

## Posudek: Diplomová práce J. Eliáš

### POSUDEK OPONENTA DIPLOMOVÉ PRÁCE

**Název:** Ricci flow and geometric analysis on manifolds

**Autor:** Jakub Eliáš

#### SHRNUTÍ OBSAHU PRÁCE

Práce pojednává o Ricciho toku Poincaré-Einsteinovy metriky. Ricciho tokem na Riemannově varietě  $(M, g)$  rozumíme 1-parametrickou množinu metrik  $g(t)$ , která vyhovuje rovnici  $\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2Ric(g(t))$  s počáteční podmínkou  $g(0) = g$ . Jedná se o složitou nelineární rovnici 2. řádu v koeficientech metriky. Studium Ricciho toku vedlo k úspěšnému řešení několika velice složitých problémů (např. uniformizační věty, Thurstonovy geometrické hypotézy pro 3-variety a tedy i Poincarého hypotézy). Najít explicitní řešení této rovnice je obecně velice složité. Explicitní řešení lze napsat jen v několika speciálních případech, např. pro einsteinovské metriky.

Necht'  $(N, [h])$  je varieta s konformní třídou metrik. Poincaré-Einsteinovou (P-E) metrikou pro  $(N, [h])$  rozumíme varietu  $N_+$  s hranicí  $N$  spolu s metrikou  $g_+$ , která indukuje na hranici zadanou konformní třídu, a která je na hranici asymptoticky einsteinovská (přesný tvar podmínky závisí na paritě dimenze). Výhodou této konstrukce je to, že lze některé problémy konformní struktury přeformulovat na problém P-E metriky. Standardním příkladem je hyperbolická Poincarého metrika na jednotkové kouli, která indukuje standardní konformní strukturu na jednotkové sféře. Někteří autoři požadují, aby P-E metrika byla einsteinovská na celé varietě  $N_+$ .

Hlavní motivací ke studiu Ricciho toku P-E metriky je vyjádření koeficientů P-E metriky. Tyto koeficienty jsou řešením diferenciálních rovnic s počáteční podmínkou, která je dána konformní strukturou na hranici variety. Při řešení Ricciho toku by se pak mělo využít toho, že P-E metrika je einsteinovská.

V práci jsou shrnuty základy problematiky Ricciho toku a P-E metriky. V druhé kapitole je celkem podrobně uvedena ambientní konstrukce k zadané konformní struktuře a je zde popsáno, jak lze z ambientní metriky explicitně vyrobit P-E metriku. Poslední kapitola pak obsahuje vlastní příspěvek autora, kde se zabývá Ricciho tokem pro P-E metriku.

#### CELKOVÉ HODNOCENÍ PRÁCE

Student se během přípravy diplomové práce bezpochyby seznámil s danou problematikou a tu pak dokázal přiměřeným způsobem zpracovat. V práci se nicméně objevují některé nedokonalosti. Jsou zde nepřesnosti v některých definicích, občas není jasné co se v textu dokazuje, případně jsem neporozumněl některým argumentacím.

Cíle práce jsou poměrně ambiciozní a dle mého názoru se tyto cíle nepodařilo úplně naplnit. To je bezpochyby způsobeno jednak náročností rovnic, nicméně

mám pochybnosti (viz Připomínky otázky) i k samotnému řešenému problému a ke způsobu jeho řešení.

**Téma práce.** Hodnocení náročnosti a přiměřenosti tématu. Bylo téma zpracováno tak, aby bylo splněno zadání práce?

Zadání diplomové práce vidím jako poměrně náročné, ale přiměřené. Práce byla vypracovaná v souladu se zadáním.

**Vlastní příspěvek.** Obsahuje práce vlastní příspěvek autora? V čem tento příspěvek spočívá? Je v práci dostatečně specifikován?

Student se na na konci práce zabývá řešením rovnice Ricciho toku pro P-E metriku. Rovnice jsou probírány za dalších zjednodušujících předpokladů. Složitost těchto rovnic však nakonec vede k tomu, že řešení je uvedeno pouze v případně hyperbolické (a tudíž einsteinovské) metriky, kde šlo postupovat mnohem přímočařeji.

**Matematická úroveň.** Jaká je matematická úroveň práce? Obsahuje práce rigorózní a korektně zformulovaný matematický text?

Po matematické stránce je text na úrovni odpovídající diplomové práci.

**Práce se zdroji.** Jsou zdroje správně citovány? Neobsahuje práce doslova zkopírovan nebo otrocky přeložen pasáže?

Zdroje jsou řádně citovány a text je původní.

**Formální úprava.** Hodnocení formální úpravy práce.

K úpravě práce nemám žádné výhrady, pouze značení v paté kapitole je poněkud nepřehledné.

#### PŘIPOMÍNKY A OTÁZKY

1. Hlavní důvodem ke studii Ricciho toku, jak píšete v úvodu, je fakt, že Poincaré-Einsteinova, resp. ambientní metrika je einsteinovská, resp. ricciovsky plochá (Ricci flat). Pro tyto typy metrik ale Ricciho tok není příliš zajímavý. Proč lze tedy očekávat, že Ricciho tok povede k zajímavým výsledkům?
2. Hlavním cílem práce (jak je popsáno v úvodu) by mělo být vyjádření koeficientů ambientní a Poincaré-Einsteinovy metriky. K tomuto poměrně ambicióznímu cíli se pak v závěrečném komentáři nevracíte. Bylo v tomto směru tedy dosaženo nějakého výsledku?
3. Neporozuměl jsem v jaké situaci, jak je uvedeno na konci strany 31, je tvar řešení (5.6) nejobecnějším řešením rovnice (5.1).
4. V strategii, která je uvedena v Aim 1. na straně 31, navrhuje postupně řešit Ricciho tok dle řádu v proměnné  $r$ . Lze ale znalost řešení do řádu  $r^{2n}$  nějak použít k řešení rovnice do řádu  $r^{2n+2}$ ? Využívá se zde toho, že metrika (5.5) je asymptoticky einsteinovská?

5. Dá se zjednodušující předpoklad v kapitole 5.2 vyjádřit jen pomocí počáteční podmínky (tedy hodnotou Ricciho tensoru v počátečním čase)?
6. V definici 2 by  $M$  měl být topologický prostor, jinak definice nedává smysl.
7. Použití symbolu  $\Gamma(U)$  v definici 20 je zvláštní.
8. Co je to báze  $\Gamma(E)$  v definici 21? Nad jakým tělesem tento vektorový prostor uvažujete?
9. Co znamená linearita  $\varphi_\alpha$  ve druhé složce v definici 23?
10. Poslední rovnost v definici 26 je zřejmě špatně.
11. Jak definujete Lieovu algebru Lieovy grupy, pokud vektorová pole  $E_i$  tvoří její bázi, jak je to uvedeno nad (1.15)?
12. Ve formuli (1.24) by mělo být  $P_{ij;k} := \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} P_{ij}$ .
13. Proč se ve druhém odstavci pod definicí 42 na straně 13 objevuje jiná metrika  $\hat{g}$ . V textu ji pak nikde nepoužíváte?
14. V definici 45 není  $U = \mathcal{G}$  otevřená v  $\tilde{\mathcal{G}}$ .
15. Pod definicí 51 by mělo být: is always asymptotically hyperbolic.
16. Čemu se rovná  $g^{(2)}$  v (2.17)?
17.  $\psi_t : M \times I \rightarrow M$  nad formulí (4.11) zřejmě není difeomorfismus.
18. Nerozumím argumentaci k jednoznačnosti řešení Ricciho toku na uzavřené varietě. Z jednoznačnosti řešení rovnice (4.5) plyne  $(\psi_t^1)_*(g_t^1) = (\psi_t^2)_*(g_t^2)$ . Jak z toho ale plyne:  $\psi_t^i = \psi_t^j$  pro  $t \in [0, \epsilon]$ ?
19. V formuli (5.7) máte  $h^{(0)} = g + dr^2$ , zatímco v prvním řádku na stejné stránce máte  $h^{(0)} = g$ .
20. V kapitole 4 formulujete věty o existenci a jednoznačnosti Ricciho toku na uzavřené varietě, ale nakonec uvažujete Ricciho tok na vnitřku variety s hranicí bez jakéhokoliv komentáře.
21. Neplyne  $R_{rrii} = 0$  v (5.35) ze symetrie Riemannova tensoru?

#### ZÁVĚR

Práci považuji za velmi dobrou až dobrou a doporučuji ji uznat jako diplomovou práci.

*Návrh klasifikace oponent sdělí předsedovi zkušební komise.*

Tomáš Salač  
MÚ UK  
7.9.2016