

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Yulianna Tolkunova

Geometrie stínu

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Petra Surynková, Ph.D.

Studijní program: matematika

Studijní obor: učitelství matematiky a deskriptivní geometrie pro SŠ

Praha 2016

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne.....

podpis

Ráda bych na tomto místě poděkovala RNDr. Petře Surynkové, Ph.D. která mě vedla při mé práci. Ze srdce děkuji za její čas, za velkou trpělivost a toleranci mých jazykových nedostatků a též za to, že mi vždy ochotně poskytla cenné rady a připomínky.

Děkuji také Eduardu Suleymanovi a své rodině za jejich podporu a trpělivost při mé práci.

Abstrakt

Název práce: Geometrie stínu
Autor: Yulianna Tolkunova
Katedra (Ústav): Katedra didaktiky matematiky
Vedoucí diplomové práce: RNDr. Petra Surynková, Ph.D.

Abstrakt: Předložená práce se věnuje geometrickému osvětlení a metodám jeho sestrojování. Je zaměřená na rovnoběžné a středové osvětlení těles do roviny a těles na tělesa. Práce obsahuje teoretickou část, ve které se lze dozvědět o vlastnostech, metodách a základních pojmech souvisejících s geometrickým osvětlením. Také je zde popsán princip osvětlování základních těles a osvětlování do dutiny těles. Následuje praktická část, která obsahuje sbírku příkladů v různých promítáních s uvedeným řešením a názornými obrázky. Poslední kapitola je věnovaná použití počítačů k sestrojování geometrického osvětlení; zejména popisuje možnosti softwaru Rhinoceros. Kromě toho kapitola obsahuje namodelované osvětlení mauzolea Tádž Mahal, což čtenáři přiblíží ohromné možnosti počítačového modelování. Pro lepší pochopení je text doplněn množstvím nově vytvořených obrázků. Při sepisování práce byl důraz kladen především na srozumitelnost, názornost a použitelnost metod. Obecně práce *Geometrie stínu* může posloužit všem zájemcům, kteří chtějí blíže poznat geometrické osvětlení. Práce by mohla být užitečným učebním textem pro studenty a učitele deskriptivní geometrie. Součástí práce je také přiložené DVD, na kterém se nacházejí zdrojové soubory všech obrázků z programu Rhinoceros, pracovní listy se zadáním příkladů řešených v práci a diplomová práce v elektronické podobě.

Klíčová slova: osvětlení, stín, mez stínu, projekce

Title: Geometry of shadows
Author: Yulianna Tolkunova
Department: Department of Mathematics Education
Supervisor: RNDr. Petra Surynková, Ph.D.

Abstract: The present thesis deals with geometric lighting and methods of its construction. In particular, it is aimed at parallel and central lighting of objects and groups of objects. The work includes a theoretical part, in which you can learn about the properties, methods and basic concepts related to geometric lighting. Afterwards, there is a practical part, which contains a set of examples in different projections with their solutions and visual pictures. Last chapter is about using computer for modeling of geometric lighting; mainly it is about possibilities of software Rhinoceros. In addition, the chapter contains modeled lighting of the charming Taj Mahal. The project is filled up with a number of pictures to enhance the reader's imagination about the principles and methods of lighting. In the work I emphasized intelligibility and usability of the methods listed there. In general, thesis *Geometry of shadows* is devoted to everybody who wants to learn more about the geometry of shadows. The thesis could be a useful study material for students and teachers of descriptive geometry. The work also includes the DVD, which contained Rhinoceros files of images, worksheets with examples solved at the work and the thesis in electronic form.

Keywords: shadow, boundaries of shadows, projection

Obsah

Úvod.....	1
1 Geometrie stínu.....	4
1.1 Úvod do osvětlení.....	4
1.2 Základní vlastnosti geometrického osvětlení.....	6
2 Rovnoběžné osvětlení.....	9
2.1 Osvětlení základních geometrických útvarů.....	9
2.2 Osvětlení jednotlivých těles.....	14
2.2.1 Osvětlení hranatých těles.....	14
2.2.2 Osvětlení kruhového válce.....	16
2.2.3 Osvětlení kruhového kužele.....	19
2.2.4 Osvětlení koule.....	22
3 Středové osvětlení.....	26
3.1 Osvětlení základních geometrických útvarů.....	26
3.2 Osvětlení jednotlivých těles.....	29
3.2.1 Osvětlení hranatých těles.....	29
3.2.2 Osvětlení kruhového válce.....	31
3.2.3 Osvětlení kruhového kužele.....	34
3.2.4 Osvětlení koule.....	36
4 Stín do dutiny tělesa.....	40
5 Osvětlení těles a jejich skupin v konkrétním promítání.....	49
6 Použití počítačů k sestrojování stínu.....	86
Závěr.....	97
Seznam použité literatury.....	98

Úvod

Tématem této diplomové práce je geometrie stínu neboli geometrické osvětlení. Je to velice důležité a zajímavé téma, široce použitelné v praxi.

V současné době literatura věnovaná osvětlení není moc rozšířená. Ve většině učebnic z deskriptivní geometrie se tomuto tématu věnují jenom stručně nebo ho vynechávají úplně. Obzvláště těžké je najít učebnici, ve které by bylo podrobně popsáno středové osvětlení. Kromě toho se většinou jedná o starší učebnice. Tyto učebnice mimo jiné většinou obsahují starší obrázky, které neodpovídají možnostem v dnešní době. Geometrické osvětlení je ale velice zajímavou aplikací deskriptivní geometrie. Proto byla vytvořena tato práce, která podává přehled základních principů a vlastností geometrického osvětlení. Celý text je doplněn množstvím obrázků pro zvýšení představitivosti čtenáře o principech osvětlení. Veškeré obrázky jsou nově vytvořeny pomocí modelovacích softwarů Rhinoceros a GeoGebra. Navíc práce je napsána co nejvíce pochopitelným a jednoduchým jazykem, aby čtenář lépe porozuměl tématu a aby text byl co nejvíce zajímavým.

Práce podrobně popisuje rovnoběžné i středové osvětlení, charakterizuje podobu a rozdíl mezi nimi a uvádí je do souvislosti s příslušnými promítáními. Práce se zabývá osvětlováním těles do roviny a osvětlováním těles na tělesa.

Hlavním cílem diplomové práce je seznámit čtenáře s geometrickým osvětlením, jeho principy a vlastnostmi. Kromě toho, jsem v této práci chtěla čtenáři ukázat, čím je osvětlování zajímavé, k čemu sestrojování stínu může posloužit a jak při sestrojování stínů lze použít počítač.

Diplomová práce *Geometrie stínu* má následující strukturu:

První kapitola popisuje obecné vlastnosti a principy geometrického osvětlení. Obsahuje základní pojmy a definice související s osvětlením. Navíc se v této kapitole čtenář může dočíst o důležitosti osvětlení a o jeho použití v praxi.

Druhá kapitola je věnována rovnoběžnému osvětlení. Na začátku kapitoly jsou popsány postupy pro rovnoběžné osvětlení základních geometrických útvarů, takových jako jsou bod a přímka. Následuje teoretický podklad pro osvětlení konkrétních významných těles, kde je popsán princip rovnoběžného osvětlení hranatých těles, kruhového válce (kolmého a kosého), kruhového kužele (kolmého a kosého) a koule. Kromě toho je zde popsána tzv. metoda zpětných paprsků při

rovnoběžném osvětlení, která je důležitá pro osvětlení těles na tělesa a sestrojování stínu do dutiny tělesa.

Třetí kapitola je věnována středovému osvětlení. Její struktura je podobná struktuře druhé kapitoly, na začátku kapitoly jsou postupy pro středové osvětlení základních geometrických útvarů, následuje teoretický podklad pro osvětlení konkrétních významných těles (hranatých těles, kruhového válce, kruhového kužele a koule). Také zde je popsána metoda zpětných paprsků při středovém osvětlení. Většinou středové osvětlení je pro studenty složitější než rovnoběžné, v učebnicích se však o středovém osvětlení moc nepíše. Nově jsem toto téma zpracovala, vycházela jsem se ze souvislosti středového osvětlení a středového promítání.

Čtvrtá kapitola pojednává o stínu do dutiny. Jsou zde podrobně popsány postupy nalezení stínu do dutiny hranatých a oblých těles. Přičemž jsou uvedeny postupy jak pro rovnoběžné, tak i pro středové osvětlení.

Pátá kapitola je praktickou částí této práce. Procvičíme zde teoretické znalosti uvedené v předchozích kapitolách. Skládá se z nově vytvořených příkladů na osvětlení s uvedeným řešením. Obsahuje konkrétní příklady na osvětlení jednotlivých těles a jejich skupin. Jsou zde příklady ve středovém promítání a v různých rovnoběžných promítáních, konkrétně v Mongeově, kosoúhlém promítání a v pravoúhlé axonometrii. Každý příklad obsahuje zadání a umístění na papír, lze totiž tuto kapitolu používat jako sbírku příkladů. Kromě toho na konci každého příkladu je uveden více názorný obrázek, na kterém je daná situace namodelovaná na počítači (pomocí softwaru Rhinoceros). Modely odpovídají souřadnicím v příkladech a slouží k tomu, aby si čtenář lépe představil, jak celá situace vypadá a pochopil princip geometrického osvětlení ve 3D prostoru. Součástí práce je také příložené DVD, na kterém se nacházejí zdrojové soubory všech obrázků z programu Rhinoceros a pracovní listy se zadáním příkladů řešených v práci. Ve zdrojových souborech čtenář může celou situaci zahýbat a podívat se na ní z různých stran.

Šestá kapitola je věnována použití počítačů k sestrojení stínů, což je velice aktuální téma v dnešní době. Poskytuje informace o některých softwarech, které by mohly být použity pro sestrojování stínů. Zejména popisuje možnosti softwaru Rhinoceros. Kromě toho na konci kapitoly se čtenář může podívat na osvětlení půvabného mauzolea Tádž Mahal, což čtenáři přiblíží ohromné možnosti geometrického osvětlení. Z této kapitoly by čtenář měl mimo jiné pochopit, že pokud využijeme ke konstrukcím stínů moderní počítačový modelovací software, nemáme v podstatě žádné limity.

K dobrému porozumění této práce je třeba ovládat základní pojmy deskriptivní geometrie, například půdorys, nárys, stopník a podobně. V textu jsou však uvedeny odkazy na tyto pojmy do literatury. Čtenář by měl rovněž znát základní principy promítání (a to jak středového tak i rovnoběžného promítání) a měl by být schopen z daných prvků a v daném promítání sestavit těleso, které bude osvětlovat. Jinak pojmy související přímo s osvětlením jsou vždy vysvětlené v textu práci.

Tento materiál by měl být užitečný pro studenty a učitele deskriptivní geometrie na středních i vysokých školách. Osvětlení je ale aspektem, kterým se kromě deskriptivní geometrie zabývají i jiné oblasti, o tom se čtenář může přesvědčit při čtení práce. Obecně, práce *Geometrie stínu* může posloužit všem zájemcům, kteří chtějí blíže poznat geometrii stínů.

1 Geometrie stínu

1.1 Úvod do osvětlení

Co to je deskriptivní geometrie? Deskriptivní geometrie má několik různě formulovaných definic, z nichž se každá snaží popsat danou vědu co nejpodrobněji a maximálně vysvětlit její cíle a smysl. Každá z definic se nám ale snaží říct jednu společnou věc: deskriptivní geometrie je věda, která se zabývá zobrazením trojrozměrných objektů¹ na papír čili převáděním 3D objektů na 2D objekty. Hlavním cílem je to, aby 2D průmět nějakého objektu, tj. výsledek geometrického promítání byl co nejreálnější a nejnázornější. V deskriptivní geometrii existují různé metody, díky nimž lze žádaných cílů dosáhnout. Například v deskriptivní geometrii zavádíme tzv. osvětlování objektů, právě touto oblastí se budeme zabývat v této práci. Stín dělá obrázek názornějším, pochopitelnějším a živějším. Pomocí stínů získáváme zdání další dimenze. Vhodným osvětlením lze nahradit další průmět tělesa, protože z vrženého stínu lze pochopit tvar tělesa, které osvětlujeme, říká to také (K. Drábek a kol, 1979).

Stínování se používá v nejrůznějších oblastech, např. v malířství, architektuře, strojírenství, designu.

Používá je každý malíř, osvětlení je důležitou částí teoretického základu umělecké činnosti. Už v dřívějších dobách malíři používali stínování. Například známý italský malíř Michelangelo Merisi Caravaggio ve svých obrazech věnoval pozornost osvětlování už na konci šestnáctého století, viz obrázek 1.1². Určitě



Obrázek 1.1. Michelangelo Merisi Caravaggio, Večeře v Emauzích.

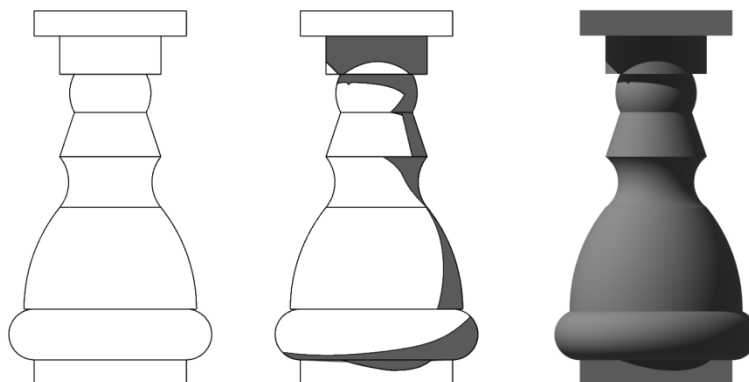
naleznete stín i na mnoha jiných obrazech nebo obrázcích. Každý architekt také zná důležitou roli

¹ Dále bude používána zkratka 3D, v případě dvojrozměrných objektů – 2D

² Obrázek 1.1 je převzat z <https://en.wikipedia.org/wiki/Caravaggio>

a závažnost stínu. Zásluhou stínu dostáváme lepší představu o reliéfu budovy, jeho jednotlivých objemech a částech. Šerosvit kompenzuje špatnou názornost některých promítání a nepřítomnost třetího rozměru. Stíny na ryse také dávají možnost lépe poznat vzájemnou polohu jednotlivých objektů, tzv. objemově-prostorovou kompozici budovy.

Na obrázku 1.2 můžeme vidět a porovnat, jak se mění vnímání objektu v závislosti na stínu. Objekt nalevo je jenom souhrn čar a nemá žádné osvětlení, proto vypadá tak ploše. Objekt uprostřed už má zvýrazněnou mez vlastního stínu, což mu přidává na názornosti a zdánlivě na objemu. Stín



Obrázek 1.2. Důležitá role stínů pro názornost objektu.

takového typu dokážeme jednoduše sestrojít ručně, ovládneme-li základní znalosti teorie osvětlování. Poslední, objekt napravo, ukazuje už pokročilejší úroveň stínování, osvětlení je vytvořeno pomocí modelovacího softwaru. Tak by mohla vypadat práce, například, z architektonické grafiky.

Vybudování stínů, které v plné míře budou odpovídat skutečnosti, je dost náročný úkol, ale pomocí určitých pravidel a zjednodušení, které nám poskytuje deskriptivní geometrie, dokážeme sestrojít geometrické osvětlení³ objektů.

³ Geometrickým osvětlením nazýváme model osvětlení, ve kterém uvažujeme pouze jeden zdroj světla a zanedbáváme všechny ostatní aspekty osvětlení (J. Černý a M. Kočandrlová, 1998). Pro zkrácení budeme často místo pojmu *geometrické osvětlení* používat jen *osvětlení*.

1.2 Základní vlastnosti geometrického osvětlení

V celé práci uvažujeme projektivní rozšíření euklidovského prostoru. Zdrojem světla může být tzv. vlastní bod⁴. V tomto případě se osvětlení nazývá *středovým* (centrálním). Jako příklad takového osvětlení může sloužit jakékoliv umělé světlo, např. baterka, lampa, lucerna nebo reflektor. Zdroj světla se nachází



Obrázek 1.3. Středové osvětlení na rovinu.

relativně blízko tělesa. Vzniká tedy svazek paprsků s počátkem v daném zdroji. Světelné paprsky ve středovém osvětlení jsou polopřímky vycházející ze středu osvětlení S (příklad středového osvětlení je znázorněn na obrázku 1.3).

Jestliže zdrojem světla je nevlastní bod čili směr, jde o *rovnoběžné osvětlení* (paralelní). Světelné paprsky v rovnoběžném osvětlení jsou orientované přímkami, které jsou navzájem rovnoběžné, přičemž jsou souhlasně orientované se směrem osvětlení (viz obr. 1.4). Příkladem takového osvětlení je přirozené sluneční světlo. V tomto případě máme slunce jako zdroj světla, které se od nás nachází tak daleko, že můžeme uvažovat jeho polohu v nekonečnu. Podobně jsou tyto pojmy zavedeny v učebnici (J. Černý a M. Kočandrlová, 1998).



Obrázek 1.4. Rovnoběžné osvětlení na rovinu.

Poznámka 1.1: Nemá smysl zkoumat případ, že směr osvětlení je rovnoběžný s rovinou, do které osvětlujeme. Podobně neuvažujeme případ, že vlastní střed osvětlení leží v rovině, do které osvětlujeme. Dále vždy předpokládáme, že směr osvětlení je různoběžný s rovinou, do které osvětlujeme, a vlastní střed osvětlení neleží v rovině, do které osvětlujeme. ■

⁴ Definici vlastního a nevlastního bodu čtenář může nalézt v libovolné učebnici z deskriptivní geometrie například v (K. Drábek a kol, 1979).

Zavedme dále základní pojmy geometrického osvětlení. Rozlišují se vlastní a vržené stíny. Máme-li v cestě světelných paprsků nějaké neprůhledné těleso (nebo plochu), pak je část tělesa (plochy) osvětlená a část je ve stínu. Část objektu, na kterou světelné paprsky dopadají, aniž by jim něco stálo v cestě, se nazývá *přímo osvětlená část*. Neosvětlená část osvětlovaného tělesa (plochy) je *vlastním stínem* tělesa (plochy). Uvědomíme si, že vlastní stín je stín přímo na povrchu tělesa. Hranici, která rozděluje osvětlené části na tělese (ploše) a části ve stínu, nazýváme *mez vlastního stínu*. Pak samozřejmě těleso (plocha) vrhá stín na jiná tělesa, roviny, nebo plochy, které se nacházejí dostatečně blízko. Tento stín nazýváme *vrženým stínem*. Hranice vrženého stínu se nazývá *mez vrženého stínu*. Podobně se tyto pojmy zavádějí v učebnici (K. Drábek a kol, 1979).

V naší práci se budeme zabývat osvětlováním těles do roviny. V tomto případě je osvětlení jednoznačně zadáno svým zdrojem (buď bodem, nebo směrem) a rovinou, do které osvětlujeme. Také se budeme zabývat osvětlováním těles na tělesa, k čemuž samozřejmě musí být zadáno těleso, na které osvětlujeme.

Poznámka 1.2: Měli bychom si uvědomit, že *mez stínu* (buď vlastního nebo vrženého) je čára (křivka). Vržený (vlastní) stín je část plochy. ■

Poznámka 1.3: Speciálním případem rovnoběžného osvětlení je *technické osvětlení*. Tento druh osvětlení se často používá v technické praxi a architektuře. V technickém osvětlení jsou světelné paprsky rovnoběžné s tělesovou úhlopříčkou krychle. Krychle je umístěná tak, že jeden její vrchol leží v počátku souřadného systému a tři její hrany (vycházející z tohoto vrcholu) leží na osách x , y , z . Pravoúhlý průmět dané úhlopříčky (a zároveň světelného paprsku), na libovolnou ze tří rovin $((x,y)$, (y,z) , $(x,z))$, svírá s příslušnou souřadnicovou osou úhel 45° . Důsledkem je značné zjednodušení sestavení stínů, v porovnání s libovolným obecným rovnoběžným osvětlením. Technické osvětlení dává možnost zobrazování osvětlení jenom do jedné průmětny (zpravidla do nárysny). Technické osvětlení je podrobně popsáno v učebnici (V. Korotkij, 2010). ■

Poznámka 1.4: Konstrukce vrženého stínu nějakého útvaru na rovinu při rovnoběžném osvětlení je konstrukcí rovnoběžného průmětu tohoto útvaru v rovnoběžném promítání ve směru tohoto osvětlení. V případě středového osvětlení jde o konstrukci středového průmětu. Průmětnou je v obou případech rovina, do které osvětlujeme. ■

Při sestavování stínů nám značně pomůže následující věta (o mezích vlastního stínu a vrženého stínu), která vyplývá z toho, že světelné paprsky se dotýkají geometrického objektu v mezi vlastního stínu.

Věta 1: *Mez vrženého stínu tělesa je vrženým stínem meze vlastního stínu.*⁵ ■

Poznámka 1.5: Tvar složitějšího skutečného objektu se obvykle skládá z různě orientovaných povrchů, které svírají různé úhly se světelnými paprsky, proto svítivost objektu není rovnoměrná. Například části kolmé na paprsky se osvětlují plně, na jiné se svítí slaběji, na některé se světlo vůbec nedostává, což záleží na poloze. Pro malíře má význam míra svítivosti, která záleží na síle zdroje světla a vzdálenosti od něj. Náplní této práce jsou pouze geometrické, ne fyzikální vlastnosti osvětlení, ale pro zajímavost je dobré vědět, že vržený stín je hustší než vlastní stín, proto je třeba při libovolném zobrazení vlastní stín šrafovat slaběji než stín vržený. ■

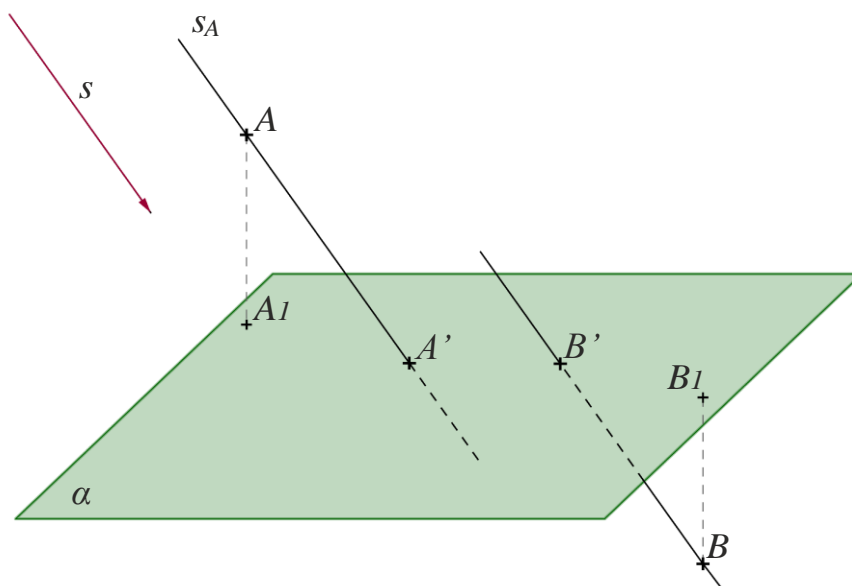
⁵ Věta je převzata z [4].

2 Rovnoběžné osvětlení

2.1 Osvětlení základních geometrických útvarů

Stín bodu nalezneme jako průsečík světelného paprsku s průmětnou (rovinou), do které osvětlujeme. Čili úkol se převádí na nalezení průsečíku přímky s rovinou, což je triviální úloha.

Nechť je dána vlastní rovina α a s -směr světelných paprsků, jež není na rovinu α kolmý⁶, ani s ní není rovnoběžný. Mějme vlastní bod A (obr. 2.1) ležící ve stejném poloprostoru, určeném rovinou α , jako zdroj světla s . Dále mějme bod B , který se nachází v druhém poloprostoru. Bodem A vedeme světelný paprsek s_A (víme, že světelné paprsky v rovnoběžném osvětlení jsou navzájem rovnoběžné). Průsečík světelného paprsku s_A s rovinou α označíme A' . Zopakujeme stejný postup pro nalezení bodu B' .



Obrázek 2.1. Rovnoběžné osvětlení bodů do roviny.

Bod A' je vrženým stínem bodu A na rovinu α .

Bod B' se nazývá *ideální vržený stín* bodu B na rovinu.

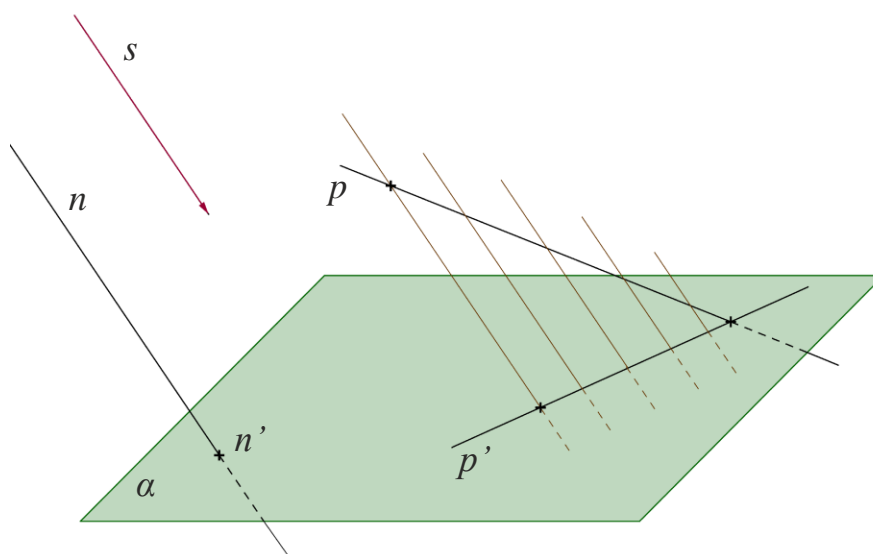
Poznámka 2.1: Při rovnoběžném (i středovém) osvětlení je vrženým stínem bodu A na rovinu stopník příslušného světelného paprsku. ■

⁶ Nebude-li řečeno jinak, budeme vždy považovat směr osvětlení za obecný čili nezkoumáme speciální případ, kdy směr je kolmý na rovinu, do které osvětlujeme.

Vržený stín přímky se skládá z vržených stínů všech bodů této přímky. Tudiž budeme-li chtít sestavit stín přímky, popřípadě úsečky na nějakou rovinu – průmětnu, musíme sestavit stín dvou bodů, popř. krajních bodů (způsobem vysvětleným výše). Stínem přímky bude přímka procházející stíny těchto bodů. Výjimkou je případ, kdy je přímka rovnoběžná se světelnými paprsky, pak vrženým stínem přímky je bod, který je průsečíkem této přímky s průmětnou, do které osvětlujeme.

Nechť máme směr s a přímku p , která není se světelnými paprsky rovnoběžná. Osvětíme přímku p do dané roviny α (obr. 2.2).

Světelné paprsky jednotlivých bodů přímky p vytváří tzv. světelnou rovinu λ dané přímky.



Obrázek 2.2. Rovnoběžné osvětlení přímek do roviny α .

Rovina λ je určena dvěma přímkami – danou p a libovolnou rovnoběžkou se směrem s zároveň různoběžnou s přímkou p . Průsečnici roviny λ s rovinou α obvykle značíme p' . Přímka p' je vrženým stínem přímky p na rovinu α .

Speciální případ, kdy je přímka rovnoběžná s daným směrem osvětlení, je ukázán přímkou n v témže obrázku. Bod n' je vrženým stínem přímky n na rovinu α .

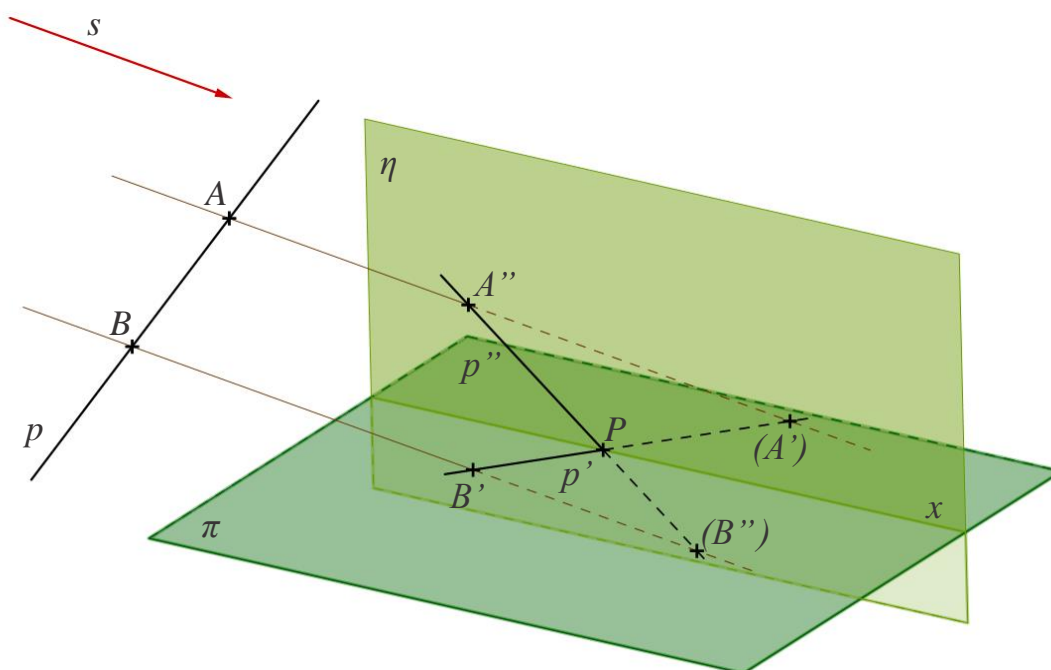
Poznámka 2.2: Lze usoudit, že se stín přímky dá najít jako průnik světelné roviny s rovinou, na kterou osvětlujeme. ■

Jiné zajímavé vlastnosti rovnoběžného osvětlení přímek ve speciální poloze:

- ❖ Vržený stín přímky, popř. úsečky rovnoběžné s rovinou, do které osvětlujeme, je přímka, popř. úsečka stejného směru jako ta, co stín vrhá. Navíc úsečka, která je vrženým stínem má stejnou délku jako původní úsečka.
- ❖ Vrhá-li přímka stín na rovnoběžné roviny, pak vržené stíny jsou navzájem rovnoběžné.
- ❖ Protíná-li přímka rovinu stínu v nějakém bodě, pak vržený stín přímky na stejnou rovinu prochází tímto bodem.
- ❖ Stín vržený vertikální (kolmou) přímkou na horizontální rovinu má směr rovnoběžný s s_I (s pravouhlým průmětem směru světelného paprsku do uvažované roviny).

Občas se setkáme se situací, kdy geometrický útvar vrhá stín na více rovin. V tomto případě padne stín každého jednotlivého bodu na rovinu, se kterou se světelný paprsek příslušného bodu potká nejprve.

Ukážeme postup pro nalezení stínu přímky na dvě neprůhledné roviny. Zde se bude jednat speciálně o sestavení stínu přímky na nárysnu - η a půdorysnu - π , podobně by se ale postupovalo v případě obecných rovin.



Obrázek 2.3. Rovnoběžné osvětlení přímky na dvojici kolmých rovin, nárysnu - η a půdorysnu - π .

Nechť máme přímku p v obecné poloze vůči průmětnám π a η . Osvětlíme přímku na dvojici rovin v daném směru osvětlení s (obr. 2.3).

- 1) Sestrojíme vržený stín na jednu z rovin, předpokládejme, že druhá neexistuje (sestrojíme stíny dvou libovolných bodů přímky).

Například sestrojíme nejprve vržený stín na půdorysnu π . Sestrojíme (vržené) stíny bodů A a B na půdorysnu, získáme tak body B' , A' , jejich spojením dostáváme vržený stín přímky p do půdorysny π čili přímku p' na obrázku 2.3.

- 2) V případě, že sestrojěný vržený stín protne průsečnici rovin (pro nárysnu a půdorysnu to bude osa x), stín se zalomí do druhé roviny, v našem případě do náryсны η . Označme průsečík p' s osou x – P .
- 3) Podobně sestrojíme vržený stín přímky na rovinu η .

Poznámka 2.3: Vržené stíny se musejí protnout na ose v nalezeném průsečíku P , proto stačí na druhou rovinu sestrotit jenom (vržený) stín jednoho bodu. Spojíme-li (vržený) stín nalezeného bodu s bodem P , dostaneme vržený stín přímky na druhou rovinu. ■

Musíme si uvědomit, že průmětny obvykle považujeme za neprůhledné, proto záporná část půdorysny π čili ta část, která je za nárysnou, není vidět. Podobně není vidět záporná část náryсны, která je pod půdorysnou. To plyne z toho, že ve skutečnosti stín nemůže dopadnout na neviditelné části.

- 4) Rozmyslíme si, jak ve skutečnosti vypadá vržený stín a kam všude může dopadnout.

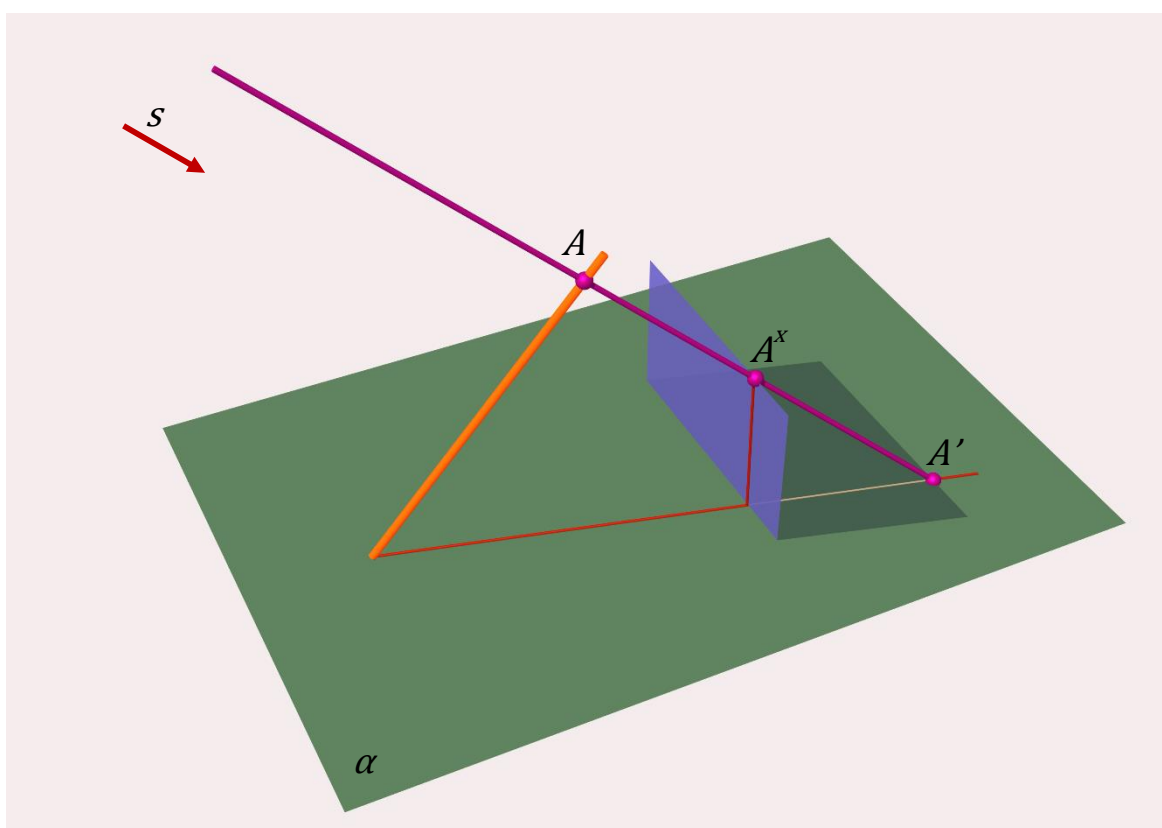
Lze usoudit, že vrženým stínem přímky vrženým na dvě (nebo i více) různoběžných rovin je lomená čára, která se láme v bodě, ležícím na průsečnici daných rovin. Názorně to vidíme na obr. 1.8 – tučná černá lomená čára složená z polopřímek p' a p'' .

Poznámka 2.4: Na obrázku je dobře vidět, že světelný paprsek bodu A se potkává nejprve s nárysnou η , až pak s půdorysnou π . Proto vržený stín tohoto bodu na půdorysnu ve skutečnosti není reálný. Obdobně to platí pro bod B , který vrhá stín na půdorysnu, nedopadne tedy až na nárysnu. ■

V této práci se mimo jiné budeme zabývat osvětlením skupin těles, k čemuž potřebujeme tzv. metodu zpětných paprsků. Metoda se používá hlavně v případech, kdy chceme určit vržený stín jednoho objektu na druhý, případně při sestrojování stínu do dutiny (kterému se budeme také věnovat).

Podstatu metody zpětných paprsků si ukážeme na příkladu. Necht' máme úsečku p , a chceme sestrojít její stín na danou rovinu α , s ohledem na neprůhledný obdélník, který stojí na rovině a je na ní kolmý. Zde se podíváme na rovnoběžné osvětlení, takže budeme uvažovat směr osvětlení s (viz obr 2.4).

Sestrojíme stín obdélníku na rovinu α , což už umíme. Potom sestrojíme stín úsečky na rovinu α , předpokládejme, že obdélník neuvažujeme. Vidíme, že se sestrojené stíny protínají, část stínu úsečky je překrytá stínem obdélníku, z čehož zjevně můžeme usoudit, že stín této části dopadne na obdélník. Vržený stín úsečky protíná vržený stín obdélníku ve dvou bodech. V prvním bodě, ve kterém úsečka vchází do stínu obdélníku, se stín zalomí do roviny obdélníku.



Obrázek 2.4. Metoda zpětných paprsků, rovnoběžné osvětlení.

Druhý průsečík vrženého stínu úsečky s mezí vrženého stínu obdélníku neboli bod A' , nám pomůže určit stín na obdélník. Vedeme bodem A' polopřímku rovnoběžnou se směrem osvětlení s , je to tzv. zpětný paprsek. Sestrojený zpětný paprsek protne obdélník v bodě A^x , který je koncovým bodem stínu na obdélník. Povedeme-li paprsek dál, nalezneme vzor bodu A' na úsečce, který tento stín vrhá čili bod A .

Tudíž podstatou metody zpětných paprsků je určení průsečíků mezi vržených stínů objektů a následné „vrácení“ těchto bodů zpětnými paprsky na daná tělesa nebo plochy. Příklady na použití metody světelných paprsků může čtenář nalézt v (J. Černý a M. Kočandrlová, 1998) nebo v praktické části této práce.

2.2 Osvětlení jednotlivých těles

V této kapitole se podíváme na rovnoběžné osvětlení významných těles (ploch). Těleso je část prostoru ohraničená plochou, přičemž plocha je souhrnem bodů, křivek a rovin. Pro sestrojení stínu tělesa (plochy) tedy budeme potřebovat sestrojiti stíny příslušných bodů, křivek a rovin, což už umíme z předchozí kapitoly. V této práci se budeme zabývat jen základními tělesy v základních polohách.

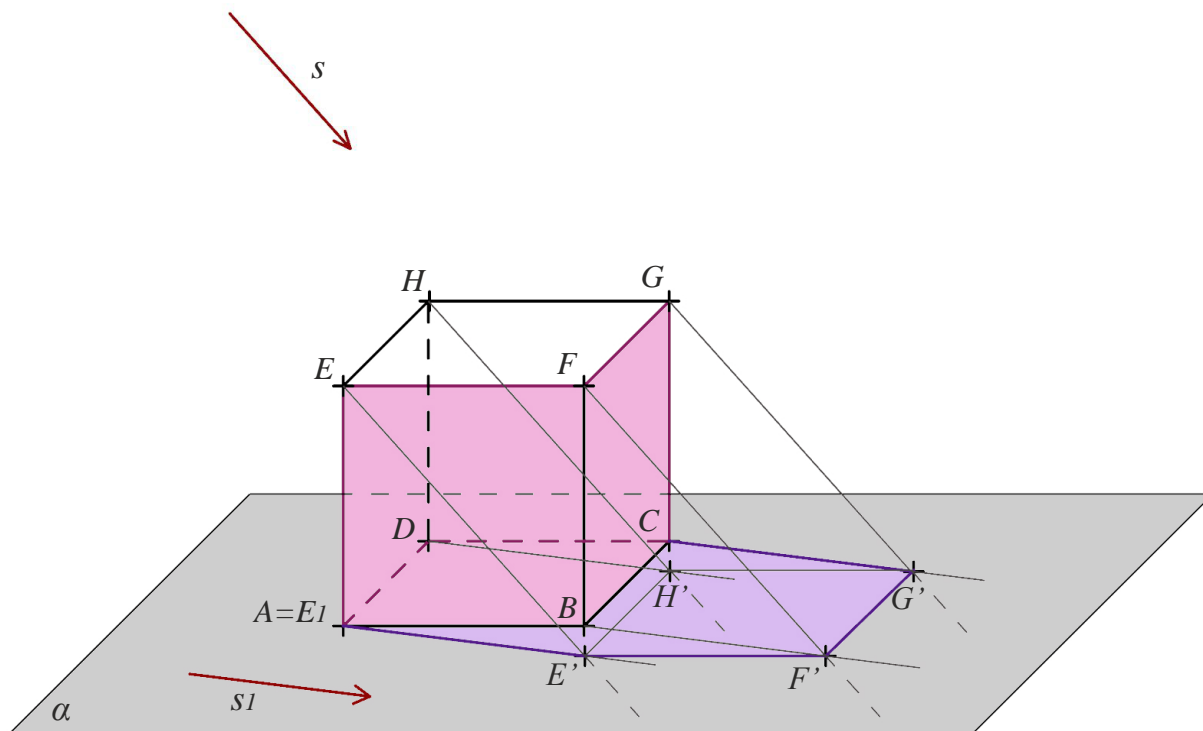
Všechny doprovázející ilustrace v této kapitole jsou náčrtý popsanych situací ve volném rovnoběžném promítání.

2.2.1 Osvětlení hranatých těles

Nejprve se podíváme na osvětlování hranatých těles. Hranaté těleso je část prostoru ohraničená mnohoúhelníky. Přičemž žádné dva mnohoúhelníky neleží v jedné rovině a strana každého mnohoúhelníku je zároveň stranou dalšího mnohoúhelníku. Podobně se hranatá tělesa zavádí v učebnici (E. Pomykalová, 2010). Hranaté těleso se tedy skládá z vrcholů (jedná se o vrcholy mnohoúhelníků) a hran, které jsou spojnicemi dvojic vrcholů (jedná se o strany mnohoúhelníků). Z toho plyne, že vržený stín libovolného hranatého tělesa můžeme sestrojiti jako množinu vržených stínů bodů a hran (úseček).

Podíváme se například na osvětlení krychle. Necht' máme krychli s podstavou v rovině α .

Sledujme obrázek 2.5. Dolní podstava leží v rovině α , proto stín této podstavy splývá s původní podstavou, říkáme též, že dolní podstava „zůstává na místě“. Obecně platí: osvětlujeme-li bod do stejné roviny, ve které se nachází, pak stín bodu je totožný s původním bodem.



Obrázek 2.5. Rovnoběžné osvětlení krychle na rovinu α .

Zbývá osvětlit horní podstavu a boční stěny, osvětlíme je bodově⁷. Najdeme, například, vržený stín bodu E . Bodem E vedeme světelný paprsek rovnoběžný se směrem osvětlení s a bodem E_1 přímku rovnoběžnou se směrem s_1 (čili rovnoběžnou s pravouhlým průmětem paprsku do roviny α). Sestrojené přímky se protnou v bodě E' , který je stínem bodu E do roviny α . Stíny ostatních bodů najdeme analogickým způsobem. Vržený stín je znázorněn včetně viditelnosti na obrázku 2.5.

Poznámka 2.5: Při rovnoběžném osvětlení stín rovinného útvaru do rovnoběžné roviny zachová tvar a velikost. Všimněme si tedy, že vrženým stínem horní podstavu krychle je čtverec (v rovnoběžném průmětu rovnoběžník) $E'F'G'H'$, shodný s podstavou $EFGH$. ■

Tudíž, budeme-li chtít sestavit vržený stín nějakého hranatého tělesa, nejprve sestojíme stíny všech vrcholů, potom spojením příslušných stínů vrcholů dostaneme i vržené stíny hran. Nakonec si musíme rozmyslet, obrazy jakých hran a vrcholů tvoří mez vrženého stínu, což už bude triviální, a tím už máme úkol splněný.

⁷ Není třeba osvětlovat každý bod stěny tělesa, stačí osvětlit jednotlivé hrany a získat tak hranici osvětlené stěny.

Pro určení vlastního stínu stačí použít větu 1, uvedenou v kapitole 1.2 (Základní vlastnosti geometrického osvětlení), která říká, že mez vrženého stínu je vrženým stínem meze vlastního stínu.

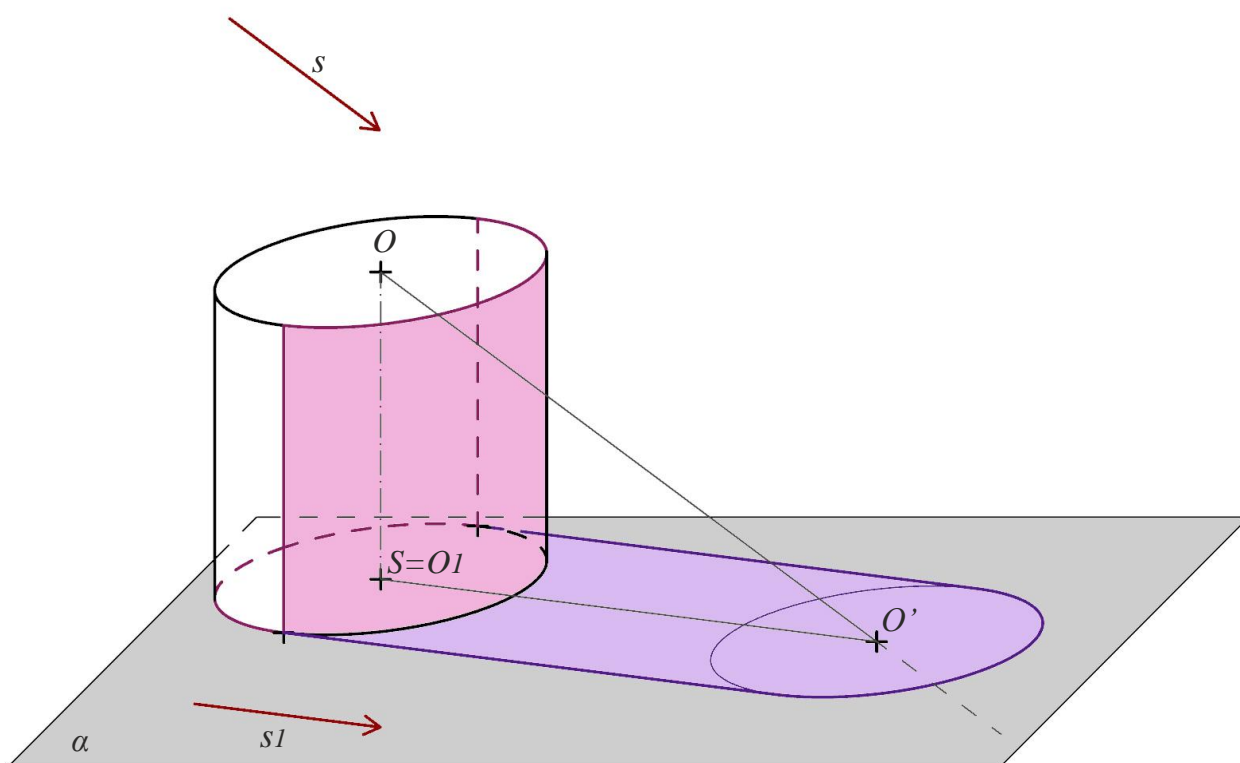
Mez vrženého stínu tvoří lomená čára $AE'F'G'CDA$, z čehož podle věty vyplývá, že mez vlastního stínu bude tvořit čára $AEFGCDA$.

Na obrázku 2.5 je situace osvětlení krychle znázorněna ve volném rovnoběžném promítání. Vržený stín je na obrázku 2.5 znázorněn fialově, vlastní stín - růžově.

2.2.2 Osvětlení kruhového válce

Nyní se podíváme na obecný postup pro osvětlení rotačního (kolmého) válce. Nechť je dán přímý rotační válec s podstavou v rovině α . Chceme osvětlit válec na danou rovinu α ve směru osvětlení s .

Sledujme obrázek 2.6, na kterém je situace osvětlení rotačního válce znázorněna ve volném rovnoběžném promítání. Nejdříve sestrojíme vržený stín. Dolní podstava válce leží v rovině α , proto stín této podstavy splývá s původní podstavou. K osvětlení horní podstavy použijeme faktu (viz poznámka 2.5), že stín rovinného útvaru do rovnoběžné roviny zachová velikost a tvar. Proto se konstrukce vrženého stínu horní podstavy značně zjednoduší. Stínem horní podstavy je kruh, který má stejný poloměr jako má horní (i dolní) podstava a který je rovnoběžně posunutý ve směru osvětlení s do roviny α . Pro sestrojení meze vrženého stínu nejprve sestrojíme stín středu horní podstavy O , stejným způsobem jako při osvětlení krychle. Potom zbývá sestrojit kružnici, stejnou jako podstavné (což v rovnoběžném průmětu bude elipsa). Částí meze vrženého stínu budou také společné tečny ke kružnicím (v rovnoběžném průmětu k elipsám). Tečny budou rovnoběžné se směrem s_1 .



Obrázek 2.6. Rovnoběžné osvětlení rotačního kolmého válce do roviny α .

Sestrojené tečny, polovina sestrogeného vrženého stínu kružnice do roviny α a polovina dolní podstavné kružnice určují mez vrženého stínu. Vržený stín je na obrázku 2.6 znázorněn fialově.

Nyní, když už máme mez vrženého stínu, přejdeme k sestrogení meze vlastního stínu. Vedeme dvě světelné roviny neboli roviny rovnoběžné se směrem s , které se dotýkají válcové plochy. Částí meze vlastního stínu budou dvě površky⁸, podél kterých se světelné roviny dotýkají příslušné válcové plochy. Kromě toho dotykové površky válce určí dvě poloviny kružnice příslušné horní (také i dolní) podstavě. Potom získané dotykové površky, polovina dolní kružnice a polovina horní kružnice podstav tvoří mez vlastního stínu. Ze směru osvětlení poznáme, které z polovin budou tuto mez tvořit.

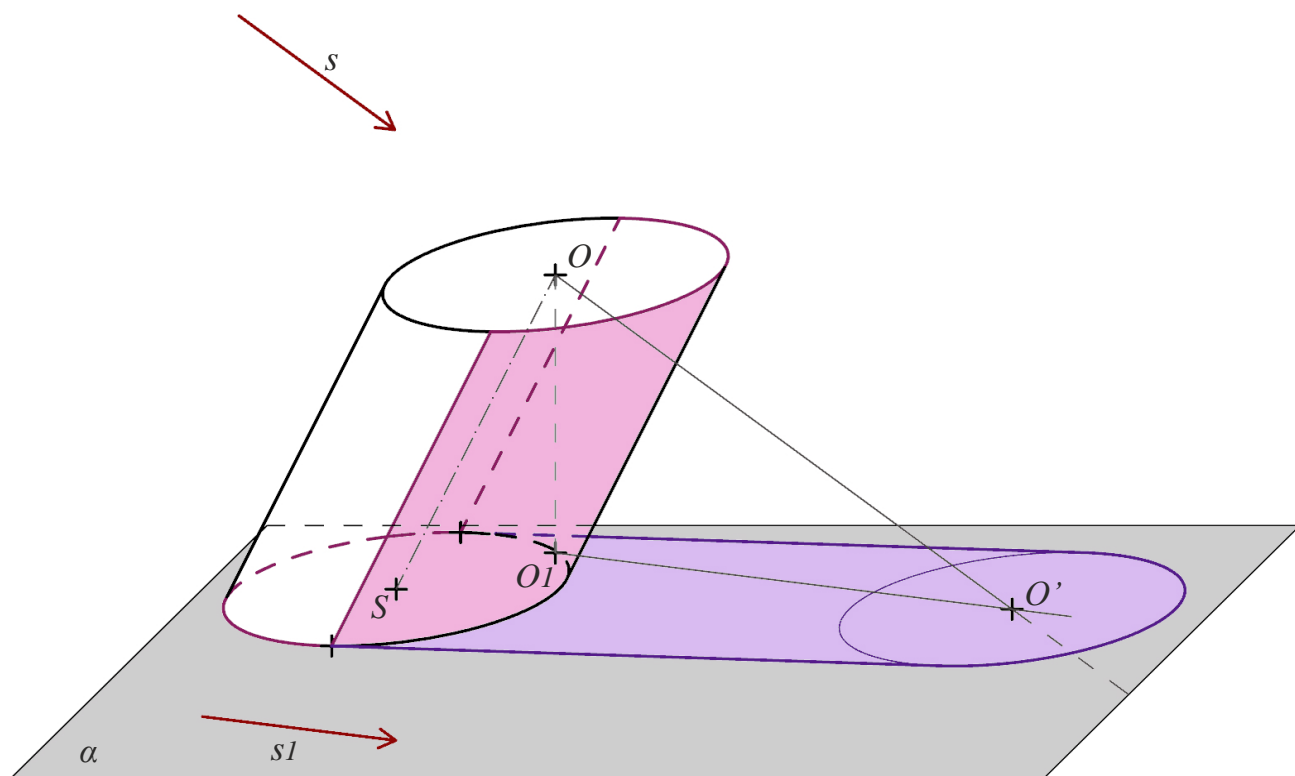
Poznámka 2.5: Stíny sestrogených povrchových přímek válce jsou tečnami vržených stínů (podstavných) kružnic. ■

⁸ Povrchové přímky zkráceně budeme nazývat površkami.

Na obrázku 2.6 je mez vlastního stínu zobrazena růžově. Na obrázku také můžeme vidět, že polovina pláště válce je zastíněna. Tato polovina válce a dolní podstava je vlastním stínem válce.

V případě kosého kruhového válce se řídíme stejným postupem. Musíme si ale uvědomit, že v případě kolmého válce střed dolní podstavy byl zároveň pravouhlým průmětem středu horní podstavy, bod $S=O_I$ na obrázku 2.6. Jednalo se tedy o speciální případ, ve kterém byla úsečka SO' rovnoběžná s pravouhlým průmětem s_I směru osvětlení s do roviny α . Obecně to však neplatí.

V případě kosého válce musíme najít stín středu O horní podstavy standardním způsobem. Bodem O vedeme světelný paprsek (je rovnoběžný se směrem s). Bodem O_I (viz obrázek 2.7) vedeme polopřímku rovnoběžnou se směrem s_I . Polopřímka protne světelný paprsek v bodě O' , tento bod je vrženým stínem bodu O do roviny α .



Obrázek 2.7. Rovnoběžné osvětlení kosého kruhového válce do roviny α .

Dále postupujeme podobně jako v případě kolmého válce. Sestrojíme stejnou kružnici (v rovnoběžném průmětu elipsu) jako podstavné ale se středem v bodě O' a vedeme společné tečny ke dvěma kružnicím (dolní podstavě a kružnici, která je mezi vrženého stínu horní podstavy), rovnoběžné se směrem $O'S$. V případě kosého válce tyto tečny nejsou rovnoběžné se směrem s_I .

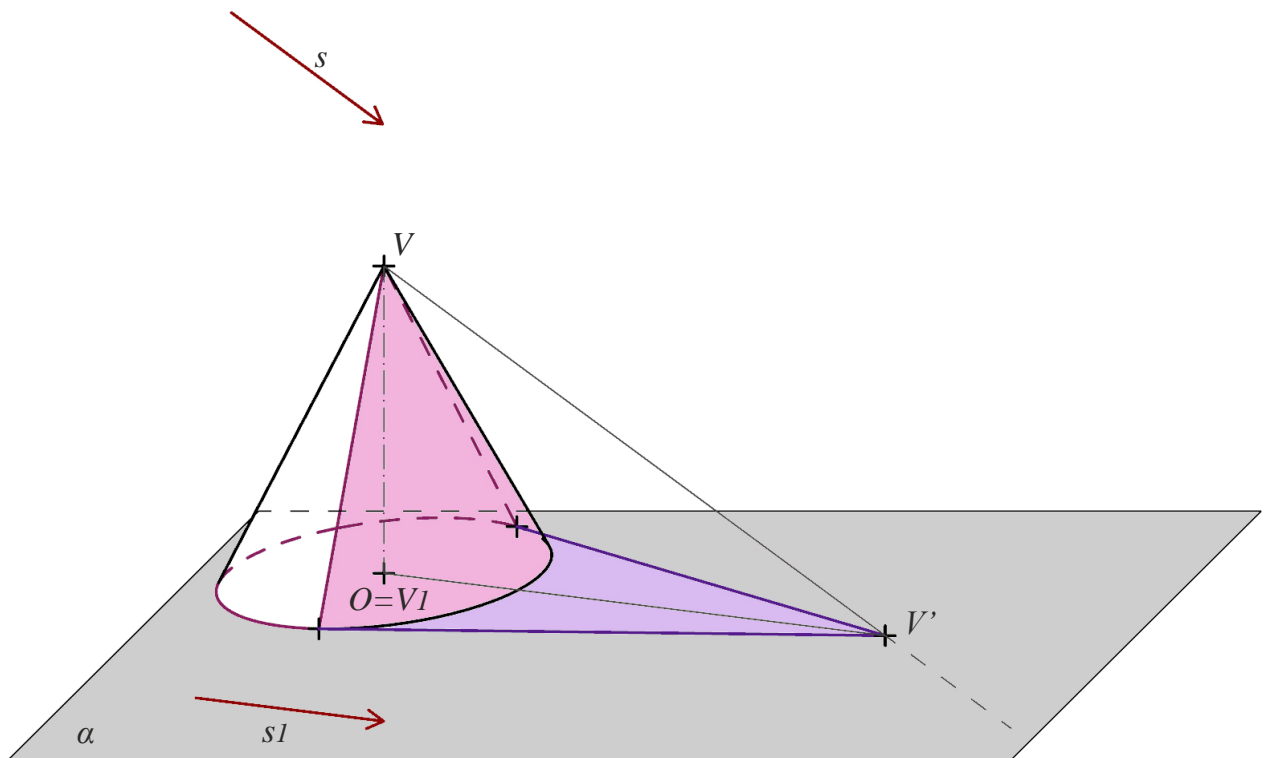
Části tečen (mezi body dotyku) společně s polovinami elips (které jsou průměty příslušných kružnic) tvoří mez vrženého stínu. Na obrázku 2.7 je vržený stín do roviny α znázorněn fialovou barvou, vlastní stín - růžovou.

2.2.3 Osvětlení kruhového kužele

Podobně jako u válce, nejprve se podíváme na obecný postup pro osvětlení rotačního kužele.

Nechť je dán rotační (kolmý) kužel, stojící na rovině α . Chceme osvětlit kužel na rovinu α ve směru osvětlení s .

Sledujme obrázek 2.8, kde je situace osvětlení rotačního kužele znázorněna ve volném



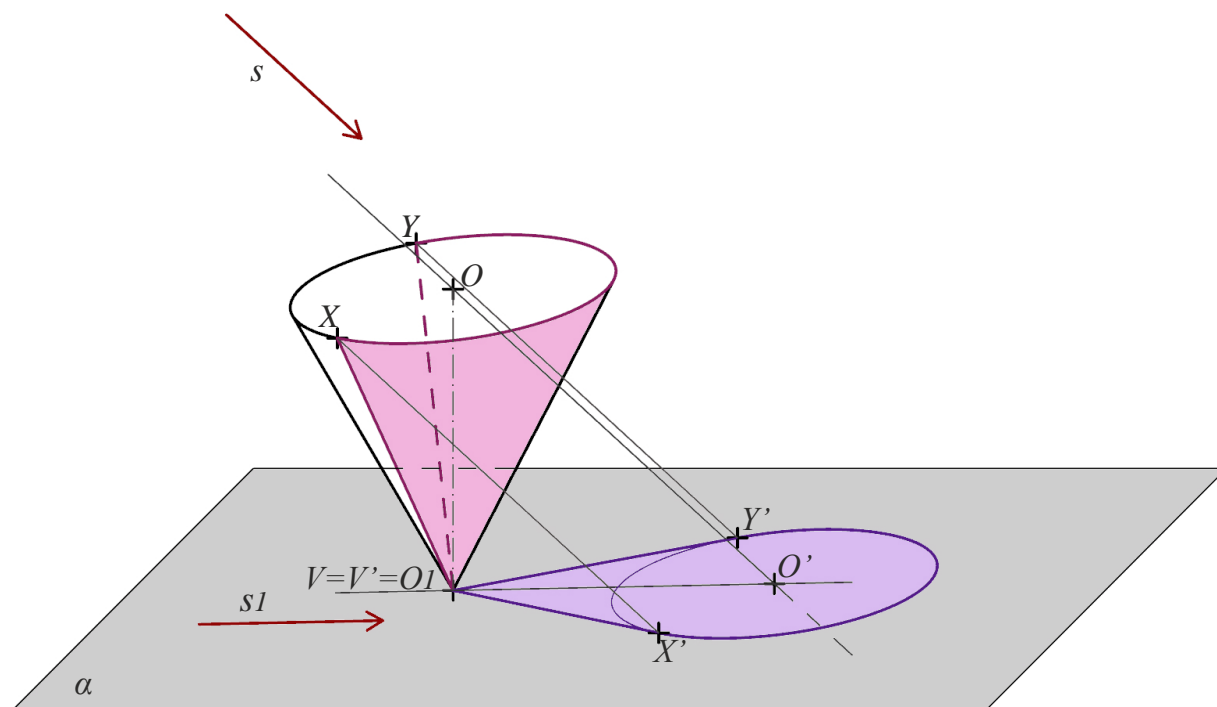
Obrázek 2.8. Rovnoběžné osvětlení rotačního kužele do roviny α .

rovnoběžném promítání. Podobně jako v případě válce, podstava „zůstává na místě“. Dále potřebujeme světelné roviny čili roviny rovnoběžné se směrem osvětlení, které se dotýkají kužele a procházejí jeho vrcholem. Proto sestrojíme vržený stín vrcholu kužele V do roviny α , dostaneme tak bod V' . Vedeme tečny z vrženého stínu vrcholu (čili z bodu V') k podstavě. Tečny spolu s částí podstavné kružnice tvoří mez vrženého stínu. Spojíme body dotyku s vrcholem V , dostaneme površky, které jsou součástí meze stínu vlastního. Potom mez vlastního stínu je tvořena dvěma

površkami a částí podstavné kružnice. Na obrázku 2.8 je vlastní stín znázorněn růžovou barvou, vržený stín – fialovou.

Poznámka 2.6: Na rozdíl od válce, polovina pláště kužele bude zastíněna jen ve speciálním případě, když směr osvětlení bude rovnoběžný s rovinou, do které osvětlujeme, tento případ jsme ale vyloučili ještě na začátku práce. Takže lze usoudit, že v obecném případě je zastíněná neurčitá část kužele. ■

Umístíme-li rotační kužel tak, že bude stát obráceně čili na svém vrcholu V , ležícím v rovině α , pak je zřejmé, že $V=V'$ a musíme sestrojít stín podstavy. Stín podstavy sestrojíme stejně, jak jsme to dělali v předchozím oddílu a pak vedeme tečny z bodu V ke stínu podstavy. Tím máme vržený stín tělesa hotový. Pro vlastní stín potřebujeme najít površky kužele, které vrhají stín na sestrojené tečny $V'X'$, $V'Y'$. Najdeme body na kuželi, jejichž stíny jsou právě body X' a Y' , tyto body nám určí hledané površky. Vedeme body X', Y' zpětné světelné paprsky a tam kde protnou podstavu kužele získáme body X, Y . Površky VX, VY s částí podstavné kružnice (v rovnoběžném průmětu elipsy) tvoří mez vlastního stínu. Našli jsme tedy mez vlastního stínu pomocí metody zpětných paprsků (která byla popsána dříve, v podkapitole 2.1). Tím už máme vržený a vlastní stín hotový, výsledek je znázorněn na obrázku 2.9.

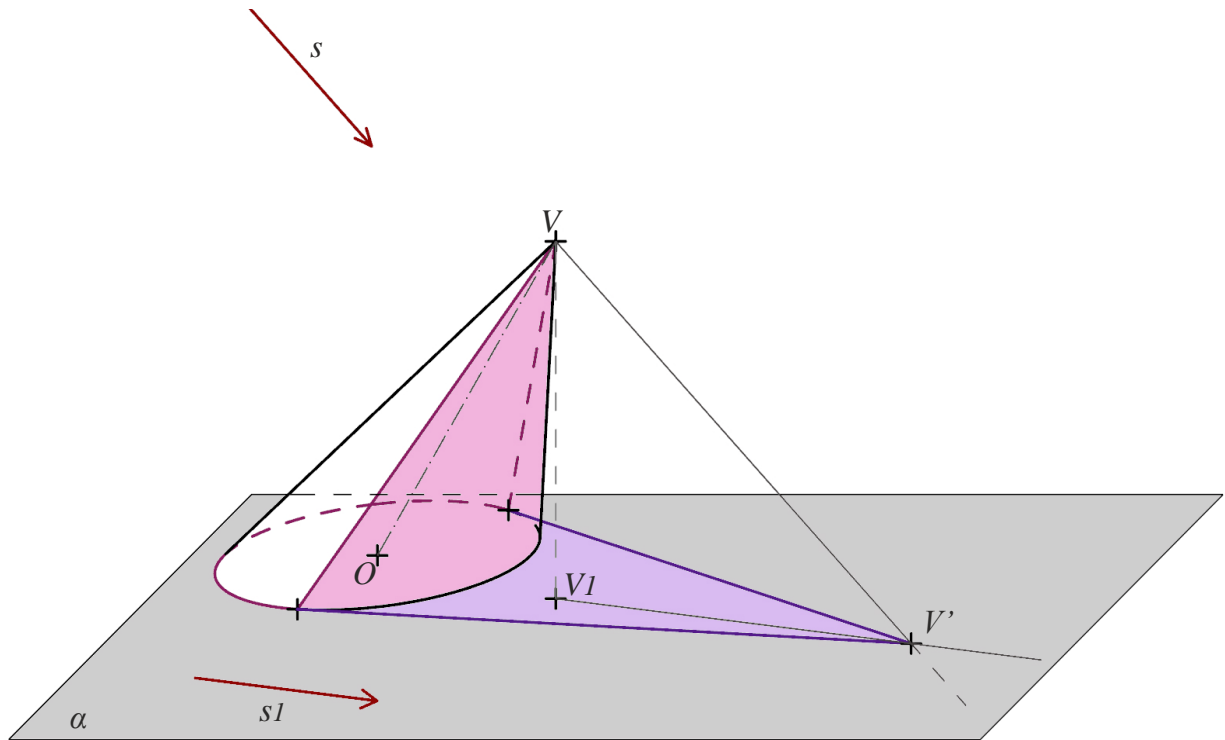


Obrázek 2.9. Rovnoběžné osvětlení obráceného rotačního kužele do roviny α .

Poznámka 2.7: Existuje i jiný postup, který lze použít pro osvětlení obráceného kužele. Musíme v mysli změnit směr světelných paprsků na opačný (čili uvažujeme opačně orientovaný směr) a sestrojít domnělý stín vrcholu na rovinu podstavy. Potom ze získaného bodu vedeme tečny k podstavě kužele. Tyto tečny určují pomyslný vržený stín na rovinu podstavy. Body dotyku nám určí skutečnou mez vlastního stínu. ■

Poznámka 2.8: Speciální případy vznikají v technickém osvětlení. Pro kužele, pro které platí, že úhel, který svírají povrchové přímky s rovinou podstavy, je roven 45° nebo 35° . Pro ně se konstrukce stínu usnadní. Vlastní stín kužele s úhlem rovným 45° zabírá jednu čtvrtinu pláště kuželové plochy, pro obrácený kužel – tři čtvrtiny. Pro kužele s úhlem rovným 35° ($\approx 35,3^\circ$ tento úhel je stejný jako úhel naklonění světelných paprsků s plochou zeměkoule) platí, že přímý kužel je celý osvětlen, obrácený je celý ve stínu. Tato teorie je podrobněji popsána v kapitole 2.3 učebnice (V. Korotkij, 2010). ■

Podobně jako v případě válce se podíváme na osvětlení kosého kruhového kužele. Pro nalezení vrženého stínu musíme správně sestrojít stín vrcholu, čili bodu V . Použijeme pravoúhlý průmět bodu V do roviny α , bod V_1 (viz obr. 2.10), který v obecném případě nesplývá se středem podstavy O . Potom vlastní stín sestrojíme stejně jako u kolmého kužele. Na obrázku 2.9 je vlastní stín kužele znázorněn růžově, vržený stín – fialově.



Obrázek 2.10. Rovnoběžné osvětlení kosého kruhového kužele do roviny α .

Z uvedených příkladů plyne následující důležitá poznámka.

Poznámka 2.9: Obecně platí: osvětlujeme-li rovnoběžně těleso, jehož podstavy leží v rovnoběžných rovinách s rovinou, kam osvětlujeme, potom stín podstavy získáme také tak, že ji ve směru osvětlení posuneme do průmětny (směr a délka posunutí jsou dané spojnicí libovolného bodu podstavy s jeho vrženým stínem). ■

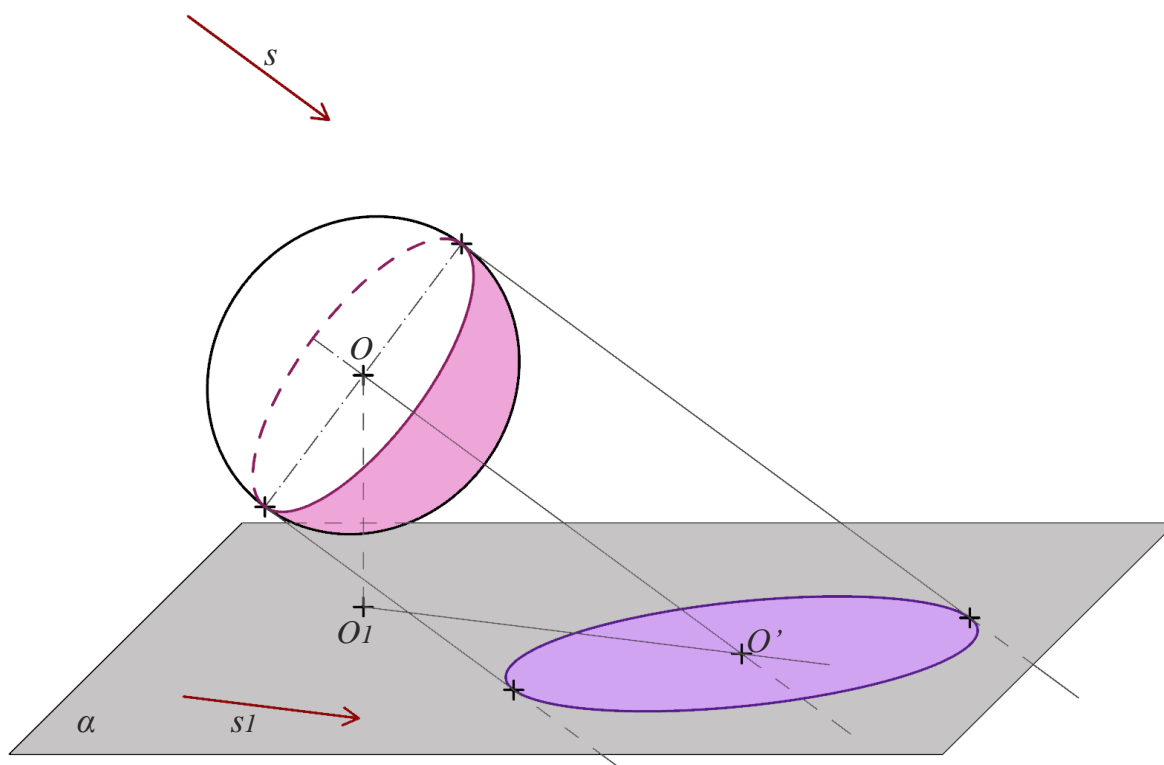
2.2.4 Osvětlení koule

Dalším důležitým tělesem, na které se podíváme, je koule. Necht' je dána koule a rovina α . Chceme osvětlit kouli na rovinu α ve směru osvětlení s .

Nejdříve sestrojíme vlastní stín. Mez vlastního stínu na kouli je hlavní kružnice, která je průnikem kulové plochy s rovinou kolmou ke směru osvětlení a procházející středem koule. Průmětem meze vlastního stínu v rovnoběžném promítání bude obecně elipsa.

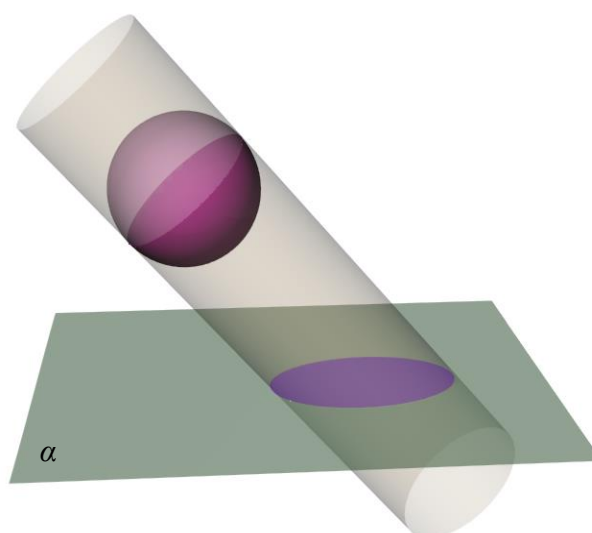
Podle věty uvedené v podkapitole 1.2 (Základní vlastnosti geometrického osvětlení) mez vrženého stínu tělesa je vrženým stínem meze vlastního stínu. Čili mezí vrženého stínu koule do roviny α bude vržený stín kružnice do roviny α , která je mezí vlastního stínu. Mezí vrženého stínu koule je tedy elipsa (v rovnoběžném průmětu také elipsa). Stínem středu kružnice O (která je

mezi vlastního stínu) je střed elipsy O' (která je mezi vrženého stínu). Celá situace je znázorněna ve volném rovnoběžném promítání na obrázku 2.11. Na obrázku je vlastní stín znázorněn růžově, vržený stín - fialově.



Obrázek 2.11. Rovnoběžné osvětlení koule do roviny α .

Při osvětlení koule je zřejmě polovina koule ve stínu a druhá polovina je osvětlená. Množina světelných paprsků, které se dotýkají koule, vytvářejí světelnou válcovou plochu. Osvětlovaná koule je do této světelné válcové plochy vepsána (pro představu uvažovaná válcová plocha je znázorněna v perspektivě na obrázku 2.12). Dotyková kružnice válcové plochy s koulí je mezi vlastního stínu na kouli. Mez vrženého stínu najdeme jako průnik válcové plochy s rovinou, do které osvětlujeme čili s rovinou α .



Obrázek 2.12. Rovnoběžné osvětlení koule do roviny α , světelná válcová plocha.

Pro konstrukci osvětlení kulové plochy budeme také používat Quételetovu-Dandelinovu větu:

Věta (Quételetova-Dandelinova pro kosoúhlý průmět kulové plochy):

Hranici průmětu kulové plochy v kosoúhlém promítání je elipsa, pro kterou platí:

- 1) *středem elipsy je kosoúhlý průmět středu kulové plochy;*
- 2) *na vedlejší ose se poloměr nezkrsluje;*
- 3) *ohniska jsou průměty krajních bodů průměru (kulové plochy) kolmého k průmětně. ■*

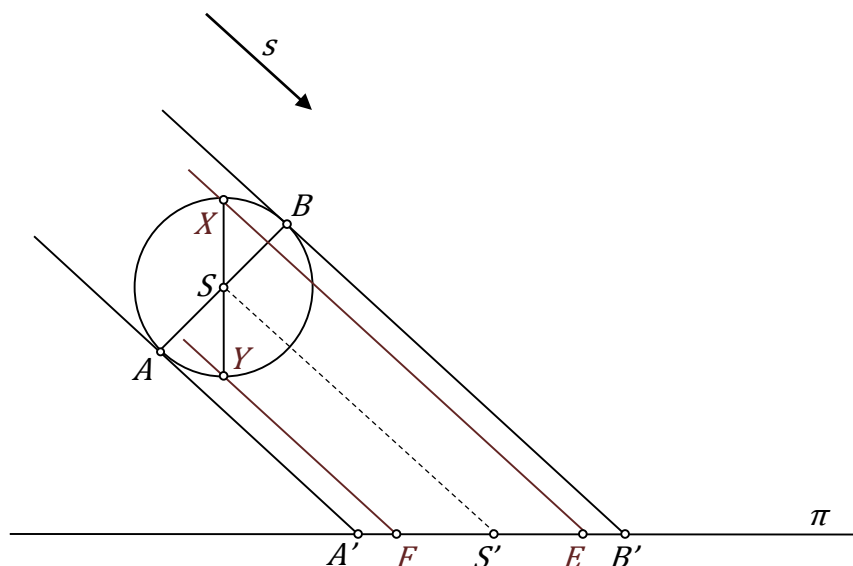
Jinou formulaci Quételetovy-Dandelinovy věty a její důkaz čtenář může nalézt v kapitole 8.2 učebnice (A. Urban, 1977).

Jak už víme z poznámky 1.4, konstrukce vrženého stínu libovolného útvaru je v podstatě konstrukcí průmětu tohoto útvaru, proto tuto větu můžeme použít k sestrojení vrženého stínu. Ukážeme použití této věty na obecném příkladu.

Nechť máme kulovou plochu se středem v bodě S a směr s . Sestrojíme vržený stín kulové plochy ve směru s do půdorysny π (viz obr. 2.13, na kterém je situace znázorněna v pohledu ze strany).

Mezí vlastního stínu kulové plochy bude hlavní kružnice ležící v rovině kolmé ke směru osvětlení. Mezi vrženého stínu kulové plochy je elipsa, která je průnikem světelné válcové plochy s půdorysnou π .

Hlavní osu elipsy najdeme pomocí průměru AB hlavní kružnice meze vlastního stínu, který je kolmý na směr s , na obrázku 2.13 body A, B leží na obrysu kulové plochy. Vedeme světelné paprsky body A a B . Paprsky protínají průmětnu, do které osvětlujeme, v bodech A' a B' , které jsou vrženými stíny bodů A a B . $A'B'$ je hlavní osa elipsy vrženého stínu koule do roviny π . Osvětlení je rovnoběžné a z toho plyne, že stín středu S dopadne na střed úsečky $A'B'$, o čemž se můžeme přesvědčit tak, že povedeme bodem S světelný paprsek.



Obrázek 2.13. Rovnoběžné osvětlení koule do roviny π .

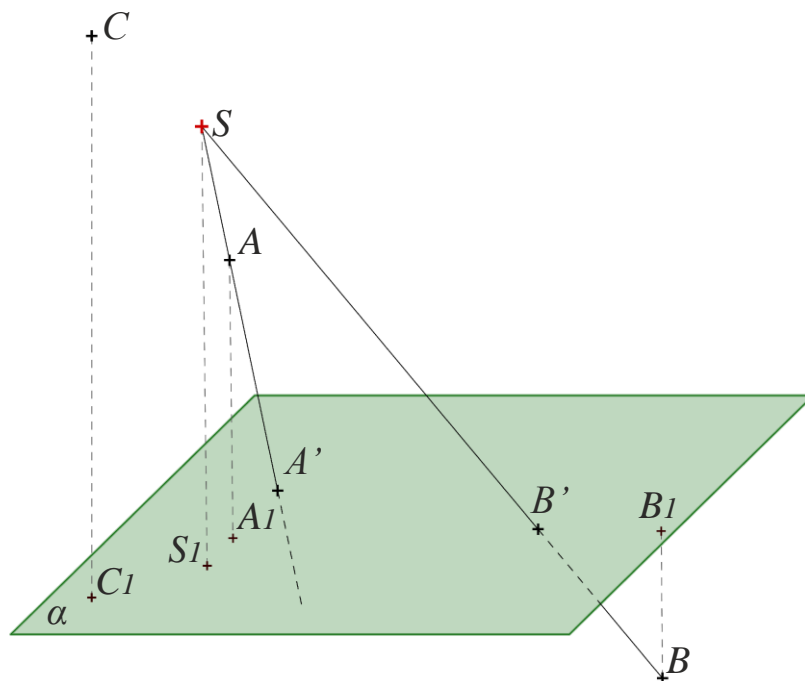
XY je průměrem (kulové plochy) kolmým k průmětně π . Z Quételetovy-Dandelinovy věty víme, že stíny bodů X a Y do roviny π budou ohniska elipsy vrženého stínu. Stíny bodů X a Y sestrojíme stejně jako u předchozích bodů, dostaneme tak ohniska E a F . Nyní je elipsa vrženého stínu jednoznačně určena svou hlavní osou a ohnisky.

3 Středové osvětlení

3.1 Osvětlení základních geometrických útvarů

Nejprve se podíváme na osvětlení bodu. Při středovém osvětlení se budeme řídit stejným principem jako při rovnoběžném osvětlení (viz stejnojmenná podkapitola 2.1) a stín bodu nalezneme jako průsečík světelného paprsku s průmětnou (rovinou), do které osvětlujeme. Čili úkol se opět převádí na nalezení průsečíku přímky s rovinou. Na rozdíl od rovnoběžného osvětlení nyní světelné paprsky budou tvořit svazek polopřímek s počátkem ve zdroji světla (vlastním bodě).

Nechť je dána vlastní rovina α a (vlastní) střed osvětlení - S , jež neleží v rovině α ¹. Mějme vlastní bod A (obr. 3.1) ležící ve stejném poloprostoru, určeném rovinou α , jako zdroj světla S . Dále mějme bod B , který se nachází v druhém poloprostoru. Bodem A vedeme světelný paprsek s_A . Postupujeme podobně jako při rovnoběžném osvětlení, jenom paprsek s_A v daném případě prochází body S a A (viz obr. 3.1). Jak už bylo řečeno, světelné paprsky nebudou navzájem rovnoběžné, budou tvořit svazek s počátkem v bodě S . Průsečík světelného paprsku s_A s rovinou α označíme A' . Zopakujeme stejný postup pro nalezení bodu B' .



Obrázek 3.1. Středové osvětlení bodů do roviny α .

¹ Nebude-li řečeno jinak, budeme vždy uvažovat (vlastní) střed osvětlení za ležící vně roviny, do které osvětlujeme.

Bod A' je vrženým stínem bodu A na rovinu α .

Bod B' se nazývá *ideální vržený stín* bodu B na rovinu.

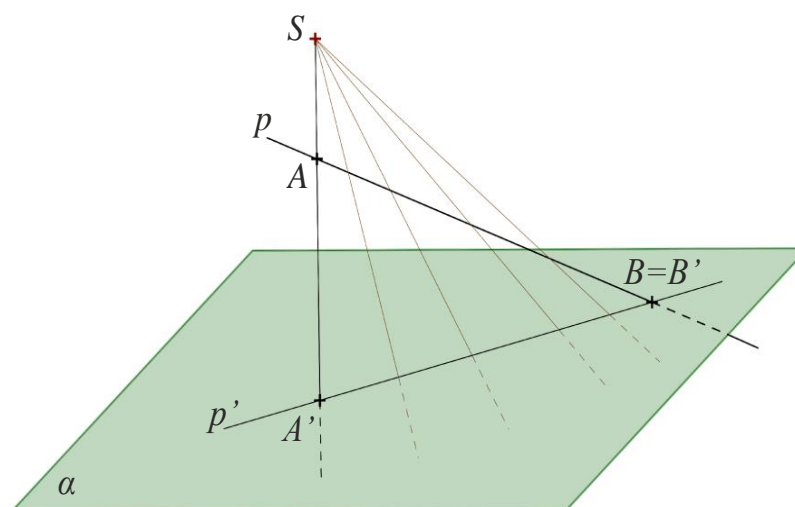
Máme-li bod C , ležící nad zdrojem světla S (čili výš než bod S , viz obr. 3.1), nemá vržený stín ani ideální vržený stín, protože se nachází za zdrojem světla.

Poznámka 3.1: Dále nebudeme uvažovat případy, ve kterých se objekt nebo jeho část nachází za zdrojem světla. ■

Jak už bylo naznačeno v poznámce 2.1 při středovém (stejně tak při rovnoběžném) osvětlení je vrženým stínem bodu na rovinu stopník příslušného světelného paprsku.

Vržený stín přímky při středovém osvětlení budeme hledat stejným způsobem jako při rovnoběžném osvětlení (viz podkapitola 2.1 Osvětlení základních geometrických útvarů). Sestrojíme vržený stín dvou bodů přímky (v případě úsečky - krajních bodů), vrženým stínem přímky bude přímka procházející stíny těchto bodů.

Nechť máme bod S , rovinu α a přímku p , která neleží v rovině α . Osvětíme přímku p do dané roviny α (obr. 3.2).



Obrázek 3.2. Středové osvětlení přímky p do roviny α .

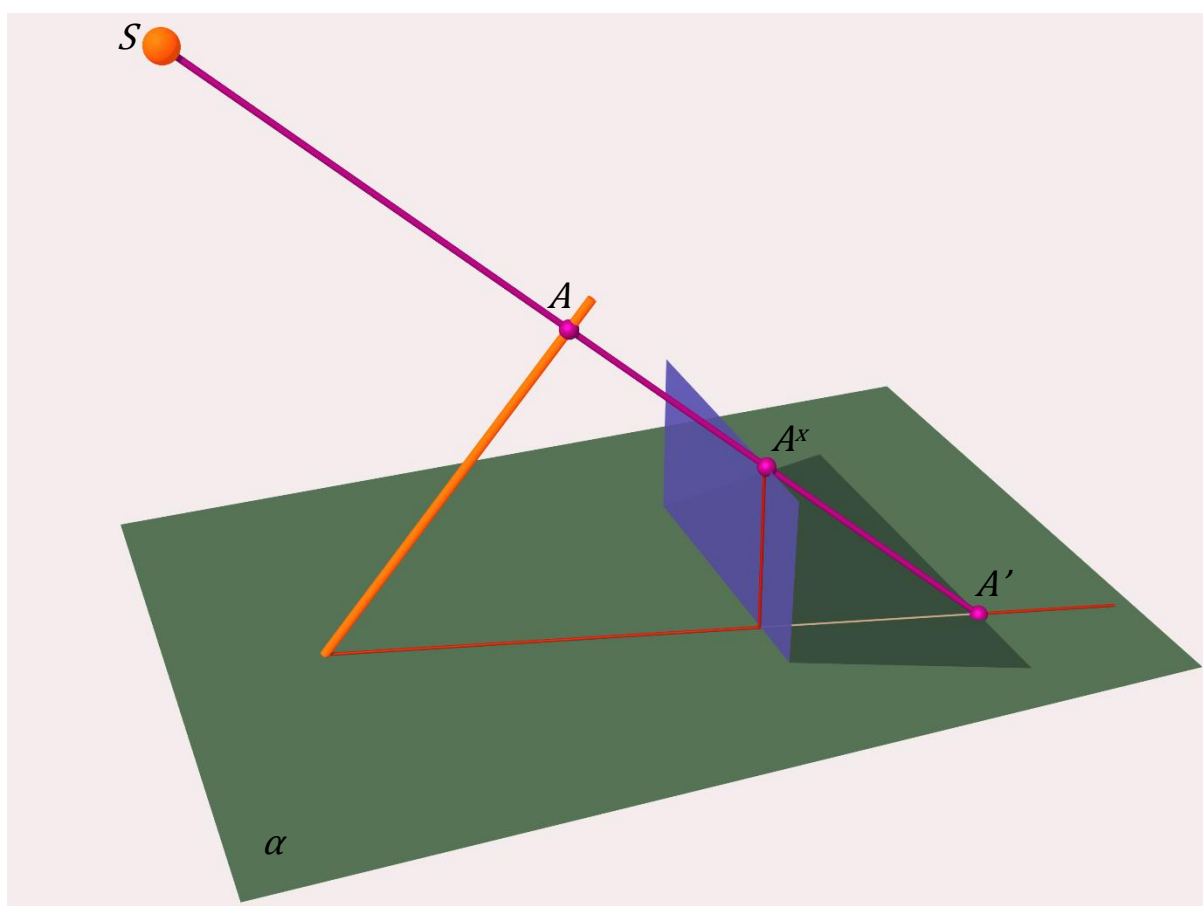
Stín přímky lze najít jako průnik světelné roviny přímky s rovinou, na kterou osvětlujeme. Světelnou rovinu λ dané přímky vytváří světelné paprsky jednotlivých bodů přímky p , čili rovina je určena přímkou p a bodem S . Průsečnici roviny λ s rovinou α obvykle značíme p' . Přímka p' je vrženým stínem přímky p na rovinu α .

Jiné zajímavé vlastnosti středového osvětlení přímek ve speciální poloze:

- ❖ Vržený stín přímky, popř. úsečky rovnoběžné s rovinou, do které osvětlujeme, je přímka, popř. úsečka stejného směru jako ta, co stín vrhá. Úsečka, která je vrženým stínem je delší než původní úsečka (na rozdíl od rovnoběžného osvětlení).
- ❖ Vrhá-li přímka stín na rovnoběžné roviny, pak vržené stíny jsou navzájem rovnoběžné.
- ❖ Protíná-li přímka rovinu stínu v nějakém bodě, pak vržený stín přímky na stejnou rovinu prochází tímto bodem (bod B na obrázku 3.2).

Postup pro nalezení stínu přímky na dvě neprůhledné roviny už byl ukázán pro rovnoběžné osvětlení v podkapitole 2.1, pro středové osvětlení je postup obdobný.

Při středovém osvětlení (stejně, jako při rovnoběžném) budeme používat metodu zpětných paprsků. Tato metoda byla podrobně popsána v podkapitole 2.1.



Obrázek 3.3. Metoda zpětných paprsků, středové osvětlení.

Nechť máme úsečku p , a hledáme její stín na danou rovinu α , s ohledem na neprůhledný obdélník, který stojí na rovině a je na ní kolmý. Uvažujeme tedy stejnou situaci jako v podkapitole 2.1 ale při středovém osvětlení čili místo směru (nevlastního bodu) osvětlení s , uvažujeme (vlastní)

bod S , jako zdroj osvětlení. Postup při osvětlení v tomto případě je stejný (viz podkapitola 2.1), jediný rozdíl je v tom, že paprsky budou procházet bodem S (při rovnoběžném osvětlení paprsky byly rovnoběžné se směrem s). Výsledný stín můžeme vidět na obrázku 3.3.

3.2 Osvětlení jednotlivých těles

V této kapitole se podíváme na středové osvětlení významných těles (ploch). Budeme se zabývat jen základními tělesy v základních polohách. Struktura této podkapitoly bude stejná jako struktura stejnojmenné podkapitoly 2.2. Kromě toho se v této podkapitole budeme často odkazovat na podkapitulu 2.2 a mnohé analogické věci budeme vysvětlovat stručněji, proto doporučujeme čtenáři, aby se s podkapitolou 2.2 podrobně seznámil.

Všechny doprovázející ilustrace v této kapitole jsou náčrty popsanych situací ve volném rovnoběžném promítání.

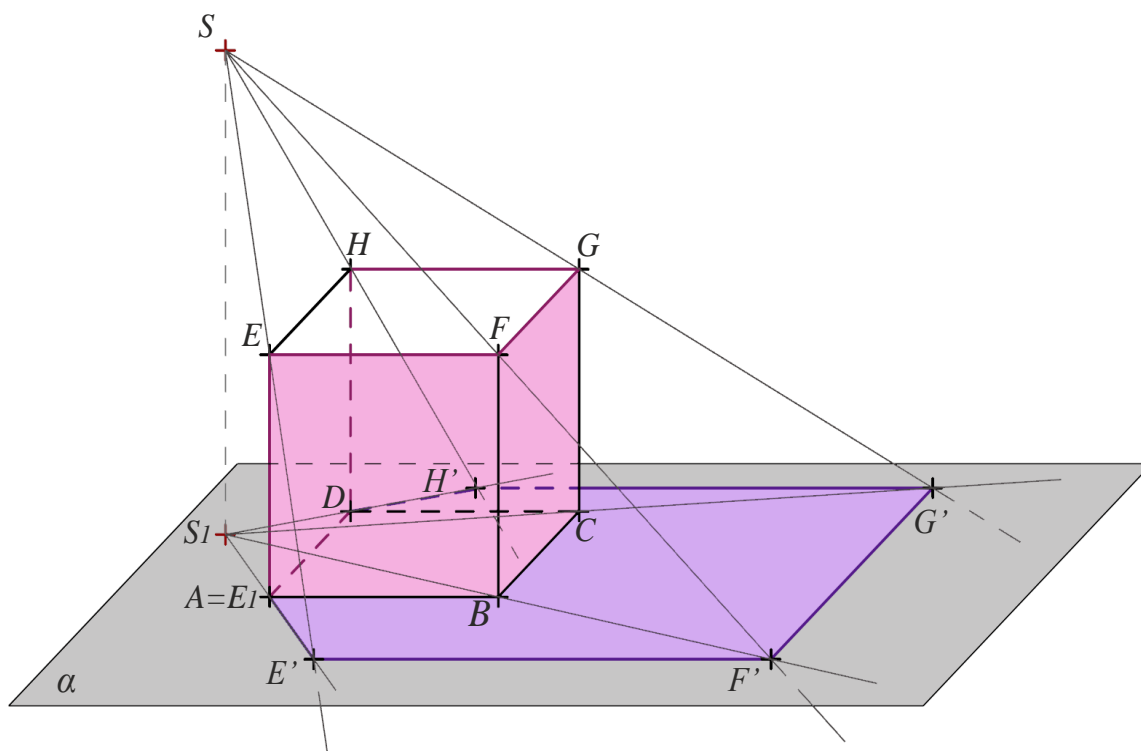
3.2.1 Osvětlení hranatých těles

Hranatá tělesa jsme už definovali v oddílu 2.2.1, přejdeme proto rovnou k příkladu osvětlení krychle. Necht' máme krychli s podstavou v rovině α a bod S , který je zdrojem osvětlení.

Sledujme obrázek 3.4, kde je situace osvětlení krychle znázorněna ve volném rovnoběžném promítání. Dolní podstava leží v rovině α , proto stín této podstavy splývá s původní podstavou. Takže zbývá osvětlit horní podstavu, což uděláme pomocí osvětlení vrcholů horní podstavy. Najdeme, například, vržený stín bodu E . Bodem E vedeme světelný paprsek, který prochází zdrojem světla S , bodem E_I vedeme polopřímku $E_I S_I$ (což je pravoúhlý průmět paprsku do roviny α). Sestrojené polopřímky se protnou v bodě E' , který je stínem bodu E do roviny α . Stíny ostatních bodů najdeme analogickým způsobem. Spojíme příslušné stíny vrcholů a dostaneme tak vržené stíny hran. Výsledný vržený stín tělesa je znázorněn včetně viditelnosti na obrázku 3.4.

Poznámka 3.2: Při středovém osvětlení stín rovinného útvaru do rovnoběžné roviny zachová tvar, nezachovává však velikost (jak tomu bylo u rovnoběžného osvětlení). Původní útvar a jeho vržený stín si odpovídají ve stejnolehlosti² (v prostoru) se středem ve středu osvětlení. Tudíž rovinný útvar a jeho vržený stín jsou podobné obrazci. Všimněme si tedy, že vrženým stínem horní podstavy krychle je čtverec $E'F'G'H'$, který je stejnohlý s podstavou $EFGH$. ■

² Podrobně o stejnolehlosti v prostoru si čtenář může přečíst v (Pomykalova, 1995)



Obrázek 3.4. Středové osvětlení krychle na rovinu α .

Pro určení vlastního stínu stačí použít větu 1, uvedenou v kapitole 1.2 (Základní vlastnosti geometrického osvětlení), která říká, že mez vrženého stínu je vrženým stínem meze vlastního stínu.

Mez vrženého stínu tvoří lomená čára $AE'F'G'H'DA$, z čehož podle věty vyplývá, že mez vlastního stínu bude tvořit čára $A EFGHDA$.

Vržený stín je na obrázku 3.4 znázorněn fialově, vlastní stín - růžově.

Poznámka 3.3: Všimneme si, že v případě rovnoběžného osvětlení krychle, vržené stíny svislých hran byly rovnoběžné (viz obrázek 2.4), při středovém osvětlení rovnoběžné nejsou, ale sbíhají se v bodě S_I (viz obrázek 3.4). Jak už bylo uvedeno v poznámce 1.4 konstrukce vrženého stínu nějakého útvaru na rovinu při středovém osvětlení je konstrukcí průmětu tohoto útvaru ve středovém promítání se středem ve zdroji světla. Na obrázku 3.4 je vidět že se stíny hran sbíhají v bodě S_I , není to náhoda, bod S_I je totiž úběžníkem³ vržených stínů svislých hran krychle. ■

³ Úběžníky jsou vzory a obrazy nevlastních bodů. Zde bod S_I je středovým průmětem (obrazem) nevlastního bodu, určeného směrem svislých hran krychle.

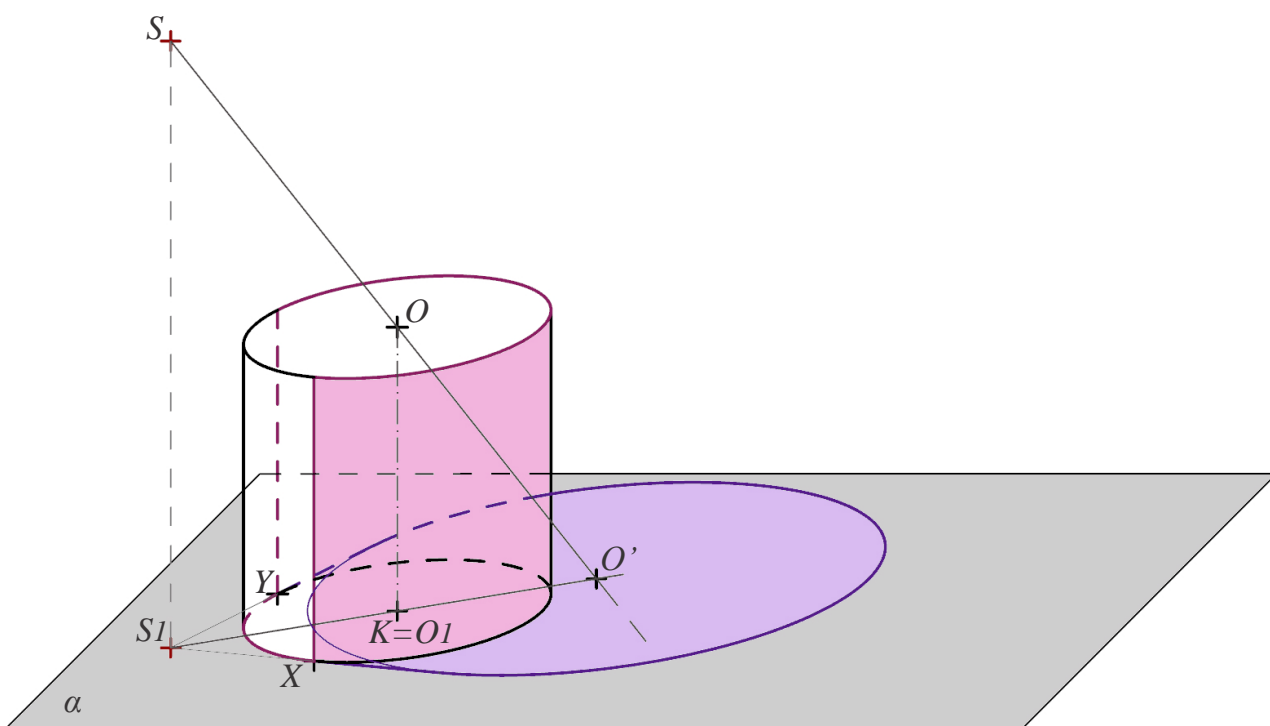
Tato teorie je podrobně popsána v učebnice (K. Drábek, F. Harant, O. Setzer, 1979)

3.2.2 Osvětlení kruhového válce

Nyní se podíváme na obecný postup pro osvětlení rotačního (kolmého) válce. Nechť je dán rotační válec s podstavou v rovině α . Chceme osvětlit válec na danou rovinu α ze zdroje osvětlení S .

Sledujme obrázek 3.5, na kterém je situace osvětlení rotačního válce znázorněna ve volném rovnoběžném promítání. Nejdříve sestrojíme vlastní stín. Vedeme dvě světelné roviny čili roviny, které se dotýkají válcové plochy a procházejí bodem S . Částí meze vlastního stínu budou dvě površky, podél kterých se světelné roviny dotýkají příslušné válcové plochy. Pro konstrukci to znamená, že vedeme tečny z bodu S_I k podstavě válce, body dotyku X a Y určí hledané površky. Kromě toho získané površky válce rozdělí kružnice příslušné horní (také i dolní) podstavě na dvě části. Stejně jako při rovnoběžném osvětlení získané dotykové površky, část dolní kružnice a část horní kružnice podstav tvoří mez vlastního stínu.

Mez vlastního stínu je na obrázku 3.5 zobrazena růžovou čarou. Na obrázku také vidíme, že část válce je zastíněna, tato část válce a dolní podstava jsou vlastním stínem válce.



Obrázek 3.5. Středové osvětlení rotačního kolmého válce do roviny α .

Nyní, když už jsme určili vlastní stín, přejdeme k sestrojení vrženého stínu. Dolní podstava válce leží v rovině α , proto při osvětlení „zůstává na místě“.

Poznámka 3.4: Středovým průmětem (také vrženým stínem, viz poznámka 1.4) kružnice k je kuželosečka. Typ kuželosečky závisí na poloze kružnice k vůči obzorové rovině, což je rovina rovnoběžná s průmětnou a obsahující střed promítání (při osvětlení je střed zdroj světla, průmětna je rovina, kam osvětlujeme). Rovinu, v níž kružnice k leží, označíme σ .

Jestliže rovina σ je rovnoběžná s průmětnou (nemá tedy s obzorovou rovinou žádný společný bod) pak středovým průmětem kružnice k je kružnice. Přičemž obě kružnice si odpovídají v prostorové stejnolehlosti se středem ve středu promítání (viz poznámka 3.2). Navíc střed původní kružnice k se promítá na střed průmětu.

Jestliže rovina σ je různoběžná s průmětnou pak rozlišujeme tři případy:

- 1) Kružnice k nemá s obzorovou rovinou žádný společný bod, potom středovým průmětem kružnice je elipsa. Přičemž střed původní kružnice se už nepromítá na střed elipsy, která je průmětem.
- 2) Kružnice k má s obzorovou rovinou právě jeden společný bod U , potom středovým průmětem kružnice je parabola. Osa paraboly je rovnoběžná se spojnicí středu osvětlení a bodu U .
- 3) Kružnice k má s obzorovou rovinou dva různé společné body U a V , potom středovým průmětem kružnice je hyperbola. Asymptoty hyperboly jsou rovnoběžné se spojnicemi středu osvětlení s body U a V .

Více o středovém průmětu kružnice si čtenář může přečíst v (A.Urban, 1977). ■

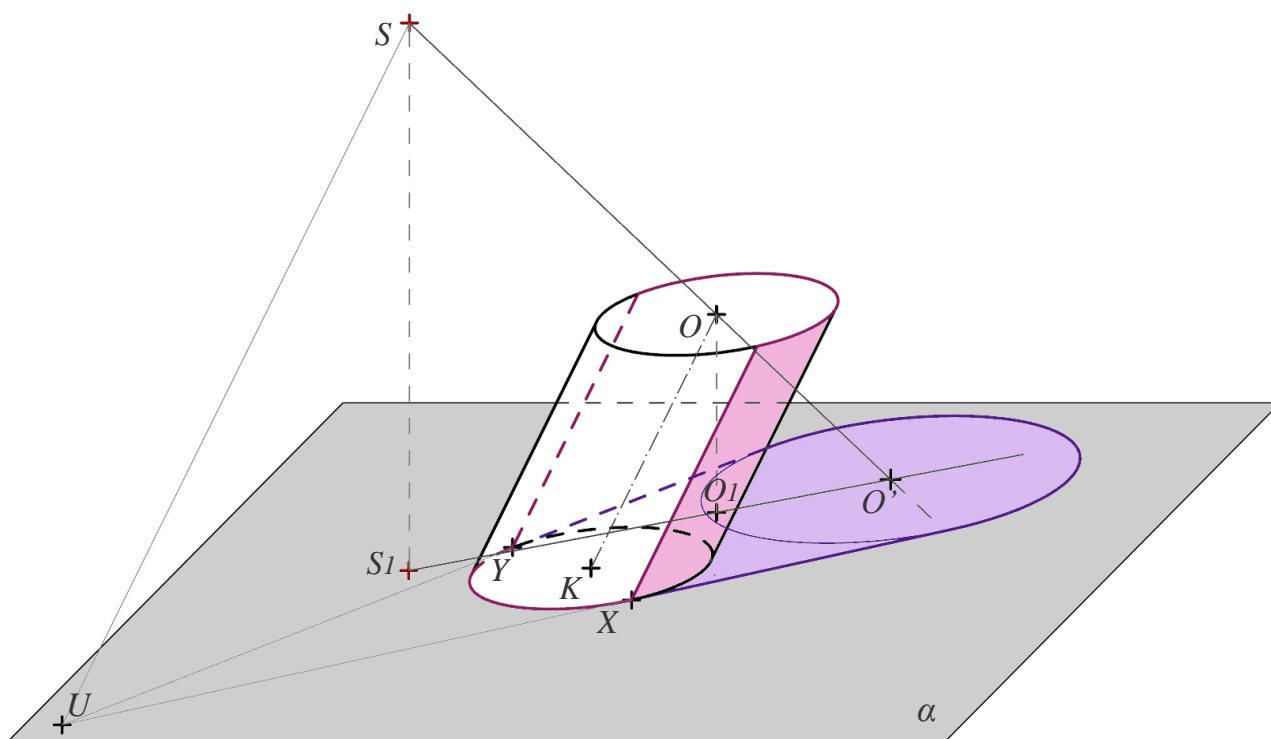
Pro sestrojení vrženého stínu horní podstavy nejprve sestrojíme stín středu O . Bodem O vedeme světelný paprsek OS . Bodem O_I vedeme polopřímku S_1O_I . Polopřímka protne světelný paprsek v bodě O' , tento bod je vrženým stínem bodu O do roviny α . Z uvedené poznámky 3.4 víme, že mezi vrženého stínu horní podstavě kružnice je kružnice (což v rovnoběžném průmětu bude elipsa) se středem v bodě O' , odpovídající původní kružnici v prostorové stejnolehlosti se středem v bodě S .

Částí meze vlastního stínu ale byly mimo jiné dvě povrchové úsečky válce, proto (podle věty 1) stíny površek budou také součástí meze vrženého stínu. Stíny površek sestrojíme pomocí krajních bodů. Všimneme si také, že pro středové osvětlení platí stejná poznámka (poznámka 2.5) jako pro rovnoběžné osvětlení: vržené stíny površek válce jsou společnými tečnami vržených stínů podstavných kružnic (v rovnoběžném průmětu elips). Kromě toho vidíme, že se vržené stíny površek sbíhají v bodě S_I , který je jejich úběžníkem.

Sestrojené tečny (mezi body dotyku), část sestrojené kružnice (meze vrženého stínu horní podstavy do roviny α) a část dolní podstavné kružnice (růžový oblouk mezi body X a Y na obrázku 3.5) určují mez vrženého stínu. Vržený stín je na obrázku 3.5 znázorněn fialově.

Nyní se podíváme na osvětlení kosého kruhového válce.

Sestrojíme vržený stín horní podstavy už známým způsobem (viz výš). Musíme si ale uvědomit, že v případě kolmého válce střed dolní podstavy byl zároveň pravoúhlým průmětem středu horní podstavy, bod $K=O_1$ na obrázku 3.5, pro kosý válec to však neplatí (viz obrázek 3.6). Mezi vrženého stínu horní podstavy je kružnice (v rovnoběžném průmětu elipsa) se středem v bodě O' .



Obrázek 3.6. Středové osvětlení kosého kruhového válce do roviny α .

Sestrojená kružnice (mez vrženého stínu horní podstavy) a kružnice dolní podstavy si odpovídají ve stejnolehlosti v rovině. Pro dvě dané kružnice existují dvě stejnolehlosti, ve kterých se jedna kružnice zobrazí na druhou (plyne z toho, že kružnice mají různé poloměry). Podrobně o stejnolehlosti kružnic si čtenář může přečíst v (Pomykalová, 1993). Budeme zde uvažovat jenom stejnolehlost s kladným koeficientem. Najdeme střed stejnolehlosti (s kladným koeficientem), označíme ho U . Bod U je rovněž úběžníkem vržených stínů površek.

Poznámka 3.5: Úběžník U můžeme také najít tak, že středem osvětlení S vedeme přímkou rovnoběžnou s osou válce. Tato přímka protne průmětnu α v hledaném bodě U .

Uvědomíme si tedy, že v případě kosého válce (na rozdíl od kolmého) S_I už nebude úběžníkem vržených stínů površek. ■

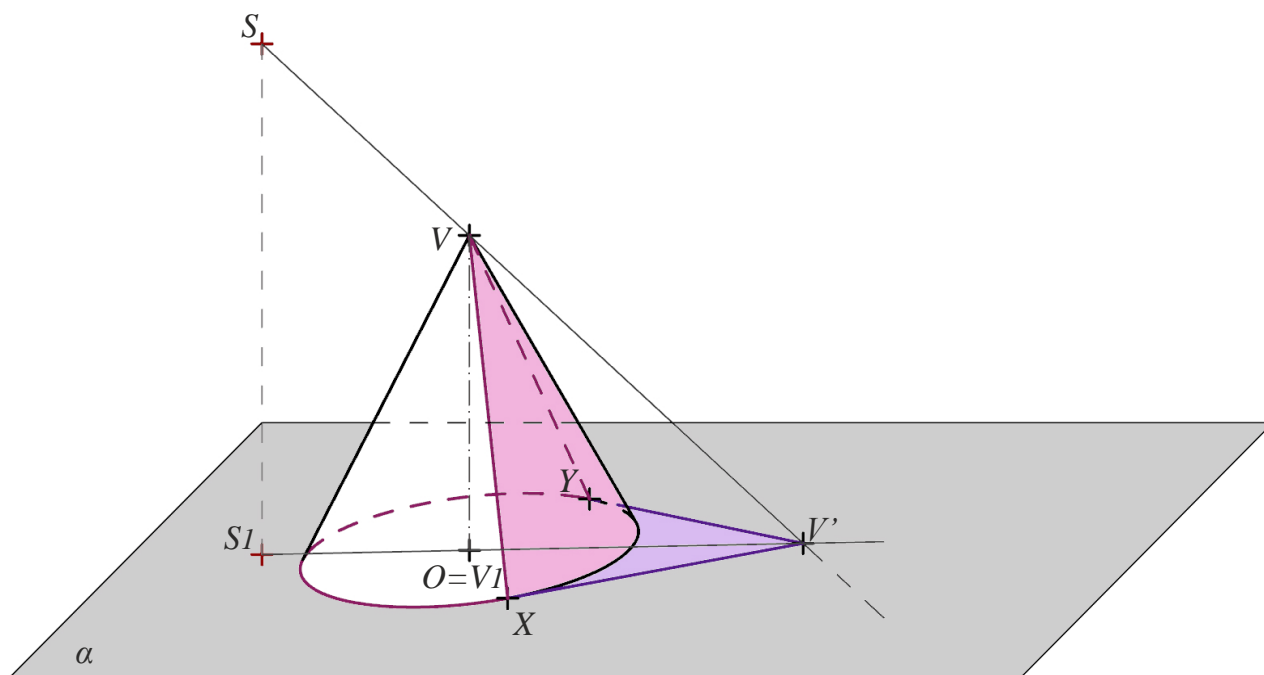
Vedeme z bodu U společné tečny ke dvěma kružnicím: dolní podstavné a kružnici, která je mezi vrženého stínu horní podstavy. Mez vrženého stínu tvoří sestrojené společné tečny (mezi body dotyku) společně s částmi kružnic (v rovnoběžném průmětu elips). Body dotyku sestrojených tečen (body X a Y) nám kromě toho určí površky válce, které jsou součástí meze vlastního stínu. Na obrázku 3.6 je vržený stín do roviny α znázorněn fialovou barvou, vlastní stín - růžovou.

3.2.3 Osvětlení kruhového kužele

Podobně jako u válce, nejprve se podíváme na obecný postup pro osvětlení rotačního kužele.

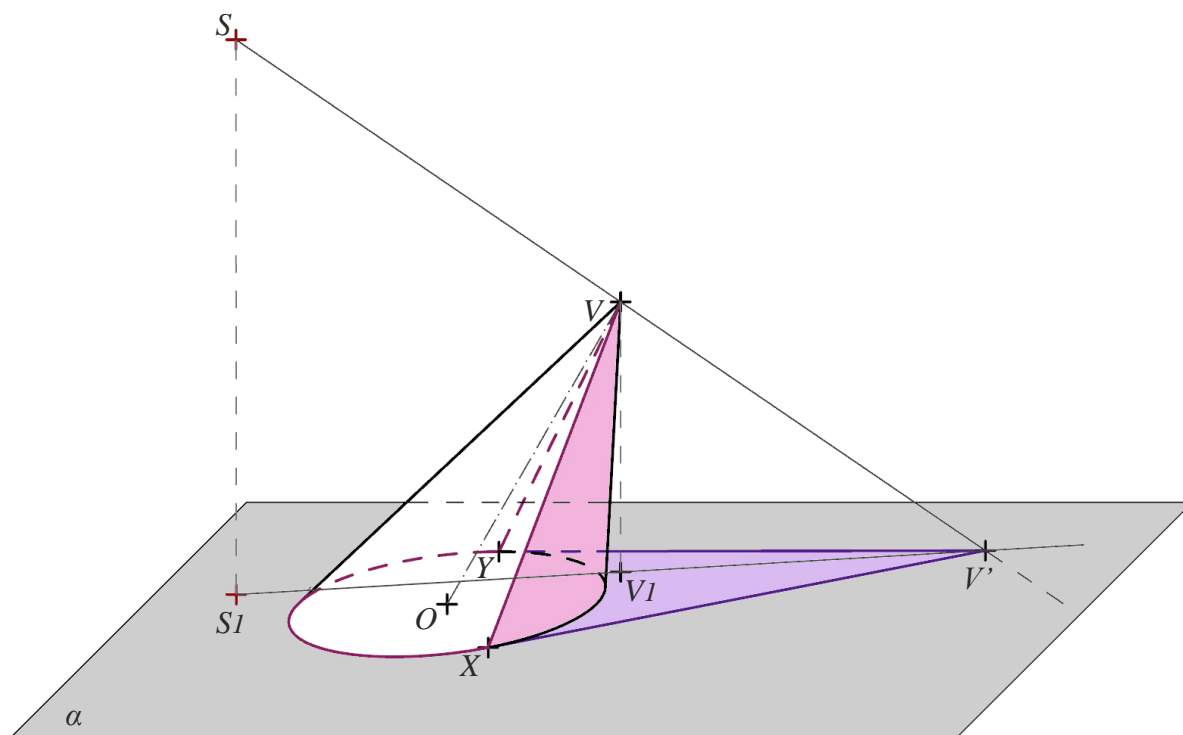
Nechť je dán rotační (kolmý) kužel, stojící na rovině α . Chceme osvětlit kužel na rovinu α ze zdroje osvětlení S .

Sledujme obrázek 3.7, kde je situace osvětlení rotačního kužele znázorněna ve volném rovnoběžném promítání. Podobně jako v případě válce, podstava „zůstává na místě“. Dále potřebujeme sestrojít vržený stín vrcholu kužele V do roviny α , dostaneme tak bod V' . Vedeme tečny z vrženého stínu vrcholu (čili z bodu V') k podstavě. Tečny XV' a YV' spolu s částí podstavné kružnice tvoří mez vrženého stínu. Spojíme body dotyku X a Y s vrcholem V , dostaneme površky, které jsou součástí meze stínu vlastního. Potom mez vlastního stínu je tvořena dvěma površkami (XV a YV) a částí podstavné kružnice (růžový oblouk mezi body X a Y na obrázku 3.7). Na obrázku 3.7 je vlastní stín znázorněn růžovou barvou, vržený stín – fialovou.



Obrázek 3.7. Středové osvětlení rotačního kužele do roviny α .

Podobně jako v případě válce se musíme podívat na osvětlení kosého kruhového kužele. Pro nalezení vrženého stínu musíme správně sestavit stín vrcholu, čili bodu V . Použijeme pravoúhlý průmět bodu V do roviny α , bod V_1 (viz obr. 3.8), který v obecném případě nesplývá se středem podstavy O . Potom vlastní stín sestojíme stejně jako u kolmého kužele (pomocí tečen k podstavě z bodu V'). Na obrázku 3.8 je vlastní stín kužele znázorněn růžově, vržený stín - fialově.



Obrázek 3.8. Středové osvětlení kosého kruhového kužele do roviny α .

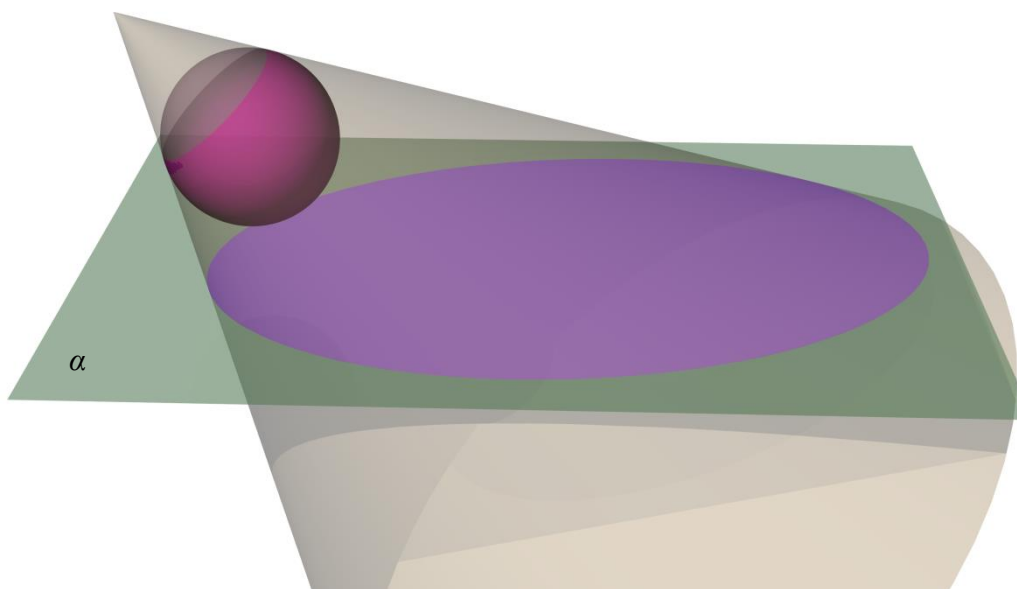
Umístíme-li rotační kužel tak, že bude stát obráceně, budeme postupovat stejně jako v případě rovnoběžného osvětlení a středově osvětlíme podstavu do roviny α (viz oddíl 2.2.3).

Poznámka 3.6: Obecně platí: osvětlujeme-li středově těleso, jehož podstavy leží v rovnoběžných rovinách s rovinou, kam osvětlujeme, potom stín podstavy můžeme získat použitím vztahu stejnolehlosti mezi rovinou podstavy a rovinou, do které osvětlujeme (viz poznámka 3.2). ■

3.2.4 Osvětlení koule

Dalším tělesem, na které se podíváme, je koule. Při středovém osvětlení množina světelných paprsků, které se dotýkají koule, vytvářejí světelnou kuželovou plochu. Osvětlovaná koule je do této světelné kuželové plochy vepsána. Dotyková kružnice kuželové plochy s koulí je mezi vlastního stínu na kouli. Pro představu uvažovaná kuželová plocha je znázorněna na obrázku 3.9 (v perspektivě). Mez vrženého stínu najdeme jako průnik kuželové plochy s rovinou, do které osvětlujeme čili s rovinou α . Jedná se tedy o řez kuželové plochy rovinou, z čehož lze usoudit, že mezi vrženého stínu kulové plochy může být jakákoli kuželosečka. Podrobně o řezu kuželové plochy rovinou si čtenář může přečíst v (A. Urban, 1977). My se ale v této práci omezíme jenom

na případ, v němž mezi vrženého stínu bude elipsa. Na obrázku 3.9. je zobrazená situace osvětlení kulové plochy, v níž je mezi vrženého stínu elipsa.



Obrázek 3.9. Středové osvětlení koule do roviny α , světelná kuželová plocha.

Poznámka 3.7: Všimněme si, že při středovém osvětlení je zastíněná neurčitá část koule. (na rozdíl od rovnoběžného osvětlení, kde ve stínu byla polovina koule). ■

Nechť je dána koule a rovina α . Chceme osvětlit kouli na rovinu α z bodu S .

Nejdříve sestrojíme vlastní stín. Mez vlastního stínu na kouli je dotyková kružnice příslušné kuželové plochy a koule, tato kružnice leží v rovině kolmé ke spojnici zdroje osvětlení S a středu koule O . Rovnoběžným průmětem meze vlastního stínu v rovnoběžném promítání bude obecně elipsa.

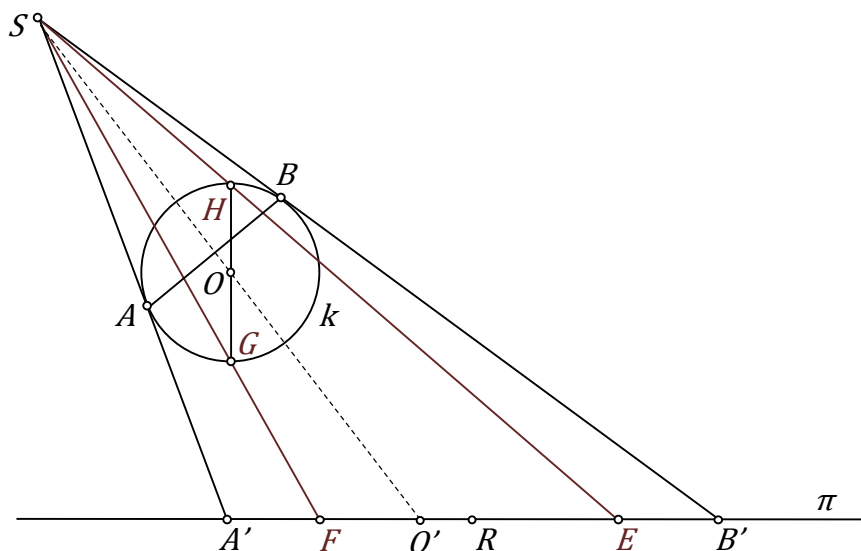
Jak už známe z věty 1 uvedené v podkapitole 1.2 (Základní vlastnosti geometrického osvětlení), mez vrženého stínu tělesa je vrženým stínem meze vlastního stínu. Čili mezi vrženého stínu koule do roviny α bude vržený stín kružnice, která je mezi vlastního stínu, do roviny α . Jedná se tedy o středové osvětlení kružnice, ležící v rovině různoběžné s průmětnou. O variantech vrženého stínu takové kružnice jsme už mluvili, viz poznámka 3.4. V našem příkladu kružnice, která je mezi vlastního stínu, nemá s obzorovou rovinou žádný společný bod, proto mezi vrženého stínu bude elipsa (v rovnoběžném průmětu také elipsa). Celá situace je znázorněna ve volném rovnoběžném promítání na obrázku 3.10. Na obrázku je vlastní stín znázorněn růžově, vržený stín - fialově.

Nechť máme kulovou plochu se středem v bodě O a bod S . Sestrojíme vržený stín kulové plochy z bodu S do půdorysny π (viz obr. 3.11, na kterém je situace znázorněna v pohledu ze strany).

Mezi vlastního stínu kulové plochy bude kružnice (dotyková kružnice kulové plochy s kuželem) ležící v rovině kolmé ke směru osvětlení. Mezi vrženého stínu kulové plochy je elipsa (v průmětu a v prostoru), která je průnikem světelné kuželové plochy s půdorysnou π .

K sestrojení elipsy, která je mezi vrženého stínu koule uvažujeme rovinu β , která je kolmá na rovinu α (do které osvětlujeme) a obsahuje spojnici SO . Rovinu β použijeme jako pomocnou průmětnu kolmého promítání. Na obrázku 3.11 je zobrazena právě situace v rovině β . Řezem kulové plochy rovinou β je hlavní kružnice k , která obsahuje nejvzdálenější bod (označíme H) a nejbližší bod (G) k rovině α (GH je průměrem kulové plochy kolmým k průmětně π). Z Quétletovy-Dandelinovy věty víme, že vrženými stíny bodů H a G do roviny π budou body E a F , což jsou ohniska elipsy, která je vrženým stínem koule. Střed úsečky EF čili bod R na obrázku 3.11, je středem hledané elipsy.

Z bodu S vedeme tečny ke kružnici k (tato kružnice je rovněž obrysem průmětu koule do roviny β , tečny tedy tvoří obrys průmětu opsaného světelného kužele). Sestrojené tečny protnou půdorysnu π v bodech A' a B' . $A'B'$ je hlavní osa elipsy vrženého stínu koule do roviny π . Nyní je elipsa vrženého stínu jednoznačně určena svou hlavní osou, středem a ohnisky.



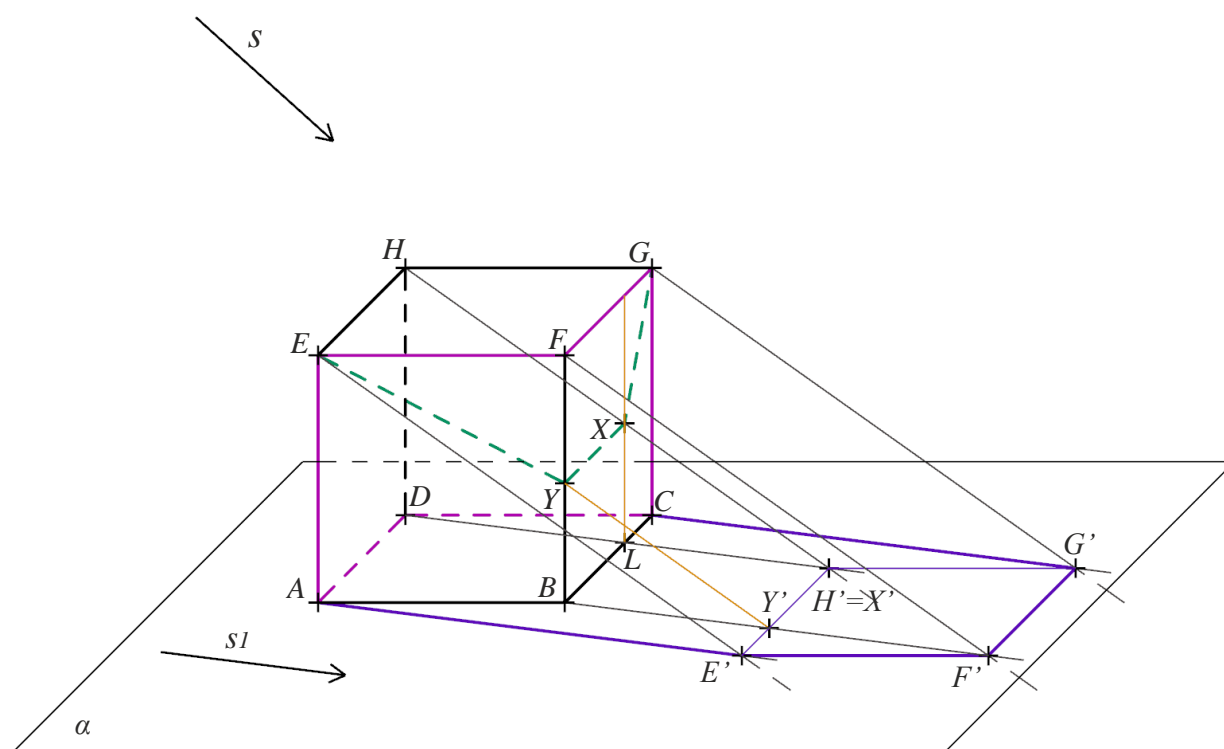
Obrázek 3.11. Středové osvětlení koule do roviny π , pohled ze strany.

4 Stín do dutiny tělesa

Kromě vlastního stínu tělesa (plochy) a vrženého stínu tělesa (plochy) do roviny nebo na jiné těleso budeme uvažovat také *stín do dutiny* tělesa. Stín do dutiny existuje v tom případě, kdy je těleso duté¹ a má otvor².

Nejprve si ukážeme postup pro nalezení stínu do dutiny hranatých těles na příkladu krychle.

Nechť je dána dutá krychle stojící na rovině α , tj. neuvažujeme horní podstavu krychle a prostor uvnitř krychle. Najdeme stín do dutiny krychle při rovnoběžném osvětlení ve směru s .



Obrázek 4.1. Stín do dutiny krychle, rovnoběžné osvětlení.

¹ Duté těleso je uvnitř prázdné (uvažujeme jenom „obálku“ tělesa) čili je to v podstatě část plochy odpovídající příslušnému tělesu.

² Má-li duté těleso (plocha) otvor, potom se můžeme podívat dovnitř tělesa (při osvětlení se tedy dostanou dovnitř i světelné paprsky).

Nejdříve sestrojíme vlastní stín krychle a vržený stíny krychle na rovinu α (k sestrojení stínů uijeme postup uvedený v oddílu 2.2.1). Hrany horní podstavy, které nejsou součástí meze vlastního stínu čili hrany GH , HE , budou vrhat stín do dutiny krychle.

Sledujeme obrázek 4.1, kde je celá situace zobrazená ve volném rovnoběžném promítání. Vidíme, že bod H' (vržený stín bodu H) dopadl dovnitř meze vrženého stínu, z toho plyne, že bod H' nám určí bod, který je součástí meze stínu do dutiny. Existuje totiž ještě jeden bod krychle, který vrhá stín do stejného bodu jako H , čili existuje nějaký bod X na krychli, takový že jeho vržený stín $X' = H'$. Vedeme tedy bodem X' zpětný světelný paprsek (rovnoběžný se směrem s), tento paprsek protne krychli kromě bodu H , ještě v bodě X . K určení bodu X vedeme bodem X' rovnoběžku se směrem s_1 (je to pravouhlý průmět paprsku do roviny α), tato rovnoběžka protne podstavu krychle v bodě L , tento bod určí svislou úsečku ležící v boční stěně krychle, na které bod X leží (bod X najdeme jako průsečík zpětného paprsku se získanou úsečkou).

Poznámka 4.1: Bod X se nazývá stín bodu H do dutiny krychle. ■

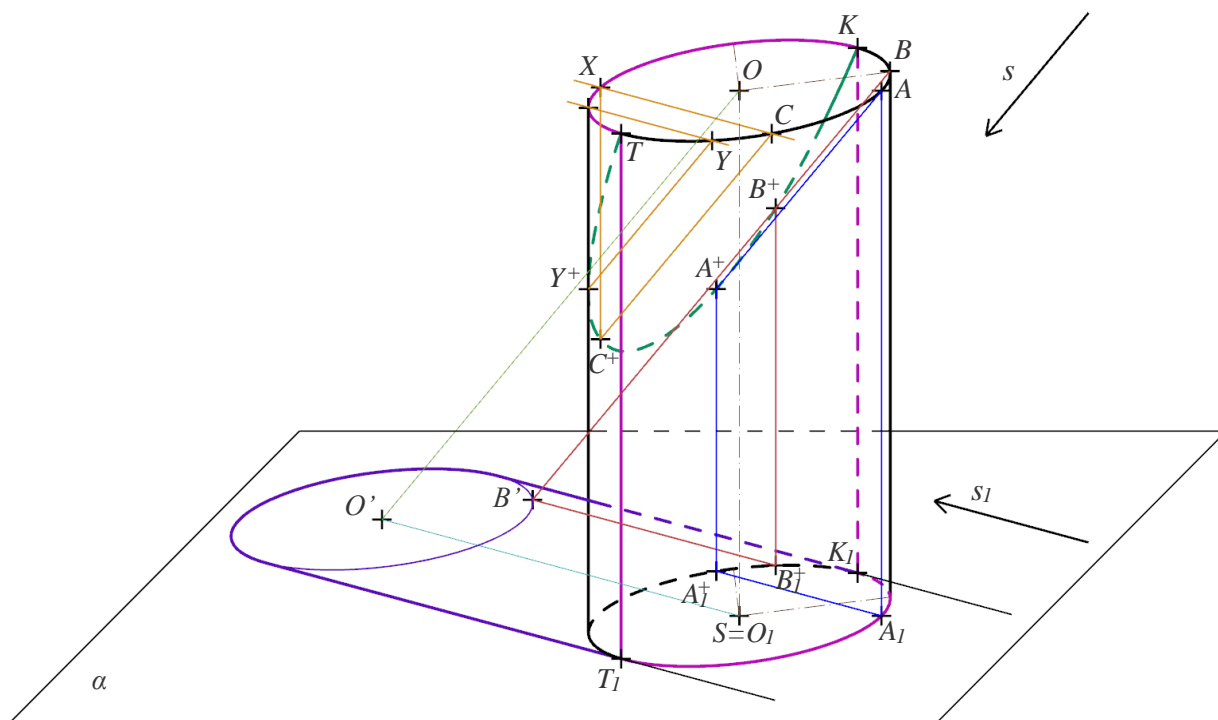
Kromě toho vidíme, že stíny hran HE , BF , tj. $H'E'$ a BF' se protínají v bodě Y . Bod Y , který vrhá stín do tohoto průsečíku, bude také bodem stínu do dutiny. Bod Y najdeme jako průsečík zpětného paprsku a hrany BF .

Lomená čára $GXYE$ je výslednou mezí stínu do dutiny (na obrázku 4.1 je zobrazena zelenou barvou).

Postup k nalezení stínu do dutiny oblých těles se liší od postupu pro hranatá tělesa, proto si ukážeme ještě dva příklady na osvětlení oblých dutých těles.

Nechť je dán dutý rotační válec stojící na rovině α , tj. neuvažujeme horní podstavu válce a prostor uvnitř válce. Najdeme stín do dutiny válce při rovnoběžném osvětlení ve směru s , sestrojovat jej budeme pouze bodově.

Sledujeme obrázek 4.2, kde je celá situace zobrazena ve volném rovnoběžném promítání. Nejprve musíme nalézt mez vlastního stínu. Nejrychlejší způsob jak to uděláme, aniž bychom hledali mez vrženého stínu je následující: vedeme tečny k dolní podstavě rovnoběžně se směrem s_1 . Body dotyku vedených tečen určují povrchové úsečky, které jsou součástí meze vlastního stínu (TT_1 a KK_1 na obrázku 4.2). Polovina kružnice horní podstavy, polovina kružnice dolní podstavy a dvě nalezené površky tvoří mez vlastního stínu.



Obrázek 4.2. Stín do dutiny válce, rovnoběžné osvětlení.

Oblouk horní podstavné kružnice mezi body K a T , který není součástí meze vlastního stínu (pravá půlkružnice), vrhá stín do dutiny (čili dovnitř tělesa). Stínem do dutiny bude část elipsy, kterou sestrojíme bodově. Existuje několik způsobů k nalezení stínu do dutiny.

První způsob: Zvolíme na oblouku KT libovolný bod a označíme ho A . Najdeme vržený stín bodu A do dutiny. Vedeme bodem A světelný paprsek rovnoběžný se směrem s , pak hledaným stínem bude průsečík tohoto paprsku s příslušnou válcovou plochou. Pro nalezení průsečíku vedeme bodem A_1 paprsek rovnoběžný s s_1 , tento paprsek protne podstavnou kružnici v bodě A_1^+ (což je pravoúhlý průmět hledaného bodu do roviny α). Bod A_1^+ určuje površku, na které leží hledaný stín bodu A do dutiny (bod A^+ na obrázku 4.2).

Druhý způsob: Vyjdeme z meze vrženého stínu (k sestrojení vrženého stínu použijeme postup uvedený v oddílu 2.2.2). Zvolíme bod na vrženém stínu oblouku KT , označme jej B' . Vedeme bodem B' zpětný paprsek (rovnoběžný se směrem s), na horní podstavné kružnici pomocí paprsku najdeme bod B , který je vzorem bodu B' . Kromě bodu B , ale vrhá na bod B' stín ještě jeden bod válce, označíme ho B^+ . Bod B^+ najdeme pomocí paprsku $B_1^+B^+$ rovnoběžného se směrem s_1 (viz obrázek 4.2).

Třetí způsob: Zvolíme na oblouku KT libovolný bod, označme jej C . Vedeme bodem C zároveň dvě polopřímky, jednu rovnoběžnou se směrem s (je to světelný paprsek bodu C), druhou se směrem s_I (je to pravoúhlý průmět paprsku do roviny horní podstavy válce). Polopřímka rovnoběžná se směrem s_I protne podstavnu kružnici v bodě X , který určí povrchku válce, na níž leží hledaný stín C^+ .

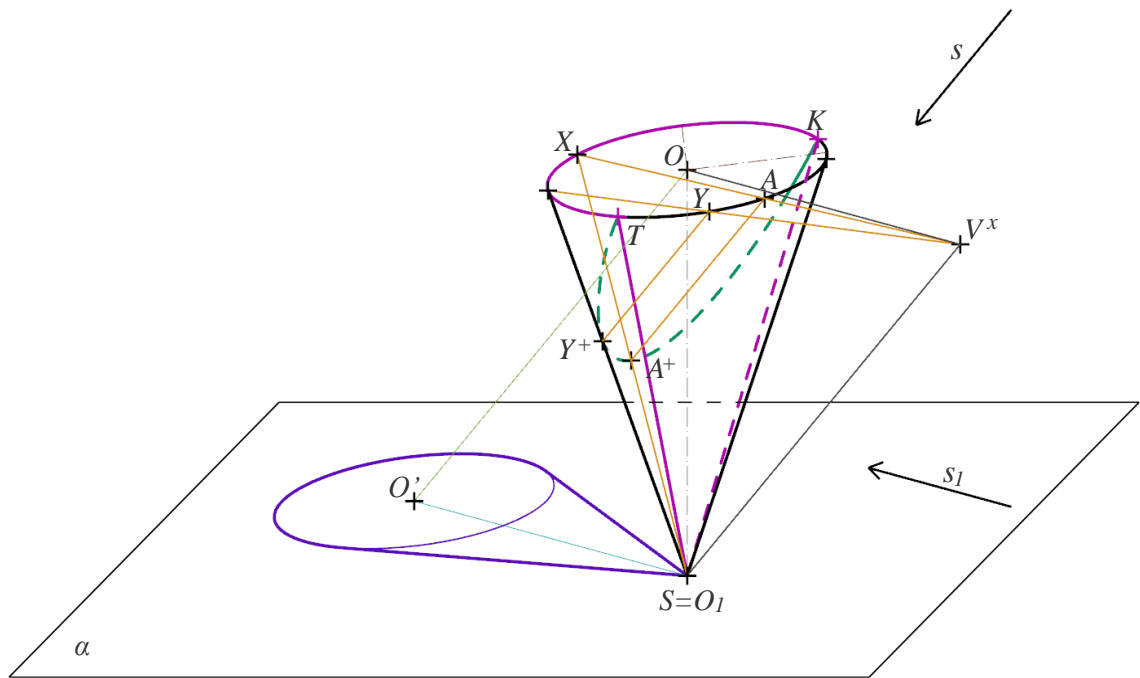
Poznámka 4.2: Vedeme-li každým bodem horní podstavné kružnice světelný paprsek, vznikne světelná šikmá válcová plocha. Stínem do dutiny je část průnikové křivky této válcové plochy a dané rotační válcové plochy. Průniková křivka je 4 stupně, rozpadne se ovšem na dvě křivky horní podstavnu kružnici (což je křivka 2. stupně) a další křivku, která tedy musí být také 2. stupně. Vrženým stínem do dutiny je totiž část kuželosečky. Podrobněji si o tom čtenář může přečíst v (R. Piska a V. Medek, 1967) nebo (B. Bartošová, 2010). ■

Lze dokázat, že mez stínu do dutiny je část elipsy (viz předchozí poznámka). Budeme-li volit další body, získáme více bodů elipsy a dokážeme ji vyrýsovat. Čím více bodů sestrojíme, tím přesnější bude výsledný stín do dutiny. Důležitým bodem meze stínu do dutiny je v průmětu bod na obrysové povrchce válce, bod Y^+ na obrázku 4.2 (v průmětu se průmět povrchky v tomto bodě dotýká meze stínu do dutiny). Třetí způsob považujeme za nejrychlejší a nejjednodušší, proto jej budeme dále využívat. Body K a T jsou krajními body meze stínu do dutiny.

Poznámka 4.3: Všimněme si, že uvedené tři způsoby spolu velice těsně souvisí, vlastně se jedná o stejnou konstrukci, ke které přistupujeme z různých stran. ■

Poznámka 4.4: Ukázali jsme, jak lze stín do dutiny sestrojit bodově. Když ale víme, že mezi stínu je část elipsy, tak bychom mohli tuto elipsu určit přesně (najít její prvky), například pomocí afinity. Podrobněji si o tom čtenář může přečíst v (R. Piska a V. Medek, 1967). ■

Nechť je dán dutý rotační kužel s vrcholem v rovině α (viz obrázek 4.3), tj. neuvažujeme podstavu kužele a prostor uvnitř kužele. Najdeme stín do dutiny kužele při rovnoběžném osvětlení ve směru s , sestrojovat jej budeme pouze bodově.



Obrázek 4.3. Stín do dutiny kužele, rovnoběžné osvětlení.

Sledujeme obrázek 4.3, kde je celá situace zobrazena ve volném rovnoběžném promítání. Nejprve musíme nalézt mez vlastního stínu (nejrychlejší způsob jak to uděláme, aniž bychom hledali mez vrženého stínu, byl popsán v poznámce 2.7). Oblouk podstavné kružnice mezi body K a T , který není součástí meze vlastního stínu, vrhá stín do dutiny (čili dovnitř tělesa). Lze dokázat, že stínem do dutiny bude část elipsy (úvaha obdobná, jako v případě válce, viz poznámka 4.2), kterou sestrojíme bodově. Zde ukážeme už jenom jeden způsob k nalezení stínu do dutiny (tento způsob považujeme za nejrychlejší).

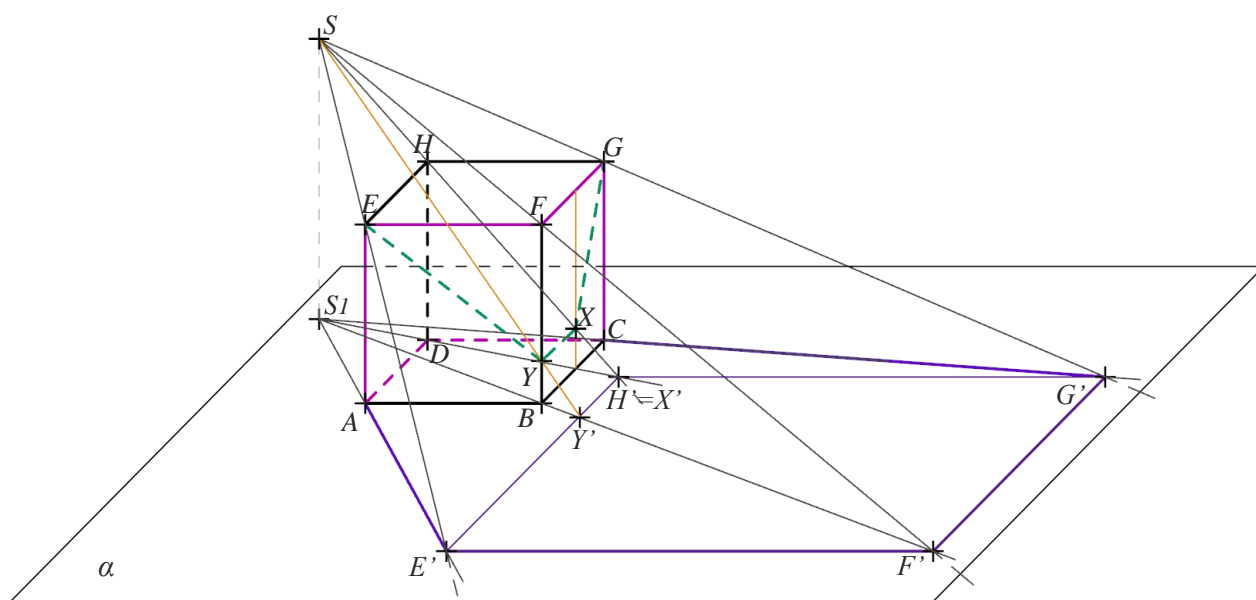
Sestrojíme domnělý stín vrcholu kužele do roviny podstavy, najdeme jej jako průsečík světelného paprsku vedeného bodem V s rovinou podstavy. Označíme nalezený bod - V^x .

Z bodu V^x vedeme polopřímku, která protíná podstavu. Polopřímka protíná podstavnou kružnici ve dvou bodech. Nejprve polopřímka protne kružnici v bodě A , který bude vrhat stín. Potom v bodě X , kterým povedeme povrchku kužele. Na tuto povrchku dopadne stín prvního bodu. Získáme tak bod A^+ , který je bodem meze stínu do dutiny.

Opakováním postupu dostaneme svazek polopřímek se středem v bodě V^x , čím více polopřímek vedeme, tím přesnější bude výsledný stín do dutiny. Důležitým bodem meze stínu do dutiny je v průmětu bod na obrysové povrchce kužele, bod Y^+ na obrázku 4.3. Body K a T jsou krajními body meze stínu do dutiny.

Nyní se podíváme na stín do dutiny při středovém osvětlení.

Nechť je dána dutá krychle stojící na rovině α , tj. neuvažujeme horní podstavu krychle a prostor uvnitř krychle. Najdeme stín do dutiny krychle při středovém osvětlení z bodu S .



Obrázek 4.4. Stín do dutiny krychle, středové osvětlení.

Nejdříve sestrojíme vlastní stín krychle a vržený stín krychle na rovinu α (k sestrojení stínů užitíme postup uvedený v oddílu 3.2.1). Hrany horní podstavy, které nejsou součástí meze vlastního stínu čili hrany GH , HE , budou vrhat stín do dutiny krychle.

Sledujeme obrázek 4.4, kde je celá situace zobrazená ve volném rovnoběžném promítání. Postup k nalezení stínu do dutiny je stejný jako při rovnoběžném osvětlení. Vzory bodů X' a Y' (čili body X a Y) nám určí mez stínu do dutiny. Body X a Y najdeme pomocí zpětných paprsků, které nyní (na rozdíl od rovnoběžného osvětlení) budou procházet bodem S .

Lomená čára $GXYE$ je výslednou mezí stínu do dutiny (na obrázku 4.4 je zobrazena zelenou barvou).

Nechť je dán dutý rotační válec stojící na rovině α , tj. neuvažujeme horní podstavu válce a prostor uvnitř válce. Najdeme stín do dutiny válce při středovém osvětlení z bodu S , sestrojovat jej budeme pouze bodově.

Opakováním postupu dostaneme svazek polopřímek se středem v bodě P , čím více polopřímek vedeme, tím přesnější bude výsledný stín do dutiny. Důležitým bodem meze stínu do dutiny je v průmětu bod na obrysové povrchu válce, bod Y^+ na obrázku 4.5. Body K a T jsou krajními body meze stínu do dutiny.

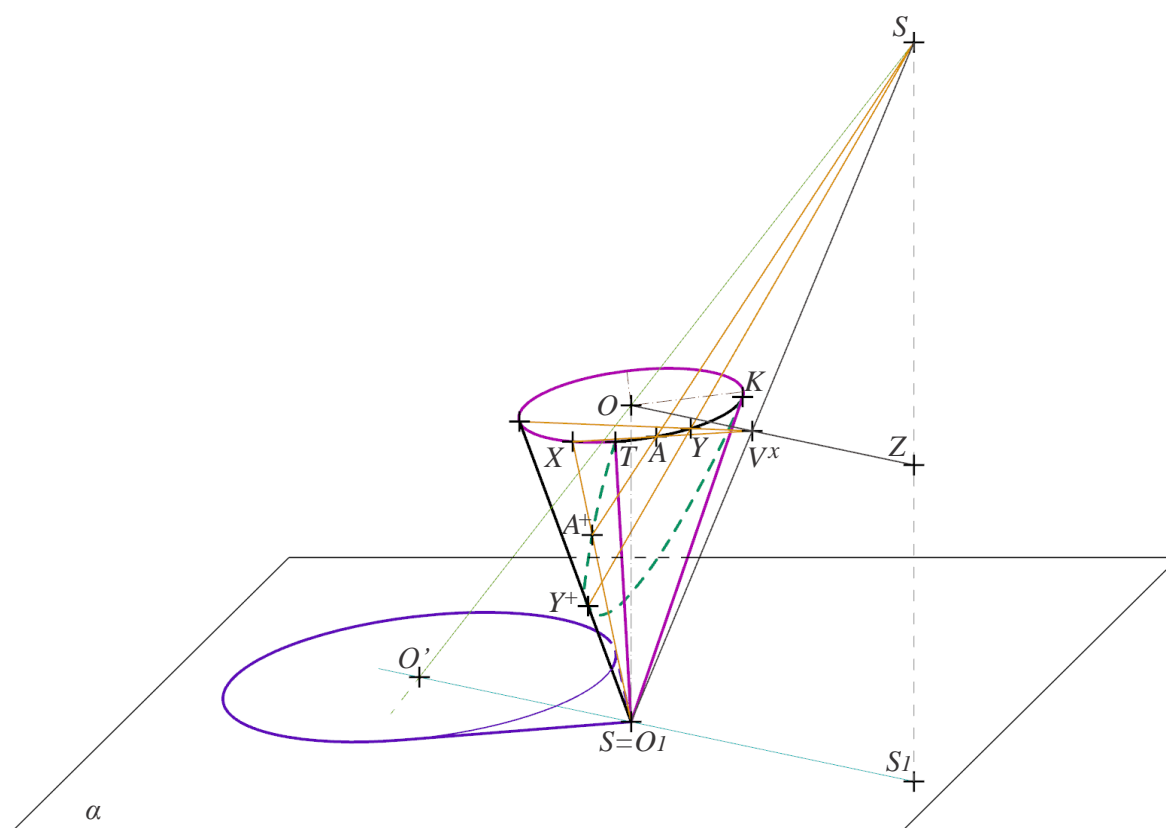
Nechť je dán dutý rotační kužel (tj. neuvažujeme horní podstavu kužele a prostor uvnitř kužele) s vrcholem v rovině α . Najdeme stín do dutiny kužele při středovém osvětlení z bodu S , sestrojovat jej budeme pouze bodově.

Sledujeme obrázek 4.6, kde je celá situace zobrazena ve volném rovnoběžném promítání. Nejprve musíme nalézt mez vlastního stínu. Oblouk podstavné kružnice mezi body K a T , který není součástí meze vlastního stínu, vrhá stín do dutiny (čili dovnitř tělesa). Lze dokázat, že stínem do dutiny bude část elipsy (úvaha obdobná, jako při rovnoběžném osvětlení, viz poznámka 4.2), kterou sestrojíme bodově.

Sestrojíme domnělý stín vrcholu kužele do roviny podstavy, najdeme jej jako průsečík světelného paprsku vedeného bodem V s rovinou podstavy. Označíme nalezený bod - V^x .

Z bodu V^x vedeme polopřímku, která protíná podstavu. Polopřímka protíná podstavnou kružnici ve dvou bodech. Nejprve polopřímka protne kružnici v bodě A , který bude vrhat stín. Potom v bodě X , kterým povedeme povrchu kužele. Na tuto povrchu dopadne stín bodu A . Získáme tak bod A^+ , který je bodem meze stínu do dutiny.

Opakováním postupu dostaneme svazek polopřímek se středem v bodě V^x , čím více polopřímek vedeme, tím přesnější bude výsledný stín do dutiny. Důležitým bodem meze stínu do dutiny je v průmětu bod na obrysové povrchu kužele, bod Y^+ na obrázku 4.6. Body K a T jsou krajními body meze stínu do dutiny.



Obrázek 4.6. Stín do dutiny kužele, středové osvětlení.

Podobným postupem by se dal najít stín do dutiny i u jiných oblých těles (například u duté polokoule). Více o osvětlení dutých těles si čtenář může přečíst v (J. Černý a M. Kočandrlová, 1998). Na konkrétní příklady osvětlení dutých těles se podíváme v další kapitole, více příkladů na stín do dutiny při rovnoběžném osvětlení čtenář může nalézt ve stejnojmenné bakalářské práci (Y.Tolkunova, 2013).

5 Osvětlení těles a jejich skupin v konkrétním promítání

Tato kapitola je praktickou částí práce. Procvičíme zde teoretické znalosti uvedené v předchozích kapitolách. Všechny příklady jsou nově vytvořeny, kromě toho vždy je uvedeno zadání a umístění na papír, čtenář tedy může použít tuto kapitolu jako sbírku příkladů a libovolnou úlohu zkusit vyřešit samostatně nebo zadat úlohu svým studentům. Na přiloženém DVD jsou úlohy připravené pro tisk.

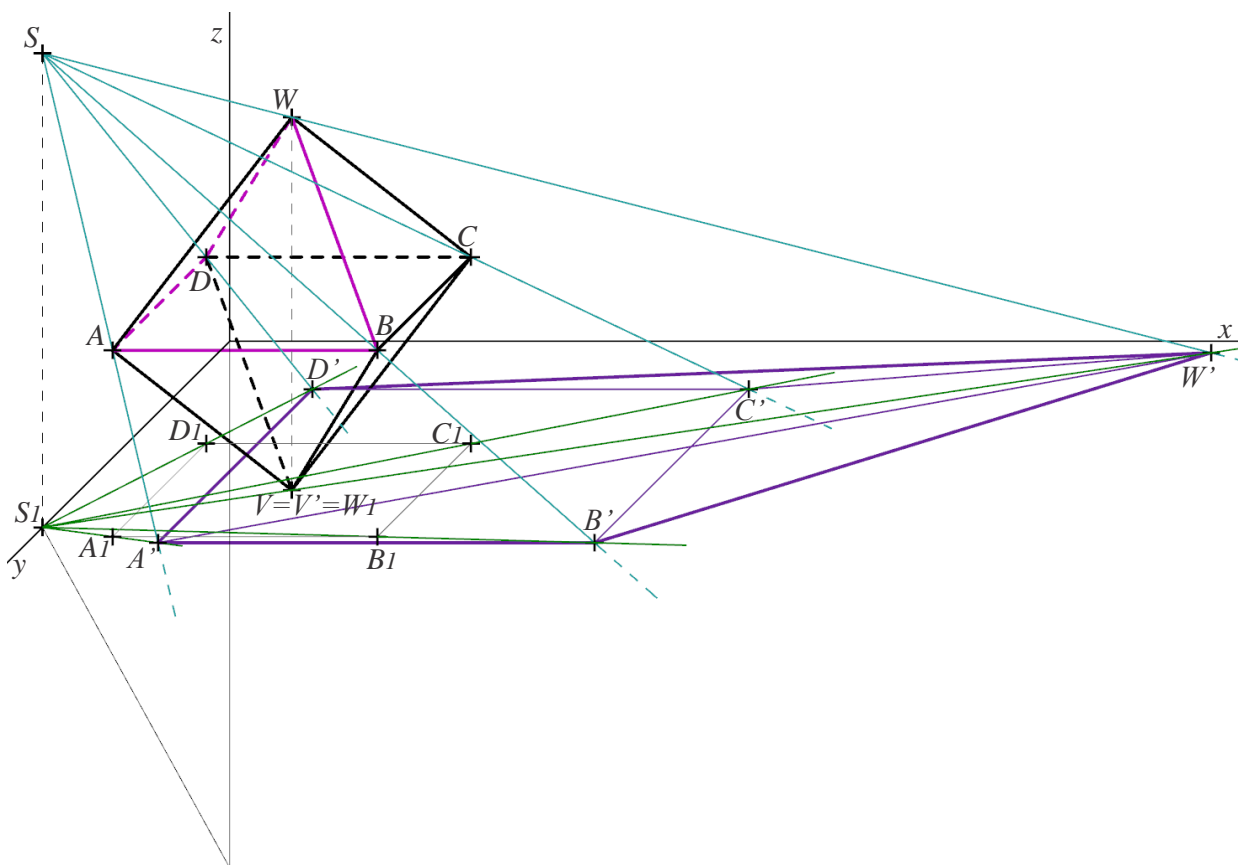
Příklady na rovnoběžné osvětlení jednotlivých těles zde nebudeme uvádět, čtenář je může nalézt v stejnojmenné bakalářské práci (Y.Tolkunova, 2013).

Nejprve se podíváme na středové osvětlení jednotlivých těles v různých promítáních, poté na osvětlení skupin těles a to jak na jejich rovnoběžné, tak i na středové osvětlení. Na konci každého příkladu je uveden více názorný obrázek, na kterém je daná situace namodelovaná na počítači (pomocí softwaru Rhinoceros). Modely odpovídají souřadnicím v příkladech a slouží k tomu, aby čtenář si lépe představil, jak celá situace vypadá. Názorné obrázky vždy zobrazují danou situaci v perspektivě (toto promítání jsem zvolila proto, že nejvíce odpovídá lidskému vidění). Kromě toho modely jsem používala k vymyšlení zadání příkladů a dobrému umístění těles a zdrojů světla, aby stíny vypadaly, co nejlépe. Mimo jiné v software Rhinoceros můžeme celou situaci zahýbat a podívat se na ní z různých stran. Všechny zdrojové soubory jsou umístěny na přiloženém DVD.

Příklad 1: Kosoúhlé promítání: A4 na šířku, $O=[7,11]$, $q = 1/2$, $w = 135^\circ$.

Je dán pravidelný osmistěn (oktaedr¹) $ABCDVW$ stojící na půdorysně, $V=[4;8;0]$, se stranou délky 5 cm. (viz obr. 5.1). Osvětlete osmistěn, tj. nalezněte vlastní stín osmistěnu a vržený stín do souřadnicových rovin, je-li dán střed osvětlení $S=[0;10;9]$.

¹ Oktaedr je jedno z platónských těles (pravidelných mnohostěnů).



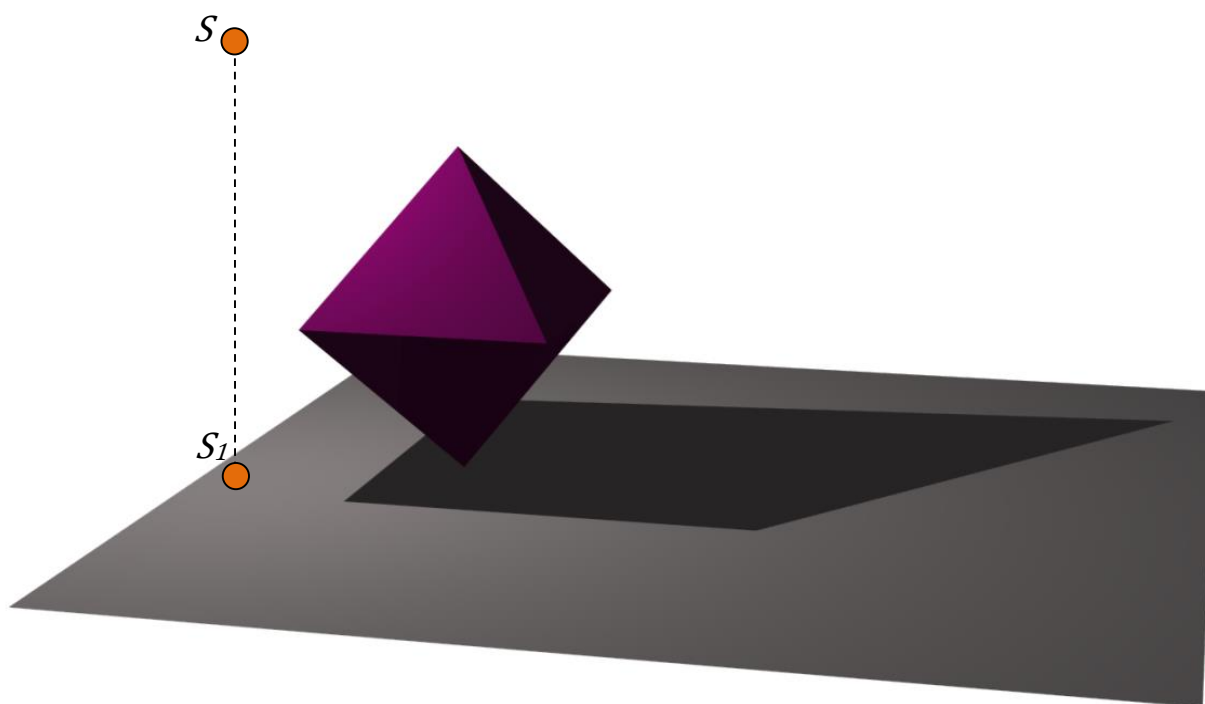
Obrázek 5.1. Středové osvětlení pravidelného osmistěnu v kosoúhlém promítání.

Řešení: Pro sestrojení vrženého stínu osmistěnu sestrojíme vržené stíny všech vrcholů a pak příslušné body spojíme.

- 1) Bod V leží přímo v rovině, do které osvětlujeme, to znamená, že při osvětlení „zůstane na místě“, $V=V'$ na obrázku 5.1.
- 2) Nalezneme bod W' , který je stínem vrcholu W osmistěnu.
Vedeme bodem W světelný paprsek, čili polopřímku SW . Bodem W_1 vedeme půdorysný průmět paprsku, což je polopřímka S_1W_1 . Sestrojené polopřímky se protnou v hledaném bodě W' .
- 3) Sestrojíme (stejným způsobem) vržené stíny zbylých vrcholů A, B, C, D .
Všimněme si, že vrženým stínem útvaru $ABCD$ je podobný útvar $A'B'C'D'$, protože si útvary odpovídají ve stejnolehlosti mezi rovinou určenou body A, B, C a půdorysnou, středem stejnolehlosti je bod S (viz poznámka 3.2), v průmětu pak dostáváme stejnolehlost v rovině.
- 4) Obecný čtyřúhelník $A'B'W'D'$ je vrženým stínem osmistěnu. Mezi vrženého stínu je tedy lomená čára $A'B'W'D'A'$ (znázorněno fialově na obrázku 5.1).

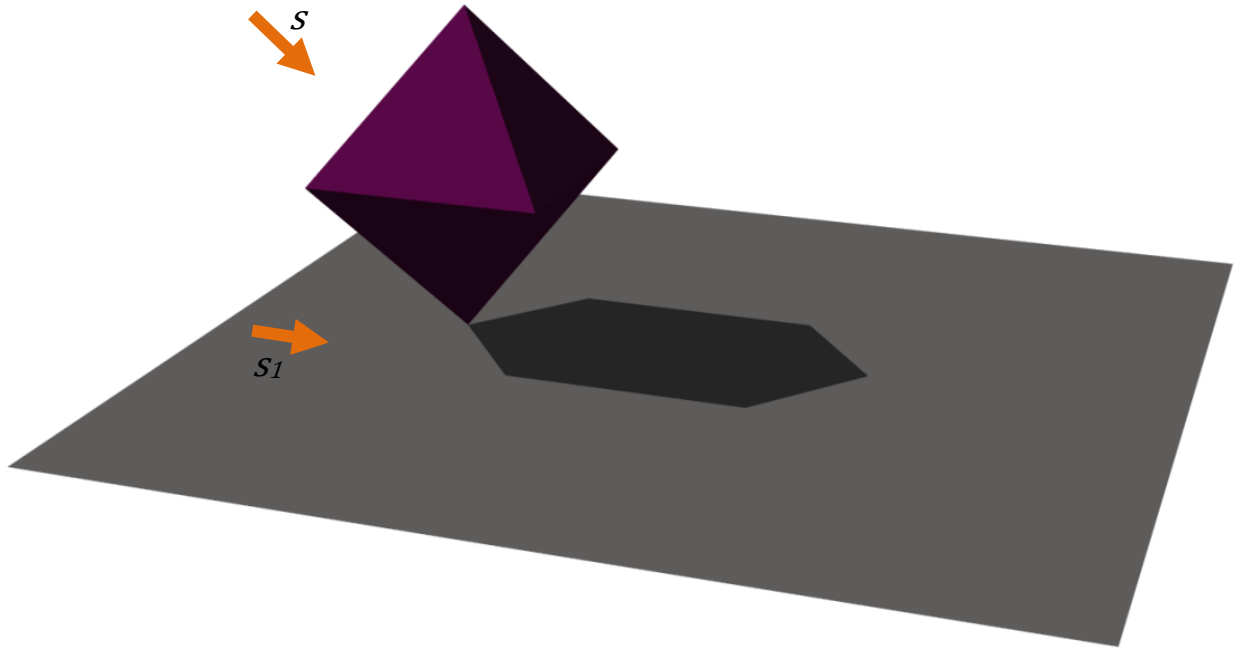
5) Mez vlastního stínu tedy tvoří lomená čára $ABWDA$ (znázorněno růžově na obrázku 5.1), což plyne z věty 1 uvedené v podkapitole 1.2.

Na obrázku 5.2 můžeme vidět stejnou situaci, namodelovanou v softwaru Rhinoceros v perspektivě.



Obrázek 5.2. Středové osvětlení osmistěnu, modelováno na počítači.

Pro porovnání uvedeme, jak by mohlo vypadat rovnoběžné osvětlení téhož osmistěnu (viz obrázek 5.3).



Obrázek 5.3. Rovnoběžné osvětlení osmistěnu, modelováno na počítači.

Příklad 2: Pravouhlá axonometrie: A4 na šířku, $O=[14,7]$, axonometrický trojúhelník $\Delta(10;11;12)^2$.

V dané pravouhlé axonometrii je dán zdroj osvětlení $S=[0;11;11]$ a kužel s podstavou v půdorysně. Podstava kužele má střed $V_I=[4;7;0]$ a poloměr 3,5 cm, výška kužele je 8 cm. Najděte vlastní stín a vržený stín kužele do průměten, přičemž uvažujeme neprůhledné průmětny.

Řešení:

- 1) Podstava kužele při osvětlení zůstává na místě.
- 2) Stín vrcholu kužele do půdorysny najdeme jako průsečík světelného paprsku SV a jeho půdorysného průmětu $S_I V_I$.
- 3) Z bodu V' vedeme tečny k podstavě elipse. Body dotyku sestrojených tečen určují část elipsy, která je součástí vrženého stínu.

Mez vrženého stínu do půdorysny tedy tvoří část elipsy, bod V' a tečny $V'K$ a $V'T$. Vidíme ale, že vržený stín vrcholu je za nárysnou, uvažujeme-li neprůhlednou nárysnou, tak se musí vržený stín na ose x zalomit do nárysny.

² $\Delta(a;b;c)$ – zkrácený zápis pro $|XY|=a$, $|YZ|=b$, $|ZX|=c$, kde X,Y,Z jsou vrcholy axonometrického trojúhelníku na příslušných osách x, y, z .

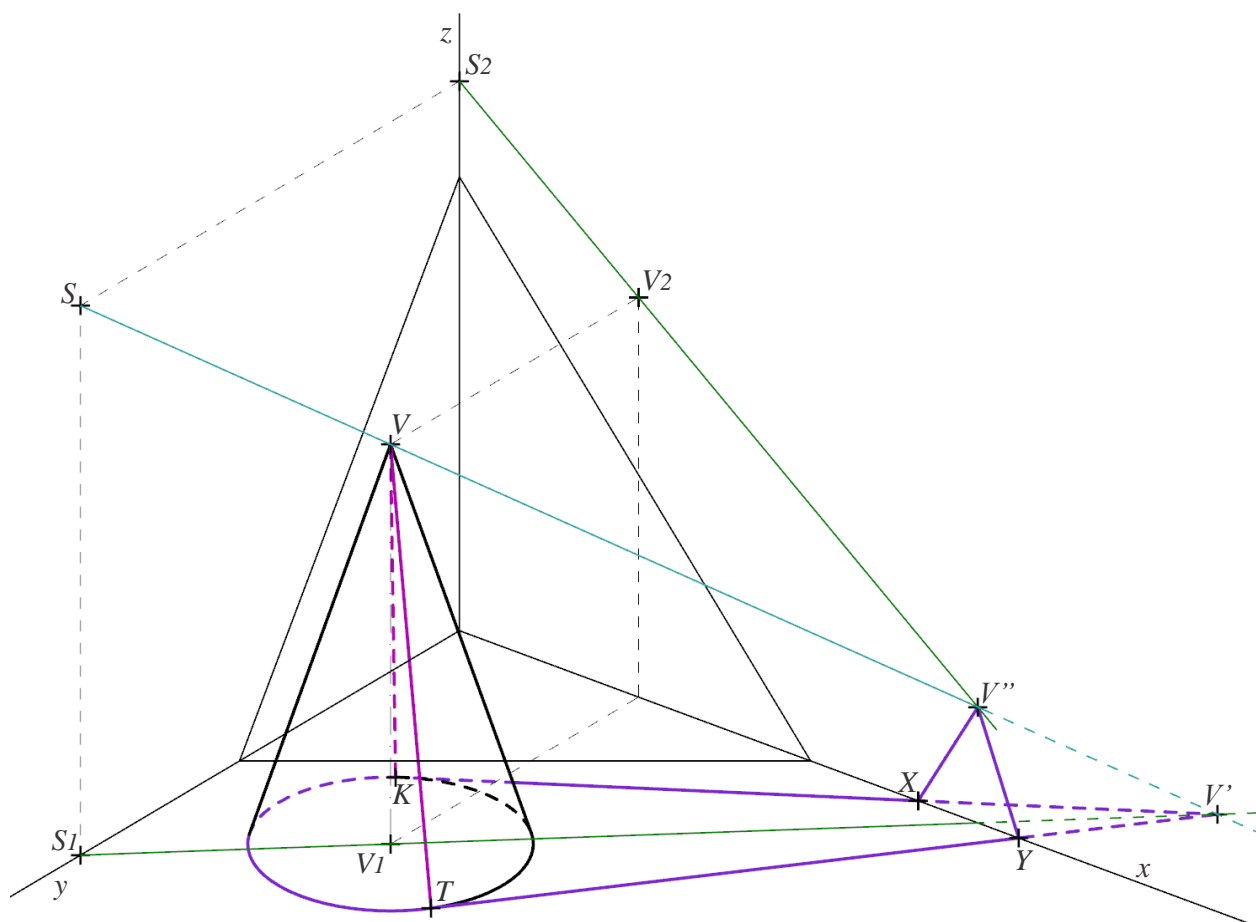
4) Sestrojíme vržený stín vrcholu V do nárysny.

Najdeme ho jako průsečík světelného paprsku SV a jeho nárysneho průmětu S_2V_2 . Nyní zbývá spojit bod V'' s body X, Y , ve kterých tečny $V'K$ a $V''T$ protly osu x .

Výsledná mez vrženého stínu je na obrázku 5.4 zobrazená fialově.

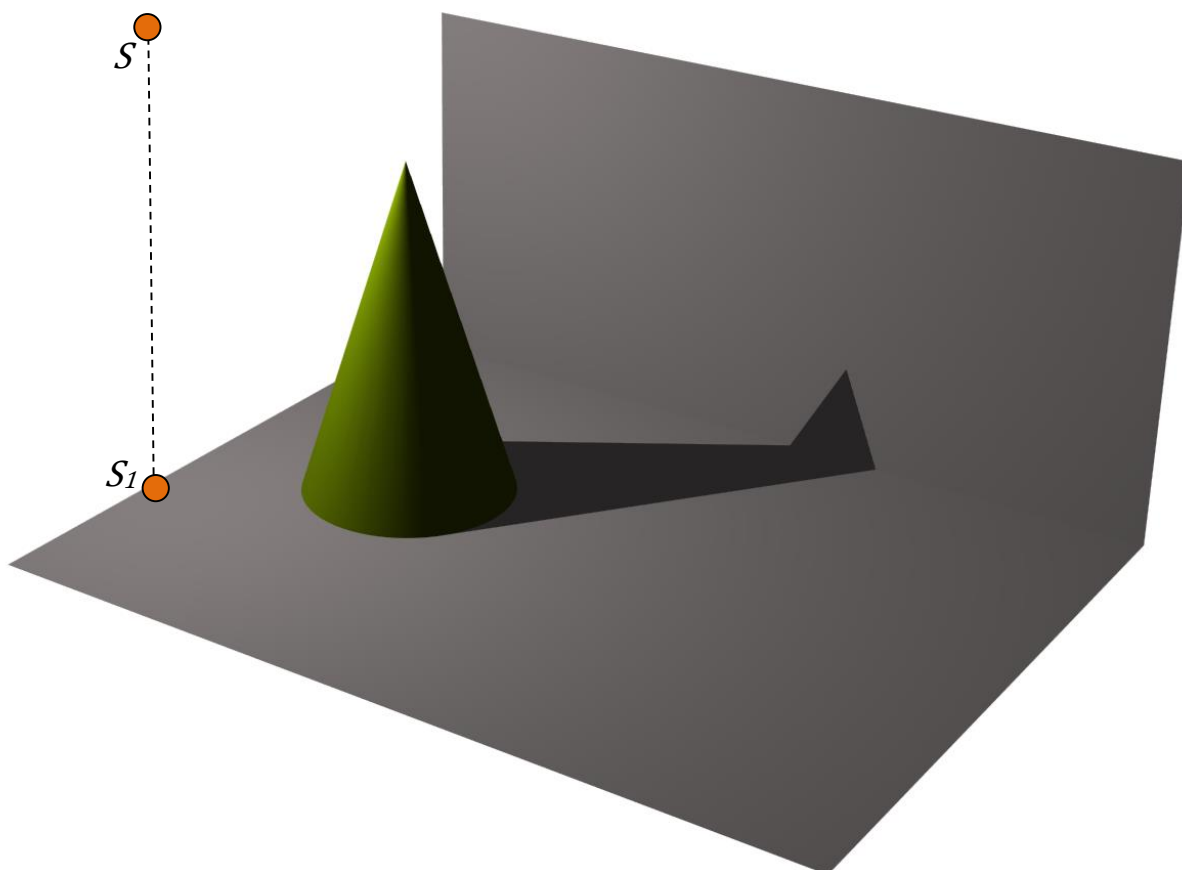
5) Nyní najdeme vlastní stín.

Mez vlastního stínu se skládá z površek určených body dotyku T, K (ružově na obrázku 5.4) a částí podstavné elipsy mezi body T a K (levý oblouk, fialově na obrázku 5.4).

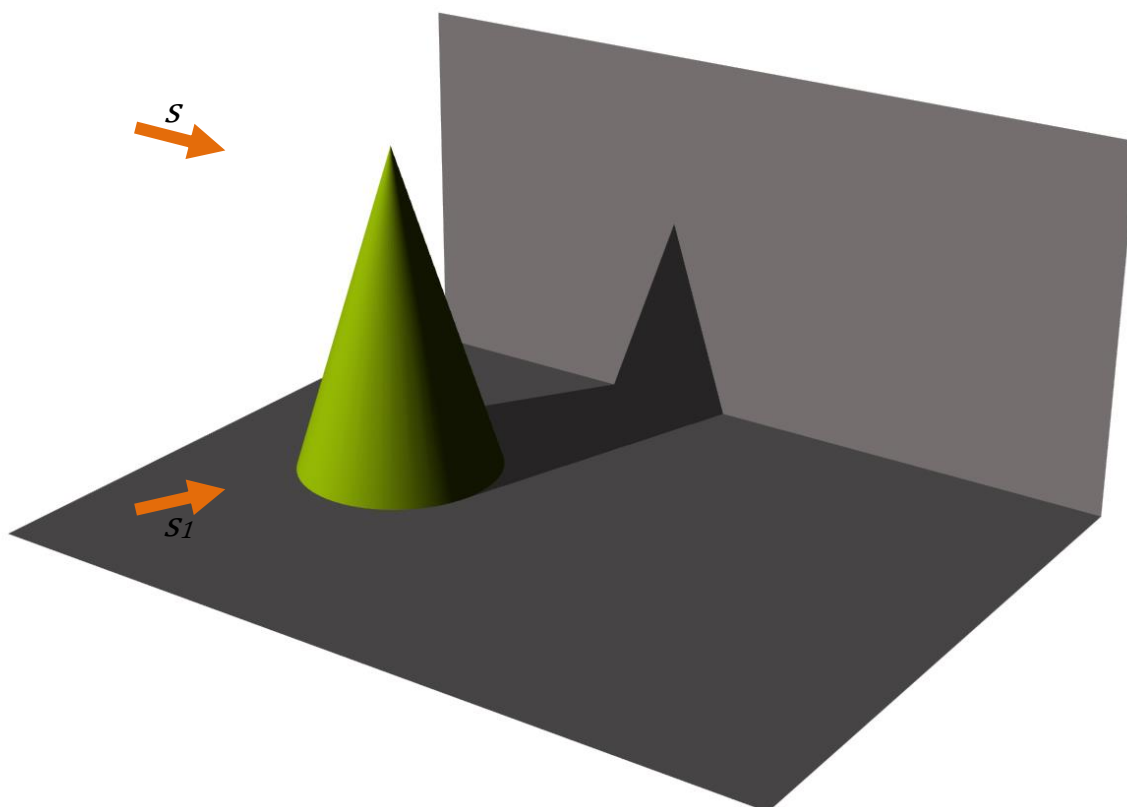


Obrázek 5.4. Středové osvětlení rotačního kužele v pravoúhlé axonometrii.

Na obrázku 5.5 můžeme vidět uvedenou situaci středového osvětlení v perspektivě, namodelovanou na počítači. Na obrázku 5.6 je stejná situace, ale při rovnoběžném osvětlení.



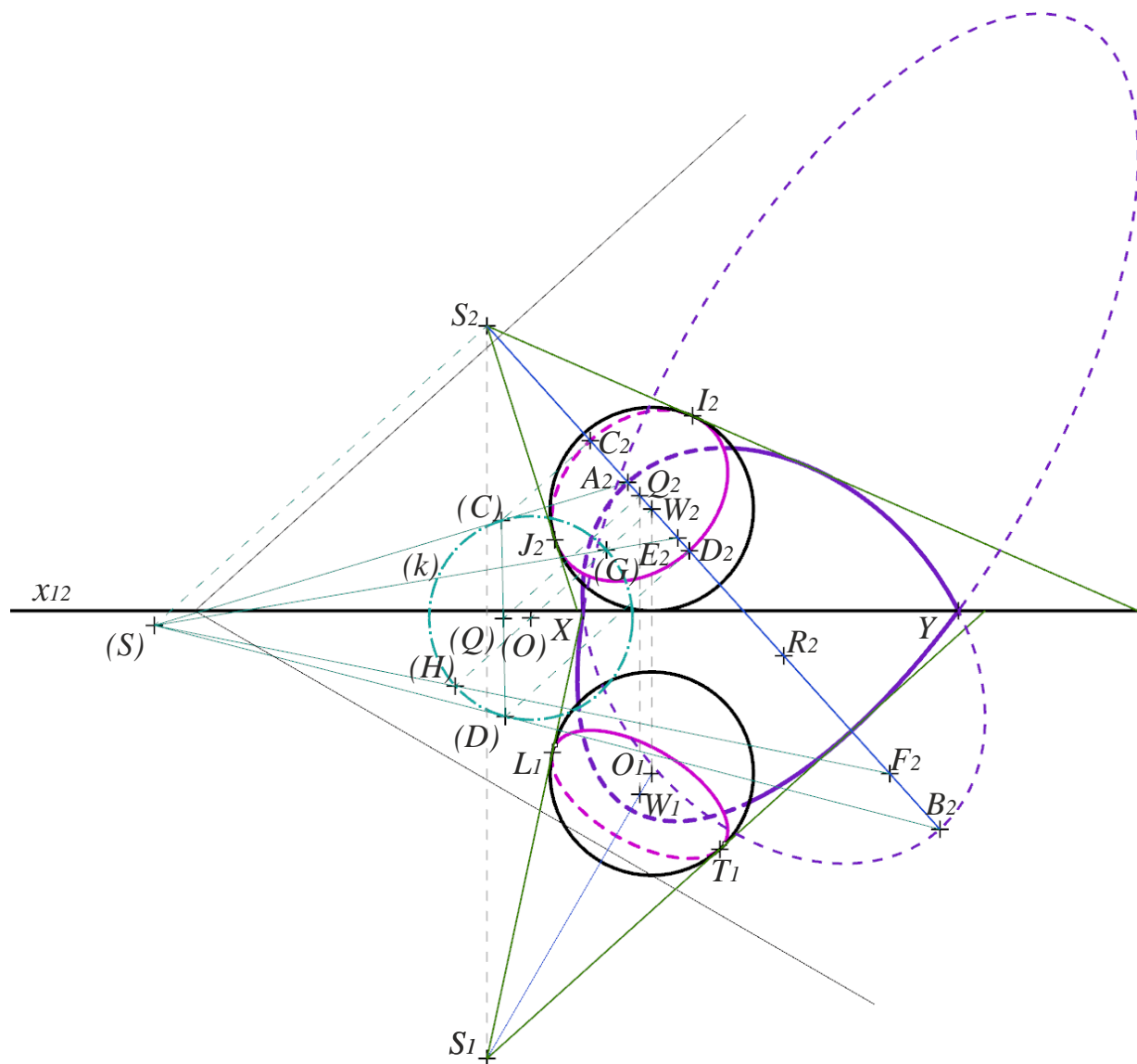
Obrázek 5.5. Středové osvětlení rotačního kužele, modelováno na počítači.



Obrázek 5.6. Rovnoběžné osvětlení rotačního kužele, modelováno na počítači.

Příklad 3: Mongeovo promítání: A4 na šířku, $O=[12,9]$.

Je dána koule s poloměrem 2 cm a středem $W=[3,2;3,2;2]$. Osvětlete kouli, tj. nalezněte vlastní stín a vržený stín koule na nárysnu a půdorysnu (uvažujeme neprůhledné průmětny), je-li dán střed osvětlení $S=[0;8,8;5,6]$.



Obrázek 5.7. Středové osvětlení koule v Mongeově promítání.

Řešení: Nejprve najdeme mez vlastního stínu. Mezi vlastního stínu v obou průmětech bude elipsa (ve skutečnosti kružnice).

Nejdříve sestrojíme elipsu, která je nárysným průmětem meze vlastního stínu.

- 1) K nalezení prvků této elipsy potřebujeme sklopit do nárysnu bod S a hlavní kružnici k , která se nachází v rovině kolmé k nárysně a obsahuje přímku SW .

- 2) Ve sklopení vedeme tečny z bodu (S) ke sklopené kružnici (k) . Body dotyku označíme (C) a (D) .
- 3) Vzory bodů (C) a (D) , body C_2 a D_2 na přímce S_2W_2 , jsou vedlejšími vrcholy elipsy.
- 4) Střed úsečky C_2D_2 , bod Q_2 , je středem hledané elipsy (odpovídá mu střed (Q) úsečky $(C)(D)$ ve sklápění do nárysny).
- 5) Hlavní osa elipsy prochází bodem Q_2 a je kolmá na přímkou S_2W_2 . Velikost hlavní poloosy se rovná skutečnému poloměru kružnice, která je mezi vlastního stínu. Tento poloměr vidíme ve sklopení, je roven velikosti úsečky $(C)(Q)$.
- 6) Tím už máme elipsu určenou a můžeme jí sestrojít. Určíme ještě ale body dotyku této elipsy s nárysným průmětem obrysu koule.
Bodem S_2 vedeme tečny k nárysnému průmětu obrysu koule. Body dotyku I_2 a J_2 jsou body dotyku elipsy (která je mezi vlastního stínu) a obrysu koule.
- 7) Stejným způsobem sestrojíme půdorysný průmět meze vlastního stínu, konstrukci už však kvůli přehlednosti do obrázku nezobrazujeme.
- 8) V obou průmětech určíme viditelnost meze vlastního stínu. Výsledná mez vlastního stínu je na obrázku 5.7 zobrazená růžovou barvou.

Poznámka 5.1: Mohli bychom také najít mez vlastního stínu i jinak. Víme, že kružnice, která je mezi vlastního stínu se nachází v rovině ρ , která je kolmá na přímkou SW a obsahuje přímky IJ a LT . Přímka IJ je frontální hlavní přímka roviny ρ , přímka LT je horizontální hlavní přímka roviny ρ . Můžeme tedy sestrojít stopy roviny ρ a dohledat vlastní stín jako řez koule touto rovinou. ■

Nyní zbývá sestrojít mez vrženého stínu. Nejprve najdeme vržený stín koule do nárysny. Mezi vrženého stínu do nárysny bude kuželosečka.

Vidíme, že kružnice (v průmětu elipsa), která je mezi vlastního stínu nemá s obzorovou rovinou žádný společný bod (viz oddíl 3.2.4), proto vrženým stínem do nárysny (i do půdorysny) bude elipsa (v průmětu i v prostoru).

K nalezení prvků této kuželosečky využijeme sklopení do nárysny, které už máme sestrojené.

Hlavní osa elipsy se bude nacházet na přímce S_2W_2 .

- 9) Body (C) a (D) nám určí hlavní vrcholy elipsy.

Polopřímky $(S)(C)$ a $(S)(D)$ protnou přímkou S_2W_2 v bodech A_2 a B_2 což jsou hlavní vrcholy hledané elipsy.

- 10) Podle Quétletovy-Dandelinovy věty, nejvzdálenější a nejbližší bod k rovině, do které osvětlujeme, se zobrazí na ohnisko hledané elipsy. Ve sklopení tedy bodem (W) vedeme

kolmici k S_2W_2 . Kolmice protne kružnici (k) v bodech (H) a (G) . Polopřímky $(S)(H)$ a $(S)(G)$ protnou přímku S_2W_2 v bodech E_2 a F_2 , což jsou ohniska elipsy.

11) Máme nyní hlavní vrcholy a ohniska elipsy, můžeme jí tedy sestrojít.

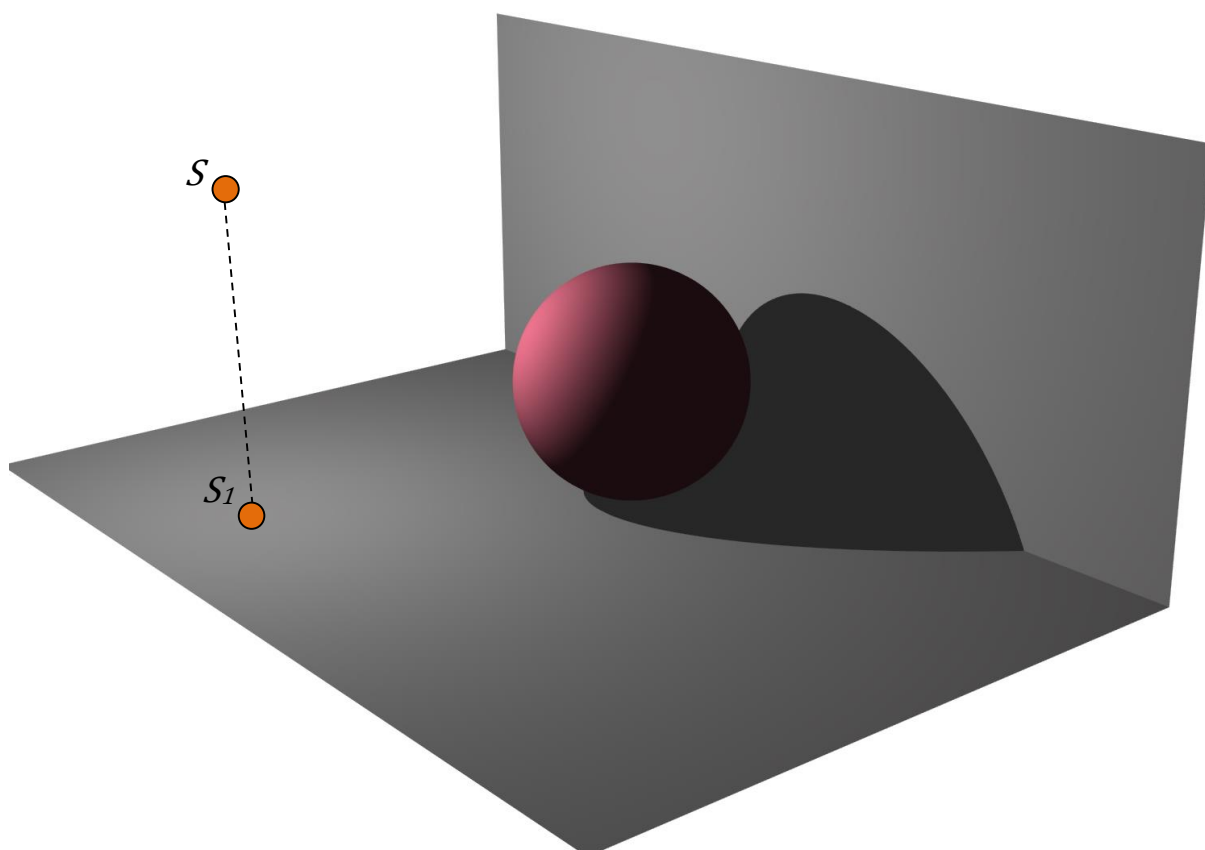
Vidíme, že sestrojená elipsa se částečně nachází pod osou x (v prostoru pod půdorysnou), což znamená, že na ose x se stín zalomí do půdorysny.

Zopakujeme nyní stejný postup pro nalezení meze vrženého stínu do půdorysny, konstrukce v obrázku není zobrazena. Nakonec určíme viditelnost meze vrženého stínu. Výsledná mez vrženého stínu je na obrázku 5.7 zobrazená fialovou barvou.

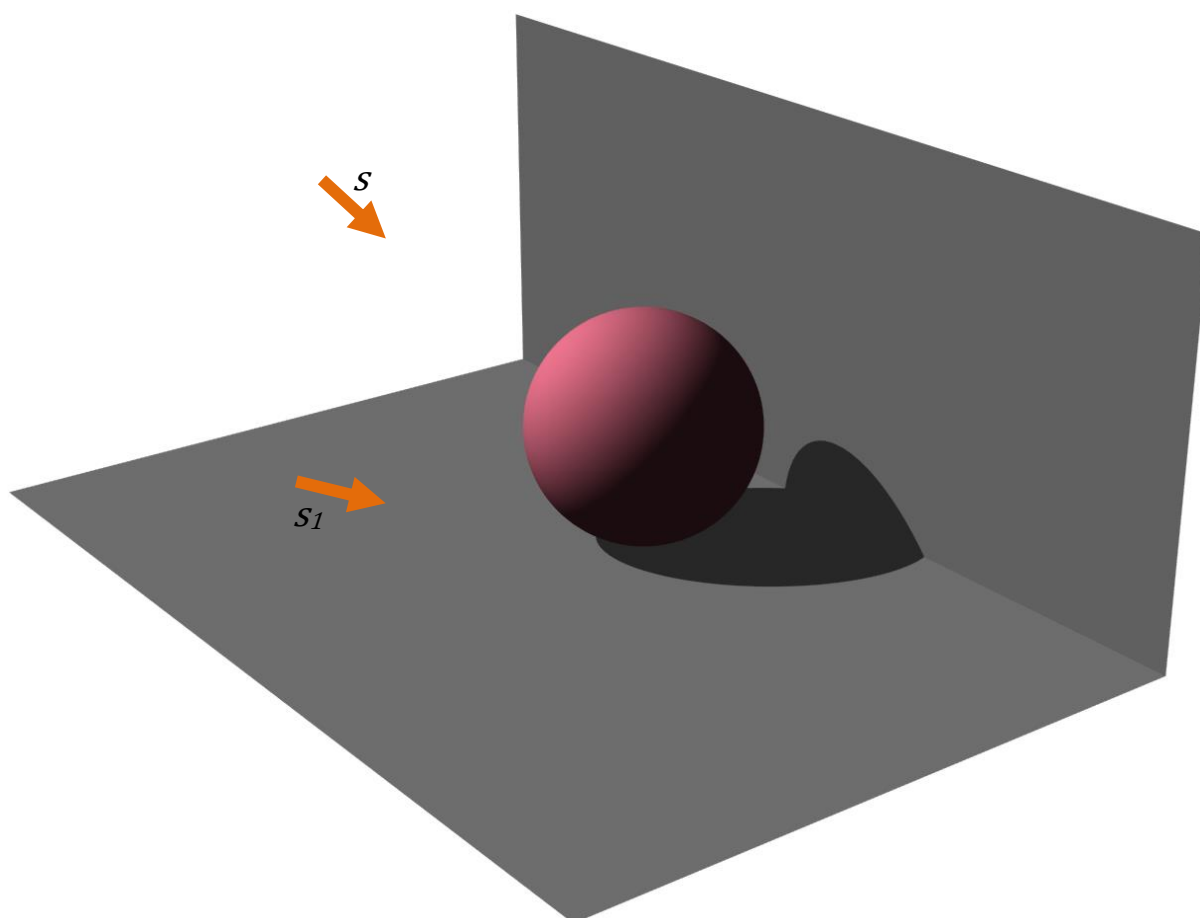
Poznámka 5.2: O správnosti sestrojených mezí vrženého stínu se můžeme přesvědčit tak, že obě dvě sestrojené elipsy (mez vrženého stínu do půdorysny a do nárysny) se musejí protnout na ose x (body X a Y na obrázku 5.7). ■

Poznámka 5.3: Další způsob, jak se můžeme přesvědčit o správnosti sestrojených mezí vrženého stínu je ten, že sestrojené tečny S_2I_2 a S_2J_2 se musí dotýkat elipsy, která je mezí vrženého stínu do nárysny. Navíc bychom mohli najít přesně body dotyku a to tak, že bychom našli sklopené body (I) a (J) , spojnice $(S)(I)$, $(S)(J)$ by pak protly elipsu v bodech dotyku. Stejně tak tečny S_1L_1 a S_1T_1 se musí dotýkat elipsy, která je mezí vrženého stínu do půdorysny. ■

Tím už máme úlohu vyřešenou, na obrázku 5.8 vidíme uvedenou situaci středového osvětlení namodelovanou na počítači v perspektivě. Na obrázku 5.9, pro porovnání, se můžeme podívat na ukázkou toho, jak by mohla vypadat stejná situace při rovnoběžném osvětlení.



Obrázek 5.8. Středové osvětlení koule, modelováno na počítači.



Obrázek 5.9. Rovnoběžné osvětlení koule, modelováno na počítači.

Příklad 4: Středové promítání³: A4 na šířku, $O=[15,12]$, $d = 6$ cm.

Nechť je dán pravidelný šestiboký hranol $A_1B_1C_1D_1E_1F_1ABCDEF$ s podstavou v půdorysně π (vzdálenost úběžnice u_π a stopy n_π roviny π je $v = 4$ cm) a výškou 6 cm, zadání viz obrázek 5.10⁴. Osvětlete dané těleso do půdorysny, je-li dán střed osvětlení S (viz obrázek 5.10).

Řešení: Nejprve najdeme vržený stín.

- 1) Dolní podstava leží v půdorysně, proto při osvětlení zůstává na místě.
- 2) Vržený stín horní podstavy můžeme najít bodově.

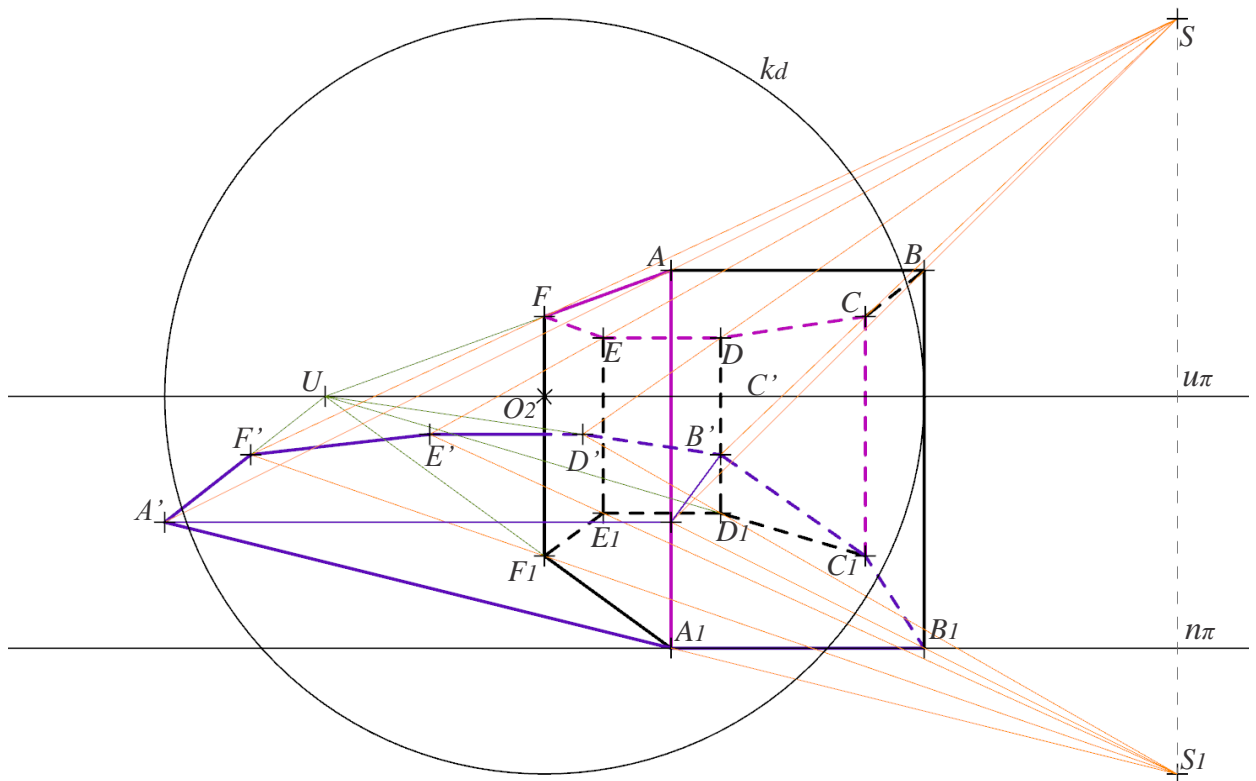
Sestrojíme nejprve stín bodu A . Paprsek SA protne svůj půdorysný průmět S_1A_1 v bodě A' , který je vrženým stínem bodu A . Podobně sestrojíme vržené stíny ostatních bodů. Kromě toho při konstrukci můžeme užívat úběžníky odpovídajících si hran. Například bod U , který je úběžníkem hran FA , CD (F_1A_1 , C_1D_1), je také úběžníkem hran $F'A'$, $C'D'$. Výsledný vržený stín $A'B'C'D'E'F'$ a horní podstava hranolu $ABCDEF$ si odpovídají ve stejnolehlosti v prostoru (mezi rovinou horní podstavy a půdorysnou) se středem v bodě S (viz poznámka 3.2). Ve středovém promítání potom průmět horní podstavy odpovídá průmětu vrženého stínu horní podstavy ve středové kolineaci (osa je úběžnice, střed je bod S)

Poznámka 5.4: Všimněme si také, že bod S_1 je úběžníkem průmětů vržených stínů svislých hran hranolu. ■

- 3) Mez vrženého stínu hranolu tvoří lomená čára $A_1B_1C_1C'D'E'F'A'A_1$ (fialově na obrázku 5.10).
- 4) Podle věty 1 tedy mez vlastního stínu tvoří čára $A_1B_1C_1CDEF A A_1$.

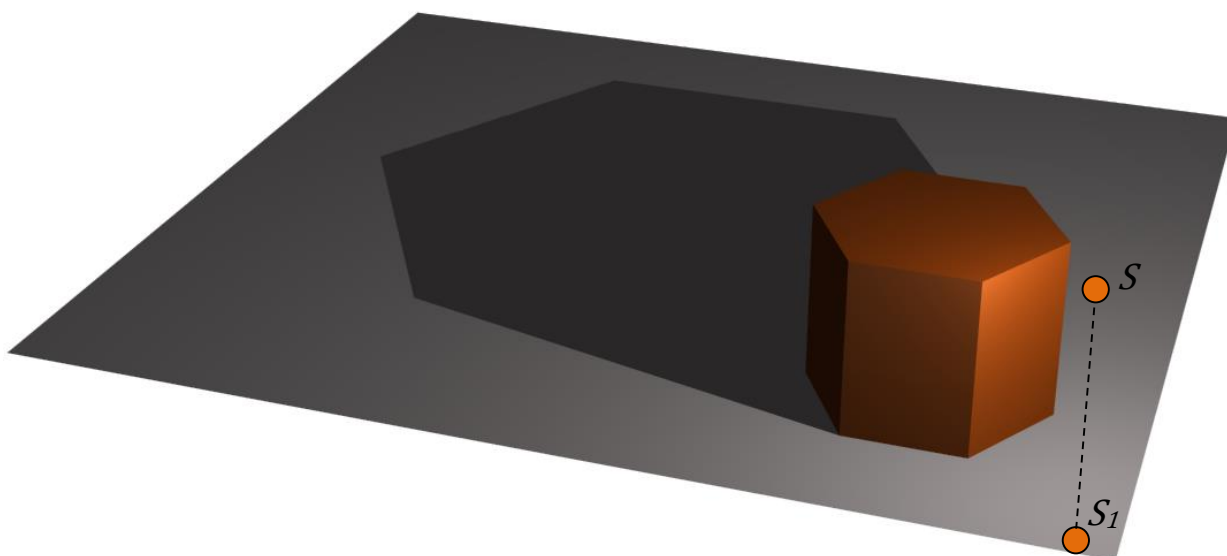
³ O je hlavní bod, d – distance, v – výška obzorové roviny.

⁴ Zadání ve skutečné velikosti čtenář může nalézt na příloženém DVD.

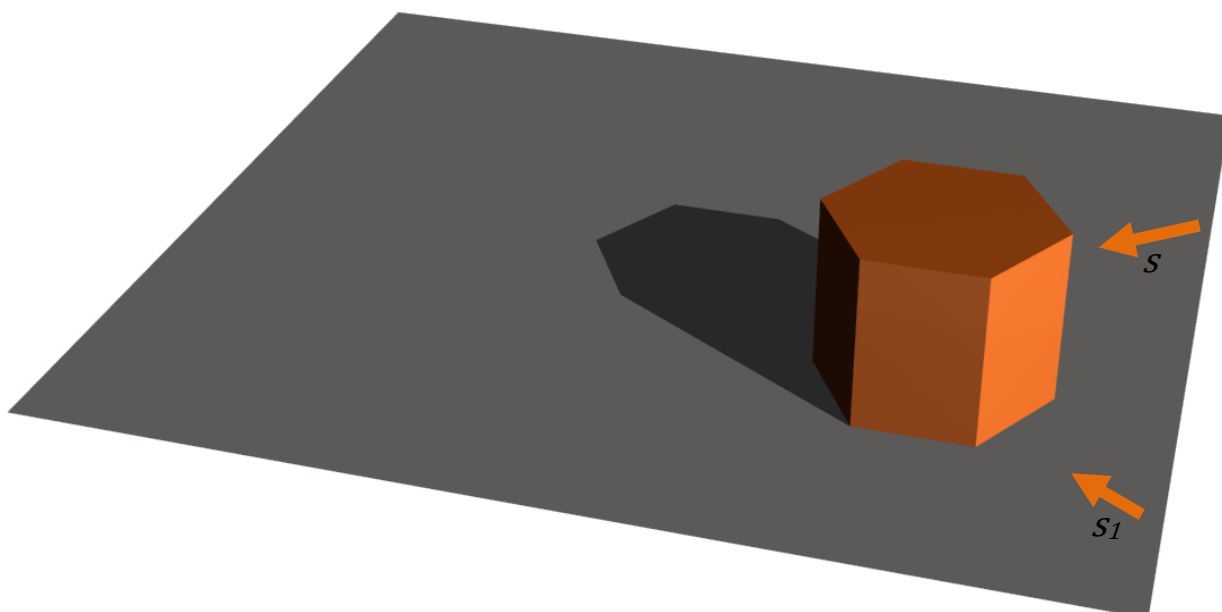


Obrázek 5.10. Středové osvětlení pravidelného šestibokého hranolu ve středovém promítání.

Na obrázku 5.11 vidíme uvedenou situaci středového osvětlení namodelovanou na počítači v perspektivě. Na obrázku 5.12, pro porovnání, můžeme se podívat na ukázkou toho, jak by mohla vypadat stejná situace při rovnoběžném osvětlení.



Obrázek 5.11. Středové osvětlení pravidelného šestibokého hranolu, modelováno na počítači.

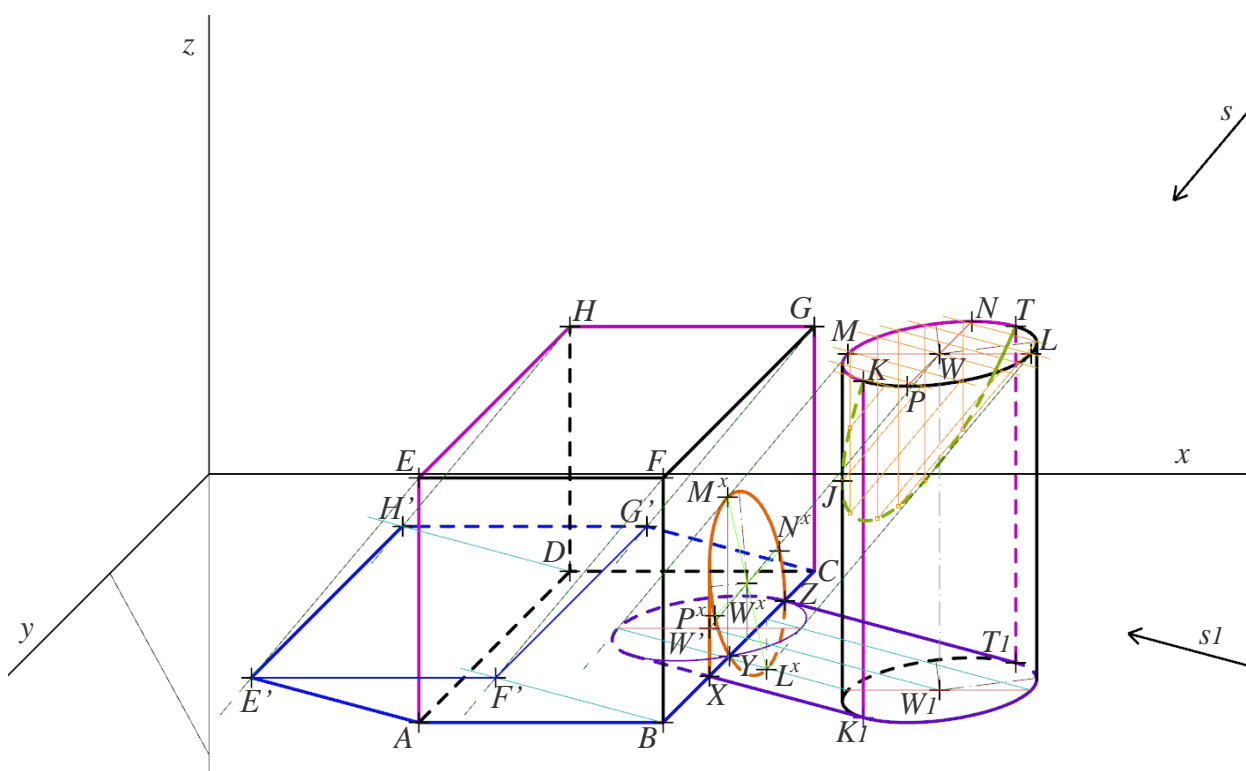


Obrázek 5.12. Rovnoběžné osvětlení pravidelného šestibokého hranolu, modelováno na počítači.

Příklad 5: Kosouhlé promítání: A4 na šířku, $O=[7,11]$, $q = 1/2$, $w = 135^\circ$.

Je dán rotační válec s podstavou v půdorysně mající střed v bodě $W_1=[15;10;0]$, s poloměrem 1,5 cm a výškou 5,5 cm. Také je dán kvádr $ABCDEFGH$ stojící na půdorysně, podstava má délky hran 4 a 7 cm, výška kváдру je 4 cm, $B=[11,5;11,5;0]$, $D=[7,5;4,5;0]$.

- a) Osvětlete dvojici těles, je-li dán směr osvětlení s , tj. nalezněte vlastní stíny, vržené stíny těles do průměten (uvažujeme neprůhledné průmětny) a vržený stín válce na kvádr. V průmětu odchylka směru s od osy x je 50° , odchylka půdorysu směru osvětlení (čili s_I) od osy x je 15° (viz obrázek 5.13).



Obrázek 5.13. Rovnoběžné osvětlení kváдру a dutého rotačního válce v kosouhlém promítání.

Řešení: Nejprve osvětlíme kvádr.

- 1) Pro sestavení vrženého stínu kváдру určíme vržené stíny všech jeho vrcholů a pak příslušné body spojíme.
Podstava $ABCD$ zůstává na místě. Horní podstavu $EFGH$ osvětlíme obvyklým způsobem.
- 2) $ABCG'H'E'A$ je mezi vrženého stínu (modrá čára na obrázku 5.13).
- 3) $ABCGHEA$ je tedy (podle věty 1) mezi vlastního stínu.

Nyní osvětlíme válec do půdorysny:

- 4) Dolní podstava zůstává na místě.
- 5) Mez vrženého stínu horní podstavy tvoří v průmětu elipsa se středem W' , která je shodná s podstavou (posunutí v prostoru, viz poznámka 2.5). Přičemž bod W' získáme jako stín bodu W (pomocí paprsku).

Poznámka 5.5: Ve skutečnosti podstavy válce a jejich vržené stíny jsou kruhy, v kosouhlém promítání jsou jejich průmětem části roviny ohraničené elipsou. ■

- 6) V průmětu vedeme společné tečny rovnoběžné se směrem s_I ke dvěma elipsám: k průmětu dolní podstavy a k průmětu vrženého stínu horní podstavy.
- 7) Tečny mezi body dotyku a poloviny vržených stínů podstav tvoří mez vrženého stínu válce na půdorysnu (zobrazeno fialově na obrázku 5.13).
- 8) Body dotyku tečen a dolní podstavy čili body T_I, K_I , určují površky TT_I, KK_I válce, které jsou součástí meze vlastního stínu.

Nyní sestrojíme stín do dutiny válce. Budeme postupovat způsobem vysvětleným v předchozí kapitole.

- 9) V rovině horní podstavy vedeme přímky rovnoběžné se směrem s_I protínající horní podstavou kružnici (v průmětu elipsu).
V průmětu přímky protínají elipsu, která je průmětem horní podstavy, ve dvou bodech. Nejprve přímka protne elipsu v bodě, který bude vrhat stín. Potom v bodě, kterým povedeme površku válce. Na tuto površku dopadne stín prvního bodu (podrobněji viz kapitola 4).
- 10) Důležitými body meze stínu do dutiny jsou její krajní body K a M (které jsou součástí i meze vlastního stínu). Také bychom měli určit bod stínu do dutiny, který leží na obrysové površce válce (bod J na obrázku 5.13).

Výsledný stín do dutiny je na obrázku 5.13 znázorněn zelenou barvou.

Vidíme, že část vrženého stínu válce je zakryta kvádrem, to znamená, že vržený stín válce částečně dopadne na kvádr. Na hraně BC se vržený stín zalomí do stěny kvádr.

Poznámka 5.6: Nalezená mez vrženého stínu horní podstavy do půdorysny protíná hranu BC v bodech Y a Z . Mez vrženého stínu horní podstavy do roviny BCG musí procházet body Y a Z . Stejně tak stín površky KK_I do půdorysny protíná hranu BC v bodě X , stín té samé površky do roviny BCG bude bodem X procházet. ■

11) Najdeme vržený stín horní podstavy válce do (svislé) stěny BCG kvádru. Mezi vrženého stínu bude elipsa (v průmětu i v prostoru), protože podstava leží v rovině, která je různoběžná s rovinou, do které osvětlujeme (viz poznámka 3.4).

Nejprve najdeme stín vodorovného průměru ML elipsy, která je průmětem horní podstavě kružnice. Bodem M vedeme světelný paprsek (rovnoběžný se směrem s), jeho průsečík s rovinou BCG označíme M^x , který je vrženým stínem bodu M do této roviny. Podobně najdeme bod L^x , který je vrženým stínem bodu L . Vržený stín středu horní podstavy bude středem hledané elipsy (v průmětu i v prostoru), která je mezi vrženého stínu podstavy.

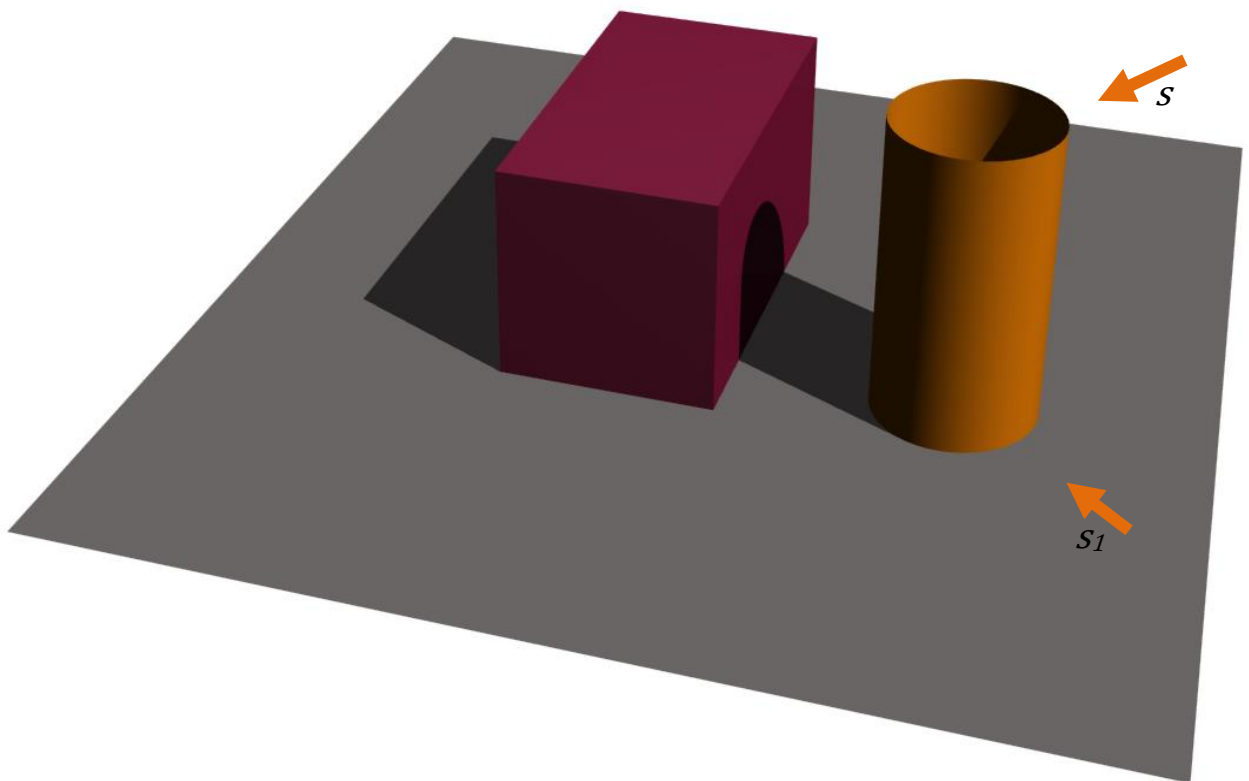
12) Najdeme vržený stín průměru NP (který je sdružený s průměrem LM), získáme úsečku N^xP^x na obrázku 5.13.

N^xP^x a L^xM^x jsou sdružené průměry hledané elipsy. Pomocí Ryzovy konstrukce získáme hlavní osy elipsy a narýsujeme část elipsy, která je nad půdorysnou (mezi body Y a Z , oranžově na obrázku 5.13).

13) Z bodu X vedeme tečnu k narýsované elipse. Tečna je rovnoběžná s površkami válce (plyne z toho, že površky jsou rovnoběžné s rovinou, do které osvětlujeme a sestrojená tečna je vrženým stínem jedné z površek, viz podkapitola 2.1). Tečna mezi bodem dotyku a bodem X je součástí meze vrženého stínu na válce do svislé stěny kvádru.

Výsledná mez vrženého stínu válce na kvádr je zobrazená oranžově na obrázku 5.13.

Tím už máme rovnoběžné osvětlení dvojice daných těles. Na obrázku 5.14 se můžeme podívat na ilustraci situace v prostoru, daná situace je zde namodelovaná na počítači a zobrazená v perspektivě.



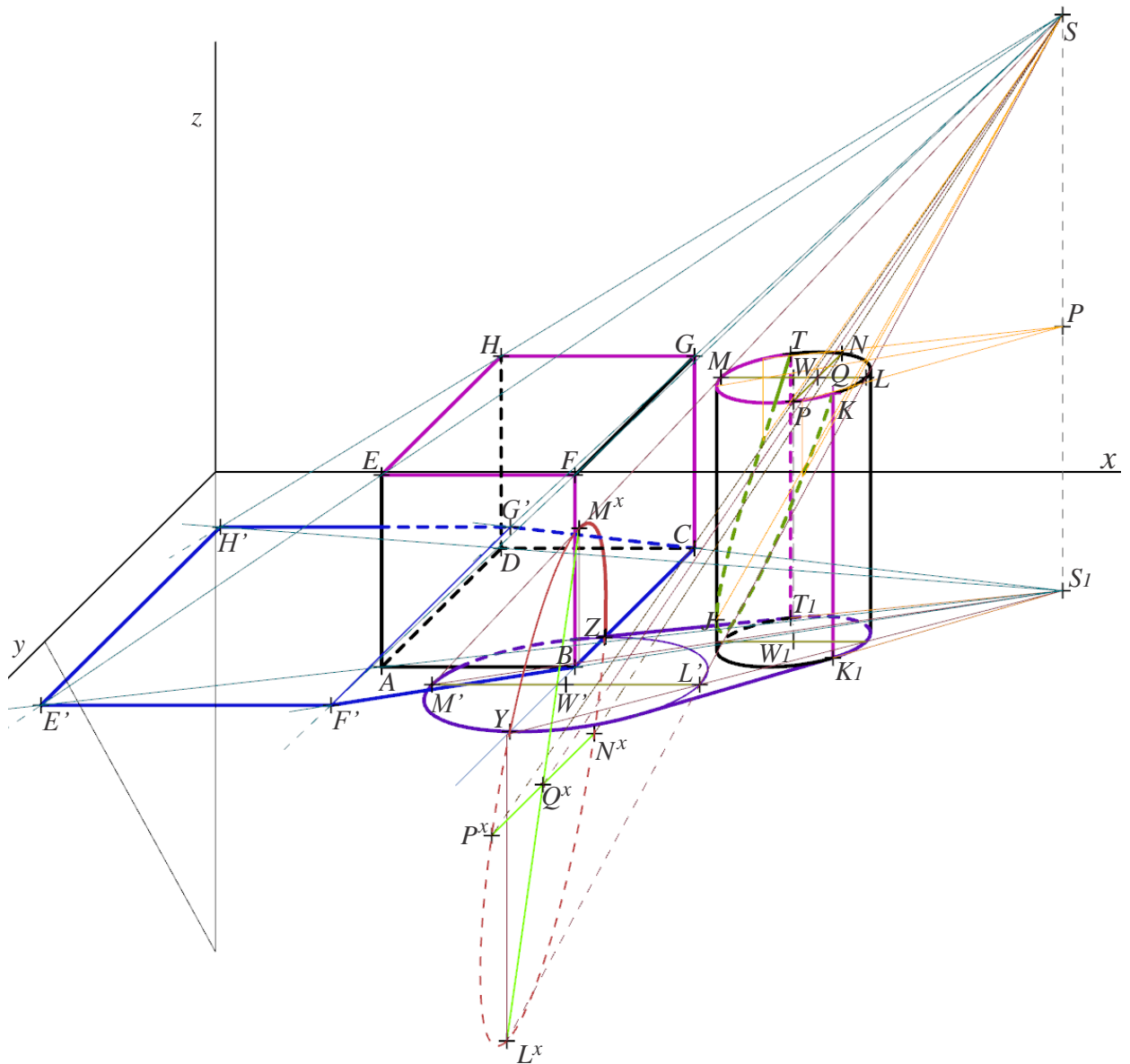
Obrázek 5.14. Rovnoběžné osvětlení kvádru a dutého rotačního válce, modelování na počítači.

Nyní osvětlíme stejnou situaci středově.

- b)** Osvětlete dvojici těles, tj. nalezněte vlastní stíny, vržené stíny těles do průměten (uvažujeme neprůhledné průmětny) a vržený stín válce na kvádr, je-li střed osvětlení $S=[20;7;12]$.

Řešení: Nejprve osvětlíme kvádr.

- 1) Pro sestavení vrženého stínu kvádru postupujeme stejně, jako v příkladu 1, čili sestrojíme vržené stíny všech jeho vrcholů a pak příslušné body spojíme. Podstava $ABCD$ zůstává na místě. Horní podstavu $EFGH$ osvětlíme obvyklým způsobem. Vržený stín $E'F'G'H'$ a horní podstava $EFGH$ si odpovídají ve stejnolehlosti v prostoru (mezi rovinou horní podstavy a půdorysnou) se středem v bodě S (viz poznámka 3.2).
- 2) $BCG'H'E'F'B$ je mezi vrženého stínu kvádru do půdorysny (modrá čára na obrázku 5.15).
- 3) $BCGHEFB$ je tedy (podle věty 1) mezi vlastního stínu kvádru.



Obrázek 5.15. Středové osvětlení kváдру a dutého rotačního válce v kosoúhlém promítání.

Nyní osvětlíme válec do půdorysny.

- 4) Dolní podstava zůstává na místě.
- 5) Osvětlíme horní podstavu. Horní podstava je kruh, ležící v rovině rovnoběžné s půdorysnou (do které osvětlujeme), proto vrženým stínem do půdorysny bude opět kruh (odpovídající horní podstavě ve stejnolehlosti se středem v bodě S , viz poznámka 3.4). V průmětu mezi vrženého stínu horní podstavu bude elipsa, která je podobná s (horní) podstavou.

Nejprve osvětlíme střed W (střed podstavu), potom osvětlíme jeden hlavní a jeden vedlejší vrchol elipsy, která je průmětem horní podstavu kružnice. Stíny těchto bodů nám určí

střed a vrcholy elipsy, která je průmětem meze vrženého stínu horní podstavy (tuto konstrukci však kvůli přehlednosti do obrázku nezobrazujeme).

- 6) V průmětu vedeme bodem S_I společné tečny ke dvěma elipsám: k průmětu dolní podstavy a k průmětu vrženého stínu horní podstavy.
- 7) Tečny mezi body dotyku a části vržených stínů podstav tvoří mez vrženého stínu válce na půdorysu (zobrazeno fialově na obrázku 5.15).
- 8) Body dotyku tečen a dolní podstavy čili body T_I, K_I , určují površky (TT_I, KK_I), které jsou součástí meze vlastního stínu.

Nyní sestrojíme stín do dutiny válce.

- 9) Najdeme bod P , který je pravoúhlým průmětem bodu S do roviny horní podstavy válce.
- 10) Bodem P vedeme svazek polopřímek protínajících horní podstavnu kružnici (v průmětu elipsu).

V průmětu polopřímky protínají podstavnu elipsu ve dvou bodech. Nejprve polopřímka protne elipsu v bodě, který bude vrhat stín. Potom v bodě, kterým povedeme površku válce. Na tuto površku dopadne stín prvního bodu (podrobněji viz kapitola 4).

- 11) Důležitými body meze stínu do dutiny jsou její krajní body K a T (které jsou součástí meze vlastního stínu). Také bychom měli určit bod stínu do dutiny, který v průmětu leží na obrysové površce válce (bod J na obrázku 5.15).

Výsledný stín do dutiny je na obrázku 5.15 znázorněn zelenou barvou.

Část vrženého stínu válce je zakryta kvádrem, to znamená, že se na hraně BC vržený stín zalomí do stěny kvádrů. Přičemž pořád bude platit poznámka 5.6 uvedená výš.

- 12) Najdeme stín horní podstavy válce do (svislé) stěny BCG kvádrů. Z polohy horní podstavy vůči obzorové rovině (viz poznámka 3.4) určíme, že mezi vrženého stínu bude elipsa (v průmětu i v prostoru).

Nejprve u elipsy, která je průmětem horní podstavné kružnice, najdeme stín průměru ML , který je kolmý k rovině, kam osvětlujeme. Bodem M vedeme světelný paprsek SM , jeho průsečík s rovinou BCG označíme M^x , který je vrženým stínem bodu M do této roviny. Podobně najdeme bod L^x , který je vrženým stínem bodu L .

Musíme si uvědomit, že vržený stín středu horní podstavy nebude středem elipsy, která je mezi vrženého stínu podstavy (jak tomu bylo při rovnoběžném osvětlení). Musíme tedy najít bod Q na úsečce LM , jehož stínem bude střed elipsy, která je mezi vrženého stínu podstavy.

Střed úsečky L^xM^x , bod Q^x na obrázku 5.15, je středem hledané elipsy.

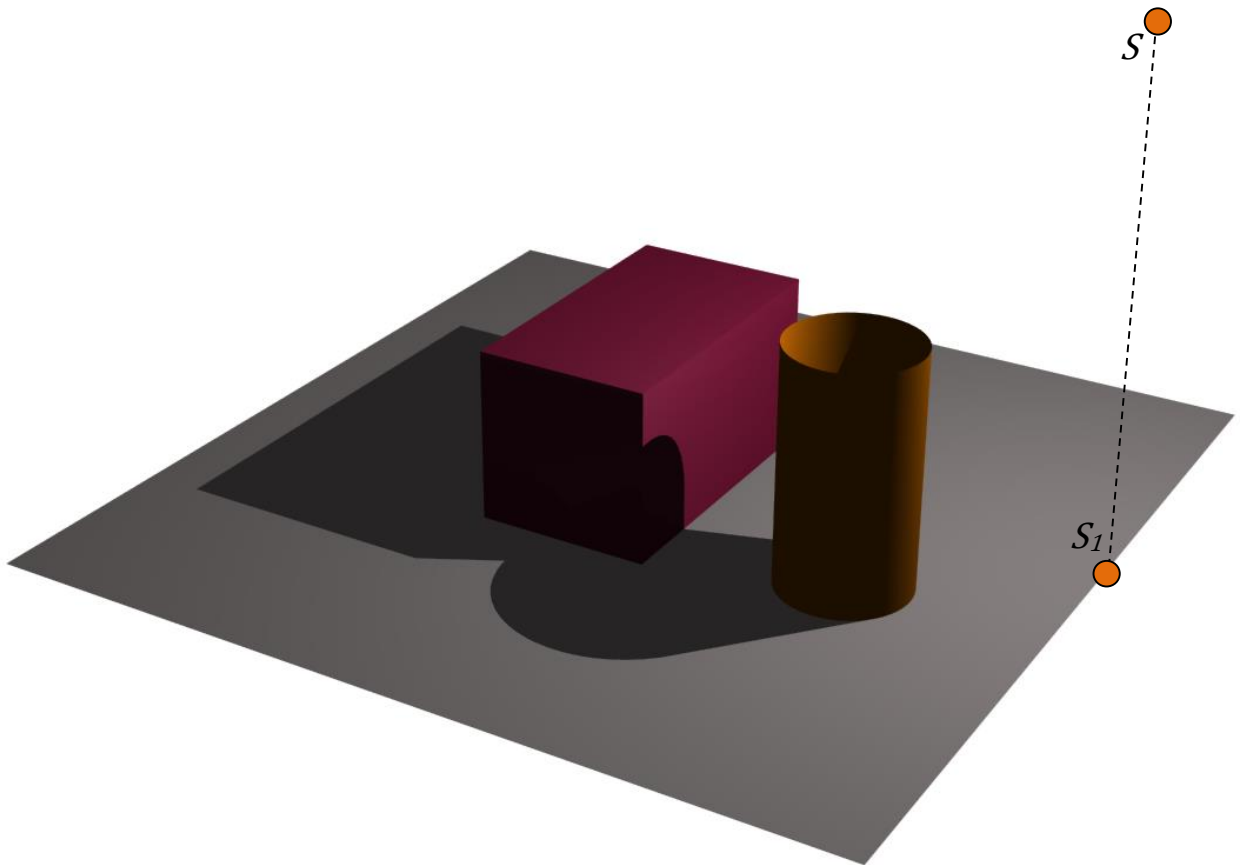
- 13) Najdeme průměr elipsy, který je sdružený s průměrem L^xM^x .
- 14) Vedeme bodem Q^x zpětný světelný paprsek Q^xS . Paprsek Q^xS protne průměr ML horní podstavy v bodě Q , což je vzor bodu Q^x .
- 15) Bodem Q vedeme rovnoběžku s osou y , získáme tím tětivu NP elipsy horní podstavy (ve skutečnosti ML a NP jsou navzájem kolmé).
- 16) Najdeme vržený stín tětivy NP , úsečka N^xP^x na obrázku 5.15.
 N^xP^x a L^xM^x jsou sdružené průměry elipsy. Pomocí Ryzovy konstrukce získáme hlavní osy elipsy a dokážeme ji narýsovat (zobrazená červeně na obrázku 5.15). Část elipsy, která se nachází na stěně kvádrů je součástí výsledné meze vrženého stínu válce na kvádr.

Poznámka 5.7: Uvedená konstrukce elipsy plyne ze vztahu středové kolineace. Podrobné informace o kolineaci čtenář může nalézt v (E. Pomykalová, 2010). ■

- 14) Stejně jako při rovnoběžném osvětlení, tečna S_1T_1 se na hraně BC také zalomí do boční stěny kvádrů. Z bodu X , což je průsečík S_1T_1 a BC (tento bod vychází velice blízko bodu Z , proto na obrázku 5.15 kvůli přehlednosti není popsán), vedeme tečnu k narýsované elipse. Tečna je rovnoběžná s povrchy válce (plyne z toho, že povrchy jsou rovnoběžné s rovinou, do které osvětlujeme a sestrojená tečna je vrženým stínem jedné z površků, viz podkapitola 2.1). Tečna mezi bodem dotyku a bodem X je součástí meze vrženého stínu na válce do svislé stěny kvádrů.

Výsledná mez vrženého stínu válce na kvádr je zobrazená červeně na obrázku 5.15.

Tím už máme středové osvětlení dvojice daných těles. Na obrázku 5.16 se můžeme podívat na ilustraci situace v prostoru, daná situace je zde namodelovaná na počítači v perspektivě.



Obrázek 5.16. Středové osvětlení kvádru a dutého rotačního válce, modelováno na počítači.

Příklad 6: Kosouhlé promítání: A_4 na šířku, $O=[7,11]$, $q = 1/2$, $w = 120^\circ$,

Je dán rotační kužel s podstavou v půdorysně mající střed v bodě $Q=[15;12;0]$, s poloměrem 2 cm a výškou 8,5 cm. Také je dána krychle $ABCDEFGH$ stojící na půdorysně s hranou délky 4 cm, $B=[10;11,5;0]$, $D=[10;5,5;0]$.

- a) Osvětlete dvojici těles, tj. nalezněte vlastní stíny, vržené stíny těles do průměten (uvažujeme neprůhledné průmětny) a vržený stín kužele na krychli, je-li dán směr osvětlení s . V průmětu odchylka směru s od osy x je 40° , odchylka půdorysu směru osvětlení (čili s_I) od osy x je 25° (viz obrázek 5.17).

Řešení: Nejprve osvětlíme krychli.

- 1) Podstava $ABCD$ zůstává při osvětlení do půdorysny na místě. Sestrojíme stín vrcholu E , získáme tak bod E' a ostatní body analogicky. Vrženým stínem horní stěny $EFGH$ je shodný čtverec (v průmětu rovnoběžník) $E'F'G'H'$.
- 2) $BCDH'E'F'B$ je mezi vrženého stínu krychle (modrá čára na obrázku 5.17).

3) $BCDHEFB$ je tedy (podle věty 1) mezi vlastního stínu krychle.

Nyní osvětlíme rotační kužel.

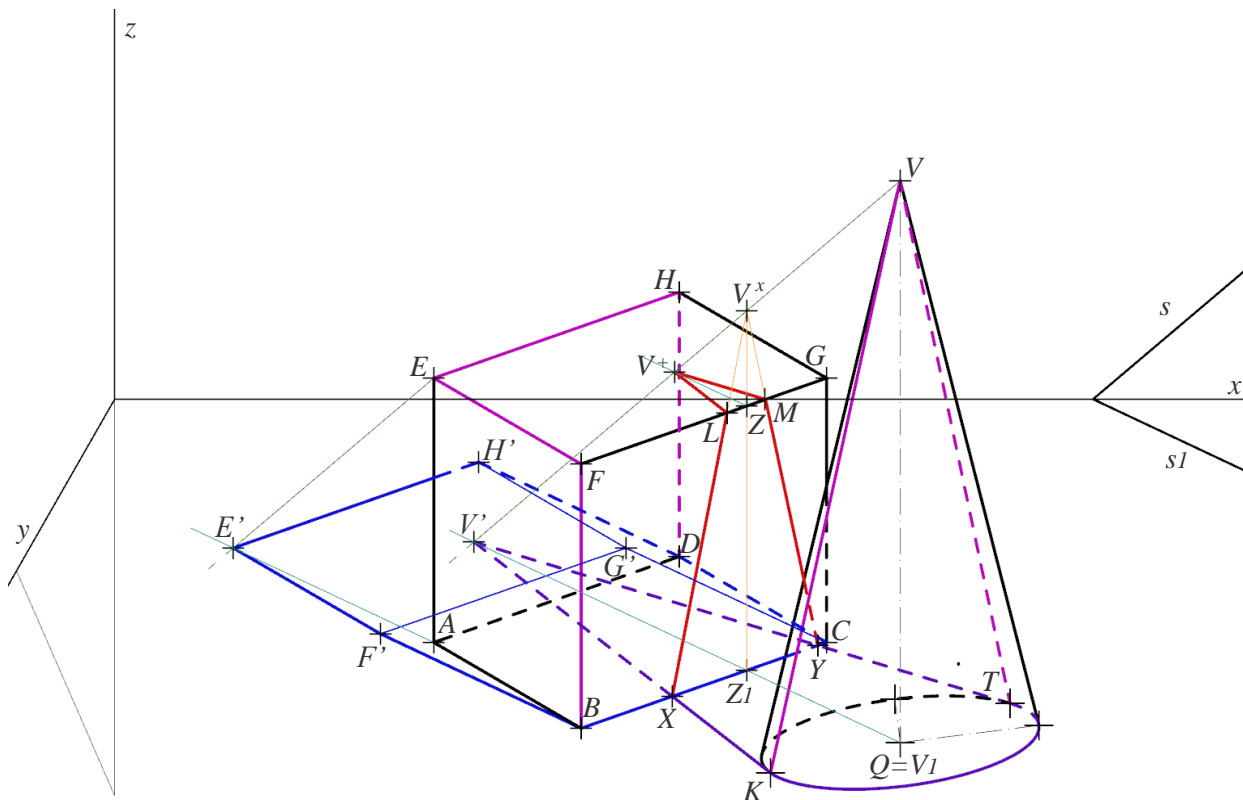
- 4) Podstava zůstává na místě.
- 5) Osvětlíme vrchol V do půdorysny obvyklým způsobem (pomocí paprsku), dostaneme bod V' .
- 6) Bodem V' vedeme tečny k podstavě kužele.
- 7) Tečny mezi bodem V' a body dotyku spolu s částí podstavné kružnice (v průmětu elipsy) tvoří mez vrženého stínu na půdorysnu (fialová čára na obrázku 5.18).
- 8) Body dotyku K a T určí površky, které jsou součástí meze vlastního stínu kužele.

Vržený stín se v bodech X a Y zalomí do boční stěny krychle.

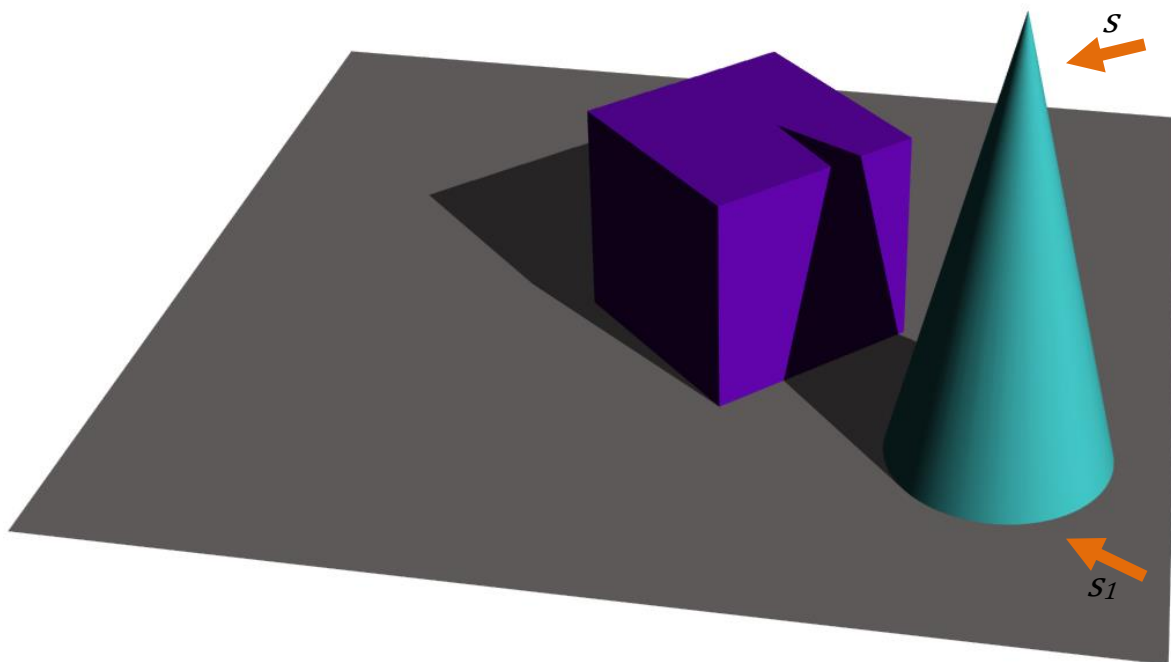
- 9) Sestrojíme vržený stín bodu V do roviny BCG (boční stěny krychle). Vedeme bodem V světelný paprsek, rovnoběžný se směrem s . Paprsek protne rovinu BCG v bodě V^x , který získáme jako průsečík paprsku se svislou přímkou ZZ_1 .
- 10) Spojíme bod V^x s body X a Y . Úsečky V^xX , V^xY protnou hranu FG v bodech L a M . Úsečky LX a MY jsou součástí výsledné meze vrženého stínu kužele na krychli. Ve hraně FG totiž končí boční stěna krychle, což znamená, že se vržený stín kužele zalomí ještě jednou, do horní stěny $EFGH$.
- 11) Sestrojíme vržený stín V^+ vrcholu V do roviny horní stěny krychle. Vedeme vrcholem V světelný paprsek (rovnoběžný se směrem s). Bodem Z (viz obrázek 5.17) vedeme rovnoběžku se směrem s_1 (je to pravoúhlý průmět paprsku do roviny horní podstavy), rovnoběžka protne sestrojený paprsek v bodě V^+ . Úsečky V^+L a V^+M jsou součástí výsledné meze vrženého stínu kužele na krychli.

Část meze vrženého stínu kužele, která dopadá na krychli je zobrazená červeně na obrázku 5.17.

Tím už máme rovnoběžné osvětlení dvojice daných těles. Na obrázku 5.18 se můžeme podívat na ilustraci situace v prostoru, daná situace je zde namodelovaná na počítači a zobrazená v perspektivě.



Obrázek 5.17. Rovnoběžné osvětlení krychle a rotačního kužele v kosoúhlém promítání.



Obrázek 5.18. Rovnoběžné osvětlení krychle a rotačního kužele, modelování na počítači.

- b) Osvětlete dvojici těles, tj. nalezněte vlastní stíny, vržené stíny těles do průměten (uvažujeme neprůhledné průmětny) a vržený stín kužele na krychli, je-li střed osvětlení $S=[20;14;12]$.

Řešení: Nejprve osvětlíme krychli.

- 1) Podstava $ABCD$ zůstává na místě. Vrženým stínem horní stěny $EFGH$ je podobný čtverec (v průmětu rovnoběžník) $E'F'G'H'$, který najdeme obvyklým způsobem (viz předchozí příklady). Čtverce (v průmětu rovnoběžníky) $E'F'G'H'$ a $EFGH$ si odpovídají ve stejnolehlosti v prostoru (mezi rovinou horní podstavy a půdorysnou) se středem v bodě S (viz poznámka 3.2), v průmětu pak dostáváme stejnolehlost v rovině.
- 2) $BCDH'E'F'B$ je mezi vrženého stínu krychle (modrá čára na obrázku 5.19).
- 3) $BCDHE'FB$ je tedy (podle věty 1) mezi vlastního stínu krychle.

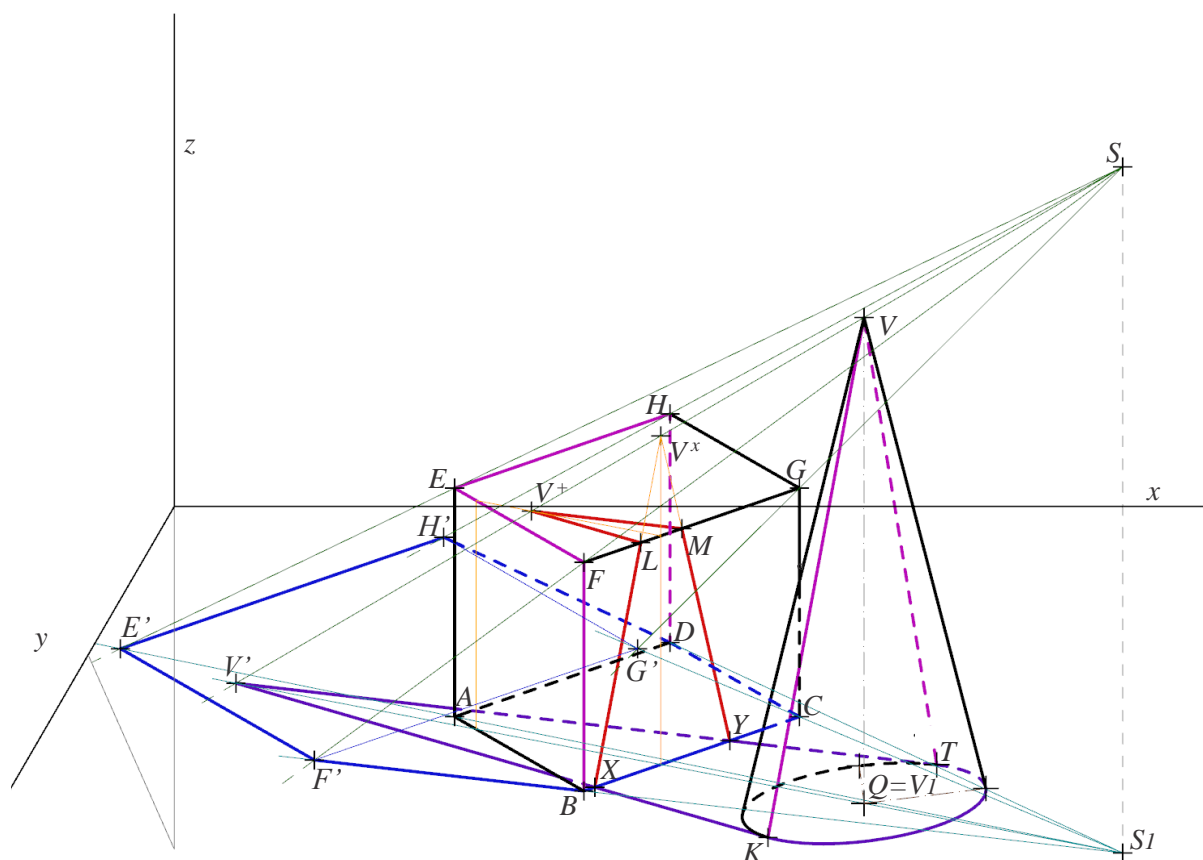
Nyní osvětlíme rotační kužel.

- 4) Podstava zůstává na místě.
- 5) Osvětlíme vrchol V do půdorysny obvyklým způsobem (pomocí paprsku), dostaneme bod V' .
- 6) Bodem V' vedeme tečny k podstavě kužele.
- 7) Tečny mezi bodem V' a body dotyku spolu s částí podstavě kružnice (v průmětu elipsy) tvoří mez vrženého stínu na půdorysnu (fialová čára na obrázku 5.19).
- 8) Body dotyku K a T určí površky, které jsou součástí meze vlastního stínu kužele.

Vržený stín se v bodech X a Y zalomí do boční stěny krychle.

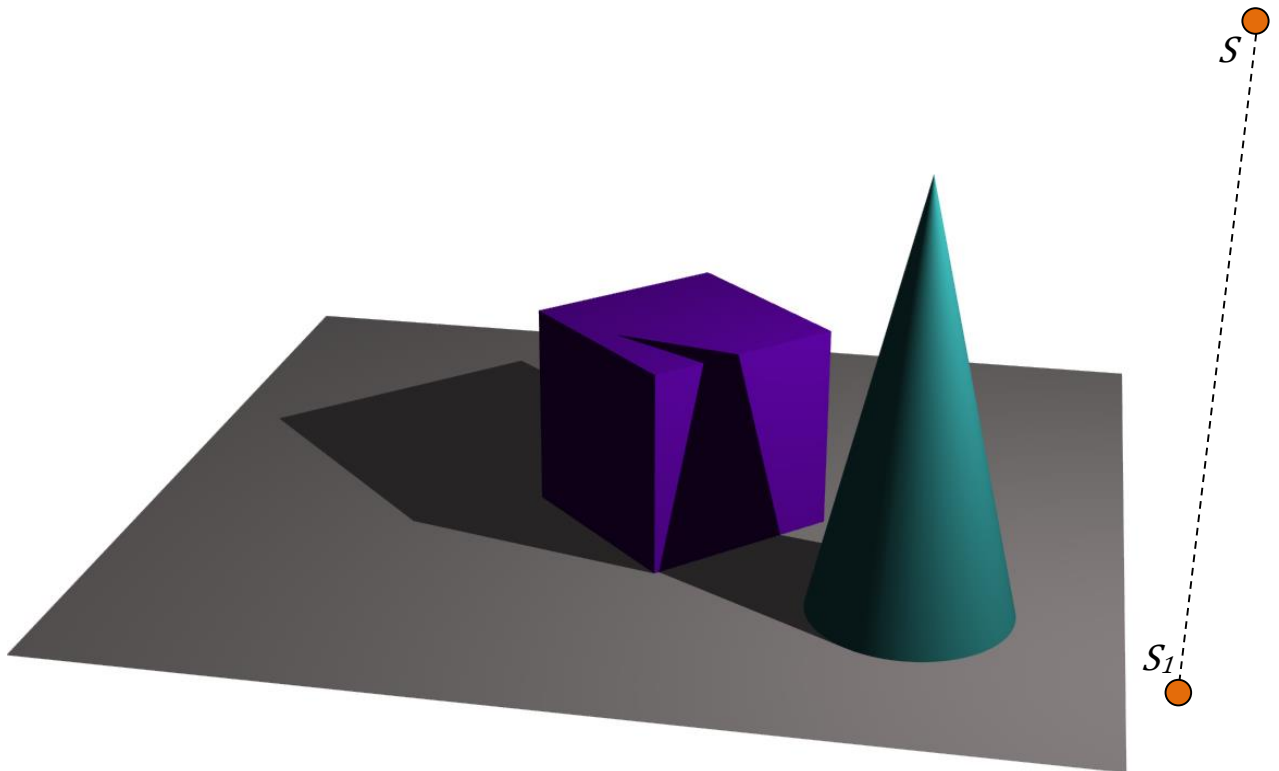
- 9) Sestrojíme vržený stín bodu V do roviny BCG (boční stěny krychle). Bodem V vedeme světelný paprsek SV . Paprsek protne rovinu BCG v bodě V^x .
- 10) Spojíme bod V^x s body X a Y . Úsečky V^xX , V^xY protnou hranu FG v bodech L a M . Úsečky LX a MY jsou součástí výsledné meze vrženého stínu kužele na krychli.
Na hraně FG totiž končí boční stěna krychle, což znamená, že se vržený stín kužele zalomí ještě jednou, do horní podstavy $EFGH$.
- 11) Sestrojíme vržený stín V^+ vrcholu V do roviny horní podstavy krychle. Vedeme vrcholem V paprsek VS . Paprsek protne rovinu horní stěny v bodě V^+ . Úsečky V^+L a V^+M jsou součástí výsledné meze vrženého stínu kužele na krychli.

Část meze vrženého stínu kužele, která dopadá na krychli, je zobrazená červeně na obrázku 5.19.



Obrázek 5.19. Středové osvětlení krychle a rotačního kužele v kosoúhlém promítání.

Tím už máme středové osvětlení dvojice daných těles. Na obrázku 5.20 se můžeme podívat na ilustraci situace v prostoru, daná situace je zde namodelovaná na počítači a zobrazená v perspektivě.



Obrázek 5.20. Středové osvětlení krychle a rotačního kužele, modelování na počítači.

Příklad 7: Pravoúhlá axonometrie: A4 na šířku, $O=[14,11]$, axonometrický trojúhelník $\Delta(10;11;12)$.

V dané pravoúhlé axonometrii je dán rotační válec stojící na půdorysně, střed podstavu $W_1=[9;10;0]$, poloměr je 2,5 cm, výška válce je 5,5 cm. Dále je dán kužel, jehož podstavou je horní podstava válce a jeho výška je 5 cm.

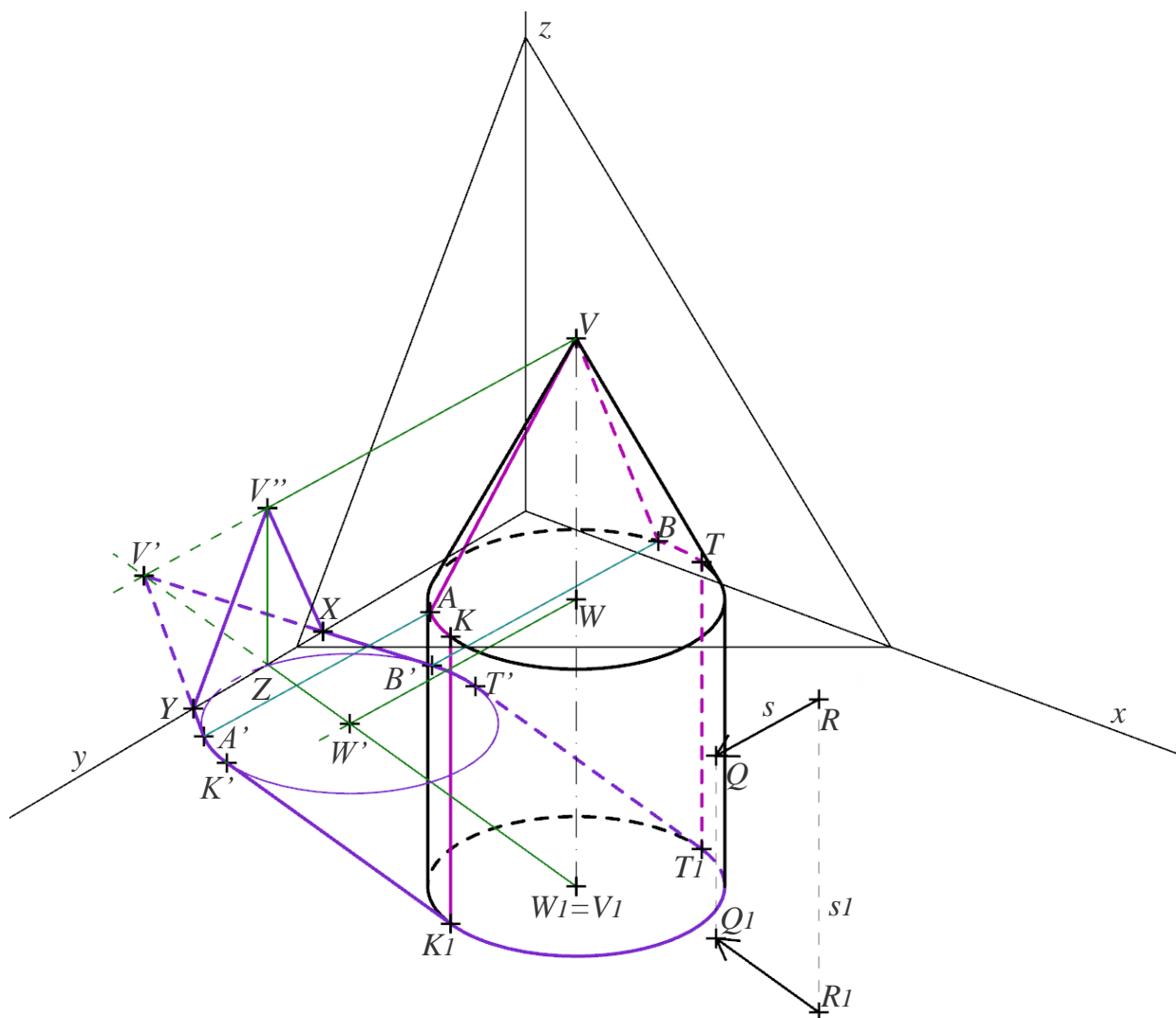
- a) Osvětlete dvojici těles ve směru s , který je dán body $Q=[12;10;3,5]$, $R=[15;11;6]$, tj. nalezněte vlastní stíny a vržené stíny těles do průměten (uvažujeme neprůhledné průmětny).

Řešení: Nejprve sestrojíme vržený stín válce.

- 1) Dolní podstava válce zůstává na místě.
- 2) Osvětlíme horní podstavu. Horní podstava je kruh, ležící v rovině rovnoběžné s půdorysnou (do které osvětlujeme), proto vrženým stínem do půdorysny bude shodný kruh (viz poznámka 2.5).

V průmětu mez vrženého stínu horní podstavu tvoří elipsa se středem W' , která je shodná s podstavou (posunutí v prostoru, viz poznámka 2.5). Přičemž bod W' získáme jako stín bodu W (pomocí paprsku).

- 3) V průmětu vedeme společné tečny rovnoběžné se směrem s_1 ke dvěma elipsám: k průmětu dolní podstavy a k průmětu vrženého stínu horní podstavy.
- 4) Tečny mezi body dotyku a poloviny vržených stínů podstavných kružnic (v průmětu elips) tvoří mez vrženého stínu válce na půdorysnu.
- 5) Body dotyku tečen a dolní podstavy čili body T_1, K_1 , určují površky TT_1, KK_1 válce, které jsou součástí meze vlastního stínu.



Obrázek 5.21. Rovnoběžné osvětlení rotačního válce a rotačního kužele v pravoúhlé axonometrii.

Nyní sestojíme vržený stín kužele na půdorysnu (postup byl podrobně vysvětlen v oddílu 2.2.3).

- 6) Sestojíme vržený stín vrcholu V , bod V' .
- 7) Z bodu V' vedeme tečny k vrženému stínu horní podstavy válce (je to totiž zároveň vržený stín podstavy kužele). Body dotyku pojmenujeme A' a B' .

- 8) Najdeme body podstavy kužele, které vrhají stín na body A' a B' . Vedeme body A' a B' zpětné paprsky (rovnoběžné se směrem s), sestrojené paprsky protnou podstavu kužele v bodech A a B .
- 9) Površky kužele AV a BV , části horní podstavné kružnice (v průmětu elipsy) mezi body A , K a B , T , površky válce TT_1 , KK_1 a polovina dolní podstavné kružnice (v průmětu elipsy) tvoří mez vlastního stínu dvojice daných těles (růžová čára na obrázku 5.21).

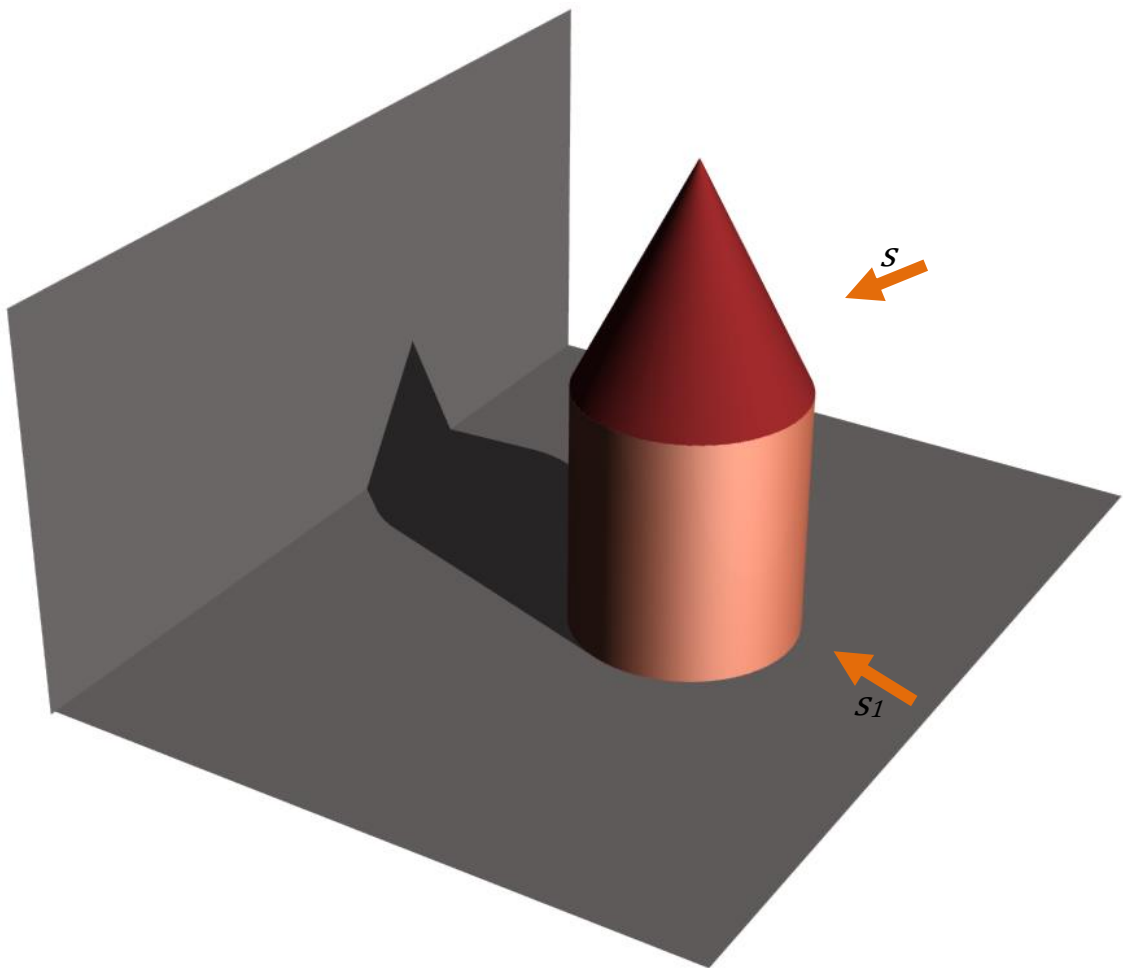
Část vrženého stínu kužele je za bokorysnou, uvažujeme-li ale neprůhlednou bokorysnu, pak část stínu kužele se na ose y zalomí do bokorysny.

- 10) Mez vrženého stínu kužele do půdorysny protíná osu y v bodech X a Y (v těchto bodech se stín zalomí).
- 11) Sestrojíme vržený stín V'' vrcholu V kužele do bokorysny. Světelný paprsek bodu V (rovnoběžný se směrem s) už máme sestrojený. Jeho průsečík s bokorysnou najdeme jako průsečík se svislou přímkou vedenou bodem Z (viz obrázek 5.21).
- 12) Úsečky $V''X$ a $V''Y$ jsou součástí meze vrženého stínu do bokorysny. Výsledná mez vrženého stínu dvojice těles do průměten je zobrazena fialově na obrázku 5.21.

Tím už máme rovnoběžné osvětlení dvojice daných těles, situaci v prostoru můžeme vidět na obrázku 5.22, zde je situace zobrazena v prostoru v perspektivě.

Poznámka 5.8: Zde bychom si měli všimnout zajímavosti ve vlastních stínech válce a kužele. Přesně polovina válce je ve stínu, u kužele je ale ve stínu nějaká neurčitá část (o čem jsme už uvažovali v oddílu 2.2.3), proto vlastní stín kužele nenavazuje (plynule) na vlastní stín válce⁵. ■

⁵ Popsaný fakt je častou chybou v pracích (obrázcích) malířů, kteří nejsou seznámeni s teorií geometrického osvětlení.



Obrázek 5.22. Rovnoběžné osvětlení rotačního válce a rotačního kužele, modelování na počítači.

- b) Osvětlete dvojici těles, tj. nalezněte vlastní stíny a vržené stíny těles do průměten (uvažujeme neprůhledné průmětny), je-li dán zdroj osvětlení $S=[18;11;11]$.

Řešení:

- 1) Dolní podstava válce zůstává na místě.
- 2) Osvětlíme nyní horní podstavu. Horní podstava je kruh, ležící v rovině rovnoběžné s půdorysnou (do které osvětlujeme), proto vrženým stínem do půdorysny bude opět kruh (odpovídající horní podstavě ve stejnolehlosti, viz poznámka 3.4).

V průmětu mez vrženého stínu horní podstavu tvoří elipsa, která je podobná s podstavou. V průmětu dostáváme stejnolehlost v rovině se středem v bodě S .

Nejprve osvětlíme střed W (střed podstavu), potom osvětlíme jeden hlavní a jeden vedlejší vrchol elipsy, která je průmětem horní podstavné kružnice. Stíny těchto bodů nám určí střed a vrcholy elipsy, která je průmětem meze vrženého stínu podstavu.

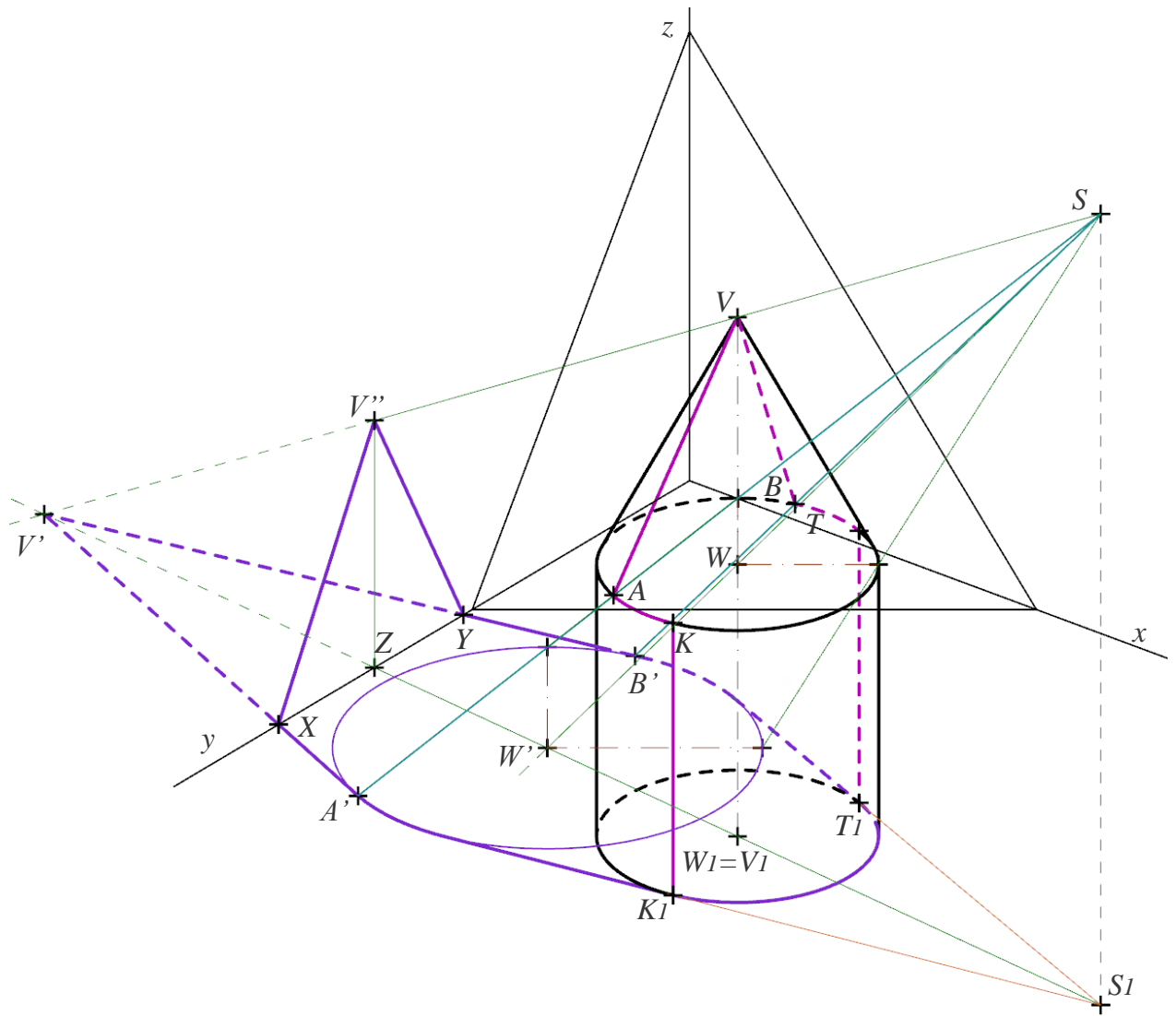
- 3) V průmětu vedeme bodem S_I společné tečny ke dvěma elipsám: k průmětu dolní podstavky a k průmětu vrženého stínu horní podstavky.
- 4) Tečny mezi body dotyku a částí vržených stínů podstavných kružnic (v průmětu elips) tvoří mez vrženého stínu válce na půdorysnu.
- 5) Body dotyku tečen a dolní podstavky čili body T_I, K_I , určují površky TT_I, KK_I válce, které jsou součástí meze vlastního stínu.

Nyní sestrojíme vržený stín kužele na půdorysnu (postup byl podrobně vysvětlen v oddílu 3.2.3).

- 6) Sestrojíme vržený stín vrcholu V do půdorysny, získáme tak bod V' .
- 7) Z bodu V' vedeme tečny k vrženému stínu horní podstavky válce (je to totiž zároveň vržený stín podstavky kužele). Body dotyku pojmenujeme A' a B' .
- 8) Najdeme body podstavky kužele, které vrhají stín na body A' a B' . Vedeme body A' a B' zpětné paprsky ($A'S$ a $B'S$), sestrogené paprsky protnou podstavku kužele v bodech A a B .
- 9) Površky kužele AV a BV , části horní podstavné kružnice (v průmětu elipsy) mezi body A, K a B, T , površky válce TT_I, KK_I a část dolní podstavné kružnice (v průmětu elipsy) tvoří mez vlastního stínu dvojice daných těles (růžová čára na obrázku 5.24).

Část vrženého stínu kužele je za bokorysnou, uvažujeme-li ale neprůhlednou bokorysnu, pak část stínu kužele se na ose y zalomí do bokorysny.

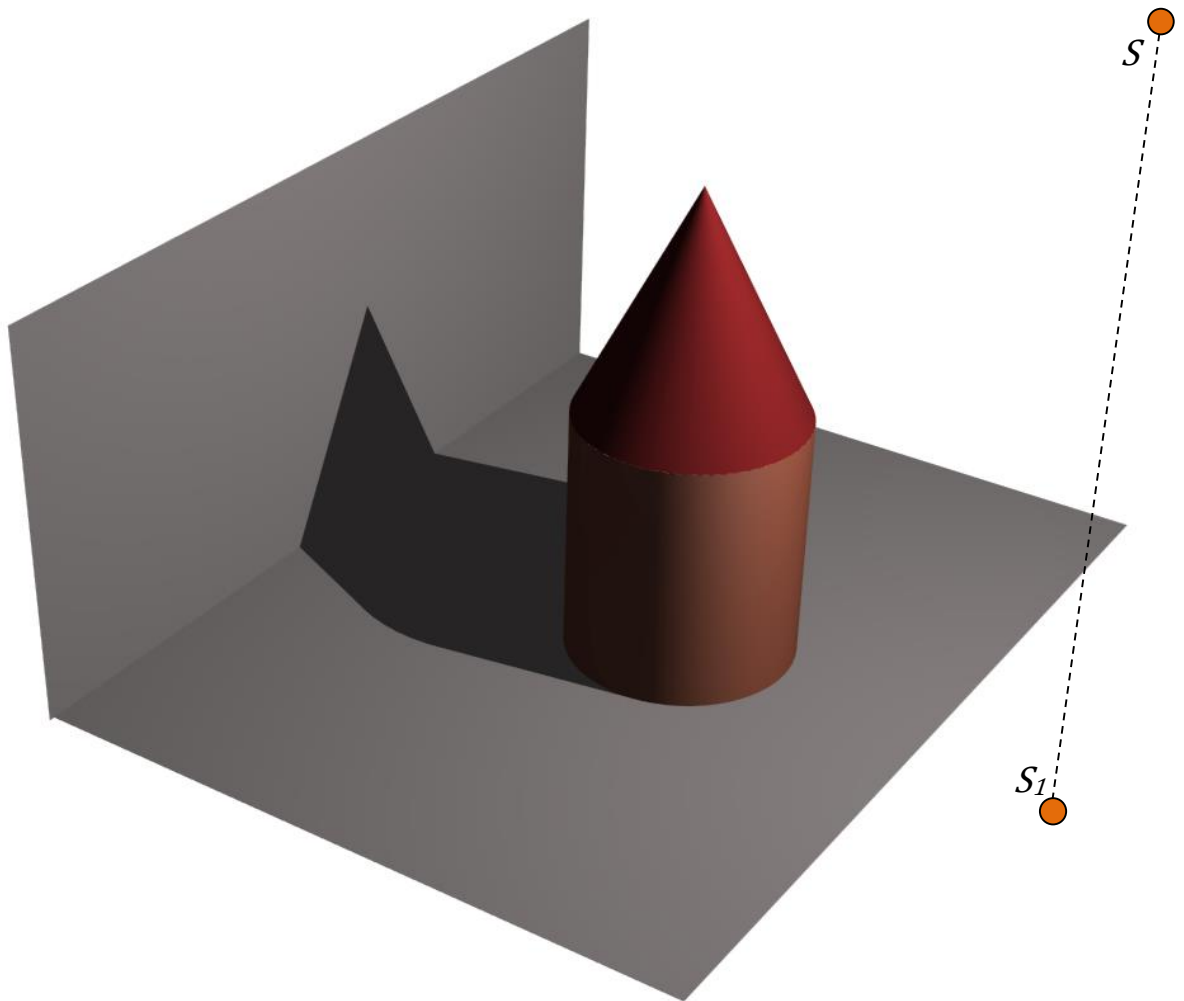
- 10) Mez vrženého stínu kužele do půdorysny protíná osu y v bodech X a Y (v těchto bodech se stín zalomí).
- 11) Sestrojíme vržený stín V'' vrcholu V kužele do bokorysny. Světelný paprsek VS bodu V už máme sestrogený. Jeho průsečík s bokorysnou najdeme jako průsečík se svislou přímkou vedenou bodem Z (viz obrázek 5.24).
- 12) Úsečky $V''X$ a $V''Y$ jsou součástí meze vrženého stínu do bokorysny.
Výsledná mez vrženého stínu dvojice těles do průměten je zobrazena fialově na obrázku 5.24.



Obrázek 5.24. Středové osvětlení rotačního válce a rotačního kužele v pravoúhlé axonometrii.

Tím už máme středové osvětlení dvojice daných těles, situaci v prostoru můžeme vidět na obrázku 5.25, zde je situace zobrazena v prostoru v perspektivě.

Poznámka 5.9: Podobně jako při rovnoběžném osvětlení (viz poznámka 5.8) vlastní stín kužele nenavazuje (plynule) na vlastní stín válce. ■



Obrázek 5.25. Středové osvětlení rotačního válce a rotačního kužele, modelování na počítači.

Příklad 8: Středové promítání: A4 na šířku, $O=[13,12]$, $d = 6$ cm.

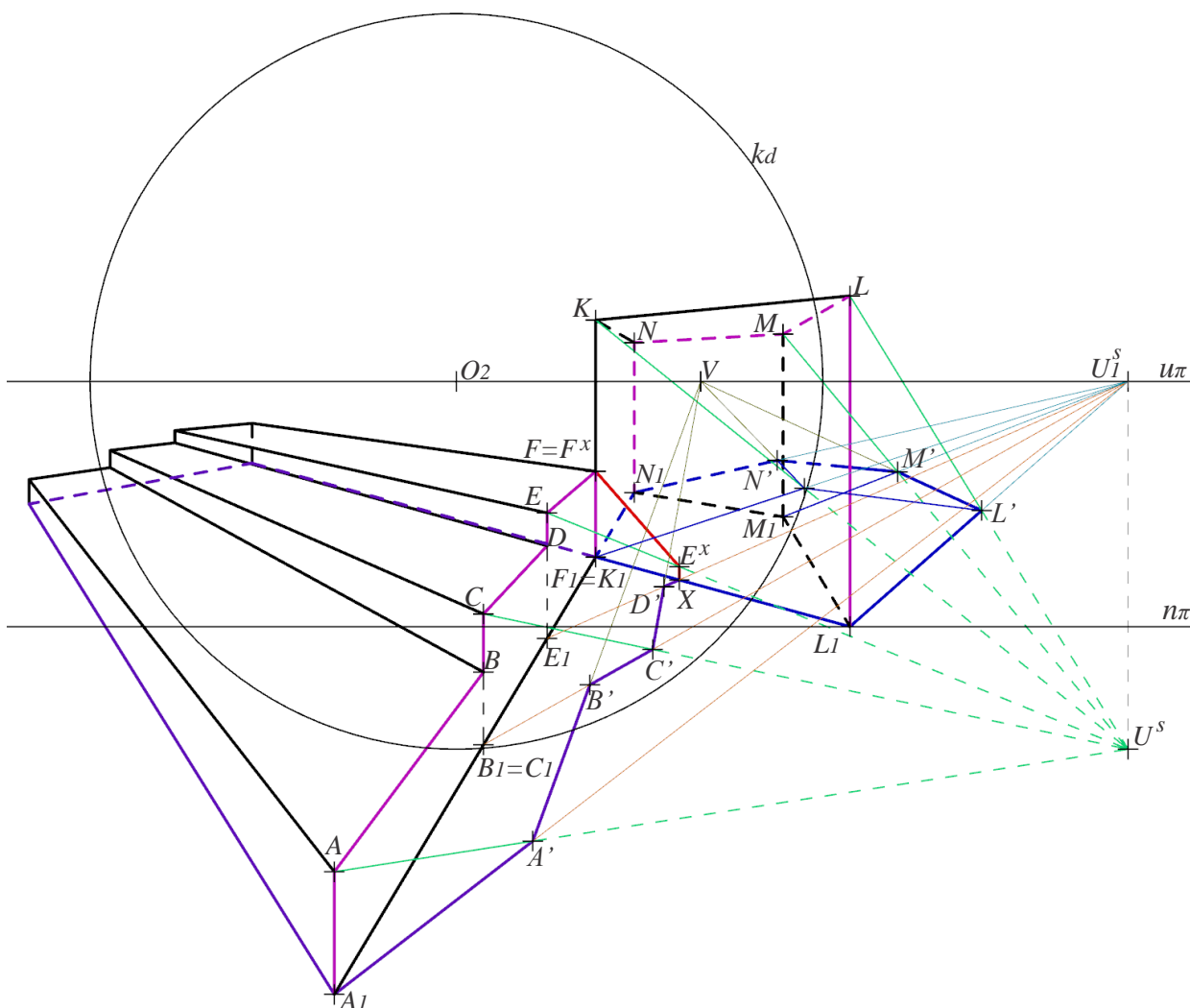
Nechť je dán kvádr $K_1L_1M_1N_1KLMN$ s podstavou v půdorysně π (vzdálenost úběžnice u_π a stopy n_π roviny π je $v = 4$ cm) a schodiště stojící na π , zadání⁶ viz obrázek 5.26.

- a) Osvětlete objekty, tj. nalezněte vlastní stíny, vržené stíny objektů do půdorysny π a vržený stín schodiště na kvádr, je-li dán úběžník světelných paprsků U^s (viz obrázek 5.26).

Řešení: Nejprve najdeme vržený stín kvádru.

- 1) Dolní podstava leží v půdorysně, proto při osvětlení zůstává na místě.

⁶ Zadání ve skutečné velikosti čtenář může nalézt na příloženém DVD.



Obrázek 5.26. Rovnoběžné osvětlení schodiště a kvádru ve středovém promítání.

2) Vržený stín horní podstavy můžeme najít bodově.

Sestrojíme nejprve stín bodu L . Paprsek LU^s protne svůj půdorysný průmět $L_1U_1^s$ v bodě L' , který je vrženým stínem bodu L do roviny π . Podobně sestrojíme vržené stíny ostatních bodů. Kromě toho při konstrukci můžeme užívat úběžníky odpovídajících si hran. Například bod V , který je úběžníkem hran LM, KN (L_1M_1, K_1N_1), je také úběžníkem vržených stínů hran $L'M', K'N'$.

Poznámka 5.10: Ve středovém promítání průmět horní podstavy $KL MN$ kvádrů odpovídá průmětu vrženého stínu horní podstavy $K'L'M'N'$ ve středové kolíneaci (osa je úběžnice, střed je bod U^s). ■

- 3) Mez vrženého stínu kvádrů tvoří lomená čára $K_1L_1L'M'N'N_1K_1$ (modrou barvou na obrázku 5.26).
- 4) Podle věty 1 tedy mez vlastního stínu tvoří čára $K_1L_1LMNN_1K_1$.

Nyní osvětlíme schodiště.

- 5) Osvětlíme bod A do půdorysny obvyklým způsobem (pomocí paprsku), dostaneme bod A' . Stejným způsobem osvětlíme body B , C a D . Opět při konstrukci můžeme užívat úběžníky odpovídajících si hran. Například bod V , který je úběžníkem hran AB a CD , je také úběžníkem hran $A'B'$ a $C'D'$.

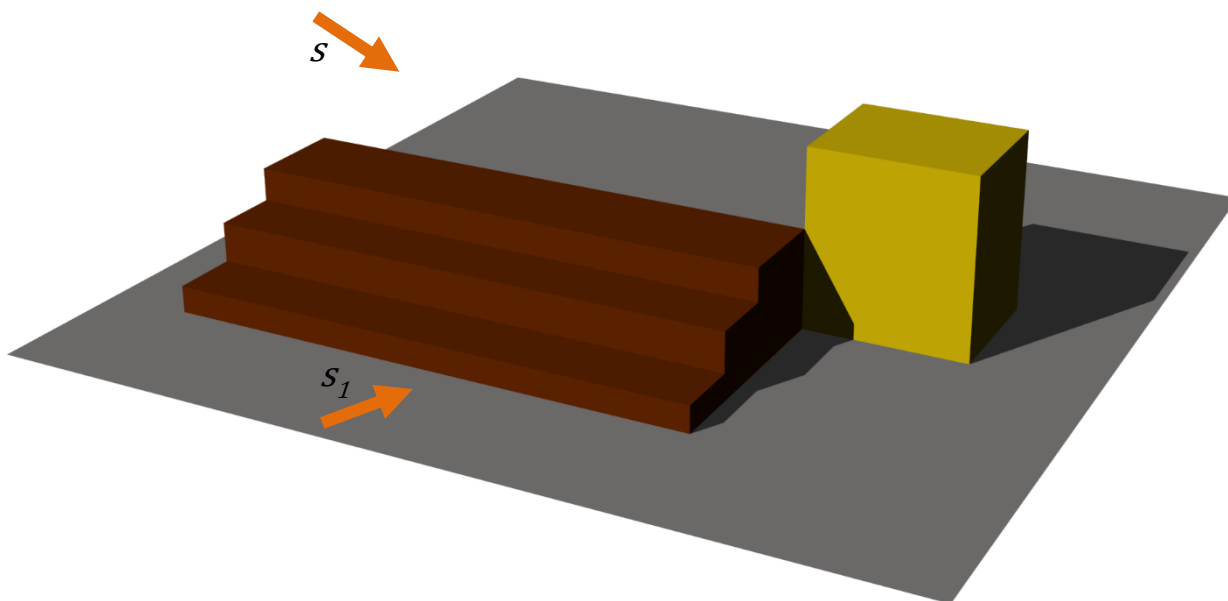
Poznámka 5.11: Všimněme si také, že bod U_1^s je úběžníkem průmětů vržených stínů svislých hran. ■

Vidíme, že vržený stín hrany DE se v bodě X zalomí do přední stěny kvádrů.

- 6) Sestrojíme vržený stín bodu E do roviny L_1LK (přední stěny kvádrů). Bodem E vedeme světelný paprsek EU^s . Paprsek protne rovinu L_1LK v bodě E^x . Všimněme si, že úsečka XE^x je rovnoběžná s hranou DE (plyne z toho, že hrana je rovnoběžná s rovinou, do které osvětlujeme a sestrojena úsečka XE^x je vrženým stínem této hrany na stěnu kvádrů, viz podkapitola 2.1).
- 7) Bod F leží v rovině L_1LK , proto $F=F^x$.

Na obrázku 5.26 mez vrženého stínu schodiště do půdorysny je zobrazená fialově. Část meze vrženého stínu, která dopadá na kvádr - červeně (lomená čára XE^xF^x). Mez vlastního stínu schodiště je zobrazená růžovou barvou.

Tím už máme rovnoběžné osvětlení dvojice daných objektů. Na obrázku 5.27 se můžeme podívat na ilustraci situace v prostoru, daná situace je zde namodelovaná na počítači a zobrazená v perspektivě.



Obrázek 5.27. Rovnoběžné osvětlení schodiště a kvádrů, modelování na počítači.

- b) Osvětlete objekty z bodu S (viz obrázek 5.28), tj. nalezněte vlastní stíny, vržené stíny objektů do půdorysny π (u schodiště uvažujte pouze část stínu do půdorysny, která se nachází napravo od schodiště⁷) a vržený stín schodiště na kvádr.

Řešení: Nejprve najdeme vržený stín kvádrů.

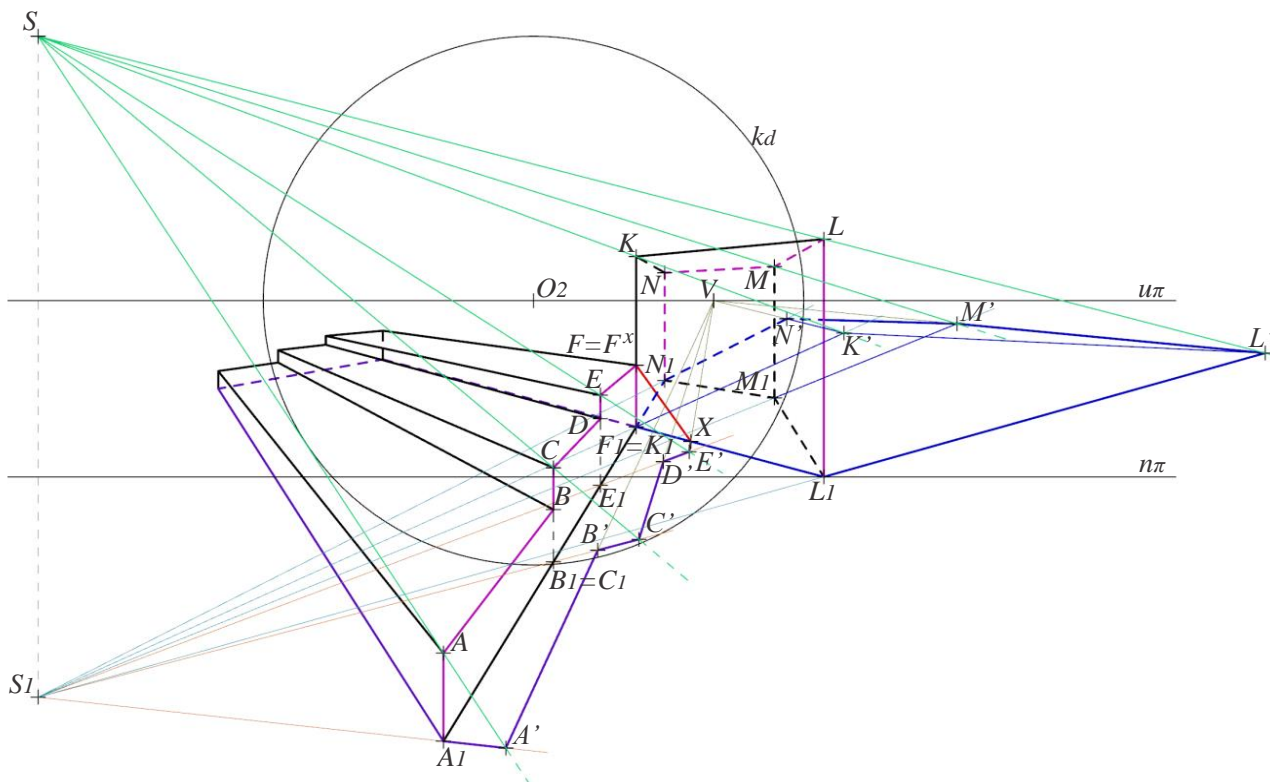
- 1) Dolní podstava leží v půdorysně, proto při osvětlení zůstává na místě.
- 2) Vržený stín horní podstavy můžeme najít bodově.

Sestrojíme nejprve stín bodu L . Paprsek LS protne svůj půdorysný průmět L_1S_1 v bodě L' , který je vrženým stínem bodu L do roviny π . Podobně sestrojíme vržené stíny ostatních bodů. Kromě toho při konstrukci můžeme užívat úběžníky odpovídajících si hran. Například bod V , který je úběžníkem hran LM , KN (L_1M_1 , K_1N_1), je také úběžníkem hran $L'M'$, $K'N'$.

Poznámka 5.12: Ve středovém promítání průmět horní podstavy $KLMN$ kvádrů odpovídá průmětu vrženého stínu horní podstavy $K'L'M'N'$ ve středové kolíneaci (osa je úběžnice, střed je bod S). Plyne to z toho, že výsledný vržený stín $K'L'M'N'$ a horní podstava hranolu $KLMN$ si

⁷ Čili která se nachází na stejné straně od schodiště, jako kvádr.

odpovídají ve stejnolehlosti v prostoru (mezi rovinou horní podstavy a půdorysnou) se středem v bodě S (viz poznámka 3.2). ■



Obrázek 5.28. Středové osvětlení schodiště a kvádru ve středovém promítání.

- 3) Mez vrženého stínu kvádru tvoří lomená čára $K_1L_1L'M'N_1K_1$ (modrou barvou na obrázku 5.28).
- 4) Podle věty 1 tedy mez vlastního stínu tvoří čára $K_1L_1LMNN_1K_1$.

Nyní osvětlíme schodiště.

- 5) Osvětlíme body A, B, C, D a E do půdorysny obvyklým způsobem (pomocí paprsků). Opět při konstrukci můžeme užívat úběžníky odpovídajících si hran. Například bod V , který je úběžníkem hran AB a CD , je také úběžníkem hran $A'B'$ a $C'D'$.

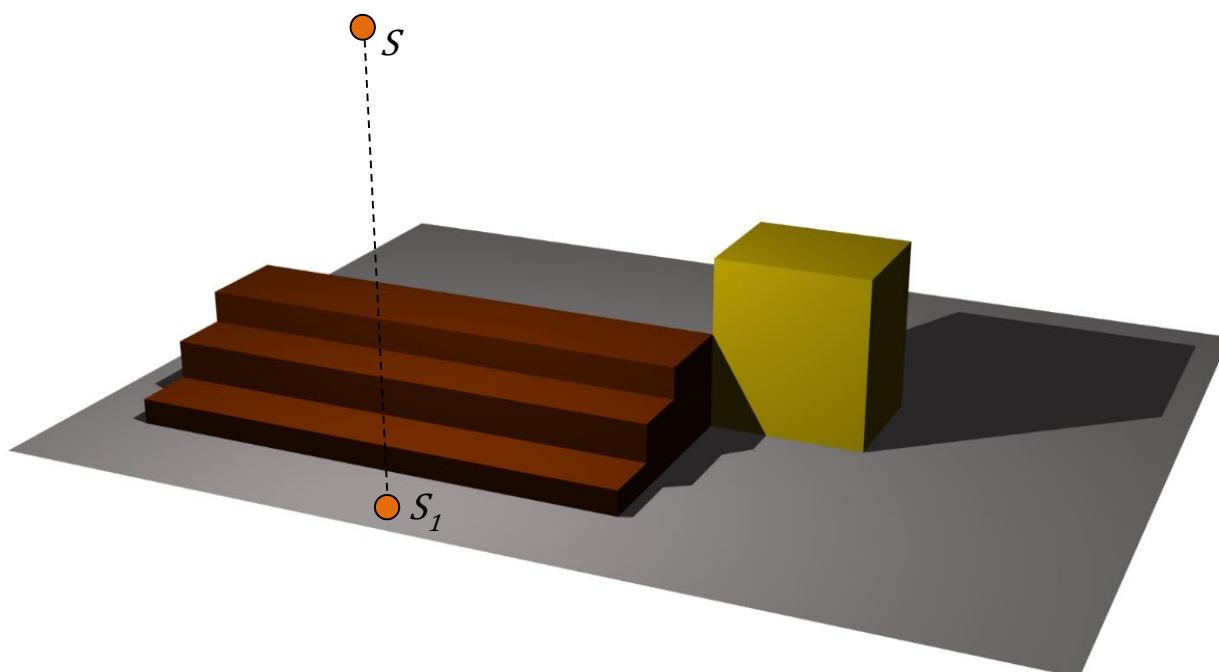
Poznámka 5.13: Všimněme si také, že bod S_1 je úběžníkem průmětů vržených stínů svislých hran. ■

Vidíme, že vržený stín hrany EF se v bodě X zalomí do přední stěny kvádru.

6) Bod F leží v rovině L_1LK , proto $F=F^x$. Úsečka EF^x je součástí výsledné meze vrženého stínu.

Na obrázku 5.28 mez vrženého stínu schodiště do půdorysny je zobrazená fialově. Část meze vrženého stínu, která dopadá na kvádr - červeně (úsečka XF^x). Mez vlastního stínu schodiště je zobrazená růžovou barvou.

Tím už máme rovnoběžné osvětlení dvojice daných objektů. Na obrázku 5.29 se můžeme podívat na ilustraci situace v prostoru, daná situace je zde namodelovaná na počítači a zobrazená v perspektivě.



Obrázek 5.29. Středové osvětlení schodiště a kvádrů, modelování na počítači.

Poznámka 5.14: Na obrázku 5.29 si můžeme všimnout, že část vrženého stínu je také zleva od schodiště. Tuto část vrženého stínu jsme ale nesestrojovali, protože by byla v průmětu celá zakrývá schodištěm. Jinak by se sestrojila stejným způsobem jako vržený stín zprava. ■

6 Použití počítačů k sestrojování stínu

V dnešní době díky počítačům máme více možností. Rychle se rozvíjí počítačová grafika a spolu s tím roste počet softwarů vhodných pro nejrůznější účely. Také existuje množství programů, které se dají používat v deskriptivní geometrii. Softwary jsou velice užitečné proto, že pomocí nich lze celou prostorovou situaci naprogramovat a spolu s tím lépe pochopit a představit si, jak osvětlení funguje.

Při osvětlení můžeme používat matematické softwary, například MATLAB nebo Maple, kde se pracuje pomocí programovacího jazyka. V MATLABu se všechny objekty zadávají pomocí matic. Příklad toho, jak lze MATLAB použít pro osvětlování lze najít ve stejnojmenné bakalářské práci (Y.Tolkunova, 2013). Programovací jazyk Maplu připomíná Pascal, naprogramovat v něm nějaké těleso a ještě i osvětlení není jednoduchý úkol, ale dají se řešit nějaké analytické záležitosti.

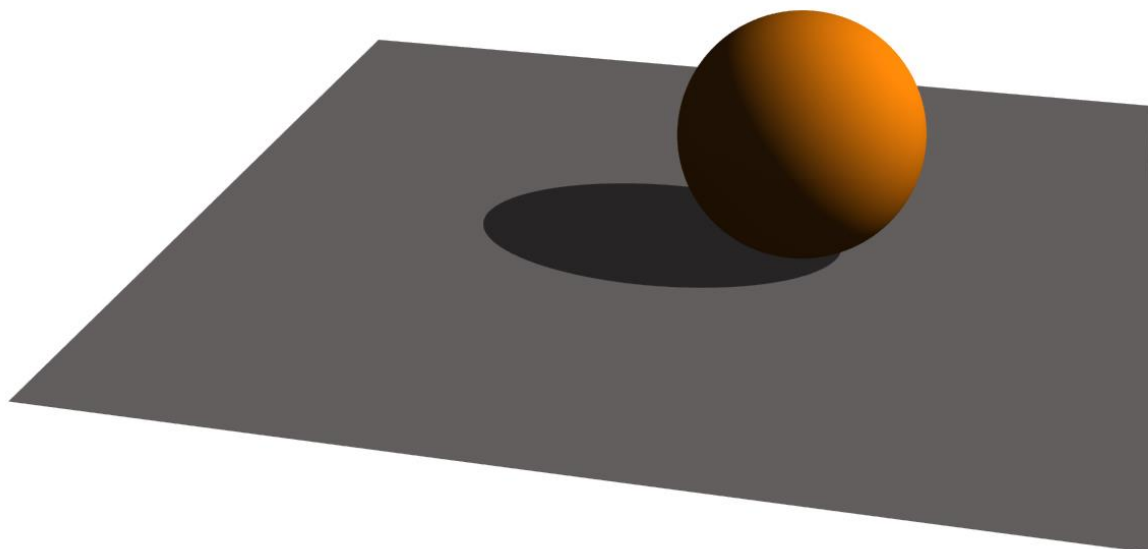
MATLAB a Maple se více hodí pro analyticky zadané úlohy, v úlohách na sestrojení osvětlení ale často nemáme analytické vyjádření těles, které potřebujeme osvětlit, k tomu potřebujeme modelovací softwary, například Auto CAD nebo (více intuitivní software) GeoGebra (pomocí GeoGebry jsou, například, vytvořeny obrázky v podkapitole 2.1).

Dalším dobrým modelovacím programem pro sestrojení osvětlení je Rhinoceros¹, ve kterém lze intuitivně modelovat tělesa, bez doplňkových znalostí matematických rovnic nebo jiných matematických struktur. V této práci se hlavně zaměříme na tento software a jeho použití pro sestrojování stínů.

Software Rhinoceros může nahradit rýsování na papíře, pokud v softwaru pracujeme pouze s rovinnými objekty. Tímto způsobem byly vytvořeny obrázky s uvedeným řešením v kapitole 5 (také většina obrázků v předchozích kapitolách). Kromě toho v softwaru Rhinoceros se dá namodelovat prostorová situace. Pro účely naší práce je však velmi užitečné to, že je v tomto programu možné modelovat také osvětlení. Lze zde zadávat parametry osvětlení, přímo umístit zdroj světla nebo zadat směr a pak program sám spočítá, jak bude vypadat výsledný stín. Například se podíváme na obrázek 6.1, kde můžeme vidět rovnoběžné osvětlení koule spočítané softwarem. Jak bylo uvedeno v poznámce 1.5, v deskriptivní geometrii se nezabýváme mírou svítivosti a jinými složitějšími parametry osvětlení. Modelovací software ale může spočítat

¹ Často se používá zkratka Rhino. Rhino se široce používá v průmyslovém designu, architektuře, CAD/CAM konstrukcích, automobilovém a šperkovém designu.

některé náročnější úlohy, které neumíme řešit, nebo jsou pro ruční rýsování příliš komplikované. Můžeme si všimnout například, že na obrázku 6.1 (i na všech dalších obrázcích) je také tzv. polostín mezi vlastním stínem a osvětlenou částí.



Obrázek 6.1. Rhinoceros, rovnoběžné osvětlení koule do roviny.

²Pro naše účely jsou nejdůležitější příkazy „Directional light“ a „Point light“ (ikona Lights, rozmístění³ viz obrázek 6.2), které odpovídají rovnoběžnému a středovému geometrickému osvětlení, kterým se zabýváme v této práci. Právě tyto dva příkazy byly použity k vytvoření všech výsledných názorných obrázků v kapitole 5.

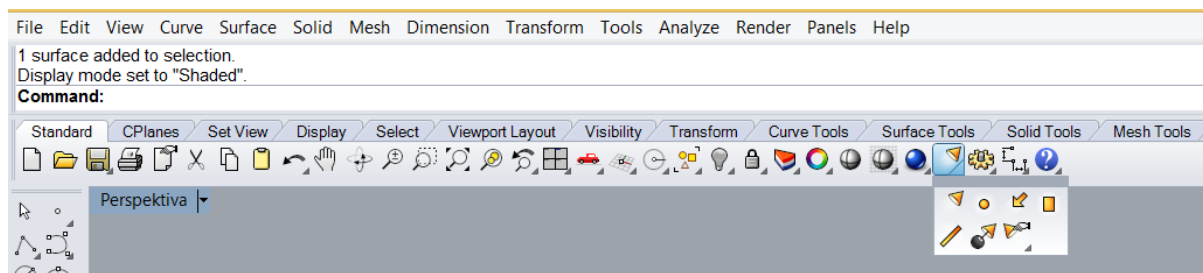
Poznámka 6.1: Vidíme také (viz obrázek 6.2), že ikona Lights obsahuje i další typy osvětlení Spotlight (kuželové světlo), Rectangular light (obdélníkové světlo), a Linear light (lineární světlo), kterými už se ale nezabýváme v geometrickém osvětlení⁴. ■

Jak už bylo naznačeno dříve, v Rhinoceros lze vytvořit model, který odpovídá souřadnicím v příkladu. Tímto modelem pak můžeme zahýbat, podívat se na situaci z různých stran, čímž si lépe představíme, jak celá situace vypadá. Potom lze nechat software spočítat stín a porovnat ho se stínem, který jsme dostali rýsováním a zkontrolovat tak správnost svého řešení.

² Budeme dále popisovat prostředí a příkazy dostupné v nejnovější verzi Rhinoceros 5 (v předchozích verzích software mohou být některé aspekty v jiné podobě, například některé příkazy mohou zcela chybět).

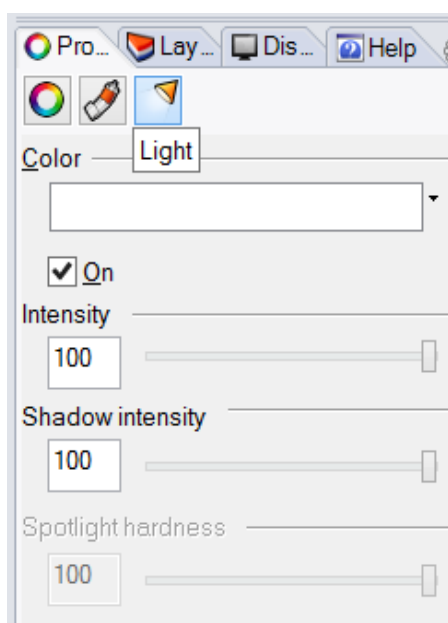
³ Na obrázku je ukázáno standardní rozmístění ikony, jinak panel instrument může vypadat zcela jinak, nastaví-li to tak uživatel.

⁴ Podrobněji o těchto typech světla viz <http://docs.mcneel.com/rhino/5/help/en-us/commands/lights.htm>



Obrázek 6.2. Pracovní prostředí Rhinoceros; Lights.

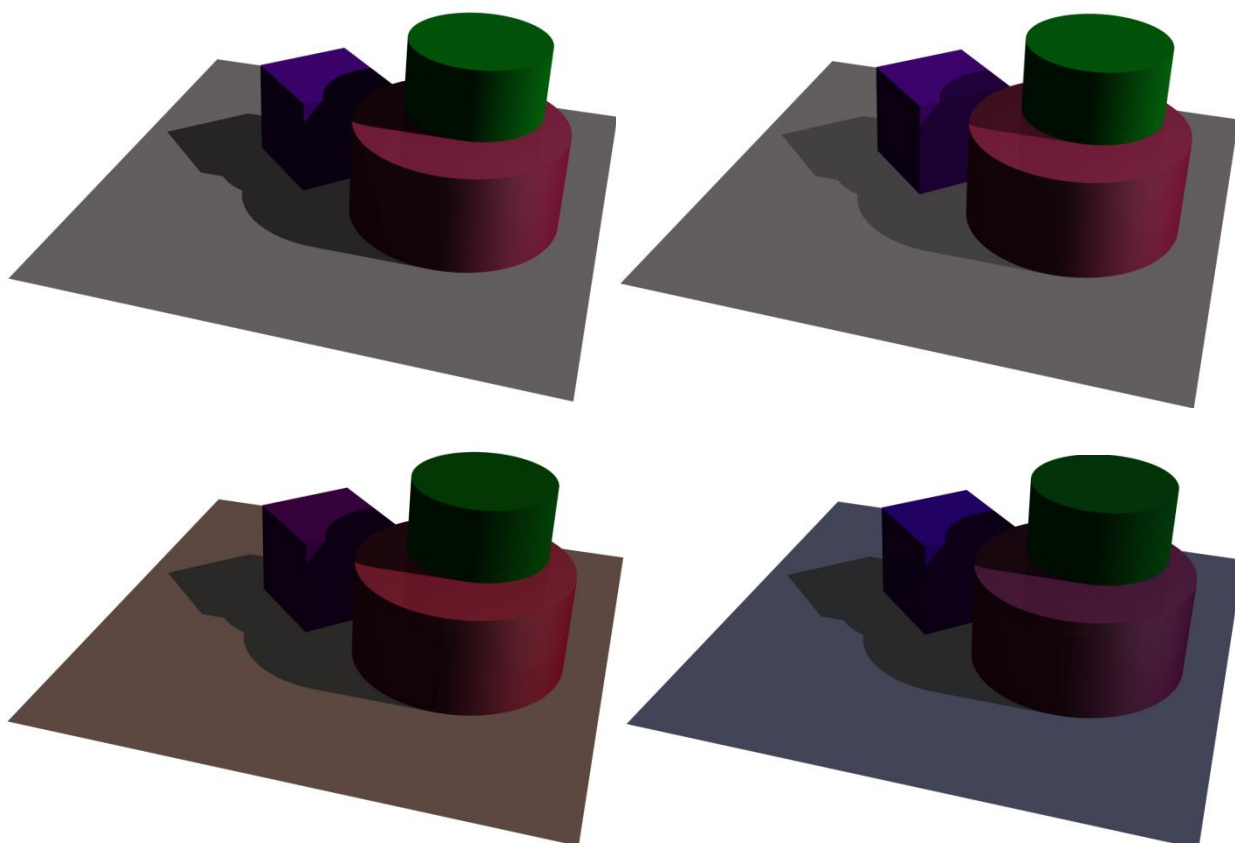
Kromě toho modely lze používat k vymýšlení zadání příkladů. Vytvoření příkladu vždy začíná tím, že navrhne souřadnice a pak zkusíme při daném zadání příklad vyřešit. Nejspíš každý učitel při vymýšlení příkladů občas narazí na problém: při řešení zjišťuje, že konstrukce se nevejde na papír nebo výsledek vypadá nevhodně (nenázorně) a tak dále. Potom musíme navrhnout nové souřadnice a opět zkusit příklad řešit a může se to opakovat několikrát. Proto je mnohem jednodušší si namodelovat v softwaru situaci, se kterou chceme pracovat, v našem případě, kterou chceme osvětlit a nechat software spočítat stín. Jestli nám, z nějakých důvodů, výsledek nevyhovuje, můžeme různě posouvat zdroj osvětlení nebo těleso, což je mnohem jednodušší než si pokaždé celou situaci znovu rýsovat. Nakonec vyzkoušením různých poloh, dospějeme k nejvhodnějšímu umístění těles a zdrojů světla. Potom zbývá jenom převzít souřadnice z modelu. Právě tímto způsobem jsem vymýšlela příklady uvedené v kapitole 5.



Obrázek 6.3. Pracovní prostředí Rhinoceros; Vlastnosti světla.

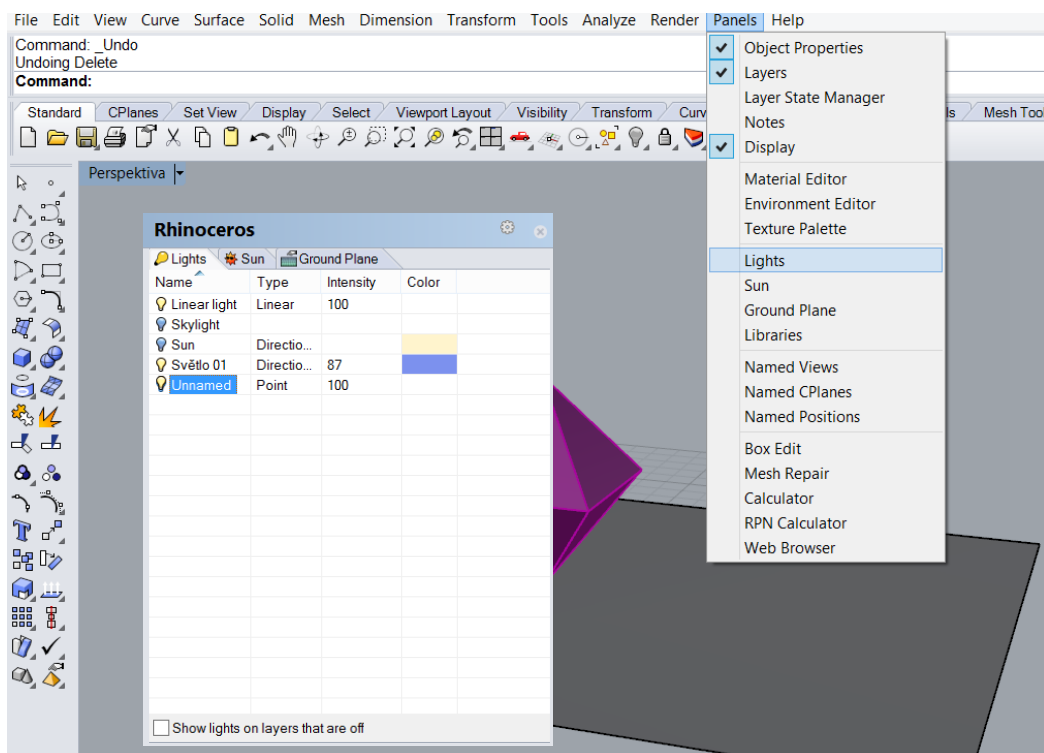
Nadto, v softwaru Rhinoceros jsou různé funkce, pomocí kterých můžeme dosáhnout výsledků, ke kterým se při ručním rýsování nedostaneme. Například lze v Rhino upravit vlastnosti světla (Properties-Light viz obrázek 6.3). Můžeme zde měnit barvu, intenzitu světla a intenzitu stínu.

Na obrázku 6.4 můžeme vidět příklad toho, jakým způsobem mohou vlastnosti ovlivnit výsledný obrázek. Na horním obrázku zprava je na 50 procent snižená intenzita stínu. Na dvou obrázcích zdola je změněná barva světla na oranžovou a na modrou.

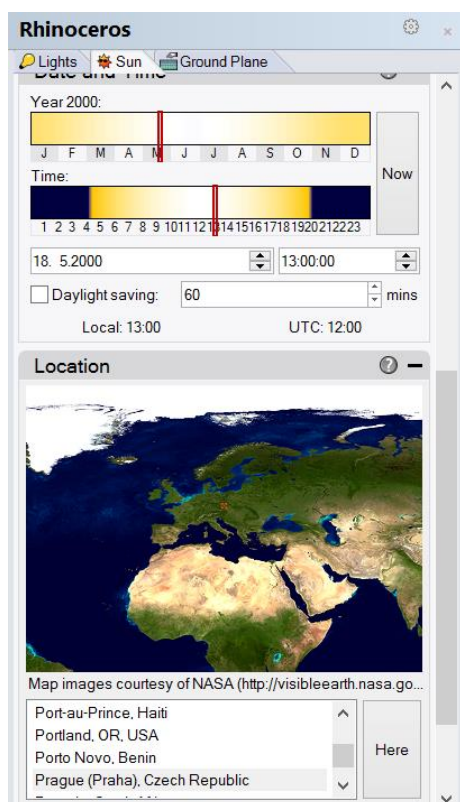


Obrázek 6.4. Různé vlastnosti světla, porovnání.

Dále v Rhino dokážeme vytvořit několik zdrojů světla. Můžeme pak otevřít okno, kde je seznam všech zdrojů osvětlení, které nyní působí na objekt, kliknutím na políčko Panels-Lights (viz obrázek 6.5). Zde najdeme vlastnosti všech zdrojů světla a mimo jiné můžeme libovolný zdroj vypnout/zapnout (což při ručním rýsování nedokážeme).



Obrázek 6.5. Pracovní prostředí Rhinoceros; okno Lights.

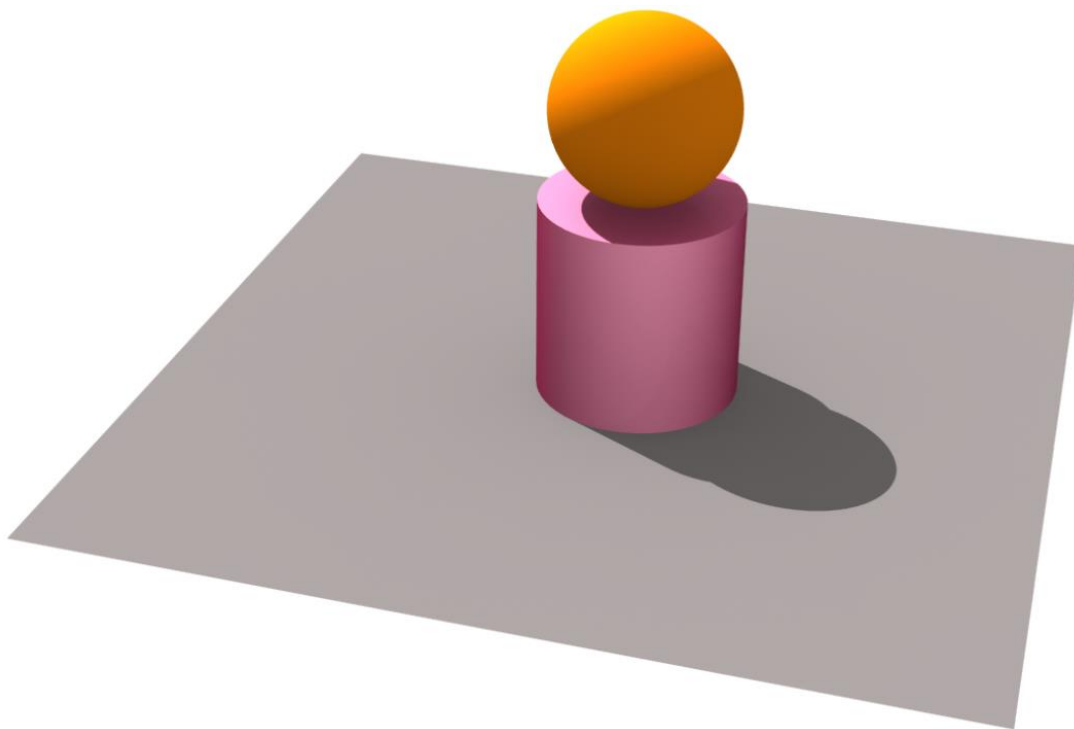


Obrázek 6.6. Pracovní prostředí Rhinoceros; okno Lights, Sun.

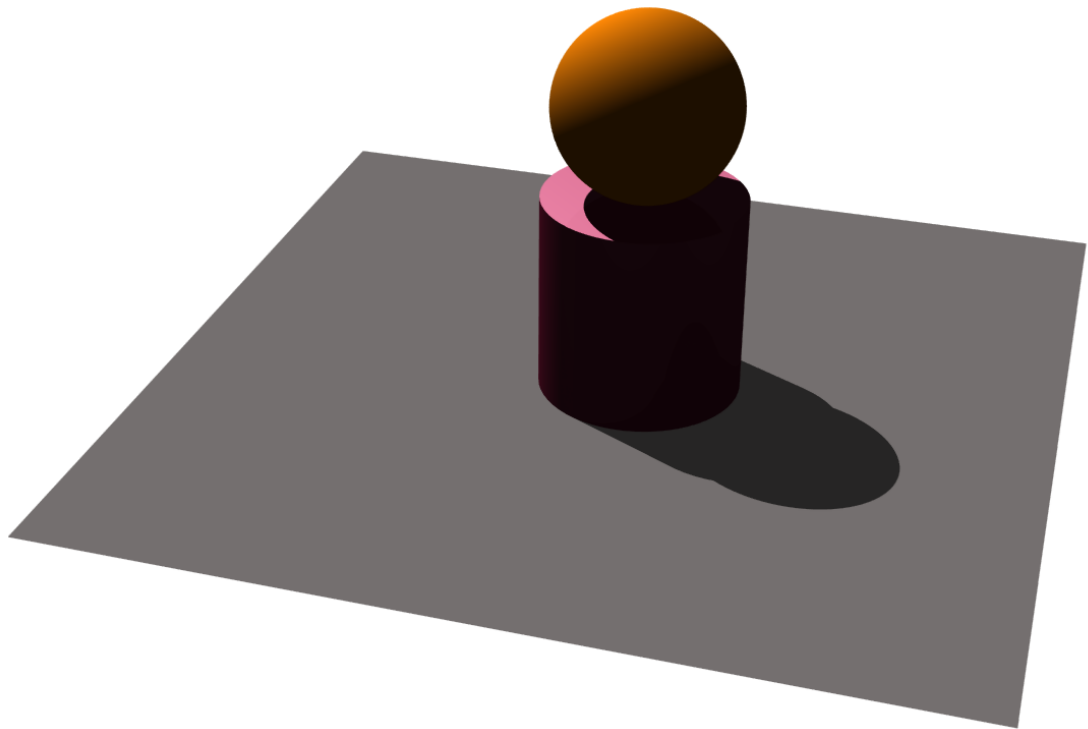
Kromě toho v tomto okně můžeme najít další zajímavou a neobvyklou funkci v Rhino. Vybereme-li políčko Sun, otevře se nám panel (viz obrázek 6.6), ve kterém můžeme vytvořit intenzivní (rovnoběžné) osvětlení, které bude odpovídat slunečnímu světlu v nastavených podmínkách. Takové osvětlení je určeno nastavením polohy Slunce, datem a časem, umístěním objektu (země a město).

Polohu slunce můžeme zadat ručně, pomocí azimutu (úhel od severního popř. jižního pólu) a výšky nad obzorem (úhel od rovníku). Nebo více intuitivně, pomocí data, času a města (z těchto údajů software sám spočítá potřebné úhly polohy). Například na obrázku 6.7 můžeme vidět osvětlení, které odpovídá světlu 18. května roku 2000 v Praze.

Poznámka 6.2: Navíc zde lze vybrat „Skylight on“, což přidá osvětlení na scénu ze všech stran. Pro porovnání podíváme se na obrázky 6.7 a 6.8, na prvním je funkce Skylight zapnuta, na druhém je vypnuta. ■



Obrázek 6.7. Rhinoceros, osvětlení rotačního kužele a koule („Skylight on“).



Obrázek 6.8. Rhinoceros, osvětlení rotačního kužele a koule („Skylight off“).

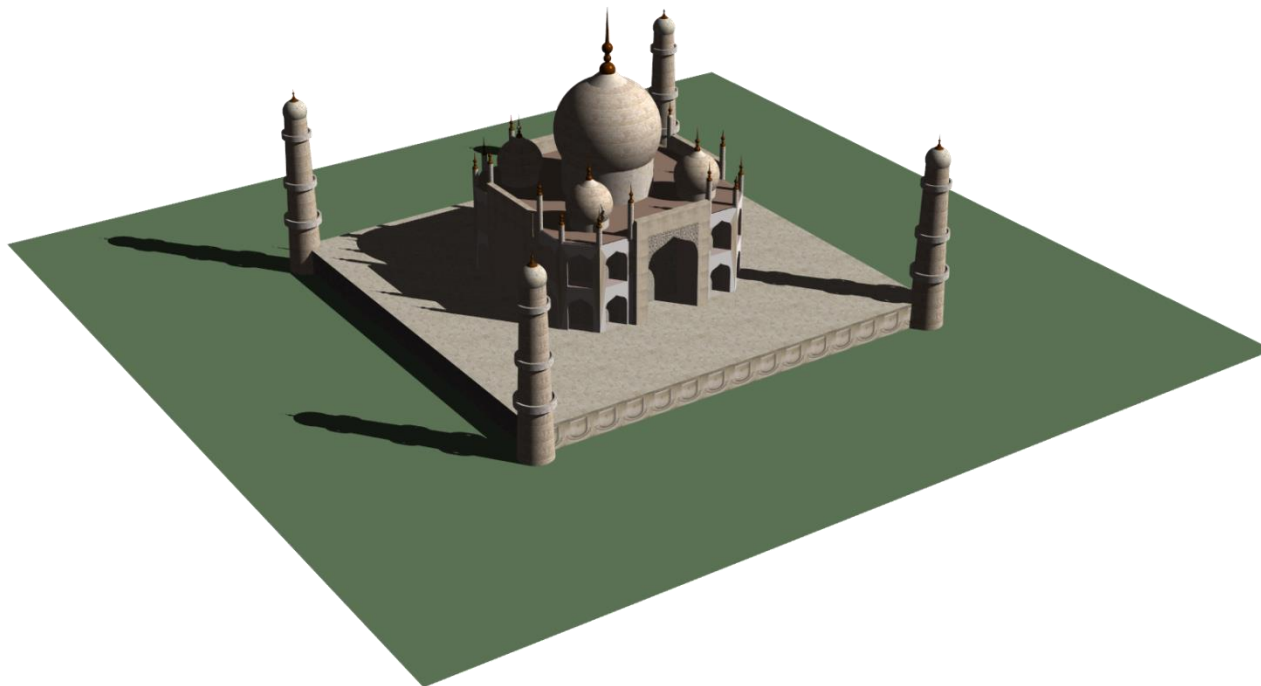
Software Rhinoceros lze také používat k modelování složitějších situací, například kdy budeme mít velké množství nějakých složitějších těles v obecné poloze. Sestrojování stínu bodově by bylo složitou úlohou pro ruční práci. (Jako ukázka může posloužit následující obrázek 6.9).

Chtěla bych, aby si čtenář uvědomil všechny možnosti postupů uvedených v předchozí kapitole a aby věděl, že znalost teorie osvětlení jednoduchých těles je základem pro osvětlování pokročilejších (složitějších) objektů. Jako ukázka poslouží následující namodelovaná situace.

Na obrázcích 6.9 a 6.10 můžeme vidět namodelované mauzoleum, které je součástí komplexu Tádž Mahal⁵, známého pomníku, který se stal symbolem Indie. Mauzoleum je z geometrického hlediska velmi zajímavou a překrásnou budovou: zaprvé je zcela symetrické a pravidelné, zadruhé je ozdobeno květinovými dekoracemi, které se s geometrickou přesností opakují po tisíce krát⁶, zatřetí poměry různých částí odpovídají významnému zlatému řezu. V této práci se zaměříme na osvětlení mauzolea.

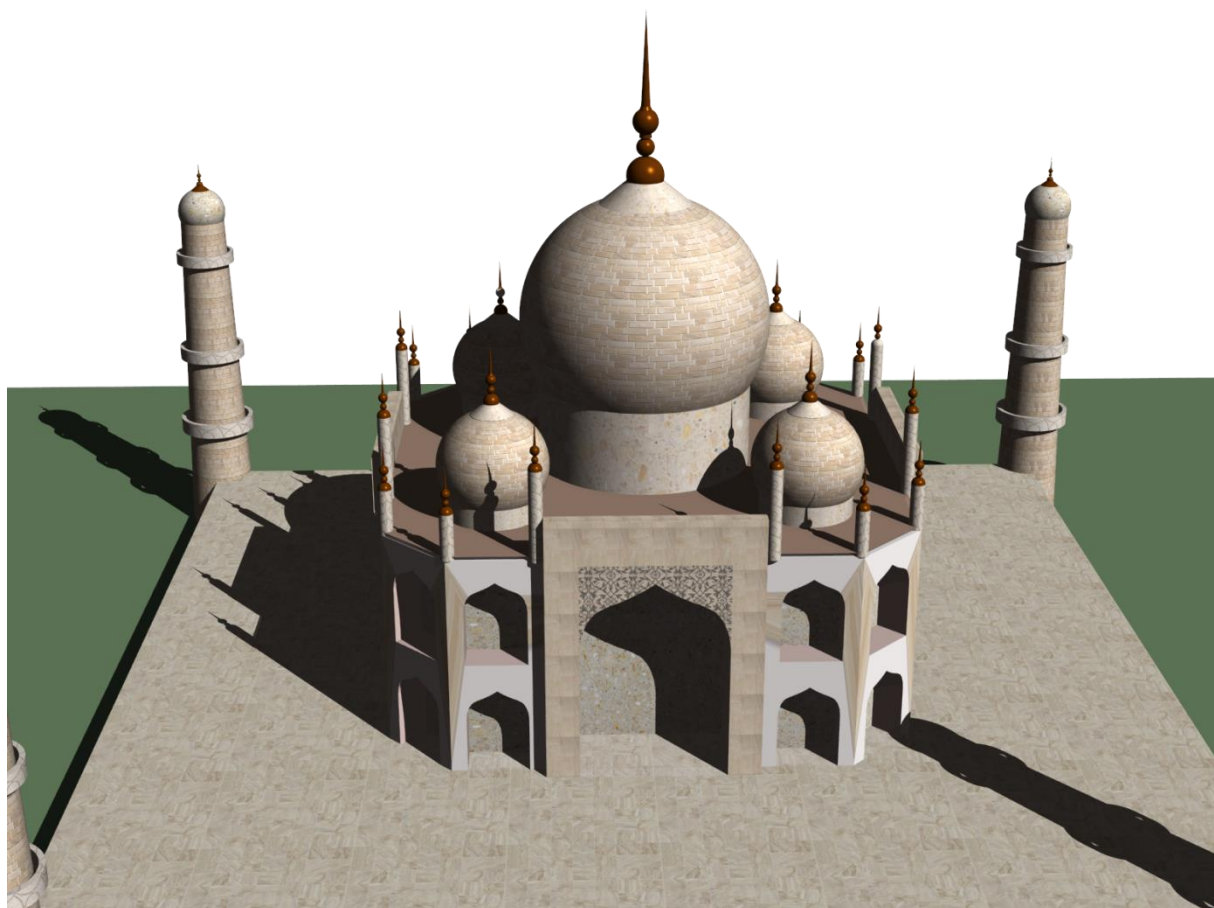
⁵ Tádž Mahal je součástí seznamu světového dědictví UNESCO a je často řazen k sedmi divům světa (cs.wikipedia.org).

⁶ cs.wikipedia.org



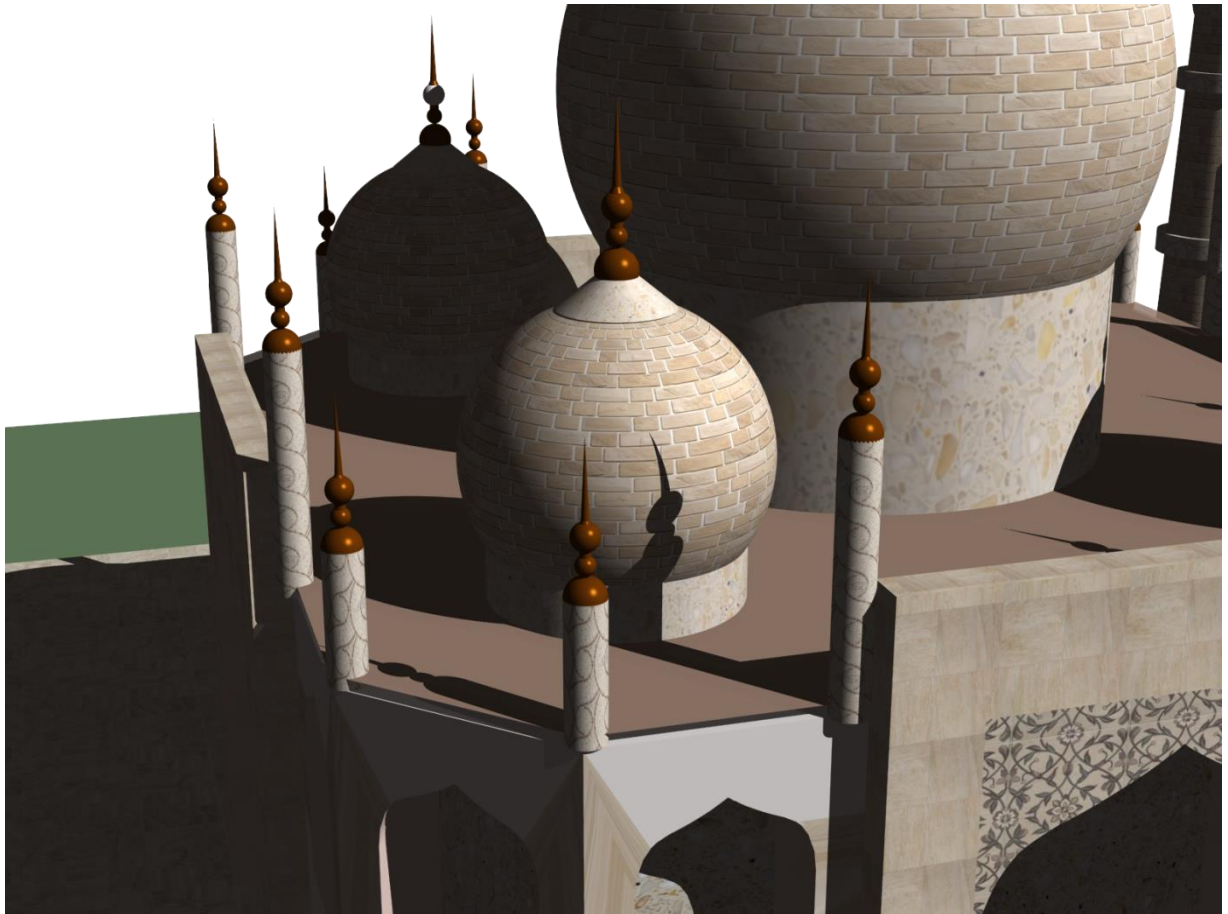
Obrázek 6.9. Rovnoběžné osvětlení, Tádž Mahal.

Vymodelovala jsem mauzoleum Tádž Mahal s určitým zjednodušením. Při modelování jsem používala jednoduchá (významná) tělesa, která jsme se naučili osvětlovat v předchozích kapitolách. I s ohledem na zjednodušení, namodelovaná situace obsahuje velké množství různých částí, a kdybychom chtěli mauzoleum v této podobě osvětlit ručně, tak by to bylo příliš obtížnou úlohou. Software ale i tak komplikovaný stín spočítá za chvíli (samozřejmě se utratí dost času na modelování tak složitěho objektu, ale i v případě, že bychom chtěli osvětlovat mauzoleum ručně, tak bychom ho museli nejprve narýsovat, což by také dalo velkou práci).



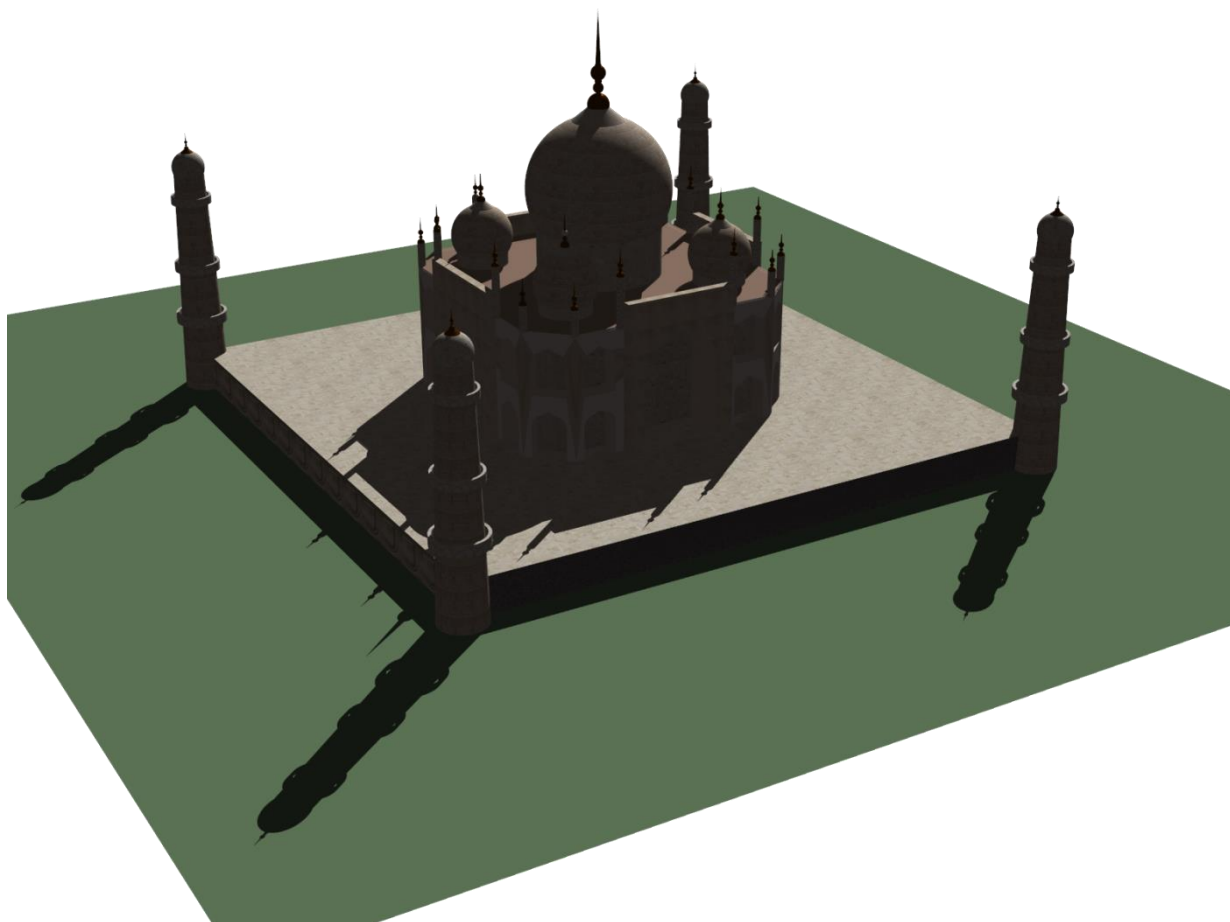
Obrázek 6.10. Rovnoběžné osvětlení, Tádž Mahal.

Podíváme se na některé zajímavé části zblízka. Na obrázku 6.11 je dobře vidět jak vržený stín špičky dopadá na kupoli. Zalomí se dvakrát, nejprve stín dopadá na střechu, což je rovina, potom na válec a nakonec na kupoli, což je část koule. Sestrojování stínu na takové plochy jako válec a koule, je velice složitou úlohou na ruční rýsování. Také si na obrázku 6.11 můžeme všimnout, že vzdálenější malá kupole je celá ve stínu, který je vržen velkou kupolí uprostřed. Vlastní stíny kupolí jsou také dobře vidět.



Obrázek 6.11. Rovnoběžné osvětlení kupole, Tádž Mahal.

Na obrázku 6.12 můžeme vidět stále stejnou situaci, ale z jiného pohledu, vidíme mauzoleum zezadu. Zde si všimněme, jak vypadají vržené stíny objektů na střeše. Stín nejprve dopadá na pódium, potom se zalomí a pokračuje na “zemi“.



Obrázek 6.12. Rovnoběžné osvětlení, Tádž Mahal.

Na příkladu Tádž Mahalu jsme si ukázali aplikaci geometrického osvětlení. Můžeme si nyní představit, co všechno jsme schopni osvětlit a jak ohromující a zajímavé stíny různých objektů mohou být. Pokud využijeme ke konstrukcím stínů moderní počítačový modelovací software, nemáme v podstatě žádné limity.

Závěr

V diplomové práci jsme se seznámili se základními pojmy a vlastnostmi geometrického osvětlení. Dozvěděli jsme se o tom, co je stín do dutiny, vržený a vlastní stín a čím se liší od meze stínu. Poznali jsme různé druhy osvětlení konkrétně středové, rovnoběžné osvětlení a speciální případ rovnoběžného osvětlení tzv. technické osvětlení. Ve druhé a třetí kapitole jsme podrobně probrali principy a postupy pro sestavení stínů významných těles, takových jako jsou válec, kužel, koule a hranatých těles. Přičemž jsme se seznámili s postupy k nalezení stínu jak při středovém, tak i při rovnoběžném osvětlení.

V praktické části jsme ukázali použití uvedených metod na konkrétních příkladech v různých promítáních. Podívali jsme se jak na osvětlení jednotlivých těles, tak i na osvětlení skupin těles. U všech příkladů jsou zadání uvedena tak, aby si je čtenář mohl nakreslit a zkusit úlohy vyřešit samostatně. Namodelované situace na konci každého příkladu nám pomohli lépe si představit, jak stíny vypadají. V poslední kapitole jsme se seznámili se softwarem Rhinoceros a možnostmi jeho použití k sestavování stínů.

Součástí práce je také přiložené DVD, na kterém se nacházejí zdrojové soubory všech modelů vytvořených v Rhinoceros. Tyto soubory mohou posloužit jako studijní materiál. Kromě toho DVD obsahuje pracovní listy pro tisk se zadáním příkladů z praktické části. Mohou tak studenti samostatně procvičovat látku. Učitelé tyto listy mohou použít přímo ve výuce.

Téma geometrie stínu není zdaleka vyčerpáno. Lze se dále například podrobně zabývat technickým osvětlením. Téma má velký potenciál pro další rozšíření materiálu.

Práce *Geometrie stínu* by mohla posloužit všem zájemcům, kteří se chtějí blíže seznámit s geometrií stínů.

Seznam použité literatury

- [1] ČERNÝ J., KOČANDRLOVÁ M. *Konstruktivní geometrie*. Praha: vyd. ČVUT, 1998.
- [2] POTTMANN, H. *Architectural geometry*. 1st ed. Exton: Bentley Institute Press, 2007. ISBN 978-1-934493-04-5.
- [3] DOLEŽAL, J. *Základy geometrie*. [online] - Dostupné z: <http://mdg.vsb.cz/jdolezal/StudOpory/Uvod.html>.
- [4] DRÁBEK, K.; HARANT, F.; SETZER, O. *Deskriptivní geometrie II*. Bratislava: SNTL, 1979.
- [5] POMYKALOVÁ, E. *Deskriptivní geometrie pro střední školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2010. ISBN 978-80-7196-400-1.
- [6] KOROTKIJ, V.A. *Těni, axonometrija, perspektiva*. Čeljabinsk, 2010.
- [7] LECIUS, E.P. *Postrojenije tenej i perspektivy rjada architekturnych form*. Moskva: Architektura-C, 2005. ISBN 5-9647-0061-6.
- [8] GRIGORJEVA, O. *Geometričeskije osnovy teorii tenej*. 2. vyd. Iževsk, 2008.
- [9] PEREVOZKIN, J., KRAMAROVSKAJA V. a ROMANOVA A.. *Načertatel'naja geometrija: učebno-metodičeskoe posobie*. Tjumeň, 2011.
- [10] URBAN, A. *Deskriptivní geometrie I*. 2. revid. vyd. Praha: SNTL, 1977.
- [11] TOLKUNOVA, Y. *Geometrie stínu*. Bakalářská práce, 2013.
- [12] MCNEEL R. *Rhinoceros 5 manual*. [online] - Dostupné z: <http://docs.mcneel.com/rhino/5/help/en-us/commands/lights.htm>.
- [13] PISKA R., MEDEK V. *Deskriptivní geometrie I*. Praha: SNTL, 1967.
- [14] BARTOŠOVÁ B., *Řešené úlohy v axonometrii*. Bakalářská práce, 2010.
- [15] POMYKALOVÁ, E. *Matematika pro gymnázia: stereometrie*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1995. ISBN 80-7196-004-7.
- [16] POMYKALOVÁ, E. *Matematika pro gymnázia: planimetrie*. 1.vyd. Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 1993. ISBN 80-7015-468-3.
- [17] TOLKUNOVA, Y. *Počítačové modelování geometrického osvětlení*. Seminární práce, 2015.