, že předvolební průzkumy jsou obvykle spolehlivé a že i v době před zmíněnými prezidentskými volbami ukazovaly, co se později vyplnilo, totiž že Reagan celkem jednoznačně vyhraje, s jistým odstupem za ním se umístí Carter a se značným odstupem za Carterem skončí na třetím místě Anderson. Bylo tedy díky těmto průzkumům racionální v době před volbami věřit, že vyhraje republikán (A), ale nebylo racionální věřit, že pokud nevyhraje Reagan, tak vyhraje Anderson (B), neboť to by ignorovalo silnou pozici Cartera. Jelikož však republikáni měli pouze dva silné kandidáty, Reagana a Andersona, bylo nepochybně racionální věřit, že vyhraje-li republikán, tak pokud nevyhraje Reagan, vyhraje Anderson (*Jestliže A, tak B*).

Tento rozbor vskutku dokládá, že některé případy modu ponens nepřenáší racionální přesvědčení z předpokladů na závěr. McGeeho pojetí uvedeného příkladu má jednoznačně epistemický charakter, je úzce příbuzné pravděpodobnostnímu pojetí, neboť míra racionálního přesvědčení má blízko k míře subjektivní pravděpodobnosti. McGee skutečně také říká, že není jasné, jaké jsou pravdivostní podmínky kondicionálních vět, ani jestli kondicionální věty nějaké pravdivostní podmínky mají (McGee, 1985, str. 463). Přímo Adamsovu pravděpodobnostní sémantiku však nelze na uvedený příklad aplikovat, neboť se v něm vyskytují vnořené implikace, což je také patrně motivací pro to, že se McGee (1989) pokouší Adamsovou sémantiku modifikovat, aby v ní mohl zpracovat formule tvaru $\varphi \to (\psi \to \chi)$.

Jestliže máme interpretovat úsudek 160 také z ontického hlediska, kdy jeho platnost musíme posuzovat podle toho, zda přenáší pravdivost z předpokladů na závěr, musíme přijmout nějaké podmínky pravdivosti pro kondicionální věty. Ve všech logických systémech, se kterými jsme se doposud setkali, je modus ponens platným úsudkovým schématem a úsudek 160 je v nich tedy vyhodnocen jakožto logicky platný. Např. v klasické logice, kde kondicionální věty jsou modelovány jako materiální implikace, jsou vzhledem k dané situaci předpoklady i závěr pravdivé a nejedná se tedy o protipříklad. Interpretujeme-li kondicionální věty na základě striktní implikace, pak se opět nejedná o protipříklad, nyní však z toho důvodu, že první předpoklad (*Jestliže A, tak B*, tj. *Jestliže vyhraje republikán, tak pokud nevyhraje Reagan, vyhraje Anderson*) je vyhodnocen jako nepravdivý.[4] Podobně tomu

[4]Zdůvodnění: Není pravda, že Anderson vyhraje v každém možném světě, ve kterém nevyhraje Reagan. Tedy množina možných světů, v nichž je pravdivá věta B, je prázdná.

je ve Stalnakerově logice.[5] Domnívám se však, že to jen ukazuje na slabiny standardní sémantiky materiální a striktní implikace, jakožto i Stalnakerovy sémantiky, chceme-li je aplikovat na přirozený jazyk. Domnívám se dále, že pokud by k tomu byl vyzván, pak by s ohledem na danou situaci každý kompetentní mluvčí našeho jazyka označil větu *Jestliže A, tak B* jako pravdivou a větu B jako nepravdivou. Tím by se dostal do konfliktu s materiální, striktní i Stalnakerovo analýzou kondicionálních vět. Úsudek 160 by pak z tohoto testu vyšel jako neplatný, pokud je platnost ztotožněna s přenosem pravdivosti. K tomuto klíčovému argumentu se ještě vrátím v oddílu 10.4.

Přes uvedené náhledy má úsudek 160 jistou váhu a modus ponens se zdá být nutně platným principem. Jak je to možné? Vysvětlení obdržíme, když nahlédneme situaci ze třetí možné perspektivy a neinterpretujeme platnost úsudků jako přenos racionálního přesvědčení (jak to činí McGee), ani jako přenos pravdivosti (jak tomu je z hlediska ontického přístupu), nýbrž jako přenos striktní tvrditelnosti. Z této perspektivy vyjde úsudek 160 jako logicky platný, aniž by to vedlo k nepřirozenému ohodnocení přítomných vět, kterému se nevyhneme v případě materiální a striktní implikace.

Poučením z McGeeho příkladu pak je, že přenos striktní tvrditelnosti se nemusí vždy extenzionálně shodovat s přenosem racionálního přesvědčení. Striktní tvrditelnost je idealizovaná, nepravděpodobnostní tvrditelnost ne nepodobná tvrditelnosti v intuicionistické logice. Vezměme si příklad nějaké elementární věty:

161. Vrahem je zahradník.

Věta 161 je striktně tvrditelná vzhledem k danému informačnímu stavu, když tento stav neponechává jako otevřenou možnost, že zahradník vrahem není. To je samozřejmě pouze velmi vágní a zcela neformální vymezení. Ukazuje však, v čem se pojem striktní tvrditelnosti liší od pravděpodobnostního pojetí tvrditelnosti, neboť aby byla věta striktně tvrditelná, nestačí, že je vysoce pravděpodobná. Může být např. vzhledem k mému informačnímu stavu vysoce pravděpodobné, že můj známý je dnes v Paříži. Sdělil mi totiž sám, že je pozván, aby dnes v Paříži přednesl přednášku, a já ze zkušenosti vím, že se

Jelikož existuje možný svět, v němž vyhraje republikán (takovým světem je např. svět aktuální), není množina světů, v nichž je pravdivá věta A, podmnožinou množiny světů, v nichž je pravdivá věta B. Tedy množina světů, v nichž je pravdivá věta *Jestliže A, tak B*, je prázdná.

[5] Zdůvodnění: Nacházíme se ve světě, kde vyhraje republikán. Tedy pro antecedent A prvního předpokladu vybere výběrová funkce aktuální svět. V něm se pak vyhodnocuje konsekvent B, který je však v aktuálním světě nepravdivý, protože – jak můžeme předpokládat – ve světě, ve kterém nevyhraje Reagan a který se jinak nejvíce podobá aktuálnímu světu, vyhraje Carter, nikoli Anderson. Tedy i věta *Jestliže A, tak B* je v aktuálním světě nepravdivá.

jedná o pravdomluvného člověka, který by v této věci nelhal. Navíc jsem ho včera potkal, jak cestuje s kufrem na letiště. Tato vysoká pravděpodobnost mě v běžném slova smyslu opravňuje k tomu, abych tvrdil, že můj známý je dnes v Paříži, a abych věřil, že je to pravda. Přesto není tato věta v mé situaci striktně tvrditelná, protože můj informační stav stále ponechává otevřenou možnost, že se mohlo stát něco neobvyklého, co způsobilo, že můj známý dnes v Paříži není, jakkoli je tento scénář nepravděpodobný.

Je evidentní, že pojem striktní tvrditelnosti je silně idealizovaný, nerealistický. V běžném použití řeči tvrdíme téměř výhradně věty, u nichž je otevřena možnost opaku, a bylo by chybou jednat jinak, protože možnost opaku je otevřena téměř vždy. Tato idealizace se však příliš neliší od jiných idealizací, které se v logice vyskytují na každém kroku a na nichž je logika závislá. Tak jako v logice předpokládáme, že významy výrazů jsou určité, jasně ohraničené, přestože téměř každý výraz přirozeného jazyka obsahuje prvek vágnosti, a jako předpokládáme, že běžné výroky mají jednoznačně určenou pravdivostní hodnotu, přestože je to v řadě případů nejednoznačné, tak budeme také předpokládat – přestože taková situace je nerealistická –, že pokud něco oprávněně tvrdíme, tak to znamená, že náš informační stav možnost opaku vůbec nepřipouští. Role idealizace je zde podobná jako ve fyzice. Např. podle Newtonova prvního pohybového zákona těleso zůstává v klidu nebo rovnoměrném přímočarém pohybu, pokud na něj nepůsobí jiné těleso. Avšak takováto situace v přírodě v čisté podobě obvykle nenastává. V podobném smyslu mohou být základní zákony tvrditelnosti formulovány pro ideální čisté případy, které však reálně téměř nikdy nenastávají. Či jiná analogie: Zlo a dobro se ve světě nikde nevyskytuje v čisté podobě. Přesto toto idealizované binární schéma vstupuje podstatným způsobem do našeho běžného morálního uvažování.

Z teoretického hlediska se užitečnost takovéto idealizované tvrditelnosti zračí v tom, že pro ni na rozdíl od pravděpodobnostní tvrditelnosti můžeme formulovat kompozicionální sémantiku. Navíc vzhledem k McGeeho příkladu můžeme nahlédnout, že to, co úsudek 160 – a obecněji modus ponens – skutečně přenáší, je právě striktní tvrditelnost. Jsou-li premisy striktně tvrditelné, je striktně tvrditelný i závěr. Právě v tom spočívá význam pravidla modus ponens a tímto způsobem může být toto pravidlo sémanticky obhájeno. Popsaný scénář nepředstavuje protipříklad, protože premisa A není za dané situace striktně tvrditelná.

Výše jsem uvedl hypotézu, že pokud bychom se kompetentního mluvčího českého jazyka zeptali, zda jsou kondicionální věty *Jestliže vyhraje republikán, tak pokud nevyhraje Reagan, vyhraje Anderson* a *Pokud nevyhraje Reagan, vyhraje Anderson* pravdivé vzhledem k popsané situaci, odpověděl by, že první z nich je pravdivá, zatímco druhá nikoli. Toto hypotetické ohodnocení jsem použil jako evidenci proti materiální, striktní i Stalnakerově implikaci. Nyní chci však opět hájit tezi, že kondicionální věty primárně vůbec nemají podmínky pravdivosti, nýbrž pouze podmínky tvrditelnosti. Znamená to tedy, že se náš hypotetický kompetentní mluvčí mýlil ve svém soudu? A jak je tedy možné, že jsem jeho verdikt sám použil jako relevantní? Zde navrhuji následující psychologické vysvětlení. V přirozeném jazyce neexistuje ostrá a čistá hranice mezi pravdivostí a tvrditelností. Běžnému člověku často obojí splývá v jednu pozitivní sémantickou hodnotu v protikladu k hodnotě negativní, kterou může být jak nepravdivost, tak popiratelnost. Přestože lidé běžně neformulují explicitní rozdíl mezi pravdivostí a tvrditelností, tento rozdíl vyvstane, když se zeptáme např. po pravdivosti věty *Vyhraje republikán*. Tato věta je pravdivá vzhledem k času t před uvedenými prezidentskými volbami, ale není v čase t tvrditelná vzhledem k informačnímu stavu, který jsem popsal spolu se scénářem voleb, protože republikán později skutečně vyhrál, ale v čase t bylo nejisté, zda republikán skutečně vyhraje. Ptáme-li se někoho, zda byla tato věta pravdivá v t, nezamění naši otázku s otázkou po tom, zda jsme v čase t měli dostatek informací k tomu, abychom větu mohli oprávněně tvrdit. Avšak ptáme-li se, zda byla pravdivá věta *Jestliže vyhraje republikán, tak pokud nevyhraje Reagan, vyhraje Anderson*, bude předpokládat, že naše otázka má nějaký smysl, a bude se snažit interpretovat ji tak, aby smysl skutečně měla. Nabízí se pak interpretovat tuto otázku jako otázku po pozitivní sémantické hodnotě, tedy v tomto případě po tvrditelnosti, neboť pravdivost zde zcela chybí. Chceme-li za každou cenu stanovit pravdivostní podmínky pro kondicionální věty, nabízí se ztotožnit je s podmínkami tvrditelnosti s tím, že pak musíme přiřadit nějaký informační stav aktuálnímu světu, jak se to děje v kripkovské sémantice. Interpretujeme-li však potom platnost úsudků jako přenos pravdivosti a stanovíme-li pro vnořené kondicionální věty podmínky, které jsou v souladu s naším jazykovým citem (tedy nikoli podmínky pro standardní striktní implikaci), dostaneme nežádoucí důsledek, že modus ponens není platné úsudkové schéma. Jaký jiný princip by však měl pro kondicionální věty platit, když odmítneme modus ponens? Cílem těchto poznámek je tedy znovu doložit, podobně jako jsem to učinil u prvního příkladu na začátku tohoto oddílu, že směšování pojmu pravdivosti pro elementární věty a pojmu tvrditelnosti pro věty s modálním obsahem – mezi něž patří i věty kondicionální – vede k nežádoucím důsledkům. V kontextu uvedeného příkladu je patrné, že tyto nežádoucí důsledky se mohou projevit obzvlášť jasně, jsou-li ve hře vnořené kondicionály.

10.2 Hranice mezi sémantikou a pragmatikou

Tvrditelnost bývá obvykle považována za pojem spadající zcela do oblasti pragmatiky. Chci-li s tímto pojmem pracovat jako s pojmem sémantickým, znamená to, že zcela směšuji sémantiku a pragmatiku? Cílem tohoto oddílu je především objasnit, že tomu tak není.

Tvrditelnost je velmi bohatý termín, se kterým souvisí příliš mnoho na to, abychom mohli vše zohlednit v rámci sémantické teorie. Zaměřme svoji pozornost opět na Gricovy konverzační maximy, které můžeme volně připomenout následujícím způsobem:

> Maxima kvality: Říkej pouze to, pro co máš dostatek evidence!
>
> Maxima kvantity: Podávej přiměřené množství informací!
>
> Maxima relace: Mluv tak, aby byla tvoje výpověď relevantní!
>
> Maxima způsobu: Mluv srozumitelně a vyhýbej se obskurnímu vyjadřování!

To jsou maximy, kterým podléhá efektivní komunikace zaměřená na výměnu informací. Konflikt s jakoukoli z těchto maxim může znamenat důvod k odmítnutí tvrditelnosti (v širokém slova smyslu) dané věty. Chceme-li integrovat pojem tvrditelnosti do sémantiky, nabízí se otázka, zda by bylo možné tyto maximy v rámci sémantiky zohlednit. Je ihned patrné, že nelze zohlednit všechny. Zejména maxima způsobu není pro sémantiku příliš vhodná: Zřejmě se v rámci sémantické teorie nelze vyhnout tomu, že jednoduché, přehledné věty budou ekvivalentní s nějakými složitými a nepřehlednými větami. Je také velmi obtížné zohlednit relaci kvantity: V důsledku takového zohlednění by totiž např. disjunkce nemohla vyplývat ze svých disjunktů, neboť pokud můžeme tvrdit A, maxima kvantity nám v typickém případě brání tvrdit A *nebo* B. Avšak ukázalo se jako velice plodné v rámci sémantiky zohlednit maximu relace a pokusit se modelovat vnitřní souvislost vět. Výsledkem jsou dnes velmi intenzivně studované relevanční logiky.[6] To však není směr, kterým se vydáváme v této práci. Klíčová maxima, kterou v sémantice tvrditelnosti zohledníme, je maxima kvality. Sám Grice si ihned při formulaci své teorie povšiml, že tato maxima hraje specifickou roli a podstatně se odlišuje od ostatních maxim:

> Vskutku můžeme pociťovat, že důležitost první maximy kvality je taková, že by neměla být zahrnuta do schématu, které navrhuji. Ostatní maximy můžeme brát v potaz jen za předpokladu, že je zohledněna maxima kvality. (Grice, 1989, str. 27)

[6] Viz např. (Mares, 2004).

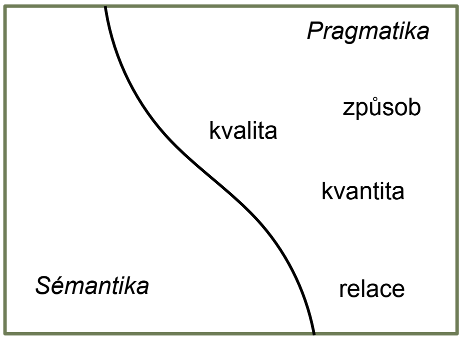
Grice však toto pozorování ihned vytěsní poznámkou:

> Pokud jde o generování implikatur, zdá se, že [maxima kvality] hraje roli ne zcela odlišnou od ostatních maxim a přinejmenším pro současný účel bude vhodné zacházet s ní jako s jinými členy seznamu maxim. (Grice, 1989, str. 27)

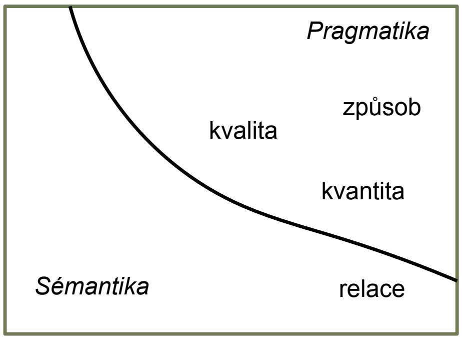
Avšak odlišnost maximy kvality, o které Grice mluví, je vskutku zásadní, a tato odlišnost se projevuje právě i ve způsobu generování implikatur. Zdá se, že podstatnou vlastností konverzačních implikatur je fakt, že je lze zrušit nějakou dodatečnou poznámkou. Např. řeknu-li *Petr se učí nebo hraje hru na počítači*, v typickém případě tím (konverzačně) implikuji, že nevím, který z disjunktů je pravdivý. Dodám-li ale, že vím, co z toho dělá, ale nechci to sdělit (ať už k tomu mám jakékoli důvody), implikaturu tím zruším. Jak poukazuje např. Gazdar (1979, str. 46), maxima kvality generuje implikatury, které nelze zrušit. Tvrdím-li A, implikuji tím, že vím, že A, a dodatečnou poznámkou, že tomu tak není, se dostávám do zjevné kontradikce: *A, ale nevím, zda A*, např. tvrdím-li

162. Jakarta je hlavní město Indonésie, ale nevím, zda Jakarta je hlavní město Indonésie.

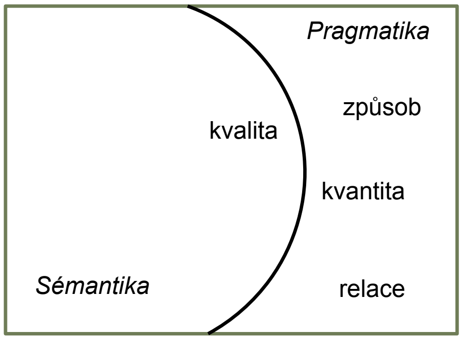
Ovšem zrušitelnost konverzačních implikatur je právě tím aspektem, který zabraňuje, aby tento druh vyplývání byl integrován do oblasti logiky (logické vyplývání v tomto smyslu zrušit nikdy nelze). Technický pojem tvrditelnosti, se kterým budu dále pracovat jako se sémantickým pojmem, v sobě integruje právě a jedině maximu kvality. Zhruba řečeno, za tvrditelné považujeme to, pro co je v daném kontextu či obecněji z hlediska daného informačního stavu dostatek evidence. Podobně lze interpretovat intuicionistický směr v logice, který jde ovšem tak daleko, že identifikuje pravdivost s dokazatelností. Tak daleko jít nemusíme a oba tyto pojmy můžeme chápat jako odlišné, i když – jak uvidíme – spolu úzce související. Nehodlám tedy rušit hranici mezi sémantikou a pragmatikou, jen ji jistým způsobem modifikuji, a to tak, že maximu kvality jistým způsobem integruji do oblasti sémantiky. Můžeme tuto situaci reprezentovat vizuálně. Tradičně bývají všechny maximy pokládány za součást pragmatiky a kladeny mimo oblast sémantiky:



Snahu relevančních logik lze chápat jako pokus (alespoň částečně) postihnout na sémantické úrovni implikatury vzešlé z maximy relace. Tyto systémy situují tedy tuto maximu do oblasti sémantiky:



Naproti tomu v této práci do oblasti sémantiky přemístíme maximu kvality:



Podobný manévr upravující v analogickém smyslu hranici mezi sémantikou a pragmatikou podnikl např. (Veltman, 1985, viz zejména str. 165-167). Tedy v technickém slova smyslu, v jakém budu pracovat s pojmem tvrditelnosti, může být věta tvrditelná (v daném kontextu či informačním stavu), i když je v konfliktu s maximou kvantity a sděluje méně (nebo více) informací, než mluvčí ví a posluchač požaduje. Daná věta může být v tomto smyslu tvrditelná, i když není relevantní vzhledem k tématu konverzace a narušuje maximu relace. A konečně může být věta takto tvrditelná, i když je formulována obskurním způsobem, a není tedy v souladu s maximou způsobu. Avšak větu nebudeme považovat za tvrditelnou vzhledem k informačnímu stavu, v němž není dostatek evidence pro takové tvrzení, tj. v jednoduchém případě tehdy, když stav ponechává otevřenou možnost, která není s tvrzenou větou kompatibilní. V rámci níže rozpracované sémantiky pak nabudou tyto zatím nepřesné poznámky konkrétní podoby.

Pro logiku je zcela nezbytné mít k dispozici hranici mezi sémantikou a pragmatikou. Tím, že nějakou takovouto hranici vedu, nechávám otevřený prostor pro pragmatická vysvětlení. Nebylo by to nutné, kdyby bylo možné vytvořit takový aparát, který by dokonale pasoval na jazykové intuice. Ale ať už se budeme jakkoli snažit náš formální systém přiblížit přirozenému jazyku, vždy budou existovat úsudky, které tento systém vyhodnotí jako platné, a přesto budou z nějakých pragmatických důvodů závadné, a dále úsudky, které budou dobře pragmaticky motivované, ale systém je vyhodnotí jako neplatné.

Například i úsudek od A k A *a zároveň* A *a zároveň* A je pragmaticky závadný, ale bylo by absurdní vytvářet logický systém, z jehož hlediska by byl tento úsudek vyhodnocen jako neplatný. Stejně tak vždy i ta nejjednodušší věta daného formálního jazyka bude logicky ekvivalentní s nějakou velmi nepřehlednou a nečitelnou větou. Není nijak rozumné se tomuto vyhýbat, a přesto úsudek od jednoduché věty ke složité může být pragmaticky napadnutelný. Na druhé straně je následující úsudek z pragmatického hlediska přijatelný:

> Petr možná dnes přijde. Tedy Petr možná dnes nepřijde.

Pokud nám někdo sdělí předpoklad tohoto úsudku, odvodíme z toho obvykle jeho závěr. Bylo by však nerozumné ho považovat za logicky platný. Vedlo by to k řadě komplikací. Mohli bychom pak třeba uvažovat takto:

> Petr dnes musí přijít. Není možné, aby nepřišel. Ale pak ani není možné, aby přišel (kdyby to bylo možné, bylo by též možné, že nepřijde). Petr tedy dnes nemůže přijít.

Odvodili bychom tak, že Petr dnes nemůže přijít, z předpokladu, že Petr dnes musí přijít, což je zjevně neuspokojivé. Tyto úvahy naznačují, že nějaký rozdíl mezi sémantikou a pragmatikou je třeba udržet. Avšak kde vést přesnou hranici, to je otázka konvence a máme v tom značnou svobodu. Je třeba najít vhodnou kombinaci sémantiky a pragmatiky, abychom vysvětlili pokud možno co nejvíce logických jevů přirozeného jazyka. Dvě teorie mohou být v tomto ohledu stejně úspěšné, a jsou tedy stejně dobré, přestože kombinují sémantiku a pragmatiku značně odlišným způsobem.

Jak jsme viděli, odlišnou směs sémantiky a pragmatiky najdeme u Grice a Stalnakera. Jelikož Grice přijal klasickou logiku, která se zdá být až moc silná, byl nucen vysvětlovat, proč některé úsudky, které jsou logicky platné, nejsou pragmaticky přijatelné. Stalnakerova logika je zase v některých ohledech příliš slabá, a tak Stalnaker označil úsudkovou formu $p \vee q / \neg p \rightarrow q$ za logicky neplatnou, ale pragmaticky přijatelnou.

10.3 Paradoxy první a druhé třídy

Nyní snad bude patrné, že interpretujeme-li tvrditelnost jakožto striktní tvrditelnost a vyplývání jakožto přenos tvrditelnosti, pak má smysl, aby úsudkové formy, které jsme v oddílu 4.8 klasifikovali jako paradoxy první a druhé skupiny, byly vyhodnoceny jakožto platné. Projdu nyní opět jednotlivé „protipříklady“ a budu komentovat, proč se nejedná o protipříklady, nahlížíme-li je z této nové perspektivy.

I. skupina paradoxů

$q/p \rightarrow q$. Je-li B striktně tvrditelné, tak neexistuje otevřená možnost, že by B bylo nepravdivé. Tedy B musí být pravdivé i v těch případech, ve kterých je pravdivé A, ať už je A jakékoli. Zvažme úsudek: *Zítra se zúčastním* *běžeckého závodu. Tedy pokud si dnes zlomím nohu, tak se zítra zúčastním běžeckého závodu.* Ten nám připadá problematický, protože jeho závěr nám připadá těžko akceptovatelný. Avšak v situaci, kdy je závěr nepřijatelný, nemůže být předpoklad striktně tvrditelný. Tím je protipříklad blokován.

$\neg p/p \rightarrow q$. Tento případ je poněkud kontroverzní. V situaci, kdy je striktně tvrditelné *Ne-A*, v jistém smyslu nebude striktně tvrditelné *Pokud A, B* – a to čistě na základě již zmíněného principu, že indikativní kondicionál můžeme smysluplně použít pouze v situaci, kdy je antecedent možný. Je však otázka, zda tento princip integrovat přímo do sémantiky či zda ho spíše chápat jako princip pragmatický. Ukazuje se, že zohledníme-li ho v rámci formální sémantiky striktní tvrditelnosti, zkomplikuje to tuto sémantiku zcela nežádoucím způsobem. Proto nadále budu považovat tento princip za princip pragmatický, přestože souvisí s indikativními kondicionály tak úzce, že je nepochybně silným kandidátem na sémantický princip. Není-li však v rámci sémantiky zohledněn, tak pokud platí, že *Ne-A* je striktně tvrditelné, bude striktně tvrditelné i *Pokud A, B*, přijmeme-li princip, že ze sporu plyne cokoli. Zvažme úsudek: *Komunisté nevyhrají v příštích volbách. Tedy pokud komunisté vyhrají v příštích volbách, budou prosazovat pravicovou politiku.* Je-li striktně tvrditelné, že komunisté nevyhrají v příštích volbách, tak pokud komunisté vyhrají, máme zde spor, ze kterého plyne cokoli, tedy i to, že budou prosazovat pravicovou politiku. Je patrné, že k obhajobě této úsudkové formy jsme museli přijmout některá kontroverzní opatření.

II. skupina paradoxů

Úsudkové formy druhé skupiny vypadají a priori přijatelně. Zaměříme se tedy pouze na konkrétní problematické instance těchto forem, abychom ukázali, v jakém smyslu se o protipříklady nejedná.

$p \rightarrow \neg q/q \rightarrow \neg p$. Zvažme úsudek: *Pokud Petr udělal chybu, tak ne velkou. Tedy pokud Petr udělal velkou chybu, tak neudělal chybu.* Předpoklad je v jistém kontextově omezeném smyslu ekvivalentní s tím, že Petr neudělal velkou chybu. Je-li toto striktně tvrditelné, tak pokud Petr udělal velkou chybu, máme tu opět spor a můžeme usoudit na cokoli, tedy i na to, že Petr neudělal velkou chybu. I v tomto případě lze tedy klasifikaci úsudku jako platného vztáhnout k principu, že ze sporu plyne cokoli.

$q \rightarrow r, p \rightarrow q/p \rightarrow r$. Zvažme úsudek *Pokud si koupím nové auto, nebudu mít na nájem. Pokud vyhraju milion, koupím si nové auto. Tedy pokud vyhraju milion, nebudu mít na nájem.* Buď v prostoru otevřených možností není svět, v němž vyhraju milion. Pak je závěr automaticky striktně tvrditelný a o protipříklad se nejedná. Nebo je zde otevřená možnost, že vyhraju milion. V takovém případě platí, že je-li striktně tvrditelné, že pokud vyhraju milion, koupím si nové auto, tak není striktně tvrditelné, že pokud si koupím nové auto, nebudu mít na nájem, jelikož je zde otevřená možnost, že vyhraju milion, koupím si nové auto, a přesto budu mít na nájem.

$p \to q/(p \wedge r) \to q$. Zvažme úsudek *Pokud si dám do kávy cukr, bude mi víc chutnat. Tudíž pokud si dám do kávy cukr a benzín, bude mi víc chutnat.* Zde odmítnutí tvrditelnosti závěru poukazuje na to, že předpoklad není striktně tvrditelný.

I když tato vysvětlení nejsou zcela nekontroverzní, ukazují alespoň jistý smysl, v jakém lze dané úsudky považovat za platné. To, že nám připadají stále podezřelé, můžeme vysvětlit tak, že i když v nich nedochází k porušení přenosu striktní tvrditelnosti, dochází v nich – jak jsme viděli v oddílu 8.3 – k porušení přenosu vysoké pravděpodobnosti a jejich problematickou povahu lze vztáhnout k tomuto zdroji.

Domnívám se, že úsudkové formy III. a IV. skupiny nelze obhájit takto jednoduše pomocí stejné strategie. U těchto případů budu postupovat odlišným způsobem. Paradoxy III. skupiny, které vyvstávají při interakci negace s implikací, budou řešeny v prvních dvou oddílech kapitoly 12 pomocí pojmů slabé a silné negace. Paradoxy IV. skupiny týkající se interakce implikace s disjunkcí mohou být řešeny pomocí rozlišení mezi lokální a globální disjunkcí, kterému se budu podrobně věnovat v kapitole 11.

10.4 Základní sémantika tvrditelnosti

V tomto oddílu zformuluji základní podobu sémantického systému založeného na pojmu striktní tvrditelnosti, který po zbytek této práce budu zobecňovat a rozvíjet. Jak již bylo opakovaně řečeno, tvrditelnost je relativní vůči informačním stavům v analogickém smyslu, v jakém je pravdivost relativní vůči možným světům. To ostatně bylo ilustrováno na kripkovské sémantice intuicionistické logiky, kde ovšem informační stavy byly pojaty jako primitivní entity. V následujícím sémantickém přístupu budou nejprve informační stavy modelovány jako množiny možných světů, které v tuto chvíli můžeme ztotožnit s interpretacemi klasické logiky, tedy s funkcemi, které každé atomické formuli přiřazují nějakou pravdivostní hodnotu.

`Definice 10.4.1` *Informačním stavem (nebo též prostě stavem) rozumíme libovolnou množinu možných světů. Možné světy (v tomto oddílu) chápeme jako interpretace klasické výrokové logiky.*

Za touto definicí je představa, že daný soubor informací má ten zásadní efekt, že vylučuje některé možnosti a jiné nechává otevřené. Informační stav lze pak reprezentovat jako soubor těch možností (modelovaných jako možné světy), které jsou z hlediska tohoto stavu stále otevřené. Jedním mezním případem informačního stavu je prázdná množina pojatá jako nekonzistentní informační stav, který neponechává žádnou otevřenou možnost. Tomuto stavu budeme říkat absurdní stav. Druhým extrémem je informační stav sestávající z množiny všech možných světů. Tento informační stav je ztotožněn se stavem úplné ignorance či nevědomosti, takže z hlediska tohoto stavu je každá možnost otevřena. Mezi těmito dvěma krajními případy se nacházejí informační stavy, v nichž některé z původních možností byly dostupnými informacemi eliminovány, ale jiné možnosti zůstávají stále otevřené. Modelování informačních stavů jako množin možných světů lze považovat za poměrně standardní postup, který prosadil zejména Stalnaker. Viz např. (Stalnaker, 1999).

Při formulaci sémantických podmínek využijeme terminologii zavedenou v následující definici.

`Definice 10.4.2` *Každou podmnožinu daného stavu označujeme jako podstav tohoto stavu.*

Kompozicionální sémantické podmínky pro náš základní jazyk L mají následující podobu. Předpokládejme, že a je informační stav:

(a) Atom p je tvrditelný v a právě tehdy, když p je pravdivý v každém světě stavu a.

(b) Formule $\neg\varphi$ je tvrditelná v a právě tehdy, když φ není tvrditelná v žádném neprázdném podstavu stavu a.

(c) Formule $\varphi \wedge \psi$ je tvrditelná v a právě tehdy, když φ je tvrditelná v a a ψ je tvrditelná v a.

(d) Formule $\varphi \vee \psi$ je tvrditelná v a právě tehdy, když existují stavy b, c takové, že φ je tvrditelná v b, ψ je tvrditelná v c, a přitom $b \cup c = a$.

(e) Formule $\varphi \rightarrow \psi$ je tvrditelná v a právě tehdy, když pro každý podstav b stavu a platí, že jestliže φ je tvrditelná v b, tak ψ je tvrditelná v b.

Nazvěme tento systém sémantických podmínek *základní sémantika tvrditelnosti* (ZST). Nyní můžeme standardní logické pojmy definovat pomocí pojmu tvrditelnosti. Daná formule je konzistentní v ZST, když existuje neprázdný informační stav, ve kterém je tvrditelná. Daná formule je logicky platná v ZST, když je tvrditelná v každém informačním stavu. Daný závěr vyplývá v ZST z dané množiny předpokladů, když je závěr tvrditelný v každém stavu, ve kterém jsou tvrditelné všechny předpoklady. Dvě formule jsou logicky ekvivalentní, když jsou tvrditelné ve stejných informačních stavech. Tedy podobně jako v intuicionistické logice je logická konzistence definována jako možnost tvrditelnosti, logická platnost vět jako jejich univerzální tvrditelnost, vyplývání jako přenos tvrditelnosti a logická ekvivalence jako tvrditelnost za stejných okolností. Zavedení sémantických podmínek (a)-(e) lze neformálně zdůvodnit následujícím způsobem.

(a) Atomická formule reprezentuje nějakou elementární větu. Tvrzení elementární věty můžeme z hlediska naší sémantiky chápat jako tvrzení její pravdivosti. Na základě maximy kvality, kterou jsme integrovali do oblasti sémantiky, můžeme tvrdit, že elementární věta je pravdivá, když máme dostatek evidence, že je pravdivá. Chápeme-li tvrditelnost jako striktní tvrditelnost, smíme elementární větu tvrdit pouze tehdy, když náš informační stav nepřipouští, tedy neponechává jako otevřenou možnost (jakkoli nepravděpodobně se tato možnost může jevit), že tato elementární věta je nepravdivá. Daný informační stav je uchopen jako množina možných světů, které chápeme jako možnosti, které stav nechává otevřené. Označme si tuto množinu jako a. Z hlediska a není určeno, který z možných světů množiny a je aktuálním světem, i když předpokládáme, že aktuální svět se nachází někde v a. Elementární větu můžeme tvrdit v a pouze tehdy, když je pravdivá v každém možném světě množiny a, neboť pokud je v nějakém z možných světů nepravdivá, pak není vyloučeno, že tento možný svět je právě aktuálním světem, a tedy není vyloučeno, že elementární věta je aktuálně nepravdivá. Naopak pokud je elementární věta pravdivá v každém možném světě množiny a, tak z hlediska a to znamená, že máme dostatek evidence pro pravdivost věty v aktuálním světě, ať už je to kterýkoli z možných světů množiny a. Ze sémantické podmínky pro atomické formule získáváme dva důležité důsledky.

`Věta 10.4.3` *Pro každou atomickou formuli platí v ZST následující:*

(a) Sjednocení množiny stavů, v nichž je daný atom tvrditelný, je opět stavem, v němž je tento atom tvrditelný.

(b) Je-li daný atom tvrditelný v daném stavu, pak je také tvrditelný ve všech podstavech tohoto stavu.

(b) Porovnáme-li podmínku pro negaci s podmínkou pro implikaci, je vidět, že negace je pojata jako implikace sporu. Spor můžeme chápat jako něco, co je tvrditelné pouze v absurdním stavu. Pro spor bychom mohli zavést primitivní symbol $\perp$. V ZST by se pak tento symbol řídil podmínkou: Formule $\perp$ je tvrditelná v a právě tehdy, když a je prázdná množina. Negace by pak mohla být zavedena (jak tomu taky často bývá při formulaci intuicionistické logiky) jako definovaný symbol: $\neg\varphi =_{def} \varphi \rightarrow \perp$. Oficiálně na tomto místě nevolím tento postup,[7] ale upozorňuji nyní na jeho možnost, aby bylo patrné, že otázka, zda je uvedená podmínka (b) pro negaci přijatelná, se dá redukovat na problém, zda je přijatelná redukce negace na implikaci sporu a zda je přijatelná podmínka (e) pro implikaci. Sémantickou podmínku pro negaci bychom mohli formulovat mírně odlišným, avšak zjevně ekvivalentním způsobem, který navíc naznačuje, jaká myšlenka se za touto podmínkou skrývá. Definujeme, že formule je kompatibilní s daným neprázdným stavem, když je tvrditelná v nějakém neprázdném podstavu tohoto stavu. $\neg\varphi$ je pak tvrditelná v neprázdném informačním stavu právě tehdy, když φ není s tímto stavem kompatibilní.

(c) Podmínka pro konjunkci je přímočará a neproblematická. Konjunkce je tvrditelná právě tehdy, když jsou tvrditelné oba její konjunkty.

(d) Sémantická podmínka pro disjunkci je na první pohled velmi odlišná od podmínky, kterou najdeme ve standardní kripkovské sémantice intuicionistické logiky. Toto téma bude ještě předmětem rozsáhlých a podrobných rozborů. Nyní zformuluji pouze neformální opis podmínky (d). Představme si nějakou větu tvaru *A nebo B*, třeba *Petr je doma nebo (Petr je) v knihovně*. Za jakých okolností, tj. v jakém informačním stavu, je tato věta tvrditelná? Podmínka (d) odpovídá tomu, že tato věta je tvrditelná ve stavu a, když se množina možností obsažených v tomto stavu rozpadá na dvě části, první z nich obsahuje světy, v nichž je Petr doma, druhá světy, v nichž je Petr v knihovně. Tyto dvě části můžeme chápat jako dva informační stavy b a c. V b je tedy tvrditelné, že Petr je doma, v c, že Petr je v knihovně. Přitom tyto dva stavy musí společně pokrývat celý stav a. Kdyby tomu tak nebylo, znamenalo by to, že z hlediska stavu a je otevřenou možností, že Petr není ani doma, ani v knihovně. V takovém stavu by pak nebylo striktně tvrditelné, že Petr je doma nebo v knihovně. Zvláštností podmínky (d) je, že nevylučuje případ, kdy jeden ze stavů b, c je prázdný. To ovšem může nastat pouze tehdy, když druhý z těchto stavů je totožný se stavem a. Vzhledem k tomu, že v prázdném stavu je tvrditelné vše (viz věta 10.4.7), tak tato okolnost zajišťuje, že v ZST vyplývá formule $\varphi \vee \psi$ z φ, tedy zajišťuje to korektnost introdukčního pravidla pro disjunkci.

(e) Nejdéle se pozdržím u implikace. Vysvětlím, že implikace v ZST může být vnímána jako jazyková internalizace kontextově omezeného vyplývání. Tato myšlenka není nepodobná Brandomovu pojetí implikace, dle něhož implikace činí v jazyce explicitními jisté inferenční přechody (Brandom, 1994). Vyplývání bylo výše definováno relativně vůči všem možným informačním stavům jako přenos tvrditelnosti. Pojem vyplývání lze kontextově omezit přirozeným způsobem. Daný kontext můžeme v souladu se Stalnakerem ztotož-

[7] Z technických důvodů bude výhodné tento postup využívat ve čtvrté části této práce.

nit s jistým souborem informací, které jsou v rámci kontextu předpokládány jakožto dané, což lze reprezentovat jako informační stav, tedy jako množinu možných světů (viz oddíl 6.4). To lze ilustrovat na výše rozebíraném McGeeho příkladu s americkými prezidentskými volbami. Zvažme ještě jednou celou situaci, jak byla popsána v oddílu 10.1. Věty, které jsou pro příklad relevantní, formalizujeme pomocí následujících písmen:

Vyhraje Reagan.	p
Vyhraje Carter.	q
Vyhraje Anderson.	r
Vyhraje republikán.	m
Vyhraje demokrat.	n

Volby vymezují kontext, který lze (s přijetím řady zjednodušení) reprezentovat pomocí následující tabulky:

	p	q	r	m	n
s	1	0	0	1	0
t	0	1	0	0	1
u	0	0	1	1	0

Kontext, který si můžeme označit jako a, obsahuje tři možné světy s, t, u. Svět s lze označit jako svět aktuální. Zvažme např. úsudek

163. Vyhraje republikán. Tedy vyhraje Reagan nebo Anderson.

Tento úsudek lze vnímat jako platný v jistém kontextově omezeném slova smyslu, neboť v každém informačním stavu, který je složený ze světů obsažených v kontextu a a ve kterém je tvrditelný předpoklad, je tvrditelný i závěr.

Tuto myšlenku lze zformulovat přesněji a obecněji následujícím způsobem: Řekneme, že informačním stavem v libovolném kontextu a je každá podmnožina množiny možných světů a. Řekneme, že závěr vyplývá z daných předpokladů v kontextu a, když v každém informačním stavu v kontextu a, ve kterém jsou tvrditelné předpoklady, je tvrditelný i závěr. Je patrné, že tato definice koresponduje s obecnou definicí vyplývání ZST s tím jediným rozdílem, že je vše relativizováno vůči kontextu a. Nyní zvažme úsudek obsahující jeden předpoklad (reprezentovaný formulí) φ a závěr (reprezentovaný formulí) ψ. ψ vyplývá z φ v kontextu a, když pro každý informační stav b v kontextu a platí, že pokud φ je tvrditelné v b, tak ψ je tvrditelné v b.

To zjevně platí právě tehdy, když $\varphi \to \psi$ je tvrditelné v a. Nyní je tedy patrné, v jakém slova smyslu sémantická podmínka (d) internalizuje v objektovém jazyce kontextově omezené vyplývání. Tato interpretace implikace je inspirována zejména textem (Ciardelli, 2016b), kde Ivano Ciardelli pracuje se sémantikou, která je z technického hlediska v podstatě identická se ZST.

Sémantická podmínka pro implikaci v systému ZST může být také vnímána jako specifické zachycení striktního indikativního kondicionálního spojení. Tato implikace reprezentuje indikativní kondicionální spojení a nikoli subjunktivní, protože abychom ji vyhodnotili v daném stavu, stačí nám, abychom zvážili *pouze* podstavy tohoto stavu, a tedy sémantická podmínka respektuje hranice stavu, což se jeví jako podstatný aspekt indikativních kondicionálních vět (viz oddíl 6.4). Tato implikace je striktní, protože abychom ji vyhodnotili v daném stavu, musíme zvážit *všechny* podstavy tohoto stavu. Vztah k striktní implikaci logiky $S5$ zvýrazňuje následující fakt.

`Věta 10.4.4` *Formule $\varphi \to \psi$ je tvrditelná ve stavu a právě tehdy, když v každém světě stavu a, ve kterém je pravdivá formule φ, je pravdivá též formule ψ.*

Tato věta se dá jednoduše a přímo dokázat pro atomické formule. Pro libovolné formule lze tuto větu zdůvodnit s použitím níže uvedené věty 10.4.9. Navzdory podobnostem, které jsou vyjádřené ve větě 10.4.4, se však implikace systému ZST podstatným způsobem odlišuje od striktní implikace logiky S5. Rozdíl se projeví, zvážíme-li formule tvaru $\varphi \to (\psi \to \chi)$. Již jsme poukázali na to, že tyto formule se ve standardních systémech striktní implikace vyhodnocují velmi nepřirozeným způsobem (viz oddíl 5.6). V ZST je tento nedostatek odstraněn. V souladu s očekáváním a v kontrastu se striktní implikací logiky S5 platí následující tvrzení. Pro potřeby formulace této věty zaveďme konvenci, že pro libovolnou formuli φ, výraz φ-světy referuje k možným světům, ve kterých je klasicky pravdivá formule φ.

`Věta 10.4.5` *Formule $\varphi \to (\psi \to \chi)$ je tvrditelná ve stavu a právě tehdy, když mezi φ-světy stavu a platí, že všechny ψ-světy jsou zároveň χ-světy.*

Nepřekvapí nás potom, že v tomto systému opět nabývá platnosti kritická ekvivalence.

`Věta 10.4.6` *Formule $\varphi \to (\psi \to \chi)$ je v ZST logicky ekvivalentní formuli $(\varphi \wedge \psi) \to \chi$.*

Tato věta je jedním z důsledků níže uvedené věty 10.4.11. Nyní zformuluji několik elementárních vlastností ZST. Prvním pozorováním je, že v absurdním stavu je tvrditelné vše.

`Věta 10.4.7` *Ve stavu* $\emptyset$ *je tvrditelná každá formule jazyka* L.

Toto tvrzení lze ověřit jednoduše indukcí podle složitosti formule φ, stejně jako následující tvrzení, které říká, že tvrditelnost ve stavech, které obsahují pouze jeden možný svět, se shoduje s pravdivostí v tomto světě ve smyslu klasické výrokové logiky. Toto tvrzení dává smysl vzhledem k tomu, že jsme ztotožnili možné světy s interpretacemi klasické výrokové logiky.

`Věta 10.4.8` *Pro každý svět* s *a každou formuli* φ *platí, že* φ *je tvrditelná v* $\{s\}$ *právě tehdy, když* φ *je pravdivá (z hlediska klasické logiky) v* s.

Pozoruhodným výsledkem pak je, že tato věta lze zesílit následujícím způsobem.

`Věta 10.4.9` *Formule je tvrditelná v daném informačním stavu právě tehdy, když je pravdivá (z hlediska klasické logiky) v každém světě tohoto stavu.*

Tato věta zaručuje, že se komplexní formule chovají stejným způsobem jako atomické formule. Jedním přímočarým důsledkem pak je, že větu 10.4.3 můžeme formulovat obecně, tedy nejen pro atomické formule.

`Věta 10.4.10` *Pro každou formuli platí v ZST následující:*

(a) Sjednocení množiny stavů, v nichž je tato formule tvrditelná, je opět stavem, v němž je tato formule tvrditelná.

(b) Je-li tato formule tvrditelná v daném stavu, pak je také tvrditelná ve všech podstavech tohoto stavu.

Dalším důsledkem věty 10.4.9 je pak redukce ZST na klasickou logiku.

`Věta 10.4.11` *(a) Daná formule je logicky konzistentní v ZST právě tehdy, když je logicky konzistentní v klasické logice. (b) Daná formule je logicky platná v ZST právě tehdy, když je logicky platná v klasické logice. (c) Závěr vyplývá z předpokladů v ZST právě tehdy, když vyplývá z těchto předpokladů v klasické logice. (d) Dvě formule jsou logicky ekvivalentní v ZST právě tehdy, když jsou logicky ekvivalentní v klasické logice.*

Tato věta může zprvu vést k jistému pocitu zklamání, neboť jeden z motivů k zavedení ZST byla snaha revidovat klasickou logiku, která se v určitých svých rysech chová neadekvátním způsobem, chceme-li ji vztáhnout na přirozený jazyk. Přidá-li se k tomu fakt, že ZST je značně komplikovanější než standardní „tabulková“ sémantika klasické logiky, vypadá to tedy, že jsme si tímto přechodem od standardní sémantiky klasické logiky k sémantice epistemické nijak nepomohli a že tento krok byl zcela zbytečný. Cílem této a následujících kapitol je mimo jiné ukázat, že takový závěr je neoprávněný. Uvidíme, že ZST otevírá prostor pro zajímavá zobecnění a rozšíření, která nejsou ve standardní sémantice klasické logiky nijak přímo dostupná.

Další výhodou je, že námi navržený systém ZST poskytuje adekvátnější reprezentační nástroje pro analýzu některých jevů přirozeného jazyka. Zvažme opět příklad s americkými prezidentskými volbami. Úsudek 160 můžeme formalizovat s ohledem na výše uvedenou tabulku jako

164. $m \rightarrow (\neg p \rightarrow r), m / \neg p \rightarrow r.$

Rozveďme nyní systematičtěji a s ohledem na ZST, co jsme již zmínili v oddílu 10.1. Řekněme, že se pohybujeme v rámci teorie, která definuje vyplývání jako přenos určité sémantické hodnoty (pravdivosti či tvrditelnosti) a v níž je navíc modus ponens platným principem. Chceme-li obhájit, že situace před prezidentskými volbami nepředstavuje přirozený protipříklad k úsudkové formě 164, musíme ukázat, že v této situaci nastává alespoň jeden z následujících případů:

(a) Věta reprezentovaná formulí $m \rightarrow (\neg p \rightarrow r)$ v dané situaci *neměla* tu sémantickou hodnotu, kterou vyplývání přenáší.

(b) Věta reprezentovaná formulí m v dané situaci *neměla* tu sémantickou hodnotu, kterou vyplývání přenáší.

(c) Věta reprezentovaná formulí $\neg p \rightarrow r$ v dané situaci *měla* tu sémantickou hodnotu, kterou vyplývání přenáší.

V případě ontických teorií je onou sémantickou hodnotou pravdivost, v případě epistemických teorií se jedná o tvrditelnost. Porovnejme vzhledem k tomuto příkladu čtyři sémantické systémy, z jejichž hlediska je modus ponens platným úsudkovým schématem: Stalnakerovu sémantiku (SS), sémantiku striktní implikace (SSI), standardní sémantiku klasické výrokové logiky (SSKL) a základní sémantiku tvrditelnosti (ZST). Následující tabulka ukazuje, v čem se tyto sémantické systémy liší, co se týče tvrzení (a), (b), (c).

	platí	neplatí
SS	(a)	(b), (c)
SSI	(a)	(b), (c)
SSKL	(c)	(a), (b)
ZST	(b)	(a), (c)

Z hlediska Stalnakerovy sémantiky a teorie striktní implikace C. I. Lewise je situace analyzována tak, že platí případ (a), zatímco případy (b) a (c) neplatí, což – jak jsem výše argumentoval – není uspokojivé řešení. Máme-li k dispozici standardní sémantiku klasické logiky, zavazuje nás to k tomu, abychom řekli, že v dané situaci platí případ (c), i když (a) a (b) neplatí, což se také jeví jako neadekvátní reprezentace. Analyzujeme-li celou situaci v ZST, vyhodnotíme ji tak, že nastává případ (b), zatímco (a) a (c) neplatí (což vzhledem k výše řečenému odpovídá tomu, že $\neg p \rightarrow r$ kontextuálně vyplývá z m, ale r nevyplývá kontextuálně z $\neg p$). To působí jako adekvátní reprezentace celé situace s ohledem na to, že sémantickou hodnotou je zde míněna striktní tvrditelnost. Celý tento příklad ilustruje, v jakém smyslu můžeme dát přednost jedné sémantické teorii před jinou, přestože obě vymezují jednu a tutéž relaci důsledku a extenzionálně se shodují i v ostatních logických pojmech.

Zcela zásadní výhodou systému ZST je, že otevírá prostor pro řadu možných rozšíření a zobecnění, která se ukážou jako technicky zajímavá a užitečná i s ohledem na jisté fenomény přirozeného jazyka. Těmto modifikacím se budeme věnovat až do konce této práce.

Ve světle ZST se též snižuje síla kritiky, kterou proti klasické logice formuloval C. I. Lewis. Implikace je v ZST uchopena jako internalizované kontextově omezené vyplývání a na toto pojetí se nevztahují Lewisovy námitky, které lze použít pouze proti materiální implikaci, tedy proti standardní sémantice klasické logiky. To potvrzuje i náhled, že do jisté míry se implikace systému ZST chová jako striktní implikace.

Pozoruhodným aspektem ZST, který budeme dále akcentovat, je, že představuje v jistém smyslu určitou kombinaci relační a algebraické sémantiky. Jedná se o relační sémantiku v tom smyslu, že je tento systém založen na relaci mezi formulemi a prvky nějaké uspořádané struktury. Avšak tato uspořádaná struktura informačních stavů tvoří algebraickou strukturu, která se typicky používá v algebraické sémantice klasické logiky. Jedná se o Booleovu algebru množin. Tato atypická syntéza relační a algebraické sémantiky tvoří jádro neobvyklého sémantického přístupu, jehož rozpracování je jedním z hlavních přínosů této práce.

10.5 První stupeň zobecnění

ZST ilustruje fakt, že klasickou logiku lze založit – podobně jako intuicionistickou logiku – na pojmu tvrditelnosti, a tedy epistemicky. Jaký je vztah ZST k intuicionistické logice, to naznačí tento oddíl.

Tak, jak byla vymezena v předchozím oddílu, je ZST sémantikou tvrditelnosti v tom smyslu, že je vystavěna na kompozicionálních podmínkách tvrditelnosti. Podmínky tvrditelnosti komplexu jsou redukovány na podmínky tvrditelnosti jeho složek. Vše je tedy fundováno v podmínce tvrditelnosti atomických formulí. Na podmínce tvrditelnosti pro atomické formule však vidíme, že celý pojem tvrditelnosti je ve výsledku závislý na pojmu pravdivosti, který v celé sémantice figuruje jako pojem primitivní. Tento postup však lze otočit. Mohli bychom celou sémantiku vystavět na pojmu tvrditelnosti bez odkazu k pojmu pravdivosti a pravdivost definovat na základě tvrditelnosti.

Stručně tento alternativní směr načrtnu. Předpokládejme, že možný svět je nyní chápán jako primitivní pojem a není definován jako interpretace klasické logiky. Nyní zavedeme základní pojmy alternativního vymezení ZST, které od této doby budeme považovat za oficiální. Problematickým bodem je tedy to, jak založit sémantiku atomických formulí bez odkazu k pojmu pravdivosti. Lze to ošetřit tak, že zavedeme pojem ohodnocení, který přímo určí, ve kterých stavech jsou atomické formule tvrditelné. Abychom však docílili formální shody se ZST, musíme předpokládat, že pro tvrditelnost atomických formulí platí body (a), (b) věty 10.4.3. Množina stavů, v nichž je tvrditelná daná atomická formule p, tedy musí být uzavřena na podstavy a na libovolná sjednocení. To znamená, že sjednotíme-li všechny stavy, v nichž je p tvrditelná, získáme opět stav, v němž je p tvrditelná. Je to maximální stav s touto vlastností. Označme si tento stav jako a_p. Z uzavřenosti na podstavy pak vyplývá, že atomická formule p je tvrditelná ve stavu b právě tehdy, když b je podstavem stavu a_p. Tedy množina stavů, v nichž je tvrditelná daná atomická formule, tvoří potenční množinu nějakého stavu, který získáme jako sjednocení všech stavů, v nichž je tato atomická formule tvrditelná. Stačí, když valuace každé atomické formuli přiřadí takovýto stav. Tím se dostáváme k následujícímu pojmu.

`Definice 10.5.1` *Diskrétní informační prostor je dvojice $\langle W, \wp(W)\rangle$, kde W je libovolná neprázdná množina možných světů a $\wp(W)$ je potenční množina množiny W, tedy množina všech jejích podmnožin. Prvky množiny $\wp(W)$ označujeme jako informační stavy. Diskrétní informační model je definován jako trojice $\langle W, \wp(W), V\rangle$, kde $\langle W, \wp(W)\rangle$ je diskrétní informační prostor a V je ohodnocení atomů definované jako funkce přiřazující každé atomické formuli nějaký stav $a \in \wp(W)$.*

Vzhledem k danému diskrétnímu informačnímu modelu $\langle W, \wp(W), V\rangle$ definujeme opět rekurzivním způsobem relaci tvrditelnosti mezi informačními stavy (tj. prvky množiny $\wp(W)$) a formulemi jazyka L. Podmínky jsou zcela stejné jako ty v předchozím oddílu. Jediný rozdíl spočívá v podmínce pro atomické formule, která nyní vypadá takto:

(a)* Atom p je tvrditelný v a právě tehdy, když $a \subseteq V(p)$.

Je patrné, v jakém smyslu je výsledný sémantický aparát ekvivalentní tomu, který jsme zavedli v předchozím oddílu. Filosoficky relevantní je ta okolnost, že nyní jsme k formulaci celé sémantiky nepotřebovali pojem pravdivosti. Naopak to, co bylo formulováno ve větě 10.4.8 jako dokazatelné tvrzení, můžeme nyní použít jako definici pojmu pravdivosti a tím tento pojem redukovat na pojem tvrditelnosti: Formule φ je pravdivá ve světě s (vzhledem k danému diskrétnímu informačnímu modelu) právě tehdy, když je tvrditelná v informačním stavu $\{s\}$. Pravdivost je tedy definována jako limitní případ tvrditelnosti, což připomíná situaci v kripkovské sémantice intuicionistické logiky (viz oddíl 9.3).

Nová reformulace ZST má ještě jednu přednost. Nabízí se nyní jeden způsob zobecnění celého systému. Informační stavy teď nejsou pojaty jako izolované entity. Jsou integrovány v nějakém „informačním prostoru“. Pro jisté účely je přínosné připustit, že tento prostor může mít „díry“, tj. může se stát, že některé množiny možných světů nepředstavují informační stavy, nejsou v informačním prostoru dosažitelné. To vede k následující definici, která zobecňuje definici 10.5.1.

`Definice 10.5.2` *Informační prostor je definován jako dvojice $\langle W, \tau \rangle$, kde W je libovolná neprázdná množina možných světů a τ je množina (ne nutně všech) podmnožin množiny W, o které předpokládáme, že obsahuje prázdnou množinu a množinu W. Prvky množiny τ označujeme jako informační stavy. Informační model je definován jako trojice $\langle W, \tau, V \rangle$, kde $\langle W, \tau \rangle$ je informační prostor a V je ohodnocení (či valuace) atomů, což je definováno jako funkce, která každé atomické formuli přiřadí nějaký prvek množiny τ.*

Diskrétní informační modely jsou tedy specifickým příkladem informačních modelů. Je zřejmé, že zobecněné definici informačního prostoru musíme přizpůsobit pojem podstavu. Je-li $\langle W, \tau \rangle$ informačním prostorem a $a \in \tau$ informačním stavem tohoto prostoru, pak podstavy stavu a (vzhledem k $\langle W, \tau \rangle$) jsou ty prvky τ, které jsou podmnožinami stavu a. Relativně k danému informačnímu modelu $\langle W, \tau, V \rangle$ můžeme nyní použít podmínky (a)*, (b), (c), (d), (e) definující tvrditelnost mezi stavy z množiny τ a formulemi jazyka L.

Jak uvidíme, takto zobecněná sémantika se začne chovat velmi ukázněným způsobem, když požadujeme, aby informační stavy tvořily topologii. Řekneme, že informační prostor $\langle W, \tau \rangle$ je topologický, když množina τ je topologie, tj. je uzavřena na konečné průniky a libovolná sjednocení. Informační model $\langle W, \tau, V \rangle$ je topologický, když je informační prostor $\langle W, \tau \rangle$ topologický. V této souvislosti si můžeme vypomoci slovní hříčkou, neboť je-li informační prostor topologický, pak topologii na množině možných světů interpretujeme tak, že její otevřené množiny představují množiny otevřených možností.

Sémantiku informačních prostorů omezenou na topologické informační prostory budeme označovat jako *topologickou sémantiku tvrditelnosti* (TST). Definujeme pak, že daná formule je logicky konzistentní v TST, když existuje neprázdný informační stav nějakého topologického informačního modelu, v němž je tato formule tvrditelná. Daná formule je logicky platná v TST, když je tvrditelná v každém informačním stavu každého topologického informačního modelu. Daný závěr vyplývá v TST z dané množiny předpokladů, když pro každý informační stav každého topologického informačního prostoru platí, že pokud jsou v tomto stavu tvrditelné předpoklady, je zde tvrditelný i závěr. Dvě formule jsou logicky ekvivalentní, když jsou tvrditelné ve stejných informačních stavech.

Význam vlastností definujících topologii spočívá v tom, že si vynucují platnost následující věty, která zobecňuje větu 10.4.10. Toto tvrzení je dokázáno jako bod (b) věty 13.1.6 v kapitole 13.

`Věta 10.5.3` *Pro každou formuli platí v TST, tj. v libovolném topologickém informačním modelu, následující:*

(a) *Sjednocení množiny stavů, v nichž je tato formule tvrditelná, je opět stavem, v němž je tato formule tvrditelná.*

(b) *Je-li tato formule tvrditelná v daném stavu, pak je také tvrditelná ve všech podstavech tohoto stavu.*

Z předchozí věty plyne následující. Podmínky definující topologii zajišťují vzhledem k libovolnému danému modelu $\langle W, \tau, V \rangle$, že pro každou formuli φ existuje informační stav a takový, že množina stavů, v nichž je tvrditelná formule φ, je přesně množina všech podstavů stavu a. To ovšem znamená, že komplexní formule se chovají stejně jako atomické formule.

V oddílu 9.4 jsem popsal, jak Tarski (1938) zobecnil množinově algebraickou sémantiku klasické logiky a získal tak jednu z prvních sémantik intuicionistické logiky. Přechod od ZST k TST představuje zcela analogický typ zobecnění. TST se však svým charakterem odlišuje podstatným způsobem od Tarského topologické sémantiky. TST je založena na relaci mezi formulemi a otevřenými množinami topologického informačního modelu. Tato sémantika se tedy podobá spíše relačním sémantikám, jako je zejména kripkovská sémantika. Oproti tomu je Tarského topologická sémantika svojí povahou algebraická. Není založena na relaci mezi prvky nějaké struktury a formulemi, nýbrž na podmínkách, které lokalizují formule v dané struktuře. Jedná se tedy o dva podstatně odlišné sémantické přístupy. Není tedy na první pohled nijak zřejmé, že tyto přístupy determinují stejnou logiku. A to i přesto, že oba systémy, tj. TST a Tarského topologická sémantika, pracují se stejným typem struktur. Můžeme si totiž povšimnout, že pojem topologického informačního modelu se zcela shoduje s pojmem topologického modelu intuicionistické logiky, jak byl zaveden v oddílu 9.4. Dává pak smysl následující tvrzení, které teprve odhaluje, že obě sémantiky spolu úzce souvisejí. $V(\varphi)$ v tomto tvrzení představuje informační stav, který je přiřazen formuli φ Tarského topologickou sémantikou.

`Věta 10.5.4` *Předpokládejme, že* $\langle W, \tau, V\rangle$ *je topologický informační model, a je informační stav z* τ *a* φ *je libovolná formule jazyka L. Pak platí, že* φ *je tvrditelná ve stavu a právě tehdy, když* $a \subseteq V(\varphi)$.

Tato věta je důsledkem obecnějšího tvrzení, které později formuluji i s důkazem jako větu 14.3.5. Z věty 10.5.4 pak jednoduše vyplývá věta následující, ke které jsme v tomto oddílu směřovali.[8]

`Věta 10.5.5` *(a) Daná formule je logicky konzistentní v TST právě tehdy, když je logicky konzistentní v intuicionistické logice. (b) Daná formule je logicky platná v TST právě tehdy, když je logicky platná v intuicionistické logice. (c) Závěr vyplývá z předpokladů v TST právě tehdy, když vyplývá z těchto předpokladů v intuicionistické logice. (d) Dvě formule jsou logicky ekvivalentní v TST právě tehdy, když jsou logicky ekvivalentní v intuicionistické logice.*

Vztah TST ke standardní kripkovské sémantice intuicionistické logiky je podrobně zkoumán v kapitole 13.

10.6 Druhý stupeň zobecnění

Podnikneme nyní druhý zobecňující krok, který je analogický tomu, když v algebraické sémantice klasické logiky přecházíme od algebry propozic k libovolným Booleovým algebrám, či když v algebraické sémantice intuicionistické logiky přecházíme od topologických prostorů k Heytingovým algebrám. Struktura informačních stavů tvoří určitou algebraickou strukturu. Ptáme se nyní, které aspekty této struktury potřebujeme k formulaci sémantiky tvrditelnosti. Projdeme-li jednotlivé podmínky pro jednotlivé spojky, můžeme konstatovat, že potřebujeme tři ingredience, abychom mohli definovat ZST či její zobecnění TST:

(a) jeden význačný informační stav, který nazýváme stavem absurdním,

(b) operaci sjednocení na informačních stavech,

[8] Viz též související větu 13.2.10.

(c) relaci inkluze mezi informačními stavy.

(a) se vyskytuje v sémantické podmínce pro negaci, (b) v sémantické podmínce pro disjunkci, (c) v sémantické podmínce pro negaci a implikaci. Z algebraického hlediska je prázdná množina nulovým prvkem množinové algebry, sjednocení je pak supremem vzhledem k inkluzi. Operace sjednocení a inkluze jsou vzájemně definovatelné. Máme-li operaci sjednocení, můžeme pomocí ní definovat inkluzi prostřednictvím následující ekvivalence:

$a \subseteq b$ právě tehdy, když $a \cup b = a$.

Naopak, máme-li inkluzi, můžeme s její pomocí vymezit sjednocení takto:

$a \cup b = c$ právě tehdy, když $a \subseteq c$ a $b \subseteq c$ a $c \subseteq d$ pro každé d takové, že $a \subseteq d$ a $b \subseteq d$ (tj. $a \cup b$ je supremum množiny $\{a, b\}$).

Potřebujeme tedy uspořádanou množinu informačních stavů s vyznačeným nulovým prvkem a operací, která každým dvěma informačním stavům přiřadí jejich supremum. Navíc si povšimněme, že na obecnější úrovni TST se již vůbec nepotřebujeme odkazovat k jednotlivým možným světům a vystačíme si pouze s informačními stavy a jejich strukturou. To znamená, že pojem informačního stavu můžeme, podobně jako v kripkovské sémantice intuicionistické logiky, zavést jako primitivní pojem. Tato pozorování nás vedou k algebraickému pojmu známému jako polosvaz s nulovým prvkem.

`Definice 10.6.1` *Algebrou informačních stavů budeme rozumět libovolný polosvaz s nulovým prvkem. To znamená, že algebra informačních stavů je struktura typu $\langle S, +, 0\rangle$, kde S je libovolná neprázdná množina (informačních stavů), $+$ je binární operace na množině S a 0 je prvek množiny S. Přitom jsou pro libovolné stavy a, b, c splněny následující podmínky:*

$a + (b + c) = (a + b) + c$ *asociativita*

$a + b = b + a$ *komutativita*

$a + a = a$ *idempotence*

$a + 0 = a$ *neutrální prvek*

Uspořádání $\leqslant$ na množině informačních stavů je definováno následujícím předpisem:

$a \leqslant b$ právě tehdy, když $a + b = b$.

V případě, že $a \leqslant b$, říkáme, že stav a je podstavem stavu b.

Asociativita, komutativita a idempotence dohromady zajišťují, že $\leqslant$ je uspořádání na množině informačních stavů a $a + b$ je supremem množiny $\{a, b\}$ vzhledem k tomuto uspořádání. Vzhledem k definici uspořádání vidíme, že poslední podmínka se transformuje na podmínku, která říká, že pro každé $a \in S$ platí $0 \leqslant a$. Tedy 0 je nejmenším prvkem celé struktury. Snad není matoucí, že symbol 0 jsme ve standardní sémantice klasické výrokové logiky používali pro zcela jiný účel, totiž k označení pravdivostní hodnoty. Zde – podobně jako v obecné algebraické sémantice – vystupuje v jiném smyslu. V algebraické sémantice označoval tento symbol absurdní propozici, nyní označuje absurdní či nekonzistentní informační stav.

Na této úrovni obecnosti, kdy již nemáme k dispozici možné světy, ale pouze informační stavy, nebudeme předpokládat, že pro každou atomickou formuli existuje maximální informační stav, v němž je tato formule tvrditelná. Přijmeme o něco slabší požadavek, který vychází z interpretace operace $+$. Tato operace je operací na informačních stavech. Libovolným informačním stavům a, b přiřazuje stav $a + b$. Tento stav je užitečné chápat jako sestávající z informací, které jsou společné stavům a a b. Tento pohled bude později podložen větou 10.6.11, ale nyní je jen motivační a sugeruje pouze jisté prizma, skrze které se na algebraickou strukturu informačních stavů máme dívat. Toto prizma nám pomůže obhájit restriktivní podmínky, které zavedeme pro valuace. Ovšem striktně vzato platí, že v rámci toho, jak jsou definice nastaveny, se informační stavy z žádných informací neskládají, neboť jsou to primitivní entity. Nicméně právě v této interpretaci binární operace na informačních stavech se předložená sémantika liší od podobných sémantických systémů jako jsou třeba ty popsané v (Veltman, 1984), (Urquhart, 1972) či (Fine, 2014). Sémantické struktury těchto systémů jsou také polosvazy s nulovým prvkem, avšak binární operace na těchto strukturách je interpretována spíše jako fúze dvou stavů. Formule platí ve fúzi stavů a a b, když platí ve stavu a nebo ve stavu b. Oproti tomu v naší algebraické sémantice bude platit, že formule je tvrditelná ve stavu $a + b$, když je tvrditelná ve stavu a a zároveň ve stavu b. Podobná operace na informačních stavech se objevuje např. v informační sémantice zavedené v (Wansing, 1993).

Abychom mohli uvést podmínky tvrditelnosti, potřebujeme pojem valuace či ohodnocení, který určí, jaké atomy jsou tvrditelné v jakých stavech. V rámci TST tomu bylo tak, že valuace danému atomu přiřadila vždy jeden informační stav, který sám stačil k tomu, aby určil, v jakých stavech je tento atom tvrditelný. Atom p je tvrditelný právě v podstavech stavu $V(p)$. Avšak nyní se nalézáme na jiné úrovni abstrakce, kde již předpoklad maximálního stavu nemáme k dispozici. Valuace zde nebudou přiřazovat atomům jeden stav, nýbrž množinu všech stavů, v nichž je atom tvrditelný. Nebude se ovšem jednat o libovolnou množinu, můžeme přijmout jisté restriktivní podmínky, které nyní specifikuji.

Zamýšlená role absurdního stavu je taková, že v něm má být tvrditelné vše. Tedy speciálně i každý atom. Navíc vzhledem ke zmíněné interpretaci operace + je přirozené požadovat, aby atomy splňovaly následující dvě podmínky:

(a) Jestliže je atom tvrditelný v a i b, pak je tvrditelný v $a + b$.

(b) Jestliže je atom tvrditelný v $a + b$, pak je tvrditelný v a i b.

První podmínka říká, že je-li atom tvrditelný ve dvou stavech, pak je tvrditelný i ve stavu sestávajícím z informací, které jsou společné těmto stavům. To je rozumný požadavek, neboť je-li atom tvrditelný ve dvou stavech, pak představuje informaci, která je společná těmto stavům. Druhá podmínka říká, že jestliže je atom tvrditelný ve stavu sestávajícím z informací, které jsou společné dvěma daným stavům, pak musí být tvrditelný také v těchto dvou stavech, což je opět rozumný požadavek. Celkem tedy požadujeme, aby platilo:

(1) Každý atom je tvrditelný v 0.

(2) Atom je tvrditelný v $a + b$ právě tehdy, když je tvrditelný v a i b.

Množiny prvků vyhovující těmto podmínkám hrají výsadní roli v teorii polosvazů. Říká se jim *ideály*.

`Definice 10.6.2` *Nechť $\mathcal{A} = \langle S, +, 0\rangle$ je algebra informačních stavů. Podmnožina I množiny S se nazývá ideál v $\mathcal{A}$, když jsou splněny následující dvě podmínky.*

(a) $0 \in I$.

(b) $a + b \in I$ *právě tehdy, když* $a \in I$ *a zároveň* $b \in I$.

Za pomoci uspořádání $\leqslant$ lze formulovat alternativní, běžnější vymezení ideálů. Platí, že I je ideálem v $\mathcal{A}$ právě tehdy, když jsou splněny následující tři podmínky

(a) $0 \in I$.

(b) Jestliže $a \in I$ a zároveň $b \in I$, tak $a + b \in I$.

(c) Jestliže $a \in I$ a zároveň $b \leqslant a$, tak $b \in I$.

Toto tvrzení ukazuje, že pojem ideálu může být vymezen pomocí pojmu podalgebry a dolů uzavřené množiny.

`Definice 10.6.3` *Nechť $\mathcal{A} = \langle S, +, 0\rangle$ je algebra informačních stavů. Podalgebra algebry $\mathcal{A}$ je taková podmnožina množiny S, která obsahuje absurdní stav 0 a je uzavřena na operaci $+$, tj. obsahuje-li dva stavy a, b, obsahuje též stav $a+b$. Dolů uzavřená množina v algebře $\mathcal{A}$ je taková podmnožina množiny S, která je uzavřena na podstavy, tj. obsahu-li a, obsahuje též každý podstav stavu a.*

Ideály v algebře $\mathcal{A}$ jsou tedy dolů uzavřené podalgebry algebry $\mathcal{A}$. Na algebrách informačních stavů nyní můžeme zavést valuace, které každému atomu přiřadí nějaký ideál reprezentující množinu stavů, v nichž je daný atom tvrditelný. Tím se dostáváme k pojmu algebraického informačního modelu.

`Definice 10.6.4` *Algebraickým informačním modelem na algebře informačních stavů $\mathcal{A}$ rozumíme dvojici $\langle \mathcal{A}, V\rangle$, kde V je valuace v $\mathcal{A}$, kterou definujeme jako funkci přiřazující každé atomické formuli nějaký ideál v $\mathcal{A}$.*

Podmínky tvrditelnosti kopírují podmínky, se kterými jsme se setkali v ZST a TST. Pro daný algebraický informační model tedy zavádíme tyto podmínky:

(a) Atom p je tvrditelný v a právě tehdy, když $a \in V(p)$.

(b) Formule $\neg\varphi$ je tvrditelná v a právě tehdy, když φ není tvrditelná v žádném nenulovém podstavu stavu a.

(c) Formule $\varphi \wedge \psi$ je tvrditelná v a právě tehdy, když φ je tvrditelná v a a ψ je tvrditelná v a.

(d) Formule $\varphi \vee \psi$ je tvrditelná v a právě tehdy, když existují stavy b, c takové, že φ je tvrditelná v b, ψ je tvrditelná v c, a přitom $b + c = a$.

(e) Formule $\varphi \to \psi$ je tvrditelná v a právě tehdy, když pro každý podstav b stavu a platí, že jestliže φ je tvrditelná v b, tak ψ je tvrditelná v b.

První pozorování je zobecnění věty 10.4.7 platící pro každý algebraický informační model.

`Věta 10.6.5` *Ve stavu 0 je tvrditelná každá formule jazyka L.*

Nyní se budeme zabývat tím, zda se podstatné sémantické vlastnosti atomických formulí přenášejí i na komplexní formule. Za tímto účelem zavedeme technický pojem propozice. Nechť $\mathcal{M}$ je algebraický informační model. $\|\varphi\|_{\mathcal{M}}$ bude označovat propozici, kterou vyjadřuje formule φ v modelu $\mathcal{M}$. Tuto propozici definujeme jako množinu stavů modelu $\mathcal{M}$, ve kterých je tvrditelná formule φ. Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme index $\mathcal{M}$ vynechávat. Dále zavedeme dvě vlastnosti formulí: regularitu a perzistenci. Později uvidíme, že obě tyto vlastnosti jsou významné pro analýzu přirozeného jazyka. Pomocí regularity a perzistence jakožto vlastností formulí, které jsou relativní vůči algebraickým informačním modelům, zavedeme též pojmy regularity a perzistence jakožto vlastnosti algeber informačních stavů.

`Definice 10.6.6` *Nechť $\mathcal{M}$ je algebraický informační model na algebře informačních stavů $\mathcal{A}$. Řekneme, že φ je regulární v $\mathcal{M}$, když $\|\varphi\|$ je podalgebra algebry $\mathcal{A}$. Řekneme, že formule φ je perzistentní v $\mathcal{M}$, když $\|\varphi\|$ je dolů uzavřená množina v $\mathcal{A}$. Řekneme, že algebra informačních stavů je regulární (resp. perzistentní), když každá formule jazyka L je regulární (resp. perzistentní) v každém modelu na této algebře.*

Každá atomická formule je regulární a perzistentní v každém algebraickém informačním modelu, neboť vyjadřuje nějaký ideál, tj. dolů uzavřenou podalgebru. Jak je tomu s komplexními formulemi? Obecně neplatí, že by každá formule byla regulární a perzistentní. Platí však následující tvrzení.[9]

`Věta 10.6.7` *Nechť φ je formule jazyka L. Vzhledem k libovolnému algebraickému informačnímu modelu $\mathcal{M}$ platí*

(a) Pokud φ neobsahuje implikaci, pak φ je regulární v $\mathcal{M}$.

(b) Pokud φ neobsahuje disjunkci, pak φ je perzistentní v $\mathcal{M}$.

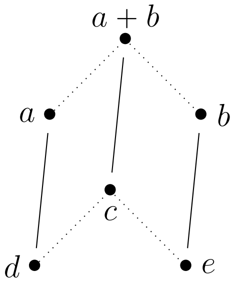
Na úrovni prvního stupně zobecnění jsme uvedli, že tvoří-li informační stavy topologii, chovají se všechny komplexní formule stejně jako formule atomické. Na druhém stupni zobecnění také můžeme formulovat podmínku, která charakterizuje algebry informačních stavů, v nichž se komplexní formule chovají „spořádaně“. A půjde zde o skutečnou charakterizaci, neboť uvidíme, že tato podmínka je nejen postačující, ale i nutnou podmínkou spořádanosti. Jedná se o tzv. distributivitu.

`Definice 10.6.8` *Algebra informačních stavů $\langle S, +, 0\rangle$ je distributivní, když v ní obecně platí následující podmínka:*

Pokud $c \leqslant a + b$, tak pro nějaké stavy d, e platí $d \leqslant a$, $e \leqslant b$ a $d + e = c$.

Podmínku distributivity lze ilustrovat následujícím obrázkem:

[9] Tvrzení je znovu formulováno a dokázáno ve čtvrté části jako věta 14.1.7.



Důvod, proč se této podmínce říká distributivita, je vysvětlen v oddílu 14.2. Následuje velmi překvapivý výsledek, který mimo jiné ukazuje, že distributivita je nutnou a postačující podmínkou toho, aby všechny komplexní formule vyjadřovaly propozice téhož druhu jako atomické formule.[10]

`Věta 10.6.9` *Předpokládejme, že $\mathcal{A}$ je algebra informačních stavů. Následující podmínky jsou ekvivalentní.*

(a) *$\mathcal{A}$ je regulární.*

(b) *$\mathcal{A}$ je perzistentní.*

(c) *$\mathcal{A}$ je distributivní.*

Tato věta mimo jiné ukazuje, že v distributivních algebrách všechny formule vyjadřují ideály. Ve skutečnosti dokonce platí, že algebra propozic je algebra ideálů. Ideály tvoří na algebře informačních stavů svaz, kde ke každým dvěma ideálům I, J existuje supremum $I \oplus J$ a infimum $I \otimes J$.

`Věta 10.6.10` *Vzhledem k libovolnému algebraickému informačnímu modelu a na libovolné distributivní algebře informačních stavů platí pro libovolné formule φ, ψ:*[11]

(a) $\|\varphi \wedge \psi\| = \|\varphi\| \otimes \|\psi\|$,

(b) $\|\varphi \vee \psi\| = \|\varphi\| \oplus \|\psi\|$,

(c) $\|\varphi \to \psi\|$ *je největší ideál I takový, že* $\|\varphi\| \otimes I \subseteq \|\psi\|$,

(d) $\|\neg\varphi\|$ *je největší ideál I takový, že* $\|\varphi\| \otimes I = \{0\}$.

Jako důsledek věty 10.6.9 získáváme též tvrzení, které ukazuje, v jakém smyslu můžeme chápat stav $a + b$ jako stav sestávající z informací, které jsou společné stavům a a b.

[10] Ve čtvrté části je věta formulována spolu s důkazem pod číslem 14.2.6.

[11] Viz věta 14.3.3.

`Věta 10.6.11` *Nechť $\mathcal{M}$ je algebraický informační model na distributivní algebře informačních stavů. Předpokládejme, že pro libovolný stav a tohoto modelu označuje $t(a)$ množinu všech formulí, které jsou v $\mathcal{M}$ tvrditelné ve stavu a. Pak pro každé dva stavy a, b v $\mathcal{M}$ platí, že*

$$t(a + b) = t(a) \cap t(b).$$

Na základě věty 10.6.9 dává smysl omezit se na distributivní algebry informačních stavů. Sémantiku těchto algeber budeme označovat jako *algebraickou sémantiku tvrditelnosti* (AST). Definujeme, že daná formule je logicky konzistentní v AST, když existuje nenulový informační stav nějakého distributivního algebraického informačního modelu, v němž je tato formule tvrditelná. Daná formule je logicky platná v AST, když je tvrditelná v každém informačním stavu každého distributivního algebraického informačního modelu. Daný závěr vyplývá v AST z dané množiny předpokladů, když pro každý informační stav každého distributivního algebraického informačního modelu platí, že pokud jsou v tomto stavu tvrditelné předpoklady, je zde tvrditelný i závěr. Dvě formule jsou logicky ekvivalentní, když jsou tvrditelné ve stejných informačních stavech na celé třídě distributivních algebraických informačních modelů. Ukazuje se, že AST představuje ještě obecnější sémantiku intuicionistické logiky, než jakou jsme zavedli v minulém oddílu. Věta 10.6.9 dokonce naznačuje, že se jedná *v jistém smyslu* o nejobecnější možnou sémantiku intuicionistické logiky. Plyne z ní totiž, že kdybychom se vzdali ještě distributivity, ztratili bychom nutně uzavřenost na substituci.[12]

`Věta 10.6.12` *(a) Daná formule je logicky konzistentní v AST právě tehdy, když je logicky konzistentní v intuicionistické logice. (b) Daná formule je logicky platná v AST právě tehdy, když je logicky platná v intuicionistické logice. (c) Závěr vyplývá z předpokladů v AST právě tehdy, když vyplývá z těchto předpokladů v intuicionistické logice. (d) Dvě formule jsou logicky ekvivalentní v AST právě tehdy, když jsou logicky ekvivalentní v intuicionistické logice.*

Ještě jednou tedy zdůrazněme, že AST představuje alternativní sémantický přístup k intuicionistické logice, který specifickým způsobem kombinuje dva přístupy standardní: kripkovkou sémantiku a algebraickou sémantiku. AST na první pohled připomíná spíše relační kripkovskou sémantiku, avšak jak později ukáže zejména věta 14.3.5, celou sémantiku lze nahlížet ve zcela jednoznačném smyslu jako zobecnění abstraktní algebraické sémantiky intuicionistické logiky. A zejména to, jakým způsobem lze do této sémantiky integrovat modalitu nutnosti (viz oddíl 14.5), naznačuje spřízněnost s algebraickým

[12]Pro zdůvodnění následující věty viz důkaz věty 14.4.1.

přístupem. Z určité perspektivy se tak tato sémantika jeví jako jakýsi střední člen nacházející se někde mezi relační a algebraickou sémantikou.

10.7 Shrnutí

V této kapitole jsem zavedl pojem striktní tvrditelnosti jakožto teoretický nástroj pro sémantickou analýzu přirozeného jazyka. Elementární věta je striktně tvrditelná v informačním stavu, když je z hlediska tohoto stavu zcela vyloučen opak této věty. Pro logické operátory je pak možno definovat rekurzivní podmínky tvrditelnosti komplexních vět. Výsledkem je sémantika tvrditelnosti, která je na rozdíl od pravděpodobnostní sémantiky v souladu s principem kompozicionality. Tato sémantika připomíná kripkovskou sémantiku intuicionistické logiky, kupodivu však určuje logiku klasickou. Argumentoval jsem, že tato epistemická sémantika klasické logiky poskytuje adekvátnější nástroj pro analýzu přirozeného jazyka, než standardní „tabulková“ sémantika. Navíc tato konkrétní sémantika otevírá prostor pro jistá zobecnění, která vedou k nové nestandardní topologické a algebraické sémantice intuicionistické logiky.

Kapitola 11

Globální disjunkce

Sémantika striktní tvrditelnosti, kterou jsem zavedl v minulé kapitole, představuje pouze jistý alternativní sémantický přístup, který však vede ke standardním logickým systémům – představuje tedy nestandardní sémantiku klasické (resp. ve své obecné verzi intuicionistické) logiky. Na příkladu s americkými prezidentskými volbami jsem se pokusil ilustrovat, že tento alternativní přístup poskytuje vhodný nástroj pro logickou analýzu konkrétních jevů v přirozeném jazyce – vhodnější než standardní tabulková metoda. Jeho zásadní předností však je, že otevírá prostor pro zavedení nových operátorů, které jsou např. ve standardní sémantice klasické logiky nedostupné. Nejzajímavější z těchto nových operátorů je globální disjunkce, které se budu věnovat v této kapitole. Domnívám se, že s pomocí tohoto operátoru lze vyřešit uspokojivě paradoxy materiální implikace čtvrté skupiny (viz oddíl 4.8), které se týkají právě interakce implikace a disjunkce.[1]

11.1 Princip extenzionality disjunkce

Vraťme se nyní na výchozí úroveň ZST. Informační stavy tedy chápeme jako množiny možných světů a pro danou množinu možných světů W chápeme prostor informačních stavů jako určený množinou všech podmnožin množiny W. Principem extenzionality disjunkce míním následující tvrzení:

> Je-li tvrditelná formule φ ve stavu a a formule ψ ve stavu b, pak je tvrditelná formule $\varphi \vee \psi$ ve stavu $a \cup b$.

Toto tvrzení je pravdivé v ZST a je přímočarým důsledkem sémantické podmínky pro disjunkci. Budu si nyní klást otázku, do jaké míry je tento princip

[1]Některé úvahy této kapitoly byly formulovány v (Punčochář, 2010, 2012, 2013, 2016a).

v souladu s přirozeným jazykem. Vypadá to, že v drtivé většině případů disjunkce funguje přesně podle principu extenzionality, což také ospravedlňuje zavedení naší sémantické podmínky pro disjunkci. Představme si např., že se nacházíme v informačním stavu X, který sice ponechává řadu možností (které reprezentujeme jako možné světy) otevřených, ale v každé z těchto možností je Petr svým povoláním učitelem.[2] V takovém stavu je tvrditelné, že Petr je učitelem. Vezměme si jiný informační stav Y, který opět ponechává řadu možností otevřených, avšak v každé z těchto možností je Petr vědcem, takže z hlediska tohoto stavu je tvrditelné, že Petr je vědcem. Nyní vytvořme nový informační stav tak, že vezmeme otevřené možnosti stavu X a sjednotíme je s otevřenými možnostmi stavu Y. Je naprosto v souladu s přirozeným jazykem, řekneme-li, že z hlediska tohoto nového stavu, který můžeme označit jako $X \cup Y$, je tvrditelná věta

165. Petr je učitelem nebo (Petr je) vědcem.

Zapojíme-li do vyhodnocování věty pojem pravdivosti v jednotlivém světě, můžeme také říci, že věta 165 je tvrditelná vzhledem k nějaké množině otevřených možností právě tehdy, když v každé z těchto možností je pravdivý alespoň jeden z jejích disjunktů.

Je pozoruhodným logickým jevem přirozeného jazyka, že existují specifické případy, kdy princip extenzionality selhává. V prvním příkladu, který ilustruje tento efekt, budu operovat s predikátem *být podezřelým ze spáchání daného zločinu*. Předpokládejme pro jednoduchost, že osoba je podezřelá ze spáchání daného zločinu právě tehdy, když existuje otevřená možnost, že tato osoba daný zločin spáchala, tj. v informačním stavu existuje možný svět, v němž je tato osoba pachatelem tohoto zločinu. To znamená, že extenze predikátu *být podezřelým ze spáchání daného zločinu* je relativní vůči nějakému prostoru možností, tedy vůči nějakému informačnímu stavu. Není to stav světa, nýbrž informační stav, který určuje, jaké objekty pod tento predikát spadají. Zvažme informační stav X, z jehož hlediska je opět řada možností otevřených. V různých možných světech tohoto stavu jsou pachateli různé osoby, ale předpokládejme, že každá z těchto osob je mužem. Z hlediska tohoto stavu by pak jistě měla být tvrditelná věta

166. Mezi podezřelými jsou jen muži.

Zvažme druhý stav Y, ve kterém je z analogických důvodů tvrditelná věta

167. Mezi podezřelými jsou jen ženy.

[2] Volím zde odlišné značení informačních stavů (X, Y místo a, b), abych tím zvýraznil, že se jedná o poloformální úvahy, v nichž nepracuji s formálním, nýbrž s přirozeným jazykem, a jejichž cílem je ukázat, jak se formální aparát k přirozenému jazyku vztahuje.

Nyní vytvořme opět stav $X \cup Y$ sestávající ze sjednocení možných světů stavů X a Y. V prostoru možností $X \cup Y$ se nachází jak možné světy, v nichž jsou pachateli muži, tak i možné světy, v nichž jsou pachateli ženy. Vzhledem k tomuto stavu by bylo absurdní označit za tvrditelnou disjunkci vět 166 a 167:

168. Mezi podezřelými jsou jen muži nebo mezi podezřelými jsou jen ženy.

Princip extenzionality tedy zjevně v tomto případě na úrovni přirozeného jazyka selhává. Povšimněme si na tomto příkladu ještě další pozoruhodné skutečnosti. Je patrné, že zde hraje roli to, jakou logickou formu mají věty, které disjunkcí spojujeme. Měli bychom tendenci říci, že za uvedený jev je nějak zodpovědné to, že a jak se zde použil predikát *být podezřelým ze spáchání daného zločinu*, v němž se skrývá určitá modalita, jak je patrné z výše uvedeného vymezení významu tohoto predikátu. To je do jisté míry správný postřeh, ale je zde třeba zároveň zdůraznit, že princip extenzionality je princip, který popisuje logické chování disjunkce. Pokud jsme v přirozeném jazyce našli protipříklad k tomuto principu, znamená to, že jsme popsali situaci, v níž se disjunkce chová určitým způsobem – konkrétně způsobem, který je v rozporu s principem extenzionality. Dochází zde k jevu spojenému čistě s disjunkcí a tento jev nemůžeme zcela delegovat na logickou formu členů disjunkce. Přiměřenější by tedy bylo říci, že logická forma spojovaných vět nutí disjunkci chovat se určitým způsobem. Logická forma vět prvního příkladu (*Petr je učitelem* a *Petr je vědcem*) nenutí disjunkci chovat se v rozporu s principem extenzionality, logická forma vět druhého příkladu (*Mezi podezřelými jsou jen muži* a *Mezi podezřelými jsou jen ženy*) však ano.

Za jakých okolností bychom řekli, že je tvrditelná věta 168? Tato věta má vzhledem k danému informačnímu stavu pozitivní sémantickou hodnotu právě tehdy, když tento stav sestává z možností, v nichž mají všichni podezřelí stejné pohlaví, tj. buď jsou všichni muži nebo jsou všichni ženy. První případ nastává právě tehdy, když je v daném informačním stavu tvrditelné, že mezi podezřelými jsou jen muži. Druhý případ nastává právě tehdy, když je v tomto informačním stavu tvrditelné, že mezi podezřelými jsou jen ženy. To nás tedy vede k závěru, že disjunkce 168 je tvrditelná v daném informačním stavu právě tehdy, když je v tomto stavu tvrditelná věta 166 (první disjunkt) nebo věta 167 (druhý disjunkt). Tedy tato disjunkce je tvrditelná právě tehdy, když je tvrditelný alespoň jeden z jejích disjunktů. Oproti tomu v případě věty 165 je disjunkce tvrditelná právě tehdy, když v každém z možných světů je pravdivý alespoň jeden z jejích disjunktů. Máme zde tedy zvláštní jev, neboť disjunkce ve větách 165 a 168 se vyhodnocují výrazně odlišným způsobem. Obecně z toho plyne závěr, že disjunkce je citlivá na to, jaký charakter mají věty, které spojuje.

Tento jev je navíc velmi systematický, a tudíž přístupný logické analýze. Přesto v logické literatuře zůstává povětšinou nepovšimnut. Důvodem možná je, že má jisté na první pohled problematické důsledky, jak lze ilustrovat na této obměně předchozího příkladu:

169. Pachatelem je muž nebo (pachatelem je) žena.

Tato věta se vyhodnocuje opět v souladu s principem extenzionality disjunkce. Je tvrditelná, když lze prostor možností rozdělit na ty možné světy, v nichž je pachatelem muž, a ty, v nichž je pachatelem žena. Jinými slovy tato disjunkce je tvrditelná, když je v každém z možných světů pravdivý alespoň jeden z disjunktů. Avšak povšimněme si, že zde spojujeme disjunkcí věty *Pachatelem je muž* a *Pachatelem je žena*, které jsou v jistém smyslu ekvivalentní větám *Mezi podezřelými jsou jen muži* a *Mezi podezřelými jsou jen ženy*. Je tvrditelné, že pachatelem je muž, právě tehdy, když v každé z otevřených možností spáchal daný zločin nějaký muž, což nastává právě tehdy, když je vzhledem k tomuto prostoru možností tvrditelné, že mezi podezřelými jsou jen muži. Pochopitelně je situace stejná, když muže nahradíme ženami. Situace je tedy taková, že zde máme nějaké věty A, B, C, D. Věty A a C jsou v jistém smyslu ekvivalentní (tj. tvrditelné ve stejných stavech). Věty B a D jsou též ekvivalentní. Avšak věty A *nebo* B a C *nebo* D – tj. věty 168 a 169 – ekvivalentní v tomto smyslu nejsou. Vidíme, že tento jev ohrožuje platnost principu kompozicionality, který jsme přijali jako základní princip formální sémantiky. S tímto nebezpečím se vypořádáme v následujícím oddílu.

Abych daný jev mohl trochu projasnit, zavedu dvě kategorie vět. Výroky přirozeného jazyka můžeme zhruba rozdělit na faktuální a kontextové. Vágně řečeno, faktuálním výrokům by odpovídaly takové věty, které primárně popisují stav aktuálního světa. Naproti tomu kontextové výroky vypovídají primárně něco o informačním stavu. Faktuální výroky popisují, jaký je stav světa. Kontextové výroky shrnují a charakterizují to, co už o stavu světa víme. Užitečným pohledem je, že primární sémantická hodnota faktuálních vět je pravdivost, a tyto věty se tedy primárně vyhodnocují v jednotlivých možných světech. Na základě toho se pak sekundárně vyhodnocuje jejich tvrditelnost v informačních stavech podle nám již známého předpisu: Faktuální věta je tvrditelná v informačním stavu, když je pravdivá v každém světě tohoto stavu. Avšak primární sémantickou hodnotou kontextových vět není pravdivost, ale tvrditelnost. Kontextové věty se vyhodnocují primárně přímo v informačních stavech, aniž by se nejdřív vyhodnocovaly v jednotlivých možných světech. To pak naznačuje, že věta obsahující kontextovou větu jako svoji část musí být též kontextovou větou, neboť k vyhodnocení její hodnoty musím vyhodnotit její složky a pokud se v jednotlivých světech nevyhodnotí nějaká složka, nemohu zde vyhodnotit ani celek. To, zda je daný výrok faktuální či kontextový, je obvykle podmíněno jeho syntaktickou podobou. Disjunkce se vyhodnocuje podle toho, zda spojuje faktuální či kontextové věty. Ve větě 165 se spojují faktuální věty, ve větě 168 věty kontextové a konečně ve větě 169 zase věty faktuální. Věta *Mezi podezřelými jsou jen muži* je sice tvrditelná ve stejných stavech jako věta *Pachatelem je muž*, ale rozdíl je zde v tom, že první z těchto vět je kontextová a druhá faktuální, což způsobuje rozdíl mezi větami 168 a 169.

Zrekapituluji tedy ještě tento klíčový bod. Pokud disjunkce spojuje faktuální věty, vyhodnocuje se spolu s nimi primárně v jednotlivých možných světech, chová se takříkajíc lokálně. Pokud spojuje kontextové věty, které se nevyhodnocují v jednotlivých možných světech, vyhodnocuje se spolu s těmito větami na globální úrovni celého stavu, chová se tedy globálně. Označme disjunkci, která se vyhodnocuje lokálně, jako lokální disjunkci, a disjunkci, která se vyhodnocuje globálně, jako globální disjunkci. Pak platí

(a) Lokální disjunkce je pravdivá v daném světě právě tehdy, když je v tomto světě pravdivý alespoň jeden z jejích disjunktů.

Lokální disjunkce je tvrditelná v daném informačním stavu právě tehdy, když je pravdivá v každém světě tohoto stavu. Avšak u globální disjunkce nelze podobným způsobem redukovat tvrditelnost na pravdivost. Globální disjunkce operuje primárně na úrovni informačních stavů.

(b) Globální disjunkce je tvrditelná v daném stavu právě tehdy, když je v tomto stavu tvrditelný alespoň jeden z jejích disjunktů.

Vidíme, že mechanismus vyhodnocování se nemění, mění se však úroveň, na které vyhodnocování probíhá. Rozdíl mezi faktuálními a kontextovými větami ilustruji ještě dalším příkladem. Typickými kontextovými větami jsou věty tvaru *Je pravděpodobné, že A*. Aby se taková věta vyhodnotila, musí být vztažena k nějakému prostoru možností X a tato věta platí (vzhledem k X), když A-možnosti pokrývají dostatečně velkou část tohoto prostoru. Je patrné, že pro disjunkce spojující věty tohoto tvaru nebude platit princip extenzionality. Vezměme si prostor možností X, vzhledem ke kterému platí *Je pravděpodobné, že A*, a prostor možností Y, vzhledem ke kterému platí *Je pravděpodobné, že B*. Je patrné, že vzhledem k prostoru možností $X \cup Y$ nemusí platit *Je pravděpodobné, že A nebo je pravděpodobné, že B*. Máme zde tedy další evidentní příklad globální disjunkce.

11.2 Gaukerova sémantika

Pozoruhodná okolnost, že disjunkce se chová někdy lokálním a jindy globálním způsobem, je, zdá se, v logické literatuře spíše ignorována. Výjimku představuje Christopher Gauker. Stejně jako celý sémantický přístup založený na pojmu tvrditelnosti, tak i mé zavedení rozdílu mezi lokální a globální disjunkcí bylo motivováno především Gaukerovou knihou (Gauker, 2005). Avšak Gaukerova původní teorie se od mého přístupu také v mnohém ohledu liší.

První podstatný rozdíl spočívá v povaze entit, vůči kterým se tvrditelnost vyhodnocuje. Gauker relativizuje tvrditelnost vzhledem k tomu, čemu říká kontexty. Kontexty však nepojímá stejně jako Stalnaker, jakožto informační stavy modelované pomocí množin možných světů. Odmítá pracovat s pojmem možného světa, jelikož se domnívá, že tento pojem předpokládá relaci reference a že nikdo doposud nebyl schopen úspěšně objasnit, co to relace reference je (Gauker, 2005, str. 66-73). Místo z možných světů jsou Gaukerovy kontexty vystavěny ze syntaktického materiálu. Základní vrstvu tvoří tzv. primitivní kontexty, což jsou jednoduše konzistentní množiny obsahující pouze atomické formule a negace atomických formulí. Dalším krokem je zavedení tzv. multikontextů. Multikontexty určité úrovně jsou množiny primitivních kontextů a/nebo multikontextů nižších úrovní. Takže tímto způsobem, pomocí rekurzivní definice, získáváme nekonečnou hierarchii kontextů, vůči kterým jsou pak zavedeny podmínky tvrditelnosti.

Nebudu zde Gaukerovu sémantiku do detailů rekonstruovat. Jak bylo podrobně rozebráno v (Punčochář, 2016a), celý sémantický systém se podstatně zjednoduší, opustíme-li tuto hierarchii kontextů a dosadíme-li na její místo Stalnakerovy kontexty, tedy informační stavy modelované jako množiny možných světů. Vzhledem k možným světům zaujímám instrumentalistické stanovisko, které bylo popsáno v oddílu 2.6: Kritériem toho, zda je vhodné použít možné světy v sémantice přirozeného jazyka, by mělo být to, do jaké míry nám pomáhají modelovat logické jevy přirozeného jazyka, a nikoli abstraktní filosofické úvahy o povaze těchto entit.

Druhý zásadní rozdíl mezi Gaukerovou sémantikou tvrditelnosti a přístupem, který jsem doposud prezentoval, spočívá v tom, jakým způsobem je vymezena sémantika negace. Gauker vedle podmínek tvrditelnosti zavádí ještě podmínky popiratelnosti, na základě kterých se pak vyhodnocuje tvrditelnost negace: Negace dané formule je tvrditelná právě tehdy, když je tato formule popiratelná. Existují dobré důvody pro tuto strategii a my se tímto bodem budeme ještě zaobírat v oddílu 12.2.

Třetím klíčovým rozdílem, u kterého se v souvislosti s tématem této kapitoly nyní pozdržím, je sémantika disjunkce. Gauker bere v potaz fakt, který jsem popsal v předchozím oddílu. Disjunkce přirozeného jazyka se chová někdy tak, že podmínky její tvrditelnosti korespondují s podmínkami tvrditelnosti toho, co jsem nazval globální disjunkcí. Jindy se zase chová v souladu s podmínkami tvrditelnosti pro lokální disjunkci. Domnívám se, že nejvhodnější řešení tohoto jevu získáme, když do jazyka L vedle lokální disjunkce, kterou tam již máme, přidáme ještě disjunkci globální jako samostatnou spojku. Oproti tomu si chce Gauker vystačit pouze s jednou disjunkcí a nastavuje pro ni komplikovanější sémantické podmínky s nadějí, že se pak tato spojka bude chovat ve správný moment správným způsobem. Uvidíme, že tato strategie vede k závažným problémům.

Z běžných výrokových spojek je to zejména kondicionální spojení, které generuje kontextové věty. Přijmeme-li to jako specifikum implikace a chceme-li zavést rozdíl mezi faktuálními a kontextovými větami pro nějaký formální jazyk, řekněme jazyk L, jsme vedeni k následujícímu jednoduchému kritériu: Faktuální formule (f-formule) jsou takové formule jazyka L, které neobsahují spojku $\rightarrow$. Formule jazyka L, které obsahují $\rightarrow$, tj. formule, které nejsou f-formulemi, označujeme jako kontextové formule (k-formule).

Aniž by Gauker učinil explicitně toto rozlišení mezi faktuálními a kontextovými větami, je implicitně přítomno v jeho systému, neboť sémantika disjunkce je u něj definována odlišně pro f-formule a odlišně pro k-formule. Můžeme ignorovat jistý nesoulad mezi Gaukerovým přístupem k sémantice, vycházejícím z jeho averze vůči pojmu možného světa, a tím, že jsem distinkci kontextových/faktuálních vět popsal s odkazem na pojem pravdivosti, který pojem možného světa předpokládá. Pokud bychom Gaukerovu strategii převedli do ZST, musela by vypadat podmínka pro disjunkci následujícím způsobem:

> Pokud φ, ψ jsou obě f-formule, pak $\varphi \vee \psi$ je tvrditelná ve stavu a právě tehdy, když pro každý svět $s \in a$ platí, že φ je pravdivá v s nebo ψ je pravdivá v s. Pokud alespoň jedna z formulí φ, ψ je k-formulí, pak $\varphi \vee \psi$ je tvrditelná ve stavu a právě tehdy, když φ je tvrditelná v a nebo ψ je tvrditelná v a.

Tuto podmínku můžeme ekvivalentně přeformulovat tak, že se v ní již pojem pravdivosti nevyskytuje:

> Pokud φ, ψ jsou obě f-formule, pak $\varphi \vee \psi$ je tvrditelná ve stavu a právě tehdy, když existují stavy b, c takové, že φ je tvrditelná v b, ψ je tvrditelná v c a $b \cup c = a$. Pokud alespoň jedna z formulí φ, ψ je k-formulí, pak $\varphi \vee \psi$ je tvrditelná ve stavu a právě tehdy, když φ je tvrditelná v a nebo ψ je tvrditelná v a.

Zvažme tedy na zkoušku ZST s takto modifikovanou sémantikou disjunkce a označme si ji ZST^G s odkazem na Gaukera. V souladu s přirozeným jazykem v tomto systému platí, že disjunkce je citlivá na syntaktickou strukturu vět, které spojuje. Pokud spojuje atomické formule, chová se jinak, než když spojuje dvě implikace. Ukazuje se, že se tímto krokem řeší řada problémů klasické logiky, v níž interaguje implikace s disjunkcí nepřijatelným způsobem.

Podívejme se např. nejprve na následující úsudkovou formu, kterou klasická logika vyhodnocuje jakožto logicky platnou:

$$p \vee q/(m \to p) \vee (n \to q).$$

Jako příklad úsudku této formy použiji argument, který v mírně odlišné podobě uvádí i Gauker pro ilustraci toho, čemu říká „disjunktivní paradox materiální implikace“ (Gauker, 2005, s. 109).

170. Vytáhnu z balíčku červenou nebo černou kartu. Tedy pokud si vytáhnu horní kartu z balíčku, tak bude červená, nebo pokud si vytáhnu dolní kartu z balíčku, tak bude černá.

Je-li kontext takový, že před námi leží balíček karet, z nichž jednu máme vytáhnout, přičemž nemáme o rozložení karet žádnou informaci, víme jen, že se jedná o karty, které jsou rozděleny vyčerpávajícím způsobem na černé a červené, pak je předpoklad tvrditelný a závěr nikoli. To není v souladu s klasickou logikou, a tedy ani se ZST, ale, jak je patrné, je to v souladu se ZST^G. Disjunkce v předpokladu se vyhodnocuje jiným způsobem než disjunkce v závěru. To je též v souladu s pozorováním, že (už na úrovni přirozeného jazyka) pro větu předpokladu platí princip extenzionality disjunkce a pro větu v závěru nikoli.

Podobným způsobem se v ZST^G odstraní všechny paradoxy materiální implikace čtvrté skupiny z oddílu 4.8. Jak již víme, všechny uvedené problémy lze též řešit např. pomocí striktní implikace. V ZST^G se však vyhýbáme klíčovému problému spojenému se striktní implikací, který byl popsán v kapitole 5, totiž zcela nepřirozenému chování vnořených kondicionálních vět. Podařilo se nám odstranit řadu problémů materiální implikace a nemuseli jsme se přitom vzdát kritického principu:

$$p \to (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r.$$

Tato ekvivalence pochopitelně zůstává v ZST^G zachována.

11.3 Princip kompozicionality

Přestože ZST^G řeší řadu paradoxů spojených s klasickou logikou, z technického hlediska se jedná o problematickou sémantickou teorii. Zásadním problémem je pak to, že tento sémantický systém není kompozicionální. Důvodem je, že jakýkoli výskyt implikace, i když třeba nehraje ve formuli žádnou zásadní roli, mění zcela automaticky status formule. Tak např. atom p je f-formule, ale $p \wedge (p \to p)$ je k-formule. Přitom tyto formule jsou tvrditelné ve stejných informačních stavech, a jsou tedy sémanticky ekvivalentní. Je-li ekvivalence tohoto typu kritériem synonymie, pak princip kompozicionality (resp. z něho vyplývající princip zaměnitelnosti synonym) říká, že by měly být formule p a $p \wedge (p \rightarrow p)$ zaměnitelné v libovolné formuli, aniž by to mělo vliv na její podmínky tvrditelnosti. Avšak v ZST^G tomu tak není. Vezměme si informační stav $a = \{s, t\}$ takový, že v s je pravdivý atom p, ale nikoli atom q, a v t je naopak pravdivý atom q a nikoli atom p. Pak dle ZST^G je v a tvrditelná formule $p \vee q$, ale nikoli formule $(p \wedge (p \rightarrow p)) \vee q$. ZST^G tedy není v souladu s principem kompozicionality. Stejný problém nastává v Gaukerově sémantice, jak je podrobně rozebráno v (Punčochář, 2016a). Domnívám se, že tento nedostatek nelze odstranit tím, že se pokusíme zvolit nějaké sofistikovanější kritérium, na základě kterého klasifikujeme formule na f-formule a k-formule.

Problém vyvstává díky tomu, že u disjunkce spojujeme vjedno dvě rozdílné sémantické podmínky. Abych se vyhnul závažnému problému s principem kompozicionality, nenásleduji v tomto ohledu Gaukerovu strategii a vzdávám se nároku na jednotnou sémantiku disjunkce. Místo toho zavedu do objektového jazyka nový druh disjunkce $\sqcup$. Např. větu *mezi podezřelými jsou jen muži nebo mezi podezřelými jsou jen ženy* pak v jazyce výrokové logiky obohaceném o spojku $\sqcup$ můžeme formalizovat jako $p \sqcup q$ a ne jako $p \vee q$. Pro disjunkci $p \sqcup q$ zavedeme samostatnou sémantickou podmínku lišící se od té, kterou jsme již zavedli v ZST pro $\vee$. Obohatíme-li jazyk L o spojku $\sqcup$, získáme jazyk $L^{\sqcup}$. Základní sémantiku tvrditelnosti pro jazyk $L^{\sqcup}$, kterou budeme označovat jako ZST$^{\sqcup}$, získáme tak, že rozšíříme ZST o podmínku:

> Formule $\varphi \sqcup \psi$ je tvrditelná ve stavu a právě tehdy, když φ je tvrditelná v a nebo ψ je tvrditelná v a.

Jedná se tedy o podmínku, která koresponduje s obvyklou sémantickou podmínkou pro disjunkci, tak jak jsme se s ní setkali např. v kripkovské sémantice intuicionistické logiky. V souladu s výše zavedenou terminologií budu spojku $\vee$ nadále označovat jako disjunkci *lokální* a spojku $\sqcup$ jako disjunkci *globální*.

Je zjevné, že ZST$^{\sqcup}$ odráží v jistém smyslu vše, co se děje v ZST^G. To lze formulovat zcela přesně. Stačí zavést jednoduchý překlad z jazyka L do jazyka $L^{\sqcup}$. Tento překlad dané formuli φ jazyka L přiřadí formuli φ^* jazyka $L^{\sqcup}$, kterou získáme tak, že ve formuli φ nahradíme disjunkcí $\sqcup$ každý výskyt disjunkce $\vee$, který obsahuje alespoň v jednom ze svých disjunktů nějaký výskyt implikace. Pak zjevně platí, že formule φ^* reflektuje v ZST$^{\sqcup}$ všechny sémantické vlastnosti formule φ v ZST^G. Např. ψ vyplývá v ZST^G z $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ právě tehdy, když ψ^* vyplývá v ZST$^{\sqcup}$ z $\{\varphi_1^*, \ldots, \varphi_n^*\}$. Oproti ZST^G má však ZST$^{\sqcup}$ tu zásadní přednost, že se jedná o kompozicionální sémantiku s mnoha elegantními matematickými vlastnostmi.

$\mathrm{ZST}^{\sqcup}$ má za cíl pouze elegantnějším způsobem zachytit to, co neobratně zachycuje ZST^{G}. To, co je na ZST^{G} problematické, přesouváme do oblasti formalizace, takže formální systém samotný může zůstat technicky čistý. Při formalizaci věty obsahující výskyt výrazu *nebo* se musíme rozhodnout, zda tento výraz reprezentovat lokální nebo globální disjunkcí. Máme k dispozici spolehlivé kritérium či test, který nám pomůže rozhodnout se, jakou variantu volit. Tímto testem je otázka, zda dané užití výrazu *nebo* je či není v souladu s principem extenzionality disjunkce. Oproti ZST^{G} má $\mathrm{ZST}^{\sqcup}$ také tu výhodu, že můžeme použít globální disjunkci i tam, kde je pro to jiný důvod než jen přítomnost kondicionálních vět.

Z technického hlediska, avšak i s ohledem na přirozený jazyk, je podstatné, že globální disjunkce $\sqcup$ generuje formule, které nejsou regulární ve smyslu oddílu 10.6. Formule $p \sqcup q$ může být tvrditelná ve stavech a, b, aniž by byla tvrditelná ve stavu $a \cup b$. To úzce souvisí s tím, že pro globální disjunkci v přirozeném jazyce neplatí princip extenzionality. Propojuje se nám zde tedy vysoce technický pojem regularity s jistým logickým jevem přirozeného jazyka.

11.4 Dva paradoxy

Jako aplikaci rozlišení mezi lokální a globální disjunkcí uvedu ještě dva příklady argumentů, v nichž dochází k interakci těchto typů disjunkce. Oba argumenty vyvolávají jisté nejasnosti, které se rozplynou, máme-li k dispozici rozlišení mezi lokální a globální disjunkcí. Cílem tohoto oddílu je také přesvědčit čtenáře, že globální disjunkce není v přirozeném jazyce zas tak okrajový jev, jak by se mohlo zprvu zdát.

Nejprve budu tímto způsobem analyzovat tzv. fatalistický argument, který je z odlišného hlediska řešen také např. v (Stalnaker, 1975) a ještě jiným způsobem v (Dummett, 1964). Představme si, že se nacházíme ve Velké Británii v době druhé světové války během bombového náletu. Představme si dále, že v této situaci uvažuji o tom, zda mám učinit příslušná opatření, abych zajistil svoji bezpečnost. Uvažuji následujícím způsobem:

> Buď budu během tohoto náletu zabit nebo zabit nebudu. Předpokládejme, že budu zabit. V tom případě budu zabit, i když učiním příslušná opatření. To pak znamená, že činit příslušná opatření je neúčinné. Nyní předpokládejme, že nebudu zabit. V tom případě nebudu zabit, i když příslušná opatření neučiním. To však znamená, že činit příslušná opatření není nutné. Z toho plyne, že činit příslušná opatření je neúčinné nebo to není nutné. Každopádně je to zbytečné.

Tento argument je zjevně chybný, ale není snadné identifikovat, v čem tato chyba spočívá. Přítomné věty můžeme formalizovat následujícím způsobem:

Budu zabit	p
Činit příslušná opatření je neúčinné	q
Činit příslušná opatření není nutné	r

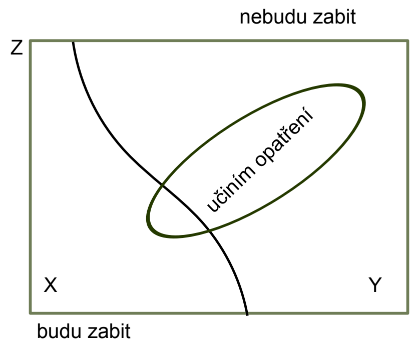
Klíčová část úvahy má následující formu: Předpokládám $p \vee \neg p$. Z hypotetického předpokladu p mohu odvodit q. Z hypotetického předpokladu $\neg p$ mohu odvodit r. Z těchto tří bodů mohu odvodit $q \vee r$. Schematicky to můžeme zachytit takto:

1	$p \vee \neg p$	předpoklad
2	$\quad\mid\; p$	hypotetický předpoklad
3	$\quad\mid\; \vdots$	
4	$\quad\mid\; q$	
5	$\quad\mid\; \neg p$	hypotetický předpoklad
6	$\quad\mid\; \vdots$	
7	$\quad\mid\; r$	
8	$q \vee r$	

Tato úsudková forma se zdá být z logického hlediska zcela v pořádku, pokud jsou v pořádku kroky od 2 k 4 a od 5 k 7. Proč je tedy uvedený argument neplatný? K tomuto problému se lze postavit různým způsobem, jak také ukazuje odlišné Stalnakerovo a Dummettovo řešení. Strategie, která se nabízí, je zapojit pojem kauzality. Můžeme pak říci, že problém spočívá v odvození r z $\neg p$. Z předpokladu, že nebudu zabit, nemohu odvodit, že činit opatření není nutné, protože tomu může být tak, že mé přežití bude kauzálním důsledkem právě toho, že učiním nějaké příslušné opatření. Domnívám se, že tato analýza je v jistém smyslu v pořádku, ale její nevýhodou je jednak to, že se opírá o problematický pojem kauzality, ale hlavně to, že zůstává nejasné, proč vyvolává argument zdání platného úsudku. Při tomto řešení se totiž do značné míry míjíme s problémem, který před nás fatalistický argument klade. Problém spočívá v tom, že existuje legitimní smysl vyplývání, ve kterém je krok od $\neg p$ k r zcela v pořádku. Tento krok totiž přenáší striktní tvrditelnost. Kdybych se nacházel v informačním stavu, ve kterém je striktně tvrditelné, že nebudu zabit, tedy nebudu-li zabit v žádné z otevřených možností, pak skutečně není nutné činit jakákoli opatření. Interpretujeme-li krok od $\neg p$ k

r tímto způsobem, je tento krok v pořádku a zůstává zde stále nevyjasněná záhada, jak je možné, že se nejedná o platný úsudek.

Domnívám se, že problém lze objasnit tak, že si uvědomíme, že disjunkce v předpokladu je lokální a disjunkce v závěru globální. To je patrné, když posoudíme, zda jsou tyto dvě disjunkce v souladu s principem extenzionality. Předpokládejme, že je dán soubor možností Z. Vzhledem k tomuto souboru lze tvrdit, že budu nebo nebudu zabit, neboť soubor se rozpadá na dva podsoubory X a Y takové, že X obsahuje pouze možné světy, v nichž budu zabit a Y pouze možné světy, v nichž zabit nebudu. Tato úvaha ukazuje, že užitá disjunkce má být formalizována jako $p \vee \neg p$. Vzhledem k souboru možností X je tvrditelné, že činit příslušná opatření je neúčinné. Vzhledem k Y je zase tvrditelné, že činit příslušná opatření není nutné. To nás však neopravňuje tvrdit vzhledem k $Z = X \cup Y$, že činit příslušná opatření je neúčinné nebo to není nutné. Situace je ilustrována pomocí následujícího obrázku.



Princip extenzionality zde selhává, a proto disjunkci musíme formalizovat jako $q \sqcup r$. Tvrzení formalizovaná formulemi q a r mají podobný charakter jako věty 166 a 167 výše. Také se vyhodnocují globálně vzhledem k nějakému celku možností. Jejich sémantická hodnota je primárně určena daným informačním stavem. Nedává smysl říci, že tyto věty jsou tvrditelné v daném informačním stavu právě tehdy, když jsou pravdivé v každém světě tohoto stavu. Nevyhodnocují se v jednotlivých možnostech, nýbrž vůči celku všech možností. Spojujeme-li takové věty disjunkcí, musíme použít disjunkci globální. Adekvátnější formalizace fatalistického argumentu je pak tato:

1	$p \vee \neg p$	předpoklad
2	$\mid\ p$	hypotetický předpoklad
3	$\mid\ \vdots$	
4	$\mid\ q$	
5	$\mid\ \neg p$	hypotetický předpoklad
6	$\mid\ \vdots$	
7	$\mid\ r$	
8	$q \sqcup r$	

Tato inference není v ZST$^{\sqcup}$ platná, jak lze lehce ověřit.

Nyní představím ještě tzv. hornický paradox, formulovaný v (Kolodny & MacFarlane, 2010). Předpokládejme, že se nacházíme v následující situaci. Víme, že deset horníků je uvězněno v šachtě A nebo šachtě B, avšak nevíme, ve které z nich. Hrozí, že šachty budou zaplaveny vodou. Máme dostatek pytlů s pískem, abychom zablokovali jednu z šachet, nikoli však obě dvě. Pokud zablokujeme jednu šachtu, veškerá voda nateče do druhé šachty a usmrtí všechny horníky, kteří se v ní nacházejí. Pokud žádnou šachtu nezablokujeme, zaplaví voda obě šachty jen z poloviny a usmrtí pouze jednoho horníka, který se nachází nejníže v dané šachtě. V takové situaci se zdá, že bychom neměli zablokovat žádnou z šachet. Avšak zároveň se zdá, že obě dvě následující kondicionální věty jsou přijatelné.

171. Pokud se horníci nacházejí v A, měli bychom zablokovat A.

172. Pokud se horníci nacházejí v B, měli bychom zablokovat B.

Vzhledem k tomu, že zároveň přijímáme větu

173. Horníci se nacházejí v A nebo v B.

vzniká podle (Kolodny & MacFarlane, 2010) zdánlivě paradoxní situace, neboť z vět 171, 172 a 173 na první pohled vyplývá věta

174. Měli bychom zablokovat A nebo bychom měli zablokovat B.

která se v dané situaci jeví jako nepravdivá. Paradox lze řešit poukazem na to, že princip extenzionality disjunkce funguje u věty 173, avšak nikoli u věty 174. To znamená, že disjunkce ve větě 173 je lokální, kdežto disjunkce ve větě 174 globální. Tedy správná formalizace daného úsudku nebude

$$p \rightarrow r, q \rightarrow s, p \vee q / r \vee s,$$

což je v ZST$^{\sqcup}$ platná úsudková forma, nýbrž

$$p \rightarrow r, q \rightarrow s, p \vee q / r \sqcup s,$$

což již platná úsudková forma v ZST$^{\sqcup}$ není.

11.5 Inkvizitivní sémantika

ZST$^{\sqcup}$ bez lokální disjunkce je systém, který se z technického hlediska shoduje s tzv. inkvizitivní sémantikou.[3] Inkvizitivní sémantika je nedávno vyvinutý a stále intenzivně rozvíjený sémantický přístup, který byl vytvořen z výrazně odlišných důvodů než náš systém ZST$^{\sqcup}$. Představím krátce základní ideje, které se za inkvizitivní sémantikou skrývají. Jedním z důvodů této expozice je ukázat alternativní způsob, jakým je možno vykládat či použít technický aparát, který jsem v této kapitole zavedl. Druhý důvod vychází z toho, že v poslední části této práce budu zkoumat lokální a globální disjunkci z čistě matematického hlediska na obecné úrovni TST, resp. AST. Vzhledem k tomu, že inkvizitivní sémantika pracuje se stejným formálním aparátem jako ZST$^{\sqcup}$, dají se výsledky, ke kterým dospějeme, chápat také jako příspěvek k inkvizitivní sémantice, jak to bylo také prezentováno zejména v (Punčochář, 2015a,b). Proto je vhodné ve stručnosti představit inkvizitivní sémantiku i z filosofického hlediska.

Lze začít s pojmem propozice. Propozice je to, co je společné skupině synonymních vět. Říkáme, že nějaká věta vyjadřuje určitou propozici a např. věta *Petr prodal Marii kolo* vyjadřuje stejnou propozici jako *Marie koupila od Petra kolo*. Propozice koresponduje do značné míry s tím, co Frege označoval jako smysl věty. Podle stále vlivného paradigmatu se propozice modelují jako množiny možných světů. To má původ v představě, kterou Wittgenstein vyjádřil slovy zmíněnými již v oddílu 1.5:

> Rozumět větě znamená vědět, co je zkrátka tak, když je pravdivá. (Lze jí rozumět i bez toho, že bychom věděli, zda je pravdivá.) (Wittgenstein, 1922, 4.024)

Rozumět větě tedy znamená mít nějaké kritérium, které pro daný stav světa určí pravdivostní hodnotu věty. Takové kritérium tedy klasifikuje možné světy na takové, v nichž je věta pravdivá, a takové, v nichž pravdivá není. Pak už je jen krůček k tomu ztotožnit smysl věty – tj. to, čemu rozumíme, rozumíme-li větě – s takovýmto klasifikačním kritériem. To pak můžeme formálně reprezentovat jako funkci z možných světů do pravdivostních hodnot. Tato funkce je zároveň charakteristickou funkcí nějaké množiny možných světů (množiny těch světů, kterým funkce přiřadí hodnotu pravda). Propozici pak lze modelovat jako odpovídající množinu možných světů. Propozice a informační stavy jsou z tohoto hlediska objekty stejného druhu.

[3] Mezi reprezentativní texty o inkvizitivní sémantice patří zejména (Ciardelli, 2009), (Ciardelli & Roelofsen, 2011), (Ciardelli, Groenendijk & Roelofsen, 2012), (Ciardelli, Groenendijk & Roelofsen, 2012) a (Groenendijk & Roelofsen, 2009).

Modelujeme-li propozice jako množiny možných světů, je naše hledisko *statické*. Proti statickému pojetí propozic se v poslední době výrazně prosazuje hledisko *dynamické*, které výstižně charakterizují slova Franka Veltmana:

> Slogan *význam věty znáte tehdy, když znáte podmínky, za nichž je pravdivá* nahrazujeme tímto: *význam věty znáte tehdy, když víte, jaký dopad tato věta má na informační stav toho, kdo ji přijme mezi svá přesvědčení.* Význam tedy získává dynamický obsah: význam věty je určitá operace na informačních stavech. (Veltman, 1996, str. 221)

Z tohoto hlediska může být propozice modelována jako funkce, která informačním stavům přiřazuje informační stavy. Ve své nejzákladnější podobě vychází dynamické hledisko z principu, podle kterého nárůst informací odpovídá eliminaci možností. Přijetí věty A v daném informačním stavu má ten dopad, že v tomto stavu eliminujeme možnosti, v nichž A neplatí. Avšak v této základní podobě je dynamická sémantika v určitém smyslu ekvivalentní se statickou sémantikou. Dynamicky pojatá propozice bude převoditelná na statickou propozici a obráceně. Předpokládejme, že je fixovaný kontext, který určuje jistou množinu možných světů X. Dále předpokládejme, že máme k dispozici statickou propozici, kterou v tomto kontextu vyjadřuje věta A. Tato propozice je tedy nějakou podmnožinou množiny X. Označme si ji jako S_A. Dynamickou propozici pro tutéž větu si označme jako D_A. Pomocí S_A můžeme D_A definovat tak, že pro každé $Y \subseteq X$, tj. pro každý informační stav v kontextu X, stanovíme:

$$D_A(Y) = Y \cap S_A.$$

Máme-li naopak nejprve k dispozici pouze D_A, můžeme definovat S_A následujícím předpisem:

$$S_A = D_A(X).$$

Inkvizitivní sémantika též vychází z dynamického hlediska a do jisté míry přijímá právě představený eliminační model. Dodává však, že tento model postihuje pouze informativní složku obsahu věty. Vedle této složky je třeba zvážit ještě složku inkvizitivní, jejíž zohlednění má reflektovat interaktivní užívání jazyka při výměně informací. Podstatnou součástí procesu výměny informací je nejen poskytování, ale i požadování informací. Charakteristickým rysem inkvizitivní sémantiky je, že tento aspekt považuje nejen za logicky relevantní, ale pro logickou analýzu jazykových interakcí dokonce za zcela klíčový, neboť výměnu informací chápe právě jako kooperativní proces kladení a zodpovídání otázek.

Z hlediska tohoto přístupu v sobě propozice integrují informativní a inkvizitivní obsah. Ovšem u řady propozic je informativní obsah nulový a u řady propozic je inkvizitivní obsah nulový, ale jsou věty, které mají pozitivní jak informativní, tak i inkvizitivní obsah. Jako příklad můžeme vzít větu:

175. Přijde dnes Petr nebo Marie?

Z dynamického hlediska vyslovení takové věty, jako je např. 175, má ten dopad, že (a) eliminuje nějaké možnosti a (b) vyzývá k eliminaci dalších možností. Vyslovíme-li tuto větu, můžeme u ní identifikovat určitý informativní obsah (věta obsahuje informaci, že přijde Petr nebo Marie), ale je zde i inkvizitivní obsah, který můžeme považovat za žádost o další upřesnění této informace. Informativní obsah věty A s jistým stupněm přesnosti lokalizuje aktuální svět v prostoru možných světů. Inkvizitivní obsah věty A lze chápat jako požadavek přesnější lokalizace aktuálního světa. Řekněme, že $info(A)$ bude značit informativní obsah věty A a $inkv(A)$ inkvizitivní obsah věty A. Ze statického hlediska lze $info(A)$ reprezentovat jako množinu možných světů. Věta A nás informuje, že aktuální svět se nachází někde v $info(A)$. Ukazuje se dále, že $inkv(A)$ můžeme pojmout jako množinu informačních stavů – těch informačních stavů, které by z hlediska tazatele představovaly dostatečně přesnou lokalizaci aktuálního světa.

Z těchto motivačních úvah vyplývá několik podmínek. Každý informační stav z $inkv(A)$ by měl být podmnožinou $info(A)$, neboť představuje kandidáta na dostatečné *zpřesnění* informace poskytnuté větou A. Navíc dle věty A může být každý možný svět z $info(A)$ aktuálním světem a požadavek lokalizovat přesněji aktuální svět v $info(A)$ by tedy neměl a priori vyloučit žádný svět z $info(A)$, neboť jinak by se mohlo stát, že by vyloučil právě svět aktuální. To ovšem znamená, že musí platit

$$info(A) = \bigcup inkv(A).$$

Informativní složku obsahu tedy vždy můžeme rekonstruovat ze složky inkvizitivní a propozici vyjádřenou větou A můžeme ztotožnit prostě s $inkv(A)$. Propozice v tomto pojetí není množinou možných světů, nýbrž množinou informačních stavů, tj. množinou množin možných světů. Nejde však o libovolnou množinu množin, neboť je zde ještě další podmínka vyplývající z předchozích motivačních úvah.

$inkv(A)$ je dolů uzavřená množina informačních stavů.

To znamená, že je-li nějaká množina možných světů v $inkv(A)$, pak je v $inkv(A)$ také každá podmnožina této množiny. Tento požadavek plyne z pozorování, že je-li pojata nějaká množina možných světů jakožto dostatečně přesná potenciální lokalizace aktuálního světa, pak musí totéž platit i pro každou její podmnožinu. Dospíváme tedy k pojetí propozic, které je pro inkvizitivní sémantiku charakteristické:

Propozice je dolů uzavřená množina množin možných světů.

Nyní lze zavést následující terminologii. Vzhledem k danému prostoru možných světů W řekneme, že propozice P je *informativní*, když její informativní obsah neobsahuje (tj. vylučuje) nějaký možný svět (tedy $W - \bigcup P \neq \emptyset$). Propozice je *inkvizitivní*, když její inkvizitivní obsah neobsahuje její informativní obsah (tj. $\bigcup P \notin P$). Na základě těchto základních pojmů můžeme definovat, že věta A je:

(a) *informativní*, když vyjadřuje informativní propozici.

(b) *inkvizitivní*, když vyjadřuje inkvizitivní propozici.

(c) *tvrzení*, když je informativní a není inkvizitivní.

(d) *otázka*, když není informativní a je inkvizitivní.

(e) *hybridní*, když je zároveň informativní a inkvizitivní.

(f) *tautologie*, když není ani informativní, ani inkvizitivní.

To samé přehledně shrnuje následující tabulka:

	informativní	inkvizitivní
otázky	-	+
tvrzení	+	-
hybridní	+	+
tautologie	-	-

Nyní můžeme zapojit formální jazyk. Ve své základní podobě pracuje inkvizitivní sémantika s běžným výrokovým jazykem L. Avšak vzhledem k tomu, že – jak brzy uvidíme – disjunkce inkvizitivní sémantiky odpovídá naší globální disjunkci, budu se v tomto oddílu držet výše zavedeného značení a budu nyní pracovat s jazykem L^*, jehož formule jsou vystavěny z atomických formulí pomocí spojek $\neg, \rightarrow, \wedge, \sqcup$.

Možné světy nyní můžeme chápat opět jako funkce z atomických formulí do pravdivostních hodnot. Tak jako můžeme logické operátory vymezit pomocí algebry standardních propozic, tak můžeme také operátory inkvizitivní sémantiky vymezit pomocí algebry propozic inkvizitivní logiky. Pro každou formuli φ jazyka L^* chceme určit rekurzivním způsobem propozici $\|\varphi\|$, kterou formule φ vyjadřuje. Libovolná atomická formule p reprezentuje nějaké tvrzení a vyjadřuje tedy propozici, která je informativní, ale nikoli inkvizitivní:

$$\|p\| = \wp(|p|), \text{ kde } |p| = \{s \in W; s(p) = 1\}.$$

Pro konjunkci a disjunkci doplníme standardně vypadající podmínky:

$$\|\varphi \wedge \psi\| = \|\varphi\| \cap \|\psi\|,$$

$$\|\varphi \sqcup \psi\| = \|\varphi\| \cup \|\psi\|.$$

Ty pak z algebraického hlediska určují jednoznačně podmínky pro negaci a implikaci: Propozice $\|\neg\varphi\|$ je definována jako tzv. pseudokomplement propozice $\|\varphi\|$; a $\|\varphi \to \psi\|$ jako tzv. relativní pseudokomplement propozice $\|\varphi\|$ vzhledem k $\|\psi\|$ (viz oddíl 9.5). Tomu odpovídají následující podmínky:

$$\|A \to B\| = \{s;\ \text{pro každé } t \subseteq s, \text{ pokud } t \in \|A\|, \text{ tak } t \in \|B\|\}$$

$$\|\neg A\| = \wp(W - \bigcup \|A\|)$$

Soubor těchto podmínek určuje algebraickou sémantiku inkvizitivní logiky. Odpovídající relační sémantika je totožná se sémantikou $\mathrm{ZST}^{\sqcup}$ bez lokální disjunkce. Liší se jen terminologicky. Místo toho, že formule φ je tvrditelná ve stavu a, se v inkvizitivní sémantice říká, že stav a podporuje formuli φ. $\|\varphi\|$ je množina těch stavů, které podporují formuli φ.

Je pozoruhodné, že inkvizitivní sémantika si klade za cíl modelovat adekvátním způsobem nejen tvrzení, ale zejména otázky. Pracuje však přitom se základním jazykem výrokové logiky, kde se nevyskytuje žádný symbol indikující, co je tvrzení a co otázka. Inkvizitivní sémantika modeluje otázky nepřímým způsobem. Zavádí do jazyka výraz ? jakožto definovaný symbol:

$$?\varphi =_{def} \neg\varphi \sqcup \varphi.$$

Tento symbol označuje jako inkvizitivní projektivní operátor a vedle tohoto symbolu pracuje ještě s tzv. deklarativním projektivním operátorem:

$$!\varphi =_{def} \neg\neg\varphi.$$

Z hlediska výše zavedené terminologie platí pro každou formuli φ, že $?\varphi$ je otázkou a $!\varphi$ je tvrzení. Platí, že každou formuli lze charakterizovat jako konjunkci tvrzení a otázky:

$$\varphi \text{ je ekvivalentní s } ?\varphi \wedge !\varphi.$$

Ukáži na příkladech, jak se tento formální aparát v inkvizitivní sémantice používá. Zvažme následující věty: Řekněme, že máme dvě elementární věty *Přijde Petr* a *Přijde Marie*, které formalizujeme jako p, resp. q. V prostoru možností se nacházejí všechny čtyři kombinace, které budeme pojímat jako možné světy s, t, u a v:

s: $s(p) = 1, s(q) = 1,$

t: $t(p) = 1, t(q) = 0,$

u: $u(p) = 0, u(q) = 1,$

v: $v(p) = 0, v(q) = 0.$

Zvažme následující věty

176. Přijde Petr?

177. Přijde Petr i s Marií?

178. Přijde Petr nebo Marie.

179. Přijde Petr nebo Marie?

180. Přijde Petr↑ nebo Marie↑?

181. Pokud přijde Petr, přijde i Marie.

182. Pokud přijde Petr, přijde i Marie?

183. Kdo přijde?

Věta 176 bude formalizována jako $?p$, tj. jako $p \sqcup \neg p$, a odpovídá jí propozice $\{\{s,t\},\{u,v\},\{s\},\{t\},\{u\},\{v\},\varnothing\}$, neboť $\{s,t\}$, $\{s\}$, $\{t\}$, $\varnothing$ jsou stavy, které podporují formuli p a $\{u,v\}$, $\{u\}$, $\{v\}$, $\varnothing$ jsou stavy, které podporují formuli $\neg p$. Prvky této propozice představují taková zúžení prostoru možností, která jsou potenciálně postačující v reakci na danou otázku. V jistém smyslu se dá říci, že představují prostor adekvátních odpovědí. Je jasné, že uvedenou propozici můžeme reprezentovat pouze pomocí množiny maximálních stavů, tj. pomocí množiny $\{\{s,t\},\{u,v\}\}$. Vzhledem k tomu, že propozice jsou dolů uzavřené, jsou ostatní stavy automaticky generovány stavy maximálními.

Věta 177 může být formalizována jako $p \wedge ?q$. Odpovídající propozice je $\{\{s\},\{t\},\varnothing\}$. Věta 178, míněna jako tvrzení, může být formalizována jako $!(p \sqcup q)$, tj. jako $\neg\neg(p \sqcup q)$. Odpovídá jí propozice, která má jeden maximální stav $\{s,t,u\}$. Oproti tomu může být věta 179 formalizována jednoduše pomocí inkvizitivní disjunkce $p \sqcup q$ a množina maximálních stavů odpovídající propozice obsahuje dva prvky: $\{\{s,t\},\{s,u\}\}$. Šipka ↑ uvedená u věty 180 představuje intonační modifikaci, která mění logické vlastnosti této věty. Rozdíl je zejména v tom, že u této věty je odpověď *Ne, nepřijde ani Petr, ani Marie* zcela v pořádku. Naproti tomu je tato odpověď v kolizi s presupozicemi věty 179. Věta 180 může být formalizována jako $?(p \sqcup q)$ a množina maximálních stavů odpovídající propozice vypadá takto $\{\{s,t\},\{s,u\},\{v\}\}$.

Dostáváme se k důležitému případu kondicionálních vět. Věta 181 je prosté kondicionální tvrzení $p \rightarrow q$ vyjadřující propozici, která obsahuje jeden maximální stav $\{s, u, v\}$. Věta 182 je kondicionální otázkou $p \rightarrow ?q$. Na tuto otázku se nabízejí dvě přípustné odpovědi *Pokud přijde Petr, Marie přijde také* a *Pokud Přijde Petr, Marie nepřijde.* Těmto odpovědím odpovídají stavy $\{s, u, v\}$ a $\{t, u, v\}$. Tyto dva stavy jsou také jediné maximální stavy propozice odpovídající formuli $p \rightarrow ?q$. Konečně věta 183 může být chápána jako požadavek úplné specifikace toho, kdo přijde. Může být formalizována jako formule $?p \wedge ?q$, které odpovídá propozice $\{\{s\}, \{t\}, \{u\}, \{v\}, \varnothing\}$.

Na závěr tohoto oddílu ještě stručně zmíním interpretaci systému inkvizitivní sémantiky, která byla navrhnuta v (Ciardelli, 2016b). Otázky jsou v tomto textu pojaty jako informační typy a vyplývání mezi otázkami jako určitý specifický vztah mezi typy informací – a nikoli mezi jednotlivými informacemi, jak je tomu v případě vyplývání běžné. Typ informací lze ztotožnit s množinou konkrétních informací, které pod tento typ spadají (analogicky lze otázku ztotožnit s množinou možných odpovědí). Zobecněný vztah vyplývání mezi typem T_1 a typem T_2 (resp. mezi otázkou O_1 a otázkou O_2) existuje tehdy, když každá informace typu T_1 implikuje nějakou informaci typu T_2 (resp. když každá odpověď na otázku O_1 implikuje nějakou odpověď na otázku O_2).

Ciardelli ilustruje tuto myšlenku pomocí následujícího příkladu. Předpokládejme, že je dán protokol jisté nemocnice, který vymezuje, kdy pacient může podstoupit určitý specifický zákrok v závislosti na tom, jaké symptomy vykazuje a v jakém celkovém fyzickém stavu se nachází. Tento protokol vymezuje určitý kontext, na jehož pozadí platí určitý specifický vztah mezi různými typy informací. Informace o symptomech pacienta a o jeho celkovém fyzickém stavu určují informaci o tom, zda pacient může podstoupit léčbu. Tedy vzhledem k tomuto protokolu informace typu *symptomy* spolu s informací typu *celkový stav* v jistém smyslu implikují informaci typu *léčba*. Např. typ informace *symptomy* může být identifikován s otázkou, jaké symptomy pacient vykazuje, takže zmíněný specifický vztah mezi typy informací ve výsledku odpovídá vztahu vyplývání mezi otázkami a může být adekvátně zachycen pomocí inkvizitivní sémantiky. Tím se ve své interpretaci zároveň inkvizitivní sémantika přibližuje tzv. *depencence logic*[4], která představuje další systém v jistých aspektech příbuzný systému $\mathrm{ZST}^{\sqcup}$.

[4]Viz zejména (Väänänen, 2007) a (Yang, 2014).

11.6 Logika tvrditelnosti s globální disjunkcí

Inkvizitivní logiku lze syntakticky vymezit pomocí kalkulu pro intuicionistickou logiku (kde ovšem symbolem pro disjunkci je $\sqcup$), k němuž přidáme následující dvě pravidla:[5]

$$\neg\neg p/p,$$

$$\neg\varphi \to (\psi \sqcup \chi)/(\neg\varphi \to \psi) \sqcup (\neg\varphi \to \chi).$$

První z těchto pravidel je zákon dvojí negace formulovaný pouze pro atomické formule, druhé je tzv. Kreisel-Putnamův zákon. Tento kalkul lze tedy použít též pro ZST$^{\sqcup}$, nebereme-li v potaz lokální disjunkci. Pokud bychom místo těchto dvou pravidel k intuicionistické logice přidali pouze pravidlo:

$$\alpha \to (\psi \sqcup \chi)/(\alpha \to \psi) \sqcup (\alpha \to \psi).$$

kde α figuruje jako proměnná za formule, v nichž se nevyskytuje disjunkce $\sqcup$, pak získáme úplnou kalkulizaci TST pro jazyk L^*. Tato logika je tedy logikou třídy všech topologických informačních modelů (ve skutečnosti je též logikou třídy všech distributivních algebraických informačních modelů), bereme-li v potaz pouze spojky $\neg$, $\to$, $\wedge$ a přidáme-li k nim globální disjunkci. Důkaz pro TST byl publikován v (Punčochář, 2015b) a je reprodukován v kapitole 13.

Z hlediska kalkulizace se situace značně zkomplikuje, když máme v jazyce jak globální, tak i lokální disjunkci. Úplný kalkul ZST$^{\sqcup}$ pro celý jazyk $L^{\sqcup}$ sestává z pravidel, které si rozdělíme do dvou skupin. V první skupině jsou standardní intuicionistická pravidla pro konjunkci, globální disjunkci, implikaci, negaci a spor.

konjunkce	EK: (i) $\varphi \wedge \psi/\varphi$ (ii) $\varphi \wedge \psi/\psi$	IK: $\varphi, \psi/\varphi \wedge \psi$
disjunkce$_g$	ED$_g$: $\varphi \sqcup \psi, [\varphi/\chi], [\psi/\chi]/\chi$	ID$_g$: (i) $\varphi/\varphi \sqcup \psi$, (ii) $\psi/\varphi \sqcup \psi$
implikace	EI: $\varphi \to \psi, \varphi/\psi$	II: $[\varphi/\psi]/\varphi \to \psi$
negace	EN: $\varphi, \neg\varphi/\bot$	IN: $[\varphi/\bot]/\neg\varphi$
spor	EFQ: $\bot/\varphi$	

V druhé skupině jsou jednak pravidla charakterizující chování lokální disjunkce. Dále pak sem spadají pravidla zajišťující distribuci operátorů $\vee$ a $\to$ přes globální disjunkci $\sqcup$. Nakonec je uvedena omezená verze principu vyloučeného třetího a eliminace dvojité negace. Podstatné je omezení u čtyř z

[5] Důkaz úplnosti korespondujícího hilbertovského kalkulu lze najít v (Ciardelli, 2009). Zcela nezávisle byl podobný (a ekvivalentní) kalkul pro velmi podobnou sémantiku zaveden a úplnost dokázána v (Punčochář, 2009).

těchto pravidel indikované přítomností proměnné α. Tato proměnná probíhá pouze přes formule, v nichž se nevyskytuje spojka $\sqcup$.

ID_l: (i) $\varphi/\varphi \vee \psi$, (ii) $\psi/\varphi \vee \psi$
DH: $\varphi \vee \psi, [\varphi/\chi], [\psi/\vartheta]/\chi \vee \vartheta$
DK: $\varphi \vee \psi/\psi \vee \varphi$
DR: $\alpha \vee \alpha/\alpha$
DD: $\varphi \vee (\psi \sqcup \chi)/(\varphi \vee \psi) \sqcup (\varphi \vee \chi)$
DI: $\alpha \to (\varphi \sqcup \psi)/(\alpha \to \varphi) \sqcup (\alpha \to \psi)$
VT: $\alpha \vee \neg\alpha$
EDN: $\neg\neg\alpha/\alpha$

Podobný (a ekvivalentní) kalkul byl navržen v (Ciardelli, 2016a). Odstraníme-li z tohoto kalkulu pravidla VT a EDN, získáme úplný kalkul pro $\mathrm{AST}^{\sqcup}$. Důkaz úplnosti obecné verze, kde je navíc ještě přidána do jazyka modalita nutnosti, je zformulován v kapitole 14.

11.7 Měla by být logika uzavřena na libovolné substituce?

Ve dvacátém století vznikla nepřeberná řada logických systémů vytvořených pro rozmanité účely. Vyvstala tak otázka, co lze ještě považovat za logiku a co už nikoli. Jaké základní požadavky by měl splňovat nějaký systém, abychom mu mohli přiznat status logické teorie? Logický systém chápu jako něco, co primárně třídí úsudky na platné a neplatné a co vymezuje nějaké kritérium „logické platnosti“ vět. Omezíme-li se pro jednoduchost pouze na logickou platnost vět, lze danou logiku reprezentovat pomocí množiny těch formulí, které jsou z hlediska této logiky považovány za logicky platné. Toto technické pojetí logiky jakožto určité množiny formulí je zcela běžné. V tomto duchu je definován např. pojem tzv. normálních modálních logik či pojem superintuicionistických logik. Jde o nespočetné třídy „logik“ vymezených jako množiny formulí splňující jisté vlastnosti.[6]

Přirozeně ne každá množina formulí představuje rozumného kandidáta na logiku v tomto smyslu. Můžeme se nyní ptát, jaké základní vlastnosti by měla určitá množina formulí splňovat, abychom ji vůbec byli ochotni zařadit do rodiny logických teorií. Ukazuje se, že je velmi obtížné formulovat v této věci nějaká univerzálně platná kritéria.

Jednou z podmínek, které se obvykle na logické teorie kladou, je tzv. uzavřenost na libovolné substituce. To znamená, že když φ je (dle dané lo-

[6]Viz např. (Chargov & Zakharyaschev, 1997).

gické teorie) logicky platná a σ je substituce, tj. funkce, která každé atomické formuli přiřadí nějakou formuli, pak by měla být logicky platná též formule $\sigma(\varphi)$ (substituční instance formule φ), kterou získáme tak, že každý výskyt každé atomické formule p ve formuli φ nahradíme formulí $\sigma(p)$. Např. zmíněné superintuicionistické logiky jsou vymezeny jako ty množiny formulí, které obsahují intuicionistickou logiku a jsou uzavřeny na modus ponens a libovolné substituce. Přitom se obvykle z této třídy vylučuje množina všech formulí, která také splňuje tyto vlastnosti.

Je zjevné, že obdobnou podmínku uzavřenosti na libovolné substituce lze formulovat i pro platnost úsudků: Je-li z hlediska daného logického systému platný úsudek $\varphi_1, \ldots, \varphi_n/\psi$, pak by měl být platný pro libovolnou substituci σ též úsudek $\sigma(\varphi_1), \ldots, \sigma(\varphi_n)/\sigma(\psi)$.

Systémy s globální disjunkcí, které jsme v této kapitole zavedli, nejsou uzavřeny na libovolné substituce. Úkolem tohoto oddílu je obhájit, že i tak není nijak problematické v těchto případech mluvit o logice.

Požadavek uzavřenosti na libovolné substituce se zdůvodňuje představou, že logika je záležitostí formy, tedy je-li formule logicky platná, reprezentuje platnou formu, což znamená, že vše, co má tuto formu, je logicky platné. Budu nyní argumentovat, že toto hledisko je nedorozuměním. Nechci přitom zpochybňovat, že logika je záležitostí formy. Celý problém se týká toho, jakou roli hrají v logice atomické formule. Obvyklé pojetí je, že atomické formule figurují jako proměnné za libovolné výroky přirozeného jazyka. Je však naprosto legitimní postupovat jinak a pracovat s atomickými výroky jako s proměnnými za elementární věty přirozeného jazyka, tj. takové věty, které už nemůžeme pomocí prostředků formálního jazyka formalizovat jemnějším způsobem. Např. máme-li v jazyce konjunkci, neformalizujeme větu *Karel je učitel a Petr je vědec* jako atomickou formuli p, ale vždy s pomocí konjunkce, např. jako formuli $p \wedge q$.

Není nijak a priori vyloučeno, že komplexní věty, v nichž se objevují nějaké specifické logické operátory, se chovají z logického hlediska jinak než věty elementární, v nichž se tyto operátory neobjevují. A je-li tomu skutečně tak, není tato skutečnost otázkou obsahu vět, nýbrž právě otázkou jejich formy. Vždyť komplexní věta je komplexní jedině na základě své formy. A chovají-li se komplexní věty jinak než věty elementární, lze očekávat, že některé zákony platící pro elementární věty platit přestanou, když namísto elementárních vět dosadíme věty komplexní.

Jde tu o centrální otázku celé této práce. Generují některé logické operátory propozice specifického typu, odlišného od propozic, které vyjadřují elementární věty? Tato část práce stojí na přesvědčení, že tomu tak je. V ZST^G to je implikace, která generuje k-formule, což se opírá o představu, že elementární věty mají primárně podmínky pravdivosti, sekundárně podmínky tvrditelnosti, ale spojíme-li implikací takovéto věty, získáme věty, které mají primárně podmínky tvrditelnosti. V $\mathrm{ZST}^{\sqcup}$ je to zase globální disjunkce, která generuje neregulární propozice.

Mohou existovat rozmanité důvody, proč zavádět logický systém, který není uzavřený na libovolné substituce. V oddílu 10.1 jsme se např. setkali s příkladem amerických prezidentských voleb, který v jistém smyslu představoval protipříklad k modu ponens. Jednalo se o úsudek tvaru:

(a) $p \to (\neg q \to r), p/\neg q \to r$.

Přesvědčivě lze argumentovat, že může nastat situace, kdy máme racionální důvody přijmout předpoklady, ale přitom nemáme racionální důvody přijmout závěr. Je legitimní pokoušet se tuto situaci modelovat a pojmout vyplývání jako přenos racionálních důvodů. V této práci jsem volil jiný postup a raději jsem se vydal cestou, na základě které lze udržet univerzální platnost pravidla modus ponens tím, že jsem pojal vyplývání jako přenos striktní tvrditelnosti. Ale povšimněme si, že pokud se někdo rozhodne modelovat vyplývání jako přenos racionálních důvodů, je nucen nejen vzdát se modu ponens, ale též rezignovat na princip uzavřenosti na libovolné substituce. V McGeeho protipříkladu je totiž podstatné, že kondicionální věta v předpokladech má specifický tvar, kdy v jejím konsekventu je opět kondicionální věta. Zdá se nemožné najít k modu ponens podobně přesvědčivý protipříklad, který by měl jednoduše formu:

(b) $p, p \to q/q$.

Domnívám se, že lze říci, že forma (b) přenáší racionální důvody a forma (a) nikoli. Přitom formu (a) lze získat substitucí z formy (b).

Je pozoruhodnou historickou skutečností, že také jedna z prvních modálních logik – Carnapova modální logika C – nebyla uzavřena na libovolné substituce. Carnapovy modality integrovaly v objektovém jazyce metajazykové pojmy logické platnosti a konzistence:

$\Box\varphi$ reprezentuje tvrzení, že φ je logicky platná.

$\Diamond\varphi$ reprezentuje tvrzení, že φ je logicky konzistentní.

Pak ovšem nemůžeme získat systém, který je uzavřený na libovolné substituce, neboť $\Diamond p$ bude vyhodnocena jako logicky platná, ale její substituční instance $\Diamond(p \wedge \neg p)$ nikoli.[7]

[7] K tomuto tématu viz (Punčochář, 2010, 2012).

V epistemických logikách modelujících situaci veřejného oznámení nějaké informace (public announcement) také existují specifické důvody pro porušení principu uzavřenosti na libovolné substituce.[8] Podobně tomu je ve výrokové verzi již zmíněné dependence logic[9] a v inkvizitivní sémantice, kde tyto důvody vycházejí z toho, že atomické formule reprezentují tvrzení a otázky lze získat až jako komplexní formule pomocí globální disjunkce. V inkvizitivní logice (a tudíž i v ZST$^{\sqcup}$) je platná třeba následující formule:

$$(p \to (q \sqcup \neg q)) \to ((p \to q) \sqcup (p \to \neg q)).$$

Dle toho, jakým způsobem inkvizitivní sémantika formální jazyk interpretuje, reprezentuje tato formule výše zmíněný logický fakt, že na podmíněnou otázku jako třeba *Pokud přijde Petr, přijde i Marie?* ($p \to ?q$) existují dvě základní odpovědi: (a) *Ano, pokud přijde Petr, přijde i Marie* ($p \to q$); (b) *Ne, pokud přijde Petr, Marie nepřijde* ($p \to \neg q$). Dává tedy dobrý smysl, že tato formule je sémantikou vyhodnocena jako logicky platná. Avšak stejně dobrý smysl dává to, že její substituční instance, formule

$$((q \sqcup \neg q) \to (q \sqcup \neg q)) \to ((q \sqcup \neg q) \to q) \sqcup ((q \sqcup \neg q) \to \neg q))$$

není logicky platná. Její antecedent je totiž tautologií vyjadřující to, že např. otázka, zda přijde Petr ($?q$) implikuje otázku, zda přijde Petr ($?q$). Avšak tato triviální skutečnost nijak neimplikuje inkvizitivní (globální) disjunkci: Otázka, zda přijde Petr, implikuje, že přijde Petr, nebo otázka, zda přijde Petr, implikuje, že Petr nepřijde $((?q \to q) \sqcup (?q \to \neg q))$.

Tento příklad slouží zároveň k ilustraci selhání principu uzavřenosti na libovolné substituce v systému ZST$^{\sqcup}$. V následující kapitole se setkáme s dalšími důvody, proč odmítnout uzavřenost na libovolné substituce jako základní požadavek kladený na logické teorie.

11.8 Shrnutí

V této kapitole jsem ukázal, že sémantika tvrditelnosti otevírá prostor pro zavedení nového typu disjunkce, kterou nazýváme globální disjunkcí, jelikož operuje, na rozdíl od lokální disjunkce, primárně na úrovni informačních stavů. Tuto disjunkci lze využít k reprezentaci řady logických jevů přirozeného jazyka. Tento nový operátor však generuje tzv. neregulární formule, tedy komplexní formule vyjadřující propozice jiného typu, než jaké vyjadřují formule atomické. Tento efekt vede k selhání principu uzavřenosti na libovolné substituce. I když tento princip je často považován za základní logický

[8] Viz (van Ditmarsch, van der Hoek & Kooi, 2008).
[9] Viz (Yang, 2014).

princip, argumentoval jsem, že pro to není žádný zásadní důvod. V rámci této kapitoly jsem také představil tzv. inkvizitivní sémantiku, která též operuje s globální disjunkcí, i když poněkud odlišným způsobem, a z technického hlediska se jedná o systém velmi blízký sémantice striktní tvrditelnosti.

Kapitola 12

Negace, modality, výběrové funkce, kvantifikátory a kategoriální gramatika

Možnost zavedení globální disjunkce, jak byla podrobně vysvětlena v předchozí kapitole, představuje zásadní přednost sémantiky tvrditelnosti. V této kapitole se budeme zabývat dalšími aspekty sémantiky tvrditelnosti, které však již nebudou zkoumány do takových detailů. Všechna témata zmíněná v této kapitole představují oblasti otevřené dalšímu bádání. Jedná se tedy zároveň o jakýsi přehled témat naznačujících směr budoucího výzkumu v oblasti sémantiky tvrditelnosti. Záměrem kapitoly je pouze podat určitý přehled takovýchto témat. Z tohoto důvodu je řada problémů načrtnuta jen v náznaku.[1]

12.1 Slabá negace

Globální disjunkce nám posloužila k tomu, abychom mohli reagovat na některé paradoxy materiální implikace, v nichž interaguje implikace s disjunkcí – tj. zejména na paradoxy čtvrté skupiny z oddílu 4.8. Nyní se zaměříme na závažné paradoxy, v nichž dochází k interakci negace a implikace – ty byly uvedeny ve třetí skupině paradoxů materiální implikace. Problém se objevuje už při prostém negování implikace. Dle klasické logiky můžeme odvodit z negace implikace jak antecedent, tak i negaci konsekventu. To se zdá být skutečně paradoxní. Uveďme znovu nějaký absurdní úsudek tohoto typu:

[1] Některé úvahy této kapitoly byly podrobněji rozpracovány v (Punčochář, 2014a,b,c, 2015a, 2016a).

184. Není pravda, že pokud tento kandidát na prezidenta zemře před volbami, tak se stane příštím prezidentem. Tudíž tento kandidát na prezidenta zemře před volbami a nestane se příštím prezidentem.

Negujeme-li kondicionální větu, tak ji popíráme. Lze argumentovat, že existuje více možných způsobů, kterými popíráme kondicionály. V následující pasáži identifikuje Grice jeden z těchto způsobů:

> Někdy má popření kondicionální věty podobu odmítnutí tvrditelnosti této věty... Například řekneme-li *Není pravda, že pokud X dostane penicilin, tak se mu uleví*, můžeme tím mínit, že se může stát, že tento lék nebude mít na X žádný účinek. (Grice, 1989, str. 81)

Není pravda, že pokud A, tak B v této interpretaci v podstatě odpovídá tvrzení *Je možné, že A a ne-B*, což je v souladu s negováním striktní implikace. Tak např. popření věty

185. Pokud byl vrahem manžel zavražděné, motivem vraždy byla žárlivost.

může odpovídat tomu, že je možné, že vrahem byl manžel zavražděné, ale ke svému činu měl jiný motiv než žárlivost. V sémantice tvrditelnosti lze zavést operátor, který v objektovém jazyce reprezentuje popření tvrditelnosti.

Nyní k jazyku L přidáme slabou negaci $\sim$ a takto obohacený jazyk označíme jako $L^{\sim}$. Pro novou spojku formulujeme tuto sémantickou podmínku: V nulovém stavu platí formule $\sim\varphi$ automaticky. Pokud je a nenulový stav, stanovíme, že

$\sim\varphi$ je tvrditelná v a právě tehdy, když φ není tvrditelná v a.

Negace $\neg$ může být zavedena v $L^{\sim}$ jakožto definovaný symbol znamenající implikaci kontradikce. Jak naznačuje jméno nového symbolu, $\sim$ je slabší než $\neg$. Platí, že $\sim\varphi$ vyplývá z $\neg\varphi$, ale $\neg\varphi$ nevyplývá z $\sim\varphi$. První ze vztahů plyne z faktu, že neexistuje žádný nenulový stav, ve kterém by platila jak formule φ, tak i její negace $\neg\varphi$. Takže pokud v daném nenulovém stavu platí $\neg\varphi$, neplatí zde φ, což znamená, že zde platí $\sim\varphi$. Abychom ukázali, že $\neg\varphi$ nevyplývá z $\sim\varphi$, stačí vezmeme-li například atomickou formuli p jakožto φ a zvážíme stav obsahující jak nenulový podstav, ve kterém je p tvrditelné, tak i podstav, ve kterém není p tvrditelné. V takovém stavu platí $\sim p$, ale ne $\neg p$.

Negace $\sim$ se má k negaci $\neg$ podobně jako globální disjunkce k lokální disjunkci, a to v tom smyslu, že $\sim$ (resp. globální disjunkce) operuje na úrovni informačních stavů stejným způsobem jako $\neg$ (resp. lokální disjunkce) na úrovni jednotlivých světů. Avšak zatímco globální disjunkce generovala neregulární formule, slabá negace generuje neperzistentní formule, čímž vnáší do systému nový rozměr. Ve výsledku to však opět vede k selhání principu uzavřenosti logiky na libovolné substituce.[2] Některé technické výsledky vztahující se ke slabé negaci byly dokázány v (Punčochář, 2015a) a jsou uvedeny v kapitole 15. Nyní se podíváme jen na dvě aplikace tohoto operátoru v rámci logické analýzy jazyka. V prvním případě si pomohu znovu citací z Grice:

> Předpokládejme, že řeknete *Příštím předsedou vlády bude Wilson nebo Heath.* Mohu s vámi nesouhlasit v jednom z následujících dvou způsobů: (1) Mohu říci *Nikoli, žádný z nich to nebude, bude to Thorpe.* … (2) Mohu říci *Nesouhlasím, bude to Wilson nebo Thorpe.* (Grice, 1989, str. 64)

Je vhodné formalizovat disjunkci *Příštím předsedou vlády bude Wilson nebo Heath* jako lokální disjunkci $(p \vee q)$. Globální disjunkce zde není vhodná, protože tato věta je zjevně tvrditelná i vzhledem k informačním stavům, v nichž není tvrditelné ani p (*Příštím předsedou vlády bude Wilson*), ani q (*Příštím předsedou vlády bude Heath*). Můžeme analyzovat Gricův příklad následujícím způsobem: První druh nesouhlasu odpovídá popření obou disjunktů, což může být formalizováno jako $\neg(p \vee q)$. Druhý druh nesouhlasu odpovídá popření tvrditelnosti disjunkce. V tomto případě nepopíráme oba disjunkty, popíráme jen to, že tvrzení je ospravedlněné, neboť existuje otevřená možnost, že oba disjunkty jsou nepravdivé (neboť Thorpe by mohl být příštím předsedou vlády). Tedy adekvátnější formalizace v tomto případě je $\sim(p \vee q)$.

Druhým příkladem na využití slabé negace je modifikace dříve probíraného příkladu s americkými prezidentskými volbami. Původní příklad byl navržen jako protipříklad k modu ponens. V oddílu 10.1 jsem uvedl, že z hlediska vyplývání založeného na pojmu striktní tvrditelnosti se o protipříklad nejedná. Avšak Gauker (2005) si povšiml, že modifikace, která se vztahuje k úsudku tvaru modu tollens, funguje i tehdy, když pojímáme vyplývání jako přenos (striktní) tvrditelnosti.

Scénář je stejný jako v originální McGeeho verzi: Nacházíme se před volbou amerického prezidenta v r. 1980. O úřad se ucházejí tři kandidáti: Ronald Reagan (republikán), Jimmy Carter (demokrat) a John Anderson (republikán). S ohledem na tento kontext jistě můžeme považovat následující úsudek za neplatný:

> Jestliže vyhraje republikán, pak když nevyhraje Reagan, vyhraje Anderson. Není pravda, že když nevyhraje Reagan, vyhraje Anderson. Tudíž republikán nevyhraje.

Vypadá to tedy, že zde máme výrazný protipříklad k modu tollens. Pokud jsme ovšem obezřetní, ukazuje se, že negace druhého předpokladu má jiný

[2] Např. $p \to (q \to p)$ je tvrditelná ve všech stavech, avšak $\sim p \to (q \to \sim p)$ nikoli.

charakter než negace závěru. V druhé premise implikaci negujeme tak, že odmítáme její tvrditelnost (s možným poukazem na přítomnost Cartera), což formalizujeme pomocí symbolu $\sim$. Avšak v závěru jednoznačně musíme při formalizaci použít $\neg$. Úsudek má tedy formu

$$m \to (\neg p \to r), {\sim}(\neg p \to r)/\neg m.$$

Tato úsudková forma je neplatná, ať už slabou negaci přidáme k ZST nebo AST. Konkrétně platí, že předpoklady vyjdou jako tvrditelné a závěr nikoli v informačním stavu, který odpovídá popsanému scénáři:

	p	q	r	m	n
s	1	0	0	1	0
t	0	1	0	0	1
u	0	0	1	1	0

kde atomické formule reprezentují věty následujícím způsobem:

Vyhraje Reagan. p

Vyhraje Carter. q

Vyhraje Anderson. r

Vyhraje republikán. m

Vyhraje demokrat. n

Obecně platí v souladu s očekáváním, že ze slabé negace implikace ${\sim}(p \to q)$ nevyplývá ani antecedent p ani negace konsekventu $\neg q$.[3]

12.2 Silná negace

Klasicky platné úsudkové formy

$$\neg(\varphi \to \psi)/\varphi,$$

$$\neg(\varphi \to \psi)/\neg\psi$$

nejsou platné ani z hlediska intuicionistické logiky. Způsobem, jak se jim vyhnout, je tedy také krok od ZST k TST (resp. AST), který koresponduje s krokem od klasické logiky k logice intuicionistické. Avšak intuicionistická negace vymezená jakožto implikace sporu bývá zase kritizována z jiného hlediska.

[3] Z ${\sim}(p \to q)$ vyplývá pouze slabá negace konsekventu ${\sim}q$.

Problém s intuicionistickou negací lze ilustrovat pomocí příkladu Michaela Dummetta. Negace dané věty A je z intuicionistického hlediska tvrditelná tehdy, když není principiálně možné aktuální informační stav rozvinout pomocí dodatečných informací tak, že by byla tvrditelná věta A. Avšak zvažme tento příklad: Předpokládejme, že Jones nikdy nebyl vystaven situaci, v níž by se prokázalo, zda je to statečný člověk či nikoli. Nyní je Jones mrtev a neexistuje žádný způsob, jak ověřit, že to byl statečný člověk. Tedy podle toho, jak funguje intuicionistická negace, by mělo být tvrditelné, že Jones nebyl statečný člověk, což se zdá být neintuitivní.[4]

Tento problém s intuicionistickou negací představuje jednu z motivací pro zavedení alternativní negace ve stylu tzv. Nelsonovy logiky.[5] Pro zavedení tohoto systému je podstatné, že vedle podmínek tvrditelnosti vystupují též podmínky popiratelnosti, které jsou vůči podmínkám tvrditelnosti duální. Právě tato symetrie tvrditelnosti a popiratelnosti – a to, že jsou oba tyto pojmy kladeny na stejnou úroveň – odlišuje Nelsonovu logiku od logiky intuicionistické. Negace v Nelsonově logice je projekcí popiratelnosti do objektového jazyka.

Existují dvě základní varianty Nelsonovy logiky: systémy $N3$ a $N4$. Pro tyto logiky lze formulovat určitou modifikaci kripkovské sémantiky – viz např. (Wansing, 2001). Na obecné úrovni AST je možné Nelsonovu logiku $N3$ (resp. $N4$) vymezit takto. Model je nyní trojice $\langle \mathcal{A}, V^+, V^- \rangle$, kde $\mathcal{A}$ je distributivní algebra informačních stavů a V^+, V^- je pozitivní a negativní valuace. Obě tyto valuace přiřazují atomickým formulím ideály na $\mathcal{A}$. Valuace V^+ se vztahuje k tvrditelnosti atomických formulí a valuace V^- k jejich popiratelnosti. Rozdíl mezi logikou $N3$ a $N4$ spočívá v tom, zda na valuace klademe (v případě $N3$) nebo neklademe (v případě $N4$) dodatečnou podmínku:

$$V^+(p) \cap V^-(p) = \{0\}.$$

Tato podmínka říká, že žádný atom není tvrditelný a popiratelný současně v žádném nenulovém stavu. Dalším krokem ve vymezení sémantiky je stanovení podmínek tvrditelnosti a popiratelnosti (relativně vůči danému modelu) pro jazyk nL, což je jazyk L, v němž je negace $\neg$ nahrazena silnou negací $-$, která překládá popiratelnost do objektového jazyka.

a+ Atom p je tvrditelný v a právě tehdy, když $a \in V^+(p)$.

a- Atom p je popiratelný v a právě tehdy, když $a \in V^-(p)$.

b+ $-\varphi$ je tvrditelná v a právě tehdy, když φ je popiratelná v a.

[4] Viz k tomu (Kapsner, 2014).

[5] Viz zejména (Nelson, 1949). Matematickými vlastnostmi Nelsonovy logiky a příbuzných systémů se zevrubně zabývá publikace (Odintsov, 2008).

b- $-\varphi$ je popiratelná v a právě tehdy, když φ je tvrditelná v a.

c+ Formule $\varphi \wedge \psi$ je tvrditelná v a právě tehdy, když φ je tvrditelná v a a ψ je tvrditelná v a.

c- Formule $\varphi \wedge \psi$ je popiratelná v a právě tehdy, když existují stavy b, c takové, že φ je popiratelná v b, ψ je popiratelná v c, a přitom $b + c = a$.

d+ Formule $\varphi \vee \psi$ je tvrditelná v a právě tehdy, když existují stavy b, c takové, že φ je tvrditelná v b, ψ je tvrditelná v c, a přitom $b + c = a$.

d- Formule $\varphi \vee \psi$ je popiratelná v a právě tehdy, když φ je popiratelná v a a ψ je popiratelná v a.

e+ Formule $\varphi \rightarrow \psi$ je tvrditelná v a právě tehdy, když pro každý podstav b stavu a platí, že jestliže φ je tvrditelná v b, tak ψ je tvrditelná v b.

e-$_1$ Formule $\varphi \rightarrow \psi$ je popiratelná v a právě tehdy, když φ je tvrditelná v a a ψ je popiratelná v a.

Povšimněme si, že v takto vymezené sémantice stále neplatí princip vyloučeného třetího, avšak platí nyní princip dvojí negace. Touto strategií se sice vyhneme námitce, kterou lze na základě příkladu s Jonesem vztáhnout na intuicionistickou negaci, avšak vyvstává nám opět problém s těžko přijatelnými schématy

$$\neg(\varphi \rightarrow \psi)/\varphi,$$

$$\neg(\varphi \rightarrow \psi)/\neg\psi,$$

která na základě sémantické podmínky popiratelnosti e-$_1$ implikace opět získávají svoji platnost. Z hlediska použitelnosti celého systému pro logickou analýzu jazyka je zde vhodné uvažovat alternativní podmínky popiratelnosti kondicionálů.

V oddílu 11.2, kde jsem stručně představil Gaukerovou sémantiku, jsem upozornil na to, že Gauker nevymezuje negaci v intuicionistickém smyslu. Místo toho Gauker také zavádí vedle podmínek tvrditelnosti podmínky popiratelnosti a negace formule je převedena na popiratelnost této formule. Pracuje tedy s negací podobným způsobem, jak je tomu běžné v sémantice Nelsonovy logiky. Formuluje však jinou podmínku pro popiratelnost kondicionálních vět, kterou bychom do našeho systému mohli přeložit takto: Formule $\varphi \rightarrow \psi$ je automaticky popiratelná v nulovém stavu. Je-li a nenulový stav, pak platí:

e-$_2$ Formule $\varphi \rightarrow \psi$ je popiratelná v a právě tehdy, když existuje nenulový podstav b stavu a takový, že φ je tvrditelná v b a ψ je popiratelná v b.

Z hlediska přirozeného jazyka tato podmínka působí přijatelněji než podmínka e-$_1$. Z technického hlediska je významné, že tato podmínka jako jediná generuje neperzistentní formule.

Zmíníme ještě jeden alternativní způsob, jak lze vymezit podmínku popiratelnosti pro kondicionální věty. Tento způsob může být motivován tím, že zvážíme dva (vzájemně související) principy v literatuře známé jako *Aristotelův princip* a *Boethiův princip*.

Aristotelův princip: Není pravda, že A implikuje negaci A.

Boethiův princip: Pokud A implikuje B, tak není pravda, že A implikuje negaci B.

Přestože tyto principy jsou zjevně přirozenými kandidáty na logicky platné větné formy, je zajímavé, že ani klasická logika – která se jinak jeví spíše jako příliš silná než příliš slabá – neklasifikuje odpovídající formule jako tautologie. Systémy, které tyto principy přijímají, se nazývají konexivní logiky.[6]

S těmito principy též souvisí otázka, na kterou jsme již narazili v oddílu 6.5 v souvislosti s logikou Roberta Stalnakera – totiž zda negace implikace je totéž co implikace negace. Vypomůžeme si opět Gricovými slovy:

> Někdy popření kondicionálu lze chápat jako předložení protikondicionálu, jehož konsekvent je negací konsekventu kondicionálu původního. Jestliže A řekne *Pokud jí učiní nabídku k sňatku, odmítne ho* a B řekne *To není pravda*, můžeme tomu zcela přirozeně rozumět tak, že B míní *Pokud jí učiní nabídku k sňatku, neodmítne ho.* (Grice, 1989, str. 80)

Tedy v takovýchto případech

Není pravda, že pokud A, B

znamená

Pokud A, není pravda, že B

Ekvivalence těchto větných forem tvoří součást řady logických systémů. Vedle Stalnakerovy (1975) sémantiky (kde je však tato ekvivalence podmíněna tím, že A je možné), Wansingových (2015) konexivních logik či např. Cantwellovy (2008) tříhodnotové logiky tento princip přijímají také propagátoři pravděpodobnostní sémantiky, jako např. Adams (1975) či Edgingtonová (1995),

[6] Viz zejména (Wansing, 2015).

přestože ho kvůli výše uvedeným syntaktickým omezením nemohou formulovat v objektovém jazyce. Uvedená ekvivalence též byla integrována do logiky navržené v (Punčochář, 2014a).

Pro ilustraci možné aplikace této ekvivalence vezměme třeba úsudek:

> Jestliže Bůh neexistuje, pak není pravda, že pokud se modlím, Bůh mé modlitby vyslyší. Tudíž pokud se nemodlím, Bůh existuje.

Jak jsem již uvedl, tento úsudek je paradoxně v klasické logice vyhodnocen jako logicky platný. Avšak klasická logika zde selhává, neboť konsekvent předpokladu je zjevně míněn jako ekvivalentní s tvrzením *Pokud se modlím, není pravda, že Bůh mé modlitby vyslyší.*

Tento způsob popření kondicionálu lze v sémantice tvrditelnosti a popiratelnosti zachytit pomocí následující podmínky, která vykazuje jistou symetrii s kladnou podmínkou e+.

e-$_3$ Formule $\varphi \rightarrow \psi$ je popiratelná v a právě tehdy, když pro každý podstav b stavu a platí, že jestliže φ je tvrditelná v b, tak ψ je popiratelná v b.

Na základě této podmínky získáme ekvivalenci mezi formulemi

$$-(\varphi \rightarrow \psi) \qquad \text{a} \qquad \varphi \rightarrow -\psi$$

Další technické podrobnosti nyní ponechme stranou. Zabýval jsem se jimi např. v textech (Punčochář, 2014a, 2016a) a vrátím se k nim v oddílu 15.6. Pouze je vhodné na tomto místě poukázat na to, že rozštěpení podmínek tvrditelnosti a popiratelnosti představuje do jisté míry i posun v pojetí sémantické ekvivalence dvou různých vět. Co to znamená, že dvě formule jsou ekvivalentní? Je-li jediným sémantickým faktorem tvrditelnost, můžeme odpovědět, že to znamená, že jsou tvrditelné ve stejných stavech. Avšak je-li ve hře ještě popiratelnost, může se stát, že dvě formule se shodují co do tvrditelnosti, avšak neshodují se co do popiratelnosti.

Předpokládejme, že výše uvedené podmínky jsou zavedeny na úrovni ZST. Tedy informační stavy jsou libovolné množiny možných světů a sémantika negace je vymezena pomocí podmínky b+ plus podmínek popiratelnosti a-, b-, c-, d- a např. e-$_3$. Pak platí, že formule $p \vee q$ a $\neg p \rightarrow q$ jsou tvrditelné ve stejných stavech. Avšak nejsou popiratelné ve stejných stavech. To pozoruhodně koresponduje s přirozeným jazykem. Zvažme následující příklad, který je v upravené podobě převzatý z (Stalnaker, 1975). Vezměme si tyto dvě věty:

186. Pokud není vrahem zahradník, pak je jím manžel zavražděné.

187. Vrahem je zahradník nebo manžel zavražděné.

Tyto věty jsou na úrovni přirozeného jazyka ze sebe vzájemně odvoditelné. Vím-li, že platí 187, mohu odvodit 186 a vice versa. Avšak to neznamená, že jsou vzájemně zaměnitelné. Představme si situaci, kdy zahradník je mezi podezřelými, avšak manžel zavražděné nikoli. Pak je tvrditelná negace věty 186:

188. Neplatí, že pokud není vrahem zahradník, pak je jím manžel zavražděné.

avšak nikoli negace věty 187:

189. Neplatí, že vrahem je zahradník nebo manžel zavražděné.

Sémantická odlišnost vět 188 a 189 je vidět např. z toho, že z věty 189 vyplývá, že vrahem není zahradník, což však nevyplývá z věty 188. Tento příklad ilustruje, že vzájemná odvoditelnost (tedy logická ekvivalence) nemusí být postačující podmínkou ke vzájemné zaměnitelnosti. Vzájemná odvoditelnost znamená tvrditelnost za stejných okolností. Silnější pojem ekvivalence je dán shodou v obou sémanticky relevantních aspektech – tvrditelnosti i popiratelnosti. V logických systémech založených na tvrditelnosti a popiratelnosti tak typicky neplatí zaměnitelnost logicky ekvivalentních formulí (formulí tvrditelných ve stejných stavech). Avšak místo toho platí následující věta.

`Věta 12.2.1` *Jsou-li formule φ a ψ silně ekvivalentní, tj. tvrditelné i popiratelné ve stejných stavech, pak pro libovolnou formuli χ, která obsahuje φ jako svoji podformuli, platí, že jsou silně ekvivalentní také formule χ a $\chi[\varphi/\psi]$, kde $\chi[\varphi/\psi]$ vznikla z χ nahrazením nějakého výskytu podformule φ ve formuli χ formulí ψ.*

12.3 Modality

V tomto oddílu vysvětlím, jak sémantika tvrditelnosti otevírá prostor pro zavedení nestandardně fungujících epistemických modalit. Poněkud překvapivě se ale také ukazuje, že do této sémantiky lze jednoduchým způsobem zavést i tradiční modality nutnosti a možnosti, které jsou běžně studovány v modální logice. Základním nástrojem této disciplíny je pojem kripkovského modelu a v sémantice tvrditelnosti lze jistým způsobem kripkovské modely nasimulovat.

Budeme se pohybovat nejprve na úrovni ZST formulované pomocí pojmu diskrétního informačního prostoru (viz definice 10.5.1). Definici tohoto pojmu nyní mírně modifikujeme.

`Definice 12.3.1` *Modální diskrétní informační prostor definujeme jako trojici* $\langle W, \wp(W), g\rangle$*, kde* W *je libovolná neprázdná množina možných světů,* $\wp(W)$ *je potenční množina množiny* W*, tedy množina všech jejích podmnožin, a* g *je funkce z* $\wp(W)$ *do* $\wp(W)$ *splňující následující podmínky:*

(a) $g(\emptyset) = \emptyset$,

(b) $g(\bigcup_{i \in X} a_i) = \bigcup_{i \in X}(g(a_i))$.

Prvky množiny $\wp(W)$ *označujeme stále jako informační stavy. Modální diskrétní informační model je čtveřice* $\langle W, \wp(W), g, V\rangle$*, kde* $\langle W, \wp(W), g\rangle$ *je modální diskrétní informační prostor a* V *je ohodnocení atomů definované jako funkce přiřazující každé atomické formuli nějaký stav* $a \in \wp(W)$.

Nyní můžeme rozšířit základní výrokový jazyk L o modální operátor nutnosti $\Box$. Tento rozšířený jazyk budeme označovat jako mL. Operátor možnosti $\Diamond$ budeme chápat jako operátor odvozený, definovaný jako $\neg\Box\neg$. Relace tvrditelnosti bude nyní pro jazyk mL zcela vymezena, když doplníme sémantickou podmínku pro $\Box$.

$\Box\varphi$ je tvrditelná v a právě tehdy, když φ je tvrditelná v $g(a)$.

Podmínka říká, že daná věta platí nutně, když tato věta je tvrditelná ve stavu zprostředkovaném daným operátorem. Motivace pro tuto podmínku je zhruba tato: Z hlediska informačního stavu a, ve kterém se právě nacházím, jsem oprávněn říci, že daná věta je fyzikálně nutná, když tato věta vyplývá z toho, co vím o fyzice. Ze svých fyzikálních znalostí bych mohl vytvořit nový informační stav $g(a)$. Tento stav bude obsahovat informace, které mám k dispozici a které jsou relevantní z hlediska fyziky. Nebude však obsahovat to, co vím např. o historii či sociologii. Z hlediska stavu a lze říci, že daná věta je fyzikálně nutná, když tato věta sama platí už na základě stavu $g(a)$, tedy na základě stavu, který vybere ze stavu a to, co je relevantní z hlediska fyziky.

V tomto a podobných případech tedy jde o to, vybrat z informačního stavu relevantní část a z té vytvořit nový informační stav. Z duálního hlediska založeného na možných světech to pak znamená, že v takovýchto případech by mělo vždy platit:

$a \subseteq g(a)$.

To je také podmínka, která odpovídá (v přesně popsatelném smyslu) přirozenému zákonu:

(T) $\Box\varphi \to \varphi$.

Nebudeme však tuto ani žádné dodatečné podmínky klást na operátor g, abychom – jak je tomu v modální logice běžné – umožnili co nejširší aplikovatelnost zavedeného aparátu. Uvedený princip (T) např. neplatí, je-li operátor $\square$ interpretován deonticky, jako *je přikázáno, že*. V takovém případě operátor g přiřazuje danému informačnímu stavu a stav sestávající z toho, o čem je v a známo, že se jedná o platnou normu. Jelikož z hlediska a může být známo, že je něco platnou normou, a přitom je to porušováno, nemusí v takovém případě platit $a \subseteq g(a)$.

Bez dodatečných omezení kladených na operátor g koresponduje výsledná sémantika modálních diskrétních informačních modelů s kripkovskou sémantikou ve smyslu, který nyní objasním.

Nechť $\mathcal{M} = \langle W, \wp(W), g, V\rangle$ je modální diskrétní informační model. Dále budu psát $g(s)$ místo $g(\{s\})$. Na základě modelu $\mathcal{M}$ definujeme kripkovský model $\mathcal{M}^k = \langle W, R, V\rangle$, kde R je pro každé $s, t \in W$ definováno takto:

sRt iff $t \in g(s)$.

Nyní předpokládejme, že $\mathcal{N} = \langle W, R, V\rangle$ je nějaký kripkovský model. Pomocí něj definujeme modální diskrétní informační model $\mathcal{N}^a = \langle W, \wp(W), g, V\rangle$, kde g je pro každé $a \in \wp(W)$ definováno takto:

$g(a) = \{s \in W; tRs$ pro nějaké $t \in a\}$.

Nyní platí následující věta, jejíž důkaz je jednoduchým cvičením.

`Věta 12.3.2` $\mathcal{M}^{ka} = \mathcal{M}$ a $\mathcal{N}^{ak} = \mathcal{N}$.

Navíc pro každý modální diskrétní informační model $\mathcal{M}$ získáváme rozšíření věty 10.4.9, jak lze jednoduše ověřit.

`Věta 12.3.3` *Pro každou formuli φ jazyka mL platí, že φ je tvrditelná ve stavu a modálního diskrétního informačního modelu $\mathcal{M}$ právě tehdy, když v modelu $\mathcal{M}^k$ je φ pravdivá v každém světě stavu a.*

Tím je popsána korespondence mezi sémantikou modálních diskrétních informačních prostorů a kripkovskou sémantikou. Kripkovská sémantika se používá ke studiu tzv. normálních modálních logik. Výše popsané vztahy ukazují, že ke studiu těchto logik lze použít také rozšířenou sémantiku tvrditelnosti. Ta je navíc vhodná k tomu, že na rozdíl od kripkovské sémantiky vede ihned a přímočaře k řadě možných přirozených zobecnění. Např. můžeme místo diskrétní uvažovat libovolné topologie na množině možných světů nebo můžeme provést zobecnění popsané v kapitole 14, kde je také ukázáno, že tento obecný aparát je vhodný ke studiu modálních superintuicionistických logik.

Jistou nevýhodou tohoto sémantického rámce je, že sémantická podmínka pro definovaný operátor možnosti je poměrně komplikovaná a ne příliš přirozená. Platí totiž následující:

$\Diamond\varphi$ (tj. formule $\neg\Box\neg\varphi$) je tvrditelná ve stavu a (daného modálního diskrétního informačního modelu) právě tehdy, když pro každé neprázdné $b \subseteq a$ existuje neprázdné $c \subseteq g(b)$ tak, že φ je tvrditelná v c.[7]

Takovýto operátor možnosti zachovává perzistenci. Je-li φ perzistentní, je i $\Diamond\varphi$ perzistentní. To se zdá být vzhledem k navržené interpretaci sémantiky tvrditelnosti nepřirozené, protože právě věty tvaru *Možná A* jsou typickými představiteli neperzistentních vět, které mohou být tvrditelné, přestože přestávají být tvrditelné po získání nějaké dodatečné informace. Zvažme například větu

190. Petr je možná v knihovně.

Ta by měla být tvrditelná i vzhledem ke stavům, které obsahují podstavy, v nichž tvrditelná není. $\Diamond p$ tedy není vhodná formalizace takové věty, je-li sémantika operátoru $\Diamond$ vymezena výše uvedeným způsobem. Aparát sémantiky tvrditelnosti naštěstí otevírá prostor pro zavedení alternativního operátoru možnosti $\blacklozenge$, který nezachovává perzistenci a chová se v souladu s naším očekáváním. Řekněme, že formule $\blacklozenge\varphi$ je automaticky tvrditelná v prázdném (resp. nulovém) stavu. Je-li a nenulový stav, pak přijmeme podmínku:

$\blacklozenge\varphi$ je tvrditelná v a právě tehdy, když φ je tvrditelná v nějakém neprázdném podstavu stavu a.

Je zjevné, že tento operátor generuje neperzistentní formule. I když atom p je perzistentní, formule $\blacklozenge p$ obecně nikoli. Právě operátor $\blacklozenge$ je např. vhodný k formalizaci příkladu, jehož cílem bylo v kapitole 10 ilustrovat, jaký má dopad nahrazení pojmu pravdivosti pojmem tvrditelnosti:

191. Možná prší, avšak neprší.

Tato věta, která se zdá být na úrovni přirozeného jazyka zjevnou kontradikcí, by byla standardně formalizována jako $\Diamond p \wedge \neg p$. Z hlediska kripkovské sémantiky se o kontradikci nejedná. Pokud ji však formalizujeme jako $\blacklozenge p \wedge \neg p$, je v sémantice modálních (diskrétních i obecnějších) informačních modelů skutečně jako kontradikce vyhodnocena, jelikož neexistuje žádný nenulový stav žádného modelu, kde by byla toto formule tvrditelná.

V kapitole 15 prezentuji některé technické výsledky týkající se operátoru $\blacklozenge$ a zvláště jeho vztahu k slabé negaci. Zbývá zde však řada otevřených otázek, které jsou ponechány budoucímu zkoumání. V tento okamžik pouze opět

[7] Zajímavostí je, že operátor $\Box$ je samoduální vzhledem k slabé negaci $\sim$. Platí totiž, že formule $\sim\Box\sim\varphi$ a $\Box\varphi$ jsou tvrditelné ve stejných stavech.

uvedu možnou aplikaci tohoto operátoru v rámci logické analýzy přirozeného jazyka.

Velmi matoucím a obtížným problémem se zdá být interakce modality *možná* s disjunkcí *nebo* v přirozeném jazyce. Tento problém byl detailně popsán např. v (Simons, 2005). Podívejme se např. na následující trojici vět:

192. Petr by mohl být ve Francii a mohl by být v Německu.

193. Petr by mohl být ve Francii nebo by mohl být v Německu.

194. Petr by mohl být ve Francii nebo v Německu.

Zdá se, že tyto věty říkají (alespoň při určitém čtení) to samé, a je otázka, jak tento jev formálně podchytit. První věta je zjevnou disjunkcí a druhá konjunkcí vět:

195. Petr by mohl být ve Francii.

196. Petr by mohl být v Německu.

Kdybychom chtěli toto pozorování zachytit přímočaře v nějakém logickém systému, kde máme k dispozici introdukční pravidlo pro disjunkci a eliminační pravidlo pro konjunkci, pak by ekvivalence vět 192 a 193 umožňovala odvodit např. větu 196 z věty 195, což by byl velmi nežádoucí důsledek.

Tedy pokud chceme přímočaře reprezentovat ekvivalenci vět 192, 193 a 194, potřebujeme k tomu logiku, kde neplatí introdukční pravidlo pro disjunkci nebo eliminační pravidlo pro konjunkci. Vzhledem k přirozenému jazyku se zdá být lépe zpochybnitelné introdukční pravidlo pro disjunkci.

V sémantice tvrditelnosti je introdukční pravidlo pro disjunkci korektním odvozovacím pravidlem. Ale ukazuje se, že jediné, co potřebujeme, abychom se tohoto pravidla zbavili, je odstranit absurdní stav z prostoru informačních stavů. Odstraňme proto nyní podmínku, že prázdný stav musí být součástí prostoru informačních stavů a jinak vše nechme při starém. Pro jednoduchost můžeme i nadále předpokládat, že prostory informačních stavů jsou systémy všech podmnožin dané množiny možných světů s tou výjimkou, že do prostoru nemusí být zahrnuta prázdná množina.[8] Budeme označovat prostor informačních stavů jako *pragmatický*, když se v něm nenachází prázdný stav. Řekneme, že dané úsudkové schéma je platné v prostoru informačních stavů $\mathcal{S}$, když žádná instance tohoto schématu nemá žádný protipříklad v modelech na $\mathcal{S}$. Následující věta ukazuje podstatný vztah mezi introdukčním

[8] Drobná technická poznámka: Pokud $\mathcal{S} = \langle W, \wp(W) - \{\varnothing\}\rangle$ je prostor informačních stavů, pak valuace na tomto prostoru jsou stále funkce z množiny atomických formulí do množiny $\wp(W)$.

pravidlem pro disjunkci a přítomností prázdného stavu v prostoru informačních stavů.

`Věta 12.3.4` *$\varphi/\varphi \vee \psi$ (resp. $\psi/\varphi \vee \psi$) není platné v $\mathcal{S}$ právě tehdy, když $\mathcal{S}$ je pragmatický.*

Navíc, když máme v jazyce operátor $\blacklozenge$, platí žádoucí logické ekvivalence odpovídající ekvivalencím mezi větami 192, 193 a 194.

`Věta 12.3.5` *Následující formule jsou ekvivalentní na třídě pragmatických prostorů.*

(a) $\blacklozenge\varphi \wedge \blacklozenge\psi$,

(b) $\blacklozenge\varphi \vee \blacklozenge\psi$,

(c) $\blacklozenge(\varphi \vee \psi)$.

Z tohoto důvodu se nabízejí pragmatické prostory jako vhodný nástroj pro analýzu interakce *možná* a *nebo* v přirozeném jazyce. Zajímavým technickým úkolem pak je syntakticky charakterizovat logiku pragmatických prostorů.

12.4 Epistemické výběrové funkce

Bylo řečeno, že implikace v navržené sémantice tvrditelnosti představuje jakýsi striktní indikativní kondicionál. Je možné zde zvažovat řadu alternativ a formulovat spojku, která se podobá Stalnakerově (případně Lewisově) implikaci, avšak na rozdíl od ní je vymezena v rámci epistemického přístupu. Tato implikace může být zavedena na základě pojmu výběrové funkce, která však operuje na informačních stavech, nikoli na možných světech. Tedy akt vyslovení antecedentu A nějaké kondicionální věty nepředstavuje posun z aktuálního světa k nějakému vybranému možnému A-světu (tj. světu, v němž je A pravdivé), nýbrž posun z aktuálního informačního stavu, k nějakému A-stavu (tj. stavu, v němž je A tvrditelné).

Nulový stav v této sémantice je přirozeným korelátem poněkud záhadného Stalnakerova absurdního světa λ. Přesněji je možno na obecné úrovni AST vymezit sémantiku takto. Implikativní algebra informačních stavů je sruktura $\mathcal{A} = \langle S, +, 0, f\rangle$, kde $\langle S, +, 0\rangle$ je algebra informačních stavů a f je výběrová funkce, tj. funkce přiřazující dané formuli φ a stavu a stav $f(a, \varphi)$, kde φ je tvrditelná (předpokládáme přitom, že φ je tvrditelná minimálně v prázdném stavu). Podobně jako to učinil Stalnaker, můžeme na funkci f klást dodatečné podmínky, např. pokud φ je tvrditelná ve stavu a, pak

$f(a, \varphi) = a$. Implikativní informační model je implikativní algebra informačních stavů obohacená o valuaci definovanou stejně jako v AST. Vzhledem k takto definovaným modelům můžeme vymezit podmínky tvrditelnosti jako dříve s tím, že podmínka pro implikaci nyní bude vypadat takto:

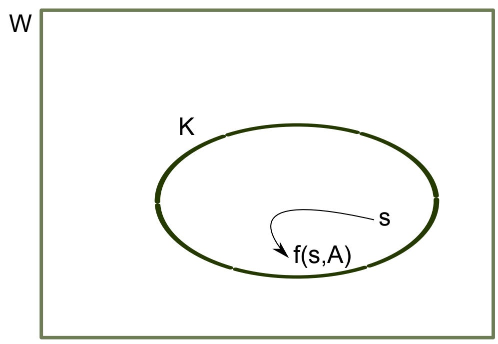
> $\varphi \to \psi$ je tvrditelná ve stavu a právě tehdy, když ψ je tvrditelná ve stavu $f(a, \varphi)$.

Je zjevné, že celou sémantiku bychom mohli též vymezit ve stylu Davida Lewise. V tomto případě by výběrová funkce F vybírala množiny φ-stavů a nikoli jednotlivé φ-stavy. Sémantická podmínka pro implikaci by pak vypadala takto:

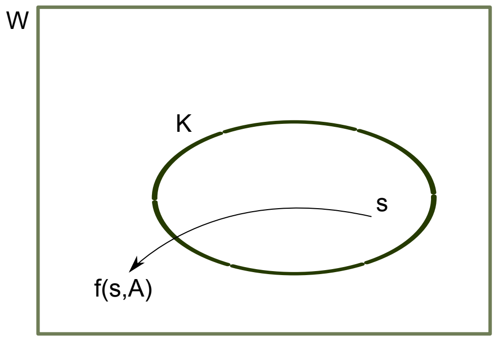
> $\varphi \to \psi$ je tvrditelná v a právě tehdy, když ψ je tvrditelná v každém stavu z $F(a, \varphi)$.

Implikaci, se kterou jsme v logice tvrditelnosti doposud pracovali, lze pak vidět jako speciální případ této obecnější sémantiky, kdy $F(a, \varphi)$ je fixně definována jako množina všech podstavů stavu a, ve kterých je tvrditelná formule φ.

Jak jsme viděli (viz oddíl 6.4), Stalnaker (1975) analyzoval rozdíl mezi indikativními a subjunktivními kondicionály následujícím způsobem: Výběrová funkce pro indikativní kondicionály respektuje vždy hranice kontextu, v němž je kondicionál tvrzen. Připomeňme, že kontext je pojat jako informační stav a modelován jako množina možných světů, takže respektuje-li výběrová funkce hranice kontextu, znamená to, že vybírá pro daný antecedent A pouze takové světy, které se nacházejí uvnitř kontextu, tj. uvnitř odpovídající množiny možných světů.



Naproti tomu výběrové funkce pro subjunktivní kondicionály mohou sahat i mimo kontextovou množinu, neboť užitím subjunktivního tvaru můžeme indikovat, že některé kontextové presupozice byly potlačeny.

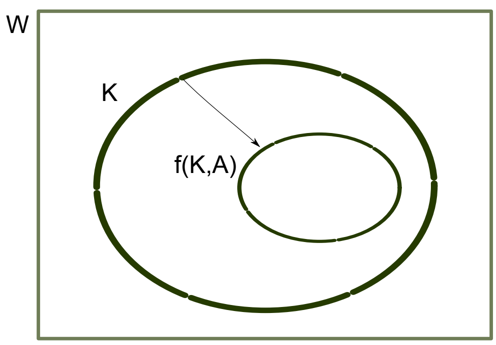


Avšak jelikož kontexty nejsou částí Stalnakerovy sémantiky, nýbrž spadají čistě do oblasti pragmatiky, ani toto vysvětlení nemůže být chápáno jako vysvětlení sémantické. Významným důsledkem pak je, že logika indikativních a subjunktivních kondicionálů pak musí být stejná.

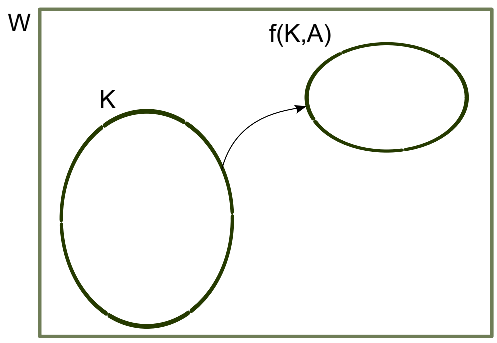
Převedeme-li celý problém do epistemického rámce sémantiky tvrditelnosti, můžeme rozdíl popsat na sémantické úrovni. Posun od ontického přístupu k epistemickému vypadá tak, že nahradíme ontické výběrové funkce epistemickými. Jak jsem již uvedl, rozdíl spočívá v tom, že v epistemickém rámci se vyslovením antecedentu nepřesouváme hypoteticky z jednoho světa do druhého, ale z jednoho informačního stavu do druhého informačního stavu. Jsou-li stavy reprezentovány jako množiny možných světů, musí pro indikativní kondicionály vždy platit:

$$f(a, \varphi) \subseteq a.$$

To znamená, že výběrová funkce respektuje hranice kontextu, jak ilustruje následující obrázek:



Kladením antecedentu jen hypoteticky zužujeme sféru otevřených možností. Výběrová funkce pro subjunktivní kondicionály není vázána touto restrikcí, a nemusí tedy respektovat hranice kontextu, neboť při užití subjunktivního tvaru může dojít k potlačení některých kontextových presupozic, které konstituují hranice kontextu. Takže se může (i když nemusí) stát, že výběrová funkce vybere pro daný kontext a a antecedent φ nějaký φ-kontext, který „přetéká" přes hranice kontextu a, či který se nachází zcela mimo tyto hranice:



Na obecné úrovni algebraické sémantiky tvrditelnosti podmínce pro indikativní kondicionály odpovídá vztah:

$$f(a, \varphi) \leqslant a.$$

To, že toto sémantické omezení nijak neplatí pro subjunktivní kondicionály, může mít dopad na logiku, která je takovouto sémantikou vymezená. Při konkrétní specifikaci dalších parametrů tak lze získat pro indikativní a subjunktivní kondicionály dva různé logické systémy. Podrobněji je tato problematika vyložena v (Punčochář, 2014b).

12.5 Predikátová logika

Tato práce je zaměřena na úroveň výrokové logiky. Velkým tématem pro budoucí zkoumání je predikátová logika tvrditelnosti. Že se jedná o obtížný problém, je patrné již z toho, že též analogicky vypadající inkvizitivní sémantika nepřinesla zatím v prvořádové oblasti příliš mnoho výsledků, přestože byly v tomto směru učiněny seriózní pokusy, viz (Ciardelli, 2010), (Sano, 2011).

Na základní úrovni můžeme opět chápat informační stavy jako množiny možných světů a možné světy jsou nyní standardní interpretace klasické predikátové logiky pro nějaký daný jazyk. Budu pro jednoduchost uvažovat prvořádové jazyky bez funktorů, tj. sestávající pouze z predikátů a jmen jakožto jediných typů mimologických symbolů.

Dále je potřeba učinit řadu rozhodnutí. Může libovolná množina interpretací predikátové logiky tvořit informační stav, nebo je třeba klást další omezující podmínky? Měly by mít interpretace v této množině společné univerzum objektů, nebo se univerza mohou lišit? Měla by jména v daném informačním stavu vystupovat jako rigidní designátory v Kripkeho smyslu a označovat stejný objekt napříč všemi světy, nebo mohou v různých světech označovat různé objekty?

Pro ukázku nyní vymezím nejjednodušší verzi inkvizitivní sémantiky pro jazyk predikátové logiky ekvivalentní sémantice z (Ciardelli, 2010).[9] Modelem budeme rozumět dvojici $\mathcal{M} = \langle U, W \rangle$, kde U je neprázdné univerzum objektů a W neprázdná množina modelů klasické predikátové logiky, jejichž univerzum je U a které se shodují v interpretaci jmen.[10] Informační stavy jsou podmnožiny množiny W. Vzhledem k takovýmto modelům můžeme vymezit relaci e-tvrditenosti, kde e je ohodnocení proměnných, tj. funkce přiřazující každé proměnné nějaký prvek univerza U. Sémantické podmínky pak vypadají takto: Nechť a je informační stav.

> $P(t_1, \ldots, t_n)$ je e-tvrditelná v a právě tehdy, když pro každé $s \in a$, $\langle se(t_1), \ldots, se(t_n) \rangle \in s(P)$.[11]
>
> $\neg\varphi$ je tvrditelná v a právě tehdy, když φ není tvrditelná v žádném neprázdném podstavu stavu a.
>
> $\varphi \wedge \psi$ je e-tvrditelná v a právě tehdy, když φ je e-tvrditelná v a a zároveň ψ je e-tvrditelná v a.
>
> $\varphi \sqcup \psi$ je e-tvrditelná v a právě tehdy, když φ je e-tvrditelná v a nebo ψ je e-tvrditelná v a.
>
> $\varphi \to \psi$ je e-tvrditelná v a právě tehdy, když pro každé $b \subseteq a$ platí, že pokud φ je e-tvrditelná v b, ψ je e-tvrditelná v b.

[9] Předpokládám zde obeznámenost s tím, jak se standardně vymezuje sémantika predikátové logiky prvního řádu.

[10] Rozhodli jsme se zde tedy pro konstantní univerzum a jména fungující jakožto rigidní designátory.

[11] $se(t_i)$ je hodnota termu t_i v prvořádovém modelu s vzhledem k ohodnocení e. $s(P)$ je realizace predikátu P v modelu s.

$\forall x\varphi$ je e-tvrditelná v a právě tehdy, když pro každé $o \in U$ platí, že φ je $e_{x:o}$-tvrditelná v a.[12]

$\exists x\varphi$ je e-tvrditelná v a právě tehdy, když existuje $o \in U$ takové, že φ je $e_{x:o}$-tvrditelná v a.

Tato sémantika má některé velmi zajímavé rysy. Pokud je mi však známo, zatím se nikomu nepodařilo formulovat adekvátní kalkul pro logiku generovanou touto sémantikou a dokázat jeho úplnost.

Bez dalšího zkoumání zde pouze zformuluji přirozené zobecnění této sémantiky v analogii se zobecňujícím krokem od ZST k TST. Modelem je nyní trojice $\mathcal{M} = \langle U, W, \tau \rangle$, kde U a W jsou jako předtím a τ je topologie na množině W. Informačními stavy jsou nyní pouze prvky množiny τ. Sémantické podmínky zůstávají stejné jako v základním případě, pouze podmínky pro negaci a implikaci se nyní mění v tom, že se omezují pouze na ty podmnožiny daného stavu a, které jsou v τ. Množinu takových stavů značíme $\tau(a)$:

$\neg\varphi$ je tvrditelná v a právě tehdy, když φ není tvrditelná v žádném neprázdném stavu z $\tau(a)$.

$\varphi \to \psi$ je e-tvrditelná v a právě tehdy, když pro každé $b \in \tau(a)$ platí, že pokud φ je e-tvrditelná v b, ψ je e-tvrditelná v b.

Zajímavým technickým problémem k dalšímu zkoumání je kalkulizace logiky určené právě uvedenou sémantikou. Tato logika je slabší než klasická predikátová logika, ale silnější než intuicionistická predikátová logika. Platí v ní např. predikátová obdoba Kreisel-Putnamova zákona, který v intuicionistické logice neplatí:

$$(\neg\varphi \to \exists x\psi) \to \exists x(\neg\varphi \to \psi).$$

Tento zákon platí jak v základní verzi odpovídající prvořádové inkvizitivní sémantice, tak i v jejím zobecnění, v němž je zavedena na množině možných světů topologie. Ve zobecněné verzi ale neplatí např. zákon dvojí negace pro elementární formule, který v tomto omezení platí v základní verzi.

S ohledem na přirozený jazyk uveďme, že už i v základní verzi této sémantiky neplatí následující problematické schéma, které platné v klasické predikátové logice:

$$\forall x\varphi \to \psi / \exists x(\varphi \to \psi),$$

přičemž se pro platnost v klasické predikátové logice požaduje, aby se proměnná x nevyskytovala volně ve formuli ψ. Toto schéma je predikátovou verzí již zmiňovaného problematického výrokového principu:

[12] $e_{x:o}$ je varianta ohodnocení e shodná s e až na to, že přiřazuje proměnné x objekt o.

$$(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi/(\varphi \rightarrow \chi) \vee (\psi \rightarrow \chi).$$

V jeho prvořádové verzi pak k němu můžeme formulovat třeba tento protipříklad:

197. Pokud všichni budou volit Petra, pak Petr zvítězí ve volbách. Tudíž existuje někdo, pro koho platí, že bude-li volit Petra, pak Petr zvítězí ve volbách.

Přímočarou formalizací tohoto úsudku získáme úsudkovou formu výše uvedeného typu:

$$\forall x V(x,p) \rightarrow Z(p)/\exists x(V(x,p) \rightarrow Z(p)).$$

Predikátová verze AST, jejíž podrobnosti zde neuvádím, byla vymezena v článku (Punčochář, 2016b).

12.6 Kategoriální gramatika

Z hlediska sémantiky tvrditelnosti nejsou propozice pojímány jako množiny možných světů (jak je tomu běžné), nýbrž jako množiny informačních stavů. Informační stavy přitom tvoří nějakou algebraickou strukturu. Propozice jsou sémantické koreláty vět. Ale přechod od pravdivosti k tvrditelnosti, resp. od možných světů k informačním stavům, musí mít dopad i na jiné typy výrazů. To podněcuje otázku, do jaké míry by bylo plodné celý přístup zobecnit na úroveň kategoriální gramatiky – viz (Gamut, 1991).

Motivací zde může být, že třeba extenze některých predikátů není relativní vůči jednotlivým možným světům, nýbrž také primárně vůči nějakým informačním stavům. Zvažme např. již dříve uvedený predikát *být podezřelý z daného zločinu*. Sice je zde legitimní tvrdit, že je faktickou otázkou, kdo podezřelý je a kdo nikoli, a že tedy predikát získává svoji extenzi vždy v nějakém stavu světa. Ale to se děje vždy skrze nějaký informační stav, který je ve stavu světa realizován – řekněme stav vyšetřování. Při rozumném zjednodušení můžeme tento predikát vymezit tak, že daná osoba spadá do jeho extenze, když vzhledem k relevantnímu informačnímu stavu existuje otevřená možnost, že tato osoba daný zločin spáchala.

Předpokládejme, že informační stavy jsou množiny možných světů. Význam predikátu *být podezřelý z daného zločinu* pak může být vymezen jako funkce přiřazující každému informačnímu stavu extenzi tohoto predikátu, tj. množinu individuí, které jsou z hlediska stavu možnými pachateli. Duálně, avšak ekvivalentně, může být tento význam reprezentován jako funkce, která každému individuu přiřadí množinu těch stavů, v nichž existuje možný svět, v němž pachatelem tohoto zločinu je právě dané individuum.

Tuto strategii lze použít i na predikáty, jejichž extenze se primárně vyhodnocuje vůči jednotlivým možným světům, např. *být politikem.* Význam tohoto predikátu můžeme vymezit jako funkci přiřazující každému individuu množinu těch informačních stavů, které obsahují pouze takové možné světy, v nichž je dané individuum politikem. Výhodou této strategie je, že takto tedy můžeme zpracovat běžné predikáty, i ty specifické jako např. *být podezřelý z daného zločinu.*

Na základě těchto pozorování navrhnu nyní obecný formální aparát kategoriální gramatiky s lambda operátorem. Aplikovatelnost tohoto aparátu na jevy přirozeného jazyka je předmětem budoucího zkoumání.

Dále používám notaci podobným způsobem, jako je zavedena v (Peregrin, 1998). Vymezení systému je vystavěno ve třech stupních. Prvním stupněm je stanovení gramatických kategorií. Druhým stupněm je zavedení výrazů a jejich podřazení pod kategorie prostřednictvím gramatických pravidel. Třetím stupněm je přiřazení významů výrazům prostřednictvím jejich kategorií.

1. stupeň. Máme dvě základní kategorie: jména (J) a věty (V). Ze základních kategorií můžeme tvořit kategorie odvozené ve smyslu následující induktivní definice.

`Definice 12.6.1` *Obě základní kategorie, V i J, jsou kategorie. Jsou-li K, L kategorie, pak i (K/L) je kategorie.*

Tak získáme nekonečně mnoho kategorií, jako je např.

$$(V/J)/((V/V)/(J/(V/J))).$$

Vnější závorky u komplexních výrazů vynecháváme. Zde je několik specifických typů výrazů a jim odpovídajících kategorií:

jednomístné predikáty	V/J
dvoumístné predikáty	$(V/J)/J$
jednomístné větné operátory	V/V
dvoumístné větné operátory	$(V/V)/V$
predikáty druhého řádu, kvantifikátory	$V/(V/J)$
modifikátory predikátů, např. přídavná jména	$(V/J)/(V/J)$

2. stupeň. Ke každé kategorii přiřadíme libovolný počet jednoduchých výrazů, konstant a proměnných. Z těchto základních výrazů můžeme nyní skládat výrazy komplexní prostřednictvím následující definice, která v podstatě formuluje gramatická pravidla konstituující daný jazyk. Fakt, že výraz A spadá pod kategorii K, zapisujeme zkráceně jako $A : K$.

`Definice 12.6.2` *(a) Každý jednoduchý výraz je výraz. (b) Pokud $A : K/L$ a $B : L$, tak $A(B)$ je správně utvořený výraz kategorie K. (c) Pokud $A : K$ a proměnná $x : L$, tak $\lambda x.A$ je správně utvořený výraz kategorie K/L.*

Tím je vymezena množina správně utvořených výrazů, je-li předem dána množina jednoduchých výrazů. Vidíme, že zde tedy máme dva typy komplexity: komplexitu kategorií a komplexitu výrazů. Je jasné, že v kontextu gramatického pravidla (b) jdou tyto druhy komplexity proti sobě. Např. máme-li predikát $P : V/J$ a jméno $c : J$, pak $P(c)$ je správně utvořený výraz kategorie V. Získali jsme složitější výraz jednodušší kategorie.

3. stupeň. Nyní přistoupíme k sémantice našeho jazyka. Každé kategorii K přiřadíme tzv. doménu významů D_K. Do této oblasti spadají významy výrazů kategorie K. Přitom předpokládáme, že je dáno nějaké univerzum diskurzu U a nějaká algebra informačních stavů $\mathcal{A}$ s množinou informačních stavů S. Stanovíme, že D_J je identické s U a D_V je množina podmnožin množiny S. Pro komplexní kategorie je stanovena tato podmínka:

$D_{K/L}$ je množina všech funkcí z D_L do D_K.

Ohodnocení proměnných je funkce, která přiřadí každé proměnné nějaký objekt z domény kategorie této proměnné. Interpretace konstant je funkce která přiřadí každému takovémuto výrazu nějaký objekt z domény jeho kategorie. Nechť e je ohodnocení a i interpretace. V závislosti na e a i nyní můžeme přiřadit každému výrazu A kategorie K jako jeho význam nějaký prvek $||A||^i_e$ z domény D_K. Je-li x proměnná, pak $||x||^i_e = e(x)$. Je-li A jednoduchá konstanta, pak $||A||^i_e = i(A)$. Máme dva typy komplexních výrazů. Pro ty můžeme stanovit princip kompozicionality, který udává, jak je význam komplexního výrazu určen významy jeho částí:

$||A(B)||^i_e = ||A||^i_e(||B||^i_e)$.

$||\lambda x.A||^i_e$ je funkce, která danému objektu o z domény proměnné x přiřadí objekt $||A||^i_{e_{x:o}}$ z domény výrazu A.[13]

[13] $e_{x:o}$ je opět ohodnocení shodné s e, jen s tou případnou výjimkou, že přiřazuje proměnné x objekt o.

Tím je celý systém vymezen. Vypadá téměř stejně jako tradiční lambda kategoriální gramatika, avšak liší se v tom, že propozice jsou reprezentovány jako množiny informačních stavů. Algebraická struktura na informačních stavech umožňuje propozice klasifikovat na perzistentní, regulární atd. Tato variabilita propozic se promítne i do významu ostatních výrazů, v jejichž komplexní kategorii figuruje kategorie vět jako podkategorie. Avšak jak jsem již zmínil, využitelnost tohoto obecného systému pro analýzu přirozeného jazyka je otázkou pro budoucí zkoumání.

12.7 Shrnutí

V této kapitole jsem naznačil směr dalšího bádání v logice tvrditelnosti. Nejprve jsem zavedl slabou negaci, která vyjadřuje popření tvrditelnosti. Tato negace operuje na úrovni informačních stavů stejně jako běžná negace na úrovni jednotlivých světů. Poté jsem se věnoval silné negaci, která vyjadřuje popiratelnost negované věty. K zavedení této spojky je třeba vedle podmínek tvrditelnosti induktivně vymezit paralelní podmínky popiratelnosti. Tvrditelnost a popiratelnost jsou pak pojaty jako duální pojmy stejné důležitosti. Dalším tématem, kterému jsem se věnoval, jsou modality. V logice tvrditelnosti lze novým způsobem rekonstruovat standardní modalitu nutnosti. Vedle toho lze zavést nestandardní neperzistentní modalitu možnosti. Ukázal jsem také, jak transformovat Stalnakerovu implikaci do epistemického rámce logiky tvrditelnosti. Z hlediska epistemického přístupu pak lze uchopit rozdíl mezi indikativními a subjunktivními kondicionály jakožto rozdíl sémantický. V závěru jsem v náznaku popsal, jak lze sémantiku striktní tvrditelnosti zobecnit na úroveň predikátové logiky a kategoriální gramatiky.

Část IV

Formální aparát logiky tvrditelnosti

Kapitola 13

Topologická sémantika tvrditelnosti

V závěrečné části práce se budu zabývat čistě matematickými vlastnostmi logiky tvrditelnosti. Mým záměrem je učinit tyto technické kapitoly pokud možno co nejvíce samostatné a nezávislé na předchozím textu. Znovu tedy vymezím všechny základních pojmy, které se budou ve výkladu vyskytovat, a zformuluji všechna základní tvrzení, přestože se jejich formulace v řadě případů vyskytuje již v předchozí části této práce.

V této kapitole ještě jednou vymezím topologickou sémantiku tvrditelnosti a dokáži některé její základní vlastnosti. Zejména budu zkoumat, v jakém je vztahu ke standardní kripkovské sémantice intuicionistické logiky. Co se objektového jazyka týče, bude výhodné, budeme-li používat pouze spojky $\rightarrow$, $\vee$, $\wedge$ a konstantu $\bot$ (kterou nebudeme počítat do množiny atomických formulí) reprezentující spor. Budu-li tedy v této kapitole mluvit o *všech formulích*, bude tím míněno *všech formulích jazyka vystavěného z těchto logických symbolů*. Negace bude ve výkladu vystupovat jako symbol definovaný pomocí implikace sporu: $\neg\varphi =_{def} \varphi \rightarrow \bot$. V této kapitole budou příležitostně vystupovat symboly $\exists$, $\forall$ a $\Rightarrow$ jako zkratky za metajazykové výrazy *existuje*, *pro každé* a *implikuje*. Budu také používat standardní zkratku *iff* za metajazykové *právě tehdy, když*.[1]

13.1 Silná perzistence a silná regularita

V tomto oddílu definuji základní pojmy topologické sémantiky tvrditelnosti, zejména pojem informačního prostoru, informačního modelu a vlastnosti silné perzistence a silné regularity. Jedná se o vlastnosti formulí relativizované

[1]Hlavní výsledky této kapitoly jsou převzaty z (Punčochář, 2015b).

vůči danému informačnímu prostoru. Ukáži, že tyto významné vlastnosti jsou zaručeny, tvoří-li struktura informačních stavů topologický prostor.

`Definice 13.1.1` *Předpokládejme, že W je neprázdná množina (možných světů) a τ je nějaká množina podmnožin množiny W, pro níž platí, že $\varnothing, W \in \tau$.*[2] *Dvojice $\mathcal{S} = \langle W, \tau \rangle$ se nazývá informační prostor a prvky množiny τ se nazývají informační stavy. Pokud $a, b \in \tau$ a zároveň $b \subseteq a$, pak řekneme, že b je podstavem stavu a. Množina všech podstavů stavu a bude označována jako $\tau(a)$. Informační model na informačním prostoru $\langle W, \tau \rangle$ je definován jako trojice $\mathcal{M} = \langle W, \tau, V \rangle$, kde V je ohodnocení atomů definované jako funkce z atomických formulí do τ.*

Relativně vůči danému informačnímu modelu $\mathcal{M} = \langle W, \tau, V \rangle$ nyní definujeme relaci tvrditelnosti $\Vdash_{\mathcal{M}}$ mezi informačními stavy tohoto modelu a formulemi. Nechť je tedy a informačním stavem modelu $\mathcal{M}$. Sémantické podmínky mají následující podobu:

$a \Vdash_{\mathcal{M}} \bot$ iff $a = \varnothing$.

$a \Vdash_{\mathcal{M}} p$ iff $a \subseteq V(p)$, pro každou atomickou formuli p.

$a \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi \wedge \psi$ iff $a \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$ a $a \Vdash_{\mathcal{M}} \psi$.

$a \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi \vee \psi$ iff existuje $b, c \in \tau$, $b \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$, $c \Vdash_{\mathcal{M}} \psi$ a $b \cup c = a$.

$a \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi \rightarrow \psi$ iff pro každé $b \in \tau(a)$, pokud $b \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$, tak $b \Vdash_{\mathcal{M}} \psi$.

Formule φ je platná v informačním modelu $\mathcal{M} = \langle W, \tau, V \rangle$ (značíme $\mathcal{M} \Vdash \varphi$), když pro každé $a \in W$ platí $a \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$. Řekneme, že formule je logicky platná vzhledem k nějaké třídě informačních modelů, když je platná v každém modelu této třídy. Množinu všech formulí, které jsou logicky platné vzhledem k dané třídě informačních modelů, nazýváme logikou této třídy modelů. Nyní zformulujeme některé základní vlastnosti právě zavedené sémantiky. Mezi ně patří zejména to, že v prázdném stavu je tvrditelné vše.

`Věta 13.1.2` *$\varnothing \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$, pro každý informační model $\mathcal{M}$ a každou formuli φ.*

`Důkaz:` Můžeme postupovat indukcí podle složitosti φ. Například v případě atomických formulí platí $\varnothing \Vdash_{\mathcal{M}} p$, neboť jistě $\varnothing \subseteq V(p)$. Pro ilustraci projdeme induktivní krok pro disjunkci. Předpokládejme $\varnothing \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$ a $\varnothing \Vdash_{\mathcal{M}} \psi$. Jelikož $\varnothing \cup \varnothing = \varnothing$, platí také $\varnothing \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi \vee \psi$. `QED`

[2]Symbol $\varnothing$ budu používat jako symbol pro prázdnou množinu.

Klasická relace pravdivosti může být chápána jako relace $\Vdash$ omezená na jednoprvkové stavy. Předpokládejme, že $\mathcal{M} = \langle W, \tau, V\rangle$ je informační model, takový, že $\{s\} \in \tau$. Řekneme, že φ je pravdivá v s (vzhledem k $\mathcal{M}$) iff $\{s\} \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$. Potom je pojem pravdivosti klasický v následujícím smyslu: Klasická interpretace $I_s^{\mathcal{M}}$ může být definována očekávaným způsobem:

$$I_s^{\mathcal{M}}(p) = 1 \text{ iff } s \in V(p).$$

Pokud je tato interpretace rozšířena na každou formuli podobně jako ve standardní sémantice klasické logiky, pak platí následující tvrzení pro každou formuli φ:

`Věta 13.1.3` $\{s\} \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$ *iff* $I_s^{\mathcal{M}}(\varphi) = 1$.

`Důkaz:` Můžeme postupovat indukcí podle složitosti φ. Projdeme induktivní krok pro disjunkci: Předpokládejme, že tvrzení platí pro φ a ψ. Potom $\{s\} \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi \vee \psi$ iff existují stavy b, c takové, že $b \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$, $c \Vdash_{\mathcal{M}} \psi$ a $b \cup c = \{s\}$ iff $\{s\} \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$ nebo $\{s\} \Vdash_{\mathcal{M}} \psi$ iff $I_s^{\mathcal{M}}(\varphi) = 1$ nebo $I_s^{\mathcal{M}}(\psi) = 1$ iff $I_s^{\mathcal{M}}(\varphi \vee \psi) = 1$. `QED`

Nyní zavedeme pojmy silné perzistence a silné regularity.

`Definice 13.1.4` *Formule φ je silně perzistentní v informačním modelu $\mathcal{M} = \langle W, \tau, V\rangle$ iff pro každé $\pi \subseteq \tau$ takové, že $\bigcup \pi \in \tau$, platí:*

Pokud $\bigcup \pi \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$, potom $a \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$ pro každé $a \in \pi$.

Formule φ je silně regulární v informačním modelu $\mathcal{M} = \langle W, \tau, V\rangle$ iff pro každé $\pi \subseteq \tau$ takové, že $\bigcup \pi \in \tau$, platí:

Pokud $a \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$ pro každé $a \in \pi$, potom $\bigcup \pi \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$.

Formule je silně perzistentní (resp. silně regulární) v nějakém informačním prostoru, pokud je silně perzistentní (resp. silně regulární) v každém informačním modelu na tomto prostoru. Informační prostor je silně perzistentní (resp. silně regulární), když je v něm každá formule silně perzistentní (resp. silně regulární).

Silná perzistence je definována pomocí podmínky, která činí zjevným, že tato vlastnost je v jistém smyslu inverzní vzhledem k silné regularitě. Avšak většinou bude pohodlnější pracovat s ekvivalentní podmínkou (P) vyjádřenou v následující větě. Tato věta také lépe objasňuje, proč se tato vlastnost nazývá (silnou) perzistencí. Výraz *silná* bychom mohli vynechávat, protože bude jasné, že silná perzistence je ekvivalentní prosté perzistenci definované v následující kapitole. Avšak pojem silné regularity se neshoduje s pojmem prosté regularity (zavedeným též v příští kapitole). To je také důvodem, proč tento výraz nadále používáme.

`Věta 13.1.5` *Formule φ je silně perzistentní v informačním modelu $\mathcal{M} = \langle W, \tau, V\rangle$ právě tehdy, když pro každé $a, b \in \tau$ platí následující podmínka:*

(P) Pokud $a \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$ a $b \in \tau(a)$, tak $b \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$.

`Důkaz:` Nejprve předpokládejme, že φ je silně perzistentní v $\mathcal{M}$. Přitom předpokládejme, že $a \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$ a $b \in \tau(a)$, což implikuje, že $a \cup b = a$. Tedy $a \cup b \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$ a z perzistence získáváme $b \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$.

Nyní předpokládejme, že platí podmínka (P). Nechť $\pi \subseteq \tau$, $\bigcup \pi \in \tau$, $\bigcup \pi \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$ a $a \in \pi$. Pak $a \subseteq \bigcup \pi$ a z (P) plyne, že $a \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$. `QED`

Následující věta ukazuje přirozenou postačující podmínku pro silnou perzistenci a regularitu. V této větě je použit pojem Harropovy formule, který bude hrát významnou roli i později. Množina Harropových formulí je definována jako nejmenší množina S splňující následující podmínky:

(a) konstanta $\bot$ a všechny atomické formule jsou v S;

(b) jestliže $\alpha, \beta \in S$, pak $\alpha \wedge \beta \in S$;

(c) jestliže $\alpha \in S$, pak $\varphi \rightarrow \alpha \in S$, pro každou formuli φ.

Tedy Harropovy formule jsou takové formule, pro které platí, že pokud obsahují disjunkci, tak pouze v antecedentu nějaké implikace.

Řekneme, že množina X je uzavřena na (konečné) průniky (resp. sjednocení) iff pro každou (konečnou) $Y \subseteq X$ platí, že $\bigcap Y \in X$ (resp. $\bigcup Y \in X$).

`Věta 13.1.6` *Nechť $\mathcal{S} = \langle W, \tau\rangle$ je informační prostor.*

(a) Pokud je množina τ uzavřena na konečné průniky, pak je každá formule silně perzistentní v $\mathcal{S}$ a každá Harropova formule silně regulární v $\mathcal{S}$.

(b) Pokud je množina τ uzavřena na konečné průniky a libovolná sjednocení, pak je každá formule silně perzistentní i silně regulární v $\mathcal{S}$.

`Důkaz:` (a) Nechť $\mathcal{M} = \langle W, \tau, V\rangle$ je informační model na $\mathcal{S}$. Předpokládejme, že množina τ je uzavřena na konečné průniky. Nejprve dokážeme indukcí, že každá formule je silně perzistentní v $\mathcal{M}$. Musíme tedy dokázat, že pro každou formuli φ, je splněna podmínka (P) formulovaná ve znění věty 13.1.5. Nadále předpokládáme, že $a, b \in \tau$, $b \in \tau(a)$, tj. $b \subseteq a$.

Předpokládejme, že $a \Vdash_{\mathcal{M}} \bot$. Pak $a = \emptyset$, a tudíž $b = \emptyset$. Tedy $b \Vdash_{\mathcal{M}} \bot$.

Předpokládejme nyní, že $a \Vdash_{\mathcal{M}} p$. Pak $a \subseteq V(p)$, a tedy i $b \subseteq V(p)$. Tedy $b \Vdash_{\mathcal{M}} p$.

Induktivním předpokladem je, že tvrzení platí pro formule φ a ψ. Předpokládejme, že $a \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi \wedge \psi$. Pak $a \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$ a $a \Vdash_{\mathcal{M}} \psi$. tedy $b \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$ a $b \Vdash_{\mathcal{M}} \psi$, což již implikuje $b \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi \wedge \psi$.

Předpokládejme $a \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi \vee \psi$. Pak existují stavy c, d takové, že $c \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$, $d \Vdash_{\mathcal{M}} \psi$ a $c \cup d = a$. Pak $c \cap b \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$ (neboť $c \cap b \subseteq c$ a předpokládáme, že φ je silně perzistentní). Analogicky, $d \cap b \Vdash_{\mathcal{M}} \psi$. Tedy $(c \cap b) \cup (d \cap b) \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi \vee \psi$. Přitom $(c \cap b) \cup (d \cap b) = b$.

Předpokládejme, že $a \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi \to \psi$. Uvažujme libovolný stav $c \in \tau(b)$ takový, že $c \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$. Pro něj platí, že $c \in \tau(a)$ a tedy, že $c \Vdash_{\mathcal{M}} \psi$.

Nyní indukcí dokážeme, že každá Harropova formule je regulární. Předpokládejme, že $\pi \subseteq \tau$ a $\bigcup \pi \in \tau$.

Předpokládejme, že $a \Vdash_{\mathcal{M}} \bot$ pro každé $a \in \pi$. Pak $\pi = \{\varnothing\}$ nebo $\pi = \varnothing$. V obou případech $\bigcup \pi = \varnothing$. Z toho plyne, že $\bigcup \pi \Vdash_{\mathcal{M}} \bot$.

Předpokládejme, že $a \Vdash_{\mathcal{M}} p$ pro každé $a \in \pi$, tj. $a \subseteq V(p)$ pro každé $a \in \pi$. Pak $\bigcup \pi \subseteq V(p)$, což znamená, že $\bigcup \pi \Vdash_{\mathcal{M}} p$.

Induktivním předpokladem je, že α a β jsou silně regulární Harropovy formule. Předpokládejme, že $a \Vdash_{\mathcal{M}} \alpha \wedge \beta$ pro každé $a \in \pi$. Pak $a \Vdash_{\mathcal{M}} \alpha$ pro každé $a \in \pi$ a $a \Vdash_{\mathcal{M}} \beta$ pro každé $a \in \pi$. Z induktivního předpokladu pak vyplývá, že $\bigcup \pi \Vdash_{\mathcal{M}} \alpha$ a $\bigcup \pi \Vdash_{\mathcal{M}} \beta$. Tedy $\bigcup \pi \Vdash_{\mathcal{M}} \alpha \wedge \beta$.

Nyní dokážeme tvrzení pro $\varphi \to \alpha$, kde φ je libovolná (ne nutně Harropova) formule. Předpokládejme, že $a \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi \to \alpha$ pro každé $a \in \pi$. Musíme dokázat, že $\bigcup \pi \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi \to \alpha$. Vezměme libovolný stav $b \in \tau(\bigcup \pi)$ takový, že $b \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$. π můžeme vyjádřit jako $\{a_j; j \in J\}$. Pak $b = \bigcup_{j \in J}(b \cap a_j)$. Pro každé $j \in J$ platí díky silné perzistenci, že $b \cap a_j \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$, neboť $b \cap a_j \subseteq b$ a $b \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$. Jelikož $b \cap a_j \subseteq a_j$ a $a_j \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi \to \alpha$, platí, že $b \cap a_j \Vdash_{\mathcal{M}} \alpha$ pro každé $j \in J$. Díky silné regularitě formule α platí $\bigcup_{j \in J}(b \cap a_j) \Vdash_{\mathcal{M}} \alpha$, tj. $b \Vdash_{\mathcal{M}} \alpha$.

(b) Nyní předpokládejme, že τ je uzavřena na konečné průniky a libovolná sjednocení. Z (a) vyplývá, že každá formule je silně perzistentní. Musíme dokázat, že každá formule je také silně regulární. Induktivní kroky pro konjunkci a implikaci jsou analogické odpovídajícím krokům v (a), jen se nyní týkají libovolných (a nikoli jen Harropových) formulí φ a ψ. Zbývá doplnit induktivní krok pro disjunkci.

Předpokládejme, že $\pi \subseteq \tau$. π můžeme vyjádřit jako $\{a_j; j \in J\}$. Předpokládejme, že pro každé $j \in J$, $a_j \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi \vee \psi$. Pak pro každé $j \in J$ existují stavy b_j, c_j takové, že $b_j \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$, $c_j \Vdash_{\mathcal{M}} \psi$ a $b_j \cup c_j = a_j$. Jelikož τ je uzavřena na libovolná sjednocení, $\bigcup_{j \in J} b_j$ a $\bigcup_{j \in J} c_j$ jsou v τ. Z induktivního předpokladu nyní vyplývá, že $\bigcup_{j \in J} b_j \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$ a $\bigcup_{j \in J} c_j \Vdash_{\mathcal{M}} \psi$. Jelikož $\bigcup \pi = \bigcup_{j \in J} a_j = \bigcup_{j \in J} b_j \cup \bigcup_{j \in J} c_j$, platí $\bigcup \pi \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi \vee \psi$. QED

Vezměme si libovolný informační model $\mathcal{M} = \langle W, \tau, V \rangle$. Propozice v $\mathcal{M}$ definujeme jako množiny informačních stavů, tedy podmnožiny množiny τ. $\|\varphi\|_{\mathcal{M}}$

označuje propozici, kterou vyjadřuje formule φ v $\mathcal{M}$, tedy množinu informačních stavů, v nichž je φ tvrditelná. Řekneme, že informační prostor (resp. informační model) je topologický, když množina všech informačních stavů tohoto prostoru (resp. modelu) tvoří topologii (tj. je uzavřena na konečné průniky a libovolná sjednocení) na nosné množině možných světů. Přímým důsledkem předchozí věty je následující tvrzení

`Věta 13.1.7` *Pokud je $\mathcal{M} = \langle W, \tau, V \rangle$ topologický informační model, pak pro každou formuli φ existuje informační stav a takový, že $\|\varphi\|_{\mathcal{M}} = \tau(a)$.*

Tato věta garantuje, že komplexní formule vyjadřují v topologických informačních modelech propozice stejného typu jako elementární formule.

Nyní budeme směřovat k důkazu, že logika, kterou třída topologických informačních modelů určuje, je intuicionistická logika. V tom se tato nestandardní topologická sémantika shoduje se standardní Tarského topologickou sémantikou formulovanou původně v (Tarski, 1938).

Je známo, že Tarského topologická sémantika je v úzkém vztahu ke kripkovské relační sémantice pro intuicionistickou logiku. Tento vztah souvisí s korespondencí mezi Alexandrovovými topologickými prostory a předuspořádanými množinami, která byla původně popsána v (Alexandrov, 1937). Úkolem následujícího oddílu je ukázat, že tato korespondence může být využita i v případě naší nestandardní topologické sémantiky. Popíšeme tím vztah topologické sémantiky tvrditelnosti ke kripkovské sémantice intuicionistické logiky a na základě tohoto vztahu získáme důkaz úplnosti intuicionistické logiky vůči naší sémantice.

13.2 Alexandrovovy informační prostory

V tomto oddílu se zaměříme především na zvláštní třídu topologických prostorů nazývaných Alexandrovovy topologické prostory.

`Definice 13.2.1` *Řekneme, že informační prostor $\mathcal{S} = \langle W, \tau \rangle$ je Alexandrovovým informačním prostorem, když τ je Alexandrovova topologie na W, tj. τ je uzavřeno nejen na libovolná sjednocení, ale i na libovolné průniky. Informační modely na Alexandrovových informačních prostorech nazýváme Alexandrovovy informační modely.*

Alexandrovovy informační modely úzce souvisí s kripkovskými modely pro intuicionistickou logiku. Tuto souvislost popíšeme, nejprve však zopakujeme relevantní pojmy a zavedeme užitečné značení.

`Definice 13.2.2` *Kripkovský (intuicionistický) rámec je dvojice* $\mathrm{F} = \langle W, \leqslant \rangle$, *kde* W *je neprázdná množina a* $\leqslant$ *je relace předuspořádání, tj. tranzitivní a reflexivní relace na* W. *Kripkovský (intuicionistický) model na* F *je trojice* $\mathrm{M} = \langle W, \leqslant, V \rangle$, *kde* V *je funkce přiřazující každé atomické formuli nějakou nahoru uzavřenou množinu, což znamená, že* $s \in V(p)$ *a* $s \leqslant t$ *implikuje* $t \in V(p)$.

Nechť $\mathrm{M} = \langle W, \leqslant, V \rangle$ je intuicionistický kripkovský model. Relace $\vDash_{\mathrm{M}}$ mezi prvky množiny W a formulemi je definována pomocí následujících podmínek. Nechť $s \in W$.

$s \nvDash_{\mathrm{M}} \bot$.

$s \vDash_{\mathrm{M}} p$ iff $s \in V(p)$.

$s \vDash_{\mathrm{M}} \varphi \wedge \psi$ iff $s \vDash_{\mathrm{M}} \varphi$ a $s \vDash_{\mathrm{M}} \psi$.

$s \vDash_{\mathrm{M}} \varphi \vee \psi$ iff $s \vDash_{\mathrm{M}} \varphi$ nebo $s \vDash_{\mathrm{M}} \psi$.

$s \vDash_{\mathrm{M}} \varphi \rightarrow \psi$ iff pro každé t, pokud $s \leqslant t$ a $t \vDash_{\mathrm{M}} \varphi$, tak $t \vDash_{\mathrm{M}} \psi$.

$|\varphi|_{\mathrm{M}}$ je množina těch $s \in W$, pro které platí $s \vDash_{\mathrm{M}} \varphi$. Formule φ platí v M (značíme $\mathrm{M} \vDash \varphi$), když $|\varphi|_{\mathrm{M}} = W$. Následující věta je známým faktem, který lze lehce ověřit indukcí. Věta se vyjadřuje k vlastnosti formulí, která je analogií vlastnosti perzistence v naší sémantice tvrditelnosti.

`Věta 13.2.3` *Pro libovolnou formuli* φ *a libovolný kripkovský model* M *platí, že množina* $|\varphi|_{\mathrm{M}}$ *je nahoru uzavřená vzhledem k relaci modelu* M.

Intuicionistickou logiku můžeme nyní ztotožnit s množinou formulí φ takových, že $s \vDash_{\mathrm{M}} \varphi$ platí pro každý kripkovský model M a každý prvek s tohoto modelu.

Korespondence mezi relacemi předuspořádání a Alexandrovovými topologiemi, která byla popsána v (Alexandrov, 1937), může být nyní přirozeným způsobem rozšířena na pojmy kripkovského modelu a Alexandrovova informačního modelu. Tento výsledek využívá dvou standardních konstrukcí. První z nich transformuje libovolný Alexandrovův informační model $\mathcal{M}$ na kripkovský model $\mathcal{M}^K$.

`Definice 13.2.4` *Nechť* $\mathcal{M} = \langle W, \tau, V \rangle$ *je Alexandrovův informační model. Pro každé* $s \in W$ *nechť* $U_s = \bigcap \{a \in \tau; s \in a\}$. $\mathcal{M}^K$ *je kripkovský model* $\langle W, \leqslant, V \rangle$, *kde* $\leqslant$ *je definováno takto:* $s \leqslant t$ *iff* $t \in U_s$.

Druhá konstrukce transformuje libovolný kripkovský model M na Alexandrovův informační model M^A.

`Definice 13.2.5` *Nechť* $\mathrm{M} = \langle W, \leqslant, V\rangle$ *je kripkovský model.* M^A *je definováno jako Alexandrovův informační model* $\langle W, \tau, V\rangle$*, kde* τ *je množina nahoru uzavřených podmnožin množiny* W*.*

Korespondence popsaná Alexandrovem nyní odpovídá následující větě.

`Věta 13.2.6` *Nechť* $\mathcal{M}$ *je Alexandrovův model a* M *je kripkovský model. Platí:*

(a) $\mathcal{M}^{KA} = \mathcal{M}$.

(b) $\mathrm{M}^{AK} = \mathrm{M}$.

Nyní rozšíříme tuto korespondenci tak, že zohlední i relace $\Vdash$ a $\vDash$. K tomuto účelu se bude hodit následující pomocné tvrzení.

`Lemma 13.2.7` *Nechť* $\mathcal{M} = \langle W, \tau, V\rangle$ *je Alexandrovův informační model. Pak pro každou formuli* φ *platí, že* $|\varphi|_{\mathcal{M}^K} \in \tau$*.*

`Důkaz:` Dle věty 13.2.3 je množina $|\varphi|_{\mathcal{M}^K}$ nahoru uzavřená v kripkovském modelu $\mathcal{M}^K$. Z toho plyne, že $|\varphi|_{\mathcal{M}^K}$ je informačním stavem v Alexandrovově informačním modelu $\mathcal{M}^{KA}$. Dle věty 13.2.6 (a) však $\mathcal{M}^{KA} = \mathcal{M}$. `QED`

`Věta 13.2.8` *Nechť* $\mathcal{M} = \langle W, \tau, V\rangle$ *je Alexandrovův informační model. Pak pro každou formuli* φ *a každý stav* $a \in \tau$ *platí:*

$$a \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi \textit{ iff pro každé } s \in a,\ s \vDash_{\mathcal{M}^K} \varphi.$$

`Důkaz:` Budeme postupovat indukcí. Začneme s konstantou $\bot$. Platí, že $a \Vdash_{\mathcal{M}} \bot$ iff $a = \emptyset$ iff pro každé $s \in a$, $s \vDash_{\mathcal{M}^K} \bot$.

Atomické formule: $a \Vdash_{\mathcal{M}} p$ iff $a \subseteq V(p)$ iff pro každé $s \in a$, $s \in V(p)$ iff pro každé $s \in a$, $s \vDash_{\mathcal{M}^K} p$.

Induktivní předpoklad říká, že věta platí pro formule φ a ψ.

Konjunkce: $a \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi \wedge \psi$ iff $a \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$ a zároveň $a \Vdash_{\mathcal{M}} \psi$ iff pro každé $s \in a$, $s \vDash_{\mathcal{M}^K} \varphi$ a pro každé $s \in a$, $s \vDash_{\mathcal{M}^K} \psi$ iff pro každé $s \in a$, $s \vDash_{\mathcal{M}^K} \varphi$ a $s \vDash_{\mathcal{M}^K} \psi$ iff pro každé $s \in a$, $s \vDash_{\mathcal{M}^K} \varphi \wedge \psi$.

Disjunkce: Platí ekvivalence mezi následujícími výroky:

1. $a \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi \vee \psi$.
2. $\exists b, c \in \tau$, $b \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$, $c \Vdash_{\mathcal{M}} \psi$ a $b \cup c = a$.
3. $\exists b, c \in \tau$, $\forall s \in b$, $s \vDash_{\mathcal{M}^K} \varphi$, $\forall s \in c$, $s \vDash_{\mathcal{M}^K} \psi$ a $b \cup c = a$.
4. $\forall s \in a$, $s \vDash_{\mathcal{M}^K} \varphi$ nebo $s \vDash_{\mathcal{M}^K} \psi$.

5. $\forall s \in a,\ s \vDash_{\mathcal{M}^K} \varphi \vee \psi$.

Zdůvodníme implikaci ze čtvrtého na třetí tvrzení. Předpokládejme, že pro každé $s \in a$, $s \vDash_{\mathcal{M}^K} \varphi$ nebo $s \vDash_{\mathcal{M}^K} \psi$. dle 13.2.7 platí, že $|\varphi|_{\mathcal{M}^K}, |\psi|_{\mathcal{M}^K} \in \tau$. Pak musí být informačními stavy také množiny: $b = a \cap |\varphi|_{\mathcal{M}^K}$ a $c = a \cap |\psi|_{\mathcal{M}^K}$. Platí, že $a = b \cup c$ a $\forall s \in b,\ s \vDash_{\mathcal{M}^K} \varphi$ a $\forall s \in c,\ s \vDash_{\mathcal{M}^K} \psi$.

Implikace: Platí ekvivalence mezi následujícími výroky:

1. $a \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi \to \psi$.
2. $\forall b \in \tau(a)(b \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi \Rightarrow b \Vdash_{\mathcal{M}} \psi)$.
3. $\forall b \in \tau(a)(\forall s \in b, s \vDash_{\mathcal{M}^K} \varphi \Rightarrow \forall s \in b, s \vDash_{\mathcal{M}^K} \psi)$.
4. $\forall b \in \tau(a) \forall s \in b(s \vDash_{\mathcal{M}^K} \varphi \Rightarrow s \vDash_{\mathcal{M}^K} \psi)$.
5. $\forall s \in a(s \vDash_{\mathcal{M}^K} \varphi \Rightarrow s \vDash_{\mathcal{M}^K} \psi)$.
6. $\forall s \in a\ \forall t \in U_s(t \vDash_{\mathcal{M}^K} \varphi \Rightarrow t \vDash_{\mathcal{M}^K} \psi)$.
7. $\forall s \in a\ \forall t \geqslant s(t \vDash_{\mathcal{M}^K} \varphi \Rightarrow t \vDash_{\mathcal{M}^K} \psi)$.
8. $\forall s \in a, s \vDash_{\mathcal{M}^K} \varphi \to \psi$.

Dokážeme implikaci ze třetího na čtvrté tvrzení. Předpokládejme, že čtvrté tvrzení neplatí. To znamená, že existuje $s \in a$ takové, že $s \vDash_{\mathcal{M}^K} \varphi$, ale $s \nvDash_{\mathcal{M}^K} \psi$. Vezměme $b = \{t \in W; t \geqslant s\}$. Pak $b \in \tau(a)$ a $\forall t \in b, t \vDash_{\mathcal{M}^K} \varphi$, ale neplatí $\forall t \in b, t \vDash_{\mathcal{M}^K} \psi$. Ukázali jsme, že pokud neplatí čtvrté tvrzení, neplatí ani třetí tvrzení. `QED`

Právě dokázaná věta přímo vede k výsledku, že logika Alexandrovových informačních modelů je intuicionistická logika.

`Věta 13.2.9` *Intuicionistická logika je logika třídy Alexandrovových informačních modelů.*

Důsledkem je pak i věta, že intuicionistická logika je logikou všech topologických informačních modelů.

`Věta 13.2.10` *Intuicionistická logika je logika třídy všech topologických informačních modelů.*

`Důkaz:` Plyne z věty 13.2.9 a z faktu, že intuicionistická logika je korektní vůči všem topologickým modelům. To lze ověřit relativně mechanicky kontrolou korektnosti všech jednotlivých pravidel kalkulu přirozené dedukce intuicionistické logiky.[3] `QED`

[3] Viz oddíl 9.6.

Řekneme, že informační model $\mathcal{S} = \langle W, \tau, V\rangle$ je diskrétní, když τ je potenční množina množiny W.

`Věta 13.2.11` *Klasická logika je logika třídy diskrétních informačních modelů.*

`Důkaz:` Předpokládejme, že $\mathcal{M} = \langle W, \wp(W), V\rangle$. Pak pro každé $s \in W$, $U_s = \{s\}$. Tedy relace $\leqslant$ v $\mathcal{M}^K$ je identická s množinou $\{\langle s, s\rangle ; s \in W\}$. Lze lehce nahlédnout, že logikou této třídy kripkovských modelů je klasická logika. `QED`

13.3 Lokální a globální logiky informačních modelů

V předchozí části práce jsme zavedli rozdíl mezi lokální a globální disjunkcí spočívající v odlišných sémantických podmínkách. K tomuto rozdílu se lze postavit různými způsoby. Jednak můžeme odlišné sémantické podmínky chápat jako dvě podmínky pro dva různé operátory (např. $\vee$, $\sqcup$). To jsem také učinil v minulé části práce a budu v této strategii pokračovat i v následujících kapitolách. Nyní však volím jiný postup a uvedený rozdíl budu interpretovat jako rozdíl mezi dvěma alternativními sémantickými podmínkami pro jeden operátor ($\vee$). Cílem je popsat rozdíl mezi těmito podmínkami a nahlédnout, jaký logický dopad má záměna jedné podmínky za druhou. Za tímto účelem zavádím novou relaci $\Vvdash_{\mathcal{M}}$ mezi informačními stavy libovolného informačního modelu a formulemi. Tato relace se liší od $\Vdash_{\mathcal{M}}$ pouze v sémantické podmínce pro disjunkci.

Nechť $\mathcal{M} = \langle W, \tau, V\rangle$ je informační model. Relace $\Vvdash_{\mathcal{M}}$ mezi jeho informačními stavy a formulemi je definována pomocí následujících rekurzivních podmínek. Nechť $a \in \tau$.

$a \Vvdash_{\mathcal{M}} \bot$ iff $a = \varnothing$.

$a \Vvdash_{\mathcal{M}} p$ iff $a \subseteq V(p)$, pro každou atomickou formuli p.

$a \Vvdash_{\mathcal{M}} \varphi \wedge \psi$ iff $a \Vvdash_{\mathcal{M}} \varphi$ a $a \Vvdash_{\mathcal{M}} \psi$.

$a \Vvdash_{\mathcal{M}} \varphi \vee \psi$ iff $a \Vvdash_{\mathcal{M}} \varphi$ nebo $a \Vvdash_{\mathcal{M}} \psi$.

$a \Vvdash_{\mathcal{M}} \varphi \rightarrow \psi$ iff pro každé $b \in \tau(a)$, pokud $b \Vvdash_{\mathcal{M}} \varphi$, tak $b \Vvdash_{\mathcal{M}} \psi$.

Formule φ je platná (vzhledem k $\Vvdash$) v informačním modelu $\mathcal{M} = \langle W, \tau, V\rangle$ (značíme $\mathcal{M} \Vvdash \varphi$), když pro každé $a \in \tau$ platí $a \Vvdash_{\mathcal{M}} \varphi$.

Takto zavedená sémantika po technické stránce úzce souvisí s inkvizitivní sémantikou.[4] Letmé porovnání těchto sémantických systémů ukáže, že inkvizitivní sémantiku lze uchopit jako tuto právě zavedenou sémantiku, avšak omezenou na diskrétní informační modely. Proto lze také říci, že předkládaná sémantika zobecňuje inkvizitivní sémantiku v podobném smyslu, v jakém Tarského topologická sémantika zobecňuje množinovou algebraickou sémantiku klasické logiky.

Zjevný fakt, že rozdíl mezi relacemi $\Vdash\!\vdash_{\mathcal{M}}$ a $\Vdash_{\mathcal{M}}$ spočívá pouze v sémantické podmínce pro disjunkci, může být vyjádřen také jako následující jednoduchá, ale pro následující úvahy významná věta.

`Věta 13.3.1` *Nechť $\mathcal{M} = \langle W, \tau, V \rangle$ je informační model, kde $a \in \tau$. Pak pro každou formuli φ, která neobsahuje disjunkci, platí*

$$a \Vdash\!\vdash_{\mathcal{M}} \varphi \text{ iff } a \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi.$$

Rozdíl mezi alternativními sémantickými podmínkami pro disjunkci je podstatný, ale ukazuje se, že co se týče prázdného stavu a pojmu pravdivosti, tento rozdíl zaniká. Následující dvě pozorování jsou přesným vyjádřením tohoto faktu.

`Věta 13.3.2` *$\emptyset \Vdash\!\vdash_{\mathcal{M}} \varphi$, pro každý informační model $\mathcal{M}$ a každou formuli φ.*

`Věta 13.3.3` *Nechť $\mathcal{M} = \langle W, \tau, V \rangle$ je informační model takový, že $\{s\} \in \tau$. Pak pro každou formuli φ platí, že*

$$\{s\} \Vdash\!\vdash_{\mathcal{M}} \varphi \text{ iff } \{s\} \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi.$$

Silná perzistence a silná regularita může být definována vzhledem k $\Vdash\!\vdash$ analogickým způsobem, jako jsme to učinili v definici 13.1.4. Následující tvrzení by pak mělo být porovnáno s větou 13.1.6.

`Věta 13.3.4` *Nechť $\mathcal{S} = \langle W, \tau \rangle$ je libovolný informační prostor. Vzhledem k $\Vdash\!\vdash$ platí:*

(a) Každá formule je silně perzistentní v $\mathcal{S}$.

(b) Pokud je množina τ uzavřena na konečné průniky, pak každá Harropova formule je silně regulární v $\mathcal{S}$.

[4] Viz např. (Ciardelli & Roelofsen, 2011) a oddíl 11.5 této práce.

Věty 13.3.2, 13.3.3 a 13.3.4 mohou být chápány také jako generalizace základních výsledků, které se obvykle uvádějí v souvislosti s inkvizitivní sémantikou.

Věta 13.3.4 (a) nám říká, že každá formule je silně perzistentní vzhledem k $\Vdash$ v každém informačním modelu. Avšak dokonce i v diskrétních informačních modelech (které jako jediné figurují v inkvizitivní sémantice) generuje globální disjunkce neregulární formule. Zvažme libovolný model $\mathcal{M} = \langle W, \tau, V\rangle$ takový, že $V(p) \nsubseteq V(q)$ a $V(q) \nsubseteq V(p)$. Pak $V(p) \Vvdash_{\mathcal{M}} p \vee q$, $V(q) \Vvdash_{\mathcal{M}} p \vee q$, ale nikoli $V(p) \cup V(q) \Vvdash_{\mathcal{M}} p \vee q$.

Nyní zavedeme značení, které budeme dále hojně využívat. Toto značení zavedeme nejprve pro kripkovské modely.

Definice 13.3.5 *Nechť* M *je kripkovský model. Množinu* $\lambda(\mathrm{M})$ *nazýváme logika modelu* M *a definujeme ji takto:*

$$\lambda(\mathrm{M}) = \{\varphi; \mathrm{M} \models \varphi\}.$$

Pokud $\mathcal{C}$ *je třída kripkovských modelů, pak logiku této třídy značíme jako* $\lambda(\mathcal{C})$*. Tedy:*

$$\lambda(\mathcal{C}) = \bigcap\{\lambda(\mathrm{M}); \mathrm{M} \in \mathcal{C}\}.$$

Pro informační modely zavádíme analogické značení, jelikož však máme k dispozici dvě různé relace tvrditelnosti, musíme též rozlišit dvě různé logiky daného informačního modelu či třídy modelů.

Definice 13.3.6 *Nechť* $\mathcal{M}$ *je informační model. Definujeme nyní dvě množiny* $\lambda^l(\mathcal{M})$ *a* $\lambda^g(\mathcal{M})$*, první z nich nazýváme lokální logika modelu* $\mathcal{M}$ *a druhou globální logika modelu* $\mathcal{M}$*.*

$$\lambda^l(\mathcal{M}) = \{\varphi; \mathcal{M} \Vdash \varphi\}.$$

$$\lambda^g(\mathcal{M}) = \{\varphi; \mathcal{M} \Vvdash \varphi\}.$$

Nechť $\mathcal{C}$ *je třída informačních modelů. Lokální logiku třídy* $\mathcal{C}$*, značenou jako* $\lambda^l(\mathcal{C})$*, a globální logiku třídy* $\mathcal{C}$*, značenou jako* $\lambda^g(\mathcal{C})$*, definujeme takto:*

$$\lambda^l(\mathcal{C}) = \bigcap\{\lambda^l(\mathcal{M}); \mathcal{M} \in \mathcal{C}\}.$$

$$\lambda^g(\mathcal{C}) = \bigcap\{\lambda^g(\mathcal{M}); \mathcal{M} \in \mathcal{C}\}.$$

Inkvizitivní logika je tedy (z definice) globální logikou třídy diskrétních informačních modelů. Lokální logikou této třídy je pak klasická logika, což bylo zdůvodněno v důkazu věty 13.2.11. Volba termínů *lokální* a *globální* může být také motivována faktem, že rozdíl mezi lokální a globální logikou daného Alexandrovova modelu koresponduje s rozdílem mezi dvěma kripkovskými modely, z nichž jeden bude přirozené označovat jako *globální variantu* toho druhého. Přesný smysl této poznámky bude objasněn níže poté, co uvedu definici 13.3.9 a zformuluji větu 13.3.11.

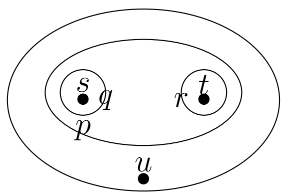
Můžeme si nyní povšimnout, že globální platnost ani neimplikuje, ani není implikována lokální platností. To ilustruje následující příklad. Nechť $\mathcal{M}$ je Alexandrovův informační model $\langle W, \tau, V\rangle$, kde

$$W = \{s, t, u\},$$

$$\tau = \{\{s, t, u\}, \{s, t\}, \{s\}, \{t\}, \varnothing\},$$

$$V(p) = \{s, t\}, V(q) = \{s\}, V(r) = \{t\}.$$

Tento informační model může být reprezentován následujícím obrázkem:



$\mathcal{M}$

Lze lehce ověřit, že $W \Vdash_{\mathcal{M}} p \to (q \vee r)$, ale neplatí $W \Vvdash_{\mathcal{M}} p \to (q \vee r)$. Na druhé straně, $W \Vvdash_{\mathcal{M}} (p \to (q \vee r)) \to ((p \to q) \vee (p \to r))$, avšak nikoli $W \Vdash_{\mathcal{M}} (p \to (q \vee r)) \to ((p \to q) \vee (p \to r))$ (jak ještě uvidíme, tato formule je globálně platná v každém topologickém informačním modelu).

Nyní budeme zkoumat vztah mezi lokálními a globálními logikami informačních modelů a vztah těchto pojmů ke kripkovské sémantice.

V definici 13.2.4 byla zavedena transformace Alexandrovova informačního modelu $\mathcal{M}$ na kripkovský model $\mathcal{M}^K$. Následující definice popisuje další konstrukci, tentokrát kripkovského modelu $\mathcal{M}_K$ z libovolného (ne nutně Alexandrovova) informačního modelu $\mathcal{M}$.

`Definice 13.3.7` *Nechť $\mathcal{M} = \langle W, \tau, V\rangle$ je libovolný informační model. $\mathcal{M}_K$ označuje kripkovský model $\langle \tau - \{\varnothing\}, \supseteq, V^*\rangle$, kde $\supseteq$ je relace obrácené inkluze (tedy nadmnožiny) a $V^*(p)$ je množina neprázdných podstavů množiny $V(p)$, tedy $V^*(p) = \tau(V(p)) - \{\varnothing\}$.*

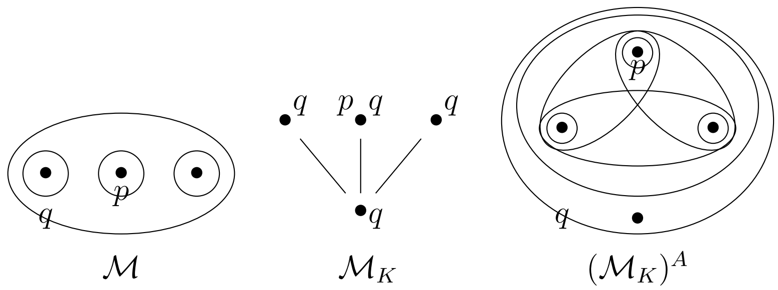
Je zřejmé, že logika kripkovského modelu konstruovaná tímto způsobem je identická s globální logikou výchozího informačního modelu. To vede k následující větě.

`Věta 13.3.8` *Nechť $\mathcal{M}$ je libovolný informační model. Pak platí:*

$$\lambda^g(\mathcal{M}) = \lambda(\mathcal{M}_K) = \lambda^l((\mathcal{M}_K)^A).$$

`Důkaz:` První rovnice je jednoduché sémantické pozorování. Druhá rovnice vyplývá z věty 13.2.8. QED

V důsledku je tedy globální logika libovolného informačního modelu identická s lokální logikou nějakého Alexandrovova informačního modelu. Obsah věty 13.3.8 ilustruje následující příklad relevantních modelů.



Nyní se podíváme na tyto vztahy ještě z jiné perspektivy a tím teprve objasníme terminologii lokálního a globálního. Jak jsem již naznačil, tato terminologie je motivována faktem, že globální logika libovolného Alexandrovova informačního modelu $\mathcal{M}$ je identická s logikou kripkovského modelu, který může být přirozeně označován jako globální varianta korespondujícího kripkovského modelu $\mathcal{M}^K$. To nyní bude popsáno přesněji.

`Definice 13.3.9` *Nechť* $\mathrm{M} = \langle W, \leqslant, V\rangle$ *je libovolný kripkovský model. Globální varianta modelu* M, *kterou značíme jako* $g(\mathrm{M})$, *je definována jako kripkovský model* $\langle UpW, \supseteq, U\rangle$, *kde* UpW *je množina neprázdných nahoru uzavřených podmnožin množiny* W *a* $U(p)$ *je definováno jako* $\{Z \in UpW; Z \subseteq V(p)\}$.

`Věta 13.3.10` $\mathcal{M}_K = g(\mathcal{M}^K)$, *pro libovolný Alexandrovův informační model* $\mathcal{M}$.

`Důkaz:` Když porovnáme definice 13.2.5, 13.3.7 a 13.3.9, vidíme, že pro každý kripkovský model M platí $g(\mathrm{M}) = (\mathrm{M}^A)_K$. Celkem tedy $g(\mathcal{M}^K) = (\mathcal{M}^{KA})_K = \mathcal{M}_K$. QED

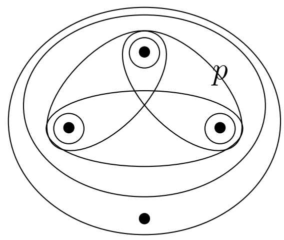
`Věta 13.3.11` *Nechť $\mathcal{M}$ je libovolný Alexandrovův informační model. Pak platí:*

(a) $\lambda^l(\mathcal{M}) = \lambda(\mathcal{M}^K)$.

(b) $\lambda^g(\mathcal{M}) = \lambda(g(\mathcal{M}^K))$.

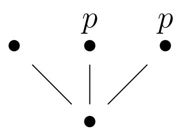
`Důkaz:` (a) je přímým důsledkem věty 13.2.8 a (b) je důsledkem vět 13.3.8 a 13.3.10. `QED`

Předchozí větu ilustruje následující příklad. Vezměme si např. stejný Alexandrovův informační prostor jako výše, tentokrát s jinou valuací:

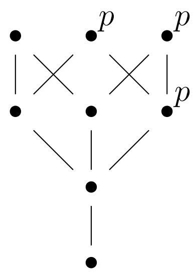


$\mathcal{M}$

Lokální logika modelu $\mathcal{M}$ je identická s logikou kripkovského modelu zobrazeného nalevo a globální logika modelu $\mathcal{M}$ s logikou jeho globální varianty zobrazené napravo.



$\mathcal{M}^K$



$g(\mathcal{M}^K)$

Nyní ukážeme, že intuicionistická logika hraje dvojroli v našem sémantickém rámci. Podle věty 13.2.9 je intuicionistická logika lokální logikou třídy Alexandrovových informačních modelů. Nyní zdůvodníme, že je zároveň globální logikou třídy všech modelů.

Nechť M $= \langle W, \leqslant, V \rangle$ je kripkovský model. $s^{\uparrow}$ je množina $\{t; s \leqslant t\}$. Řekneme, že M je ostrý, když pro každé $p \in At$ existuje $s \in W$ takové, že $V(p) = s^{\uparrow}$. Pokud je M ostrý, definujeme M_U jako informační model $\langle W, \tau, V \rangle$, kde množina informačních stavů τ je $\{s^{\uparrow}; s \in W\} \cup \{\varnothing\}$. Následující lemma lze dokázat přímočarou indukcí dle složitosti formule φ.

`Lemma 13.3.12` *Nechť* $\mathrm{M} = \langle W, \leqslant, V\rangle$ *je ostrý kripkovský model,* φ *je libovolná formule a* $s \in W$*. Pak platí:*

$$s^{\uparrow} \Vdash_{\mathrm{M}_U} \varphi \textit{ iff } s \vDash_{\mathrm{M}} \varphi.$$

Nyní bude postačující, když ukážeme, že pokud má φ kripkovský protipříklad, pak má také ostrý kripkovský protipříklad. Pro tento účel zvažme modifikaci $s(\mathrm{M})$ daného kripkovského modelu M.

Nechť $\mathrm{M} = \langle W, \leqslant, V\rangle$ je kripkovský model. Model $o(\mathrm{M}) = \langle W^o, \leqslant^o, V^o\rangle$ je definován takto: Pro každou atomickou formuli $p \in At$ zavádíme nový objekt $s_p \notin W$ a definujeme:

$$W^o = W \cup \{s_p; p \in At\},$$

$$\leqslant^o = \leqslant \cup\{\langle s_p, s_p\rangle; p \in At\} \cup \{\langle s_p, t\rangle; p \in At \text{ a zároveň } t \in V(p)\},$$

$$V^o(p) = s_p^{\uparrow}.$$

Je evidentní, že $\leqslant^o$ je reflexivní a tranzitivní (díky tomu, že $V(p)$ je nahoru uzavřená), $o(\mathrm{M})$ je ostrý a pro libovolné $s \in W$ a φ platí následující lemma.

`Lemma 13.3.13` $s \vDash_{\mathrm{M}} \varphi$ *iff* $s \vDash_{o(\mathrm{M})} \varphi$.

`Věta 13.3.14` *Intuicionistická logika je globální logika třídy všech informačních modelů.*

`Důkaz:` Nejprve předpokládejme, že φ je intuicionisticky platná. To znamená, že φ je platná v každém kripkovském modelu. Tedy platí $\varphi \in \lambda(\mathcal{M}_K)$ pro každý informační model $\mathcal{M}$. Z věty 13.3.8 pak plyne, že $\varphi \in \lambda^g(\mathcal{M})$ pro každý informační model $\mathcal{M}$, což znamená, že φ je globálně platná v třídě všech informačních modelů.

Nyní předpokládejme, že φ není intuicionisticky platná. To znamená, že existuje kripkovský model M, ve kterém φ není platná. Lemmata 13.3.12 a 13.3.13 vedou k závěru, že φ není globálně platná ani v informačním modelu $(o(\mathrm{M}))_U$. Tedy φ není globálně platná v třídě všech informačních modelů. `QED`

Tento oddíl zakončíme tím, že zavedeme dva pojmy, které jsou analogiemi pojmů p-morfismu a disjunktního sjednocení z kripkovské sémantiky (viz Chargov & Zakharyaschev, 1997, str. 30-34). Je známo, že p-morfismy, tj. specifické funkce přenášející platnost v kripkovské sémantice, korespondují s otevřenými spojitými funkcemi mezi odpovídajícími Alexandrovovými topologickými prostory. Následující věta odpovídá zobecněné verzi tohoto faktu.

Věta 13.3.15 *Nechť* $\mathcal{M}_1 = \langle W_1, \tau_1, V_1\rangle$, $\mathcal{M}_2 = \langle W_2, \tau_2, V_2\rangle$ *jsou libovolné informační modely. Předpokládejme, že* τ_1 *je uzavřena na konečné průniky. Nechť* h *je funkce z* W_1 *do* W_2 *taková, že*

(i) Pro každé $X \in I_1$, $h(X) \in I_2$.

(ii) Pro každé $Y \in I_2$, $h^{-1}(Y) \in I_1$.

Dále předpokládejme, že pro každý atom p *platí:*

(iii) $h^{-1}(V_2(p)) = V_1(p)$.

Pak platí pro každé $a \in \tau_1$ *a každou formuli* φ*:*

(a) $a \Vvdash_{\mathcal{M}_1} \varphi$ *iff* $h(a) \Vvdash_{\mathcal{M}_2} \varphi$.

(b) $a \Vdash_{\mathcal{M}_1} \varphi$ *iff* $h(a) \Vdash_{\mathcal{M}_2} \varphi$.

Důkaz: Lze postupovat indukcí podle komplexity formule φ. Detaily zde vynecháváme. QED

Následující korelát disjunktního sjednocení kripkovských modelů bude použit v příštím oddílu. Nechť $\mathcal{M}_1 = \langle W_1, \tau_1, V_1\rangle$, $\mathcal{M}_2 = \langle W_2, \tau_2, V_2\rangle$ jsou nějaké informační modely takové, že $W_1 \cap W_2 = \varnothing$. Disjunktní sjednocení těchto modelů je informační model $\mathcal{M}_1 \uplus \mathcal{M}_2 = \langle W^{\uplus}, \tau^{\uplus}, V^{\uplus}\rangle$, kde

$$W^{\uplus} = W_1 \cup W_2,$$

$$\tau^{\uplus} = \{a_1 \cup a_2; a_1 \in \tau_1 \text{ a zároveň } a_2 \in \tau_2\},$$

$$V^{\uplus}(p) = V_1(p) \cup V_2(p) \text{ pro každý atom } p.$$

Lze lehce ověřit, že pokud $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ jsou Alexandrovovy informační modely, pak $\mathcal{M}_1 \uplus \mathcal{M}_2$ je také Alexandrovův informační model. Navíc je zjevné, že platí následující věta.

Věta 13.3.16 *Nechť* $\mathcal{M}_1 = \langle W_1, \tau_1, V_1\rangle$, $\mathcal{M}_1 = \langle W_2, \tau_2, V_2\rangle$ *jsou informační modely takové, že* $W_1 \cap W_2 = \varnothing$. *Pokud* $a \in \tau_i$ *pro* $i \in \{1, 2\}$, *pak platí:*

(a) $a \Vvdash_{\mathcal{M}_i} \varphi$ *iff* $a \Vvdash_{\mathcal{M}_1 \uplus \mathcal{M}_2} \varphi$.

(b) $a \Vdash_{\mathcal{M}_i} \varphi$ *iff* $a \Vdash_{\mathcal{M}_1 \uplus \mathcal{M}_2} \varphi$.

13.4 Třída G-logik

V tomto oddílu budu studovat globální logiky jistých tříd Alexandrovových informačních modelů. Definuji třídu logik, pro které zavedeme označení G-logiky, a budu studovat jejich obecné vlastnosti. Pojem G-logiky představuje přirozené zobecnění inkvizitivní logiky. G-logiky sdílejí s inkvizitivní logikou, která je nejsilnější logikou této třídy, řadu významných rysů. Hlavním výsledkem tohoto oddílu (a také celé kapitoly) je obecná syntaktická charakterizace těchto logik formulovaná ve větě 13.4.9.

K definici G-logik se dostaneme s pomocí následujících pojmů. Substitucí budeme mínit každou funkci, která přiřazuje formule atomickým formulím. Substituce σ se nazývá harropovská, když platí, že pro každou atomickou formuli p je $\sigma(p)$ Harropova formule. Je-li σ substituce a φ formule, pak $\sigma(\varphi)$ značí výsledek nahrazení každého výskytu každé atomické formule p formulí $\sigma(p)$. Řekneme, že množina formulí Λ je uzavřena na libovolné substituce, když pro každou substituci σ platí, že pokud $\varphi \in \Lambda$, tak $\sigma(\varphi) \in \Lambda$. Množina formulí Λ je uzavřena na harropovské substituce, když pro každou harropovskou substituci σ platí, že pokud $\varphi \in \Lambda$, tak $\sigma(\varphi) \in \Lambda$.

KL bude nadále označovat množinu klasicky platných formulí a IL množinu intuicionisticky platných formulí.

`Definice 13.4.1` *Množina formulí Λ je superintuicionistická H-logika (zkráceně SH-logika), když platí následující tři podmínky:*

(a) $IL \subseteq \Lambda \subseteq KL$.

(b) Λ *je uzavřena na modus ponens (pokud* $\varphi \in \Lambda$ *a* $\varphi \to \psi \in \Lambda$, *tak* $\psi \in \Lambda$*).*

(c) Λ *je uzavřena na harropovské substituce.*

Množina Λ je superintuicionistická U-logika (zkráceně SU-logika), když Λ je SH-logika, která je uzavřená na libovolné substituce.

Pojem SU-logiky je identický se standardním pojmem superintuicionistické logiky. Pojem SH-logiky je méně obvyklý. Objevuje se (pod jiným označením) např. v (Miglioli et al., 1989).

Nechť Δ je množina formulí. $Thm(\Delta)$ je nejmenší nadmnožina množiny Δ, která je uzavřena na modus ponens. Jednoduché pozorování ukazuje, že množina SH-logik (stejně jako množina SU-logik) tvoří tzv. úplný svaz, kde svazovým uspořádáním je inkluze a pro každou množinu SH-logik K je infimum a supremum definováno takto:

$$\bigwedge K = \bigcap K.$$

$\bigvee K = Thm(\bigcup K)$.

Nechť $\mathcal{S}$ je informační prostor. Lokální logiku prostoru $\mathcal{S}$, kterou značíme $\lambda^l(\mathcal{S})$, a globální logiku prostoru $\mathcal{S}$, kterou značíme $\lambda^g(\mathcal{S})$, definujeme očekávaným způsobem:

$$\lambda^l(\mathcal{S}) = \bigcap\{\lambda^l(\mathcal{M}); \mathcal{M} \text{ je informační model na prostoru } \mathcal{S}\}.$$

$$\lambda^g(\mathcal{S}) = \bigcap\{\lambda^g(\mathcal{M}); \mathcal{M} \text{ je informační model na prostoru } \mathcal{S}\}.$$

Následující věta ukazuje, proč jsou SH- a SU-logiky relevantní pro naši práci.

`Věta 13.4.2` *Nechť $\mathcal{S} = \langle W, \tau \rangle$ je Alexandrovův informační prostor.*

(a) $\lambda^g(\mathcal{S})$ je SH-logika.

(b) $\lambda^l(\mathcal{S})$ je SU-logika.

`Důkaz:` (a) Ukážeme, že $\lambda^g(\mathcal{S})$ je uzavřena na harropovské substituce. Vezměme si libovolný informační model $\mathcal{M} = \langle W, \tau, V \rangle$ na $\mathcal{S}$. Předpokládejme, že σ je harropovská substituce. Relativně vzhledem k V je definována valuace V^σ na $\mathcal{S}$. Pro každý atom p nechť platí:

$$V^\sigma(p) = \bigcup\{a \in \tau; a \Vdash_{\mathcal{M}} \sigma(p)\}.$$

Zvážíme nyní model $\mathcal{M}^\sigma = \langle W, \tau, V^\sigma \rangle$. Jelikož pro každý atom p je $\sigma(p)$ Harropova formule , tak z věty 13.3.4 vyplývá, že pro každou formuli φ a stav $a \in \tau$

$$a \Vdash_{\mathcal{M}^\sigma} \varphi \text{ iff } a \Vdash_{\mathcal{M}} \sigma(\varphi).$$

Tedy pokud $\sigma(\varphi) \notin \lambda^g(\mathcal{S})$, tak $\varphi \notin \lambda^g(\mathcal{S})$.

(b) může být dokázáno obdobně. Jediný rozdíl spočívá v tom, že díky větě 13.1.6, σ může být libovolná substituce, tj. nemusí být omezena na Harropovy formule. `QED`

Z bodu (a) předchozí věty plyne, že lokální logika každé třídy Alexandrovových informačních prostorů je SU-logika. Vzhledem k tomu, že ne každá SH-logika je SU-logika, je vidět, že existují SH-logiky, které nejsou lokálními logikami žádné třídy Alexandrovových informačních prostorů. Ve skutečnosti toto platí dokonce i pro některé SU-logiky. Avšak každá SH-logika je lokální logikou nějaké třídy Alexandrovových informačních modelů. Konkrétně platí, že libovolná SH-logika Λ je lokální logikou třídy všech svých lokálních Alexandrovových informačních modelů. Symbolicky:

$$\Lambda = \lambda^l(\mathcal{C}^l(\Lambda)),$$

kde $\mathcal{C}^l(\Lambda)$ je třídou Alexandrovových informačních modelů $\mathcal{M}$ takových, že $\Lambda \subseteq \lambda^l(\mathcal{M})$. Vztah mezi lokální a globální disjunkcí se ukáže v novém světle, položíme-li si otázku, co je globální logikou třídy lokálních Alexandrovových modelů množiny Λ. To nás vede k následující definici:

`Definice 13.4.3` *Nechť Λ je SH-logika. Globální varianta logiky Λ, značená jako $g(\Lambda)$, je definována jakožto globální logika třídy lokálních Alexandrovových informačních modelů logiky Λ. Symbolicky:*

$$g(\Lambda) = \lambda^g(\mathcal{C}^l(\Lambda)).$$

Množina formulí je G-logika, když je identická s globální variantou nějaké SH-logiky.

Následující věta je přímým důsledkem věty 13.3.11 (b). Ukazuje, jak by bylo možné vymezit G-logiky pomocí kripkovských modelů, a poskytuje tedy alternativní sémantickou charakterizaci této třídy.

`Věta 13.4.4` *Pro každou SH-logiku Λ platí $g(\Lambda) = \bigcap\{\lambda(g(\mathrm{M})); \Lambda \subseteq \lambda(\mathrm{M})\}$.*

Můžeme tedy vzít libovolnou SH-logiku Λ a k ní třídu $\mathcal{C}$ jejích kripkovských modelů. Nechť $g(\mathcal{C})$ je třída globálních variant kripkovských modelů z $\mathcal{C}$. Věta 13.4.4 říká, že $g(\Lambda)$, globální varianta logiky Λ, je logikou třídy $g(\mathcal{C})$.

Speciálními kripkovskými modely jsou modely tvaru $\langle W, \leqslant, V\rangle$, kde $\leqslant = \{\langle s, s\rangle; s \in W\}$. To jsou „typické“ kripkovské modely klasické logiky. V těchto modelech jsou nahoru uzavřené podmnožiny množiny W totožné s podmnožinami množiny W a globální varianty těchto modelů jsou tedy modely inkvizitivní sémantiky. Skutečně se ukazuje, že tato transformace vede od klasické logiky k inkvizitivní logice, jak je přesněji formulováno a dokázáno ve větě 13.4.5. Pojem globální varianty dané SH-logiky lze vnímat jako generalizaci tohoto konkrétního vztahu mezi klasickou logikou a inkvizitivní sémantikou.

Nechť $InkL$ je množina formulí platných v inkvizitivní sémantice (jedná se tedy o globální logiku třídy všech diskrétních informačních modelů). Následující věta ukazuje, že $InkL$ je nejsilnější G-logikou.

`Věta 13.4.5` $g(KL) = InkL.$

`Důkaz:` Předpokládejme, že $\varphi \in g(KL)$. Tedy φ je globálně platná v každém lokálním informačním modelu množiny KL. Věta 13.2.11 říká, že klasická logika je lokální logikou třídy diskrétních informačních modelů. Tedy φ je globálně platná v každém diskrétním informačním modelu. Z toho vyplývá, že $\varphi \in InkL$.

Nyní předpokládejme, že $\varphi \notin g(KL)$. Existuje tedy Alexandrovův informační model $\mathcal{M} = \langle W, \tau, V \rangle$ takový, že $KL \subseteq \lambda^l(\mathcal{M})$, ale $\varphi \notin \lambda^g(\mathcal{M})$. Zkonstruujeme diskrétní globální protipříklad k φ. Přitom využijeme fakt, že $W \Vdash_{\mathcal{M}} p \vee \neg p$ pro každou atomickou formuli p. Z toho plyne, že $W - V(p) \in \tau$.

Definujeme relaci $\equiv$ mezi možnými světy z W:

$$s \equiv t \text{ iff pro každé } p \in At,\ s \in V(p) \text{ iff } t \in V(p).$$

Je zjevné, že $\equiv$ je relace ekvivalence. Nechť $[s]$ je ekvivalenční třída určená světem s. Platí, že

$$[s] = \bigcap\{V(p); p \in At, s \in V(p)\} \cap \bigcap\{W - V(p); p \in At, s \notin V(p)\}.$$

Tedy $[s] \in \tau$. Definujeme nyní diskrétní informační model $d(\mathcal{M})$:

$$d(\mathcal{M}) = \langle W/{\equiv}, \wp(W/{\equiv}), V^{\equiv} \rangle,$$

kde $W/{\equiv}$ je množina $\{[s]\,; s \in W\}$, $\wp(W/{\equiv})$ je potenční množina množiny $W/{\equiv}$ a pro každou atomickou formuli p, $V^{\equiv}(p) = \{[s]\,; s \in V(p)\}$. Potom funkce h z W do $W/{\equiv}$ definovaná předpisem $h(s) = [s]$ splňuje předpoklady věty 13.3.15 a platí tedy

$$a \Vvdash_{\mathcal{M}} \varphi \text{ iff } h(a) \Vvdash_{d(\mathcal{M})} \varphi.$$

Tedy $\varphi \notin \lambda^g(d(\mathcal{M}))$, což implikuje, že $\varphi \notin InkL$. QED

Dalším úkolem je zformulovat obecnou syntaktickou charakterizaci G-logik. K tomuto účelu budeme potřebovat následující tři lemmata, která zobecňují známé skutečnosti o inkvizitivní logice. Nechť Δ^* označuje množinu těch formulí z Δ, které neobsahují disjunkci, tedy

$$\Delta^* = \{\varphi \in \Delta; \varphi \text{ neobsahuje disjunkci}\}.$$

O množině Δ^* budeme též někdy mluvit jako o bezdisjunktovém fragmentu množiny Δ. Následující lemma je důsledkem věty 13.3.1.

`Lemma 13.4.6` $\Lambda^* = g(\Lambda)^*$, *pro každou SH-logiku* Λ.

Korespondujícím faktem pro inkvizitivní logiku je to, že její bezdisjunktový fragment je klasický.

Řekneme, že množina formulí Δ je konstruktivní, když má tzv. vlastnost disjunkce, tj. pro každé φ, ψ platí, že pokud $\varphi \vee \psi \in \Delta$, pak $\varphi \in \Delta$ nebo $\psi \in \Delta$. Je známo, že $InkL$ je konstruktivní. Ukážeme, že to platí pro každou G-logiku.

`Lemma 13.4.7` *Každá G-logika je konstruktivní.*

`Důkaz:` Předpokládejme, že Λ je libovolná SH-logika, $\varphi \notin g(\Lambda)$ a $\psi \notin g(\Lambda)$. Pak existují Alexandrovovy informační modely $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \in \mathcal{C}^l(\Lambda)$ takové, že $\varphi \notin \lambda^g(\mathcal{M}_1)$ a $\psi \notin \lambda^g(\mathcal{M}_2)$. Můžeme předpokládat, že množiny možných světů z $\mathcal{M}_1$ a $\mathcal{M}_2$ jsou disjunktní. Pak $\mathcal{M}_1 \uplus \mathcal{M}_2$ je také v $\mathcal{C}^l(\Lambda)$ a z věty 13.3.16 (a) a perzistence pro relaci $\Vdash$ (věta 13.3.4) plyne, že $\varphi \vee \psi \notin \lambda^g(\mathcal{M}_1 \uplus \mathcal{M}_2)$. Tedy $\varphi \vee \psi \notin g(\Lambda)$. `QED`

Nechť H je množina instancí následujícího schématu, kde φ, ψ jsou proměnné za libovolné formule a α proměnná za Harropovy formule.

H $(\alpha \to (\varphi \vee \psi)) \to ((\alpha \to \varphi) \vee (\alpha \to \psi))$.

Pokud Δ_1, Δ_2 jsou dvě množiny formulí, $\Delta_1 + \Delta_2$ označuje množinu $Thm(\Delta_1 \cup \Delta_2)$. Řekneme, že formule φ, ψ jsou Λ-ekvivalentní, když $\varphi \to \psi \in \Lambda$ a $\psi \to \varphi \in \Lambda$. Následující lemma může být porovnáno s důsledkem 3.15 v (Ciardelli & Roelofsen, 2011).

`Lemma 13.4.8` *Pro každou φ existují formule $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, které neobsahují disjunkci, a přitom platí, že φ je $(IL{+}H)$-ekvivalentní formuli $\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_n$.*

`Důkaz:` Postupujeme indukcí podle složitosti formule φ. Pro atomické formule a pro formuli $\bot$ je případ jasný, protože tyto formule samotné neobsahují disjunkci. Induktivním předpokladem je, že tvrzení platí pro dané formule φ, ψ, tj. existují formule $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ a $\beta_1, \dots, \beta_m$, které neobsahují disjunkci, a přitom

φ je $(IL{+}H)$-ekvivalentní formuli $\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_n$,

ψ je $(IL{+}H)$-ekvivalentní formuli $\beta_1 \vee \dots \vee \beta_m$.

Dokážeme, že pak také formule $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \to \psi$ jsou ekvivalentní nějaké disjunkci formulí, které disjunkci neobsahují. První případ je přímočarý:

$\varphi \vee \psi$ je $(IL{+}H)$-ekvivalentní formuli $\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_n \vee \beta_1 \vee \dots \vee \beta_m$.

Co se konjunkce týče, s využitím distributivních zákonů, které platí již v intuicionistické logice, můžeme nahlédnout, že následující formule jsou $(IL{+}H)$-ekvivalentní

$\varphi \wedge \psi$,

$(\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_n) \wedge (\beta_1 \vee \dots \vee \beta_m)$,

$\bigvee_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m} (\alpha_i \wedge \beta_j)$,

Klíčový je případ implikace, neboť právě v něm je využito schéma H. Následující formule jsou ekvivalentní.

$$\varphi \to \psi$$

$$(\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n) \to (\beta_1 \vee \ldots \vee \beta_m),$$

$$\bigwedge_{i=1}^{n} (\alpha_i \to (\beta_1 \vee \ldots \vee \beta_m)),$$

$$\bigwedge_{i=1}^{n} ((\alpha_i \to \beta_1) \vee \ldots \vee (\alpha_i \to \beta_m)),$$

$$\bigvee_{i_1=1}^{m} \ldots \bigvee_{i_n=1}^{m} ((\alpha_1 \to \beta_{i_1}) \wedge \ldots \wedge (\alpha_n \to \beta_{i_n})).$$

QED

Nyní můžeme dokázat hlavní výsledek této kapitoly, který poskytuje syntaktickou charakterizaci G-logik.

Věta 13.4.9 *$g(\Lambda) = IL{+}H{+}\Lambda^*$, pro každou SH-logiku Λ.*

Důkaz: Nejprve dokážeme, že $IL{+}H{+}\Lambda^* \subseteq g(\Lambda)$. Zjevně platí $IL \subseteq g(\Lambda)$. Na základě lemmatu 13.4.6 platí $\Lambda^* \subseteq g(\Lambda)$. Ukážeme, že každá instance H je globálně platná v každém Alexandrovově informačním modelu. Nechť $\mathcal{M} = \langle W, \tau, V \rangle$. Stačí když ukážeme, že pro každé $a \in \tau$ platí, že pokud $a \Vdash_{\mathcal{M}} \alpha \to (\varphi \vee \psi)$, tak $a \Vdash_{\mathcal{M}} (\alpha \to \varphi) \vee (\alpha \to \psi)$. Předpokládejme, že neplatí $a \Vdash_{\mathcal{M}} (\alpha \to \varphi) \vee (\alpha \to \psi)$. To znamená, že existují stavy $b_1, b_2 \in \tau(a)$, takové, že $b_1 \Vdash_{\mathcal{M}} \alpha$, ale ne $b_1 \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$, a $b_2 \Vdash_{\mathcal{M}} \alpha$, ale ne $b_2 \Vdash_{\mathcal{M}} \psi$. Dle věty 13.3.4 pak platí $b_1 \cup b_2 \Vdash_{\mathcal{M}} \alpha$, ale ne $b_1 \cup b_2 \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi \vee \psi$. Jelikož $b_1 \cup b_2 \in \tau(a)$, neplatí, že $a \Vdash_{\mathcal{M}} \alpha \to (\varphi \vee \psi)$.

Nyní ukážeme, že $g(\Lambda) \subseteq IL{+}H{+}\Lambda^*$. Předpokládejme, že $\varphi \in g(\Lambda)$. Dle lemma 13.4.8 je φ $(IL{+}\Lambda^*{+}H)$-ekvivalentní s nějakou disjunkcí formulí, které už disjunkci neobsahují, řekněme s $\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n$. To znamená, že $(\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n) \to \varphi$ a $\varphi \to (\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n)$ jsou v $IL{+}H{+}\Lambda^*$. První část tohoto důkazu ukazuje, že $IL{+}H{+}\Lambda^* \subseteq g(\Lambda)$, což implikuje $\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n \in g(\Lambda)$, neboť $g(\Lambda)$ je uzavřena na modus ponens a $\varphi \in g(\Lambda)$. Pak díky lemmatu 13.4.7, $\alpha_i \in g(\Lambda)$ pro nějaké i. Jelikož α_i neobsahuje disjunkci, vyplývá z lemmatu 13.4.6, že $\alpha_i \in IL{+}H{+}\Lambda^*$, a tudíž také $\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n \in IL{+}H{+}\Lambda^*$. Z toho plyne, že $\varphi \in IL{+}H{+}\Lambda^*$. QED

Předchozí důkaz může být chápán jako zobecněná verze důkazu úplnosti pro inkvizitivní logiku z (Ciardelli, 2009) a (Ciardelli & Roelofsen, 2011), který využívá tzv. disjunktivně negativní překlad. Srov. zejména důkaz teorému 3.32 v (Ciardelli & Roelofsen, 2011).

Nejelegantnější axiomatizace inkvizitivní logiky – formulovaná též v (Ciardelli, 2009) a (Ciardelli & Roelofsen, 2011) – vypadá tak, že vezmeme nějaký kalkul intuicionistické logiky a přidáme k němu tzv. Kreisel-Putnamovo schéma KP a zákon dvojí negace pro atomické formule DN:

$$(\neg\varphi \to (\psi \vee \chi)) \to ((\neg\varphi \to \psi) \vee (\neg\varphi \to \chi)) \qquad KP$$

$$\neg\neg p \to p \qquad DN$$

Tuto axiomatizaci lze získat též z věty 13.4.9. Stačí si uvědomit, že potřebujeme pouze DN k tomu, abychom dostali celý bezdisjunktový fragment klasické logiky. Navíc v přítomnosti DN je každá instance H ekvivalentní nějaké instanci KP. Ovšem obecně je rozdíl mezi H a KP velmi výrazný. Schéma H bylo zavedeno a zkoumáno např. též v (Miglioli et al., 1989), kde bylo ukázáno, že $IL{+}H$ je striktně silnější než tzv. Medvedevova logika konečných problémů ML (tuto logiku definujeme níže). Současně je známo, že $IL{+}KP$ je striktně slabší než ML. Je dlouho otevřeným problémem, zda samotná logika ML je vůbec rekurzivně axiomatizovatelná.

Uvedeme nyní některé významné důsledky věty 13.4.9 a předchozích lemmat. První z nich ukazuje, co je logikou všech Alexandrovových informačních prostorů.

`Věta 13.4.10` $g(IL) = IL{+}H$.

Jak lze lehce doložit ověřením korektnosti, tato logika je též globální logikou všech topologických informačních prostorů. Následuje věta, která říká, že g je monotónní funkce na svazu SH-logik a G-logiky jsou fixní body této funkce. Avšak g není ani uzávěrovým, ani vnitřkovým operátorem.

`Věta 13.4.11` *Nechť* $\Lambda, \Lambda_1, \Lambda_2$ *jsou libovolné SH-logiky.*

(a) $g(\Lambda)$ *je také SH-logika.*

(b) Pokud $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2$*, pak* $g(\Lambda_1) \subseteq g(\Lambda_2)$*.*

(c) $g(g(\Lambda)) = g(\Lambda)$*.*

(d) $IL \subset g(IL)$ *a* $g(KL) \subset KL$*.*

`Důkaz:` (a) Nejprve je třeba si uvědomit, že z lemmatu 13.4.8 vyplývá, že každá Harropova formule je $(IL{+}H)$-ekvivalentní nějaké formuli, která neobsahuje disjunkci. (To lze dokázat indukcí podle složitosti dané Harropovy formule. Klíčovým bodem je to, kdy spojujeme implikací libovolnou formuli φ a Harropovu formuli α. Dle induktivního předpokladu je α ekvivalentní nějaké formuli β, která neobsahuje disjunkci. Avšak na formuli φ nemůžeme použít induktivní předpoklad. Víme však, že je ekvivalentní nějaké formuli $\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n$, kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ neobsahují disjunkci. To znamená, že $\varphi \rightarrow \alpha$ je ekvivalentní formuli $(\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n) \rightarrow \beta$ a ta je zase ekvivalentní formuli $(\alpha_1 \rightarrow \beta) \wedge \ldots \wedge (\alpha_n \rightarrow \beta)$, která neobsahuje disjunkci.) Abychom dokázali, že $g(\Lambda)$ je uzavřena na substituci Harropových formulí, stačí nyní doložit, že je uzavřena na substituci formulí, které neobsahují disjunkci. Předpokládejme, že $\psi \in g(\Lambda)$ a σ je substituce formulí, které neobsahují disjunkci. Chceme ukázat, že $\sigma(\psi) \in g(\Lambda)$. Podle věty 13.4.9 může být ψ odvozeno z $IL \cup H \cup \Lambda^*$ pouze pomocí pravidla modus ponens, kde odvození odpovídá posloupnosti formulí $\chi_1, \ldots, \chi_n$, kde $\chi_n = \psi$. Množina $IL \cup H \cup \Lambda^*$ je zjevně uzavřena na substituce formulí, které neobsahují disjunkci. Potom je tedy i $\sigma(\chi_1), \ldots, \sigma(\chi_n)$ odvozením formule $\sigma(\psi)$ z $IL \cup H \cup \Lambda^*$ (kde modus ponens je jediným odvozovacím pravidlem), a tak $\sigma(\psi) \in g(\Lambda)$.

(b) a (c) vyplývají přímočaře z věty 13.4.9 a lemmatu 13.4.6. První část (d) platí, protože H není platné schéma intuicionistické logiky. Druhá část (d) plyne z věty 13.4.5 a známého faktu, že inkvizitivní logika je slabší než klasická logika. (např. $p \vee \neg p \notin InkL$). QED

Další věta předkládá alternativní charakterizaci G-logik. V jejím důkazu se objevují podobné prvky jako v důkazu věty 13.4.9. Termín *rozšíření* ve znění věty znamená totéž co nadmnožina. Tedy libovolná logika spadá mezi svá rozšíření.

Věta 13.4.12 *Nechť Λ je libovolná SH-logika. Pak platí, že Λ je G-logika iff Λ je konstruktivní rozšíření logiky $IL{+}H$.*

Důkaz: Nechť Λ je G-logika. Pak Λ je konstruktivní (lemma 13.4.7) a díky monotonicitě a idempotenci operace g platí $g(IL) \subseteq \Lambda$. Aplikací věty 13.4.10 získáváme $IL{+}H \subseteq \Lambda$.

Nyní předpokládejme, že Λ je konstruktivní rozšíření logiky $IL{+}H$. Dokážeme, že $g(\Lambda) = \Lambda$. Z věty 13.4.9 vyplývá, že $g(\Lambda) \subseteq \Lambda$. Musíme dokázat, že také $\Lambda \subseteq g(\Lambda)$. Nechť $\varphi \in \Lambda$. Pak dle lemma 13.4.8 existují formule $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, které neobsahují disjunkci a pro které platí, že φ je Λ-ekvivalentní a také $g(\Lambda)$-ekvivalentní s $\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n$. Z toho vyplývá, že $\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n \in \Lambda$, a protože Λ je konstruktivní, platí pro nějaké i, že $\alpha_i \in \Lambda$. Jelikož α_i neobsahuje disjunkci, plyne z lemmatu 13.4.6, že $\alpha_i \in g(\Lambda)$, a tudíž také $\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n \in g(\Lambda)$. Jelikož $\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n$ je $g(\Lambda)$-ekvivalentní s φ, platí $\varphi \in g(\Lambda)$. QED

`Věta 13.4.13` *G-logiky tvoří svaz, který je izomorfní se svazem bezdisjunktových fragmentů SH-logik. Analogicky globální varianty SU-logik tvoří svaz, který je izomorfní se svazem bezdisjunktových fragmentů SU-logik.*

`Důkaz:` Věta 13.4.9 ukazuje, že pro libovolné SH-logiky Λ_1 a Λ_2 platí, že pokud $\Lambda_1^* = \Lambda_2^*$, pak $g(\Lambda_1) = g(\Lambda_2)$. Můžeme tedy následujícím předpisem definovat funkci h z množiny bezdisjunktových fragmentů SH-logik do množiny G-logik: $h(\Lambda^*) = g(\Lambda)$. Je zjevné, že h je surjektivní. Ukážeme, že je také injektivní. Předpokládejme $\Lambda_1^* \neq \Lambda_2^*$. Z lemmatu 13.4.6 plyne, že $g(\Lambda_1)^* \neq g(\Lambda_2)^*$. Tedy $g(\Lambda_1) \neq g(\Lambda_2)$, což znamená, že $h(\Lambda_1^*) \neq h(\Lambda_2^*)$. Navíc platí, že $\Lambda_1^* \subseteq \Lambda_2^*$ iff $h(\Lambda_1^*) \subseteq h(\Lambda_2^*)$. Tedy h je izomorfismus mezi svazem bezdisjunktových fragmentů SH-logik a svazem G-logik. Druhá část věty může být dokázána podobným způsobem. `QED`

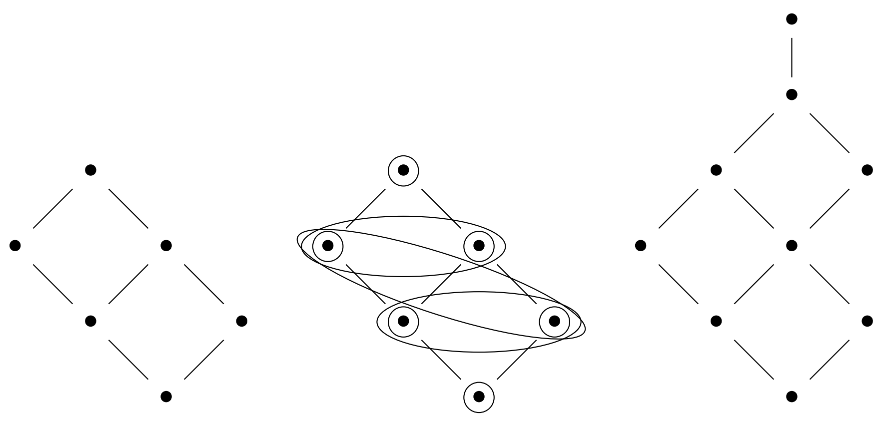
`Věta 13.4.14` *Existuje nespočetně mnoho G-logik.*

`Důkaz:` Tento výsledek vyplývá z věty 13.4.13 a faktu, že existuje nespočetně mnoho bezdisjunktových fragmentů superintuicionistických logik. Tento fakt vyplývá z teorémů 11.19 (str. 382) a 11.25 (str. 384) monografie (Chargov & Zakharyaschev, 1997). `QED`

Předpokládejme, že $O = \langle X, \leqslant \rangle$ je částečně uspořádaná množina, tj. $\leqslant$ je reflexivní, tranzitivní a slabě antisymetrická relace na X. Řekneme, že množina Y prvků z množiny X je *antiřetězcem* v O, když každé dva prvky u, v z Y jsou nesrovnatelné v relaci $\leqslant$, tj. neplatí ani $u \leqslant v$, ani $v \leqslant u$. Nechť X^a je množina všech konečných antiřetězců v O. Relace $\leqslant$ určuje částečné uspořádání $\leqslant^a$ na X^a definované takto:

$$A \leqslant^a B \text{ iff pro každé } a \in A \text{ existuje } b \in B \text{ takové, že } a \leqslant b.$$

V tomto smyslu každá částečně uspořádaná množina $O = \langle X, \leqslant \rangle$ určuje částečně uspořádanou množinu $O^a = \langle X^a, \leqslant^a \rangle$, jak ilustruje tento obrázek:



$O = \langle X, \leqslant \rangle$ Antiřetězce v O. $O^a = \langle X^a, \leqslant^a \rangle$

Nechť Δ je množina formulí a Λ je SH-logika. Pro každé $\varphi \in \Delta$ bude $[\varphi]^{\Delta}_{\Lambda}$ označovat množinu těch formulí z Δ, které jsou Λ-ekvivalentní s formulí φ. Této množině budeme říkat (Δ, Λ)-propozice vyjádřená formulí φ. Množina (Δ, Λ)-propozic je částečně uspořádaná relací odvoditelnosti, která je vtělena do logiky Λ v podobě implikace:

$$Prop(\Delta, \Lambda) = \Big\langle \{[\varphi]^{\Delta}_{\Lambda} ; \varphi \in \Delta\}, \leqslant \Big\rangle, \text{ kde } [\varphi]^{\Delta}_{\Lambda} \leqslant [\psi]^{\Delta}_{\Lambda} \text{ iff } \varphi \rightarrow \psi \in \Lambda.$$

Nechť A je množina atomických formulí a F_A množina všech formulí vystavěných pomocí $\rightarrow, \wedge, \vee$ z atomů množiny A a konstanty $\perp$. Ve shodě s výše zavedenou notací označuje F^*_A množinu těch formulí z F_A, které neobsahují disjunkci. Následující výsledek platí pro každou SH-logiku Λ a říká, že struktura propozic v $g(\Lambda)$ je izomorfní se strukturou sestávající z konečných antiřetězců propozic v bezdisjunktovém fragmentu logiky Λ. Analogický výsledek byl formulován v (Ciardelli & Roelofsen, 2011) pro specifický případ $g(KL) = InkL$. Tento fakt koresponduje se základní myšlenkou inkvizitivní sémantiky, že větné významy mohou být identifikovány s antiřetězci množin možných světů, tj. s antiřetězci klasických významů.

`Věta 13.4.15` *$Prop(F_A, g(\Lambda))$ je izomorfní s $Prop(F^*_A, \Lambda)^a$.*

`Důkaz:` Nechť $O = Prop(F_A, g(\Lambda))$ a $P = Prop(F^*_A, \Lambda)$. Chceme ukázat, že O je izomorfní s P^a. Díky větě 13.4.6 víme, že P je identické s $Prop(F^*_A, g(\Lambda))$. Aplikujeme-li lemma 13.4.8, můžeme usoudit, že pro každou formuli $\varphi \in F_A$ existují formule $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F^*_A$, které neobsahují disjunkci a pro které platí

$$[\varphi]^{F_A}_{g(\Lambda)} = [\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_n]^{F_A}_{g(\Lambda)}.$$

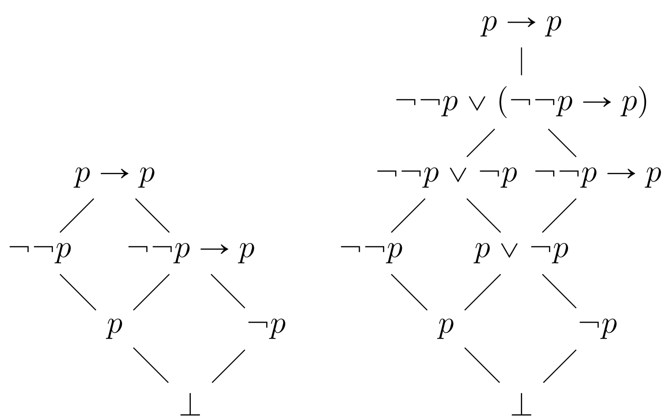
Navíc můžeme předpokládat, že pokud $i \neq j$, tak $\alpha_i \rightarrow \alpha_j \notin g(\Lambda)$. Z toho plyne, že množina

$$\{[\alpha_1]^{F_A}_{g(\Lambda)}, \dots, [\alpha_n]^{F_A}_{g(\Lambda)}\}$$

je jednoznačně určený konečný antiřetězec v P, který koresponduje s $[\varphi]^{F_A}_{g(\Lambda)}$. Na druhé straně, každý konečný antiřetězec v P jednoznačně určuje nějaký prvek v O. Existuje tedy bijekce mezi O a konečnými antiřetězci v P.

Nyní musíme ukázat, že také částečné uspořádání v O koresponduje s uspořádáním konečných antiřetězců v P. Abychom to nahlédli, stačí si uvědomit, že platí pro každé formule $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots \beta_m$, které neobsahují disjunkci, že $(\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_n) \rightarrow (\beta_1 \vee \dots \vee \beta_m) \in g(\Lambda)$ iff pro každé i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ existuje j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ takové, že $\alpha_i \rightarrow \beta_j \in \Lambda$ (zde využíváme faktu vyjádřeného v lemmatu 13.4.6, že $\alpha_i \rightarrow \beta_j \in \Lambda$ iff $\alpha_i \rightarrow \beta_j \in g(\Lambda)$). `QED`

Obsah předchozí věty ilustrujeme tím, že ji aplikujeme na jednoduchý konkrétní případ, kde logika Λ je intuicionistická logika a množina atomických formulí je $\{p\}$. Diagram vlevo je převzat z (de Lavalette, Hendriks & de Jongh, 2012).



$Prop(F^*_{\{p\}}, IL)$ $\qquad$ $Prop(F_{\{p\}}, g(IL))$

Nyní můžeme aplikovat tzv. Diegův teorém, který říká, že pokud množina atomických formulí A je konečná, pak F^*_A obsahuje pouze konečně mnoho formulí, které jsou v IL po dvojicích neekvivalentní (viz např. Chargov & Zakharyaschev, 1997, str. 146).

Věta 13.4.16 *Nechť Λ je libovolná G-logika. Pokud A je konečná, pak F_A obsahuje pouze konečně mnoho formulí, které jsou v Λ po dvojicích neekvivalentní.*

Důkaz: Tvrzení plyne z věty 13.4.15, Diegova teorému a faktu, že množina antiřetězců v konečné částečně uspořádané množině je konečná. QED

V poslední větě této kapitoly aplikujeme na G-logiky některé další výsledky převzaté z literatury a ukážeme, jak interaguje operátor g s některými dalšími operátory, které jsou zavedeny v následující definici.

Definice 13.4.17 *Nechť Λ je SH-logika.*

$n(\Lambda) = \Lambda + \{\neg\neg p \to p\ ;\ p \text{ je atomická formule}\}$.

$s(\Lambda)$ *je maximální SU-logika obsažená v Λ.*

$r(\Lambda) = IL + N(\Lambda)$, *kde $N(\Lambda)$ je množina formulí z Λ, jejichž každý atom je v rozsahu nějaké negace.*

Ještě definujeme dvě dobře známé SU-logiky: tzv. Medvedevovu logiku konečných problémů (ML) poprvé zavedenou v (Medvedev, 1962) a logiku ND zavedenou a studovanou v (Maksimova, 1986). ML může být definována jako logika kripkovských rámců tvaru $\langle \wp(X) - \{\varnothing\}, \supseteq \rangle$, kde X je nějaká neprázdná konečná množina. ND může být definována jako $IL + \bigcup\{ND_k; k \geqslant 2\}$, kde ND_k je množina všech instancí následujícího schématu:

$$ND_k \;\; (\neg\varphi \to (\neg\psi_1 \vee \ldots \vee \neg\psi_k)) \to ((\neg\varphi \to \neg\psi_1) \vee \ldots \vee (\neg\varphi \to \neg\psi_k)).$$

Nyní ukážeme, že neexistují žádné SU-logiky mezi G-logikami a že funkce n, s, r jsou na množině G-logik konstantní. Také vymezíme přirozené hranice G-logik pomocí aplikace funkcí g, n, s na logiky IL, ML, KL.

`Věta 13.4.18` *Nechť Λ je libovolná SH-logika. Pak platí*

(a) Pokud Λ je konstruktivní SU-logika, tak $g(\Lambda) = g(IL)$.

(b) $g(\Lambda)$ není SU-logika.

(c) $n(g(\Lambda)) = InkL$.

(d) $s(g(\Lambda)) = ML$.

(e) $r(g(\Lambda)) = ND$.

(f) $g(s(g(KL))) \subseteq g(\Lambda) \subseteq g(KL)$.

(g) $g(IL) \subseteq g(\Lambda) \subseteq g(n(g(IL)))$.

(h) $g(ML) \subseteq g(\Lambda) \subseteq n(ML)$.

`Důkaz:` (a) Všechny konstruktivní SU-logiky mají stejný bezdisjunktový fragment. K důkazu této věty viz (Zakharyaschev, 1994). Tento fakt spolu s větou 13.4.9 vedou k závěru, že všechny tyto logiky mají stejnou globální variantu. Jelikož intuicionistická logika je sama konstruktivní SU-logika, globální varianty všech konstruktivních SU-logik jsou identické s globální variantou intuicionistické logiky.

(b) Pro spor předpokládejme, že $g(\Lambda)$ je nějaká SU-logika. Dle lemmatu 13.4.7, $g(\Lambda)$ je konstruktivní. Pak díky (a) musí platit $g(\Lambda) = g(g(\Lambda)) = g(IL)$. Z toho plyne, že $g(IL) = IL{+}H$ je uzavřena na libovolné substituce, což není pravda. Např. $(p \to (q \vee r)) \to ((p \to q) \vee (p \to r)) \in g(IL)$, ale $((q \vee r) \to (q \vee r)) \to (((q \vee r) \to q) \vee ((q \vee r) \to r)) \notin g(IL)$.

(c) V (Ciardelli & Roelofsen, 2011) (teorém 5.1) je dokázáno, že pro libovolnou SU-logiku Λ,

$n(\Lambda) = InkL$ iff $ND \subseteq \Lambda \subseteq ML$.

Konkrétně $n(ND) = InkL$ (což bylo též dokázáno jako důsledek 3.35 v (Ciardelli & Roelofsen, 2011)). Jelikož každá formule tvaru $\neg\varphi$ je Harropova formule, $ND \subseteq g(\Lambda) \subseteq InkL$ pro každou SH-logiku Λ. Z toho plyne, že $InkL = n(ND) \subseteq n(g(\Lambda)) \subseteq n(InkL) = InkL$.

(d) V (Miglioli et al., 1989) byly též studovány logiky $IL{+}H$ a $n(ND)$ (notace se však liší). Bylo zde ukázáno, že $s(IL{+}H) = s(n(ND)) = ML$ (viz teorémy 15 a 18 v (Miglioli et al., 1989)). Jak bylo zmíněno v předchozím odstavci, v (Ciardelli & Roelofsen, 2011) bylo dokázáno, že $n(ND) = InkL$ (nezávisle na (Miglioli et al., 1989) bylo v (Ciardelli & Roelofsen, 2011), teorém 4.4, též dokázáno, že $s(InkL) = ML$). Tedy platí $s(g(IL)) = s(g(CL)) = ML$. Tedy pro každou G-logiku Λ, $s(\Lambda) = ML$.

(e) Pro každou SH-logiku Λ platí $r(\Lambda) = r(n(\Lambda))$ (to je uvedeno v (Miglioli et al., 1989), propozice 7 (c)). Navíc platí $r(n(ND)) = ND$ (viz (Miglioli et al., 1989), důsledky 4, 5). Tedy pro každou SH-logiku Λ, $r(g(\Lambda)) = r(n(g(\Lambda))) = r(InkL) = r(n(ND)) = ND$.

(f) Dle (d) $s(g(CL)) = ML$. ML je konstruktivní SU-logika (viz (Miglioli et al., 1989), teorém 9). Tedy z (a) plyne $g(s(g(CL))) = g(IL)$.

(g) Dle (c) $g(n(g(IL))) = g(InkL) = g(g(CL)) = g(CL)$.

(h) Z (d) a (f), máme $g(ML) \subseteq g(\Lambda)$. V důkazu (c) bylo zmíněno, že $n(ML) = InkL$. Tedy $g(\Lambda) \subseteq n(ML)$. QED

13.5 Shrnutí

V této kapitole jsem studoval matematické vlastnosti topologické sémantiky tvrditelnosti a její vztah ke kripkovské sémantice. Zaměřil jsem se zejména na vztah mezi lokální a globální disjunkcí. Sémantické podmínky pro tyto dva typy disjunkce jsem v této kapitole pojal jako dvě alternativní sémantické podmínky pro jednu spojku ($\vee$) a studoval jsem, k jakým posunům dojde na úrovni logiky, když přejdeme od jedné interpretace k druhé. Logiky založené na sémantice s lokální disjunkcí nazývám lokální logiky a logiky s globální disjunkcí globální logiky. Dokázal jsem, že intuicionistická logika je lokální logikou třídy všech topologických informačních prostorů a zároveň je globální logikou třídy vůbec všech informačních prostorů. Poté jsem zavedl třídu tzv. G-logik. Tato třída představuje zobecnění inkvizitivní logiky, která sama je nejsilnější G-logikou a sdílí s ostatními G-logikami řadu klíčových vlastností. Hlavním výsledkem této kapitoly je obecná syntaktická charakterizace G-logik.

Kapitola 14

Algebraická sémantika tvrditelnosti

Nyní se budu věnovat matematickým vlastnostem algebraické sémantiky tvrditelnosti. Na této úrovni obzvláště vynikne fakt, že sémantika tvrditelnosti představuje svébytný technický aparát, který kombinuje neobvyklým způsobem některé rysy standardní algebraické sémantiky a kripkovské relační sémantiky.[1]

14.1 Algebry informačních stavů

V tomto oddílu zavedu základní pojmy algebraické sémantiky tvrditelnosti. Základní sémantické struktury, se kterými budeme pracovat, označujeme jako algebry informačních stavů.

`Definice 14.1.1` *Algebra informačních stavů je algebraická struktura* $\mathcal{A} = \langle S, +, 0 \rangle$ *(obvykle označovaná jako polosvaz s nulovým prvkem), kde* S *je libovolná neprázdná množina (informačních stavů),* $+$ *je binární operace na množině* S *a* 0 *je prvek množiny* S. *Přitom pro libovolné stavy* a, b, c *jsou splněny následující podmínky:*

$$a + (b + c) = (a + b) + c \qquad \textit{asociativita}$$

$$a + b = b + a \qquad \textit{komutativita}$$

$$a + a = a \qquad \textit{idempotence}$$

$$a + 0 = a \qquad \textit{neutrální prvek}$$

[1] Výsledky uvedené v této kapitole jsou obsaženy zejména v (Punčochář, 2016b,c). Některé úvahy z oddílu 14.5 o modalitách jsou uvedeny též v (Punčochář, 2014c).

Uspořádání $\leqslant$ na množině informačních stavů je definováno následujícím předpisem:

$a \leqslant b$ *právě tehdy, když* $a + b = b$.

V případě, že $a \leqslant b$*, tak říkáme, že stav* a *je podstavem stavu* b.

Nulový prvek algebry $\mathcal{A}$ budeme někdy značit také jako $0_{\mathcal{A}}$. Algebry informačních stavů lze vnímat také jako uspořádané množiny s nejmenším prvkem 0, kde existuje supremum ke každým dvěma prvkům. Vzhledem k algebrám informačních stavů zavádíme standardní terminologii. Podalgebrou algebry informačních stavů $\mathcal{A} = \langle S, +, 0\rangle$ rozumíme každou množinu $X \subseteq S$, která obsahuje nulový prvek 0 a je uzavřená na operaci $+$, tj. požadujeme, aby platilo:

Pokud $a \in X$ a $b \in X$, tak $a + b \in X$.

Dolů uzavřená podmnožina množiny informačních stavů je taková množina $X \subseteq S$, která je uzavřená na podstavy, tj. platí:

Pokud $a \in X$ a $b \leqslant a$, tak $b \in X$.

Na základě těchto pojmů můžeme vymezit pojem ideálu, který definujeme, jak je to pro polosvazy běžné.

`Definice 14.1.2` *Nechť* $\mathcal{A} = \langle S, +, 0\rangle$ *je algebra informačních stavů. Ideálem na* $\mathcal{A}$ *rozumíme každou dolů uzavřenou podalgebru algebry* $\mathcal{A}$*. Množinu všech ideálů na algebře* $\mathcal{A}$ *označujeme jako* $\mathcal{I}(\mathcal{A})$.

Z následujícího pomocného tvrzení je patrné, jak by mohla vypadat alternativní, avšak ekvivalentní definice ideálu.

`Lemma 14.1.3` *Nechť* $\mathcal{A} = \langle S, +, 0\rangle$ *je algebra informačních stavů.* I *je ideálem v* $\mathcal{A}$ *právě tehdy, když* I *je neprázdná podmnožina množiny* S *splňující:*

$a + b \in I$ *iff* $a \in I$ *a* $b \in I$.

Speciální ideály jsou takové, které jsou generované jednotlivými prvky algebry. Je-li a elementem dané algebry, pak tzv. hlavní ideál generovaný prvkem a je definovaný standardním způsobem:

$a^{\downarrow} = \{b; b \leqslant a\}$.

Všechny ideály tvoří na algebře informačních stavů svaz. Obecně je svaz definován jako algebraická struktura tvaru $\langle S, +, \times\rangle$, kde pro $+$ i pro $\times$ platí asociativní a komutativní zákony a navíc platí zákony absorpce:[2]

[2] Zákony idempotence pro $+$ i pro $\times$ jsou důsledkem ostatních zákonů.

$$a + (b \times a) = a \qquad\qquad a \times (b + a) = a$$

Svazové uspořádání může být definováno jako v definici 14.1.1. Alternativně může být také svaz chápán jako uspořádaná množina, kde ke každé dvojici a, b existuje infimum $(a \times b)$ a supremum $(a + b)$.

Ve svazu ideálů dané algebry informačních stavů je svazovým uspořádáním inkluze. To znamená, že pro libovolné ideály I, J existuje nejmenší ideál, který obsahuje I i J (značíme ho $I \oplus J$), a zároveň existuje největší ideál, který je obsažen v I i v J (značíme ho $I \otimes J$). Platí

$$I \oplus J = \{a \in S; \text{pro nějaké } b \in I \text{ a } c \in J \text{ platí } a \leqslant b + c\},$$

$$I \otimes J = I \cap J.$$

Zobecníme-li tato pozorování, zjistíme, že svaz ideálů na $\mathcal{A}$ je úplný, neboť pro libovolnou množinu ideálů X platí, že ideál obsahující všechna a taková, že pro nějaké $I_1, \ldots, I_n \in X$ a nějaké $b_1 \in I_1, \ldots, b_n \in I_n$ platí $a \leqslant b_1 + \ldots + b_n$, představuje supremum a ideál $\bigcap X$ představuje infimum množiny X. Dále platí, že svaz ideálů má nejmenší prvek $\{0\}$ a největší prvek S. Jedná se tedy o ohraničený úplný svaz.

`Definice 14.1.4` *Algebraickým informačním modelem (na $\mathcal{A}$) budeme rozumět libovolnou dvojici $\langle \mathcal{A}, V \rangle$, kde $\mathcal{A}$ je algebra informačních stavů a V je valuace definovaná jako funkce přiřazující každému atomickému výroku nějaký ideál na algebře $\mathcal{A}$.*

Nechť $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, V \rangle$ je algebraický informační model. Pomocí rekurzivních podmínek definujeme relaci tvrditelnosti mezi stavy modelu $\mathcal{M}$ a formulemi jazyka L, který zde chápeme (stejně jako v minulé kapitole) jako vystavěný ze sady atomických formulí At, konstanty $\bot$ a spojek $\rightarrow, \wedge, \vee$.

$a \Vdash_{\mathcal{M}} \bot$ iff $a = 0$.

$a \Vdash_{\mathcal{M}} p$ iff $a \in V(p)$.

$a \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi \wedge \psi$ iff $a \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$ a zároveň $a \Vdash_{\mathcal{M}} \psi$.

$a \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi \vee \psi$ iff pro nějaké b, c: $b \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$, $c \Vdash_{\mathcal{M}} \psi$ a zároveň $b + c = a$.

$a \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi \rightarrow \psi$ iff pro každé $b \leqslant a$, pokud $b \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$, pak $b \Vdash_{\mathcal{M}} \psi$.

`Definice 14.1.5` *Množině těch stavů modelu $\mathcal{M}$, v nichž je tvrditelná formule φ, budeme říkat propozice vyjádřená formulí φ v modelu $\mathcal{M}$, a značíme ji $||\varphi||_{\mathcal{M}}$ (nebude-li hrozit nedorozumění, index $\mathcal{M}$ budeme vynechávat). Tedy*

$$||\varphi||_{\mathcal{M}} = \{a; a \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi\}.$$

Indukcí lze ověřit, že každá formule je tvrditelná ve stavu 0. V libovolném algebraickém informačním modelu tedy každá formule vyjadřuje neprázdnou propozici.

`Definice 14.1.6` *Nechť $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, V \rangle$ je algebraický informační model. Řekneme, že formule φ je perzistentní v $\mathcal{M}$, když $||\varphi||_{\mathcal{M}}$ je dolů uzavřená množina v $\mathcal{A}$. Řekneme, že formule φ je regulární v $\mathcal{M}$, když $||\varphi||_{\mathcal{M}}$ je podalgebra algebry $\mathcal{A}$.*

Tedy ve zkratce můžeme perzistenci a regularitu vidět jako vlastnosti vymezené prostřednictvím podmínek, které jsou vůči sobě inverzní:

Perzistence: Pokud $a + b \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$, pak $a \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$ a zároveň $b \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$.

Regularita: Pokud $a \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$ a zároveň $b \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$, pak $a + b \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$.

`Věta 14.1.7` *Nechť $\mathcal{M}$ je algebraický informační model. Pak pro každou formuli $\varphi \in L$ platí*

(a) Pokud φ neobsahuje disjunkci, pak je perzistentní v $\mathcal{M}$.

(b) Pokud φ neobsahuje implikaci, pak je regulární v $\mathcal{M}$.

`Důkaz:` (a) Dokazujeme indukcí podle složitosti formule. Předpokládejme, že $b \leqslant a$. Atomické formule jsou perzistentní z definice valuace. Nyní předpokládejme, že $a \Vdash_{\mathcal{M}} \bot$. To znamená, že $a = 0$. Z toho pak plyne, že $b = 0$, tj. $b \Vdash_{\mathcal{M}} \bot$. Indukčním předpokladem je, že formule φ, ψ jsou perzistentní. Předpokládejme, že $a \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi \wedge \psi$. Pak $a \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$ a $a \Vdash_{\mathcal{M}} \psi$. Z indukčního předpokladu získáme $b \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$ a $b \Vdash_{\mathcal{M}} \psi$. Tedy $b \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi \wedge \psi$. Nyní předpokládejme, že $a \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi \to \psi$. Vezměme si libovolné c takové, že $c \leqslant b$ a $c \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$. Z tranzitivity uspořádání plyne $c \leqslant a$ a z předpokladu platnosti implikace v a pak získáváme $c \Vdash_{\mathcal{M}} \psi$. Tím jsme dokázali, že $b \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi \to \psi$.

(b) Též postupujeme indukcí podle složitosti formule. Atomické formule jsou regulární z definice valuace. Předpokládejme $a \Vdash_{\mathcal{M}} \bot$ a $b \Vdash_{\mathcal{M}} \bot$. To znamená, že $a = 0$ a $b = 0$. Pak ale $a + b = 0$ a tedy $a + b \Vdash_{\mathcal{M}} \bot$. Indukčním předpokladem je, že formule φ, ψ jsou regulární. Předpokládejme, že $a \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi \wedge \psi$ a $b \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi \wedge \psi$. Tedy $a \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$ a $b \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$, $a \Vdash_{\mathcal{M}} \psi$ a $b \Vdash_{\mathcal{M}} \psi$. Tedy $a + b \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$ a $a + b \Vdash_{\mathcal{M}} \psi$, což vede k požadovanému závěru, že $a + b \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi \wedge \psi$. A konečně předpokládejme $a \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi \vee \psi$ a $b \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi \vee \psi$. To znamená, že existují stavy a_1, a_2 takové, že $a_1 \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$ a $a_2 \Vdash_{\mathcal{M}} \psi$ a $a_1 + a_2 = a$. Dále existují stavy b_1, b_2 takové, že $b_1 \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$ a $b_2 \Vdash_{\mathcal{M}} \psi$ a $b_1 + b_2 = b$. Z indukčního předpokladu pak vyplývá, že $a_1 + b_1 \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$ a $a_2 + b_2 \Vdash_{\mathcal{M}} \psi$. To znamená, že $(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi \vee \psi$. Přitom $(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) = a + b$. `QED`

14.2 Distributivita

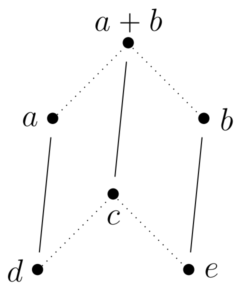
V tomto oddílu se budeme zabývat speciální třídou algeber informačních stavů, které jsou tzv. distributivní. Distributivita se ukáže být klíčovou, neboť garantuje řadu žádoucích vlastností. Překvapivým výsledkem je, že distributivita se vyjeví z jisté perspektivy jako ekvivalentní s regularitou a perzistencí.

Definice 14.2.1 *Řekneme, že algebra informačních stavů $\mathcal{A} = \langle S, +, 0 \rangle$ je distributivní, když v $\mathcal{A}$ platí následující podmínka:*

Pokud $c \leqslant a + b$, pak pro nějaké stavy d, e platí $d \leqslant a$, $e \leqslant b$ a $d + e = c$.

Algebraické informační modely na distributivní algebře informačních stavů budeme též označovat jako distributivní.

Tuto podmínku ilustruje následující obrázek:



Je dobrý důvod, proč se tato podmínka nazývá distributivita. Tento důvod odhalují následující dvě věty, jejichž znění i důkaz lze nalézt v (Grätzer, 2011, str. 167-168).

Věta 14.2.2 *Nechť $\mathcal{A} = \langle S, +, \times \rangle$ je svaz a $\mathcal{A}^* = \langle S, + \rangle$ odpovídající polosvaz. Pro $\mathcal{A}^*$ platí podmínka z definice 14.2.1 právě tehdy, když svaz $\mathcal{A}$ je distributivní v obvyklém slova smyslu, tj. když platí pro libovolné $a, b, c \in S$:*

$$a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c).$$

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c).$$

Pro každou algebru informačních stavů pak platí následující souvislost mezi distributivitou ve smyslu definice 14.2.1 a distributivitou v obvyklém smyslu.

Věta 14.2.3 *Algebra informačních stavů $\langle S, +, 0 \rangle$ je distributivní ve smyslu definice 14.2.1 právě tehdy, když svaz jejích ideálů je distributivní v obvyklém smyslu, tj. když pro libovolné ideály I, J, K platí:*

$$I \oplus (J \otimes K) = (I \oplus J) \otimes (I \oplus K).$$

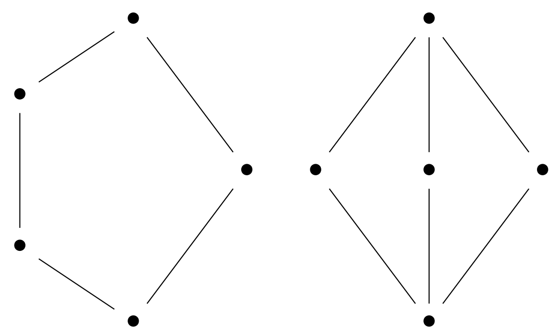
$$I \otimes (J \oplus K) = (I \otimes J) \oplus (I \otimes K).$$

Důležitým pozorováním je, že v distributivních algebrách informačních stavů lze pro libovolné ideály I, J vymezit ideál $I \oplus J$ pomocí této jednoduché podmínky:

$$I \oplus J = \{a + b; a \in I, b \in J\}.$$

Budeme potřebovat ještě jednu známou charakterizaci distributivních svazů.

`Věta 14.2.4` *Svaz je distributivní právě tehdy, když neobsahuje jako svůj podsvaz ani svaz N_5, ani svaz M_3. Tyto svazy jsou vyobrazeny zde:*



N_5 M_3

Důkaz je uveden např. v (Grätzer, 2011, str. 109–110). V předchozím oddílu jsme definovali perzistenci a regularitu jako vlastnosti formulí relativizované vůči jednotlivým algebraickým informačním modelům. Nyní můžeme tyto vlastnosti přetransformovat ve vlastnosti samotných algeber informačních stavů.

`Definice 14.2.5` *Algebra informačních stavů $\mathcal{A}$ je perzistentní (resp. regulární), když každá formule jazyka L je perzistentní (resp. regulární) v každém algebraickém informačním modelu na $\mathcal{A}$.*

Překvapivým výsledkem pak je následující věta.

`Věta 14.2.6` *Nechť $\mathcal{A}$ je algebra informačních stavů. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

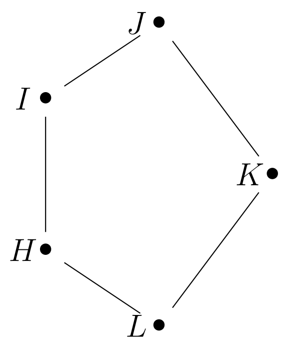
1. *$\mathcal{A}$ je regulární.*

2. *$\mathcal{A}$ je perzistentní.*

3. $\mathcal{A}$ je distributivní.

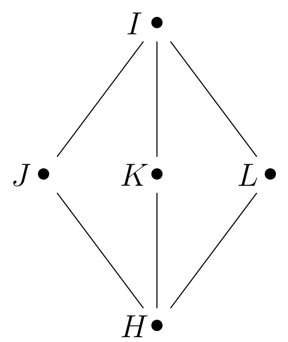
`Důkaz:` Ukážeme implikace (a) od 1. k 3., (b) od 2. k 3., (c) od 3. k 2., (d) od 3. k 1.

(a) Dokážeme, že když $\mathcal{A}$ není distributivní, pak není regulární. Využijeme přitom dva známé výsledky. Jeden jsme zmínili jako větu 14.2.3: Algebra informačních stavů je distributivní právě tehdy, když je svaz jejích ideálů distributivní jakožto svaz. Druhý výsledek jsme uvedli jako větu 14.2.4: Svaz je distributivní právě tehdy, když neobsahuje jako svůj podsvaz ani svaz N_5, ani svaz M_3. Předpokládejme tedy, že algebra informačních stavů $\mathcal{A}$ není distributivní. Pak svaz jejích ideálů není distributivní jakožto svaz a obsahuje tedy podsvaz ideálů tvaru N_5 nebo M_3. Předpokládejme nejprve, že existují ideály H, I, J, K, L, které tvoří ve svazu ideálů podsvaz tvaru N_5:



Definujeme valuaci V tak, že přiřadí atomu p ideál I a atomu q ideál H. Vezměme si libovolný stav a z ideálu I tak, že $a \notin H$. Nechť $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, V \rangle$. Zjevně neplatí $a \Vdash_{\mathcal{M}} p \to q$. Stav a je obsažen v ideálu $J = H \oplus K$. Platí tedy, že existují stavy $b \in H$, $c \in K$ tak, že $a \leqslant b + c$. Neplatí $b + c \Vdash_{\mathcal{M}} p \to q$ (protože tato implikace není tvrditelná v a), přitom však platí $b \Vdash_{\mathcal{M}} p \to q$ i $c \Vdash_{\mathcal{M}} p \to q$.

Nyní předpokládejme, že existují ideály H, I, J, K, L, které tvoří ve svazu ideálů podsvaz tvaru M_3:



Argument je podobný. Definujeme valuaci V tak, že $V(p) = K$ a $V(q) = L$. Nechť $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, V \rangle$. Vezměme si libovolný stav a ideálu K takový, že $a \notin H$. Zjevně neplatí $a \Vdash_{\mathcal{M}} p \to q$. Přitom a je obsažen v $I = J \oplus L$, takže existují stavy $b \in J$, $c \in L$ takové, že $a \leqslant b + c$. Jelikož $p \to q$ není tvrditelná v a, není tvrditelná ani v $b + c$. Přitom je tato implikace tvrditelná v b i v c.

(b) Dokážeme, že pokud není $\mathcal{A}$ distributivní, pak není perzistentní. Předpokládejme, že $\mathcal{A}$ není distributivní. To znamená, že existují stavy a, b, c tak, že $c \leqslant a + b$ a přitom neexistují stavy d, e takové, že $d \leqslant a$, $e \leqslant b$ a $d + e = c$. Definujeme valuaci V tak, že $V(p) = a^{\downarrow}$ a $V(q) = b^{\downarrow}$. Nechť $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, V \rangle$. Zjevně platí $a + b \Vdash_{\mathcal{M}} p \vee q$, avšak neplatí $c \Vdash_{\mathcal{M}} p \vee q$.

(c) Dokážeme, že pokud $\mathcal{A}$ je distributivní, pak je perzistentní. Nechť je dán libovolný informační model $\mathcal{M}$ na distributivní algebře informačních stavů $\mathcal{A}$. Vzhledem k větě 14.1.7 (a) stačí ukázat, že disjunkce zachovává perzistenci. Předpokládejme pro nějaký stav a, že $a \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi \vee \psi$. Existují tedy stavy b, c takové, že $b \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$, $c \Vdash_{\mathcal{M}} \psi$ a $b+c = a$. Nechť $d \leqslant a$. Z distributivity platí, že existují stavy e, f takové, že $e \leqslant b$, $f \leqslant c$ a $e + f = d$. Pro formule φ, ψ předpokládáme perzistenci, tj. platí $e \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$ a $f \Vdash_{\mathcal{M}} \psi$. Tím získáváme, co potřebujeme, totiž že $d \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi \vee \psi$.

(d) Dokážeme, že pokud $\mathcal{A}$ je distributivní, pak je regulární. Nechť je dán libovolný informační model $\mathcal{M}$ na distributivní algebře informačních stavů $\mathcal{A}$. Vzhledem k větě 14.1.7 (b) stačí ukázat, že implikace zachovává regularitu. Předpokládejme pro nějaké stavy a, b, že $a \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi \to \psi$ a $b \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi \to \psi$. Vezměme si libovolný stav $c \leqslant a + b$ takový, že $c \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$. Z distributivity plyne, že existují stavy d, e takové, že $d \leqslant a$, $e \leqslant b$ a $d + e = c$. V předchozím odstavci jsme dokázali, že distributivita zajišťuje perzistenci. Tedy $d \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$ a $e \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$. Pak také $d \Vdash_{\mathcal{M}} \psi$ a $e \Vdash_{\mathcal{M}} \psi$. S užitím předpokladu regularity pak můžeme odvodit $c \Vdash_{\mathcal{M}} \psi$. Celkově jsme tedy zdůvodnili, co bylo potřeba, totiž, že $a + b \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi \to \psi$. QED

Bezprostředním důsledkem předchozí věty je tvrzení, že v distributivních informačních modelech všechny formule vyjadřují ideály.

Věta 14.2.7 *Nechť $\mathcal{M}$ je informační model na distributivní algebře informačních stavů $\mathcal{A}$ a φ je libovolná formule z L. Pak $||\varphi||_{\mathcal{M}}$ je ideál na $\mathcal{A}$.*

14.3 AST a Heytingovy algebry

Nyní budeme zkoumat vztahy mezi algebraickou sémantikou tvrditelnosti a standardní algebraickou sémantikou pro intuicionistickou logiku. Ukazuje se, že zde vyvstávají velmi silné souvislosti. Pro účel tohoto zkoumání zopakuji některé základní pojmy zavedené v oddílu 9.5. Heytingova algebra je definována jako svaz s nulovým prvkem a relativním pseudokomplementem. (Z toho plyne, že příslušný svaz musí být distributivní.) Valuace V v dané Heytingově algebře $\mathcal{H} = \langle S, +, \times, \Rightarrow, 0\rangle$ je funkce přiřazující každému atomickému výroku nějaký prvek množiny S. Toto přiřazení lze rozšířit na celý jazyk L pomocí následujících podmínek:

$$V(\bot) = 0,$$

$$V(\varphi \wedge \psi) = V(\varphi) \times V(\psi),$$

$$V(\varphi \vee \psi) = V(\varphi) + V(\psi),$$

$$V(\varphi \to \psi) = V(\varphi) \Rightarrow V(\psi).$$

`Definice 14.3.1` *Nechť $\mathcal{H}$ je Heytingova algebra a V valuace ve smyslu algebraické sémantiky. Dvojici $\langle \mathcal{H}, V\rangle$ budeme nazývat algebraickým modelem.*

Každá Heytingova algebra $\mathcal{H}$ má nejvyšší prvek $1_{\mathcal{H}}$, který lze vymezit např. jako $0_{\mathcal{H}} \Rightarrow 0_{\mathcal{H}}$. Srovnávat z logického hlediska informační a algebraické modely nám pomůže následující definice.

`Definice 14.3.2` *Nechť $\mathcal{M}$ je informační model a $\mathcal{N}$ algebraický model. Řekneme, že modely $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ jsou ekvivalentní, když určují stejnou množinu platných formulí, tj. když platí, že formule je tvrditelná ve všech stavech modelu $\mathcal{M}$ právě tehdy, když je jí v modelu $\mathcal{N}$ přiřazen nejvyšší prvek* 1.

Již jsme zmínili, že je-li algebra informačních stavů distributivní, pak je distributivní též algebra jejích ideálů. Pro dané idály I, J zvažme množinu ideálů

$$X = \{K; I \otimes K \subseteq J\}.$$

Jelikož je algebra ideálů úplná, existuje ideál H, který je supremem množiny X. Lze snadno ověřit, že tento ideál je obsažen v množině X a je to tedy největší ideál tohoto druhu. Jinými slovy: pro každé dva ideály I, J existuje jejich relativní pseudokomplement, který budeme značit $I \rhd J$. Tedy pro každou distributivní algebru informačních stavů $\mathcal{A}$ platí, že algebru jejích ideálů můžeme vidět jako Heytingovu algebru:

$$\mathcal{H}_{\mathcal{A}} = \langle \mathcal{I}(\mathcal{A}), \oplus, \otimes, \rhd, \{0_{\mathcal{A}}\}\rangle.$$

Svazovým uspořádáním v této algebře je inkluze. Ukazuje se, že pokud je algebra informačních stavů distributivní, pak jsou v ní algebry propozic algebrami ideálů.

`Věta 14.3.3` *Nechť $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, V\rangle$ je distributivní algebraický informační model. Vzhledem k $\mathcal{M}$ platí:*

(a) $||\bot|| = \{0_{\mathcal{A}}\}$.

(b) $||\varphi \wedge \psi|| = ||\varphi|| \otimes ||\psi||$,

(c) $||\varphi \vee \psi|| = ||\varphi|| \oplus ||\psi||$,

(d) $||\varphi \to \psi|| = ||\varphi|| \rhd ||\psi||$.

`Důkaz:` (a) Je zjevné, že formule $\bot$ je tvrditelná pouze ve stavu $0_{\mathcal{A}}$.

(b) $||\varphi \wedge \psi|| = \{a; a \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi \wedge \psi\} = \{a; a \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi, a \Vdash_{\mathcal{M}} \psi\} = \{a; a \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi\} \cap \{a; a \Vdash_{\mathcal{M}} \psi\} = ||\varphi|| \cap ||\psi|| = ||\varphi|| \otimes ||\psi||$.

(c) $||\varphi \vee \psi|| = \{a; \text{existuje } b, c \text{ tak, že } b \in ||\varphi||, c \in ||\psi||, b + c = a\} = \{b + c; b \in ||\varphi||, c \in ||\psi||\} = ||\varphi|| \oplus ||\psi||$.

(d) Již víme, že $||\varphi \to \psi||$ je ideál. Musíme ověřit, že to je největší ideál I takový, že $||\varphi|| \cap I \subseteq ||\psi||$. Nechť tedy $I = ||\varphi \to \psi||$. Nejprve ověříme, že skutečně $||\varphi|| \cap I \subseteq ||\psi||$. Nechť $a \in ||\varphi|| \cap I$. To znamená, že v a je tvrditelné φ a zároveň $\varphi \to \psi$. Sémantická podmínka pro implikaci a reflexivita uspořádání vede k závěru, že v a je tvrditelná formule ψ, tj. $a \in ||\psi||$. Nyní předpokládejme, že pro nějaký ideál H platí $||\varphi|| \cap H \subseteq ||\psi||$. Chceme ukázat, že $H \subseteq I$. Nechť $a \in H$, $b \leqslant a$ a v b je tvrditelná formule φ. To znamená, že $b \in ||\varphi|| \cap H$, a tedy i $b \in ||\psi||$. Tedy v a je tvrditelné $\varphi \to \psi$, což vede k závěru, že $a \in I$. `QED`

Věta 14.3.3 ukazuje, jak lze k libovolnému distributivnímu informačnímu modelu najít ekvivalentní algebraický model. Nechť $\mathcal{A}$ je algebra informačních stavů a V valuace v této algebře ve smyslu sémantiky tvrditelnosti. Potom V je též valuace v algebře $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ ve smyslu algebraické sémantiky. Pro libovolný informační model $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, V \rangle$ můžeme definovat algebraický model $\mathcal{N}_{\mathcal{M}} = \langle \mathcal{H}_{\mathcal{A}}, V \rangle$. Jako přímý důsledek věty 14.3.3 získáváme větu následující.

`Věta 14.3.4` *Předpokládejme, že $\mathcal{M}$ je distributivní informační model. Pak jsou modely $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}_{\mathcal{M}}$ ekvivalentní.*

Nyní se budeme zabývat otázkou, jak k libovolnému algebraickému modelu najít ekvivalentní informační model. Ukážeme postupně tři konstrukce splňující tento úkol. První z těchto konstrukcí je velmi přímočará. V podstatě nemusíme vůbec měnit strukturu.

Nechť $\mathcal{H} = \langle S, +, \times, \Rightarrow, 0 \rangle$ je Heytingova algebra. K ní můžeme vzít algebru informačních stavů $\mathcal{A}_{\mathcal{H}} = \langle S, +, 0 \rangle$. Jedná se tedy v podstatě o stejnou strukturu, v níž jen ignorujeme operace $\times$ a $\Rightarrow$. Nechť V je valuace v $\mathcal{H}$ ve smyslu algebraické sémantiky. K ní definujeme valuaci $V^{\downarrow}$ v $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ ve smyslu sémantiky tvrditelnosti. Pro libovolný atom p nechť platí:

$$V^{\downarrow}(p) = V(p)^{\downarrow}.$$

Atomu p je tedy přiřazen hlavní ideál generovaný prvkem $V(p)$. Algebraickému modelu $\mathcal{N} = \langle \mathcal{H}, V \rangle$ přiřadíme model $\mathcal{M}^1_{\mathcal{N}} = \left\langle \mathcal{A}_{\mathcal{H}}, V^{\downarrow} \right\rangle$.

`Věta 14.3.5` *Nechť $\mathcal{N}$ je algebraický model. Pro libovolný prvek a tohoto modelu a libovolnou formuli φ platí*

$$a \Vdash \varphi \text{ v } \mathcal{M}^1_{\mathcal{N}} \text{ iff } a \leqslant V(\varphi) \text{ v } \mathcal{N}.$$

`Důkaz:` Budeme postupovat indukcí podle složitosti formule. Pro atomické formule platí tvrzení z definice valuace. Budeme v tomto důkazu předpokládat, že $\Vdash$ je relací tvrditelnosti pro model $\mathcal{M}^1_{\mathcal{N}}$ a pro libovolnou formuli φ je $V(\varphi)$ hodnotou formule φ v modelu $\mathcal{N}$. Pro konstantu $\perp$ platí: $a \Vdash \perp$ iff $a = 0$ iff $a \leqslant V(\perp)$. Indukčním předpokladem je, že tvrzení platí pro formule φ, ψ. Nejprve zvážíme případ konjunkce. Následující tvrzení jsou pak ekvivalentní:

1. $a \Vdash \varphi \wedge \psi$.
2. $a \Vdash \varphi$ a zároveň $a \Vdash \psi$.
3. $a \leqslant V(\varphi)$ a zároveň $a \leqslant V(\psi)$.
4. $a \leqslant V(\varphi) \times V(\psi)$.
5. $a \leqslant V(\varphi \wedge \psi)$.

Nyní uvažujme případ disjunkce. Opět lze sledovat řetězec ekvivalencí:

1. $a \Vdash \varphi \vee \psi$.
2. existují stavy b, c tak, že $b \Vdash \varphi$, $c \Vdash \psi$ a $b + c = a$.
3. existují stavy b, c tak, že $b \leqslant V(\varphi)$, $c \leqslant V(\psi)$ a $b + c = a$.
4. $a \leqslant V(\varphi) + V(\psi)$.
5. $a \leqslant V(\varphi \vee \psi)$.

Podrobněji zdůvodníme implikaci směřující od čtvrtého ke třetímu tvrzení. Nechť $a \leqslant V(\varphi) + V(\psi)$. Definujeme

$$b = a \times V(\varphi)$$

$$c = a \times V(\psi)$$

Pak platí $b \leqslant V(\varphi)$, $c \leqslant V(\psi)$ a navíc

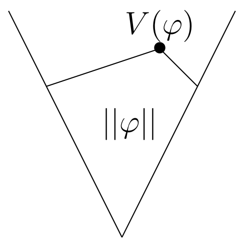
$$b + c = (a \times V(\varphi)) + (a \times V(\psi)) = a \times (V(\varphi) + V(\psi)) = a.$$

V případě implikace můžeme sledovat tento řetěz ekvivalentních tvrzení:

1. $a \Vdash \varphi \to \psi$.
2. pro každé $b \leqslant a$, jestliže $b \Vdash \varphi$, tak $b \Vdash \psi$.
3. pro každé $b \leqslant a$, jestliže $b \leqslant V(\varphi)$, tak $b \leqslant V(\psi)$.
4. $a \times V(\varphi) \leqslant V(\psi)$.
5. $a \leqslant V(\varphi) \Rightarrow V(\psi)$.
6. $a \leqslant V(\varphi \to \psi)$.

Zdůvodníme podrobněji ekvivalenci mezi třetím a čtvrtým tvrzením. Předpokládejme nejprve, že platí třetí tvrzení. Jelikož platí $a \times V(\varphi) \leqslant V(\varphi)$, platí i $a \times V(\varphi) \leqslant V(\psi)$. Nyní předpokládejme, že platí čtvrté tvrzení. Každé $b \leqslant a$, pro které též platí $b \leqslant V(\varphi)$ splňuje $b \leqslant a \times V(\varphi)$, a tedy i $b \leqslant V(\psi)$. QED

Obsah předchozí věty můžeme ilustrovat pomocí jednoduchého obrázku. Propozice vyjádřená formulí φ v $\mathcal{M}^1_{\mathcal{N}}$ je hlavní ideál generovaný hodnotou formule φ v $\mathcal{N}$.



Jako přímý důsledek dostáváme následující větu.

Věta 14.3.6 *Modely $\mathcal{N}$ a $\mathcal{M}^1_{\mathcal{N}}$ jsou ekvivalentní.*

Alternativně můžeme ekvivalentní informační model vystavět z tzv. filtrů na dané Heytingově algebře.

Definice 14.3.7 *Nechť $\mathcal{H} = \langle S, +, \times, \Rightarrow, 0 \rangle$ je Heytingova algebra. Filtrem na $\mathcal{H}$ je každá množina $F \subseteq S$, pro kterou platí:*

(a) $1_{\mathcal{H}} \in F$.

(b) Pokud $a \in F$ *a zároveň* $a \leqslant b$*, tak* $b \in F$.

(c) Pokud $a \in F$ *a zároveň* $b \in F$*, tak* $a \times b \in F$.

Filtrem je tedy každá neprázdná horní podmnožina množiny S*, která je uzavřena na operaci* $\times$*. Množinu všech filtrů na* $\mathcal{H}$ *budeme značit* $\mathcal{F}(\mathcal{H})$.

Nechť $\mathcal{H} = \langle S, +, \times, \Rightarrow, 0\rangle$ je Heytingova algebra a V valuace v této algebře. K algebraickému modelu $\mathcal{N} = \langle \mathcal{H}, V\rangle$ definujeme model

$$\mathcal{M}^2_{\mathcal{N}} = \left\langle \mathcal{A}^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}, V^+ \right\rangle,$$

kde

$$\mathcal{A}^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}} = \langle \mathcal{F}(\mathcal{H}), \cap, S\rangle,$$

$$V^+(p) = \{F \in \mathcal{F}(\mathcal{H}); V(p) \in F\}.$$

Pro takto definovaný model platí následující věta.

`Věta 14.3.8` *Nechť* $\mathcal{N}$ *je algebraický model. Pro libovolný filtr* F *tohoto modelu a libovolnou formuli* φ *platí:*

$$F \Vdash \varphi \text{ v } \mathcal{M}^2_{\mathcal{N}} \text{ iff } V(\varphi) \in F \text{ vzhledem k } \mathcal{N}.$$

`Důkaz:` Toto tvrzení dokážeme indukcí podle složitosti formule. Předpokládejme, že relace $\Vdash$ je relativizována vůči modelu $\mathcal{M}^2_{\mathcal{N}}$. Případ atomických formulí platí z definice valuace V^+. Pro konstantu sporu $\perp$ platí:

$$F \Vdash \perp \text{ iff } F = S \text{ iff } 0 \in F \text{ iff } V(\perp) \in F.$$

Indukčním předpokladem je, že naše tvrzení platí pro formule φ a ψ. Pro konjunkci pak platí ekvivalence mezi následujícími tvrzeními:

1. $F \Vdash \varphi \wedge \psi$.

2. $F \Vdash \varphi$ a $F \Vdash \psi$.

3. $V(\varphi) \in F$ a $V(\psi) \in F$.

4. $V(\varphi) \times V(\psi) \in F$.

5. $V(\varphi \wedge \psi) \in F$.

Pro disjunkci platí ekvivalence mezi následujícími tvrzeními:

1. $F \Vdash \varphi \vee \psi$.

2. existují filtry G, H takové, že $G \Vdash \varphi, H \Vdash \psi$ a $G \cap H = F$.

3. existují filtry G, H takové, že $V(\varphi) \in G, V(\psi) \in H$ a $G \cap H = F$.

4. $V(\varphi) + V(\psi) \in F$.

5. $V(\varphi \vee \psi) \in F$.

Zde je třeba zdůvodnit implikace od čtvrtého tvrzení k třetímu tvrzení. Předpokládejme tedy, že

$$V(\varphi) + V(\psi) \in F.$$

Definujeme dvě množiny:

$$G = \{a \in S; \text{existuje } b \in F \text{ tak, že } b \times V(\varphi) \leqslant a\},$$

$$H = \{a \in S; \text{existuje } b \in F \text{ tak, že } b \times V(\psi) \leqslant a\}.$$

Nejprve je třeba ověřit, že se jedná o filtry. Jistě platí, že prvek $1_{\mathcal{H}}$ je obsažen v G i v H. Také zjevně platí, že G i H jsou nahoru uzavřené množiny. Ověříme pro množinu G, že je uzavřena na operaci $\times$. Pro množinu H lze formulovat analogický argument. Předpokládejme tedy, že $a \in G$ a $b \in G$. To znamená, že existují prvky $c, d \in F$ takové, že $c \times V(\varphi) \leqslant a$ a $d \times V(\varphi) \leqslant b$. Tedy $(c \times d) \times V(\varphi) \leqslant a \times b$. Jelikož $c \times d \in F$, tak $a \times b \in G$.

Množiny G, H jsou tedy filtry a navíc jistě platí, že $V(\varphi) \in G, V(\psi) \in H$. Musíme ještě dokázat, že $G \cap H = F$. Je zjevné, že $F \subseteq G \cap H$. Zbývá dokázat, že též $G \cap H \subseteq F$. Nechť tedy $a \in G \cap H$. To znamená, že existují prvky $b, c \in F$ takové, že $b \times V(\varphi) \leqslant a$ a $c \times V(\psi) \leqslant a$. Tedy i $(b \times V(\varphi)) + (c \times V(\psi)) \leqslant a$. Přitom platí:

$$(b \times V(\varphi)) + (c \times V(\psi)) = (b + c) \times (b + V(\psi)) \times (V(\varphi) + c) \times (V(\varphi) + V(\psi)).$$

Každý člen tohoto „součinu“ je v F (zde jsme využili předpoklad, že $V(\varphi) + V(\psi) \in F$). Jelikož je F filtr, platí $(b \times V(\varphi)) + (c \times V(\psi)) \in F$, a tedy i $a \in F$. Pro implikaci platí ekvivalence mezi následujícími tvrzeními:

1. $F \Vdash \varphi \to \psi$.

2. Pro každý filtr $G \supseteq F$ platí, že pokud $G \Vdash \varphi$, tak $G \Vdash \psi$.

3. Pro každý filtr $G \supseteq F$ platí, že pokud $V(\varphi) \in G$, tak $V(\psi) \in G$.

4. $V(\varphi) \Rightarrow V(\psi) \in F$.

5. $V(\varphi \to \psi) \in F$.

Musíme zdůvodnit ekvivalenci třetího a čtvrtého tvrzení. Implikace směřující od čtvrtého k třetímu tvrzení je jednoduchá. Předpokládejme $V(\varphi) \Rightarrow V(\psi) \in F$. Nechť $G \supseteq F$ je filtr, pro který platí $V(\varphi) \in G$. Jelikož platí i $V(\varphi) \Rightarrow V(\psi) \in G$, musí platit $V(\varphi) \times (V(\varphi) \Rightarrow V(\psi)) \in G$. Z toho plyne $V(\psi) \in G$.

Nyní předpokládejme, že pro každý filtr $G \supseteq F$ platí, že pokud $V(\varphi) \in G$, tak $V(\psi) \in G$. Využijeme opět množinu

$$G = \{a \in S; \text{existuje } b \in F \text{ tak, že } b \times V(\varphi) \leqslant a\}.$$

Výše jsme dokázali, že se jedná o filtr. Přitom platí $F \subseteq G$ a $V(\varphi) \in G$. Tedy na základě předpokladu získáváme $V(\psi) \in G$. Podle definice množiny G to znamená, že existuje prvek $b \in F$ takový, že $b \times V(\varphi) \leqslant V(\psi)$. Tedy $b \leqslant V(\varphi) \Rightarrow V(\psi)$. Tedy $V(\varphi) \Rightarrow V(\psi) \in F$. QED

Jako přímočarý důsledek získáváme tvrzení, že informační model vystavěný z filtrů daného algebraického modelu je s tímto algebraickým modelem ekvivalentní.

Věta 14.3.9 *Modely $\mathcal{N}$ a $\mathcal{M}^2_{\mathcal{N}}$ jsou ekvivalentní.*

Ukážeme ještě třetí konstrukci ekvivalentního informačního modelu, který je tentokrát vystavěn z ideálů. Nechť $\mathcal{N} = \langle \mathcal{H}, V \rangle$ je algebraický model. K Heytingově algebře $\mathcal{H} = \langle S, +, \times, \Rightarrow, 0 \rangle$ definujeme algebru informačních stavů $\mathcal{A}^{\mathcal{I}}_{\mathcal{H}} = \langle \mathcal{I}(\mathcal{A}_{\mathcal{H}}), \oplus, \{0_{\mathcal{H}}\} \rangle$, tedy algebru vystavěnou z ideálů na $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$. K modelu $\mathcal{N}$ pak definujeme model

$$\mathcal{M}^3_{\mathcal{N}} = \left\langle \mathcal{A}^{\mathcal{I}}_{\mathcal{H}}, V^* \right\rangle, \text{ kde } V^*(p) = \{I \in \mathcal{I}_{\mathcal{S}}; I \subseteq V(p)^{\downarrow}\}.$$

Pak platí následující vztah.

Věta 14.3.10 *Nechť $\mathcal{N}$ je algebraický model. Pro libovolný ideál I tohoto modelu a libovolnou formuli φ platí*

$$I \Vdash \varphi \text{ v } \mathcal{M}^3_{\mathcal{N}} \text{ iff pro každé } a \in I \text{ platí, že } a \leqslant V(\varphi) \text{ v } \mathcal{N}.$$

Důkaz: Vyjdeme z algebraického modelu $\mathcal{N}$. Z toho můžeme zkonstruovat ekvivalentní informační model $\mathcal{M}^1_{\mathcal{N}}$. K tomuto modelu můžeme dále zkonstruovat nový ekvivalentní algebraický model $\mathcal{L} = \mathcal{N}_{\mathcal{M}^1_{\mathcal{N}}}$. Model $\mathcal{M}^3_{\mathcal{N}}$ je pak identický s modelem $\mathcal{M}^1_{\mathcal{L}}$. Přitom dle věty 14.3.5 je $||\varphi||$ v $\mathcal{M}^1_{\mathcal{N}}$ totožné s $V(\varphi)^{\downarrow}$. V $\mathcal{M}^3_{\mathcal{N}}$ je tedy φ tvrditelné v těch ideálech, které jsou podmnožinami ideálu $V(\varphi)^{\downarrow}$. QED

Předchozí věta vede též k následujícímu výsledku.

Věta 14.3.11 *Modely $\mathcal{N}$ a $\mathcal{M}^3_{\mathcal{N}}$ jsou ekvivalentní.*

14.4 Kanonické modely

V tomto oddílu aplikujeme výsledky předchozího oddílu na třídu SH-logik, které jsme zavedli v oddílu 13.4. Připomeňme tedy, že SH-logika je každá množina formulí, která obsahuje všechny intuicionisticky platné formule, jen klasicky platné formule, a která je uzavřena na modus ponens a harropovské substituce. Na základě výsledků předchozího oddílu popíšeme tři alternativní obecné konstrukce kanonických modelů umožňující dokazovat úplnost systémů pro SH-logiky. Nejprve však uvedu samostatně základní výsledek úplnosti pro intuicionistickou logiku.

`Věta 14.4.1` *Intuicionistická logika je logikou všech distributivních informačních modelů.*

`Důkaz:` Intuicionistická logika je korektní vůči všem distributivním informačním modelům. To plyne např. z věty 14.3.3 a ze známého faktu, že z hlediska algebraické sémantiky je intuicionistická logika logikou všech Heytingových algeber (viz např. Chargov & Zakharyaschev, 1997, str. 206). Co se úplnosti týče, pro libovolnou formuli φ, která není platná z hlediska intuicionistické logiky, můžeme najít algebraický model, kde není hodnotou formule φ nejvyšší prvek algebry. Z věty 14.3.5 pak plyne, že φ neplatí v třídě všech distributivních informačních modelů. `QED`

Nadále budeme pracovat s libovolnými SH-logikami. Nechť je tedy Λ libovolná SH-logika. Podobně jako v předchozí kapitole definujeme k Λ množinu propozic

$$E_\Lambda = \{[\varphi]\,; \varphi \in L\},$$

kde $[\varphi]$ značí množinu formulí Λ-ekvivalentních s φ, tj. $\psi \in [\varphi]$ iff $\psi \to \varphi \in \Lambda$ a $\varphi \to \psi \in \Lambda$. Lindenbaumova algebra logiky Λ (zkráceně $\mathcal{LA}_\Lambda$) je následující algebraická struktura:

$$\mathcal{LA}_\Lambda = \langle E_\Lambda, +, \times, \Rightarrow, 0\rangle,$$

kde $+, \times, \Rightarrow$ jsou binární operace na E_Λ definované pomocí těchto předpisů:

$$[\varphi] + [\psi] = [\varphi \vee \psi],$$

$$[\varphi] \times [\psi] = [\varphi \wedge \psi],$$

$$[\varphi] \Rightarrow [\psi] = [\varphi \to \psi].$$

0 je nulový prvek této algebraické struktury definovaný takto:

$$0 = [\bot].$$

Zavedeme též distributivní algebru informačních stavů korespondující s Lindenbaumovou algebrou logiky Λ:

$$\mathcal{A}_\Lambda = \langle E_\Lambda, +, 0 \rangle.$$

Nechť V_Λ je valuace v $\mathcal{A}_\Lambda$ definovaná takto:

$$[\varphi] \in V_\Lambda(p) \text{ iff } \varphi \to p \in \Lambda.$$

Pak logice Λ můžeme přiřadit distributivní informační model $\mathcal{M}_\Lambda = \langle \mathcal{A}_\Lambda, V_\Lambda \rangle$. Tento model je tedy vytvořen z Lindenbaumovy algebry a odpovídá naší první konstrukci informačního modelu z daného algebraického modelu.

`Věta 14.4.2` *Pro libovolnou SH-logiku Λ a libovolné formule $\varphi, \psi \in L$ platí*

$$[\psi] \Vdash \varphi \textit{ v } \mathcal{M}_\Lambda \textit{ iff } \psi \to \varphi \in \Lambda.$$

`Důkaz:` Tato věta je důsledkem věty 14.3.5. `QED`

Přímým důsledkem předchozí věty pak je tento výsledek:

`Věta 14.4.3` *Nechť Λ je libovolná SH-logika. Pak $\varphi \in \Lambda$ právě tehdy, když φ je tvrditelná v každém stavu modelu $\mathcal{M}_\Lambda$.*

Lindenbaumova algebra logiky Λ, resp. jí odpovídající model $\mathcal{M}_\Lambda$, může tedy posloužit jako kanonický model logiky Λ. Kanonické modely se standardně používají k důkazům úplnosti logických systémů. Model nějaké logiky lze považovat za její kanonický model, když je daná formule platná z hlediska této logiky právě tehdy, když je platná v tomto modelu. Daná logika je úplná vůči každé třídě modelů, vůči níž je korektní a která obsahuje kanonický model této logiky. Z předchozí věty vidíme, že v sémantice tvrditelnosti lze použít k důkazům úplnosti stejnou algebraickou strukturu, jaká se používá ve standardní algebraické sémantice. Můžeme však konstruovat také kanonické modely způsobem, který se více podobá standardní konstrukci kanonického modelu v běžné relační sémantice.

`Definice 14.4.4` *Nechť Λ je libovolná SH-logika. Teorií logiky Λ rozumíme každou množinu formulí Γ, která je deduktivně uzavřená vzhledem k Λ, tj. pokud $\varphi \in \Gamma$ a zároveň $\varphi \to \psi \in \Lambda$, pak $\psi \in \Gamma$.*

Relativně vzhledem k Λ definujeme model $\mathcal{M}^{\mathcal{F}}_\Lambda = \left\langle \mathcal{A}^{\mathcal{F}}_\Lambda, V \right\rangle$, kde $\mathcal{A}^{\mathcal{F}}_\Lambda = \langle S, +, 0 \rangle$ je algebra informačních stavů taková, že:

Stavy z S jsou teorie logiky Λ,

$\Gamma + \Delta$ je průnik teorií Γ a Δ,

0 je množina všech formulí jazyka L.

Valuaci V definujeme předpisem

$\Gamma \in V(p)$ iff $p \in \Gamma$.

Algebra informačních stavů $\mathcal{A}_\Lambda^\mathcal{F}$ je distributivní. Distributivita zde odpovídá podmínce, která je vyjádřena v následující větě, jejíž důkaz vynecháváme.

`Věta 14.4.5` *Nechť* Σ, Γ, Δ *jsou teorie dané SH-logiky* Λ. *Pak platí, že pokud teorie* Σ *obsahuje průnik* $\Gamma \cap \Delta$, *pak* Γ *je obsažena v nějaké teorii* Π *a* Δ *v nějaké teorii* Ξ, *a přitom platí, že* Σ *je průnikem* $\Pi \cap \Xi$.

Teorie dané SH-logiky Λ odpovídají filtrům na její Lindenbaumově algebře. Vezmeme-li totiž sjednocení množiny ekvivalenčních tříd Lindenbaumovy algebry, která tvoří filtr na této algebře, dostaneme teorii a každou teorii lze získat tímto způsobem. Jelikož Lindenbaumova algebra každé SH-logiky je Heytingova algebra, je konstrukce modelu $\mathcal{M}_\Lambda^\mathcal{F}$ speciálním případem naší druhé konstrukce informačního modelu z výchozího algebraického modelu.[3] Jako důsledek věty 14.3.8 získáváme tedy následující výsledky.

`Věta 14.4.6` *Nechť* Λ *je libovolná SH-logika. Pak pro každou teorii* Γ *logiky* Λ *a každou formuli* φ *jazyka* L *platí*

$\Gamma \Vdash \varphi$ *v* $\mathcal{M}_\Lambda^\mathcal{F}$ *iff* $\varphi \in \Gamma$.

`Věta 14.4.7` *Nechť* Λ *je libovolná SH-logika. Pak* $\varphi \in \Lambda$ *právě tehdy, když* φ *je tvrditelná v každém stavu modelu* $\mathcal{M}_\Lambda^\mathcal{F}$.

Model vystavěný z teorií lze tedy také považovat za kanonický model. I třetí konstrukci informačního modelu z kanonického modelu lze použít k vytváření kanonických modelů – nyní ovšem poměrně atypických. Místo teorií vystavíme model ze zvláštních množin formulí, kterým budeme říkat antiteorie. Než však tento pojem zavedeme, podívejme se podrobněji, v jakém smyslu teorie odpovídají filtrům. Platí, že daná množina formulí Γ je teorií SH-logiky Λ právě tehdy, když jsou splněny následující tři podmínky:

[3] Toto tvrzení není zcela přesné, jelikož teorie není přímo totožná s filtrem, nýbrž se sjednocením jeho prvků, protože Lindenbaumova algebra není vystavěna z formulí, ale z ekvivalenčních tříd. Tento drobný technický zádrhel však nepředstavuje žádnou zásadní překážku. Problém by byl např. zcela odstraněn, kdybychom teorie definovali jako specifické množiny ekvivalenčních tříd. Volím však jednodušší verzi, kdy teorie jsou jednoduše množiny formulí. Lze lehce nahlédnout, že se tím nic podstatného nemění.

1. $\top \in \Gamma$.[4]

2. Jestliže $\varphi \in \Gamma$ a $\varphi \to \psi \in \Lambda$, pak $\psi \in \Gamma$.

3. Jestliže $\varphi \in \Gamma$ a $\psi \in \Gamma$, pak $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$.

Ve stejném smyslu, v jakém teorie odpovídají filtrům, budou antiteorie odpovídat ideálům na Lindenbaumově algebře.

`Definice 14.4.8` *Nechť Λ je libovolná SH-logika. Antiteorií logiky Λ rozumíme každou množinu formulí Γ, která splňuje následující tři podmínky:*

1. $\bot \in \Gamma$.

2. Jestliže $\varphi \in \Gamma$ a $\psi \to \varphi \in \Lambda$, pak $\psi \in \Gamma$.

3. Jestliže $\varphi \in \Gamma$ a $\psi \in \Gamma$, pak $\varphi \vee \psi \in \Gamma$.

Vzhledem k Λ můžeme dále definovat model $\mathcal{M}_\Lambda^\mathcal{I} = \langle \mathcal{A}_\Lambda^\mathcal{I}, V \rangle$, kde $\mathcal{A}_\Lambda^\mathcal{I} = \langle S, +, 0 \rangle$ je algebra informačních stavů taková, že:

Stavy z S jsou antiteorie logiky Λ,

$\Gamma + \Delta$ je nejmenší antiteorie, která je nadmnožinou Γ i Δ,

0 je množina všech kontradikcí logiky Λ, tj. $0 = \{\varphi; \varphi \to \bot \in \Lambda\}$.

Povšimněme si, že antiteorie $\Gamma + \Delta$ vždy existuje – antiteorie jsou uzavřeny na průniky, takže $\Gamma + \Delta$ můžeme získat jako průnik všech antiteorií obsahujících jako svoje podmnožiny jak Γ, tak i Δ. Přitom každé dvě antiteorie jsou obsaženy minimálně v množině všech formulí, která je také antiteorií. Množina všech kontradikcí je skutečně antiteorií. Valuaci V definujeme předpisem

$\Gamma \in V(p)$ iff pro každé $\varphi \in \Gamma$ platí $\varphi \to p \in \Lambda$.

Konstrukce $\mathcal{M}_\Lambda^\mathcal{I}$ odpovídá naší třetí konstrukci informačního modelu z daného algebraického modelu. Jako důsledek věty 14.3.10 tak získáváme následující výsledky.

`Věta 14.4.9` *Nechť Λ je libovolná SH-logika. Pak pro každou antiteorii Γ logiky Λ a každou formuli φ jazyka L platí*

$\Gamma \Vdash \varphi$ *v* $\mathcal{M}_\Lambda^\mathcal{I}$ *iff pro každé $\psi \in \Gamma$ platí $\psi \to \varphi \in \Lambda$.*

`Věta 14.4.10` *Nechť Λ je libovolná SH-logika. Pak $\varphi \in \Lambda$ právě tehdy, když φ je tvrditelná v každém stavu modelu $\mathcal{M}_\Lambda^\mathcal{I}$.*

Model $\mathcal{M}_\Lambda^\mathcal{I}$ tedy představuje třetí potenciální kanonický model logiky Λ.

[4]Definujeme formuli $\top$ jako $\bot \to \bot$.

14.5 Modality v AST

Jednou z řady předností sémantiky tvrditelnosti je jednoduchost, s jakou lze v tomto rámci zavést modalitu nutnosti. Stačí rozšířit pojem algebry informačních stavů a informačního modelu pomocí jednoho unárního operátoru.

Definice 14.5.1 *Modální algebra informačních stavů je každá algebraická struktura tvaru* $\langle S, +, 0, g\rangle$*, kde* $\langle S, +, 0\rangle$ *je algebra informačních stavů a* g *je funkce z* S *do* S *splňující tyto podmínky:*

$$g(0) = 0,$$

$$g(a + b) = g(a) + g(b).$$

Modální informační model je každá dvojice $\langle \mathcal{A}, V\rangle$*, kde* $\mathcal{A} = \langle S, +, 0, g\rangle$ *je modální algebra informačních stavů a* V *je valuace definovaná jako dříve, tj. funkce přiřazující každému atomu nějaký ideál na algebře informačních stavů* $\langle S, +, 0\rangle$*.*

Nejprve si uvědomme, že operátor g splňující výše uvedené podmínky je tzv. monotonní.

Lemma 14.5.2 *V libovolné modální algebře informačních stavů s operátorem* g *platí:*

Jestliže $a \leqslant b$*, pak* $g(a) \leqslant g(b)$*.*

Důkaz: Předpokládejme $a \leqslant b$, tj. $a + b = b$. Tedy $g(a + b) = g(b)$. Z toho plyne $g(a) + g(b) = g(b)$, což znamená, že $g(a) \leqslant g(b)$. QED

Jazyk L obohacený o modální operátor $\Box$ budeme nyní značit jako mL. Algebraickou sémantiku tvrditelnosti můžeme rozšířit tak, aby byla zohledněna i tato modalita. Stačí přidat k sémantickým podmínkám pro $\bot, \wedge, \vee, \rightarrow$ podmínku následující:

$$a \Vdash_{\mathcal{M}} \Box\varphi \text{ iff } g(a) \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi.$$

První pozorování týkající se obecné algebraické sémantiky tvrditelnosti s modalitou nutnosti ukazují, že operátor $\Box$ zachovává základní sémantické vlastnosti.

Věta 14.5.3 *Operátor* $\Box$ *zachovává tvrditelnost v nulovém stavu. Každá formule jazyka* mL *je tedy tvrditelná v nulovém stavu.*

`Důkaz:` Nechť $\mathcal{M}$ je modální informační model a 0 jeho nulový prvek. Předpokládejme, že platí $0 \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$. Jelikož $g(0) = 0$, tak platí i $g(0) \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$. To znamená, že $0 \Vdash_{\mathcal{M}} \Box\varphi$. Operátor $\Box$ tedy zachovává platnost v nulovém stavu.

`QED`

`Věta 14.5.4` *Operátor $\Box$ zachovává v každém (tedy i nedistributivním) modálním informačním modelu jak regularitu, tak i perzistenci.*

`Důkaz:` Nechť $\mathcal{M}$ je modální informační model. Předpokládejme, že φ je regulární v $\mathcal{M}$. Nechť $a \Vdash_{\mathcal{M}} \Box\varphi$ a $b \Vdash_{\mathcal{M}} \Box\varphi$. Tedy $g(a) \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$ a $g(b) \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$. Jelikož je φ regulární, platí $g(a) + g(b) \Vdash \varphi$. Pro operátor g platí, že $g(a) + g(b) = g(a + b)$. Tedy $g(a + b) \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$. Z toho plyne $a + b \Vdash_{\mathcal{M}} \Box\varphi$.

Nyní dokážeme, že $\Box$ zachovává perzistenci. Předpokládejme, že φ je perzistentní. Předpokládejme dále, že $a \Vdash_{\mathcal{M}} \Box\varphi$ a $b \leqslant a$. Z toho plyne, že $g(a) \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$ a $g(b) \leqslant g(a)$ (lemma 14.5.2). Jelikož je φ perzistentní, platí $g(b) \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$, a tedy $b \Vdash_{\mathcal{M}} \Box\varphi$. `QED`

Z předchozí věty a z věty 14.2.7 plyne následující věta.

`Věta 14.5.5` *V každém distributivním modálním informačním modelu vyjadřuje každá formule jazyka mL nějaký ideál. Přitom platí*

$$||\Box\varphi|| = g^{-1}(||\varphi||).$$

Algebra propozic je tedy i pro modální jazyk algebrou ideálů, kde formuli $\Box\varphi$ je přiřazen ideál, který získáme jako vzor ideálu přiřazeného formuli φ. Prozkoumejme nyní vztah modální sémantiky tvrditelnosti k standardní algebraické sémantice pro superintuicionistické modální logiky. V té se pracuje s Heytingovými algebrami obohacenými o dodatečný operátor. Těmto algebraickým strukturám budeme říkat modální Heytingovy algebry.

`Definice 14.5.6` *Modální Heytingova algebra je algebraická struktura tvaru $\mathcal{H} = \langle S, +, \times, \Rightarrow, 0, f\rangle$, kde $\langle S, +, \times, \Rightarrow, 0\rangle$ je Heytingova algebra a f je dodatečný operátor, který splňuje následující podmínky:*

$$f(1_{\mathcal{H}}) = 1_{\mathcal{H}},$$

$$f(a \times b) = f(a) \times f(b).$$

Modální algebraický model je dvojice $\langle \mathcal{H}, V\rangle$, kde $\mathcal{H}$ je modální Heytingova algebra a V je valuace ve smyslu algebraické sémantiky.

Poznamenejme, že operátor f musí být monotonní, což lze ověřit analogicky jako v případě operátoru g modálních algeber informačních stavů. Standardní algebraická sémantika pro modální logiky je rozšířením algebraické sémantiky o sémantickou podmínku:

$$V(\Box\varphi) = f(V(\varphi)).$$

Logikou všech modálních algebraických modelů je intuicionistická verze logiky K, kterou získáme tak, že k pravidlům intuicionistické logiky přidáme pravidla charakterizující chování operátoru $\Box$.

$$\vdash \varphi/\Box\varphi \tag{NEC}$$

$$\Box(\varphi \to \psi)/\Box\varphi \to \Box\psi \tag{K}$$

První z těchto pravidel funguje tak, že $\Box\varphi$ můžeme odvodit pouze z takového výskytu φ, který je odvozen z prázdné množiny předpokladů. Označme tuto logiku jako IK. Každé rozšíření této logiky – tj. každou takovou množinu formulí, která je konzistentní, obsahuje všechny formule z IK, je uzavřena na modus ponens a libovolné substituce – můžeme označit jako MSU-logiku (modální superintuicionistickou logiku). Třída MSU-logik tedy obsahuje také všechny tzv. *normální modální logiky* (viz Chargov & Zakharyaschev, 1997).

Nyní si povšimněme, že operace g^{-1} na ideálech dané modální algebry informačních stavů splňuje podmínky kladené na dodatečnou operaci modálních Heytingových algeber. Platí totiž jednak

$g^{-1}(S) = S$, kde S je množina všech stavů dané algebry.

Dále platí

$$g^{-1}(I \otimes J) = g^{-1}(I \cap J) = \{a; g(a) \in I \cap J\} =$$

$$= \{a; g(a) \in I\} \cap \{a; g(a) \in J\} = g^{-1}(I) \cap g^{-1}(J) = g^{-1}(I) \otimes g^{-1}(J).$$

To znamená, že pro danou distributivní modální algebru informačních stavů $\mathcal{A} = \langle S, +, 0, g\rangle$ je $\mathcal{H} = \langle \mathcal{I}(\mathcal{A}), \oplus, \otimes, \rhd, \{0\}, g^{-1}\rangle$ modální Heytingovou algebrou. Z těchto pozorování např. plyne, že logika IK je korektní vůči třídě všech distributivních modálních algeber informačních stavů. (Ovšem korektnost by šla jednoduše ověřit také přímo ověřením jednotlivých pravidel.)

Nyní opět vyvstává otázka, jak k danému modálnímu algebraickému modelu zkonstruovat ekvivalentní modální distributivní informační model. Ukazuje se, že můžeme rozšířit metodu konstrukce modelu z filtrů. Nechť $\mathcal{H} = \langle S, +, \times, \Rightarrow, 0, f\rangle$ je modální Heytingova algebra a V valuace v této algebře. K modálnímu algebraickému modelu $\mathcal{N} = \langle \mathcal{H}, V\rangle$ definujeme model $\mathcal{M}^2_{\mathcal{N}} = \left\langle \mathcal{A}^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}, V^+\right\rangle$ jako výše, s tím, že nyní $\mathcal{A}^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}} = \langle \mathcal{F}(\mathcal{H}), \cap, S, g\rangle$ a g je funkce definovaná takto:

$$g(F) = \{a; f(a) \in F\}.$$

Jinak vyjádřeno, platí:

$$a \in g(F) \text{ iff } f(a) \in F.$$

$\mathcal{A}^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}$ je skutečně modální algebrou informačních stavů. Nejprve ověřme, že $g(F)$ je skutečně filtr. Jelikož F je filtr, tak platí $1 \in F$. Přitom $f(1) = 1$, tedy $f(1) \in F$ a $1 \in g(F)$. Předpokládejme, že $a \in g(F)$ a $a \leqslant b$. To znamená, že $f(a) \in F$ a $f(a) \leqslant f(b)$. Z toho plyne, že $f(b) \in F$, a tedy $b \in g(F)$. Konečně předpokládejme, že $a, b \in g(F)$, tj. $f(a), f(b) \in F$. Jelikož F je filtr, platí $f(a) \times f(b) \in F$. Přitom $f(a) \times f(b) = f(a \times b)$. Tedy $f(a \times b) \in F$, tj. $a \times b \in g(F)$. Ověříme dále, že operátor g splňuje požadované podmínky. Jednak platí:

$$g(S) = \{a; f(a) \in S\} = S.$$

Dále pak platí:

$$g(F \cap G) = \{a; f(a) \in F \cap G\} =$$

$$= \{a; f(a) \in F\} \cap \{a; f(a) \in G\} = g(F) \cap g(G).$$

Ověřili jsme, že tato konstrukce vede skutečně k modálnímu informačnímu modelu, který je navíc distributivní. (Zde využíváme známý fakt, že algebra filtrů na Heytingově algebře je distributivní.) Pro tuto konstrukci platí rozšíření věty 14.3.8. Platí tedy:

$$F \Vdash \varphi \text{ v } \mathcal{M}^2_{\mathcal{N}} \text{ iff } V(\varphi) \in F \text{ vzhledem k } \mathcal{N}.$$

Indukční kroky, které jsou uvedeny v důkazu věty 14.3.8 musíme rozšířit o jeden další krok pro modalitu nutnosti. Platí:

$$F \Vdash \Box\varphi \text{ iff } g(F) \Vdash \varphi \text{ iff } V(\varphi) \in g(F) \text{ iff } f(V(\varphi)) \in F \text{ iff } V(\Box\varphi) \in F.$$

Modely $\mathcal{N}$ a $\mathcal{M}^2_{\mathcal{N}}$ jsou tedy ekvivalentní také vzhledem k modálnímu jazyku, čímž získáváme rozšíření platnosti věty 14.3.9. Z toho plyne následující věta.

`Věta 14.5.7` *IK je logikou všech distributivních modálních informačních modelů.*

`Důkaz:` Vyjdeme z toho, že IK je logikou modálních algebraických modelů. Je-li $\varphi \in IK$, pak musí platit v každém distributivním modálním informačním modelu, protože algebra jeho propozic je algebrou ideálů a tedy modálním algebraickým modelem. Pokud $\varphi \notin IK$, pak φ neplatí v nějakém modálním algebraickém modelu $\mathcal{N}$. Neplatí tedy ani v distributivním modálním informačním modelu $\mathcal{M}^2_{\mathcal{N}}$. `QED`

Právě představenou konstrukci lze opět proměnit na konstrukci kanonických modelů pro libovolnou MSU-logiku. Nechť Λ je libovolná MSU-logika. Kanonický model opět vystavíme z teorií logiky Λ. Operátor g na teoriích je vymezen takto:

$$g(\Gamma) = \{\varphi; \Box\varphi \in \Gamma\}.$$

Pravidla (K) a (NEC) zajišťují, že $g(\Gamma)$ je teorie. Takto zkonstruovaný model lze skutečně použít jako kanonický model pro libovolnou MSU-logiku, a tedy i pro libovolnou normální modální logiku. Získáváme tím nový nástroj ke studiu nejznámější třídy modálních logik.

Pozoruhodné souvislosti se objevují, když se pokusíme rozšířit na modální jazyk také naši první metodu konstrukce ekvivalentního informačního modelu. Ukazuje se, že zde není tak přímočará korespondence jako v případě nemodálního jazyka. Přesto zde stále existuje jistý významný vztah, který lze popsat pomocí pojmu reziduované funkce, který přebírám z (Blyth, 2005).

`Definice 14.5.8` *Nechť f, g jsou dvě monotonní funkce na uspořádané množině $\langle S, \leqslant \rangle$. Řekneme, že funkce f je reziduum funkce g, platí-li tato podmínka:*

$$g(a) \leqslant b \textit{ iff } a \leqslant f(b).$$

Říkáme, že operátory g, f tvoří reziduovaný pár.

První metodu konstrukce lze rozšířit v souladu s následující větou.

`Věta 14.5.9` *Nechť $\mathcal{N} = \langle \mathcal{H}, V \rangle$ je modální algebraický model, kde $\mathcal{H} = \langle S, +, \times, \Rightarrow, 0, f \rangle$. Nechť $\mathcal{M}^1_{\mathcal{N}} = \left\langle \mathcal{A}_{\mathcal{H}}, V^{\downarrow} \right\rangle$ je modální informační model, kde $\mathcal{A}_{\mathcal{H}} = \langle S, +, 0, g \rangle$ je modální algebra informačních stavů taková, že operátor f je reziduum operátoru g. $V^{\downarrow}$ (jako výše) přiřazuje atomu p hlavní ideál generovaný prvkem $V(p)$. Pak platí pro libovolný prvek $a \in S$ a libovolnou formuli φ jazyka mL, že*

$$a \Vdash \varphi \textit{ v } \mathcal{M}^1_{\mathcal{N}} \textit{ iff } a \leqslant V(\varphi) \textit{ v } \mathcal{N}.$$

`Důkaz:` Tato věta je takovým rozšířením věty 14.3.5, že nyní bere v potaz i modalitu $\Box$. K důkazu věty 14.3.5 je tedy nyní třeba doplnit indukční krok pro $\Box$. Ten vypadá takto:

$$a \Vdash \Box\varphi \text{ iff } g(a) \Vdash \varphi \text{ iff } g(a) \leqslant V(\varphi) \text{ iff } a \leqslant f(V(\varphi)) \text{ iff } a \leqslant V(\Box\varphi).$$

`QED`

V kontrastu s nemodálním případem tedy nestačí vzít stejnou strukturu. Musíme uvažovat strukturu jinou, s jiným dodatečným operátorem. Tyto struktury jsou však příbuzné, protože operátory tvoří reziduovaný pár.

14.6 Globální disjunkce v AST

Zatímco v kapitole 13 jsme uvažovali podmínky pro lokální a globální disjunkci jako alternativní podmínky pro spojku $\vee$, budeme nyní tyto podmínky studovat jako dvě různé podmínky pro dvě různé spojky. Přidáme tedy do jazyka nový výraz, binární spojku $\sqcup$. Jazyk $mL^{\sqcup}$ je jazyk vystavěný z atomických formulí a konstanty $\perp$ pomocí logických operátorů $\Box, \wedge, \rightarrow, \vee, \sqcup$. Pro globální disjunkci $\sqcup$ zavádíme tuto podmínku:

$$a \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi \sqcup \psi \text{ iff } a \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi \text{ nebo } a \Vdash_{\mathcal{M}} \psi.$$

Podobně jako jsme to již viděli v topologické sémantice tvrditelnosti, globální disjunkce generuje neregulární formule – a to i v případě, že daný informační model je distributivní. Uvažujme např. jakýkoli modální informační model $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, V \rangle$, který má dva nesrovnatelné stavy a, b. Neplatí tedy ani $a \leqslant b$, ani $b \leqslant a$. Předpokládejme, že $V(p) = a^{\downarrow}$ a $V(q) = b^{\downarrow}$. Pak platí, že $a \Vdash_{\mathcal{M}} p \sqcup q$ a $b \Vdash_{\mathcal{M}} p \sqcup q$, ale neplatí $a + b \Vdash_{\mathcal{M}} p \sqcup q$. Ovšem každá formule jazyka $mL^{\sqcup}$ je perzistentní v každém distributivním modálním informačním modelu.

Nyní popíšeme kalkul pro jazyk $mL^{\sqcup}$, který je úplný vzhledem k třídě všech distributivních modálních informačních modelů. Pravidla kalkulu rozdělíme do dvou skupin. V první skupině jsou pravidla, která sama o sobě lze chápat jako pravidla modální intuicionistické logiky, kde ovšem disjunkcí je naše globální disjunkce.

spor	EFQ: $\perp/\varphi$	
konjunkce	EK: (i) $\varphi \wedge \psi/\varphi$ (ii) $\varphi \wedge \psi/\psi$	IK: $\varphi, \psi/\varphi \wedge \psi$
disjunkce$_g$	ED$_g$: $\varphi \sqcup \psi, [\varphi/\chi], [\psi/\chi]/\chi$	ID$_g$: (i) $\varphi/\varphi \sqcup \psi$, (ii) $\psi/\varphi \sqcup \psi$
implikace	EI: $\varphi \rightarrow \psi, \varphi/\psi$	II: $[\varphi/\psi]/\varphi \rightarrow \psi$
nutnost	NEC: $\vdash \varphi/\Box\varphi$	K: $\Box(\varphi \rightarrow \psi)/\Box\varphi \rightarrow \Box\psi$

V druhé skupině jsou jednak pravidla charakterizující chování lokální disjunkce. Dále pak sem spadají pravidla zajišťující distribuci operátorů $\vee, \rightarrow, \Box$ přes globální disjunkci $\sqcup$. Podstatné je omezení u dvou z těchto pravidel indikované přítomností proměnné α. Tato proměnná probíhá pouze přes formule, v nichž se nevyskytuje spojka $\sqcup$, tedy přes formule jazyka mL.

ID$_l$: (i) $\varphi/\varphi \vee \psi$, (ii) $\psi/\varphi \vee \psi$
DH: $\varphi \vee \psi, [\varphi/\chi], [\psi/\vartheta]/\chi \vee \vartheta$
DK: $\varphi \vee \psi/\psi \vee \varphi$
DR: $\alpha \vee \alpha/\alpha$
DD: $\varphi \vee (\psi \sqcup \chi)/(\varphi \vee \psi) \sqcup (\varphi \vee \chi)$
DI: $\alpha \to (\varphi \sqcup \psi)/(\alpha \to \varphi) \sqcup (\alpha \to \psi)$
DN: $\Box(\varphi \sqcup \psi)/\Box\varphi \sqcup \Box\psi$

V tomto oddílu bude zápis $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$ značit, že formule ψ je odvoditelná z formulí $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ v právě zavedeném kalkulu. Zápis $\varphi \dashv\vdash \psi$ značí, že $\varphi \vdash \psi$ a $\psi \vdash \varphi$. Nebudeme ověřovat korektnost všech pravidel – zaměříme se pouze na nějaká vybraná pravidla. Podívejme se nejprve na pravidlo DH. Abychom ověřili jeho korektnost, předpokládejme, že a je stav libovolného distributivního modálního informačního modelu $\mathcal{M}$, vzhledem k němuž platí:

(a) $a \Vdash \varphi \vee \psi$,

(b) pro každé $b \leqslant a$, pokud $b \Vdash \varphi$, tak $b \Vdash \chi$,

(c) pro každé $b \leqslant a$, pokud $b \Vdash \psi$, tak $b \Vdash \vartheta$.

Z (a) plyne, že existují stavy b, c takové, že $b \Vdash \varphi$, $c \Vdash \psi$ a $b + c = a$. Pak z (b) a (c) plyne, že $b \Vdash \chi$ a $c \Vdash \vartheta$. Tedy $a \Vdash \chi \vee \vartheta$. Tím je korektnost pravidla DH ověřena.

Korektnost pravidla DR omezeného na formule neobsahující $\sqcup$ vyjadřuje fakt, že tyto formule jsou regulární. Z toho je také zjevné, proč toto pravidlo nelze formulovat obecně pro všechny formule jazyka $mL^{\sqcup}$. Korektnost pravidla DI se zdůvodní podobně jako ve větě 13.4.9 minulé kapitoly. Při důkazu se opět musí využít fakt, že α je regulární.

Podívejme se ještě na pravidlo DD. Předpokládejme, že a je stav libovolného distributivního modálního informačního modelu $\mathcal{M}$, vzhledem k němuž platí $a \Vdash \varphi \vee (\psi \sqcup \chi)$. To znamená, že existují stavy b, c takové, že $b \Vdash \varphi$, $c \Vdash \psi \sqcup \chi$ a $b + c = a$. Platí tedy $c \Vdash \psi$ nebo $c \Vdash \chi$. V prvním případě platí $a \Vdash \varphi \vee \psi$, v druhém $a \Vdash \varphi \vee \chi$. Tedy $a \Vdash (\varphi \vee \psi) \sqcup (\varphi \vee \chi)$.

`Věta 14.6.1` *Je-li formule α jazyka mL platná v logice IK, pak $\vdash \alpha$.*

`Důkaz:` Téměř všechna pravidla logiky IK máme k dispozici. Jediné, co je třeba ověřit, je to, že lze v právě zavedeném kalkulu nasimulovat eliminační pravidlo pro disjunkci $\vee$, omezíme-li se na jazyk mL. Tak tomu skutečně je, jak nyní ukážeme. Nechť α, β, γ jsou formule jazyka mL. Předpokládejme tedy, že se nacházíme v nějaké fázi nějakého odvození a přitom

(a) máme k dispozici formuli $\alpha \vee \beta$,

(b) z hypotetického předpokladu α jsme schopni odvodit γ,

(c) z hypotetického předpokladu β jsme schopni odvodit γ.

Pak můžeme odvodit formuli γ následujícím způsobem:

1	$\alpha \vee \beta$	předpoklad (a)
2	$\mid\ \alpha$	hyp
3	$\mid\ \gamma$	2, předpoklad (b)
4	$\mid\ \beta$	hyp
5	$\mid\ \gamma$	4, předpoklad (c)
6	$\gamma \vee \gamma$	1-5, DH
7	γ	6, DR

QED

Důkaz úplnosti využívá stejnou techniku, se kterou jsme se již setkali v minulé kapitole při důkazu věty 13.4.9. Opět směřujeme k tomu, že každou formuli lze přetransformovat na ekvivalentní formuli, která má tvar globální disjunkce formulí, které již globální disjunkci neobsahují. Postup bude tedy analogický jako v minulé kapitole – jen je potřeba zohlednit navíc přítomnost lokální disjunkce a operátoru nutnosti. Budeme potřebovat následující lemma, které ukazuje, že v kalkulu lze odvodit i opačný směr distributivních zákonů.

Lemma 14.6.2 *Platí následující vztahy:*

(a) $\varphi \wedge (\psi \sqcup \chi) \dashv\vdash (\varphi \wedge \psi) \sqcup (\varphi \wedge \chi)$.

(b) $\varphi \vee (\psi \sqcup \chi) \dashv\vdash (\varphi \vee \psi) \sqcup (\varphi \vee \chi)$.

(c) $\alpha \rightarrow (\varphi \sqcup \psi) \dashv\vdash (\alpha \rightarrow \varphi) \sqcup (\alpha \rightarrow \psi)$.

(d) $\Box(\varphi \sqcup \psi) \dashv\vdash \Box\varphi \sqcup \Box\psi$.

Důkaz: Vztah (a) se dokáže standardním způsobem pomocí introdukčních a eliminačních pravidel pro spojky $\wedge, \sqcup$. Co se vztahů (b), (c), (d) týče, je třeba dokázat vždy směr zprava doleva. Směry zleva doprava jsou zajištěny přímo pravidly DD, DI a DN.

(b) Lze konstruovat toto odvození:

1	$(\varphi \vee \psi) \sqcup (\varphi \vee \chi)$	předpoklad
2	$\quad \varphi \vee \psi$	hyp
3	$\quad\quad \varphi$	hyp
4	$\quad\quad \psi$	hyp
5	$\quad\quad \psi \sqcup \chi$	4 ID_g
6	$\quad \varphi \vee (\psi \sqcup \chi)$	2-5 DH
7	$\quad \varphi \vee \chi$	hyp
8	$\quad\quad \varphi$	hyp
9	$\quad\quad \chi$	hyp
10	$\quad\quad \psi \sqcup \chi$	9 ID_g
11	$\quad \varphi \vee (\psi \sqcup \chi)$	7-10 DH
12	$\varphi \vee (\psi \sqcup \chi)$	1-11 ED_g

(c) Lze konstruovat toto odvození:

1	$(\alpha \to \varphi) \sqcup (\alpha \to \psi)$	předpoklad
2	$\quad \alpha \to \varphi$	hyp
3	$\quad\quad \alpha$	hyp
4	$\quad\quad \varphi$	2,3 EI
5	$\quad\quad \varphi \sqcup \psi$	4 ID_g
6	$\quad \alpha \to (\varphi \sqcup \psi)$	3-5 II
7	$\quad \alpha \to \psi$	hyp
8	$\quad\quad \alpha$	hyp
9	$\quad\quad \psi$	7,8 EI
10	$\quad\quad \varphi \sqcup \psi$	9 ID_g
11	$\quad \alpha \to (\varphi \sqcup \psi)$	8-10 II
12	$\alpha \to (\varphi \sqcup \psi)$	1-11 ED_g

(d) Lze konstruovat toto odvození:

1	$\mid\ \varphi$	hyp
2	$\mid\ \varphi \sqcup \psi$	1 ID_g
3	$\varphi \to (\varphi \sqcup \psi)$	1-2, II
4	$\Box(\varphi \to (\varphi \sqcup \psi))$	3 NEC
5	$\Box\varphi \to \Box(\varphi \sqcup \psi)$	4 K
6	$\mid\ \psi$	hyp
7	$\mid\ \varphi \sqcup \psi$	6 ID_g
8	$\psi \to (\varphi \sqcup \psi)$	6-7 II
9	$\Box(\psi \to (\varphi \sqcup \psi))$	8 NEC
10	$\Box\psi \to \Box(\varphi \sqcup \psi)$	9 K
11	$\Box\varphi \sqcup \Box\psi$	předpoklad
12	$\mid\ \Box\varphi$	hyp
13	$\mid\ \Box(\varphi \sqcup \psi)$	5,12 EI
14	$\mid\ \Box\psi$	hyp
15	$\mid\ \Box(\varphi \sqcup \psi)$	10,14 EI
16	$\Box(\varphi \sqcup \psi)$	11-15 ED_g

QED

`Lemma 14.6.3` *Pro každou formuli φ jazyka $mL^{\sqcup}$ existují formule $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jazyka mL takové, že $\varphi \dashv\vdash \alpha_1 \sqcup \ldots \sqcup \alpha_n$.*

`Důkaz:` Postupujeme indukcí podle složitosti formule. Důkaz je stejný jako v případě analogického lemmatu 13.4.8 z minulé kapitoly. Případ atomických formulí a konstanty $\perp$ je přímočarý. Indukčním předpokladem je, že tvrzení platí pro dané formule φ, ψ, tj. existují formule $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ a $\beta_1, \ldots, \beta_m$, které neobsahují disjunkci, a přitom

$$\varphi \dashv\vdash \alpha_1 \sqcup \ldots \sqcup \alpha_n,$$

$$\psi \dashv\vdash \beta_1 \sqcup \ldots \sqcup \beta_m.$$

Kroky pro operátory $\sqcup, \wedge, \to$ jsou stejné jako v důkazu lemmatu 13.4.8 (ovšem s rozdílem ve značení globální disjunkce). Je třeba doplnit kroky pro operátory $\Box$ a $\vee$, tj. musíme ukázat, že také pro formule $\Box\varphi$ a $\varphi \vee \psi$ existují dokazatelně ekvivalentní formule tvaru globální disjunkce formulí, které globální disjunkci neobsahují. Díky pravidlu lemmatu 14.6.2 (d) a pravidlu DK jsou následující formule dokazatelně ekvivalentní

$$\Box\varphi,$$

$$\Box(\alpha_1 \sqcup \ldots \sqcup \alpha_n),$$

$$\Box\alpha_1 \sqcup \ldots \sqcup \Box\alpha_n.$$

Díky lemmatu 14.6.2 (b) jsou následující formule dokazatelně ekvivalentní:

$$\varphi \vee \psi,$$

$$(\alpha_1 \sqcup \ldots \sqcup \alpha_n) \vee (\beta_1 \sqcup \ldots \sqcup \beta_m),$$

$$((\alpha_1 \sqcup \ldots \sqcup \alpha_n) \vee \beta_1) \sqcup \ldots \sqcup ((\alpha_1 \sqcup \ldots \sqcup \alpha_n) \vee \beta_m),$$

$$(\beta_1 \vee (\alpha_1 \sqcup \ldots \sqcup \alpha_n)) \sqcup \ldots \sqcup (\beta_m \vee (\alpha_1 \sqcup \ldots \sqcup \alpha_n)),$$

$$\textstyle\bigsqcup_{i=1}^{m} \bigsqcup_{j=1}^{n} (\beta_i \vee \alpha_j).$$

QED

`Lemma 14.6.4` *V každém distributivním modálním informačním modelu vyjadřuje každá formule konečné sjednocení ideálů.*

`Důkaz:` Toto tvrzení je důsledkem předchozího lemmatu a faktu, že každá formule, která neobsahuje $\sqcup$, vyjadřuje ideál. Přitom $||\varphi \sqcup \psi|| = ||\varphi|| \cup ||\psi||$.

QED

Nyní potřebujeme ukázat, že globální disjunkce je konstruktivní v tom smyslu, že je-li nějaká formule tvaru globální disjunkce logicky platná (tj. tvrditelná v každém stavu každého distributivního modálního informačního modelu), tak je logicky pravdivý některý z jejích disjunktů. K tomuto výsledku zavedeme součin dvou modálních informačních modelů.

`Definice 14.6.5` *Nechť* $\mathcal{A}_1 = \langle S_1, +_1, 0_1, g_1 \rangle$ *a* $\mathcal{A}_2 = \langle S_2, +_2, 0_2, g_2 \rangle$ *jsou modální algebry informačních stavů. Součin těchto algeber je modální algebra informačních stavů* $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = \langle S_1 \times S_2, +, 0, g \rangle$, *kde* $S_1 \times S_2$ *je kartézský součin množin* S_1 *a* S_2, *tj. množina uspořádaných dvojic, jejichž první člen je z* S_1 *a druhý z* S_2. *Dále*

$$\langle a, b \rangle + \langle c, d \rangle = \langle a +_1 c, b +_2 d \rangle,$$

$$0 = \langle 0_1, 0_2 \rangle,$$

$$g(\langle a, b \rangle) = \langle g_1(a), g_2(b) \rangle.$$

Nechť V_1 je valuace v $\mathcal{A}_1$ a V_2 valuace v $\mathcal{A}_2$. Definujeme valuaci $V_1 \times V_2$ následujícím předpisem:

$$\langle a, b\rangle \in (V_1 \times V_2)(p) \textit{ iff } a \in V_1(p) \textit{ a zároveň } b \in V_2(p).$$

Nechť $\mathcal{M}_1 = \langle \mathcal{A}_1, V_1\rangle$ a $\mathcal{M}_2 = \langle \mathcal{A}_2, V_2\rangle$. Modální informační model $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 = \langle \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2, V_1 \times V_2\rangle$ nazýváme součin modelů $\mathcal{M}_1$ a $\mathcal{M}_2$.

Lze lehce ověřit, že pokud $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ jsou modální algebry informačních stavů, pak $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ je též modální algebra informačních stavů. Navíc pokud V_1, V_2 jsou valuace, pak $V_1 \times V_2$ je také valuace. Tedy součin modálních informačních modelů je skutečně modální informační model. Lze jednoduše zdůvodnit (důkazy vynecháváme), že součiny modelů mají následující vlastnosti.

`Lemma 14.6.6` *$\langle a, b\rangle \leqslant_{\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2} \langle c, d\rangle$ iff $a \leqslant_{\mathcal{M}_1} c$ a zároveň $b \leqslant_{\mathcal{M}_2} d$.*

`Lemma 14.6.7` *Jsou-li $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ distributivní, pak $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ je distributivní.*

`Lemma 14.6.8` *Pro libovolnou formuli φ jazyka $mL^{\sqcup}$ a stavy a z $\mathcal{M}_1$ a b z $\mathcal{M}_2$ platí:*

$$\langle a, 0_2\rangle \Vdash \varphi \textit{ v } \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \textit{ iff } a \Vdash \varphi \textit{ v } \mathcal{M}_1.$$

$$\langle 0_1, b\rangle \Vdash \varphi \textit{ v } \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \textit{ iff } b \Vdash \varphi \textit{ v } \mathcal{M}_2.$$

Logika nějaké třídy modálních informačních modelů je množina formulí, které platí v každém stavu každého modelu této třídy. Množina formulí Γ je konstruktivní, když platí, že $\varphi \sqcup \psi \in \Gamma$ implikuje $\varphi \in \Gamma$ nebo $\psi \in \Gamma$. Důkaz následující věty je podobný jako důkaz souvisejícího lemmatu 13.4.7 z předchozí kapitoly. Podobá se také konstrukci známé z kripkovské sémantiky.

`Věta 14.6.9` *Pokud je nějaká třída distributivních modálních informačních modelů uzavřena na součiny, pak je její logika konstruktivní.*

`Důkaz:` Předpokládejme, že Γ je logika nějaké třídy distributivních modálních informačních modelů. Předpokládejme dále, že $\varphi \notin \Gamma$ a $\psi \notin \Gamma$. Tedy existují distributivní modální informační modely $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ a stavy a z $\mathcal{M}_1$ a b z $\mathcal{M}_2$ tak, že $a \nVdash_{\mathcal{M}_1} \varphi$ a $b \nVdash_{\mathcal{M}_2} \psi$. Dle lemma 14.6.8 tedy $\langle a, 0_2\rangle \nVdash \varphi$ a $\langle 0_1, b\rangle \nVdash \psi$ v $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$. Díky tomu, že φ i ψ jsou perzistentní v $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ a díky lemmatu 14.6.6 pak dostáváme $\langle a, b\rangle \nVdash \varphi$ a $\langle a, b\rangle \nVdash \psi$ (v $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$). Tedy $\langle a, b\rangle \nVdash \varphi \sqcup \psi$ (v $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$). `QED`

`Věta 14.6.10` *Logika třídy všech distributivních modálních informačních modelů je konstruktivní.*

`Důkaz:` Dle lemmatu 14.6.7 je třída všech distributivních modálních informačních modelů uzavřena na součiny. Dle věty 14.6.9 je tedy její logika konstruktivní. `QED`

Nyní již máme vše připraveno k důkazu úplnosti kalkulu vzhledem k třídě všech distributivních modálních informačních modelů. Zápis $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$ ve formulaci věty tedy znamená, že formule ψ je tvrditelná v každém stavu každého distributivního modálního informačního modelu, ve kterém jsou tvrditelné formule $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

`Věta 14.6.11` $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$ *iff* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$.

`Důkaz:` Je analogický jako důkaz věty 13.4.9. Korektností jsme se již zabývali. Předpokládejme $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$. To znamená, že $\vDash (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \rightarrow \psi$. Označme si tuto formuli jako χ. Dle lemmatu 14.6.3 je χ dokazatelně ekvivalentní s nějakou formulí tvaru $\alpha_1 \sqcup \ldots \sqcup \alpha_n$, kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ neobsahují $\sqcup$. Díky korektnosti můžeme říci, že formule $\alpha_1 \sqcup \ldots \sqcup \alpha_n$ je obsažena v logice třídy všech distributivních modálních informačních modelů. Dle věty 14.6.10 je v této logice obsažena i nějaká formule α_i (kde $1 \leqslant i \leqslant n$). Díky větě 14.6.1 víme, že $\vdash \alpha_i$. Tedy i $\vdash \alpha_1 \sqcup \ldots \sqcup \alpha_n$, a tedy i $\vdash \chi$. Dokázali jsme, že $\vdash (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \rightarrow \psi$. Z toho už lehce plyne $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$. `QED`

14.7 Funkce zachovávající tvrditelnost

V tomto krátkém závěrečném oddílu ukáži, jak lze v algebraické sémantice tvrditelnosti charakterizovat přirozené funkce mezi modely, které zachovávají tvrditelnost a které jsou tak jistou obdobou tzv. p-morfismů známých z kripkovské sémantiky.

`Věta 14.7.1` *Nechť* $\mathcal{M}_1 = \langle \mathcal{A}_1, V_1 \rangle$, $\mathcal{M}_2 = \langle \mathcal{A}_2, V_2 \rangle$ *jsou distributivní modální informační modely a* h *funkce ze stavů algebry* $\mathcal{A}_1$ *do stavů algebry* $\mathcal{A}_2$*, která splňuje následující podmínky:*

(a) $a \in V_1(p)$ *iff* $h(a) \in V_2(p)$,

(b) $h(a) = 0_2$ *iff* $a = 0_1$,

(c) $h(a +_1 b) = h(a) +_2 h(b)$,

(d) $h(g_1(a)) = g_2(h(a))$,

(e) Jestliže $h(a) = b +_2 c$*, tak existují stavy* d, e *z* $\mathcal{M}_1$ *takové, že* $h(d) = b, h(e) = c$ *a* $d +_1 e = a$.

Pak platí pro každý stav a z $\mathcal{A}_1$ a pro každou formuli φ jazyka $mL^{\sqcup}$:

$$a \Vdash \varphi \text{ v } \mathcal{M}_1 \text{ iff } h(a) \Vdash \varphi \text{ v } \mathcal{M}_2.$$

`Důkaz:` Nejprve dokážeme o funkci h dvě pomocná tvrzení:

T1 Jestliže $b \leqslant_1 a$, tak $h(b) \leqslant_2 h(a)$.

T2 Jestliže $b \leqslant_2 h(a)$, tak existuje $c \leqslant_1 a$ tak, že $h(c) = b$.

Tvrzení T1 se dokáže takto: Předpokládejme $b \leqslant_1 a$. Tedy $b +_1 a = a$. Tedy $h(b +_1 a) = h(a)$. Tedy díky podmínce (c) $h(b) +_2 h(a) = h(a)$. Tedy $h(b) \leqslant_2 h(a)$.

Tvrzení T2 se dokáže takto: Předpokládejme $b \leqslant_2 h(a)$, tj. $b +_2 h(a) = h(a)$. Díky podmínce (e) tedy existují stavy d, e z $\mathcal{M}_1$ tak, že $h(d) = b, h(e) = h(a)$ a $d +_1 e = a$. Pokud vezmeme $c = d$, platí požadované $c \leqslant_1 a$ a $h(c) = b$.

Dále postupujeme indukcí podle složitosti formule. Případ atomických formulí je ošetřen podmínkou (a). Co se konstanty $\perp$ týče, tak platí

$$a \Vdash \perp \text{ v } \mathcal{M}_1 \text{ iff } a = 0_1 \text{ iff } h(a) = 0_2 \text{ iff } h(a) \Vdash \perp \text{ v } \mathcal{M}_2.$$

Indukčním předpokladem je, že tvrzení platí pro formule φ, ψ. Dokážeme, že pak platí také pro $\Box\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \to \psi$, $\varphi \vee \psi$ a $\varphi \sqcup \psi$. Co se týče operátoru $\Box$, jsou následující podmínky ekvivalentní:

1. $a \Vdash \Box\varphi$ v $\mathcal{M}_1$,
2. $g_1(a) \Vdash \varphi$ v $\mathcal{M}_1$,
3. $h(g_1(a)) \Vdash \varphi$ v $\mathcal{M}_2$,
4. $g_2(h(a)) \Vdash \varphi$ v $\mathcal{M}_2$,
5. $h(a) \Vdash \Box\varphi$ v $\mathcal{M}_2$.

Nyní zvážíme případ $\wedge$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

1. $a \Vdash \varphi \wedge \psi$ v $\mathcal{M}_1$,
2. $a \Vdash \varphi$ v $\mathcal{M}_1$ a $a \Vdash \psi$ v $\mathcal{M}_1$,
3. $h(a) \Vdash \varphi$ v $\mathcal{M}_2$ a $h(a) \Vdash \psi$ v $\mathcal{M}_2$,
4. $h(a) \Vdash \varphi \wedge \psi$ v $\mathcal{M}_2$.

Nyní zvážíme případ $\to$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

1. $a \Vdash \varphi \to \psi$ v $\mathcal{M}_1$,
2. pro každé $b \leqslant_1 a$, pokud $b \Vdash \varphi$ v $\mathcal{M}_1$, tak $b \Vdash \psi$ v $\mathcal{M}_1$,
3. pro každé $b \leqslant_2 h(a)$, pokud $b \Vdash \varphi$ v $\mathcal{M}_2$, tak $b \Vdash \psi$ v $\mathcal{M}_2$,
4. $h(a) \Vdash \varphi \to \psi$ v $\mathcal{M}_2$.

Dokážeme ekvivalenci mezi druhou a třetí podmínkou. Předpokládejme nejprve, že pro každé $b \leqslant_1 a$, pokud $b \Vdash \varphi$ v $\mathcal{M}_1$, tak $b \Vdash \psi$ v $\mathcal{M}_1$. Předpokládejme dále, že $b \leqslant_2 h(a)$ a $b \Vdash \varphi$ v $\mathcal{M}_2$. Z pomocného tvrzení T2 dostáváme, že existuje $c \leqslant_1 a$ tak, že $h(c) = b$. Tedy díky indukčnímu předpokladu $c \Vdash \varphi$ v $\mathcal{M}_1$. Tedy i $c \Vdash \psi$ v $\mathcal{M}_1$. Tedy $h(c) \Vdash \psi$, tj. $b \Vdash \psi$ v $\mathcal{M}_2$.

Nyní předpokládejme, že pro každé $b \leqslant_2 h(a)$, pokud $b \Vdash \varphi$ v $\mathcal{M}_2$, tak $b \Vdash \psi$ v $\mathcal{M}_2$. Dále předpokládejme, že $b \leqslant_1 a$ a $b \Vdash \varphi$ v $\mathcal{M}_1$. Z pomocného tvrzení T1 získáváme $h(b) \leqslant_2 h(a)$. Díky indukčnímu předpokladu $h(b) \Vdash \varphi$ v $\mathcal{M}_2$. Tedy $h(b) \Vdash \psi$ v $\mathcal{M}_2$. Tedy $b \Vdash \psi$ v $\mathcal{M}_1$. Nyní zvážíme případ $\vee$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

1. $a \Vdash \varphi \vee \psi$ v $\mathcal{M}_1$,
2. existují stavy b, c modelu $\mathcal{M}_1$ tak, že $b \Vdash \varphi$ v $\mathcal{M}_1$, $c \Vdash \psi$ v $\mathcal{M}_1$ a $b +_1 c = a$,
3. existují stavy b, c modelu $\mathcal{M}_1$ tak, že $h(b) \Vdash \varphi$ v $\mathcal{M}_2$, $h(c) \Vdash \psi$ v $\mathcal{M}_2$ a $b +_1 c = a$,
4. existují stavy b, c modelu $\mathcal{M}_2$ tak, že $b \Vdash \varphi$ v $\mathcal{M}_2$, $c \Vdash \psi$ v $\mathcal{M}_2$ a $b +_2 c = h(a)$,
5. $h(a) \Vdash \varphi \vee \psi$ v $\mathcal{M}_2$.

Zdůvodníme ekvivalenci mezi třetí a čtvrtou podmínkou. Krok od třetí podmínky ke čtvrté je zřejmý. Využívá toho, že $h(b +_1 c) = h(b) +_2 h(c)$, což je aplikace podmínky (c) z vymezení funkce h. Krok od čtvrté podmínky ke třetí je přímočarou aplikací podmínky (e) z vymezení funkce h. Případ $\sqcup$ je zcela přímočarý. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

1. $a \Vdash \varphi \sqcup \psi$ v $\mathcal{M}_1$,
2. $a \Vdash \varphi$ v $\mathcal{M}_1$ nebo $a \Vdash \psi$ v $\mathcal{M}_1$,
3. $h(a) \Vdash \varphi$ v $\mathcal{M}_2$ nebo $h(a) \Vdash \psi$ v $\mathcal{M}_2$,
4. $h(a) \Vdash \varphi \sqcup \psi$ v $\mathcal{M}_2$.

QED

14.8 Shrnutí

V této kapitole jsem zkoumal některé matematické vlastnosti algebraické sémantiky tvrditelnosti. Základní sémantické struktury této sémantiky jsou polosvazy s nulovým prvkem. Klíčovou se ukázala být navíc podmínka distributivity, která jakožto vlastnost dané algebry je v jistém smyslu ekvivalentní s regularitou i s perzistencí. Dále jsem zkoumal vztahy mezi algebraickou sémantikou tvrditelnosti a standardní algebraickou sémantikou intuicionistické logiky a jejích rozšíření. Algebrou propozic daného algebraického informačního modelu je Heytingova algebra ideálů tohoto modelu. Navíc jsem popsal tři způsoby, jak získat z daného algebraického modelu (což je Heytingova algebra spolu s valuací ve smyslu standardní algebraické sémantiky) algebraický informační model: (a) je možno pracovat se stejnou strukturou (přičemž se pouze odhlédne od operací $\times$ a $\Rightarrow$ a přizpůsobí se valuace), (b) je možno vzít algebru filtrů nebo (c) je možno vzít algebru ideálů daného algebraického modelu. Tyto tři konstrukce vedou ke třem různým konstrukcím kanonických modelů pro superintuicionistické logiky. Dalším tématem bylo obohacení jazyka o modalitu nutnosti a globální disjunkci. Nakonec jsem provedl kalkulizaci výsledné logiky tohoto jazyka vzhledem k třídě všech distributivních modálních algeber informačních stavů.

Kapitola 15

Slabá a silná negace

V této kapitole zformuluji kalkul přirozené dedukce pro inkvizitivní sémantiku obohacenou o slabou negaci. Hlavním výsledkem pak bude důkaz úplnosti pro tento kalkul. Na závěr podám také nepřímou syntaktickou charakterizaci inkvizitivní sémantiky se silnou negací.[1]

15.1 Inkvizitivní sémantika se slabou negací

Nejprve zrekonstruuji inkvizitivní sémantiku. V této kapitole bude písmeno L referovat k jazyku inkvizitivní výrokové logiky, který je vystavěn z množiny atomických formulí At a konstanty pro spor $\bot \notin At$ pomocí binárních výrokových operátorů $\wedge, \rightarrow$ a $\sqcup$. Možné světy budou pojaty jako funkce z atomických formulí do pravdivostních hodnot $\{0, 1\}$. Informační stavy jsou libovolné neprázdné množiny možných světů. Z jistých technických důvodů, které později ještě projasním, je vhodné v této kapitole vyloučit z množiny informačních stavů prázdnou množinu.

Formální sémantika je založena na relaci mezi formulemi jazyka L a informačními stavy. Tato relace koresponduje s tím, co jsme v této práci nazývali relací tvrditelnosti. V inkvizitivní sémantice se pro tuto relaci používá termín *support*. Abych zachoval v této kapitole neutralitu vůči filosofické interpretaci, budu jednoduše říkat, že když je daná formule v této relaci k danému stavu, tak tato formule v tomto stavu platí. Relaci zde budu označovat symbolem $\Vdash$. Nechť a je libovolný stav, p je atomická formule a φ, ψ libovolné formule. Sémantické podmínky vypadají takto:

$a \nVdash \bot,$

[1] Hlavní výsledky této kapitoly týkající se slabé negace byly publikovány v (Punčochář, 2015a). Výsledky týkající se silné negace jsou uvedeny v (Punčochář, 2014a, 2016a).

$a \Vdash p$ iff pro každé $s \in a, s(p) = 1$,

$a \Vdash \varphi \wedge \psi$ iff $a \Vdash \varphi$ a $a \Vdash \psi$,

$a \Vdash \varphi \sqcup \psi$ iff $a \Vdash \varphi$ nebo $a \Vdash \psi$,

$a \Vdash \varphi \rightarrow \psi$ iff pro každý neprázdný stav $b \subseteq a$, pokud $b \Vdash \varphi$, tak $b \Vdash \psi$.

Negace $\neg$ bude pokládána za definovaný symbol, který je stejně jako v předchozích kapitolách zaveden takto:

$\neg\varphi =_{def} \varphi \rightarrow \bot$.

Vyplývání je definováno obvyklým způsobem: $\Delta \models \varphi$ iff $a \Vdash \varphi$ pro každý stav a, v němž platí vše z Δ. Tím jsme vymezili standardní inkvizitivní sémantiku. Zopakujme základní věty, které pro takto vymezenou sémantiku platí:

`Věta 15.1.1` *φ je klasicky pravdivá ve světě s iff φ platí v $\{s\}$.*[2]

`Věta 15.1.2` *Pokud daná formule platí v nějakém stavu, pak platí také v každém jeho podstavu.*

`Věta 15.1.3` *Pokud $\models \varphi \sqcup \psi$, pak $\models \varphi$ nebo $\models \psi$.*

Nyní k jazyku L přidáme slabou negaci $\sim$ a takto obohacený jazyk označíme jako $L^{\sim}$. Pro novou spojku formulujeme tuto sémantickou podmínku:

$a \Vdash {\sim}\varphi$ iff $a \nVdash \varphi$.[3]

Toto rozšíření jazyka má závažné důsledky. Pro formule jazyka $L^{\sim}$ platí sice stále věta 15.1.1 (čteme-li $\sqcup$ jako standardní disjunkci a $\sim$ jako standardní negaci), ale již neplatí obecně věty 15.1.2 a 15.1.3. Tak například formule ${\sim}p$ není perzistentní vzhledem k podstavům a platí, že $\models p \sqcup {\sim}p$, ale neplatí ani

[2] *Klasicky pravdivá* znamená pravdivá dle klasické logiky, interpretujeme-li $\sqcup$ jako standardní disjunkci.

[3] Pro standardní inkvizitivní sémantiku bez slabé negace je přirozené připustit také prázdný stav. Pokud je první sémantická podmínka ($a \nVdash \bot$) nahrazena podmínkou $a \Vdash \bot$ iff $a = \emptyset$, přirozeně získáme, že každá formule platí v prázdném stavu. V důsledku to znamená, že přítomnost prázdného stavu nemá žádný přímý dopad na logiku určenou touto sémantikou. Tato situace se změní, když je do jazyka přidána slabá negace. Kdybychom připustili též prázdný stav, neplatily by v něm všechny formule a to by zkomplikovalo celou teorii nežádoucím způsobem. Pochopitelně by bylo možné situaci řešit tak, že bychom zavedli o něco komplikovanější sémantickou podmínku pro slabou negaci: $a \Vdash {\sim}\varphi$ iff $a = \emptyset$ nebo $a \nVdash \varphi$. Avšak vzhledem k tomu, že prázdný stav by ničím významným nepřispěl, není žádný důvod pro takovou komplikaci a je jednodušší vyloučit prázdný stav z množiny informačních stavů.

$\models p$, ani $\models {\sim}p$. Z faktu, že ${\sim}p$ není perzistentní, plyne, že není ekvivalentní s žádnou formulí jazyka L. Z toho plyne, že jazyk $L^{\sim}$ má větší vyjadřovací sílu než jazyk L.

Důležité je, že negace $\neg$ je stále přítomna v $L^{\sim}$ jakožto definovaný symbol znamenající implikaci kontradikce. Přítomnost slabé negace pak umožňuje zavedení dvou druhů nutnosti a možnosti:

$$\Box\varphi =_{def} \neg\neg\varphi, \qquad \Diamond\varphi =_{def} {\sim}\Box{\sim}\varphi.$$
$$\blacksquare\varphi =_{def} \neg{\sim}\varphi, \qquad \blacklozenge\varphi =_{def} {\sim}\blacksquare{\sim}\varphi.$$

Budeme používat symbol $\equiv$ pro logickou ekvivalenci. $\varphi \equiv \psi$ tedy znamená, že $\varphi \models \psi$ a $\psi \models \varphi$. Následující věta je přímým důsledkem předchozích definic a vyjadřuje vztah mezi právě zavedenými modalitami.

`Věta 15.1.4` *Nechť φ je formule z $L^{\sim}$. Pak*

(i) $\Box\varphi \equiv \blacksquare\blacklozenge\varphi$,

(ii) $\Diamond\varphi \equiv \blacklozenge\blacksquare\varphi$.

`Důkaz:` (i) $\Box\varphi = \neg\neg\varphi \equiv \neg{\sim}{\sim}\neg{\sim}{\sim}\varphi = \blacksquare\blacklozenge\varphi$.
(ii) $\Diamond\varphi = {\sim}\neg\neg{\sim}\varphi \equiv {\sim}\neg{\sim}{\sim}\neg{\sim}\varphi = \blacklozenge\blacksquare\varphi$. `QED`

Sémantika nových modálních operátorů je vyjasněna v další větě, která může být dokázána jednoduchým způsobem. Tato věta ukazuje, že se zavedené operátory chovají přirozeným způsobem.

`Věta 15.1.5` *Pro každou formuli φ z $L^{\sim}$:*

(i) $\Box\varphi$ platí v a iff φ je (klasicky) pravdivá v každém světě stavu a.

(ii) $\blacksquare\varphi$ platí v a iff φ platí v každém podstavu stavu a.

(iii) $\Diamond\varphi$ platí v a iff φ je (klasicky) pravdivá v nějakém světě stavu a.

(iv) $\blacklozenge\varphi$ platí v a iff φ platí v nějakém podstavu stavu a.

`Důkaz:` Pro ilustraci dokážeme tvrzení (i). Předpokládejme, že v a platí $\Box\varphi$, tj. $(\varphi \to \bot) \to \bot$. Nechť s je libovolný svět stavu a. Pro spor předpokládejme, že v $\{s\}$ neplatí φ. Pak $\{s\} \Vdash \varphi \to \bot$ a tedy $\{s\} \Vdash \bot$, což je v rozporu s první sémantickou podmínkou. Tedy φ platí v $\{s\}$, což znamená, že φ je klasicky pravdivá v s.

Nyní předpokládejme, že φ je klasicky pravdivá v každém světě stavu a. Chceme dokázat, že $a \models (\varphi \to \bot) \to \bot$. Pro spor předpokládejme, že existuje podstav b, ve kterém platí $\varphi \to \bot$. Pak pro každé $s \in b$, $\{s\} \Vdash \bot$, což je v rozporu s první sémantickou podmínkou. `QED`

Místo slabé negace bychom mohli vzít operátor $\blacklozenge$ jakožto primitivní symbol. Uvažujme na chvíli jazyk $L^{\blacklozenge}$, který získáme obohacením jazyka L o operátor $\blacklozenge$, a přijměme tvrzení (iv) věty 15.1.5 jako definitorickou sémantickou podmínku pro $\blacklozenge$. Pak můžeme říci, že jazyky $L^{\sim}$ a $L^{\blacklozenge}$ mají stejnou vyjadřovací sílu v následujícím smyslu: (a) Pro každou formuli φ z $L^{\blacklozenge}$ existuje formule ψ z $L^{\sim}$ taková, že $\varphi \equiv \psi$; a (b) pro každou formuli φ z $L^{\sim}$ existuje formule ψ z $L^{\blacklozenge}$ taková, že $\varphi \equiv \psi$. Cokoli, co může být vyjádřeno v prvním jazyce, může být také vyjádřeno v druhém jazyce a vice versa.

Jelikož operátor $\blacklozenge$ je definovatelný na základě negací $\sim$ a $\neg$, tvrzení (a) je evidentní. Abychom ukázali, že (b) je také pravdivé, zavedeme dva překlady $^{+}$ a $^{-}$, které přiřadí každé formuli z $L^{\sim}$ nějakou formuli z $L^{\blacklozenge}$. Tyto funkce jsou definovány rekurzivně. Pokud φ je atomická formule nebo konstanta $\bot$, pak $\varphi^{+} = \varphi$ a $\varphi^{-} = \blacklozenge\neg\varphi$. Pro komplexní formule definujeme:

$$
\begin{array}{ll}
(\sim\varphi)^{+} = \varphi^{-} & (\sim\varphi)^{-} = \varphi^{+} \\
(\varphi \wedge \psi)^{+} = \varphi^{+} \wedge \psi^{+} & (\varphi \wedge \psi)^{-} = \varphi^{-} \sqcup \psi^{-} \\
(\varphi \sqcup \psi)^{+} = \varphi^{+} \sqcup \psi^{+} & (\varphi \sqcup \psi)^{-} = \varphi^{-} \wedge \psi^{-} \\
(\varphi \to \psi)^{+} = \varphi^{+} \to \psi^{+} & (\varphi \to \psi)^{-} = \blacklozenge(\varphi^{+} \wedge \psi^{-})
\end{array}
$$

Následující věta ukazuje, že vyjadřovací síla jazyka $L^{\sim}$ není větší než vyjadřovací síla jazyka $L^{\blacklozenge}$.

`Věta 15.1.6` *Pro každou formuli φ z $L^{\sim}$:*

(i) $\varphi \equiv \varphi^{+}$,

(ii) $\sim\varphi \equiv \varphi^{-}$.

`Důkaz:` Lze postupovat indukcí podle komplexity formule φ. Ukážeme jen pro ilustraci případ atomických formulí. Pozitivní část je evidentní. Co se týče negativní části, musíme ukázat, že $\sim p \equiv \blacklozenge\neg p$. V a platí $\sim p$ iff v a neplatí p iff p je nepravdivá v nějakém stavu a iff $\neg p$ platí v nějakém podstavu stavu a iff $\blacklozenge\neg p$ platí v a. `QED`

Nadále budeme pracovat s jazykem $L^{\sim}$ a modální operátory budeme považovat za definované symboly.

Můžeme si povšimnout, že v mnoha případech se zavedené dva druhy modalit chovají ekvivalentně. Zavedeme pomocnou notaci, abychom mohli tento fakt vyjádřit přesněji: Nechť $\|\varphi\|$ označuje propozici vyjádřenou formulí φ, tj. množinu stavů, ve kterých platí φ. Pak následující fakt jednoduše vyplývá z věty 15.1.5.

`Věta 15.1.7` *Nechť φ je libovolná formule jazyka $L^{\sim}$.*

(i) Pokud $\|\varphi\|$ je dolů uzavřená, pak $\Diamond\varphi \equiv \blacklozenge\varphi$.

(ii) Pokud $\|\varphi\|$ je uzavřená na libovolná sjednocení, pak $\Box\varphi \equiv \blacksquare\varphi$.[4]

`Důkaz:` (i) Obecně platí, že $\Diamond\varphi \vDash \blacklozenge\varphi$. Předpokládejme, že $\|\varphi\|$ je dolů uzavřena a a je stav, ve kterém platí $\blacklozenge\varphi$. Pak existuje stav $b \subseteq a$ takový, že v b platí φ. Jelikož $\|\varphi\|$ je dolů uzavřena, můžeme vzít libovolný svět $s \in b$ a bude platit, že v $\{s\}$ platí φ, tudíž φ je klasicky pravdivá v s. V důsledku v a platí $\Diamond\varphi$.

(ii) Obecně platí, že $\blacksquare\varphi \vDash \Box\varphi$. Předpokládejme, že $\|\varphi\|$ je uzavřena na libovolná sjednocení a a je stav, ve kterém platí $\Box\varphi$. Pak pro každé $s \in a$ máme, že v $\{s\}$ platí φ. Jelikož $\|\varphi\|$ je uzavřena na libovolná sjednocení, tak pro každý stav $b \subseteq a$ máme, že v b platí φ. Tedy v a platí $\blacksquare\varphi$. `QED`

Ve větě 15.1.2 bylo řečeno, že každá formule neobsahující $\sim$ vyjadřuje dolů uzavřenou propozici, takže v důsledku věty 15.1.7 platí $\Diamond\varphi \equiv \blacklozenge\varphi$ pro každou takovouto formuli φ. Navíc lze lehce ověřit indukcí, že každá formule φ, která neobsahuje ani $\sim$, ani $\sqcup$, vyjadřuje propozici, která je uzavřena na libovolná sjednocení. Z toho plyne, že pro každou takovouto formuli φ platí $\Box\varphi \equiv \blacksquare\varphi$.

Definujeme ještě jeden disjunkci podobný operátor $\oplus$, který bude hrát významnou úlohu při kalkulizaci logiky jazyka $L^{\sim}$. $\oplus$ je operátor s flexibilní aritou. Tvrzení věty formy $\varphi_1 \oplus \ldots \oplus \varphi_n$ zhruba řečeno vyjadřuje, že každý disjunkt je pravdivý v alespoň jednom možném světě a zároveň v každém možném světě je pravdivý alespoň jeden disjunkt. Tedy všechny disjunkty jsou otevřené možnosti, které dohromady pokrývají celý informační stav. Operátor $\oplus$ je definován následujícím způsobem:

$$\varphi_1 \oplus \ldots \oplus \varphi_n =_{def} \Box(\varphi_1 \sqcup \ldots \sqcup \varphi_n) \wedge (\Diamond\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond\varphi_n).$$

K operátoru $\oplus$ lze zavést i duální operátor $\otimes$ definovaný takto

$$\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n =_{def} \Diamond(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \sqcup (\Box\varphi_1 \sqcup \ldots \sqcup \Box\varphi_n).$$

Následující věta popisuje, jak spolu zavedené operátory interagují.

`Věta 15.1.8` *Nechť $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ jsou libovolné formule z $L^{\sim}$. Pak*

(i) $\Diamond\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond\varphi_n \equiv \blacklozenge(\varphi_1 \oplus \ldots \oplus \varphi_n)$,

(ii) $\Box\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \Box\varphi_n \equiv \blacksquare(\varphi_1 \oplus \ldots \oplus \varphi_n)$,

[4] Je možné formulovat toto tvrzení v silnějším tvaru: Pokud $\|\varphi\|$ je uzavřena na konečná sjednocení, pak $\Box\varphi \equiv \blacksquare\varphi$. Platí, že pokud $\|\varphi\|$ je uzavřena na konečná sjednocení, pak je uzavřena na libovolná sjednocení. Důkaz tohoto tvrzení však zde neuvádíme.

(iii) $\Diamond\varphi_1 \sqcup \ldots \sqcup \Diamond\varphi_n \equiv \blacklozenge(\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n)$,

(iv) $\Box\varphi_1 \sqcup \ldots \sqcup \Box\varphi_n \equiv \blacksquare(\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n)$.

`Důkaz:` Dokážeme pouze tvrzení (i), které bude hrát podstatnou roli ve zbytku této kapitoly. Nejprve předpokládejme, že v nějakém stavu a platí $\Diamond\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond\varphi_n$. Pak podle věty 15.1.5 (iii) existují možné světy $s_1, \ldots, s_n \in a$ takové, že pro každé i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ φ_i je (klasicky) pravdivá ve s_i. Pak $\varphi_1 \oplus \ldots \oplus \varphi_n$ platí v $\{s_1, \ldots, s_n\}$. Z věty 15.1.5 (iv) plyne, že v a platí $\blacklozenge(\varphi_1 \oplus \ldots \oplus \varphi_n)$.

Předpokládejme, že v a platí formule $\blacklozenge(\varphi_1 \oplus \ldots \oplus \varphi_n)$. Pak existuje stav b, který je podstavem stavu a a ve kterém platí $\varphi_1 \oplus \ldots \oplus \varphi_n$. Tedy v b platí $\Diamond\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond\varphi_n$. Z toho plyne, že $\Diamond\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond\varphi_n$ platí také v a. `QED`

Operátor $\oplus$ nám umožní relativně elegantním způsobem axiomatizovat inkvizitivní logiku se slabou negací.

15.2 Systém přirozené dedukce

Hlavním úkolem této kapitoly je zformulovat deduktivní aparát, který je vhodný pro inkvizitivní sémantiku obohacenou o slabou negaci. Zavedeme adekvátní kalkul přirozené dedukce a dokážeme úplnost. Ze sémantiky slabé negace je jasné, že z jistého hlediska by tato spojka mohla být smysluplně označována také jako klasická negace. Problém integrace klasické negace do systému inkvizitivní sémantiky se do značné míry podobá úkolu kombinovat intuicionistickou a klasickou negaci. Tento problém je však velmi záludný, jak by mělo být patrné z kapitoly 9. Důvodem je, že pokud jednoduše doplníme do systému přirozené dedukce pro intuicionistickou logiku pravidla pro nový unární operátor (novou negaci), která odpovídají pravidlům charakterizujícím klasickou negaci, tak toto rozšíření nebude konzervativní a všechny spojky, které jsme v jazyce již měli, se začnou chovat klasickým způsobem. Tento postup tedy zjevně nevede k cíli. V literatuře najdeme několik pokusů kombinovat klasickou a intuicionistickou logiku. Např. v (Lucio, 2000) autor konstruuje pro tento účel tzv. strukturovaný sekventový kalkul, který se podstatně odlišuje od povahy deduktivního aparátu, který zavedeme v této kapitole. Klasická a intuicionistická logika byla také kombinována v (Humberstone, 1979) a (Fariñas & Herzig, 1996). Tyto články jsou blíže našemu přístupu. V obou případech autoři konstruovali formální systém, ve kterém některá pravidla či axiomy musely být omezeny na určitou syntakticky definovanou třídu formulí, které jsou ze sémantického hlediska perzistentní. Přesně to učiníme také my. (S něčím podobným jsme se též setkali v kapitole 5 při kalkulizaci striktní implikace.)

Hledáme systém přirozené dedukce, kde introdukční pravidlo pro implikaci (kondicionální důkaz) není obecně platným inferenčním pravidlem. Platí totiž např. $\Diamond\neg p, p \models \bot$, avšak $\Diamond\neg p \not\models p \to \bot$, tj. $\Diamond\neg p \not\models \neg p$. Nicméně jistá omezená verze kondicionálního důkazu je platná a bude zahrnuta do systému přirozené dedukce jako základní pravidlo. Z tohoto důvodu budeme používat dva druhy závorek (hranaté a kulaté závorky) k vyjádření odvoditelnosti z hypotetického předpokladu.

Hranaté závorky indikují, že v poddůkazu lze použít všechny formule z vnějšího důkazu. Např. zápis „$[\sim\varphi/\bot]/\varphi$“ znamená standardní pravidlo nepřímého důkazu: φ může být odvozeno tak, že odvodíme spor z hypotetického předpokladu $\sim\varphi$. V rozsahu hypotetického předpokladu lze přitom použít vše, co bylo k dispozici předtím, než byl hypotetický předpoklad učiněn.

Kulaté závorky indikují, že možnost používat formule z vnějšího důkazu je omezena. V poddůkazu lze použít jen formule specifického tvaru, které budeme označovat jako *bezpečné*.

`Definice 15.2.1` *Množina bezpečných formulí obsahuje (i) všechny formule jazyka L, (ii) všechny formule jazyka $L^{\sim}$, které mají tvar $\varphi \to \psi$, a nic jiného.*

Zdůrazněme, že bezpečné formule jsou perzistentní vzhledem k podstavům. Zmíněné omezení se vztahuje jen na kondicionální důkaz a takto omezenou verzi tohoto pravidla budeme označovat jako „$(\varphi/\psi)/\varphi \to \psi$“. Charakter tohoto pravidla může objasnit to, čemu odpovídá sémanticky. Ke zdůvodnění korektnosti tohoto pravidla je třeba zdůvodnit, že platí:

Pokud $\Delta^b \cup \{\varphi\} \models \psi$, tak $\Delta \models \varphi \to \psi$,

kde Δ^b je množina bezpečných formulí z Δ. Dopad tohoto pravidla bude ilustrován níže na konkrétním příkladě po formulaci celého systému. Systém přirozené dedukce sestává ze dvou skupin pravidel. První skupina pravidel je standardní systém pro klasickou výrokovou logiku, kde však kondicionální důkaz je omezen, jak to bylo popsáno výše.

$(\wedge I)$	$\varphi, \psi/\varphi \wedge \psi$	$(\wedge E)$	(i) $\varphi \wedge \psi/\varphi$, (ii) $\varphi \wedge \psi/\psi$
$(\sqcup I)$	(i) $\varphi/\varphi \sqcup \psi$, (ii) $\psi/\varphi \sqcup \psi$	$(\sqcup E)$	$\varphi \sqcup \psi, [\varphi/\chi], [\psi/\chi]/\chi$
$(\to I)^*$	$(\varphi/\psi)/\varphi \to \psi$	$(\to E)$	$\varphi, \varphi \to \psi/\psi$
$(\bot I)$	$\varphi, \sim\varphi/\bot$	(IP)	$[\sim\varphi/\bot]/\varphi$

Předpokládáme, že pravidlo opakování je také částí systému: formule, která se vyskytne dříve v důkazu, může být opakována v každé další fázi za předpokladu, že její dřívější výskyt nezávisel na žádném hypotetickém předpokladu, který již byl uzavřen.

Omezení, které klademe na kondicionální důkaz je částečně vyváženo čtyřmi pravidly z druhé skupiny, která se týkají definovaných symbolů. První pravidlo (R1) je omezeno na atomické formule:

$$
\begin{array}{ll}
\text{(R1)} & \Box p \ / \ p \\
\text{(R2)} & / \ \Box(\varphi \sqcup \neg\varphi), \\
\text{(R3)} & \Box\varphi \wedge \Box\psi \ / \ \Box(\varphi \wedge \psi) \\
\text{(R4)} & \Diamond\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond\varphi_n / \blacklozenge(\varphi_1 \oplus \ldots \oplus \varphi_n).
\end{array}
$$

Zápis $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$ bude v této kapitole vyjadřovat, že existuje odvození formule ψ z množiny premis (formulí) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ v právě zavedeném kalkulu. Jelikož máme k dispozici silnou verzi nepřímého důkazu (IP), slabá verze, tj. pravidlo $[\varphi/\bot]/{\sim}\varphi$, je odvoditelným pravidlem, jak ukazuje následující odvození, které je důsledkem důležitého faktu, že dvojitá negace může být vždy eliminována.

1	$\sim\sim\varphi$	hyp
2	$\sim\varphi$	hyp
3	$\bot$	1,2 $(\bot I)$
4	φ	2-3 (IP)
5	$\vdots$	
6	$\bot$	4, odvození $\bot$ z φ
7	$\sim\varphi$	1-6 (IP)

Pravidlo $[\varphi/\bot]/{\sim}\varphi$ budeme nyní označovat jako (WIP). Kdykoli bude (WIP) použito v následujícím textu, budeme vědět, že jeho výskyt by mohl být eliminován tak, že nahradíme odvození sporu $\bot$ z předpokladu φ výše uvedeným odvozením. Nyní uvedeme slíbený příklad ilustrující dopad restrikce kondicionálního důkazu. Následující odvození je neúspěšným pokusem odvodit p z ${\sim}(p \rightarrow q)$:

1	$\sim(p \to q)$	předpoklad
2	$\quad \sim p$	hyp
3	$\quad\quad p$	hyp
4	$\quad\quad\quad \sim q$	hyp
5	$\quad\quad\quad \bot$	2,3 $(\bot I)$
6	$\quad\quad q$	4-5 (IP)
7	$\quad p \to q$	3-6 $(\to I)^*$
8	$\quad \bot$	1,7 $(\bot I)$
9	p	2-8 (IP)

Problém je v kroku 7. Nemůžeme použít pravidlo $(\to I)^*$, protože formule $\sim p$, která byla použita v kroku 5, není bezpečná.

15.3 Odvození v kalkulu

Nyní dokážeme lemma, které následně využijeme v důkazu úplnosti a které ilustruje, jak vypadají odvození v našem kalkulu.

`Lemma 15.3.1` *Nechť φ, ψ jsou libovolné formule jazyka $L^{\sim}$ a p atomická formule. Pak*

(i) *Jestliže $\varphi \vdash \neg p$, tak $\Diamond\varphi \vdash \sim p$.*

(ii) $\sim\blacklozenge\varphi \vdash \neg\Diamond\varphi$.

(iii) $\Box\varphi \vdash \Diamond\varphi$.

(iv) $\vdash \Diamond\varphi \sqcup \neg\Diamond\varphi$.

(v) $\Diamond(\varphi \sqcup \psi) \vdash \Diamond\varphi \sqcup \Diamond\psi$.

(vi) $\Box(\varphi \sqcup \psi), \neg\Diamond\psi \vdash \Box\varphi$.

(vii) $\varphi_1 \oplus \ldots \oplus \varphi_n, \varphi_1 \to p, \ldots, \varphi_n \to p \vdash p$.

`Důkaz:` (i) Jestliže $\varphi \vdash \neg p$, tak $\Diamond\varphi \vdash \sim p$.[5]

[5] Důkaz tvrzení (i) je meta-důkaz. Ukazuje, že $\sim p$ je odvoditelná z $\Diamond\varphi$ za předpokladu, že $\neg p$ je odvoditelná z φ. Tedy tento meta-důkaz ukazuje, že v každém konkrétním případě (tj. v každém případě, kdy je dána nějaká konkrétní formule φ a atom p) existuje odvození formule $\sim p$ z $\Diamond\varphi$, pokud existuje odvození $\neg p$ z φ. Odvození získáme tak, že dosadíme odvození $\neg p$ z φ za krok od 5 k 6 v uvedeném meta-důkazu. Předpokládáme přitom,

1	$\Diamond\varphi$	předpoklad
2	$\sim((\sim\varphi \to \bot) \to \bot)$	1, def
3	$\mid\ \underline{p}$	hyp
4	$\mid\ \mid\ \underline{\sim\varphi \to \bot}$	hyp
5	$\mid\ \mid\ \mid\ \underline{\varphi}$	hyp
6	$\mid\ \mid\ \mid\ p \to \bot$	5, předpoklad $\varphi \vdash \neg p$
7	$\mid\ \mid\ \mid\ \bot$	3,6 $(\to E)$
8	$\mid\ \mid\ \sim\varphi$	5-7 (WIP)
9	$\mid\ \mid\ \bot$	4,8 $(\to E)$
10	$\mid\ (\sim\varphi \to \bot) \to \bot$	4-9 $(\to I)$*
11	$\mid\ \bot$	2,10 $(\bot I)$
12	$\sim p$	3-11 (WIP)

(ii) $\sim\blacklozenge\varphi \vdash \neg\Diamond\varphi$.

1	$\sim\blacklozenge\varphi$	předpoklad
2	$\sim\sim\neg\sim\sim\varphi$	1, def
3	$\neg\varphi$	2, eliminace $\sim\sim$ s užitím (IP)
4	$\varphi \to \bot$	3, def
5	$\mid\ \underline{\sim((\sim\varphi \to \bot) \to \bot)}$	hyp
6	$\mid\ \mid\ \underline{\sim\varphi \to \bot}$	hyp
7	$\mid\ \mid\ \mid\ \underline{\sim\varphi}$	hyp
8	$\mid\ \mid\ \mid\ \bot$	6,7 $(\to E)$
9	$\mid\ \mid\ \varphi$	7-8 (IP)
10	$\mid\ \mid\ \bot$	4,9 $(\to E)$
11	$\mid\ (\sim\varphi \to \bot) \to \bot$	6-10 $(\to I)$*
12	$\mid\ \bot$	5,11 $(\bot I)$
13	$\sim((\sim\varphi \to \bot) \to \bot) \to \bot$	5-12 $(\to I)$*
14	$\neg\sim\neg\neg\sim\varphi$	13, def
15	$\neg\Diamond\varphi$	14, def

(iii) $\Box\varphi \vdash \Diamond\varphi$.

že $\neg p$ může být odvozeno z formule φ samotné, bez žádných dodatečných předpokladů. To znamená, že toto odvození nevyžaduje žádné další formule z vnějšku důkazu, i když je integrováno jako poddůkaz kondicionálního důkazu, jak tomu je v předloženém metadůkazu tvrzení (i). To zaručuje, že takový krok nemůže učinit nelegitimním užití pravidla $(\to I)$*.

1	$\Box\varphi$	předpoklad
2	$\mid\ \Box{\sim}\varphi$	hyp
3	$\mid\ \Box(\varphi \wedge {\sim}\varphi)$	1,2 $(\wedge I)$ a (R3)
4	$\mid\ ((\varphi \wedge {\sim}\varphi) \to \bot) \to \bot$	3, def
5	$\mid\ \mid\ \varphi \wedge {\sim}\varphi$	hyp
6	$\mid\ \mid\ \varphi$	5 $(\wedge E)$
7	$\mid\ \mid\ {\sim}\varphi$	5 $(\wedge E)$
8	$\mid\ \mid\ \bot$	6,7 $(\bot I)$
9	$\mid\ (\varphi \wedge {\sim}\varphi) \to \bot$	5-8 $(\to I)$*
10	$\mid\ \bot$	4,9 $(\to E)$
11	${\sim}\Box{\sim}\varphi$	2-10 (WIP)
12	$\Diamond\varphi$	11, def

(iv) $\vdash \Diamond\varphi \sqcup \neg\Diamond\varphi$.

1	$\mid\ {\sim}(\Diamond\varphi \sqcup {\sim}\Diamond\varphi)$	hyp
2	$\mid\ \mid\ {\sim}\Diamond\varphi$	hyp
3	$\mid\ \mid\ \Diamond\varphi \sqcup {\sim}\Diamond\varphi$	2 $(\sqcup I)$
4	$\mid\ \mid\ \bot$	1,3 $(\bot I)$
5	$\mid\ \Diamond\varphi$	2-4 (IP)
6	$\mid\ \Diamond\varphi \sqcup {\sim}\Diamond\varphi$	5 $(\sqcup I)$
7	$\mid\ \bot$	1,6 $(\bot I)$
8	$\Diamond\varphi \sqcup {\sim}\Diamond\varphi$	1-7 (IP)
9	$\mid\ \Diamond\varphi$	hyp
10	$\mid\ \Diamond\varphi \sqcup \neg\Diamond\varphi$	9 $(\sqcup I)$
11	$\mid\ {\sim}\Diamond\varphi$	hyp
12	$\mid\ ({\sim}\varphi \to \bot) \to \bot$	11, def, eliminace ${\sim}{\sim}$
13	$\mid\ \mid\ {\sim}(({\sim}\varphi \to \bot) \to \bot)$	hyp
14	$\mid\ \mid\ \bot$	12,13 $(\bot I)$
15	$\mid\ {\sim}(({\sim}\varphi \to \bot) \to \bot) \to \bot$	13-14 $(\to I)$*
16	$\mid\ \neg{\sim}\neg\neg{\sim}\varphi$	15, def
17	$\mid\ \neg\Diamond\varphi$	16, def
18	$\mid\ \Diamond\varphi \sqcup \neg\Diamond\varphi$	17 $(\sqcup I)$
19	$\Diamond\varphi \sqcup \neg\Diamond\varphi$	8-18 $(\sqcup E)$

(v) $\Diamond(\varphi \sqcup \psi) \vdash \Diamond\varphi \sqcup \Diamond\psi$.

1	$\Diamond(\varphi \sqcup \psi)$	předpoklad
2	$\sim(\Diamond\varphi \sqcup \Diamond\psi)$	hyp
3	$\Diamond\varphi$	hyp
4	$\Diamond\varphi \sqcup \Diamond\psi$	3 ($\sqcup I$)
5	$\bot$	2,4 ($\bot I$)
6	$\sim\Diamond\varphi$	3-5 (IP)
7	$\Diamond\psi$	hyp
8	$\Diamond\varphi \sqcup \Diamond\psi$	7 ($\sqcup I$)
9	$\bot$	2,8 ($\bot I$)
10	$\sim\Diamond\psi$	7-9 (IP)
11	$\Box\sim\varphi$	6, eliminace $\sim\sim$
12	$\Box\sim\psi$	10, eliminace $\sim\sim$
13	$\Box(\sim\varphi \wedge \sim\psi)$	11,12 ($\wedge I$) a (R3)
14	$((\sim\varphi \wedge \sim\psi) \to \bot) \to \bot$	13, def
15	$\sim(\varphi \sqcup \psi) \to \bot$	hyp
16	$\sim\varphi \wedge \sim\psi$	hyp
17	$\varphi \sqcup \psi$	hyp
18	φ	hyp
19	$\sim\varphi$	16 ($\wedge E$)
20	$\bot$	18,19 ($\bot I$)
21	ψ	hyp
22	$\sim\psi$	16 ($\wedge E$)
23	$\bot$	21,22 ($\bot I$)
24	$\bot$	17-23 ($\sqcup E$)
25	$\sim(\varphi \sqcup \psi)$	17-24 (WIP)
26	$\bot$	15,25 ($\to E$)
27	$(\sim\varphi \wedge \sim\psi) \to \bot$	16-26 ($\to I$)*
28	$\bot$	14,27 ($\to E$)
29	$(\sim(\varphi \sqcup \psi) \to \bot) \to \bot$	15-28 ($\to I$)*
30	$\sim((\sim(\varphi \sqcup \psi) \to \bot) \to \bot)$	1, def
31	$\bot$	29,30 ($\bot I$)
32	$\Diamond\varphi \sqcup \Diamond\psi$	2-31 (IP)

(vi) $\Box(\varphi \sqcup \psi), \neg\Diamond\psi \vdash \Box\varphi$.

1	$\Box(\varphi \sqcup \psi)$	předpoklad
2	$\neg\Diamond\psi$	předpoklad
3	$\neg{\sim}\neg\neg{\sim}\psi$	2, def
4	$\mid\ {\sim}\neg\neg{\sim}\psi$	hyp
5	$\mid\ \bot$	3,4 ($\to E$)
6	$\neg\neg{\sim}\psi$	4-5 (IP)
7	$\Box{\sim}\psi$	6, def
8	$\Box((\varphi \sqcup \psi) \wedge {\sim}\psi)$	1,7 ($\wedge I$) a (R3)
9	$(((\varphi \sqcup \psi) \wedge {\sim}\psi) \to \bot) \to \bot$	8, def
10	$\mid\ \varphi \to \bot$	hyp
11	$\mid\ \mid\ (\varphi \sqcup \psi) \wedge {\sim}\psi$	hyp
12	$\mid\ \mid\ {\sim}\psi$	11 ($\wedge E$)
13	$\mid\ \mid\ \varphi \sqcup \psi$	11 ($\wedge E$)
14	$\mid\ \mid\ \mid\ \varphi$	hyp
15	$\mid\ \mid\ \mid\ \bot$	10,14 ($\to E$)
16	$\mid\ \mid\ \mid\ \psi$	hyp
17	$\mid\ \mid\ \mid\ \bot$	12,16 ($\bot I$)
18	$\mid\ \mid\ \bot$	13-17 ($\sqcup E$)
19	$\mid\ ((\varphi \sqcup \psi) \wedge {\sim}\psi) \to \bot$	11-18 ($\to I$)*
20	$\mid\ \bot$	9,19 ($\to E$)
21	$(\varphi \to \bot) \to \bot$	10-20 ($\to I$)*
22	$\Box\varphi$	21, def

(vii) $\varphi_1 \oplus \ldots \oplus \varphi_n, \varphi_1 \to p, \ldots, \varphi_n \to p \vdash p$.[6]

1	$\varphi_1 \oplus \ldots \oplus \varphi_n$	předpoklad
2	$((\varphi_1 \sqcup \ldots \sqcup \varphi_n) \to \bot) \to \bot$	1 ($\wedge E$)
3	$\varphi_1 \to p$	předpoklad
4	$\vdots$	
5	$\varphi_n \to p$	předpoklad
6	$\mid\ p \to \bot$	hyp
7	$\mid\ \mid\ \varphi_1 \sqcup \ldots \sqcup \varphi_n$	hyp
8	$\mid\ \mid\ \mid\ \varphi_1$	hyp
9	$\mid\ \mid\ \mid\ p$	3,8 ($\to E$)
10	$\mid\ \mid\ \mid\ \bot$	6,9 ($\to E$)
11	$\mid\ \mid\ \mid\ \vdots$	
12	$\mid\ \mid\ \mid\ \varphi_n$	hyp
13	$\mid\ \mid\ \mid\ p$	5,12 ($\to E$)
14	$\mid\ \mid\ \mid\ \bot$	6,13 ($\to E$)
15	$\mid\ \mid\ \bot$	7-14 ($\sqcup E$)
16	$\mid\ (\varphi_1 \sqcup \ldots \sqcup \varphi_n) \to \bot$	7-15 ($\to I$)*
17	$\mid\ \bot$	2,16 ($\to E$)
18	$(p \to \bot) \to \bot$	6-17 ($\to I$)*
19	$\Box p$	18, def
20	p	19 (R1)

QED

15.4 Důkaz úplnosti

Směřujeme k důkazu, že zavedený systém přirozené dedukce je korektní a úplný vzhledem k inkvizitivní sémantice rozšířené o slabou negaci.

Nejprve se budeme stručně zabývat korektností pravidel. Co se týče první skupiny, pravidla, která nepoužívají hypotetického předpokladu (tj. ($\wedge I$), ($\wedge E$), ($\sqcup I$), ($\to E$), a ($\bot I$)) jsou neproblematická. Všechna přenášejí platnost v jednotlivých stavech. Co se týče pravidel (IP), ($\sqcup E$), a ($\to I$)*, je třeba zdůraznit, že dva druhy závorek korespondují se dvěma druhy hypotetického předpokladu, které se liší ze sémantického hlediska. Předpokládejme, že je

[6] Zde je jediné místo v důkazu úplnosti, kde je užito pravidlo (R1).

dán stav a. Neformálně řečeno, tím, že učiníme hypotetický předpoklad v kondicionálním důkazu, posouváme se ze stavu a k *libovolnému* podstavu. Oproti tomu v nepřímém důkazu a důkazu po případech neměníme daný stav. Jen se tážeme, co by muselo platit, kdyby daný přepoklad platil ve stavu a.

Nejprve uvažujme pravidlo (IP). Nechť a je libovolný stav, ve kterém platí vše z množiny formulí Δ. Chtěli bychom ukázat, že ve stavu a také platí formule ψ. Mohli bychom to dokázat nepřímo tím, že předpokládáme, že ve stavu a neplatí ψ, a ukážeme, že tento předpoklad vede ke kontradikci. Pokud tato kontradikce vyplývá z množiny $\Delta \cup \{\sim\psi\}$, tak v a musí platit ψ. Z tohoto důvodu je pravidlo (IP) korektní.

Nyní se budeme zabývat pravidlem $(\sqcup E)$. Nechť a je libovolný stav, ve kterém platí formule z množiny $\Delta \cup \{\varphi \sqcup \psi\}$. Pokud formule χ vyplývá jak z $\Delta \cup \{\varphi\}$ tak i z $\Delta \cup \{\psi\}$, musí platit χ ve stavu a, neboť v a platí vše z $\Delta \cup \{\varphi\}$ nebo vše z $\Delta \cup \{\psi\}$. Z toho plyne korektnost pravidla $(\sqcup E)$.

Již jsme zmínili, v čem spočívá korektnost pravidla $(\to I)^*$. Nechť ve stavu a platí vše z množiny formulí Δ. Chtěli bychom ukázat, že ve stavu a platí formule $\varphi \to \psi$. Mohli bychom to udělat tak, že vezmeme libovolný podstav b a ukážeme, že pokud v b platí φ, pak v b platí ψ. Ve stavu b nemusí platit všechny formule, které platí ve stavu a. Avšak ve stavu b platí všechny formule, které jsou perzistentní vzhledem k podstavům. Konkrétně, v b platí všechny bezpečné formule, které platí ve stavu a. Tedy pokud ψ vyplývá z množiny obsahující φ a bezpečné formule z Δ, pak v a musí platit $\varphi \to \psi$. To zaručuje korektnost pravidla $(\to I)^*$.

Co se týče pravidel z druhé skupiny, korektnost pravidel (R1)–(R3) vyplývá přímo z věty 15.1.5 (i) a korektnost pravidla (R4) z věty 15.1.8 (i).

`Definice 15.4.1` *Říkáme, že $\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n$ je variací formulí $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ když pro každé i ($1 \leqslant i \leqslant n$), ψ_i je buď φ_i, nebo $\neg\varphi_i$. Definujeme formuli $\Gamma(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ jako disjunkci všech variací formulí $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.*[7]

Jako příklad můžeme vzít

$$\Gamma(p, q) = (p \wedge q) \sqcup (p \wedge \neg q) \sqcup (\neg p \wedge q) \sqcup (\neg p \wedge \neg q).$$

`Lemma 15.4.2` *Nechť $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ jsou libovolné formule. Pak*

(i) $\vdash \Box\Gamma(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$,

(ii) $\vdash \Gamma(\Diamond\varphi_1, \ldots, \Diamond\varphi_n)$.

[7] Pořadí jednotlivých členů disjunkce je nepodstatné.

`Důkaz:` (i) Díky pravidlům (R2) a ($\wedge I$) je v systému dokazatelná formule $\Box(\varphi_1 \sqcup \neg\varphi_1) \wedge \ldots \wedge \Box(\varphi_n \sqcup \neg\varphi_n)$. Užitím pravidla (R3) dostaneme $\Box((\varphi_1 \sqcup \neg\varphi_1) \wedge \ldots \wedge (\varphi_n \sqcup \neg\varphi_n))$, což je dokazatelně ekvivalentní s $\Box\Gamma(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, neboť distributivní zákony jsou odvoditelné v systému.

(ii) Dle lemma 15.3.1 (iv), je v systému dokazatelná formule $(\Diamond\varphi_1 \sqcup \neg\Diamond\varphi_1) \wedge \ldots \wedge (\Diamond\varphi_n \sqcup \neg\Diamond\varphi_n)$. S užitím tohoto faktu a distributivních zákonů můžeme usoudit, že $\vdash \Gamma(\Diamond\varphi_1, \ldots, \Diamond\varphi_n)$. `QED`

`Definice 15.4.3` *Nechť A je konečná množina atomických formulí. Variace těchto atomů nazýváme popisy (světů).*

Tyto variace korespondují s valuacemi atomů z A. Pokud pracujeme pouze s formulemi, které neobsahují jiné atomy než ty z A, můžeme předpokládat, že stavy obsahují také jen takto omezené valuace. Takovéto omezené stavy budeme nazývat stavy na A. Nechť a je stav na A, který sestává z valuací $v_1, \ldots, v_n$. Nechť $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ jsou korespondující popisy. Definujeme formuli Φ_a jako $\sigma_1 \oplus \ldots \oplus \sigma_n$. Tato formule je syntaktický korelát stavu a. Alternativně může být a také syntakticky reprezentován takto:

$$\Psi_a = \Diamond\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond\sigma_n \wedge \neg\Diamond\sigma_{n+1} \wedge \ldots \wedge \neg\Diamond\sigma_{n+m},$$

kde $\sigma_{n+1}, \ldots, \sigma_{n+m}$ jsou všechny zbývající popisy relativní k A. $\Psi_\perp$ bude označovat formuli $\neg\Diamond\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \neg\Diamond\sigma_{n+m}$. Nově zavedené pojmy budou ilustrovány na příkladu množiny $A = \{p, q\}$ a stavu $a = \{v_1, v_2\}$, kde $v_1(p) = 1$, $v_1(q) = 0$, $v_2(p) = 0$ a $v_2(q) = 0$. Potom

$$\sigma_1 = p \wedge \neg q,\ \sigma_2 = \neg p \wedge \neg q,\ \sigma_3 = p \wedge q,\ \sigma_4 = \neg p \wedge q,$$

$$\Phi_a = \sigma_1 \oplus \sigma_2 = \Diamond\sigma_1 \wedge \Diamond\sigma_2 \wedge \Box(\sigma_1 \sqcup \sigma_2),$$

$$\Psi_a = \Diamond\sigma_1 \wedge \Diamond\sigma_2 \wedge \neg\Diamond\sigma_3 \wedge \neg\Diamond\sigma_4,$$

$$\Psi_\perp = \neg\Diamond\sigma_1 \wedge \neg\Diamond\sigma_2 \wedge \neg\Diamond\sigma_3 \wedge \neg\Diamond\sigma_4.$$

V následujícím textu $\varphi \dashv\vdash \psi$ znamená, že $\varphi \vdash \psi$ a $\psi \vdash \varphi$.

`Lemma 15.4.4` *Nechť a je stav na nějaké konečné množině formulí. Potom*

(i) $\vdash {\sim}\Psi_\perp$,

(ii) $\Phi_a \dashv\vdash \Psi_a$.

`Důkaz:` (i) Nechť $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ jsou všechny popisy relativní vůči nějaké množině atomů $\{p_1, \ldots, p_k\}$. Z lemma 15.4.2 (i) plyne $\vdash \Box\Gamma(p_1, \ldots, p_k)$. Aplikujeme-li lemma 15.3.1 (iii), obdržíme $\vdash \Diamond\Gamma(p_1, \ldots, p_k)$, což znamená, že formule $\Diamond(\sigma_1 \sqcup \ldots \sqcup \sigma_r)$ je dokazatelná. Lemma 15.3.1 (v) pak vede k závěru, že $\Diamond\sigma_1 \sqcup \ldots \sqcup \Diamond\sigma_r$ je také dokazatelná. Tedy $\vdash {\sim}\Psi_\bot$.

(ii) Nechť je fixována množina atomů $\{p_1, \ldots, p_k\}$. Relativně vůči této množině nechť $\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \sigma_{n+1}, \ldots \sigma_{n+m}$ jsou všechny popisy a navíc předpokládejme, že popisy $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ korespondují s možnými světy daného stavu a. Abychom ukázali, že $\Phi_a \dashv\vdash \Psi_a$, musíme dokázat, že

$$\Box(\sigma_1 \sqcup \ldots \sqcup \sigma_n) \dashv\vdash \neg\Diamond\sigma_{n+1} \wedge \ldots \wedge \neg\Diamond\sigma_{n+m}.$$

Nejprve dokážeme, že pro každé i $(1 \leqslant i \leqslant m)$, $\Box(\sigma_1 \sqcup \ldots \sqcup \sigma_n) \vdash \neg\Diamond\sigma_{n+i}$:

1	$\Box(\sigma_1 \sqcup \ldots \sqcup \sigma_n)$	předpoklad
2	$((\sigma_1 \sqcup \ldots \sqcup \sigma_n) \to \bot) \to \bot$	1, def
3	$\quad \sigma_{n+i}$	hyp
4	$\quad\quad \sigma_1 \sqcup \ldots \sqcup \sigma_n$	hyp
5	$\quad\quad\quad \sigma_1$	hyp
6	$\quad\quad\quad \bot$	3,5 $(\wedge E)$, $(\to E)$
7	$\quad\quad \vdots$	
8	$\quad\quad\quad \sigma_n$	hyp
9	$\quad\quad\quad \bot$	3,8 $(\wedge E)$, $(\to E)$
10	$\quad\quad \bot$	4-9 $(\sqcup E)$
11	$\quad (\sigma_1 \sqcup \ldots \sqcup \sigma_n) \to \bot$	4-10 $(\to I)$*
12	$\quad \bot$	2,11, $(\to E)$
13	$\sigma_{n+i} \to \bot$	3-12 $(\to I)$*
14	${\sim}\blacklozenge\sigma_{n+i}$	13, def
15	$\neg\Diamond\sigma_{n+i}$	14, lemma 15.3.1 (ii)

Dále, dle lemma 15.4.2 (i) máme $\vdash \Box\Gamma(p_1, \ldots, p_k)$, tj. $\vdash \Box(\sigma_1 \sqcup \ldots \sqcup \sigma_n \sqcup \sigma_{n+1} \sqcup \ldots \sqcup \sigma_{n+m})$. Poté můžeme m-krát aplikovat lemma 15.3.1 (vi), a odvodit $\Box(\sigma_1 \sqcup \ldots \sqcup \sigma_n)$ z $\neg\Diamond\sigma_{n+1} \wedge \ldots \wedge \neg\Diamond\sigma_{n+m}$. `QED`

`Definice 15.4.5` *Množina formulí Δ je konzistentní iff $\Delta \nvdash \bot$.*

`Lemma 15.4.6` *Nechť Δ je množina formulí, která obsahuje jen atomy z konečné množiny A. Pokud je Δ konzistentní, pak existuje stav a takový, že $\Delta \cup \{\Phi_a\}$ je konzistentní.*

`Důkaz:` Nechť Δ je množina formulí obsahujících jen atomy z konečné množiny A, $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ jsou všechny popisy a $a_1, \ldots, a_n$ všechny stavy (relativní k A). Díky lemma 15.4.2 (ii) máme $\vdash \Gamma(\Diamond\sigma_1, \ldots, \Diamond\sigma_m)$. To znamená, že $\Psi_{a_1} \sqcup \ldots \sqcup \Psi_{a_n} \sqcup \Psi_\perp$ je dokazatelná. Na základě lemma 15.4.4 (i), získáme $\vdash \Psi_{a_1} \sqcup \ldots \sqcup \Psi_{a_n}$. Díky lemma 15.4.4 (ii) pak $\vdash \Phi_{a_1} \sqcup \ldots \sqcup \Phi_{a_n}$. To znamená, že kdyby pro každé i byla $\Delta \cup \{\Phi_{a_i}\}$ nekonzistentní množina, pak by Δ byla také nekonzistentní. Jelikož Δ je dle předpokladu konzistentní, existuje stav a takový, že $\Delta \cup \{\Phi_a\}$ je konzistentní. `QED`

`Lemma 15.4.7` *Nechť a je informační stav na konečné množině atomických formulí A. Pak pro každou formuli φ obsahující pouze atomy z A platí, že buď $\Phi_a \vdash \varphi$ nebo $\Phi_a \vdash \sim\varphi$.*

`Důkaz:` Budeme postupovat indukcí podle složitosti formule φ. Předpokládejme, že $\Phi_a = \sigma_1 \oplus \ldots \oplus \sigma_n$. Jako základ indukce zvažme libovolný atom $p \in A$. Rozlišíme dva případy:

Nejprve předpokládejme, že pro každé i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, p se vyskytuje v σ_i v pozitivní formě (tj. bez negace $\neg$). Potom pro každé takové i, $\vdash \sigma_i \to p$ a z lemma 15.3.1 (vii) vyplývá, že $\Phi_a \vdash p$.

Dále předpokládejme, že pro nějaké i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, p se vyskytuje v σ_i v negativní formě (tj. s negací $\neg$). Pak $\sigma_i \vdash \neg p$ a podle lemma 15.3.1 (i) $\Diamond\sigma_i \vdash \sim p$. V důsledku platí $\Phi_a \vdash \sim p$.

Induktivní předpoklad říká, že naše tvrzení platí pro každý stav a (na A) pro libovolné formule φ a ψ. Musíme dokázat, že pak toto tvzení platí též pro $\sim\varphi, \varphi \wedge \psi, \varphi \sqcup \psi$, a $\varphi \to \psi$. Případy negace, konjunkce a disjunkce jsou přímočaré. Zaměříme se na nejsložitější případ implikace.

Předpokládejme, že $\Psi_a = \Diamond\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond\sigma_n \wedge \neg\Diamond\sigma_{n+1} \wedge \ldots \wedge \neg\Diamond\sigma_{n+m}$. Začněme s pozitivním případem. Předpokládejme, že neexistuje žádný podstav b stavu a, pro který platí $\Phi_b \vdash \varphi$ a $\Phi_b \vdash \sim\psi$. Nechť b je libovolný podstav stavu a. Pak Ψ_b může být získáno z Ψ_a substitucí nějaké variace formulí $\Diamond\sigma_1, \ldots, \Diamond\sigma_n$ za počáteční úsek $\Diamond\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond\sigma_n$. Jedinou výjimku představuje variace $\chi_0 = \neg\Diamond\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \neg\Diamond\sigma_n$. V tomto případě není výsledkem substituce nějaká formule reprezentující podstav, nýbrž $\Psi_\perp$. Nechť $\chi_1, \ldots, \chi_k$ jsou všechny zbývající variace a $a_1, \ldots, a_k$ korespondující podstavy stavu a. Tedy pro každé i $(1 \leqslant i \leqslant k)$, $\chi_i \wedge \neg\Diamond\sigma_{n+1} \wedge \ldots \wedge \neg\Diamond\sigma_{n+m} = \Psi_{a_i}$.

Jelikož $\Phi_{a_i} \dashv\vdash \Psi_{a_i}$ (dle lemma 15.4.4 (ii)), náš indukční předpoklad vede k tvrzení, že existují pouze tři možné případy:

(a) $\Psi_{a_i} \vdash \varphi$ a $\Psi_{a_i} \vdash \psi$,

(b) $\Psi_{a_i} \vdash \sim\varphi$ a $\Psi_{a_i} \vdash \psi$,

(c) $\Psi_{a_i} \vdash \sim\varphi$ a $\Psi_{a_i} \vdash \sim\psi$.

V každém z těchto případů platí, že $\Psi_{a_i}, \varphi \vdash \psi$. Lze tedy konstruovat následující odvození.

1	$\sigma_1 \oplus \ldots \oplus \sigma_n$	předpoklad
2	$\neg\Diamond\sigma_{n+1}$	1, lemma 15.4.4 (ii)
3	$\vdots$	
4	$\neg\Diamond\sigma_{n+m}$	1, lemma 15.4.4 (ii)
5	$\quad \mid \varphi$	hyp
6	$\quad \mid \Gamma(\Diamond\sigma_1, \ldots, \Diamond\sigma_n)$	lemma 15.4.2 (ii)
7	$\quad \mid \chi_0 \sqcup \ldots \sqcup \chi_k$	6
8	$\quad \mid \quad \mid \chi_0$	hyp
9	$\quad \mid \quad \mid \Psi_\perp$	2-4,8
10	$\quad \mid \quad \mid \psi$	9, lemma 15.4.4 (i)
11	$\quad \mid \quad \mid \chi_1$	hyp
12	$\quad \mid \quad \mid \Psi_{a_1}$	2-4,11
13	$\quad \mid \quad \mid \psi$	5,12
14	$\quad \mid \quad \vdots$	
15	$\quad \mid \quad \mid \chi_k$	hyp
16	$\quad \mid \quad \mid \Psi_{a_k}$	2-4,15
17	$\quad \mid \quad \mid \psi$	5,16
18	$\quad \mid \psi$	7-17 ($\sqcup E$)
19	$\varphi \to \psi$	5-18 ($\to I$)*

Zbývá zvážit negativní případ pro implikaci. Předpokládejme, že existuje podstav b stavu a takový, že $\Phi_b \vdash \varphi$ a $\Phi_b \vdash \sim\psi$. Následující odvození dokazuje přesně to, co je potřeba.

1	$\sigma_1 \oplus \ldots \oplus \sigma_n$	předpoklad
2	$\blacklozenge\Phi_b$	1, (R4)
3	$\sim(\Phi_b \rightarrow \bot)$	2
4	$\quad \varphi \rightarrow \psi$	hyp
5	$\quad\quad \Phi_b$	hyp
6	$\quad\quad \varphi$	5
7	$\quad\quad \sim\psi$	5
8	$\quad\quad \psi$	4,6 ($\rightarrow E$)
9	$\quad\quad \bot$	7,8 ($\bot I$)
10	$\quad \Phi_b \rightarrow \bot$	5-9 ($\rightarrow I$)*
11	$\quad \bot$	3,10 ($\bot I$)
12	$\sim(\varphi \rightarrow \psi)$	4-11 (WIP)

QED

Nyní jsme připraveni dokázat hlavní výsledek této kapitoly, který platí pro libovolné formule $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi$ jazyka $L^{\sim}$.

Věta 15.4.8 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$ *iff* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$.

Důkaz: Implikace zleva doprava vyžaduje ověření korektnosti všech pravidel. Tím jsme se zabývali výše. Dokážeme implikaci zprava doleva. Předpokládejme, že $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \nvdash \psi$. Pak $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \sim\psi\}$ je konzistentní. Z lemma 15.4.6 vyplývá, že existuje stav a takový, že $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \sim\psi, \Phi_a\}$ je konzistentní. V důsledku lemma 15.4.7, každá formule z $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \sim\psi\}$ je odvoditelná z Φ_a. Jelikož platí, že $a \Vdash \Phi_a$, každá formule z $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ platí v a, avšak ψ neplatí v a. Tedy $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \nvDash \psi$. QED

15.5 Odvození Kreisel-Putnamova zákona

Je triviálním sémantickým pozorováním, že pro libovolné $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi$ z jazyka L platí, že ψ vyplývá z $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ v původní inkvizitivní sémantice iff ψ vyplývá z $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ v inkvizitivní sémantice se slabou negací. V tomto smyslu můžeme říct, že inkvizitivní logika se slabou negací je konzervativním rozšířením standardní inkvizitivní logiky.

Např. v (Ciardelli & Roelofsen, 2011) byla inkvizitivní logika axiomatizována pomocí hilbertovského systému rozšiřujícího intuicionistickou logiku o Kreisel-Putnamovo schéma (KP) a zákon eliminace dvojité negace omezený na atomické formule (DN):

$$(\neg\varphi \to (\psi \sqcup \chi)) \to ((\neg\varphi \to \psi) \sqcup (\neg\varphi \to \chi)) \tag{KP}$$

$$\neg\neg p \to p \tag{DN}$$

kde φ, ψ, χ zastupují libovolné formule jazyka L a p libovolnou atomickou formuli. Nechť $\vdash_{InkL}$ zastupuje relaci odvoditelnosti v tomto systému. Tento systém je korektní a úplný vzhledem k inkvizitivní sémantice. S ohledem na tento fakt je následující věta přímým důsledkem věty 15.4.8 a zmíněného sémantického pozorování. Platí pro libolné formule $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi$ jazyka L.

`Věta 15.5.1` $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash_{InkL} \psi$ *iff* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$.

V tomto smyslu je relace odvoditelnosti našeho systému přirozené dedukce konzervativní vzhledem k relaci odvoditelnosti $\vdash_{InkL}$. Avšak vztah mezi těmito dvěma systémy není nijak přímočarý. (DN) sice přímo koresponduje s pravidlem (R1), ale ukázat, že každá instance schématu (KP) je odvoditelná v našem systému, není lehký úkol. V tomto oddílu zformulujeme důkaz tohoto faktu, který je nezávislý na předchozích sémantických úvahách. Tento důkaz může posloužit také jako ilustrace netriviálního užití pravidla (R4).

Dokazujeme tedy, že Kreisel-Putnamovo schéma (KP) omezené na jazyk L je odvoditelné v našem systému. Tento výsledek může být snadno získán užitím teorému 15.4.8. Zde však nabídneme čistě syntaktický důkaz tohoto faktu. Ve zbytku této kapitoly budou φ, ψ, χ (příležitostně též s indexy) zastupovat libovolné formule jazyka L a α, β, γ (též příležitostně s indexy) pouze ty formule z L, ve kterých se nevyskytuje disjunkce $\sqcup$.

`Lemma 15.5.2` *Pro libovolné* $\alpha, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi, \psi$ *platí:*

(i) $\Box\alpha \vdash \alpha$,

(ii) $\Box\neg\varphi \vdash \neg\varphi$,

(iii) ${\sim}(\varphi_1 \sqcup \ldots \sqcup \varphi_i \sqcup \ldots \sqcup \varphi_n) \vdash {\sim}\varphi_i$,

(iv) ${\sim}(\neg\varphi \to \alpha) \vdash \Diamond(\neg\varphi \wedge \neg\alpha)$,

(v) $\varphi, \Diamond\neg\varphi \vdash \bot$,

(vi) $\Box(\varphi \wedge \psi) \vdash \Box\varphi$,

(vii) $\Diamond(\varphi \wedge \psi) \vdash \Diamond\varphi$,

(viii) *jestliže* $\varphi \vdash \psi$, *tak* $\blacklozenge\varphi \vdash \blacklozenge\psi$.

`Důkaz:` (i) Indukce podle složitosti formule α. Pro atomické formule platí tvrzení na základě pravidla (R1). Pro spor $\bot$ můžme konstruovat toto odvození:

1	$\Box\bot$	předpoklad
2	$(\bot \to \bot) \to \bot$	1, def
3	$\mid\ \bot$	hyp
4	$\mid\ \bot$	opakování formule
5	$\bot \to \bot$	3-4 $(\to I)$*
6	$\bot$	2,5 $(\to E)$

Předpokládejme, že tvrzení platí pro nějaké formule β a γ. Dokážeme, že pak platí také pro $\beta \wedge \gamma$ a $\beta \to \gamma$.

1	$\Box(\beta \wedge \gamma)$	předpoklad
2	$((\beta \wedge \gamma) \to \bot) \to \bot$	1, def
3	$\mid\ \beta \to \bot$	hyp
4	$\mid\ \mid\ \beta \wedge \gamma$	hyp
5	$\mid\ \mid\ \beta$	4 $(\wedge E)$
6	$\mid\ \mid\ \bot$	3,5 $(\to E)$
7	$\mid\ (\beta \wedge \gamma) \to \bot$	4-6 $(\to I)$*
8	$\mid\ \bot$	2,7 $(\to E)$
9	$(\beta \to \bot) \to \bot$	3-8 $(\to I)$*
10	$\Box\beta$	9, def
11	β	10, indukční předpoklad
12	$\mid\ \gamma \to \bot$	hyp
13	$\mid\ \mid\ \beta \wedge \gamma$	hyp
14	$\mid\ \mid\ \gamma$	13 $(\wedge E)$
15	$\mid\ \mid\ \bot$	12,14 $(\to E)$
16	$\mid\ (\beta \wedge \gamma) \to \bot$	13-15 $(\to I)$*
17	$\mid\ \bot$	2,16 $(\to E)$
18	$(\gamma \to \bot) \to \bot$	12-17 $(\to I)$*
19	$\Box\gamma$	18, def
20	γ	19, indukční předpoklad
21	$\beta \wedge \gamma$	11,20 $(\wedge I)$

1	$\Box(\beta \to \gamma)$	předpoklad
2	$((\beta \to \gamma) \to \bot) \to \bot$	1, def
3	$\quad \beta$	hyp
4	$\quad\quad \gamma \to \bot$	hyp
5	$\quad\quad\quad \beta \to \gamma$	hyp
6	$\quad\quad\quad \gamma$	3,5 ($\to E$)
7	$\quad\quad\quad \bot$	4,6 ($\to E$)
8	$\quad\quad (\beta \to \gamma) \to \bot$	5-7 ($\to I$)*
9	$\quad\quad \bot$	2,8 ($\to E$)
10	$\quad (\gamma \to \bot) \to \bot$	4-9 ($\to I$)*
11	$\quad \Box\gamma$	10, def
12	$\quad \gamma$	11, indukční předpoklad
13	$\beta \to \gamma$	3-12 ($\to I$)*

(ii) Můžeme konstruovat následující odvození:

1	$\Box\neg\varphi$	předpoklad
2	$((\varphi \to \bot) \to \bot) \to \bot$	1, def
3	$\quad \varphi$	hyp
4	$\quad\quad \varphi \to \bot$	hyp
5	$\quad\quad \bot$	3,4 ($\to E$)
6	$\quad (\varphi \to \bot) \to \bot$	4-5 ($\to I$)*
7	$\quad \bot$	2,6 ($\to E$)
8	$\varphi \to \bot$	3-7 ($\to I$)*
9	$\neg\varphi$	8, def

(iii) Můžeme konstruovat následující odvození:

1	$\sim(\varphi_1 \sqcup \ldots \sqcup \varphi_i \sqcup \ldots \sqcup \varphi_n)$	předpoklad
2	$\quad \varphi_i$	hyp
3	$\quad \varphi_1 \sqcup \ldots \sqcup \varphi_i \sqcup \ldots \sqcup \varphi_n$	2 ($\sqcup I$)
4	$\quad \bot$	1,3 ($\bot I$)
5	$\sim\varphi_i$	2-4 (WIP)

(iv) Můžeme konstruovat následující odvození:

1	$\sim(\neg\varphi \to \alpha)$	předpoklad
2	$\mid\ \Box\sim(\neg\varphi \wedge \neg\alpha)$	hyp
3	$\mid\ (\sim(\neg\varphi \wedge \neg\alpha) \to \bot) \to \bot$	2, def
4	$\mid\ \mid\ \neg\varphi$	hyp
5	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg\alpha$	hyp
6	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg\varphi \wedge \neg\alpha$	4,5 $(\wedge I)$
7	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \sim(\neg\varphi \wedge \neg\alpha)$	hyp
8	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \bot$	6,7 $(\bot I)$
9	$\mid\ \mid\ \mid\ \sim(\neg\varphi \wedge \neg\alpha) \to \bot$	7-8 $(\to I)$*
10	$\mid\ \mid\ \mid\ \bot$	3,9 $(\to E)$
11	$\mid\ \mid\ \neg\alpha \to \bot$	5-10 $(\to I)$*
12	$\mid\ \mid\ \Box\alpha$	11, def
13	$\mid\ \mid\ \alpha$	12, toto lemma, bod (i)
14	$\mid\ \neg\varphi \to \alpha$	4-13 $(\to I)$*
15	$\mid\ \bot$	1,14 $(\bot I)$
16	$\sim\Box\sim(\neg\varphi \wedge \neg\alpha)$	2-15, (WIP)
17	$\Diamond(\neg\varphi \wedge \neg\alpha)$	16, def

(v) Můžeme konstruovat následující odvození:

1	φ	předpoklad
2	$\Diamond\neg\varphi$	předpoklad
3	$\sim\neg\neg\sim\neg\varphi$	2, def
4	$\mid\ \sim(\varphi \to \bot) \to \bot$	hyp
5	$\mid\ \mid\ \varphi \to \bot$	hyp
6	$\mid\ \mid\ \bot$	1,5 $(\to E)$
7	$\mid\ \sim(\varphi \to \bot)$	5-6 (WIP)
8	$\mid\ \bot$	4,7 $(\to E)$
9	$(\sim(\varphi \to \bot) \to \bot) \to \bot$	4-8 $(\to I)$*
10	$\neg\neg\sim\neg\varphi$	9, def
11	$\bot$	3,10 $(\bot I)$

(vi) Můžeme konstruovat následující odvození:

1	$\Box(\varphi \wedge \psi)$	předpoklad
2	$((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \bot) \rightarrow \bot$	1, def
3	$\quad \varphi \rightarrow \bot$	hyp
4	$\quad\quad \varphi \wedge \psi$	hyp
5	$\quad\quad \varphi$	4 ($\wedge E$)
6	$\quad\quad \bot$	3,5 ($\rightarrow E$)
7	$\quad (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \bot$	4-6 ($\rightarrow I$)*
8	$\quad \bot$	2,7 ($\rightarrow E$)
9	$(\varphi \rightarrow \bot) \rightarrow \bot$	3-8 ($\rightarrow I$)*
10	$\Box\varphi$	9, def

(vii) Můžeme konstruovat následující odvození:

1	$\Diamond(\varphi \wedge \psi)$	předpoklad
2	$\sim((\sim(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \bot) \rightarrow \bot)$	1, def
3	$\quad (\sim\varphi \rightarrow \bot) \rightarrow \bot$	hyp
4	$\quad\quad \sim(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \bot$	hyp
5	$\quad\quad\quad \sim\varphi$	hyp
6	$\quad\quad\quad\quad \varphi \wedge \psi$	hyp
7	$\quad\quad\quad\quad \varphi$	6 ($\wedge E$)
8	$\quad\quad\quad\quad \bot$	5,7 ($\bot I$)
9	$\quad\quad\quad \sim(\varphi \wedge \psi)$	6-8 (WIP)
10	$\quad\quad\quad \bot$	4,9 ($\rightarrow E$)
11	$\quad\quad \sim\varphi \rightarrow \bot$	5-10 ($\rightarrow I$)*
12	$\quad\quad \bot$	3,11 ($\rightarrow E$)
13	$\quad (\sim(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \bot) \rightarrow \bot$	4-12 ($\rightarrow I$)*
14	$\quad \bot$	2,13 ($\bot I$)
15	$\sim((\sim\varphi \rightarrow \bot) \rightarrow \bot)$	3-14 (WIP)
16	$\Diamond\varphi$	15, def

(viii) Předpokládejme, že $\varphi \vdash \psi$.

1	$\blacklozenge\varphi$	předpoklad
2	$\sim(\varphi \to \bot)$	1, def, eliminace $\sim\sim$
3	$\mid\ \psi \to \bot$	hyp
4	$\mid\ \mid\ \varphi$	hyp
5	$\mid\ \mid\ \psi$	4, $\varphi \vdash \psi$
6	$\mid\ \mid\ \bot$	3,5 ($\to E$)
7	$\mid\ \varphi \to \bot$	4-6 ($\to I$)*
8	$\mid\ \bot$	2,7 ($\bot I$)
9	$\sim(\psi \to \bot)$	3-8 (WIP)
10	$\blacklozenge\psi$	9, def

QED

Následující lemma ukazuje, že jistá omezená verze schématu (KP) je odvoditelná v našem systému přirozené dedukce. V jeho důkazu je opakovaně využito lemma 15.5.2. Nechť $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ zastupují libovolné formule jazyka L, které neobsahují disjunkci.

Lemma 15.5.3 $\vdash (\neg\varphi \rightarrow (\alpha_1 \sqcup \ldots \sqcup \alpha_n)) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \alpha_1) \sqcup \ldots \sqcup (\neg\varphi \rightarrow \alpha_n))$.

Důkaz: Můžeme konstruovat následující důkaz:

1	$\neg\varphi \rightarrow (\alpha_1 \sqcup \ldots \sqcup \alpha_n)$	hyp
2	$\sim((\neg\varphi \rightarrow \alpha_1) \sqcup \ldots \sqcup (\neg\varphi \rightarrow \alpha_n))$	hyp
3	$\sim(\neg\varphi \rightarrow \alpha_1)$	2, 15.5.2 (iii)
4	$\vdots$	
5	$\sim(\neg\varphi \rightarrow \alpha_n)$	2, 15.5.2 (iii)
6	$\Diamond(\neg\varphi \wedge \neg\alpha_1)$	3, 15.5.2 (iv)
7	$\vdots$	
8	$\Diamond(\neg\varphi \wedge \neg\alpha_n)$	5, 15.5.2 (iv)
9	$\blacklozenge((\neg\varphi \wedge \neg\alpha_1) \oplus \ldots \oplus (\neg\varphi \wedge \neg\alpha_n))$	6-8 $(\wedge I)$, (R4)
10	$\blacklozenge(\bigwedge_{i=1}^n \Diamond(\neg\varphi \wedge \neg\alpha_i) \wedge \Box\bigsqcup_{i=1}^n(\neg\varphi \wedge \neg\alpha_i))$	9, def
11	$\blacklozenge(\bigwedge_{i=1}^n \Diamond(\neg\varphi \wedge \neg\alpha_i) \wedge \Box(\neg\varphi \wedge \bigsqcup_{i=1}^n \neg\alpha_i))$	10, 15.5.2 (viii)
12	$\blacklozenge(\Diamond\neg\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond\neg\alpha_n \wedge \Box\neg\varphi)$	11, 15.5.2 (vi-viii)
13	$\sim((\Diamond\neg\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond\neg\alpha_n \wedge \Box\neg\varphi) \rightarrow \bot)$	12, def
14	$\Diamond\neg\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond\neg\alpha_n \wedge \Box\neg\varphi$	hyp
15	$\Box\neg\varphi$	14 $(\wedge E)$
16	$\neg\varphi$	15, 15.5.2 (ii)
17	$\alpha_1 \sqcup \ldots \sqcup \alpha_n$	1,16 $(\rightarrow E)$
18	α_1	hyp
19	$\Diamond\neg\alpha_1$	14 $(\wedge E)$
20	$\bot$	18,19, 15.5.2 (v)
21	$\vdots$	
22	α_n	hyp
23	$\Diamond\neg\alpha_n$	14 $(\wedge E)$
24	$\bot$	22,23, 15.5.2 (v)
25	$\bot$	17-24 $(\sqcup E)$
26	$(\Diamond\neg\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond\neg\alpha_n \wedge \Box\neg\varphi) \rightarrow \bot$	14-25 $(\rightarrow I)$*
27	$\bot$	13,26 $(\bot I)$
28	$(\neg\varphi \rightarrow \alpha_1) \sqcup \ldots \sqcup (\neg\varphi \rightarrow \alpha_n)$	2-27 (IP)
29	$(\neg\varphi \rightarrow \bigsqcup_{i=1}^n \alpha_i) \rightarrow \bigsqcup_{i=1}^n(\neg\varphi \rightarrow \alpha_i)$	1-28 $(\rightarrow I)$*

QED

Následující lemma říká, že každá formula jazyka L je dokazatelně ekvivalentní s nějakou disjunkcí formulí, které neobsahují disjunkci. Jisté varianty tohoto tvrzení jsme již využili v odlišném kontextu v předchozích dvou kapitolách (viz lemmata 13.4.8 a 14.6.3). I strategie důkazu je obdobná.

`Lemma 15.5.4` *Ke každé formuli φ existují formule $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ takové, že $\varphi \dashv\vdash \alpha_1 \sqcup \ldots \sqcup \alpha_n$.*

`Důkaz:` To může být dokázáno indukcí podle složitosti formule φ. Ukážeme pouze induktivní krok pro implikaci, který je nejsložitější a kde je využito lemma 15.5.3. Předpokládejme, že

(a) $\psi \dashv\vdash \beta_1 \sqcup \ldots \sqcup \beta_k$ $(k \geqslant 1)$,

(b) $\chi \dashv\vdash \gamma_1 \sqcup \ldots \sqcup \gamma_l$ $(l \geqslant 1)$.

Pak následující formule jsou dokazatelně ekvivalentní.

1. $\psi \to \chi$,
2. $(\beta_1 \sqcup \ldots \sqcup \beta_k) \to (\gamma_1 \sqcup \ldots \sqcup \gamma_l)$,
3. $\bigwedge_{i=1}^{k}(\beta_i \to (\gamma_1 \sqcup \ldots \sqcup \gamma_l))$,
4. $\bigwedge_{i=1}^{k}(\neg\neg\beta_i \to (\gamma_1 \sqcup \ldots \sqcup \gamma_l))$,
5. $\bigwedge_{i=1}^{k}((\neg\neg\beta_i \to \gamma_1) \sqcup \ldots \sqcup (\neg\neg\beta_i \to \gamma_l))$,
6. $\bigsqcup_{i_1=1}^{l} \cdots \bigsqcup_{i_k=1}^{l}((\neg\neg\beta_1 \to \gamma_{i_1}) \wedge \ldots \wedge (\neg\neg\beta_k \to \gamma_{i_k}))$.

Ekvivalence formulí 1. a 2. vyplývá z indukčních předpokladů (a) a (b). 3. může být jednoduše odvozena z 2. s pomocí pravidel $(\wedge I)$, $(\sqcup I)$, $(\to E)$ a $(\to I)^*$. 2. může být odvozena z 3. pomocí pravidel $(\wedge E)$, $(\sqcup E)$, $(\to E)$ a $(\to I)^*$. Lemma 15.5.2 (i) zajišťuje ekvivalenci mezi 3. a 4. Možnost odvodit 5. z 4. zajišťuje lemma 15.5.3 a k odvození 4. z 5. stačí použít pravidla $(\sqcup E)$, $(\sqcup I)$, $(\to E)$ a $(\to I)^*$. Ekvivalence formulí 5. a 6. platí díky tomu, že můžeme použít distributivní zákony, které jsou v systému odvoditelné. `QED`

Věta 15.5.5 vyplývá z lemmat 15.5.3 a 15.5.4. Zdůrazněme ještě jednou, že v této větě zastupují φ, ψ a χ formule jazyka L.

`Věta 15.5.5` $\vdash (\neg\varphi \to (\psi \sqcup \chi)) \to ((\neg\varphi \to \psi) \sqcup (\neg\varphi \to \chi))$.

15.6 Inkvizitivní sémantika se silnou negací

K inkvizitivní sémantice bychom mohli alternativně přidat silnou negaci ($-$), o které jsem se již krátce zmínil v oddílu 12.2. V tomto oddílu budeme pracovat s jazykem L^- vystavěném z atomických formulí, konstanty $\bot$, binárních operátorů $\to, \wedge, \sqcup$ a unárního operátoru $-$. Jazyk L tedy získáme odstraněním symbolu $-$. Budeme se nadále držet konvence, že prázdná množina není považována za informační stav. Pokud popírání kondicionálních vět zachytíme ve stylu Gaukerovy sémantiky z (Gauker, 2005), vypadají sémantické podmínky, které definují relace tvrditelnosti ($\Vdash^+$) a popiratelnosti ($\Vdash^-$) pro tento jazyk, následujícím způsobem:

T0 $a \nVdash^+ \bot$.

P0 $a \Vdash^- \bot$.

T1 $a \Vdash^+ p$ iff pro každé $s \in a$, $s(p) = 1$.

P1 $a \Vdash^- p$ iff pro každé $s \in a$, $s(p) = 0$.

T2 $a \Vdash^+ -\varphi$ iff $a \Vdash^- \varphi$.

P2 $a \Vdash^- -\varphi$ iff $a \Vdash^+ \varphi$.

T3 $a \Vdash^+ \varphi \sqcup \psi$ iff $a \Vdash^+ \varphi$ nebo $a \Vdash^+ \psi$.

P3 $a \Vdash^- \varphi \sqcup \psi$ iff $a \Vdash^- \varphi$ a zároveň $a \Vdash^- \psi$.

T4 $a \Vdash^+ \varphi \wedge \psi$ iff $a \Vdash^+ \varphi$ a zároveň $a \Vdash^+ \psi$.

P4 $a \Vdash^- \varphi \wedge \psi$ iff $a \Vdash^- \varphi$ nebo $a \Vdash^- \psi$.

T5 $a \Vdash^+ \varphi \to \psi$ iff pro každý stav $b \subseteq a$, pokud $b \Vdash^+ \varphi$, tak $b \Vdash^+ \psi$.

P5 $a \Vdash^- \varphi \to \psi$ iff pro nějaký stav $b \subseteq a$, $b \Vdash^+ \varphi$ a $b \Vdash^- \psi$.

O dané formuli jazyka L^- řekneme, že je logicky platná, když je tvrditelná v každém informačním stavu. Množinu všech takto platných formulí v jazyce L budu značit $InkL^-$. V tomto oddílu zformuluji nepřímou syntaktickou charakterizaci této logiky pomocí jedné modální logiky, kterou zavedu speciálně pro tento účel. Budu nyní používat následující terminologii. Modálním jazykem mL budeme rozumět jazyk formulí vystavěný z atomických formulí pomocí konstanty $\bot$ a spojek $\sqcup, \wedge, \to, \Box$. Jedná se tedy o rozšíření jazyka L o modalitu $\Box$. Modalita $\Diamond$ je zkratkou za $\neg\Box\neg$ (kde negace $\neg$ je stále definována pomocí předpisu $\neg\varphi =_{def} \varphi \to \bot$). Zavedu standardní kripkovskou sémantiku pro jazyk mL. Kripkovský model je opět chápán jako trojice $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$, kde W je neprázdná množina, R je binární relace na W a V je funkce přiřazující nějakou podmnožinu množiny W každé atomické formuli.

Relace $\models$ mezi prvky množiny W daného kripkovského modelu $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ a formulemi jazyka mL je definována následujícím způsobem:

$\mathcal{M}, s \not\models \bot$.

$\mathcal{M}, s \models p$ iff $s \in V(p)$, pro každou atomickou formuli p.

$\mathcal{M}, s \models \varphi \wedge \psi$ iff $\mathcal{M}, s \models \varphi$ a $\mathcal{M}, s \models \psi$.

$\mathcal{M}, s \models \varphi \sqcup \psi$ iff $\mathcal{M}, s \models \varphi$ nebo $\mathcal{M}, s \models \psi$.

$\mathcal{M}, s \models \varphi \to \psi$ iff $\mathcal{M}, s \not\models \varphi$ nebo $\mathcal{M}, s \models \psi$.

$\mathcal{M}, s \models \Box\varphi$ iff $\mathcal{M}, t \models \varphi$ pro každé t takové, že sRt.

Připomeňme, že intuicionistický kripkovský model je kripkovský model $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$, kde R je relace předuspořádání (tj. reflexivní a tranzitivní relace) na W a V je perzistentní: pokud $s \in V(p)$ a sRt, tak $t \in V(p)$. Intuicionistická relace tvrditelnosti (zde bude značena jako $\models_i$) mezi prvky množiny W daného intuicionistického kripkovského modelu $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ a formulemi jazyka L je definována tímto způsobem:

$\mathcal{M}, s \not\models_i \bot$.

$\mathcal{M}, s \models_i p$ iff $s \in V(p)$, pro každou atomickou formuli p.

$\mathcal{M}, s \models_i \varphi \wedge \psi$ iff $\mathcal{M}, s \models_i \varphi$ a $\mathcal{M}, s \models_i \psi$.

$\mathcal{M}, s \models_i \varphi \sqcup \psi$ iff $\mathcal{M}, s \models_i \varphi$ nebo $\mathcal{M}, s \models_i \psi$.

$\mathcal{M}, s \models_i \varphi \to \psi$ iff $\mathcal{M}, t \models_i \psi$ pro každé t takové, že sRt a $\mathcal{M}, t \models_i \varphi$.

Definujeme m-logiku kripkovského modelu $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ jako množinu formulí φ jazyka mL takových, že $\mathcal{M}, s \models \varphi$ pro každé $s \in W$. Analogicky je i-logika kripkovského modelu $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ definována jako množina těch formulí φ z L, že $\mathcal{M}, s \models_i \varphi$ pro každé $s \in W$.

Nechť A je množina atomických formulí. Relativně vůči této množině definujeme intuicionistický kripkovský model $\mathcal{M}^A = \left\langle \wp(W^A) - \{\varnothing\}, \supseteq, V^A \right\rangle$, kde W^A je množina všech možných světů vzhledem k A, tj. množina všech funkcí z A do pravdivostních hodnot $\{0, 1\}$, $\supseteq$ je relace nadmnožiny, a valuace V^A je definována takto: pokud $p \in A$, tak

$$V^A(p) = \{a \in \wp(W^A) - \{\varnothing\};\ \text{pro každé } s \in a, s(p) = 1\}$$

a pokud $p \notin A$, tak $V^A(p) = \varnothing$. Podobně jako např. v (Ciardelli & Roelofsen, 2011), inkvizitivní logika $InkL$ může být alternativně definována jako i-logika modelu $\mathcal{M}^{At}$, kde At je množina všech atomických formulí v jazyce L.

Nyní si můžeme položit otázku, co je m-logikou modelu M^{At}. Tuto logiku budeme označovat jako $mInkL$. Jednoduché sémantické pozorování ukazuje, že $mInkL$ a $InkL$ jsou spojeny prostřednictvím zjednodušeného Gödelova překladu, se kterým jsme se již seznámili v oddílu 9.3.2. Nyní budeme označovat tento překlad jako g a chápeme ho jako funkci z jazyka L do jazyka mL:

$$g(\bot) = \bot,$$

$$g(p) = p,$$

$$g(\varphi \wedge \psi) = g(\varphi) \wedge g(\psi),$$

$$g(\varphi \sqcup \psi) = g(\varphi) \sqcup g(\psi),$$

$$g(\varphi \to \psi) = \Box(g(\varphi) \to g(\psi)).$$

Vztah mezi $InkL$ a $mInkL$ je přesně vyjádřen v následující větě.

`Věta 15.6.1` *$\varphi \in InkL$ iff $g(\varphi) \in mInkL$, pro každou formuli $\varphi \in L$.*

Je evidentní, jaký překlad musíme použít, chceme-li podobným způsobem charakterizovat logiku $InkL^-$. Jedná se tentokrát o překlad z jazyka L^- do jazyka mL, který je definován pomocí následujících podmínek:

$$t(\bot) = \bot,$$

$$t(-\bot) = \bot \to \bot,$$

$$t(p) = p,$$

$$t(-p) = \Box(p \to \bot),$$

$$t(- - \varphi) = t(\varphi),$$

$$t(\varphi \wedge \psi) = t(\varphi) \wedge t(\psi),$$

$$t(-(\varphi \wedge \psi)) = t(-\varphi) \sqcup t(-\psi),$$

$$t(\varphi \sqcup \psi) = t(\varphi) \sqcup t(\psi),$$

$$t(-(\varphi \sqcup \psi)) = t(-\varphi) \wedge t(-\psi),$$

$$t(\varphi \to \psi) = \Box(t(\varphi) \to t(\psi)),$$

$$t(-(\varphi \to \psi)) = \Diamond(t(\varphi) \wedge t(-\psi)).$$

Následující věta ukazuje, jak lze charakterizovat logiku $InkL^-$ pomocí logiky $mInkL$.

`Věta 15.6.2` *$\varphi \in InkL^-$ iff $t(\varphi) \in mInkL$, pro každou formuli $\varphi \in L^-$.*

Pochopitelně je zde prostor pro jisté úpravy. Např. pokud bychom podmínku popiratelnosti pro implikaci definovali ve stylu konexivní logiky:

$$a \Vdash^- \varphi \to \psi \text{ iff pro každý stav } b \subseteq a, \text{ pokud } b \Vdash^+ \varphi, \text{ tak } b \Vdash^- \psi,$$

mohli bychom pro charakterizaci použít stejný překlad, s tím rozdílem, že bychom upravili poslední definitorickou rovnici:

$$t(-(\varphi \to \psi)) = \Box(t(\varphi) \to t(-\psi)).$$

Ve zbytku tohoto oddílu formuluji axiomatizaci logiky $mInkL$, a tím získáme na základě věty 15.6.2 také nepřímou syntaktickou charakterizaci logiky $mInkL^-$. Podobná logika byla též zavedena v (Punčochář, 2012) pod jménem $L(E1)$. Logika $L(E1)$ byla interpretována přirozeným způsobem jako epistemická modifikace Carnapovy modální logiky C. Přímo logika $mInkL$ byla popsána v (Punčochář, 2016a) odkud přebírám také příslušný kalkul a důkaz úplnosti. Struktura důkazu úplnosti pro logiku $mInkL$ je však stejná jako ta, která byla použita v (Punčochář, 2012) pro $L(E1)$. Analogický důkaz úplnosti pro standardní inkvizitivní logiku byl také předložen v (Ciardelli & Roelofsen, 2011).

Nechť $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ a ψ zastupují libovolné formule jazyka mL a p libovolnou atomickou formuli. Kalkul hilbertovského typu pro logiku $mInkL$ obsahuje axiomatická schémata (ClT), (K), (T), (4), (X1), (X2) a (Yn) pro každé přirozené číslo n:

Všechny formule logicky platné dle klasické logiky. (ClT)

$$\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi) \tag{K}$$

$$\Box\varphi \to \Box\Box\varphi \tag{4}$$

$$p \to \Box p \tag{X1}$$

$$\Box\Diamond p \to p \tag{X2}$$

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \Diamond\Box\varphi_i \to \Diamond(\bigwedge_{i=1}^{n} \Diamond\Box\varphi_i \wedge \Box\Diamond \bigsqcup_{i=1}^{n} \varphi_i) \tag{Yn}$$

Jedinými odvozovacími pravidly kalkulu jsou (mp) a (nec):

$$\varphi, \varphi \rightarrow \psi / \psi \tag{mp}$$

$$\varphi / \Box \varphi \tag{nec}$$

Tento kalkul budeme označovat jako C. Dokážeme, že C je korektní a úplný vzhledem k $mInkL$. Pro tento účel bude užitečné následující lemma.

`Lemma 15.6.3` *Nechť At je množina všech atomických formulí a $A \subseteq At$. Pak platí pro každou formuli $\varphi \in L$, která obsahuje pouze atomy z A, že φ je v i-logice modelu $\mathcal{M}^A$ iff φ je v i-logice modelu $\mathcal{M}^{At}$. Analogicky, pokud $\varphi \in mL$ a φ obsahuje pouze atomy z A, tak φ je v m-logice modelu $\mathcal{M}^A$ iff φ je v m-logice modelu $\mathcal{M}^{At}$.*

Tedy pokud chceme vědět, zda φ je v $InkL$, resp. v $mInkL$, stačí rozhodnout, zda φ je v i-logice, resp. v m-logice, konečného modelu $\mathcal{M}^A$, kde A je množina atomických formulí z φ. Důsledkem těchto úvah je rozhodnutelnost logik $InkL$ a $mInkL$. Budeme také potřebovat pojem p-morfismu.

`Definice 15.6.4` *Nechť $\mathcal{M}_1 = \langle W_1, R_1, V_1 \rangle$, $\mathcal{M}_2 = \langle W_2, R_2, V_2 \rangle$ jsou dva kripkovské modely a A je množina atomických formulí. Funkce f z W_1 do W_2 se nazývá p-morfismus z $\mathcal{M}_1$ do $\mathcal{M}_2$ vzhledem k A, když jsou splněny následující podmínky:*

1. *Pro každé $s \in W_1$ a $p \in A$, $s \in V_1(p)$ iff $f(s) \in V_2(p)$.*
2. *Pro každé $s, t \in W_1$, pokud sR_1t, tak $f(s)R_2f(t)$.*
3. *Pro každé $s \in W_1$ a $u \in W_2$, pokud $f(s)R_2u$, tak existuje $t \in W_1$ takové, že sR_1t a $f(t) = u$.*

Následující lemma představuje známý fakt, že p-morfismus je funkce, která zachovává platnost formulí. Pro důkaz viz např. (Chargov & Zakharyaschev, 1997).

`Lemma 15.6.5` *Nechť $\mathcal{M}_1 = \langle W_1, R_1, V_1 \rangle$, $\mathcal{M}_2 = \langle W_2, R_2, V_2 \rangle$ jsou dva kripkovské modely. Nechť f je p-morfismus z $\mathcal{M}_1$ do $\mathcal{M}_2$ vzhledem k množině atomických formulí A. Předpokládejme, že $s \in W_1$ a $\varphi \in mL$ je formule neobsahující jiné atomy než ty z A. Pak $\mathcal{M}_1, s \vDash \varphi$ iff $\mathcal{M}_2, f(s) \vDash \varphi$. Pokud $\mathcal{M}_1$ a $\mathcal{M}_2$ jsou intuicionistické kripkovské modely a $\varphi \in L$, tak také $\mathcal{M}_1, s \vDash_i \varphi$ iff $\mathcal{M}_2, f(s) \vDash_i \varphi$.*

Kripkovský model $\mathcal{M}$ je model kalkulu C, když každá formule dokazatelná v C je obsažena v m-logice modelu $\mathcal{M}$. Řekneme, že dané schéma je platné v $\mathcal{M}$, když každá instance tohoto schématu je obsažena v m-logice modelu $\mathcal{M}$. Následující lemma je klíčové pro důkaz úplnosti.

`Lemma 15.6.6` *Nechť $\mathcal{M}$ je kripkovský model kalkulu C a A konečná množina atomických formulí. Pak existuje p-morfismus z $\mathcal{M}$ do $\mathcal{M}^A$ vzhledem k A.*

`Důkaz:` Nechť je dán kripkovský model $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ kalkulu C a $A = \{p_1, \ldots, p_m\}$ je konečná množina atomických formulí. Pro libovolné $s \in W$ nechť $\bar{s}$ označuje funkci z A do pravdivostních hodnot takovou, že pro každé $p \in A$, $\bar{s}(p) = 1$ iff $s \in V(p)$. Řekneme, že $u \in W$ je finální, když platí $\bar{u} = \bar{v}$ pro každé v takové, že uRv. Funkce f z W do W^A je definována takto:

$$f(s) = \{\bar{t}; sRt \text{ a } t \text{ je finální}\}.$$

Musíme ukázat, že f je p-morfismus, takže musíme ověřit, že jsou splněny podmínky 1-3 z definice 15.6.4.

1. Nechť $p \in A$. Jelikož (X1) je platné v $\mathcal{M}$, platí, že pokud $\mathcal{M}, s \models p$, tak $\mathcal{M}^A, f(s) \models p$. Jelikož (X2) je platné v $\mathcal{M}$, dostáváme, že pokud $\mathcal{M}^A, f(s) \models p$, tak $\mathcal{M}, s \models p$.

2. Předpokládejme, že sRt. Jelikož (4) je platné v $\mathcal{M}$, dostáváme $f(t) \subseteq f(t)$, jak je požadováno.

3. Předpokládejme $u \subseteq f(s)$. Potom existují finální $u_1, \ldots u_n \in W$ takové, že $u = \{\bar{u_1}, \ldots \bar{u_n}\}$ a sRu_i pro každé i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Pro každé $v \in W$, nechť χ_v je formule $l_1 \wedge \ldots \wedge l_m$, kde l_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ je p_i, pokud $v \in V(p_i)$, a $l_i = \neg p_i$, pokud $v \notin V(p_i)$. Pak $\mathcal{M}, s \models \bigwedge_{i=1}^n \Diamond\Box\chi_{u_i}$. Jelikož (Y$n$) je platné v $\mathcal{M}$, platí $\mathcal{M}, s \models \Diamond(\bigwedge_{i=1}^n \Diamond\Box\chi_{u_i} \wedge \Box\Diamond \bigsqcup_{i=1}^n \chi_{u_i})$. Tedy, existuje $t \in W$ takové, že sRt a $\mathcal{M}, t \models \bigwedge_{i=1}^n \Diamond\Box\chi_{u_i} \wedge \Box\Diamond \bigsqcup_{i=1}^n \chi_{u_i}$. Z toho plyne, že $f(t) = u$. `QED`

Nyní jsem připraveni k důkazu úplnosti.

`Věta 15.6.7` *Formule φ z mL je dokazatelná v C iff $\varphi \in mInkL$.*

`Důkaz:` Systém je korektní vzhledem k $mInkL$, jak může být snadno ověřeno. Pro důkaz úplnosti předpokládejme, že φ není dokazatelná v C. Jelikož C je rozšíření logiky K (obsahuje (ClT), (K), (mp), (nec)), můžeme použít základní výsledek z modální logiky[8] a usoudit, že existuje kripkovský model $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ kalkulu C a $s \in W$ tak, že $\mathcal{M}, s \not\models \varphi$. Lemma 15.6.6 zaručuje existenci p-morfismu z $\mathcal{M}$ do $\mathcal{M}^A$ vzhledem k množině A obsahující atomy, které se vyskytují v φ. Tedy dle lemma 15.6.5, $\mathcal{M}^A, f(s) \not\models \varphi$. Tedy φ není obsažena v m-logice modelu $\mathcal{M}^A$. Lemma 15.6.3 nás pak vede k závěru, že φ není obsažena v m-logice modelu $\mathcal{M}^{At}$, tedy $\varphi \notin mInkL$. `QED`

[8] Viz např. (Blackburn, de Rijke & Venema, 2001).

Jak jsem již uvedl, na základě věty 15.6.2 poskytuje axiomatizace $mInkL$ také nepřímou syntaktickou charakterizaci logiky $InkL^{-}$. Alternativně by bylo možné charakterizovat logiku $InkL^{-}$ pomocí inkvizitivní sémantiky se slabou negací. Postupoval jsem však oklikou a zavedl za účelem charakterizace logiku $mInkL$, jelikož tento systém je sám o sobě technicky zajímavý jako přirozený modální korelát inkvizitivní sémantiky.

15.7 Shrnutí

V této závěrečné kapitole jsem přidal nejprve slabou a poté silnou negaci k inkvizitivní sémantice. Slabá negace dané věty je tvrditelná v daném stavu, když věta sama v tomto stavu tvrditelná není. Slabá negace tedy vyjadřuje popření tvrditelnosti. Pro zavedení silné negace je třeba do sémantiky doplnit vedle podmínek tvrditelnosti též podmínky popiratelnosti a silná negace vyjadřuje popiratelnost v silném slova smyslu. Hlavním přínosem této kapitoly byla formulace kalkulu přirozené dedukce pro inkvizitivní sémantiku se slabou negací a důkaz úplnosti tohoto kalkulu. Též inkvizitivní sémantiku se silnou negací jsem syntakticky charakterizoval, avšak nepřímo, pomocí hilbertovského kalkulu pro specifickou modální logiku, do které je možné inkvizitivní sémantiku se silnou negací přeložit.

Závěr

Literatura vztahující se k logickému problému kondicionálních vět je velmi rozsáhlá a nepřehledná. Nebylo mým cílem (a ani by to nebylo v rozumných mezích možné) podat vyčerpávající přehled dostupných teorií. Místo toho jsem se omezil na několik málo základních přístupů, které mi posloužily jako východisko pro vytvoření vlastního systému. Tento systém jsem nazval sémantika striktní tvrditelnosti. Mám-li nyní shrnout hlavní rysy tohoto přístupu, musím zejména zopakovat, že se jedná o přístup epistemický, který do centra staví pojem tvrditelnosti a tímto pojmem nahrazuje tradiční pojem pravdivosti. Tvrditelnost je vyhodnocována vzhledem k informačním stavům a tvrditelné je v daném informačním stavu to, pro co máme z hlediska tohoto stavu dostatek evidence. Přitom jsem přijal idealizační princip, který říká, že tvrditelné je pouze to, čehož opak je zcela vyloučen – proto mluvím o striktní tvrditelnosti, která se v tomto ohledu odlišuje od tvrditelnosti, jak s ní pracuje pravděpodobnostní logika.

V klasické logice jsou všechny centrální sémantické pojmy (logická platnost a neplatnost vět, konzistence, vyplývání a logická ekvivalence) vymezeny pomocí pojmu pravdivosti. V sémantice striktní tvrditelnosti definice těchto pojmů vypadají stejně, s tím jediným, avšak podstatným rozdílem, že pravdivost je nahrazena tvrditelností. Např. je-li v klasické logice logická platnost vět vymezena jako jejich univerzální pravdivost (pravdivost při každé interpretaci mimologických symbolů), je v sémantice tvrditelnosti vymezena jako univerzální tvrditelnost (tvrditelnost při každé interpretaci mimologických symbolů). Podobně vyplývání není uchopeno jako přenos pravdivosti, nýbrž jako přenos tvrditelnosti, atd.

Posun od pravdivosti k tvrditelnosti vyvolává potřebu upravit hranici mezi pragmatikou a sémantikou, neboť tvrditelnost je standardně považována za pragmatický pojem. Kladl jsem důraz na to, že nějaká hranice mezi pragmatikou a sémantikou musí existovat, a nebylo tedy mým záměrem rozdíl mezi těmito oblastmi ignorovat. Pokusil jsem se však hranici oddělující sémantiku a pragmatiku modifikovat a upravit tak, aby některé aspekty pojmu tvrditelnosti (konkrétně se jedná zejména o Griceovu maximu kvality) mohly být považovány za sémanticky relevantní.

Má-li se vztahovat logika k přirozenému jazyku, je jejím cílem modelovat vztahy (logického) vyplývání, které lze v přirozeném jazyce identifikovat. Avšak chceme-li vytvořit takovýto model, musíme učinit řadu nesamozřejmých rozhodnutí, která podstatně ovlivní povahu výsledného aparátu. Fakt značné volnosti v případě takovýchto rozhodnutí ospravedlňuje současnou pluralitu logických systémů.

První rozhodnutí, které je třeba učinit, se týká toho, jak jemný logický slovník chceme zvolit, tedy jaké typy výrazů chceme považovat za logické a jaké za mimologické. V této práci jsem se pohyboval většinou na úrovni výrokové logiky a její základní jazyk jsem příležitostně doplňoval o další operátory.

Každý model úsudkové praxe přirozeného jazyka nutně musí přijmout nějaké idealizační principy. V klasické logice mezi takové principy patří zejména předpoklad, že každý výrok je buďto pravdivý, nebo nepravdivý – nic mezi tím, ani mimo to. V logice pravděpodobnosti je podobně idealizačním principem to, že vzhledem k danému informačnímu stavu můžeme u každého výroku jednoznačně charakterizovat jeho pravděpodobnost pomocí konkrétního čísla mezi nulou a jedničkou. V sémantice striktní tvrditelnosti jsem přijal idealizaci, že tvrditelné je pouze to, u čeho nepřipouštíme opak.

Povaha idealizace se promítne do podoby logických zákonů, které daný systém určuje. V přirozeném jazyce vždy budou existovat logicky relevantní jevy, které budou založeny právě na skutečnosti, že jisté idealizační principy v praxi neplatí. A pokud jsou takové jevy systematické, je vždy legitimní pokusit se je reflektovat pomocí logického systému a s ohledem na to příslušné idealizační principy odmítnout. Jako příklad můžeme uvést jevy vycházející z faktu, že v běžném usuzování pracujeme téměř vždy s nejistými předpoklady a oprávněně tvrdíme i to, co se ve světle dalších okolností může ukázat jako nepravdivé. Tato skutečnost vede k jevům, které jsme pozorovali pod hlavičkou tzv. paradoxů materiální implikace první a druhé skupiny. Pravděpodobnostní logiku považuji za úspěšný model zohledňující tyto skutečnosti a adekvátně řešící uvedené paradoxy. Ale viděli jsme, že tento model má svá podstatná omezení a přijmeme-li ho, musíme se mnohého vzdát. Je tedy též legitimní vydat se jinou cestou a přijmout idealizační principy, které nám tato omezení pomohou překonat. Tím se ovšem zase musíme vzdát ambice reflektovat uvedené logické jevy přirozeného jazyka. Tak tedy v sémantice tvrditelnosti z dobrých důvodů považujeme za logicky platné ty úsudkové formy, pod které spadaly zmíněné paradoxy první a druhé skupiny. Aparát sémantiky striktní tvrditelnosti nemá k uvedeným jevům co říci, neboť vznikají díky tomu, že idealizační princip, na kterém celý tento systém stojí, nemá univerzální platnost. Avšak sémantika striktní tvrditelnosti umožňuje jiné věci. Umožňuje např. adekvátním způsobem řešit další paradoxy materiální implikace, které jsem zařadil do třetí a čtvrté skupiny a na které zase nestačí pravděpodobnostní logika díky svým podstatným omezením.

Paradoxy třetí a čtvrté třídy vznikaly z interakce negace, resp. disjunkce s implikací. Řešení, které jsem navrhl v této práci, je založeno na představě, že za tyto paradoxy není zodpovědná ani tak implikace, jako spíše negace a disjunkce. Sémantika striktní tvrditelnosti umožňuje zavést alternativní operátory pro modifikované verze negace a disjunkce, pomocí kterých lze paradoxy uspokojivě vyřešit.

Ve své základní verzi vede sémantika striktní tvrditelnosti pouze k nestandardní sémantice pro klasickou výrokovou logiku. To ovšem považuji za základní pozitivní aspekt tohoto přístupu, neboť, jak jsem ukázal v kapitole o materiální implikaci, klasická logika představuje skutečně přirozený výchozí bod, o který je rozumné se opřít i přesto, že jsou s ní spjaty četné „paradoxy".

Základní myšlenka této práce je, že věty obvykle tvrdíme relativně vůči nějakému prostoru možností. Některé věty se nejprve vyhodnotí v jednotlivých možnostech tohoto prostoru a na základě toho se pak sekundárně vyhodnotí vůči celému prostoru. Jiné věty se však primárně vyhodnotí vůči celku všech možností, aniž by se nejprve musely vyhodnotit v jednotlivých možnostech. O takových větách říkám, že mají primárně podmínky tvrditelnosti a nemají přirozené podmínky pravdivosti. Typickým příkladem takovýchto vět jsou modální věty typu *Možná, že A*. Mezi tyto věty jsem zařadil i kondicionály. Avšak kdybychom chtěli za každou cenu stanovit pro kondicionály nějaké podmínky pravdivosti na základě projekce tvrditelnosti do jednotlivých možných světů, základní sémantika striktní tvrditelnosti ukazuje, v jakém smyslu jsme takto vedeni k tabulce materiální implikace.

Výhodou základní sémantiky striktní tvrditelnosti je, že vede přímočaře k řadě zajímavých rozšíření a zobecnění – a to způsobem, který ve standardní sémantice klasické logiky není dostupný. Ve své obecné verzi vede sémantika striktní tvrditelnosti k nestandardní sémantice pro intuicionistickou logiku. S tím souvisí řada zajímavých technických problémů, které jsem podrobně zkoumal v závěrečné části této práce. Zde bych rád znovu zdůraznil, že specifikum tohoto systému spočívá v netradičním způsobu, jakým je v sémantice striktní tvrditelnosti kombinován algebraický přístup s přístupem relačním.

Tato práce si nekladla za cíl podat univerzální teorii základních výrokových operátorů, která by poskytovala odpověď na veškeré problémy s nimi spjaté. Sémantika striktní tvrditelnosti modeluje specifickým způsobem specifický typ logických jevů přirozeného jazyka. Tím však nijak nepopírá legitimitu jiných, alternativních přístupů.

Literatura

Adams, E. W. (1965). A logic of conditionals, *Inquiry*, 8, 166–97.

Adams, E. W. (1970). Subjunctive and indicative conditionals. *Foundations of Language*, 6, 89–94.

Adams, E. W. (1975). *The logic of conditionals*. Dordrecht: Reidel.

Adams, E. W. (1998). *A primer of probability logic*. Stanford: CSLI Publications.

Addison, J. W., Henkin, L., Tarski, A., eds., (1965). *The theory of models. Proceedings of the 1963 international symposium at Berkeley*. Amsterdam: North-Holland.

Alexandrov, P. (1937). Diskrete Räume. *Matematicheskii Sbornik*, 2, 501–519.

Aloni, M., Bastiaanse, H., de Jager, T., Schulz, K., eds., (2010). *Logic, language, and meaning: selected papers from the 17th Amsterdam colloquium*. Berlín: Springer.

Anderson, A. R. (1951). A note on subjunctive and counterfactual conditionals. *Analysis*, 12, 35–38.

Anderson, A. R., Belnap, N. D. (1975). *Entailment: the logic of relevance and necessity*. Princeton: Princeton University Press.

Arló-Costa, H. (1999). Belief revision conditionals: *basic* iterated systems. *Annals of Pure and Applied Logic*, 96, 3–28.

Austin, J. L. (1961). Ifs and cans. In (Urmson & Warnock, 1961), 205–232.

Baader, F. & Schulz, K., eds., (1996). *Frontiers in combining systems*. Norwell: Kluwer Academic Publisher.

Becker, O. (1930). Zur Logik der Modalitäten, *Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung*, 11, 497–548.

Bennett, J. (2003) *A philosophical guide to conditionals*. New York: Oxford University Press.

Blackburn, P., de Rijke, M., Venema, Y. (2001). *Modal logic*. Cambridge: Cambridge University Press.

Bledin, J. (2014). Logic informed, *Mind*, 123, 277–316.

Blyth, T. S. (2005). *Lattices and Ordered Algebraic Structures*. Londýn: Springer.

Bolzano, B. (1837). *Wissenschaftslehre*. Sulzbach: J. E. v. Seidel.

Boole, G. (1847). *Mathematical analysis of logic*. Londýn: Macmillan.

Boole, G. (1854). *An investigation of the laws of thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities*. Londýn: Macmillan.

Brandom, R. (1994). *Making it explicit*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Brouwer, L. E. J. (1905). *Leven, Kunst en Mystiek*. Delft: Waltman.

Brouwer, L. E. J. (1907). *Over de grondslagen der wiskunde*. Amsterdam: Univerzita Amsterdam.

Brouwer, L. E. J. (1908). De onbetrouwbaarheid der logische principes, *Tijdschrift voor wijsbegeerte*, 2, 152–158.

Brouwer, L. E. J. (1914). Intuitionism and formalism, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 20, 81–96.

Cantwell, J. (2008). The logic of conditional negation, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 49, 245–260.

Carnap, R. (1932). Überwindung der Metaphysik durch logische Analyse der Sprache, *Erkenntnis*, 2, 219–241.

Carnap, R. (1934). *Logische Syntax der Sprache*. Vídeň: Springer.

Carnap, R. (1942). *Introduction to Semantics*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Carnap, R. (1947). *Meaning and necessity*. Chicago: University of Chicago Press.

Ciardelli, I. (2009). *Inquisitive semantics and intermediate Logics*. Magisterská práce, Univerzita Amsterdam.

Ciardelli, I. (2010). A first-order inquisitive semantics, In (Aloni et al., 2010), 234–243.

Ciardelli, I., Roelofsen, F. (2011). Inquisitive logic, *Journal of Philosophical Logic*, 40, 55–94.

Ciardelli, I., Groenendijk, J., Roelofsen, F. (2012). *Inquisitive semantics*. Poznámky k přednáškovému cyklu na NASSLLI (dostupné na https://sites.google.com/site/inquisitivesemantics/)

Ciardelli, I., Groenendijk, J., Roelofsen, F. (2013). Inquisitive semantics: a new notion of meaning, *Language and Linguistics Compass*, 7, 459–476.

Ciardelli, I. (2016a). Dependency as Question Entailment. Vyjde in Dependence logic: theory and applications. Springer.

Ciardelli, I. (2016b). Questions as information types. V recenzním řízení.

Copeland, J. (2002). The genesis of possible worlds semantics. *Journal of Philosophical Logic*, 31, 99–137.

Crocco, G., Feriñas del Cerro, L., Herzig, A., eds., (1995). *Conditionals: from philosophy to computer science*. Oxford: Oxford University Press.

Dančák, M., Punčochář, V., eds., (2014). *The Logica Yearbook 2013*. Londýn: College Publications.

Declerck, R., Reed, R. (2001). *Conditionals. A comprehensive empirical analysis*. Berlín: Mouton.

de Lavalette, G., Hendriks, L., de Jongh, D. (2012). Intuitionistic implication without disjunction, *Journal of Logic and Computation*, 22, 375–404.

Dennett, D. (1996). *Kinds of minds*. New York: Basic Books. Český překlad: Dennett, D. (2004): *Druhy myslí*. Praha: Academia.

Detlefsen, M. (1990). Brouwerian intuitionism. *Mind*, 99, 501–534.

Divers, J. (2002). *Possible worlds*. Londýn: Routledge.

Dummett, M. (1964). Bringing about the past, *Philosophical Review*, 73, 338–359.

Dummett, M. (1977). *Elements of Intuitionism.* Oxford: Clarendon Press.

Dummett, M., Crossley, J. N., eds., (1965). *Formal systems and recursive functions.* Amsterdam: North-Holland.

Edgingtonová, D. (1986). Do conditionals have truth-conditions? *Critica*, 18, 3–30.

Edgingtonová, D. (1995). On conditionals, *Mind*, 104, 235-329.

Edgingtonová, D. (2001). Conditionals. In (Goble, 2001), 385–414.

Edgingtonová, D. (2006). Conditionals. *Stanford Encyclopedia of Philosophy.* URL: www.plato.stanford.edu/entries/conditionals/

Evans, J. S. B. T., Newstead, S. E., Byrne, R. M. J. (1993). *Human reasoning. The psychology of deduction.* Hove: Lea.

Etchemendy, J. (1990). *The Concept of Logical Consequence.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Etlin, D. (2009). The problem of noncounterfactual conditionals, *Philosophy of Science*, 76, 676–688.

Fariñas, L. & Herzig, A. (1996). Combining classical and intuitionistic logic, or: intuitionistic implication as a conditional. In (Baader & Schulz, 1996), 93–102.

Feferman, S. (1998). *In the light of logic.* Oxford: Oxford University Press.

Fine, K. (1975). Review of Lewis's Counterfactuals. *Mind*, 84, 451–458.

Fine, K. (2014). Truth-maker semantics for intuitionistic logic, *Journal of Philosophical Logic*, 43, 221–246.

Fitch, F. (1952). *Symbolic logic. An introduction.* New York: The Ronald Press Company.

Frege, G. (1879). *Begriffsschrift.* Halle: L. Nebert.

Frege, G. (1884). *Die Grundlagen der Arithmetik.* Vratislav: W. Koebner.

Frege, G. (1892). Über Sinn und Bedeutung. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 100, 25–50.

Frege, G. (1918). Der Gedanke. Eine logische Untersuchung. *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus*, 1, 58–77.

Gamut, L., T., F. (1991). *Logic, language and meaning. Volume II: Intensional logic and logical grammar.* Chicago: University of Chicago Press.

Gauker, Ch. (2005). *Conditionals in context.* Cambridge, MA: MIT Press.

Gazdar, G. (1979). *Pragmatics. Implicature, presupposition, and logical form.* New York: Academic Press.

Gentzen, G.(1935). Untersuchungen über das logische Schliessen I-II, *Mathematische Zeitschrift*, 39, 176-210, 405–431.

Gibbard, A. (1981). Two recent theories of conditionals. In (Harper, Stalnaker & Pearce, 1981), 211–247.

Glivenko, V. (1928). Sur la logique de M. Brouwer, *Académie Royale de Belgique, Bulletin de la classe des sciences*, 14, 225–228.

Glivenko, V. (1929). Sur quelques points de la logique de M. Brouwer, *Académie Royale de Belgique, Bulletin de la classe des sciences*, 15, 183–188.

Goble, L., ed., (2001). *The Blackwell guide to philosophical logic.* Oxford: Blackwell.

Goodman, N. (1947). The problem of counterfactual conditionals, *The Journal of Philosophy*, 44, 113–128. Vyšlo též in (Goodman, 1955, str. 3–27).

Goodman, N. (1955). *Fact, fiction, and forecast.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Grätzer, G. (2011). Lattice theory: foundation. Basilej: Birkhäuser.

Grice, H. P. (1967). Logic and conversation. (The William James lectures.) Publikováno jako první část (Grice, 1989).

Grice, H. P. (1989). *Studies in the way of words.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Groenedijk, J., Janssen, T. M. V., Stokhof, M., eds., (1984). *Truth, interpretation and information: selected papers from the third Amsterdam colloquium.* Dordrecht: Foris Publications.

Groenendijk, J., Roelofsen, F. (2009). Inquisitive semantics and pragmatics. In (Larrazabal & Zubeldia, 2009), 41–72.

Hájek, P. (1998). *Metamathematics of fuzzy logics.* Dordrecht: Kluwer.

Hansson, S. O. (1995). The emperor's new clothes: some recurring problems in the formal analysis of counterfactuals. In (Crocco, Feriñas del Cerro & Herzig, 1995), 13–32.

Harper, W. L., Stalnaker, R., Pearce, G. (1981). *Ifs.* Dordrecht: Reidel.

Heyting, A. (1930a). Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik I. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 42–56.

Heyting, A. (1930b). Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik II. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 57–71.

Heyting, A. (1930c). Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik III. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 158–169.

Heyting, A. (1956). *Intuitionism. An introduction.* Amsterdam: North-Holland. (V textu odkazováno na třetí vydání z roku 1971.)

Hintikka, J. (1962). *Knowledge and belief.* Ithaca: Cornell University Press.

Humberstone, L. (1979) Interval semantics for tense logic: some remarks, *Journal of Philosophical Logic*, 8, 171–196.

Husserl, E. (1900). *Logische Untersuchungen. Erster Teil: Prolegomena zur reinen Logik.* Halle: Max Niemeyer.

Chargov, A., Zakharyaschev, M. (1997). *Modal logic.* Oxford: Clarendon Press.

Childers, T., Majer, O. (2010). Kondicionály. In (Svoboda a kol., 2010), 153–191.

Chisholm, R. M. (1946). The contrary-to-fact conditional. *Mind*, 55, 289–307.

Inhelderová, B., Piaget, J. (2007). *Psychologie dítěte.* Praha: Portál.

Jackson, F. (1979). On assertion and indicative conditionals, *The Philosophical Review*, 88, 565–589.

Jackson, F. (1981). Conditionals and possibilia, *Proceedings of the Aristotelian Society*, 81, 125–137.

Jeffrey, R. (2004). Subjective probability (the real thing). Cambridge: Cambridge University Press.

Kahneman, D. (2011). Thinking fast and slow. New York : Farrar, Straus and Giroux.

Kapsner, A. (2014). Logics and falsifications. A new perspective on constructivist semantics. Dordrecht: Springer.

Kripke, S. (1959). A completeness theorem in modal logic, *Journal of Symbolic Logic*, 24, 1–14.

Kripke, S. (1963a). Semantical considerations on modal logic, *Acta Philosophica Fennica*, 16, 83–94.

Kripke, S. (1963b). Semantical analysis of modal logic I: normal modal propositional calculi, *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 9, 67–96.

Kripke, S. (1965a). Semantical analysis of intuitionistic logic I. In (Dummett & Crossley, 1965), 92–130.

Kripke, S. (1965b). Semantical analysis of modal logic II: non-normal modal propositional calculi. In (Addison, Henkin & Tarski, 1965), 206–220.

Kripke, S. (1983). *Naming and necessity.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Kolman, V. (2002). *Logika Gottloba Frega.* Praha: Filosofia.

Kolman, V. (2008). *Filosofie čísla.* Praha: Filosofia.

Kolman, V., Punčochář, V. (2015). *Formy jazyka. Úvod do logiky a její filosofie.* Praha: Filosofia.

Kolmogorov, A. (1925). O principe tertium non datur, *Matematiceskij Sbornik*, 32, 646–667.

Kolodny, N., MacFarlane, J. (2010). Ifs and oughts, *The Journal of Philosophy*, 107, 115–143.

Larrazabal, J. M., Zubeldia, L., eds., (2009). *Meaning, content, and argument: proceedings of the ILCLI international workshop on semantics, pragmatics, and rhetoric.* San Sebastian: University of the Basque Country Press.

Lewis, C. I. (1912). Implication and the algebra of logic, *Mind*, 21, 522–531.

Lewis, C. I. (1918). *A survey of symbolic logic.* Berkeley: University of California Press.

Lewis, C. I., Langford, C. H. (1918). *Symbolic logic.* New York: Century Company.

Lewis, C. I. (1960). *A survey of symbolic logic.* New York: Dover Publications.

Lewis, D. (1968). Counterpart theory and quantified modal logic, *Journal of Philosophy*, 65, 113–126.

Lewis, D. (1973a). *Counterfactuals.* Oxford: Basil Blackwell.

Lewis, D. (1973b). Counterfactuals and comparative possibility, *Journal of Philosophical Logic*, 2, 418–446.

Lewis, D. (1976). Probabilities of conditionals and conditional probabilities, *Philosophical Review*, 85, 297-–315.

Lewis, D. (1986). *On the plurality of worlds.* Oxford: Basil Blackwell.

Lojko, P. (2012). *Inquisitive semantics and the paradoxes of material implication.* Magisterská práce, Univerzita Amsterdam.

Lucio, P. (2000) Structured sequent calculi for combining intuitionistic and classical first-order logic, *Frontiers of Combining Systems, Lecture Notes in Computer Science*, 1794, 88–104.

Lycan, W. G. (2001). *Real conditionals.* Oxford: Oxford University Press.

Maksimova, L. (1986). On maximal intermediate logics with the disjunction property, *Studia Logica*, 45, 69–75.

Mares, E. D. (2004). *Relevant logic. A philosophical interpretation.* New York: Cambridge University Press.

McGee, V. (1985). A counterexample to modus ponens, *The Journal of Philosophy*, 82, 462–471.

McGee, V. (1989). Conditional probabilities and compounds of conditionals, *The Philosophical Review*, 98, 485–541.

Medvedev, J. T. (1962). Finitnye zadači, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 142, 1015–1018.

Mellor, D. H., ed., (1990). *F. P. Ramsey: Philosophical papers.* Cambridge: Cambridge University Press.

Miglioli, P., Moscato, U., Ornaghi, M., Quazza, S., Usberti, G. (1989). Some results on intermediate constructive logics, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 30, 543–562.

Mill, J. S. (1843). *A system of logic, ratiocinative and inductive.* Londýn: Parker.

Moore, G. E. (1912). *Ethics.* Londýn: Williams & Norgate.

Moore, G. E. (1942). *A reply to my critics.* In (Schilpp, 1942), 543–667.

Morris, Ch. (1938). *Foundations of the theory of signs. (International Encyclopedia of Unified Science).* Chicago: University of Chicago Press.

Nelson, D. (1949). Constructible falsity, *Journal of Symbolic Logic*, 14, 16–26.

Odintsov, S. (2008). *Constructive negations and paraconsistency.* Dordrecht: Springer.

Peckhaus, V. (1997). *Logik, Mathesis universalis und allgemeine Wissenschaft. Leibniz und die Wiederentdeckung der formalen Logik im 19. Jahrhundert.* Berlín: Akademie Verlag.

Parry, W. T. (1970). In memoriam: Clarence Irving Lewis, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 11, 129–140.

Peregrin, J., Svoboda, V. (2013). Criteria for logical formalization, *Synthese*, 190, 2897–2924.

Peregrin, J. (1998). *Úvod do teoretické sémantiky.* Praha: Karolinum.

Peregrin, J. (1999). The Pragmatization of Semantics. In (Turner, 1999), 419-442.

Peregrin, J. (2014). *Inferentialism: why rules matter.* Basingstoke: Palgrave.

Prawitz, D. (1965). *Natural deduction: a proof-theoretical study.* Uppsala: Almqvist & Wicksell.

Punčochář, V. (2009). *Sémantika některých neobvyklých modálních logik*, magisterská práce, Univerzita Karlova v Praze.

Punčochář, V. (2010). Carnapova modální logika C, *Organon F*, 17, 163–184.

Punčochář, V. (2012). Some modifications of Carnap's modal logic, *Studia Logica*, 100, 517–543.

Punčochář, V. (2013). Pravdivost vs. tvrditelnost, *Organon F*, 20, mimořádné číslo 1, 122–143.

Punčochář, V. (2014a). Intensionalisation of logical operators. In (Dančák & Punčochář, 2014), 173–186.

Punčochář, V. (2014b). Indikativní a subjunktivní hypotetické soudy: epistemický vs. ontický přístup, *Organon F*, 21, mimořádné číslo 1, 119–137.

Punčochář, V. (2014c). A new semantic framework for modal logic, *Philosophical Alternatives*, 23(6), 47–59.

Punčochář, V. (2015a). Weak negation in inquisitive semantics, *Journal of Logic, Language and Information*, 24, 323–355.

Punčochář, V. (2015b). A generalization to inquisitive semantics, *Journal of Philosophical Logic*, Online first, DOI: 10.1007/s10992-015-9379-1.

Punčochář, V. (2016a). Semantics of assertibility and deniability. Vyjde in Redmond, J., Pombo Martins, O., Nepomuceno Fernandez, A., eds., *Epistemology, Knowledge and the Impact of Interaction.* Springer.

Punčochář, V. (2016b). A nonstandard semantic framework for intuitionistic logic. Vyjde in Arazim, P., Dančák, M., eds., *The Logica Yearbook 2015.* College Publications.

Punčochář, V. (2016c). Algebras of information states. V recenzním řízení.

Ramsey, F. P. (1929). General propositions and causality. In (Mellor, 1990), 145–163.

Rescher, N., ed., (1968). *Studies in logical theory.* Oxford: Blackwell.

Rescher, N. (1964). *Hypothetical rasoning.* Amsterdam: North-Holland.

Rescher, N. (2007). *Conditionals.* Londýn & Cambridge, MA: MIT Press.

Rieger, A. (2013). Conditionals are material: the positive arguments, *Synthese*, 190, 3161–3174.

Routley, R., Plumwood, V., Meyer, R. K., Brady R. T. (1983). *Relevant logics and their rivals I.* Atascardero: Ridgeview.

Russell, B., Whitehead, A. N. (1910-1913). *Principia mathematica.* Cambridge: Cambridge University Press.

Sanford, D. H. (1989). *If P, then Q: conditionals and the foundations of reasoning.* Londýn: Routledge.

Sano, K. (2011). First-order inquisitive pair logic, *Logic and Its Applications, Lecture Notes in Computer Science*, 6521, 147–161.

Sedlár, I. (2009). C. I. Lewis on possible worlds, *History and Philosophy of Logic*, 30, 283–291.

Schilpp, P. A., ed., (1942). *The philosophy of G. E. Moore.* Evanston: Tudor.

Simons, M. (2005). Dividing things up: the semantics of *or* and the modal/*or* interaction, *Natural Language Semantics*, 13, 271–316.

Smith, P. (2003). *An introduction to formal logic.* Cambridge: Cambridge University Press.

Stalnaker, R. C. (1968). A theory of conditionals. In (Rescher, 1968), 98–112.

Stalnaker, R. C., Thomason, R. H. (1970). A semantic analysis of conditional logic, *Theoria*, 36, 23–42.

Stalnaker, R. C. (1975). Indicative conditionals, *Philosophia*, 5, 269–286.

Stalnaker, R. C. (1976). Possible worlds, *Noûs*, 10, 65–75.

Stalnaker, R. C. (1998). On the representation of context, *Journal of Logic, Language, and Information*, 7, 3–19.

Stalnaker, R. C. (1999). *Context and content.* New York: Oxford University Press.

Svoboda, V. a kol. (2010). *Logika a přirozený jazyk.* Praha: Filosofia.

Tarski, A. (1938). Der Aussagenkalkül und die Topologie, *Fundamenta mathematicae*, 31, 103–134.

Tarski, A. (1944). The Semantic Conception of Truth and the Foundations of Semantics. *Philosophy and Phenomenological Research*, 4, 341–376.

Thomason, R. H. (1970). A Fitch-style formulation of conditional logic, *Logique et Analyse*, 52, 397–412.

Tichý, P. (1976). A counterexample to the Stalnaker-Lewis analysis of counterfactuals, *Philosophical Studies*, 29, 271–273.

Turner, K., ed., (1999). *The Semantics/Pragmatics Interface from Different Points of View*. Oxford: Elsevier.

Urmson, J. O. Warnock, G. J., eds., (1961). *J. L. Austin: Philosophical papers*. Oxford: Oxford University Press.

Urquhart, A. (1972). Semantics for relevant logics, *The Journal of Symbolic Logic*, 37, 159–169.

Väänänen, J. (2007). *Dependence logic*. Cambridge: Cambridge University Press.

van Dalen, D. (2001). Intuitionistic logic. In (Goble, 2001), 224–257.

van Ditmarsch, H., van der Hoek, W., Kooi, B. (2008). *Dynamic epistemic logic*. Dordrecht: Springer.

Veltman, F. (1985). *Logics for conditionals*. Disertační práce, Univerzita Amsterdam.

Veltman, F. (1984). Data semantics. In (Groenedijk, Janssen & Stokhof, 1984), 43–64.

Veltman, F. (1996). Defaults in update semantics, *Journal of Philosophical Logic*, 25, 221–261.

Vlasáková, M. (2013). Význam obecného výrazu ve Fregově pojetí, *Filosofie dnes*, 5, 41–59.

Wansing, H. (1993). Informational interpretation of substructural propositional logics, *Journal of Logic, Language and Information*, 2, 285–308.

Wansing, H. (2001). Negation. In (Goble, 2001), 415–436.

Wansing, H. (2015) Connexive logic, In Zalta, E. N., ed., *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

Wittgenstein, L. (1922). *Tractatus logico-philosophicus*. Londýn: Routledge and Paul Kegan. Citováno dle českého překladu Wittgenstein, L. (2007). *Tractatus logico-philosophicus*. Praha: Oikoymenh.

Wittgenstein, L. (1953). *Philosophische Untersuchungen*. Oxford: Blackwell.

Yang, F. (2014). *On extensions and variants of dependence logic*. Disertační práce, Univerzita Helsinky.

Zakharyaschev, M. (1994). A new solution to a problem of Hosoi and Ono, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 35, 450–457.