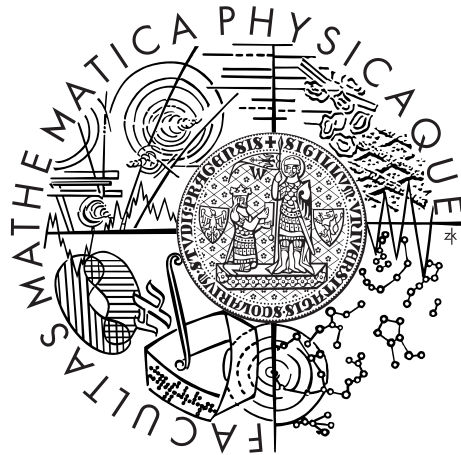


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Bc. Alžběta Kadlecová

Gravitační vlny v kosmologii

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Otakar Svítek, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Teoretická fyzika

Praha 2015

Děkuji RNDr. Otakaru Svítkovi, Ph.D., za trpělivost, vstřícný přístup a odborné vedení mé diplomové práce.

Velký dík patří také mým rodičům, kteří umožnili má studia a byli mi nedocenitelnou oporou nejen při psaní této práce.

Nakonec bych ráda poděkovala Mgr. Filipu Hejdovi za cenné připomínky k práci s LaTeXem, a všem, kteří pro mě vždy měli vlídné slovo.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Gravitační vlny v kosmologii

Autor: Bc. Alžběta Kadlecová

Ústav: Ústav teoretické fyziky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Otakar Svítek, Ph.D., Ústav teoretické fyziky

Abstrakt: V této práci se zaměřujeme na ovlivnění pozadové metriky přidáním vysokofrekvenční gravitační vlny v konkrétních kosmologických modelech. Používáme Isaacsonův formalismus, doplněný o WKB aproximaci, ve kterém je změna pozadové metriky dána pouze efektivním tenzorem energie a hybnosti gravitační vlny. Nejprve uvažujeme nehomogenní Charachův-Malinův kosmologický model, který obsahuje jak gravitační vlnění, tak nehmotné skalární pole s minimální vazbou na gravitaci. Ukazujeme, že i když je model prostorově kompaktní, lze přidat vysokofrekvenční perturbaci a konzistentně vyřešit Einsteinovy rovnice s efektivním tenzorem energie a hybnosti vlny. Ovlivnění pozadí je stejného řádu jako vliv skalárního pole. Dále se zabýváme přidáním více nekoherentních vysokofrekvenčních vln do homogenního Kasnerova modelu. Počítáme ovlivnění pozadí a diskutujeme souvislosti mezi touto situací a limitou velkých časů Gowdyho (vakuového Charachova-Malinova) modelu.

Klíčová slova: Gravitační vlny, kosmologické modely, perturbace, vysokofrekvenční aproximace.

Title: Gravitational waves in cosmology.

Author: Bc. Alžběta Kadlecová

Department: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: RNDr. Otakar Svítek, Ph.D., Institute of Theoretical Physics

Abstract: In this work, we study the backreaction of high-frequency gravitational waves on cosmological backgrounds. To describe the wave, we use the Isaacson formalism, specifically the WKB approximation, which allows us to express the backreaction through an effective stress-energy tensor of the gravitational wave. First, we consider the inhomogeneous cosmological model of Charach and Malin, which contains gravitational waves and a massless scalar field minimally coupled to gravity. We show that although this is a spatially compactified solution, it is possible to add a high-frequency perturbation and solve Einstein's equations with the effective stress-energy tensor in a consistent way. The backreaction is of the same order as the influence of the scalar field. Second, we add multiple incoherent high-frequency waves to the homogenous Kasner background, and discuss the relation to the late-time limit of the Gowdy (vacuum Charach and Malin) model.

Keywords: Gravitational waves, cosmological models, perturbation, high-frequency approximation.

Obsah

Úvod	3
Konvence, značení	6
1 Aproximativní přístupy ke gravitačním vlnám	7
1.1 Linearizovaná teorie	7
1.1.1 Kalibrační transformace souřadnic a zjednodušení gravitač- čního zákona	8
1.1.2 Rovinné gravitační vlny v linearizované teorii	8
1.2 Isaacsonova vysokofrekvenční aproximace	11
1.2.1 Kalibrační invariance a rovnice šíření vlny	12
1.2.2 Efektivní tenzor energie a hybnosti	14
1.2.3 WKB aproximace a šíření vlny	14
1.2.4 Prostorovočasové středování a tenzor energie a hybnosti ve WKB aproximaci	16
1.2.5 WKB pro nekoherentní vlnění.	17
1.2.6 Aplikace na Einsteinovu-Rosenovu metriku	18
1.2.7 Požadavky na metriku pozadí	19
2 Vybrané kosmologické modely	21
2.1 Prostorově homogenní modely	21
2.1.1 Homogenita a izotropie	21
2.1.2 Bianchiho modely	22
2.1.3 Kantowského-Sachsův model	25
2.1.4 Kasnerův model	25
2.2 Zobecněné Einsteinovy-Rosenovy prostoročasy	25
2.2.1 Einsteinovy-Rosenovy cylindrické vlny	26
2.2.2 Gowdyho prostoročasy	27
2.2.3 Charachovo-Malinovo řešení: 3-torus s gravitačními vlnami a skalárním polem	28
3 Vysokofrekvenční vlny v zobecněných Einsteinových-Rosenových prostoročasech	32
3.1 Einsteinovy rovnice v nulových souřadnicích	32
3.2 Amplituda vlny ve WKB aproximaci	33
3.3 Slučitelnost skalárního pole a WKB vlny	35
3.4 Model se skalárním polem a perturbace v jednom směru	35
3.4.1 Neperiodické řešení	36
3.4.2 Charachův-Malinův model s vysokofrekvenční vlnou v jed- nom směru - periodizace	37
3.5 Kasnerův model a vlny ve dvou směrech	39
3.5.1 Tvar vysokofrekvenční vlny, tenzor energie a hybnosti a obecné řešení	40
3.5.2 Srovnání s limitou dlouhých časů Charachova-Malinova mo- delu	41

Závěr	45
Dodatek A: Izometrie na varietě	46
Dodatek B: Některé pojmy z teorie Lieových grup	47
Dodatek C: Funkce f v Charachově-Malinově modelu	49

Úvod

Obecná teorie relativity, která v roce 2015 slaví právě sto let od svého vzniku, znamenala velký přínos zejména v oblasti astrofyziky a kosmologie. Naši představu o světě obohatila o pojmy jako zakřivení prostoročasu, černé díry, gravitační vlnění, gravitační čočka či rozpínání vesmíru, a v podstatě dala vzniknout moderní kosmologii.

Jednou z předpovědí obecné teorie relativity jsou gravitační vlny, o kterých poprvé mluví už Einstein v roce 1916 [1, 2]. Jedná se o (periodické) záchvěvy prostoročasu, které vznikají ve sféricky nesymetrických dynamických situacích, jako když okolo sebe obíhají dva velmi hmotné objekty (neutronové hvězdy, černé díry), nebo při výbuchu supernovy. Vznik gravitačních vln očekáváme i v kosmologickém kontextu při velkém třesku. Jinak řečeno, některá přesná řešení Einsteinových rovnic jsou modely vesmírů inherentně obsahující gravitační vlnění.

Díky zdokonalujícím se experimentům (celooblohové přehlídky rozložení hmoty ve vesmíru, pozorování supernov, gravitačního (mikro)čočkování, reliktního záření, ...) i počítačovým simulacím jsme v posledních desetiletích schopni stále lépe testovat teoretické předpovědi, a tedy i rozhodovat mezi různými kosmologickými modely. Navíc je velmi pravděpodobné, že v nejbližších letech dojde k přímé detekci gravitačních vln, což by otevřelo další okno do vesmíru, a jistě i nové teoretické výzvy.

Tato práce se zabývá vysokofrekvenčními vlnami šířícími se v kosmologicky zakřiveném prostoročase. Ačkoli se bude jednat o čistě teoretickou práci, uvedu nyní letný přehled o současných možnostech měření.

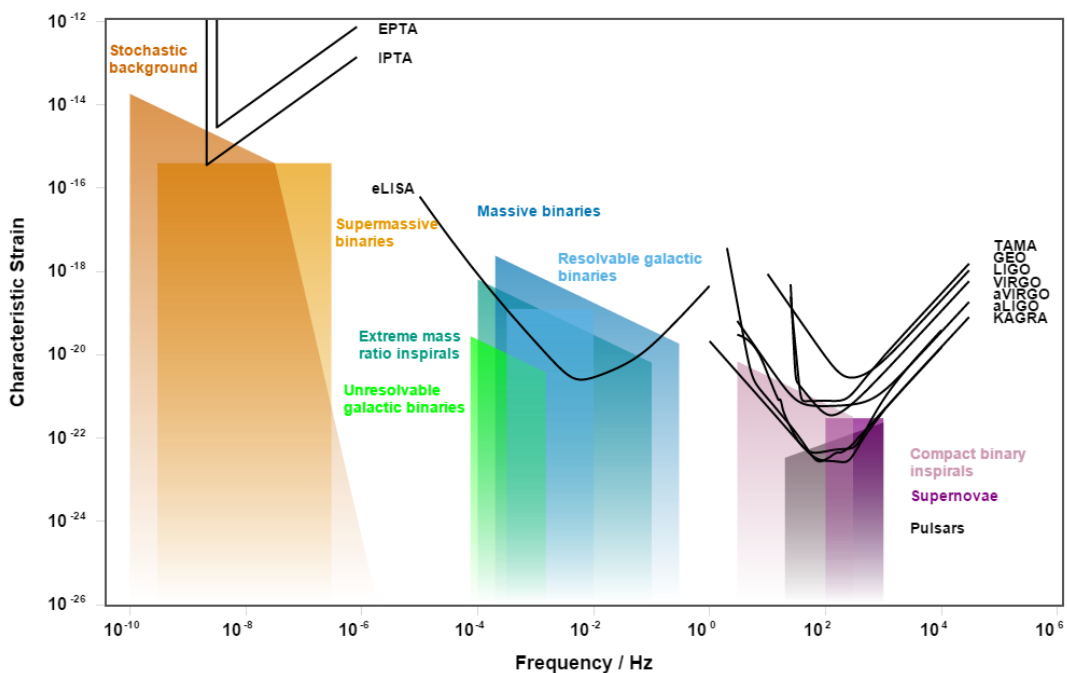
Současné možnosti detekce gravitačních vln

Existence gravitačních vln byla zatím ověřena jen nepřímo, například pozorováním změny periody známého binárního pulsaru PSR 1913+16. Tato dvojice neutronových hvězd kolem sebe obíhá s periodou ca. 8 hodin. Dlouhodobá měření ukazují, že se oběžná doba vlivem ztráty energie, kterou odnášejí gravitační vlny, zkracuje o $76 \mu s$ za rok, což je s velkou přesností hodnota, kterou předpovídá obecná teorie relativity [4]. Za objev tohoto pulsaru byla v roce 1993 udělena Nobelova cena.

Hlavním problémem přímé detekce gravitačních vln je, že jsou slabé. Amplituda vlny je definovaná jako maximální deformace objektu vyvolaná průchodem vlny ($h \equiv \frac{\Delta L}{L}$, kde L je počáteční délka objektu a ΔL je maximální změna délky). Pro gravitační vlny přicházející na Zemi z astrofyzikálních zdrojů jako jsou supernovy je amplituda typicky menší než $h = 10^{-21}$ [5]. V současné době jsou uváděny do provozu čím dál citlivější interferometrické detektory trojího typu:

- Pozemní interferometry. V roce 2000 byl v Japonsku spuštěn detektor TAMA 300 s délkou ramen 300 m, který jako první sliboval citlivost řádu 10^{-21} . Následovaly detektory GEO 600, VIRGO a LIGO (s délkou ramen 4 km). Tyto detektory zatím prokazatelně gravitační vlny nenaměřily, dávají tedy limit na jasnost a frekvenční spektrum běžných zdrojů. V současné době jsou uváděny do provozu vylepšené verze detektorů (Advanced LIGO a Enhanced VIRGO), které by měly dosáhnout citlivosti 10^{-22} .

- Kosmické mise. V horizontu dvaceti let je v plánu projekt kosmického interferometru eLISA, který bude sestávat ze tří družic. Díky větší délce ramen budou kosmické interferometry měřit gravitační vlny na řádově nižších frekvencích, než pozemní.
- Přehlídky periody pulzarů (pulsar timing arrays). Pulzary představují přirozené hodiny, a proto současné pozorování více pulzarů lze využít jako interferometr galaktických rozměrů. Tímto způsobem měříme tedy vlny o nejnižších frekvencích. Průchod vlny způsobí drobnou odchylku v periodě pulzaru, kterou je možné pozorovat na více sledovaných objektech, a odlišit ji tak od náhodného šumu. V současné době je v provozu například projekt EPTA, kombinací s dalšími přehlídkami na světě by měl vzniknout mezinárodní projekt IPTA, který dosáhne větší citlivosti.



Obrázek 1: **Citlivost detektorů gravitačních vln.** Citlivost některých současných a plánovaných detektorů gravitačních vln a předpokládaná amplituda vln z běžných astrofyzikálních zdrojů. Zdroj: <http://rhcole.com/apps/GWplotter/>

V současné chvíli předpokládané amplitudy vln z některých zdrojů a (očekávaná) citlivost zmíněných detektorů je na obrázku (1), postup výpočtu je vysvětlen v [5]. V nejbližších letech lze tedy doufat v úspěšnou detekci gravitačních vln. Ta by otevřela úplně nové možnosti astronomických pozorování jak v kontextu astrofyziky (možnost studovat detaily výbuchu supernovy), tak i kosmologie.

Cíle a náplň práce

Gravitační vlnění lze pojednat jak přesně, tak aproximativně. V případě přesných řešení mluvíme o prostoročasech s gravitačními vlnami v případě, že jsou v Petrovově klasifikaci¹ algebraického typu N, nebo vyššího, pokud obsahuje typ N. Nejvýznamnější třídy přesných řešení jsou neexpandující tzv. pp-vlny

¹Petrovovu klasifikaci lze najít například v [6]

a Kundtova třída, dále Einsteinovy-Rosenovy cylindrické vlny [3] a Robinsonovy-Trautmanovy vlny. Souhrny přesných řešení a mnoho odkazů na literaturu obsahují například [6, 7].

Možnost jak zjednodušit analyticky složité přesné výpočty nabízejí aproximační metody. Nejznámější a nejpoužívanější přístup, který ale zároveň poskytuje velmi dobrý náhled na šíření a účinky gravitačního vlnění, je linearizovaná teorie gravitace [9, 10]. Tato práce se soustředí na vysokofrekvenční limitu pro gravitační vlny v Isaacsonově formalismu [12, 13]. Oba přístupy pracují s představou, že máme nějaký daný prostoročas (pozadí), na kterém se šíří vlna. V linearizované teorii je pozadí ploché (Minkovského), hodí se tedy například pro "lokální" výpočty ve sluneční soustavě, ale ne v kosmologii. Isaacsonův přístup umožňuje počítat šíření vlny na zakřiveném pozadí, jako například v článku [14]. Linearizovanou teorii zahrnuje jako speciální případ.

Hlavní výhoda Isaacsonova formalismu oproti jiným přístupům ale spočívá v možnosti zahrnout další řád a spočítat zpětné působení vlny na pozadovou metriku, případně i srovnávat výsledný efekt s přesnými řešeními pro gravitační vlny. To pro některé třídy přesných řešení udělali Podolský a Svítek v práci [15] z roku 2008, kde je zároveň původně pouze vakuový formalismus rozšířen tak, aby zahrnul i nevakuové prostoročasy, pokud příslušný tenzor energie a hybnosti neobsahuje derivace metriky. Existuje také nové zobecnění zmíněných perturbančních metod, které se soustředí na nehomogenity na malých škálách a tvorbu struktur [16]. V rámci tohoto zobecnění platí, že podobně jako u Isaacsona je pozadí ovlivněno pouze efektivním tenzorem energie a hybnosti. Celkově však je málo studií, které by se zabývaly zpětným ovlivněním kosmologického pozadí vysokofrekvenčními vlnami.

Cílem této práce je zkoumat ovlivnění pozadí vysokofrekvenční vlnou v konkrétních případech. Aby byl problém analyticky řešitelný, přidáváme v rámci Isaacsonova formalismu navíc WKB² aproximaci (popsanou v sekci 1.2.3), kde předpokládáme, že vlnu můžeme nahradit prvním členem asymptotického rozvoje v limitě vysokých frekvencí. Za kosmologické pozadí vybíráme Chararachův-Malinův kosmologický model [20–22], který obsahuje gravitační vlny a skalární pole. Jako speciální případ uvažujeme též přidání vysokofrekvenční vlny k homogennímu Kasnerovu modelu [27]. Výsledek srovnáváme s limitou velkých časů Charachova-Malinova modelu.

V kapitole 1 pojednáme linearizovanou teorii a Isaacsonův formalismus, se kterým pracujeme. Kapitola 2 hovoří o některých přesných kosmologických řešeních - popíšeme homogenní Bianchiho kosmologie [23] a konkrétně Kasnerův model, zmíníme se o Einsteinových-Rosenových vlnách a zobecněné třídě Einsteinových-Rosenových metrik, o Gowdyho modelech s gravitačními vlnami [28–32], a nakonec podrobně popíšeme Charachův-Malinův model a jeho limitní případ. Kapitola 3 obsahuje vlastní výsledky. Popíšeme, že v jisté podtřídě zobecněných Einsteinových-Rosenových metrik lze přidat vysokofrekvenční gravitační vlnění ve WKB aproximaci, a spočteme zpětné ovlivnění pozadí vlnou. Navíc ukážeme, že vlnu lze konzistentně s aproximací volit tak, aby ovlivnění pozadí bylo periodické, můžeme ji tedy uvažovat i v Charachově-Malinově modelu, který je v prostorových souřadnicích kompaktifikovaný. Dále budeme uvažovat WKB vlnu

²Wentzel, Kramers, Brillouin

na pozadí Kasnerovské metriky, a diskutovat jak souvisí s limitou velkých časů Charachova-Malinova modelu.

Konvence, značení

V celé práci používáme indexovou notaci se znaménkovou konvencí shodnou s [9] a v českých textech obvyklou. Řecké indexy μ, ν, \dots v rozsahu 0–3 indexují prostoročasové složky. Indexy nahoře označují kontravariantní vektory a tenzory, indexy dole kovariantní. Používáme Einsteinovu sumační konvenci $V_\sigma V^\sigma = \sum_{\sigma=0}^3 V_\sigma V^\sigma$. V sekci o linearizované teorii používáme též latinské indexy i, j, \dots v rozsahu 1–3, které indexují prostorové složky v pseudo-lorentzovské souřadné soustavě, a u kterých nerozlišujeme kovariantní a kontravariantní bazi. Pracujeme v geometrizované soustavě jednotek s rychlostí světla $c = 1$.

Metrický tenzor má signaturu $(-, +, +, +)$. Kovariantní metrice $g_{\mu\nu}$ odpovídá prostoročasový interval

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu . \quad (1)$$

Parciální derivaci podle souřadnice značíme čárkou ($\frac{\partial \bullet}{\partial u} = \partial_u \bullet = \bullet_{,u}$). Středníkem ($\bullet_{;u}$) označujeme kovariantní derivaci. V kapitolách 1 a 3, kde hovoříme o rozkladu úplné metriky na „pozadí“ a „perturbaci, vlnu“, značí středník vždy kovariantní derivaci vůči *pozadové* metrice. Kovariantní derivaci vůči úplné metrice nepoužíváme.

Riemannův tenzor $R^\mu{}_{\nu\kappa\lambda}$ je zaveden jako komutátor druhých kovariantních derivací vektoru

$$V^\mu{}_{;\kappa\lambda} - V^\mu{}_{;\lambda\kappa} = -V^\nu R^\mu{}_{\nu\kappa\lambda} . \quad (2)$$

Máme-li danou metriku $g_{\mu\nu}$, pak Christoffelovy symboly a Riemannův tenzor jsou

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} (g_{\beta\rho,\gamma} + g_{\gamma\rho,\beta} - g_{\beta\gamma,\rho}) , \quad (3)$$

$$R^\mu{}_{\nu\kappa\lambda} = \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda,\kappa} - \Gamma^\mu{}_{\nu\kappa,\lambda} + \Gamma^\mu{}_{\sigma\kappa} \Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda} - \Gamma^\mu{}_{\sigma\lambda} \Gamma^\sigma{}_{\nu\kappa} . \quad (4)$$

Ricciho tenzor a skalární křivost jsou zavedeny jako zúžení Riemannova tenzoru

$$R_{\nu\lambda} = R^\sigma{}_{\nu\sigma\lambda} , \quad (5)$$

$$R = R^\sigma{}_\sigma . \quad (6)$$

Einsteinovy rovnice mají tvar

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = +8\pi T_{\mu\nu} , \quad (7)$$

kde $T_{\mu\nu}$ je tenzor energie a hybnosti.

1. Aproximativní přístupy ke gravitačním vlnám

1.1 Linearizovaná teorie

Nejznámějším aproximativním přístupem k obecné relativitě je tzv. linearizovaná teorie gravitace, popsaná např. v [9, 10]. Linearizovaná teorie je použitelná všude tam, kde popisované gravitační pole je slabé, a můžeme ho popsat jako poruchu na Minkovského pozadí. Popisuje tedy například gravitaci ve Sluneční soustavě, ale i pole ve velké vzdálenosti od plně relativistických zdrojů, jako třeba gravitační vlny emitované rotujícím pulzarem. Linearizovaná teorie však už nepopíše ovlivnění pozadí šířící se vlnou, ani zpětné ovlivnění zdroje, tedy např. zpomalení rotace pulzaru vyzářením gravitační vlny.

Základní premisou linearizované teorie je, že lze zvolit „skoro lorentzovský“ systém souřadnic, ve kterém je metrika součtem Minkovského metriky $\eta_{\mu\nu}$ a malé části způsobené gravitačním polem $h_{\mu\nu}$ [10]

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} , \quad (1.1)$$

kde o složkách $h_{\mu\nu}$ a všech jeho derivacích předpokládáme, že jsou malé

$$|h_{\mu\nu}| \ll 1 , \quad |h_{\mu\nu,\alpha}| \ll 1 , \quad \dots \quad (1.2)$$

a můžeme tedy ve všech vztazích zanedbat jejich druhé mocniny. Kontravariantní metrický tenzor je

$$g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} , \quad (1.3)$$

kde

$$h^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}h_{\mu\nu} . \quad (1.4)$$

Podobně jako u $h_{\mu\nu}$ zvedáme indexy u všech veličin prvního řádu pomocí kontravariantní Minkovského metriky. Platí tedy například $h^{\alpha}_{\beta,\nu} = \eta^{\alpha\sigma}h_{\sigma\beta,\nu}$, a stopa $h_{\mu\nu}$ je $h \equiv \eta^{\sigma\rho}h_{\sigma\rho} = h^{\sigma}_{\sigma}$.

Z metriky (1.1) lze v prvním řádu napočítat Christoffelovy symboly a Riemannův tenzor:

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} (h^{\alpha}_{\beta,\gamma} + h^{\alpha}_{\gamma,\beta} - h_{\beta\gamma}{}^{,\alpha}) , \quad (1.5)$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} (h_{\alpha\delta,\beta\gamma} + h_{\beta\gamma,\alpha\delta} - h_{\alpha\gamma,\beta\delta} - h_{\beta\delta,\alpha\gamma}) . \quad (1.6)$$

Z toho už přímočaře (kontrakce provádíme pomocí Minkovského metriky) plyne tvar Einsteinových rovnic v linearizované teorii

$$h_{\mu\alpha,\nu}{}^{\alpha} + h_{\nu\alpha,\mu}{}^{\alpha} - h_{,\mu\nu} - h_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} - \eta_{\mu\nu} (h_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} - h_{,\alpha}{}^{\alpha}) = 16\pi T_{\mu\nu} . \quad (1.7)$$

1.1.1 Kalibrační transformace souřadnic a zjednodušení gravitačního zákona

Při rozkladu metriky (1.1) na Minkovského pozadí a slabé gravitační pole jsme předpokládali volbu konkrétního souřadného systému $\{x^\nu\}$. Existují dva typy transformací souřadnic, které zachovávají zákony linearizované teorie ve stejném tvaru [10]: Lorentzovy transformace jako ve speciální relativitě, a tzv. kalibrační transformace, kdy měníme souřadnice o infinitesimálně malé vektorové pole $\xi^\mu(\{x^\nu\})$

$$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu . \quad (1.8)$$

Metrika se pak transformuje jako

$$g'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu} , \quad (1.9)$$

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} . \quad (1.10)$$

Ačkoli se $h_{\mu\nu}$ podle rovnice (1.10) při kalibrační transformaci mění, Riemannův tenzor, a tedy i gravitační zákon (1.7), zůstává stejný.

Abychom Einsteinovy rovnice (1.7) zjednodušili, přejdeme od $h_{\mu\nu}$ k veličině $\vartheta_{\mu\nu}$

$$\vartheta_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad (1.11)$$

a budeme požadovat Lorentzovu kalibrační podmínku

$$\vartheta_{\mu\nu}{}^{;\nu} = 0 . \quad (1.12)$$

Tu lze vždy splnit ve vhodných souřadnicích. Jestliže máme původně dáno $\tilde{\vartheta}_{\mu\nu}$, musí vhodná kalibrační transformace splňovat vlnovou rovnici ([10])

$$\square\xi_\mu = \tilde{\vartheta}_{\mu\nu}{}^{;\nu} . \quad (1.13)$$

Libovolnou takovou kalibrační transformací získáme

$$\vartheta_{\mu\nu} = \tilde{\vartheta}_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}\xi^\sigma{}_{;\sigma} , \quad (1.14)$$

které splňuje Lorentzovu kalibrační podmínku (1.12). Gravitační zákon pak má také tvar vlnové rovnice:

$$\square\gamma_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu} . \quad (1.15)$$

1.1.2 Rovinné gravitační vlny v linearizované teorii

Rovnice (1.15) ve vakuu $\square\vartheta_{\mu\nu} = 0$ připouští řešení ve tvaru rovinné vlny

$$\vartheta_{\mu\nu} = \text{Re} \{ A_{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma} \} , \quad (1.16)$$

kde obecně komplexní tenzor amplitudy $A_{\mu\nu}$ a reálný vlnový vektor k_σ nezávisí na souřadnicích. Aby (1.16) bylo skutečně řešením vlnové rovnice, a navíc splňovalo Lorentzovu kalibrační podmínku (1.12), musí platit

$$k_\sigma k^\sigma = 0 , \quad (1.17)$$

$$A_{\mu\sigma} k^\sigma = 0 , \quad (1.18)$$

což znamená, že se vlna šíří rychlostí světla a je příčná.

Počet nezávislých složek tenzoru amplitudy lze omezit výběrem vhodné kalibrace. Ačkoli jsme při výběru souřadnic již jednou použili podmínku (1.13), stále můžeme udělat libovolnou transformaci, pro kterou $\square\xi_\mu = 0$. To nám umožňuje uložit na tenzor amplitudy podmínky tzv. TT kalibrace (transverse, traceless –transverzální, bezestopá) [10]:

$$A_{0\mu} = 0 , \quad (1.19)$$

$$A^\sigma_\sigma = 0 . \quad (1.20)$$

Díky těmto podmínkám a (1.18) má tenzor amplitudy jen dvě nezávislé složky (dva nezávislé stavy polarizace). Rovnici (1.19) lze také přepsat invariantním způsobem pomocí libovolně zvoleného konstantního vektoru (čtyřrychlosti) U^μ jako

$$A_{\mu\nu}U^\nu = 0 . \quad (1.21)$$

Podmínka bezestoposti (1.20) mimo jiné znamená, že veličina $\gamma_{\mu\nu}$, kterou jsme definovali vztahem (1.11), je rovna přímo odchylkám od Minkovského metriky $h_{\mu\nu}^{TT}$. Ty musí splňovat stejné podmínky jako tenzor amplitudy. Speciálně pro stojícího pozorovatele v Lorentzovském systému $U^\nu = \delta_0^\nu$

$$h_{0\mu} = 0 , \quad h_{ij}k_j = 0 , \quad h_{kk} = 0 . \quad (1.22)$$

Působení rovinné vlny na testovací částice

Mějme dvě volné testovací částice A, B. Z dobře známé rovnice geodetické deviace lze určit změnu vzdálenosti mezi nimi způsobenou průchodem vlny (odvození lze najít v [9]). Jestliže měříme vzdálenost částice B z pohledu pozorovatele spojeného s částicí A, dostáváme v lineárním přiblížení

$$x_B^j = x_{B0}^k \left[\delta_{jk} + \frac{1}{2} h_{jk}^{TT} \right]_A , \quad (1.23)$$

kde x_{B0}^k je počáteční vzdálenost částice B, x_B a h^{TT} jsou funkce vlastního času τ částice A.

Rovinná vlna v TT kalibraci má tvar

$$h_{ij}^{TT} = \text{Re} \{ A_{ij} e^{ik_\sigma x^\sigma} \} . \quad (1.24)$$

Srovnáním s podmínkou $h_{ij}k_j = 0$ zjistíme, že poloha částice se nemění ($x_B^j = x_{B0}^j$) právě tehdy, když $x_{B0}^j \sim k^j$. Vlna je tedy opravdu transverzální.

Jestliže zvolíme za směr šíření vlny osu z , tedy $k = (\omega, 0, 0, \omega)$, můžeme z podmínek (1.22) tvar h^{TT} ještě upřesnit a zapsat jako součet dvou („lineárních“) polarizací

$$h_{\mu\nu}^{TT} = h_{\mu\nu}^+ + h_{\mu\nu}^\times = h_{xx} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + h_{xy} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad (1.25)$$

kde

$$h_{xx} = \text{Re} \{ A_+ e^{-i\omega(t-z)} \} , \quad (1.26)$$

$$h_{xy} = \text{Re} \{ A_\times e^{-i\omega(t-z)} \} . \quad (1.27)$$

Pro konkrétní představu uveďme působení lineárně polarizované gravitační vlny $h_{\mu\nu}^+$ na kružnici testovacích částic o poloměru a . Rovnice (1.23) pak ve směru x, y dává

$$x_B = x_{B0} \left[1 + \frac{1}{2} h_{xx}(\tau) \right] , \quad y_B = y_{B0} \left[1 - \frac{1}{2} h_{xx}(\tau) \right] . \quad (1.28)$$

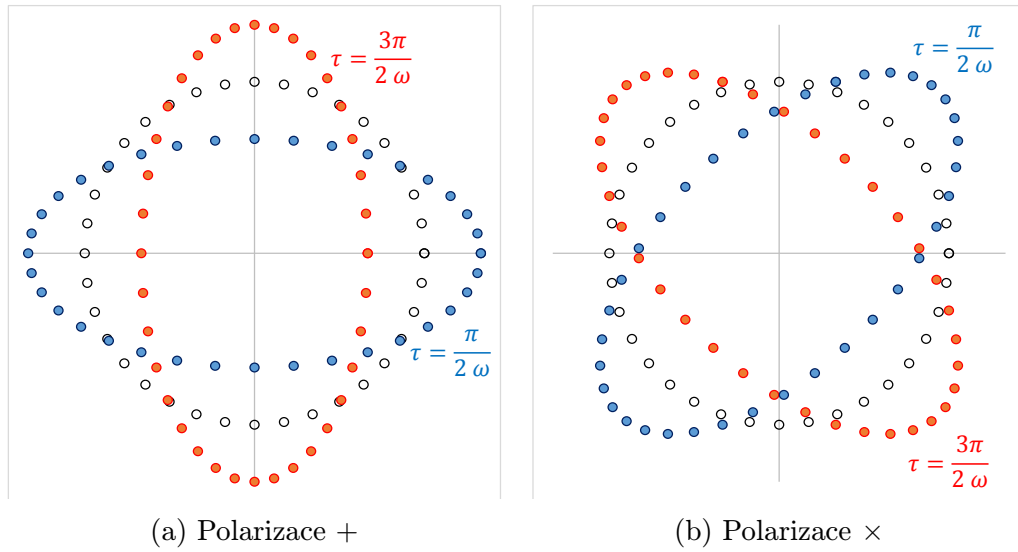
Volme tvar $h_{xx}(\tau) = A \sin(\omega\tau)$, tedy počáteční podmínka je $h_{xx}^+(0) = 0$ a počáteční rozmístění částic popíšeme v polárních souřadnicích jako

$$x_{B0} = a \cos \phi , \quad y_{B0} = a \sin \phi . \quad (1.29)$$

Z počátečních podmínek, vztahů (1.28) a identity $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$ dostáváme rovnici elipsy

$$\left[\frac{x_B(\tau)}{a \left(1 + \frac{A}{2} \sin(\omega\tau) \right)} \right]^2 + \left[\frac{y_B(\tau)}{a \left(1 - \frac{A}{2} \sin(\omega\tau) \right)} \right]^2 = 1 . \quad (1.30)$$

Částice zpočátku tvořící kružnici tedy oscilují kolem své počáteční polohy a v každém čase leží na elipse s poloosami $a \left(1 \pm \frac{A}{2} \sin(\omega\tau) \right)$, jejíž osy symetrie jsou částí os x a y . Kdybychom počítali polarizaci $h_{\mu\nu}^\times$, dostaneme obdobný výsledek, avšak pootočený o 45° . Pohyb částic vlivem polarizovaných vln ilustrujeme na obrázku (1.1). Obecná rovinná vlna v linearizované teorii je součtem obou polarizací, které mají stejnou frekvenci, mohou však být fázově posunuté a mít jinou amplitudu.

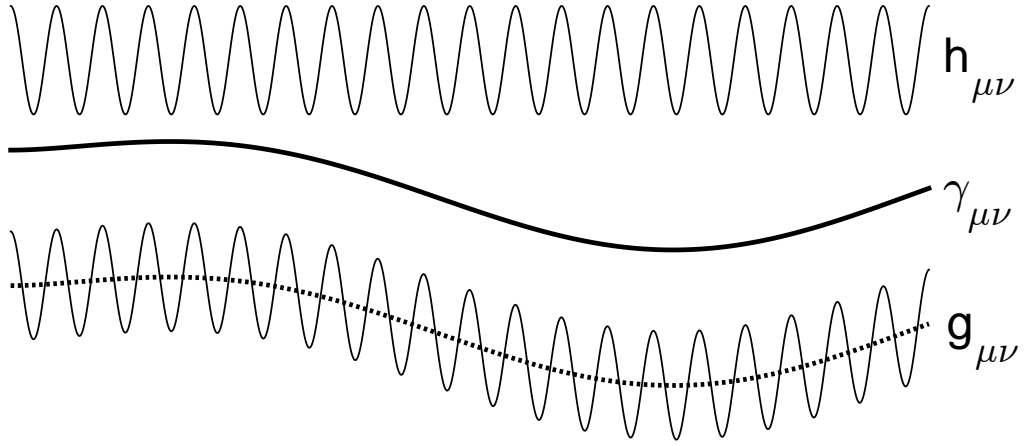


Obrázek 1.1: Polarizace rovinných vln

1.2 Isaacsonova vysokofrekvenční aproximace

V případě zakřivených prostoročasů nemusí být zřejmé, čemu lze říkat gravitační vlna, a jak ji oddělit od kosmologického pozadí. Tyto potíže odpadají v případě rychlých změn vlny ve srovnání se zbytkem metriky, kdy můžeme použít vysokofrekvenční aproximaci, protože vlnová délka gravitačních vln je v nějakém smyslu mnohem kratší, než typická délka změn pozadové metriky.

Jeden způsob, jak zavést vysokofrekvenční aproximaci, pro případ vakuového prostoročasu pečlivě diskutuje R. A. Isaacson v [12, 13]. Zobecnění pro některé systémy s nenulovým tenzorem energie a hybnosti podávají J. Podolský a O. Svítek v článku [15], kde lze také najít diskusi rozdílů mezi linearizovanou teorií gravitace a vysokofrekvenční aproximací – stručně lze říci, že první řád Isaacsonovy vysokofrekvenční aproximace zahrnuje linearizovanou teorii jako speciální případ (šíření vlny s malou amplitudou na Minkowského pozadí).



Obrázek 1.2: **Ilustrace vysokofrekvenční aproximace.** Metrika je součtem metriky pozadí a vysokofrekvenční vlny.

Předpokládáme, že úplnou metriku $g_{\mu\nu}$ lze zapsat jako součet pozadové metriky $\gamma_{\mu\nu}$ a perturbace $h_{\mu\nu}$,

$$g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} . \quad (1.31)$$

Na rozdíl od linearizované teorie při aproximaci nevycházíme jen z velikosti amplitudy vlny. Vzájemnou velikost složek $\gamma_{\mu\nu}$ a $h_{\mu\nu}$ a jejich derivací měříme parametrem $\epsilon = \lambda/L$, kde λ a L představují typické prostorové škály změn vlny (vlnovou délku) a pozadí (pro dominantní složky Riemannova tenzoru a Ricciho tenzoru platí $R^{(0)\alpha}_{\beta\gamma\delta} \sim L^{-2}$). Aby vysokofrekvenční aproximace měla smysl, musí být $\epsilon \ll 1$ a ¹

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu\nu} &= O(1) , & h_{\mu\nu} &= O(\epsilon) , \\ \gamma_{\mu\nu,\alpha} &= O(1) , & h_{\mu\nu,\alpha} &= O(1) , \\ \gamma_{\mu\nu,\alpha\beta} &= O(1) , & h_{\mu\nu,\alpha\beta} &= O(\epsilon^{-1}) . \end{aligned} \quad (1.32)$$

¹Funkce $f = O(\epsilon^n)$ pokud existuje konstanta $C > 0$ taková, že pro $\epsilon \rightarrow 0$ platí $|f| < C\epsilon^n$.

Podmínka, že druhá derivace $h_{\mu\nu}$ je velká, vyjadřuje vysokofrekvenční charakter vlny.

Snižovat a zvyšovat indexy i kovariantně derivovat (;) budeme v dalším pomocí metriky pozadí. To odpovídá přesnosti $O(\epsilon)$. Abychom získali tvar Einsteinových rovnic v různých řádech, rozvineme Ricciho tenzor do mocnin h a jeho derivací

$$R_{\mu\nu}(g) = R_{\mu\nu}^{(0)} + R_{\mu\nu}^{(1)} + R_{\mu\nu}^{(2)} + \dots , \quad (1.33)$$

kde jednotlivé členy jsou voleny jako tenzorové veličiny

$$R_{\mu\nu}^{(0)}(\gamma) \equiv R_{\mu\nu}(\gamma) , \quad (1.34)$$

$$R_{\mu\nu}^{(1)}(\gamma, h) \equiv \frac{1}{2}\gamma^{\rho\tau} (h_{\tau\mu;\nu\rho} + h_{\tau\nu;\mu\rho} - h_{\rho\tau;\mu\nu} - h_{\mu\nu;\rho\tau}) ,$$

$$R_{\mu\nu}^{(2)}(\gamma, h) \equiv \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}h^{\rho\tau}{}_{;\nu} h_{\rho\tau;\mu} + h^{\rho\tau} (h_{\tau\rho;\mu\nu} + h_{\mu\nu;\tau\rho} - h_{\tau\mu;\nu\rho} - h_{\tau\nu;\mu\rho}) + h^\tau{}_\nu{}^{;\rho} (h_{\tau\mu;\rho} - h_{\rho\mu;\tau}) - (h^{\rho\tau}{}_{;\rho} - \frac{1}{2}h^{;\tau}) (h_{\tau\mu;\nu} + h_{\tau\nu;\mu} - h_{\mu\nu;\tau}) \right] \quad (1.35)$$

a mají podle (1.32) velikost

$$R_{\mu\nu}^{(0)} = O(1) , \quad R_{\mu\nu}^{(1)} = O(\epsilon^{-1}) , \quad R_{\mu\nu}^{(2)} = O(1) . \quad (1.36)$$

V prvním přiblížení je tedy nejdůležitější $R_{\mu\nu}^{(1)}$. Například v případě *vakua*, kde $R_{\mu\nu} = 0$, tedy získáváme v řádu $O(\epsilon^{-1})$ rovnici pro šíření vlny

$$R_{\mu\nu}^{(1)}(\gamma, h) = 0. \quad (1.37)$$

Jak uvidíme v sekci (1.2.2), do gravitačního zákona, ze kterého lze najít metriku $\gamma_{\mu\nu}$, vstupují oba členy Ricciho tenzoru velikosti $O(1)$: $R_{\mu\nu}^{(0)}$ i $R_{\mu\nu}^{(2)}$. Aby byla Isaacsonova aproximace konzistentní, musí být splněna jak rovnice (1.37), tak rovnice pro metriku pozadí.

1.2.1 Kalibrační invariance a rovnice šíření vlny

Podobně jako v linearizované teorii zkoumáme kalibrační invarianci vůči infinetisimálním transformacím souřadnic

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu} . \quad (1.38)$$

Jestliže zanedbáme členy velikosti $O(\epsilon)$, platí opět pro transformaci metriky

$$g'_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu} , \quad (1.39)$$

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu;\nu} - \xi_{\nu;\mu} . \quad (1.40)$$

Musí platit, že ξ^{μ} a $\xi_{\mu;\nu}$ jsou veličiny malé $O(\epsilon)$. Dá se zjistit [12], že pro dominantní člen Ricciho tenzoru (velikosti $O(\epsilon^{-1})$) platí

$$R_{\alpha\beta}^{(1)} - R_{\alpha\beta}'^{(1)} = \mathcal{L}_{\xi} R_{\alpha\beta}^{(0)} , \quad (1.41)$$

kde \mathcal{L}_ξ značí Lieovu derivaci, a že pravá strana (1.41) má velikost $O(\epsilon)$. (Podobný vztah platí i pro celý Riemannův tenzor.) Ricciho tenzor, a tedy i vlnová rovnice (1.37), je proto velmi dobře kalibračně invariantní. Toto je důležitý výsledek, protože chceme, aby fyzikálně měřitelné veličiny byly invariantní vůči transformaci souřadnic.

Vhodná volba kalibrace umožňuje zjednodušit rovnici šíření vlny (1.37). Po $h_{\mu\nu}$ můžeme požadovat bezestopost a Lorenzovu kalibrační podmínku:

$$h \equiv h^\mu{}_\mu = 0 . \quad (1.42)$$

$$h_{\mu\nu}{}^{;\nu} = 0 , \quad (1.43)$$

Kalibrační podmínky (1.42) a (1.43) omezují počet nezávislých složek $h_{\mu\nu}$ z deseti na pět. Tyto podmínky lze vždy splnit volbou takových souřadnic, pro které platí

$$\xi^\alpha{}_{;\alpha} = -\frac{1}{2}h , \quad (1.44)$$

$$\xi_\mu{}^{;\beta}{}_{;\beta} - R_{\mu\beta}^{(0)}\xi^\beta = h_{\mu\beta}{}^{;\beta} + \frac{1}{2}h_{;\mu} . \quad (1.45)$$

Protože tyto rovnice nemají jediné řešení, není souřadný systém ještě zcela určen. Zbývající tři stupně volnosti můžeme zafixovat například požadavkem

$$h_{0\nu} = 0 . \quad (1.46)$$

Zbývají tak pro gravitační pole obvyklé dva nezávislé stupně volnosti.

S využitím podmínek (1.42, 1.43) dostáváme nový tvar **rovnice šíření vlny** (1.37):

$$\diamond h_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu}{}^{;\beta}{}_{;\beta} - 2R_{\sigma\nu\mu\beta}^{(0)}h^{\beta\sigma} - R_{\mu\sigma}^{(0)}h^\sigma{}_\nu - R_{\nu\sigma}^{(0)}h^\sigma{}_\mu = 0 . \quad (1.47)$$

Operátor \diamond lze brát jako zobecnění d'Alembertova operátoru. Rovnice (1.47) umožňuje hledat možné tvary vln $h_{\mu\nu}$ šířící se na pozadí $\gamma_{\mu\nu}$. V nejvyšším řádu ($h_{\mu\nu}{}^{;\beta}{}_{;\beta} = 0$) odpovídá také vlnové rovnici linearizované teorie (1.15) ve vakuu. To je pochopitelné, ačkoli v linearizované teorii předpokládáme pouze malou amplitudu, neboť oproti ploché metrice pozadí je každá vlna vysokofrekvenční. V linearizované teorii však nelze jít za tento nejvyšší řád $O(\epsilon^{-1})$. V Isaacsonově aproximaci se ukazuje, že rovnice (1.47) je kalibračně invariantní do řádu $O(1)$. Členy řádu $O(\epsilon)$ jsou stejného řádu jako členy vzniklé změnou souřadnic a nemohou nést fyzikální informaci.

Pokud uděláme stopu rovnice (1.47), zjistíme, že $h^{;\beta}{}_{;\beta} = 0$ a rovnice šíření vlny je zcela konzistentní s podmínkou (1.42). Oproti tomu za použití podmínky (1.43) dostáváme

$$(\diamond h_{\mu\nu}{}^{;\nu}) = (\diamond h_{\mu\nu}){}^{;\nu} = \left(R_{\nu\beta;\mu}^{(0)} - 2R_{\mu\nu;\beta}^{(0)} \right) h^{\nu\beta} \neq 0 , \quad (1.48)$$

což není zcela v souladu s vlnovou rovnicí. Tato nekonzistence je však malá, neboť rozdíl mezi levou a pravou stranou (1.48) je řádu ϵ^3 . Navíc pro požadovanou metriku konstantní křivosti je aproximace zcela konzistentní. To je výhoda zachování členů řádu $O(\epsilon)$ v rovnici šíření vlny.

1.2.2 Efektivní tenzor energie a hybnosti

Článek [15] zobecňuje Isaacsonovu metodu pro nevakuové prostoročasy následujícím způsobem. Uvažujme Einsteinovy rovnice ve tvaru

$$R_{\mu\nu}(g) = 8\pi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^\beta{}_\beta \right) \equiv 8\pi \tilde{T}_{\mu\nu}(g, \varphi) \quad (1.49)$$

kde $T_{\mu\nu}(g, \varphi)$ může záviset na negravitačním poli φ a úplné metrice $g_{\mu\nu}$, ale ne na derivacích metriky $g_{\mu\nu}$. Přípustné zdrojové členy v tomto zobecnění jsou například kosmologická konstanta Λ , nebo $T_{\mu\nu}$ elektromagnetického pole.

Podobně jako Ricciho tenzor (1.33), můžeme i $\tilde{T}_{\mu\nu}$ rozvinout do členů různého řádu v ϵ :

$$\tilde{T}_{\mu\nu}(g, \varphi) = \tilde{T}_{\mu\nu}^{(0)}(\gamma, \varphi) + \tilde{T}_{\mu\nu}^{(1)}(\gamma, h, \varphi) + \tilde{T}_{\mu\nu}^{(2)}(\gamma, h, \varphi) + \dots \quad (1.50)$$

kde $\tilde{T}_{\mu\nu}^{(0)}(\gamma, \varphi) \equiv \tilde{T}_{\mu\nu}(\gamma, \varphi)$ je $O(1)$, další člen je korekce vyššího řádu $\tilde{T}_{\mu\nu}^{(1)} = O(\epsilon)$ a tak dále. Srovnáním tohoto rozvoje s rozvojem Ricciho tenzoru (1.33), tedy levé strany Einsteinových rovnic (1.49), získáváme stejně jako ve vakuovém případě v řádu $O(\epsilon^{-1})$ rovnici šíření vlny (1.37). Další řád, $O(1)$, kombinuje členy zahrnující vysokofrekvenční gravitační vlny i hmotu, a určuje jejich vliv na metriku pozadí:

$$R_{\mu\nu}^{(0)}(\gamma) - 8\pi \tilde{T}_{\mu\nu}^{(0)}(\gamma, \varphi) = -R_{\mu\nu}^{(2)}(\gamma, h) . \quad (1.51)$$

To lze přepsat ve tvaru Einsteinových rovnic jako

$$G_{\mu\nu}^{(0)}(\gamma) = 8\pi \left(T_{\mu\nu}^{(0)}(\gamma, \varphi) + T_{\mu\nu}^{\text{GW}}(\gamma, h) \right) , \quad (1.52)$$

$$T_{\mu\nu}^{\text{GW}}(\gamma, h) = -\frac{1}{8\pi} \left[R_{\mu\nu}^{(2)}(\gamma, h) - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}R^{(2)}(\gamma, h) \right] , \quad (1.53)$$

kde $G_{\mu\nu}^{(0)}(\gamma)$ je Einsteinův tenzor pozadové metriky. Vliv vysokofrekvenčních vln na pozadí lze tedy zahrnout do gravitačního zákona jako **efektivní tenzor energie a hybnosti gravitačních vln** $T_{\mu\nu}^{\text{GW}}(\gamma, h)$ přičtený na pravé straně.

1.2.3 WKB aproximace a šíření vlny

Popis gravitační vlny se velmi zjednoduší, jestliže předpokládáme tvar obdobný rovinné vlně v plochem prostoročase. V linearizované teorii jsme viděli gravitační zákon ve tvaru $\square\vartheta_{\mu\nu} = 0$ a jeho řešení $\vartheta_{\mu\nu} = \text{Re} [A_{\mu\nu}e^{ik_\sigma x^\sigma}]$. Nyní se sice pohybujeme v globálně křivém prostoročase, který ovšem lze na škálách řádu λ stále považovat za přibližně plochý, [12]), a rovnice šíření vlny (1.47) také v nejvyšším řádu obsahuje d'Alembertův operátor. Rovinná vlna by tedy měla zůstat přibližným řešením (1.47), pokud amplituda a fáze vlny budou pomalu se měnící funkce souřadnic. Předpokládáme tedy řešení ve tvaru

$$h_{\mu\nu} = \text{Re} [A_{\mu\nu}e^{i\Phi}] , \quad (1.54)$$

kde $A_{\mu\nu} = O(\epsilon)$ je tenzor amplitudy, a fáze Φ je reálná funkce s velikou první derivací ($\Phi_{,\mu} = O(\epsilon^{-1})$), kterou řádově nepřevyšují žádné derivace další. To odpovídá pomalu se měnícímu vlnovému vektoru.

$$k_\mu \equiv \Phi_{,\mu} . \quad (1.55)$$

Přibližná řešení diferenciálních rovnic ve tvaru rovinné vlny se vyskytují v mnoha oblastech fyziky. Tato aproximace je známá například při výpočtu semiklasické limity kvantové teorie jako WKB (Wentzel, Kramers, Brillouin) aproximace, někdy též jako Liouville-Greenova metoda, v optice jako Eikonálová aproximace. Pro vysokofrekvenční limitu ji právě pod jménem WKB aproximace zavádí Isaacson v [12] a v [9] je popsána jako „geometrická optika“ pro gravitační vlny. Předpoklad v jádru metody je, že existuje asymptotický rozvoj přesného řešení pro krátké vlnové délky, ze kterého můžeme vzít pouze první člen.

Tenzor amplitudy můžeme dále rozepsat na amplitudu \mathcal{A} a normovaný tenzor polarizace $e_{\mu\nu}$ jako

$$A_{\mu\nu} = \mathcal{A}e_{\mu\nu} , \quad \mathcal{A} \equiv (A_{\mu\nu}A^{\mu\nu})^{\frac{1}{2}} , \quad e_{\mu\nu}e^{\mu\nu} = 1 . \quad (1.56)$$

Pak poruchu $h_{\mu\nu}$ píšeme jako

$$h_{\mu\nu} = \mathcal{A}e_{\mu\nu}e^{i\Phi} , \quad (1.57)$$

kde jsme dle zvyku vynechali označení reálné části. Velikosti veličin popisujících vlnu jsou řádu $\mathcal{A} = O(\epsilon)$, $\mathcal{A}_{,\mu} = O(\epsilon)$, $k_\mu = O(\epsilon^{-1})$ a $k_{\mu;\nu} = O(\epsilon^{-1})$.

Dosazením řešení (1.57) do vlnové rovnice (1.47) dostáváme v řádu $O(\epsilon^{-1})$ vztah známý z elektromagnetismu nebo z linearizované teorie

$$k_\mu k^\mu = 0 . \quad (1.58)$$

To znamená, že vlnový vektor je nulový a paralelně se přenáší podél geodetiky. V dalším řádu dostáváme rovnici

$$\left(\mathcal{A}_{,\beta}k^\beta + \frac{1}{2}\mathcal{A}k^\beta{}_{;\beta} \right) e_{\mu\nu} + \mathcal{A}k^\beta e_{\mu\nu;\beta} = 0 , \quad (1.59)$$

což lze po vynásobení $e^{\mu\nu}$ upravit na dva vztahy

$$k^\beta e_{\mu\nu;\beta} = 0 , \quad (1.60)$$

$$(\mathcal{A}^2 k^\beta)_{;\beta} = 0 . \quad (1.61)$$

První rovnice říká, že tenzor polarizace se paralelně přenáší podél geodetiky, polarizace vlny se tedy zachovává. Druhá rovnice hovoří o možném tvaru amplitudy. V integrální podobě vede na zákon zachování pro veličinu ([12])

$$N \equiv \int_S k^0 \mathcal{A}^2 (-\gamma)^{1/2} d^3x , \quad (1.62)$$

kde S je prostorupodobná nadplocha. Pro prostorově omezené vlnové balíky pak platí

$$N_{,0} = 0 . \quad (1.63)$$

To můžeme interpretovat jako zákon zachování počtu „gravitonů“ nebo toku energie podél paprsků. Použitím kalibračních podmínek (1.42, 1.43) dostáváme

$$\gamma^{\mu\nu} e_{\mu\nu} = 0 , \quad (1.64)$$

$$k^\mu e_{\mu\nu} = 0 . \quad (1.65)$$

Díky tomu, že vlnový vektor a polarizace se přenášejí podél geodetiky paralelně, stačí předpokládat splnění těchto podmínek v jednom bodě geodetiky, aby byly už splněny všude. WKB aproximace je tedy konzistentní s kalibrační podmínkou.

Pro pozdější reference ještě jednou shrneme podmínky, které jsme získali

$$\begin{aligned} k^\mu k_\mu &= 0, & k^\mu e_{\mu\nu} &= 0, & k^\alpha e_{\mu\nu;\alpha} &= 0, \\ e^{\mu\nu} e_{\mu\nu} &= 1, & \gamma^{\mu\nu} e_{\mu\nu} &= 0, & (\mathcal{A}^2 k^\beta)_{;\beta} &= 0. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Splnění těchto rovnic spolu s předpokladem (1.46), který vede na

$$e_{0\nu} = 0, \quad (1.67)$$

snímá kalibrační volnost a umožňuje značně upřesnit tvar vysokofrekvenční vlny. Příklad takového řešení uvádíme v sekci (1.2.6).

1.2.4 Prostorovočasové středování a tenzor energie a hybnosti ve WKB aproximaci

Víme ze sekce (1.2.2), že vysokofrekvenční vlny způsobují zakřivení pozadové metriky. Abychom ho však určili, nezajímají nás v makroskopickém měřítku příliš jednotlivé vlnky, ale spíše vlastnosti vystředované přes mnoho vlnových délek. Prostorovočasové středování lze využít, abychom získali jednodušší tvar tenzoru energie a hybnosti (1.53).

Středování uskutečníme na oblasti mnohem větší než vlnová délka vysokofrekvenční vlny a mnohem menší než L . Největší úskalí spočívá v tom, že tenzory v různých bodech prostoročasu nelze sčítat, ani jinak konstruovat průměr. Použijeme tedy podle Isaacsona [13] středovací proceduru, která spočívá v tom, že nejprve paralelně přeneseme středovaný tenzor z bodu x' (který leží v okolí bodu x) po geodetikách do bodu x . K tomu zavádíme „bivektor paralelního přenosu“ $g_\alpha^{\beta'}(x, x')$ definovaný pro libovolné A_α jako

$$A_\alpha(x) = g_\alpha^{\beta'}(x, x') A_{\beta'}(x') \quad (1.68)$$

za předpokladu, že mezi body x a x' existuje jediná geodetika, po které je vektor $A_{\beta'}$ paralelně transportován na A_α jednoznačným způsobem. Vůči souřadnicovým transformacím v bodě x nebo x' se $g_\alpha^{\beta'}(x, x')$ transformuje jako vektor. Dále definujeme váhovou funkci $f(x, x')$ takovou, že na vzdálenostech větších než d ($\lambda \ll d \ll L$) bodů x a x' jde hladce k nule a je normovaná:

$$\int_{\text{Prostorčas}} f(x, x') d^4x = 1. \quad (1.69)$$

Pak střední hodnota pro tenzor $T_{\mu\nu}$ je definována jako

$$\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle = \int_{\text{Prostorčas}} g_\mu^{\alpha'}(x, x') g_\nu^{\beta'}(x, x') T_{\alpha'\beta'}(x') f(x, x') d^4x'. \quad (1.70)$$

K praktickým výpočtům stačí následující pravidla:

- Divergence tenzorů ($T_{\dots}{}^\rho{}_{;\rho}$) jsou o jeden řád v ϵ menší než původní tenzor, a lze je tedy zanedbat.

- Lze integrovat „per partes“, například $\langle h_\nu{}^{\tau;\rho} h_{\rho\mu;\tau} \rangle = \langle h_\nu{}^{\tau;\rho}{}_{;\tau} h_{\rho\mu} \rangle$.
- Kovariantní derivace $h_{\mu\nu}$ komutují.

Za použití těchto podmínek se komplikovaný výraz pro efektivní tenzor energie a hybnosti vysokofrekvenční vlny, který se skrývá za (1.53), pomocí prostoročasového středování zjednoduší na

$$T_{\mu\nu}^{GW} = \frac{1}{32\pi} \langle h^{\rho\tau}{}_{;\mu} h_{\rho\tau;\nu} \rangle . \quad (1.71)$$

Dosadíme-li navíc $h_{\mu\nu}$ ve tvaru WKB vlny (1.54), můžeme zjednodušit $T_{\mu\nu}^{GW}$ až do tvaru [13]

$$T_{\mu\nu}^{GW} = \frac{1}{64\pi} \mathcal{A}^2 k_\mu k_\nu . \quad (1.72)$$

Tento důležitý vztah ukazuje, že tenzor energie a hybnosti vysokofrekvenční gravitační vlny je úplně analogický tenzoru energie a hybnosti pro elektromagnetické záření v přiblížení rovinné vlny [9]. Říkáme, že jde o tenzor energie a hybnosti čistého záření. Z podmínek (1.58) a (1.61) navíc zjistíme, že platí zákon zachování

$$(T^{GW})^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 , \quad (1.73)$$

což umožňuje v asymptoticky plochých prostoročasech počítat energii a hybnost gravitačních vln [13].

V analogii s elektromagnetismem také lze zavést Poyntingův vektor, který popisuje tok gravitační energie, kterou naměří pozorovatel s rychlostí u^μ :

$$S^\alpha \equiv (\delta_\mu^\alpha - u^\alpha u_\mu) u_\nu T_{GW}^{\mu\nu} = \omega q^2 (k^\alpha - \omega u^\alpha) , \quad (1.74)$$

kde $\omega = k^\alpha u_\alpha$ je frekvence vlny, kterou měří pozorovatel ve svém klidovém systému. V klidovém systému pozorovatele také platí $k^\alpha = (\omega, \mathbf{k})$, $S^\alpha = (0, \omega q^2 \mathbf{k})$, tedy tok gravitační energie směřuje ve směru paprsků pole.

1.2.5 WKB pro nekoherentní vlnění.

Isaacson [13] zobecňuje tuto aproximaci i na přítomnost více vln s různými fázemi (s různými frekvencemi nebo z různých směrů). Jestliže vezmeme součet perturbací (1.54)

$$h_{\mu\nu} = \sum_m h_{\mu\nu}^{(m)} = \sum_m \text{Re} \left[A_{\mu\nu}^{(m)} e^{i\Phi^{(m)}} \right] , \quad (1.75)$$

kde každé $h_{\mu\nu}^{(m)}$ je přibližné řešení rovnice šíření vlny (1.47), která je lineární. Díky tomu je i (1.75) přibližné řešení. Pak vystředovaný tenzor energie a hybnosti (1.71) dá

$$\frac{1}{32\pi} \langle h^{\rho\tau}{}_{;\mu} h_{\rho\tau;\nu} \rangle = \frac{1}{32\pi} \sum_{m,n} k_\mu^{(m)} k_\nu^{(n)} A_{(m)}^{\rho\tau} A_{\rho\tau}^{(n)} \langle \sin \Phi^{(m)} \sin \Phi^{(n)} \rangle , \quad (1.76)$$

kde $k_\mu^{(m,n)} = \Phi_{,\mu}^{(m,n)}$. V případě nekoherentního vlnění můžeme zanedbat všechny členy s $m \neq n$ (neboli $\Phi^{(m)} \neq \Phi^{(n)}$), a s použitím $\langle \sin^2 \Phi^{(m)} \rangle = 1/2$ dostáváme

$$T_{\mu\nu}^{GW} = \sum_m T_{\mu\nu}^{(m) \text{ GW}} = \frac{1}{64\pi} \sum_m \mathcal{A}_{(m)}^2 k_\mu^{(m)} k_\nu^{(m)} , \quad (1.77)$$

platí tedy princip superpozice pro tenzory energie a hybnosti nekoherentních vln a pro jejich amplitudy.

1.2.6 Aplikace na Einsteinovu-Rosenovu metriku

Jako příklad práce s výše popsanou aproximací, a pro pozdější srovnání, uvedeme vysokofrekvenční vlnu na pozadí cylindrických gravitačních vln (o Einsteinových-Rosenových vlnách budeme hovořit v odstavci (2.2.1)). Tento příklad je pojednaný v článku [15], kde se diskutuje také přidání vysokofrekvenčních gravitačních vln k pozadí v Kundtově a v Robinsonově-Trautmanově třídě řešení.

Vyjdeme z Einsteinovy-Rosenovy metriky (2.30), kterou použijeme jako požadovou metriku $\gamma_{\mu\nu}$

$$ds^2 = e^{2(\gamma-\Psi)}(d\rho^2 - dt^2) + \rho^2 e^{-2\Psi} d\phi^2 + e^{2\Psi} dz'^2 . \quad (1.78)$$

Chceme-li použít WKB aproximaci, je vhodné zavést nulové souřadnice

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(t - \rho) , \quad v = \frac{1}{\sqrt{2}}(t + \rho) . \quad (1.79)$$

V těchto souřadnicích $\{u, v, \phi, z'\}$ má výše uvedená metrika tvar

$$ds^2 = e^{2(\gamma-\Psi)} du^2 dv^2 + \frac{1}{2}(v - u)^2 d\phi^2 + e^{2\Psi} dz'^2 . \quad (1.80)$$

Nyní přidáme vysokofrekvenční vlnu ve WKB tvaru (1.75), kde budeme předpokládat, že fáze závisí jen na jedné souřadnici $\phi = \phi(u)$, a tedy vlnový vektor je $k_\mu = (\dot{\phi}, 0, 0, 0)$. Použijeme-li podmínky (1.66), zjistíme, že pro tenzor polarizace platí

$$\begin{aligned} e_{\mu\nu} &= a e_{\mu\nu}^+ + b e_{\mu\nu}^\times , \\ a^2(u, x, y) + b^2(u, x, y) &= 1 , \\ e_{\mu\nu}^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-2\Psi} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(v-u)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{4\Psi} \end{pmatrix} , \\ e_{\mu\nu}^\times &= \frac{1}{\sqrt{2}}(v-u) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \end{aligned} \quad (1.81)$$

kde $e_{\mu\nu}^+$ a $e_{\mu\nu}^\times$ jsou tenzory polarizace gravitační vlny. Poslední z podmínek (1.66) je rovnice pro amplitudu, ze které dostáváme

$$((v-u)\mathcal{A}^2)_{,v} = 0 , \quad (1.82)$$

a tedy

$$\mathcal{A} = \frac{\mathcal{U}(u)}{\sqrt{v-u}} . \quad (1.83)$$

kde \mathcal{U} je libovolná funkce taková, že $\mathcal{U} = O(\epsilon)$. Odmocnina ve jmenovateli je v pořádku, protože $v-u = \sqrt{2}\rho > 0$. Tedy z podmínek WKB aproximace (vlastně z rovnice šíření vlny) má porucha tvar

$$h_{\mu\nu} = \frac{\mathcal{U}(u)}{\sqrt{v-u}} e_{\mu\nu} e^{i\Phi(u)} . \quad (1.84)$$

Sestavíme-li tenzor energie a hybnosti gravitační vlny podle (1.72), můžeme sestavit Einsteinovy rovnice

$$\begin{aligned} (v-u)\psi_{,u}^2 + \gamma_{,u} &= -\frac{1}{16}(v-u)\mathcal{A}^2(u)\dot{\phi}^2 = \\ &= -\frac{1}{16}\mathcal{U}^2(u)\dot{\phi}^2, \end{aligned} \quad (1.85)$$

$$(v-u)\psi_{,v}^2 - \gamma_{,v} = 0, \quad (1.86)$$

$$\psi_{,uv} - \frac{1}{2(v-u)}(\psi_{,v} - \psi_{,u}) = 0. \quad (1.87)$$

To je téměř soustava (2.31) pro vakuový případ v nulových souřadnicích, přibývá jediný zdrojový člen na pravé straně závislý pouze na u . Jestliže vezmeme funkce $\Psi(t, \rho)$ a $\gamma(t, \rho)$, které řeší homogenní soustavu (libovolné známé řešení ve třídě Einsteinových-Rosenových vln), můžeme získat řešení soustavy (1.85–1.87) jednoduchou transformací

$$\gamma(t, \rho) \longrightarrow \gamma(t, \rho) + \tilde{\gamma}(u), \quad (1.88)$$

$$\frac{\partial \tilde{\gamma}(u)}{\partial u} = -\frac{1}{16}\mathcal{U}^2\dot{\phi}^2. \quad (1.89)$$

Toto je zase řešení Einstein-Rosenovského typu, které je konzistentní s (1.81), neboť i z Einsteinových rovnic lze získat rovnici (1.82). Dá se tedy říct, že vysokofrekvenční vlna ovlivňuje zakřivení pozaďové metriky skrze funkci $\tilde{\gamma}(u) = O(1)$. Ve speciálním případě, vyjdeme-li původně z plochého prostoročasu $\gamma = \Psi = 0$, dostáváme cylindricky symetrické vysokofrekvenční gravitační vlny.

Článek [15] dále zmiňuje metriku

$$ds^2 = e^{2(\gamma-\Psi)}(d\rho^2 - dt^2) + t^2 e^{-2\Psi} d\phi^2 + e^{2\Psi} dz'^2, \quad (1.90)$$

která odpovídá metrice některých nehomogenních kosmologických modelů (například vakuového Gowdyho 3-toru, sekce (2.2.2)). Oproti metrice (1.78) jsme změnili koeficient u Φ^2 jako $\rho^2 \rightarrow t^2$. To způsobí, že ve výše uvedených výsledcích musíme nahradit $(v-u) \rightarrow (v+u)$ a změnit znaménka všech derivací podle u : $\gamma_{,u} \rightarrow -\gamma_{,u}$, $\Psi_{,uv} \rightarrow -\Psi_{,vu}$. Výpočet v mírně odlišných souřadnicích podrobně provedeme v kapitole (3), kde se navíc budeme zabývat nevakuovým případem a periodizací vysokofrekvenční vlny.

1.2.7 Požadavky na metriku pozadí

Přidání vysokofrekvenční vlny výše popsaným způsobem je možné, pokud pozaďová metrika připouští nerotující² kongruenci světelných geodetik. Tyto mají tečné vektory k^μ , které jsou ortogonální k nadplochám. Proto je možné najít fázovou funkci ϕ , pro kterou $\phi_{, \mu} = k_\mu$, a rovnice pro amplitudu vysokofrekvenční vlny $(\mathcal{A}^2 k^\beta)_{; \beta} = 0$ se dá upravit do tvaru závislého na parametrech kongruence $\frac{d}{dl}(\ln \mathcal{A}) = -\Theta = -\frac{1}{2}k^\mu_{; \nu}$, kde Θ je skalár expanze a l je afinní parametr podél křivek kongruence.

Metrika pozadí dále musí připustit přesné řešení Einsteinových rovnic s přičteným tenzorem energie a hybnosti čistého záření

$$G_{\mu\nu} - 8\pi T_{\mu\nu} = \frac{1}{8}\mathcal{A}^2 k_\mu k_\nu. \quad (1.91)$$

²Optický skalár "twist", je nulový. Optické skaláry lze najít například v [6].

Pak jistě existuje spojení mezi vysokofrekvenční poruchou a přesnými řešeními, a lze explicitně určit reakci pozadové metriky na přítomnost vysokofrekvenční gravitační vlny.

2. Vybrané kosmologické modely

Obecná relativita, a speciálně kosmologie, si klade za cíl popsat vesmír jako celek. Experimentální výsledky svědčí o tom, že vesmír je dnes na velkých škálách velmi dobře homogenní a izotropní, čemuž odpovídají dobře známé FLRW modely (např. [8]), kterým zde nebudeme věnovat pozornost.

Na menších prostorových škálách pozorujeme nehomogenní struktury. Abychom porozuměli jejich vzniku, často lze použít perturbační metody (nejčastěji linearizovanou teorii gravitace, sekce (1.1)). Fundamentálnější vysvětlení vzniku struktur by mohly poskytnout nehomogenní a anizotropní kosmologické modely [19], které mohou též pomoci popsat charakter počáteční singularity (BKL¹ domněnka), nebo sloužit jako vnitřní řešení pro nehomogenní anizotropní hmotné zdroje (hvězdy, ...).

Tato práce se zabývá Isaacsonovou (sekce 1.1.2) vysokofrekvenční perturbací konkrétního (Charachova-Malinova) nehomogenního a anizotropního kosmologického modelu, který obsahuje gravitační vlny a skalární pole [20] a patří do třídy zobecněných Einsteinových-Rosenových prostoročasů. Jako speciální případ obsahuje homogenní Kasnerovo řešení, jehož perturbací se také zabýváme. V této kapitole proto uvedu nejprve přehled prostorově homogenních přesných řešení Einsteinových rovnic, a následně popíšeme nehomogenní třídu zobecněných Einsteinových-Rosenových prostoročasů a některé speciální případy v ní, zejména právě Charachův-Malinův model. Budeme se částečně držet přehledového článku [22], který obsahuje stručné shrnutí výzkumu anizotropních a nehomogenních kosmologií do začátku osmdesátých let.

2.1 Prostorově homogenní modely

Prvním krokem k zobecnění kosmologických modelů nad rámec FLRW je uvažovat sice homogenní, avšak anizotropní vesmír. Takové přiblížení vede na metriku závislou pouze na čase. Prostorově homogenní řešení se klasifikují na základě teorie grup. Uvedeme definici homogenity a izotropie a dále popíšeme takzvanou klasifikaci homogenních anizotropních prostoročasů. Jako příklad, na který se odkazujeme v kapitole (3.5), uvedeme nejjednodušší Kasnerův model.

2.1.1 Homogenita a izotropie

Intuitivní představa, že v homogenním prostoročase „v jistém časovém okamžiku vypadají všechna místa stejně“ se v jazyce obecné relativity přeloží takto:

Prostoročas je *homogenní*, jestliže existuje rozřezání prostoročasu na prostoročasně podobné nadplochy Σ_t takové, že nadplochy jsou číslovány jediným parametrem t a každým bodem prostoročasu prochází právě jedna (= prostoročas je globálně hyperbolický), a navíc pro každé dva body p, q ležící na té samé časové nadploše Σ_t existuje izometrie², která zobrazí p na q .

Lze ukázat [8], že izometrie na varietě tvoří konečnědimenzionální Lieovu grupu.

¹Belinsky, Khalatnikov, Lifshitz

²Definici izometrie na varietě uvádíme v dodatku A.

Oproti tomu izotropii si představujeme jako rotační symetrii v každém bodě. To ovšem v izotropním prostoročase uvidí jen určité preferované skupiny pozorovatelů (například pozorovatel pohybující se vůči homogennímu a izotropnímu rozložení hmoty nebude vnímat své okolí jako izotropní). Geometrická definice se dá formulovat následujícím způsobem:

Prostoročas je v každém bodě *izotropní*, jestliže existuje kongruence časupodobných křivek (světočáry pozorovatelů) s tečným vektorem u^α , která daný prostoročas pokrývá, a má následující vlastnost: Mějme libovolný bod p a dva jednotkové tečné vektory s_1^α, s_2^α ortogonální k u^α („prostorové“ vektory). Pak existuje izometrie, která nemění p a u^α , ale zobrazí s_1^α na s_2^α . [8]

Jinými slovy, v izotropním prostoročase nelze najít geometricky preferovaný vektor kolmý na u^α . Je-li prostoročas homogenní i izotropní zároveň, musí být nadplochy homogenity Σ_t ortogonální k čtyř-rychlosti u^α izotropních pozorovatelů, a jedná se o prostory konstantní křivosti (více k odvození FLRW kosmologie [8], kap. 5).

Z izotropie v každém bodě vyplývá homogenita, ale nikoli naopak. První krok ke složitějším kosmologickým modelům je tedy vzdát se izotropie. To vede díky zbylé symetrii prostoru na metriku závislou pouze na čase, a Einsteinovy rovnice jsou potom soustavou obyčejných diferenciálních rovnic.

2.1.2 Bianchiho modely

Velkou třídou prostorově homogenních anizotropních kosmologií jsou Bianchiho modely. Vyznačují se tím, že připouštějí třídímenzionální grupu izometrií, která působí volně tranzitivně³ na třírozměrných prostorových nadplochách Σ_t . K definici homogenity tedy přidáváme předpoklad, že grupa izometrií je právě třídímenzionální, a že prvek g je právě jeden.

Bianchiho klasifikace je na základě Lieovy algebry dané grupy izometrií, a jako matematická struktura vznikla už v roce 1897 [23]. V relativistické kosmologii byly tyto prostoročasy poprvé studovány v článku [24] a s ideální tekutinou jako zdrojem například v [25].

Triádová baza a metrika Bianchiho modelů Na prostorové nadploše zvolíme ortonormální triádu vektorů $e_{(a)}$, jejíž složky $e_{(a)}^i(x)$ nezávisí na čase. Pak metriku Bianchiho modelů lze zapsat jako [11, 22]

$$ds^2 = -dt^2 + \eta_{(a)(b)}(t)(e_{(a)}^i dx^i)(e_{(b)}^j dx^j). \quad (2.1)$$

Šest nezávislých složek prostorové metriky $\eta_{ab}(t)$ popisuje vývoj vesmíru. Forma $e_{(a)}^i$ je inverzní k $e_{(a)}^i$, a platí

$$e_{(a)}^i e_{(j)}^i = \delta_j^i, \quad (2.2)$$

$$e_{(a)}^i e_{(i)}^b = \delta_{(a)}^b. \quad (2.3)$$

Volba baze prostoru $e_{(a)}$ není jednoznačná. Dvě triády, které mohou být na sebe převedeny pomocí konstantní matice A_a^b transformací

$$e'_{(a)}^\alpha = A_a^b e_{(b)}^\alpha, \quad (2.4)$$

³Definice některých pojmů z teorie Lieových grup obsahuje dodatek B.

popisují ten samý prostoročas. K nalezení Einsteinových rovnic není třeba explicitně znát triádu, stačí prostoročasová metrika $\eta_{(a)(b)}(t)$ a strukturní konstanty dané grupy symetrie.

Prostorová homogenita znamená, že metrika se při změně x nemění, a klade tedy omezení na volbu triády. Především znamená, že formy $e_i^{(a)}(x)dx^i$ jsou v libovolném čase invariantní vůči infinitesimální změně souřadnic:

$$e_i^{(a)}(x)dx^i = e_i^{(a)}(x')dx'^i . \quad (2.5)$$

Tato rovnice po vynásobení $e_{(a)}^k(x')$ dá

$$\partial_i x'^k = e_{(a)}^k(x')e_i^{(a)}(x) , \quad (2.6)$$

což určuje závislost $x'^i(x)$.

Předpokládáme-li při dané tetrádě infinitesimální transformaci souřadnic $x'^j = x^j + \xi^j$, dostáváme

$$\partial_i \xi^j = \xi^k \partial_k e_{(a)}^j e_i^{(a)} . \quad (2.7)$$

Tři lineárně nezávislá řešení $\xi_{(b)}^j$ jsou Killingovy vektory daného prostoročasu [11].

Dosazení (2.6) do podmínky záměnnosti druhých derivací souřadnic $\partial_i \partial_j x'^m = \partial_j \partial_i x'^m$ vede na (odvození lze najít v [11])

$$\left(e_{i,k}^{(c)} - e_{k,i}^{(c)} \right) e_{(a)}^i e_{(b)}^k = C_{ab}^c , \quad (2.8)$$

neboli ekvivalentně

$$e_{(b)}^k \partial_i e_{(a)}^i - e_{(b)}^j \partial_j e_{(a)}^k = C_{ab}^c e_{(c)}^k . \quad (2.9)$$

Zde C_{ab}^c jsou konstanty, které jsou antisymetrické v prvních dvou indexech, a splňují Jacobiho identitu (viz. dodatek B), z čehož můžeme usoudit, že se jedná o strukturní konstanty grupy izometrií daného prostoročasu.

Pokud do rovnice (2.9) zavedeme vektory

$$X_{(a)} = e_{(a)}^i \partial_i , \quad (2.10)$$

dostaneme

$$[X_{(a)}, X_{(b)}] = \sum_c C_{ab}^c X_{(c)} . \quad (2.11)$$

$X_{(a)}$ jsou tedy generátory grupy izometrií s příslušnými strukturními konstantami C_{ab}^c .

Bianchiho klasifikace Strukturní konstanty C_{ab}^c se vůči konstantním transformacím triádové baze (2.4) chovají C_{ab}^c jako tenzor, vznikají tedy třídy ekvivalence spojené konstantní transformací baze. Bianchiho klasifikace je právě dělení do těchto tříd.

Strukturní konstanty můžeme rozložit do složek symetrického tenzoru n^{cd} a vektoru a^b [22]

$$C_{ab}^c = \epsilon_{abd} n^{cd} - \delta_a^c a_b + \delta_b^c a_a . \quad (2.12)$$

Tento zápis je antisymetrický, a Jacobiho identita vede na [11]

$$n^{ab} a_b = 0 . \quad (2.13)$$

Tenzor n^{cd} lze pomocí transformací (2.4) diagonalizovat tak, že

$$n^{cd} = \text{diag}(n^1, n^2, n^3) , \quad (2.14)$$

a vektor a_b bez újmy na obecnosti zapsat jako $a_b = (a, 0, 0)$. Pak lze strukturní konstanty z rovnice (2.12) spočítat, a algebra generátorů (2.11) přejde na

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= aX_2 + n^3 X_3 , \\ [X_1, X_2] &= n^1 X_1 , \\ [X_1, X_2] &= n^2 X_2 - aX_3 . \end{aligned} \quad (2.15)$$

Z (2.13) se stane jednoduchá rovnice

$$n^1 a = 0 . \quad (2.16)$$

Vidíme, že buď n^1 nebo a jsou nulové. Všechny nenulové hodnoty n^a lze navíc položit rovno ± 1 pomocí přeškálování operátorů $X_{(a)}$. (Parametr a v některých modelech přeškálovat na jedničku nelze. [22]) Bianchiho modelům, které mají $a = 0$ se říká tenzorové (tabulka 2.1), modelům s $n^1 = 0$ vektorové (tabulka 2.2).

Tabulka 2.1: Tenzorové Bianchiho modely ($a = 0$)

Bianchiho typ	n^1	n^2	n^3
<i>I</i>	0	0	0
<i>II</i>	1	0	0
<i>VII</i> ₀	1	1	0
<i>VI</i> ₀	1	-1	0
<i>IX</i>	1	1	1
<i>VIII</i>	1	-1	1

Tabulka 2.2: Vektorové Bianchiho modely ($n^1 = 0$)

Bianchiho typ	a	n^2	n^3
<i>V</i>	1	0	0
<i>IV</i>	1	0	1
<i>III</i>	1	-1	1
<i>VI</i> _{<i>h</i>}	<i>a</i>	-1	1
<i>VII</i> _{<i>h</i>}	<i>a</i>	1	1

Bianchiho typ I zahrnuje plochý Euklidovský prostoročas, ale také Kasnerův model (sekce 2.1.4). De-Sitterův vesmír a FLRW modely s kladnou konstantní křivostí jsou obsaženy v typu IX, anti-de-Sitterův vesmír a FLRW modely s konstantní zápornou křivostí jsou typu V.

2.1.3 Kantowského-Sachsův model

Jediná třída prostorově homogenních modelů, která se vymyká Bianchiho klasifikaci, jsou Kantowského-Sachsova řešení [7, 22]. Tyto přípoustějí celkově čtyřdimenzionální grupu izometrií s třídídimenzionální podgrupou, která však nepůsobí volně tranzitivně na celých třírozměrných prostorových nadplochách Σ_t , ale pouze na dvourozměrných nadplochách konstantní kladné křivosti (sférách). Metrika může být psána v (lokálně) sféricky symetrickém tvaru

$$ds^2 = -dt^2 + X^2(t)d\xi^2 + Y^2(t)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.17)$$

kde $X(t)$ a $Y(t)$ jsou libovolné různé škálovací funkce. Do této třídy patří například vnitřní řešení (pod horizontem událostí) ve Schwarzschildově metrice. Mnoho odkazů na další přesná řešení obsahuje kniha [7].

2.1.4 Kasnerův model

Kasnerův model [27] je jedno z nejjednodušších prostorově homogenních, avšak anizotropních řešení, nalezené už v roce 1921. Jedná se o model Bianchiho typu I, který se anizotropně rozpíná. Metrika je

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2p_1}dx^2 + t^{2p_2}dy^2 + t^{2p_3}dz^2, \quad (2.18)$$

kde p_1, p_2, p_3 jsou konstanty, které navíc ve vakuovém případě splňují

$$\sum_{i=1}^3 p_i = 1, \quad \sum_{i=1}^3 p_i^2 = 1. \quad (2.19)$$

Časová souřadnice je volena tak, že $t = \text{konst.}$ jsou nadplochy homogenity. Tento prostoročas je algebraicky obecný [22], kromě případu, kdy $p_1 = p_2 = \frac{2}{3}, p_3 = -\frac{1}{3}$ (který je Petrovova typu D), a $p_1 = p_2 = 0, p_3 = 1$, který lze převést na plochý. Jeden z parametrů p musí být záporný, Kasnerův vesmír se tedy rozpíná podél dvou prostorových os, a podél třetí kontrahuje. Objem vesmíru se však monotónně zvětšuje, $V \sim t$. Kasnerův model je významný svým chováním okolo singularity. Chování prostorově homogenních anizotropních vesmírů můžeme v blízkosti singularity popsat sekvencí Kasnerovských modelů s různými parametry p . V limitě $t \rightarrow 0$ se změny exponenciálně zrychlují a dochází k chaotickým oscilacím parametrů [7]. Toto tvrzení je známé jako BKL doměnka.

Kasnerův model může být zobecněn na přítomnost hmoty, v tom případě nemusí platit podmínky (2.19). Kvalitativní chování v okolí singularity zůstává stejné [22].

V článku [14] Svítek a Podolský ukazují, že Kasnerovské modely s hmotou jsou slučitelné s Isaacsonovou aproximací a řeší rovnici šíření vlny (1.47), neřeší však zpětné ovlivnění pozadové metriky ve smyslu odstavce (1.2.2).

2.2 Zobecněné Einsteinovy-Rosenovy prostoročasy

Užitečnou třídou prostorově nehomogenních modelů jsou zobecněné Einsteinovy-Rosenovy prostoročasy. Metrika má v obecnosti tvar

$$\frac{ds^2}{L^2} = e^f(dz^2 - d\xi^2) + \gamma_{ab}dx^a dx^b, \quad (2.20)$$

kde L je škálovací faktor, který lze položit rovný jedné, x^a, x^b stojí za souřadnice x, y a funkce f a γ_{ab} závisí jen na souřadnicích ξ a z . Metrika je homogenní v rovině x, y a má dva komutující prostorupodobné Killingovy vektory

$$Y_{(x)}^\mu = (0, 0, 1, 0) , \quad Y_{(y)}^\mu = (0, 0, 0, 1) . \quad (2.21)$$

Podle charakteru vektoru

$$G_\mu = \partial_\mu \sqrt{\det \gamma_{ab}} \quad (2.22)$$

má metrika různé fyzikální interpretace: Je-li G_μ globálně prostorupodobný, dostáváme cylindrické (Einsteinovy-Rosenovy) gravitační vlny (sekce 2.2.1), je-li globálně nulový, jedná se o rovinné gravitační vlny. Některé modely s G_μ časupodobným nebo obecným (různým bod od bodu) budeme diskutovat dále.

Abychom mohli uvést Einsteinovy rovnice v co nejjednodušším tvaru, zavedeme v souladu s [22] (případně [20]) zkratky pro determinant

$$\gamma = \det \gamma_{ab} , \quad (2.23)$$

a derivace γ_{ab}

$$\begin{aligned} \gamma_{ab,\xi} &= \kappa_{ab} , & \kappa &= \gamma^{ab} \kappa_{ab} , \\ \gamma_{ab,z} &= \lambda_{ab} , & \lambda &= \gamma^{ab} \lambda_{ab} . \end{aligned} \quad (2.24)$$

Navíc zapíšeme $\kappa_b^a = \gamma^{ac} \kappa_{bc}$ a $\lambda_b^a = \gamma^{ac} \lambda_{bc}$. Pak Einsteinovy rovnice pro metriku (2.20) jsou

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} (\sqrt{\gamma} \kappa_a^b)_{,\xi} - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} (\sqrt{\gamma} \lambda_a^b)_{,z} = 16\pi e^f (T_a^b - \frac{1}{2} \delta_a^b T) , \quad (2.25)$$

$$-\frac{1}{2} (\kappa f_{,\xi} + \lambda f_{,z}) + \kappa_{,z} + \frac{1}{2} \kappa_b^a \lambda_a^b = 16\pi e^f T_z^\xi , \quad (2.26)$$

$$-\lambda f_{,z} - \kappa f_{,\xi} + \kappa_{,\xi} + \lambda_{,z} + \frac{1}{2} \kappa_b^a \kappa_a^b + \frac{1}{2} \lambda_b^a \lambda_a^b = 16\pi e^f (T_\xi^\xi - T_z^z) , \quad (2.27)$$

$$2(f_{,\xi\xi} - f_{,zz}) + \kappa_{,\xi} + \frac{1}{2} \kappa_b^a \kappa_a^b - \frac{1}{2} \lambda_b^a \lambda_a^b = 16\pi e^f (T_\xi^\xi + T_z^z - T) . \quad (2.28)$$

Tyto rovnice v konkrétnějším tvaru uvedeme u Charachova-Malinova modelu v sekci (2.2.3), a dále s nimi budeme pracovat v kapitole 3.

2.2.1 Einsteinovy-Rosenovy cylindrické vlny

Nejznámějším zástupcem, podle kterého je celá třída pojmenovaná, je Einsteinovo-Rosenovo řešení z roku 1937 [3], které jako první ukázalo, že úplná teorie relativity předpovídá gravitační vlny. Řadí se mezi cylindricky symetrické prostoročasy, proto je zapíšeme ve válcových souřadnicích (t, ρ, ϕ, z') . Killingovy vektory (2.21) zde odpovídají symetriím otočení kolem osy z' a posunutí podél téže osy. Takové prostoročasy nejsou kvůli přítomnosti nekonečné osy obecně asymptoticky ploché.

Jestliže existuje foliace na dvoudimenzionální nadplochy ortogonální k orbitám grupy symetrie, lze obecnou metriku válcově symetrických prostoročasů psát ve tvaru [7]:

$$ds^2 = e^{-2\Psi} [e^{2\gamma} (d\rho^2 - dt^2) + W^2 d\phi^2] + e^{2\Psi} (dz' + A d\phi)^2 . \quad (2.29)$$

Funkce Ψ , γ , W a A závisí jen na souřadnicích t a ρ . Aby se jednalo skutečně o válcovou symetrii, musí být metrika na ose z' regulární a koeficient $g_{\phi\phi}$ musí vymizet ($W^2 e^{-2\Psi} + A^2 e_{2\phi} = O(\rho^2)$ pro $\rho \rightarrow 0$). Nejsou-li tyto podmínky na ose splněny, stále je možné takové řešení použít např. jako vnější řešení navazující na válcový objekt na ose.

Ve vakuovém případě musí funkce W řešit vlnovou rovnici $W_{,tt} - W_{,\rho\rho} = 0$, a je-li gradient W prostorupodobný, lze zvolit souřadnice tak, aby $W = \rho$. Pokud je prostoročas navíc symetrický vůči zrcadlení $z' \rightarrow -z'$, $\phi \rightarrow -\phi$, a G_μ globálně prostorupodobný, lze položit $A = 0$ a metriku (refERcyl) zjednodušit na

$$ds^2 = e^{2(\gamma-\Psi)}(d\rho^2 - dt^2) + \rho^2 e^{-2\Psi} d\phi^2 + e^{2\Psi} dz'^2, \quad (2.30)$$

což je kanonický tvar metriky Einsteinových-Rosenových vln. Einsteinovy rovnice pak mají tvar

$$0 = \Psi_{,\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\Psi_{,\rho} - \Psi_{,tt}, \quad (2.31)$$

$$\gamma_{,\rho} = \rho(\Psi_{,\rho}^2 + \Psi_{,t}^2), \quad (2.32)$$

$$\gamma_{,t} = 2\rho\Psi_{,\rho}\Psi_{,t}. \quad (2.33)$$

První rovnice je vlnová rovnice pro neznámou funkci $\Psi(t, \rho)$ ve válcových souřadnicích v plochem prostoru. Funkce γ může být v principu získána integrací dalších dvou rovnic.

2.2.2 Gowdyho prostoročasy

Ze známých řešení ve třídě zobecněných Einsteinových-Rosenových prostoročasů uvedeme nejprve Gowdyho modely (Gowdy [28–30], též Berger např. [31]), které se staly užitečnou testovací laboratoří pro dynamiku úplné teorie relativity. Jedná se o nehomogenní *uzavřené* vesmíry (tj. prostorupodobné nadplochy jsou kompaktní) s gravitačními vlnami šířícími se ve směru osy z . Gowdyho vesmíry mají dvouparametrickou grupu izometrií a dva komutující prostorupodobné Killingovy vektory (2.21). Možné topologie Gowdyho vesmírů jsou 3-sféra, hypertorus, nebo 3-torus.

3-sféra a hypertorus

Modely s topologií S^3 a $S^1 \otimes S^2$ jsou určeny výběrem takové metriky (2.20), že

$$\sqrt{\gamma} = \sin z \sin \xi, \quad (2.34)$$

kde $0 \leq z \leq \pi$, $0 \leq \xi \leq \pi$. Tyto vesmíry jsou tedy uzavřené i v čase, a mají singularitu na $\xi = 0$ a $\xi = \pi$. Vektor G_μ je v různých oblastech časupodobný, prostorupodobný i nulový, a tyto oblasti se setkávají na světelných nadplochách $\xi + z = \pi$ a $\xi - z = 0$. Ve speciálním případě *diagonální* metriky Gowdy vychází z tvaru

$$\frac{ds^2}{L^2} = e^{2a}(dz^2 - d\xi^2) + R[e^{-2\Psi} dx^2 + e^{2\Psi} dy^2], \quad (2.35)$$

který lokálně odpovídá Einsteinovým-Rosenovým vlnám (2.30).

Okrajové podmínky na chování metrických funkcí u $z = 0$ a $z = \pi$ rozhodují o topologii prostoročasu. Gowdy [28] nachází metriku pro 3-sféru

$$\frac{ds^2}{L^2} = \frac{1}{2} \sin \xi \left[e^{2\gamma} (dz^2 - d\xi^2) + 4e^{2W} \cos^2 \frac{z}{2} dy^2 + 4e^{-2W} \sin^2 \frac{z}{2} dx^2 \right], \quad (2.36)$$

a hypertorus

$$\frac{ds^2}{L^2} = \sin^2 \xi \left[e^{2(\gamma-W)} (dz^2 - d\xi^2) + e^{-2W} \sin^2 z dx^2 \right] + e^{2W} dy^2, \quad (2.37)$$

kde W je

$$W = \sum_l [A_l P_l(\cos \xi) + Q_l(\cos \xi)] P_l(\cos z). \quad (2.38)$$

Zde A_l jsou konstanty a P_l, Q_l jsou Legendreovy polynomy prvního a druhého druhu. Funkce γ je komplikovaná a lze ji najít jako integrál v [28] a explicitně [30].

3-torus

V případě 3-toru s topologií $S^1 \otimes S^1 \otimes S^1$ volíme prostorovou metriku tak, že

$$\sqrt{\gamma} = \xi, \quad (2.39)$$

a vektor G_μ je tedy časupodobný. Zde stále platí, že $0 \leq z \leq 2\pi$, ovšem $0 \leq \xi < \infty$. Model má jedinou singularitu na $\xi = 0$. Vakuový model 3-toru byl podrobně studován v letech 1973-1975 v článcích Bergera a Misnera [31,32], zejména s ohledem na kvantování gravitačních vln a charakter počáteční singularity. Dále popíšeme o něco specifičtější nevakuový případ.

2.2.3 Charachovo-Malinovo řešení: 3-torus s gravitačními vlnami a skalárním polem

Gowdyho 3-torus lze zobecnit na nevakuové případy. Charach a Malin našli přesné řešení s nehmotným skalárním polem s minimální vazbou na gravitaci, a o rok později dokonce se skalárním i elektromagnetickým polem [20–22]. Shrňme konstrukci modelu se skalárním polem podle [20]:

Vyjdeme z diagonální metriky

$$\frac{ds^2}{L^2} = e^f (dz^2 - d\xi^2) + \xi [e^p dx^2 + e^{-p} dy^2], \quad (2.40)$$

která je speciálním případem (2.35). Determinant prostorové části $\sqrt{\gamma} = \xi$ odpovídá Gowdyho 3-toru. Od metrických funkcí $f(\xi, z), p(\xi, z)$ vyžadujeme periodicitu v z , a prostorové nadplochy jsou kompaktifikované pomocí $\oint dx dy = 16\pi$.

Řešíme Einsteinovy rovnice

$$R_\nu^\mu = 8\pi \left(T_\nu^\mu - \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu T \right), \quad (2.41)$$

spolu s nehmotným skalárním polem s minimální vazbou na gravitaci, které musí splňovat podmínku

$$\varphi_{,\mu}{}^{;\mu} = 0. \quad (2.42)$$

Jeho tenzor energie a hybnosti je dán výrazem

$$T_{\mu\nu} = \varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha} . \quad (2.43)$$

To pro metriku (2.40) explicitně znamená soustavu parciálně-diferenciálních rovnic

$$0 = \varphi_{,\xi\xi} + \frac{1}{\xi}\varphi_{,\xi} - \varphi_{,zz} , \quad (2.44)$$

$$0 = p_{,\xi\xi} + \frac{1}{\xi}p_{,\xi} - p_{,zz} , \quad (2.45)$$

$$f_{,\xi} = -\frac{1}{2\xi} + \xi \left(8\pi [(\varphi_{,\xi})^2 + (\varphi_{,z})^2] + \frac{1}{2} [(p_{,\xi})^2 + (p_{,z})^2] \right) \quad (2.46)$$

$$f_{,z} = \xi (16\pi \varphi_{,\xi}\varphi_{,z} + p_{,\xi}p_{,z}) . \quad (2.47)$$

Rovnice (2.44), (2.45) jsou lineární a homogenní, libovolná jejich řešení lze tedy sčítat. Mají tvar vlnové rovnice pro radiální funkci ve 2+1 dimenzích. Lze je řešit separací proměnných, a při dodržení periodicity v z má řešení tvar

$$p = p_0 + \alpha_0 \ln \xi + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(z - z_n) [A_n J_0(n\xi) + B_n N_0(n\xi)] , \quad (2.48)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \beta_0 \ln \xi + \sum_{n=1}^{\infty} \cos[n(z - z_n)] [C_n J_0(n\xi) + D_n N_0(n\xi)] , \quad (2.49)$$

kde p_0 , φ_0 , α_0 a β_0 , A_n , B_n , C_n a D_n jsou konstanty a J_n , N_n značí Besselovy funkce prvního a druhého druhu. Na řešení je zajímavé, že skalární pole φ a příčné části gravitačního pole p , jsou zcela nezávislé.

Máme-li řešení pro p a φ ve tvaru (2.48, 2.49), lze je dosadit do rovnic (2.46, 2.47) a přímou integrací získat funkci f :

$$f = f_0 - \frac{1}{2} \ln \xi + f_{GW} + f_S , \quad (2.50)$$

příspěvky skalárního pole f_S a podélné složky gravitačního pole f_{GW} jsou tedy aditivní. Tvar těchto funkcí je stejný až na konstanty a multiplikační faktor 16π , ale poměrně komplikovaný [20]. Pro úplnost ho uvádíme v dodatku C. První dva členy v (2.50) představují příspěvek prostorově homogenního gravitačního pole bez zdroje. f_S a f_{GW} mají jak prostorově homogenní, tak nehomogenní složku.

Homogenní případ

Vyloučíme-li jak skalární pole ($\varphi = 0$), tak příčnou složku gravitačního pole ($p = 0$), dostáváme $f = -\frac{1}{2} \ln \xi$, což vede po transformaci do synchronizovaných souřadnic $dt = \sqrt{-g_{\xi\xi}} d\xi = \xi^{-\frac{1}{4}} d\xi$ na Kasnerův model s koeficienty $p_1 = -\frac{1}{3}$, $p_2 = p_3 = \frac{2}{3}$.

Jestliže uvažujeme pouze prostorově homogenní složku p i ϕ

$$p = p_0 + \alpha_0 \ln \xi , \quad (2.51)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \beta_0 \ln \xi , \quad (2.52)$$

dostáváme

$$f = \left(\frac{(\alpha_0^2 - 1)}{2} + 8\pi\beta_0^2 \right) \ln \xi + f_0 . \quad (2.53)$$

I toto řešení lze převést na model Kasnerova typu, kde ovšem $\sum_{i=1}^3 p_i^2 \leq 1$. Pak je možná expanze podél všech tří os (izotropní případ $p_i = \frac{1}{3}$ je jeden z FLRW modelů).

Limita velkých časů

Charach a Malin dále diskutují, že pro $\xi \gg 1$ lze metrické funkce přibližně zapsat jako:

$$p = \alpha_0 \ln \xi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi n \xi} \right)^{\frac{1}{2}} \cos[n(z - z_n)] \times \\ \times \left\{ A_n \cos \left(n\xi - \frac{\pi}{4} \right) + B_n \sin \left(n\xi - \frac{\pi}{4} \right) \right\} , \quad (2.54)$$

$$\varphi = \beta_0 \ln \xi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi n \xi} \right)^{\frac{1}{2}} \cos[n(z - z_n)] \times \\ \times \left\{ C_n \cos \left(n\xi - \frac{\pi}{4} \right) + D_n \sin \left(n\xi - \frac{\pi}{4} \right) \right\} , \quad (2.55)$$

$$f = \left(\frac{\alpha_0^2 - 1}{2} + 8\pi\beta_0^2 \right) \ln \xi + \frac{\xi}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^2 + B_n^2) n + 8\xi \sum_{n=1}^{\infty} (C_n^2 + D_n^2) n. \quad (2.56)$$

Rozklad stojí na expanzi Besselových funkcí v (2.48, 2.49) v limitě velkých argumentů.

Pak můžeme metriku přibližně rozdělit na dvě části

$$g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} , \quad (2.57)$$

kde

$$\gamma_{\mu\nu} = \text{diag}(-e^f, e^f, \xi^{\alpha_0+1}, \xi^{-\alpha_0+1}) , \quad (2.58)$$

je metrika „pozadí“, a

$$h_{\mu\nu} = \text{diag}(0, 0, \xi^{\alpha_0+1} \bar{p}, -\xi^{-\alpha_0+1} \bar{p}) , \quad (2.59)$$

$$\bar{p} = p - \alpha_0 \ln \xi \quad (2.60)$$

interpretujeme jako poruchu, vlnu.

Dosazením požadové metriky $\gamma_{\mu\nu}$ do Einsteinových rovnic (2.20) lze zjistit, že se jedná o přesné řešení s tenzorem energie a hybnosti

$$T_{\nu}^{\mu} = T^{(1)\nu}_{\mu} + T^{(2)\nu}_{\mu} , \quad (2.61)$$

$$T^{(1)\nu}_{\mu} = \frac{e^{-f}}{8\pi\xi} K \text{diag}(-1, 1, 0, 0) , \quad (2.62)$$

$$T^{(2)\nu}_{\mu} = \frac{1}{2} T \text{diag}(-1, 1, 1, 1) , \quad (2.63)$$

kde

$$T = T_\alpha^\alpha = \beta_0^2 \xi^{-2} e^{-f} , \quad (2.64)$$

$$K = \sum_{n=1}^{\infty} n \left[\frac{1}{4\pi} (A_n^2 + B_n^2) + 4(C_n^2 + D_n^2) \right] . \quad (2.65)$$

Tento tenzor energie a hybnosti má fyzikální interpretaci. Význam konstant $A_n - D_n$ v přesném řešení napovídá, že $T^{(1)\mu}_\nu$ lze rozložit na superpozici gravitačních a skalárních vln. Pomocí světelného vektoru

$$k_\mu = \frac{1}{\sqrt{\pi\xi}} (|n|, n, 0, 0) \quad (2.66)$$

lze psát

$$T_{\mu\nu}^{(1)} = T_{\mu\nu}^{\text{GW}} + T_{\mu\nu}^{\text{SW}} , \quad (2.67)$$

$$T_{\mu\nu}^{\text{GW}} = \frac{1}{64\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|n|} (A_n^2 + B_n^2) k_\mu k_\nu , \quad (2.68)$$

$$T_{\mu\nu}^{\text{SW}} = \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|n|} (C_n^2 + D_n^2) k_\mu k_\nu . \quad (2.69)$$

Takový tvar tenzoru energie a hybnosti odpovídá nulovému toku nehmotných skalárních částic (2.69) a „gravitonů“ (2.68) bez srážek. Je to také tvar pro vysokofrekvenční gravitační vlny ve WKB aproximaci (viz. 1.77). Mody s kladným n představují pohyb ve směru souřadnice z , se záporným n v protisměru.

Příspěvek $T^{(2)\mu}_\nu$ odpovídá tenzoru energie a hybnosti homogenního skalárního pole

$$\varphi = \varphi_0 + \beta_0 \ln \xi . \quad (2.70)$$

Charach a Malin nazývají tuto limitu „vysokofrekvenční“, a na základě tenzoru energie a hybnosti ji interpretují jako homogenní model se skalárním polem, na kterém se pohybují vysokofrekvenční skalární a gravitační vlny. Vysoké frekvence vln zde ukazuje úměra $k_\mu \sim 1/\sqrt{\xi}$, protože $\xi \rightarrow \infty$.

Povšimněme si, že ve výše popsáném postupu byla použita pouze metrika pozadí (2.58) s funkcí f ve tvaru (2.56). Tvar poruchy (2.59), ani úplný asymptotický tvar p a φ nebyly explicitně použity, není tedy jasné, zda a v jakém smyslu právě tyto funkce generují $T^{(1)\mu}_\nu$.

Oproti tomu Berger ve své práci [31] o (vakuovém) Gowdyho modelu vychází z asymptotického tvaru, který v jiných souřadnicích odpovídá rozvoji (2.54) metrické funkce p , a za pomoci Isaacsonova formalismu dochází k $T_{\mu\nu}^{\text{GW}}$ ve tvaru (2.68). Oprávněnost tohoto postupu budeme diskutovat v sekci (3.5.2).

3. Vysokofrekvenční vlny v zobecněných Einsteinových-Rosenových prostoročasech

Budeme se zabývat možností přidat vysokofrekvenční perturbace v Isaacsonově aproximaci (sekce 1.1.2) k řešením vycházejícím z pozadové metriky $\gamma_{\mu\nu}$ (2.40):

$$ds^2 = e^f(dz^2 - d\xi^2) + \xi e^p dx^2 + \xi e^{-p} dy^2, \quad (3.1)$$

kde $f = f(\xi, z)$, $p = p(\xi, z)$. Tato metrika leží v třídě zobecněných Einsteinových-Rosenových vln. Nadplochy (x, y) jsou homogenní, z je prostorová souřadnice, ξ časová. V případě odpovídající kompaktifikace (vyžadujeme, aby $\int dx dy = \text{konst.}$, a aby metrické funkce byly periodické v z) se jedná o vakuový Gowdyho 3-torus, anebo o Charachův-Malinův model se skalárním polem.

Poruchu budeme označovat $h_{\mu\nu}$ a celou metriku $g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$.

3.1 Einsteinovy rovnice v nulových souřadnicích

Budeme pracovat v nulových souřadnicích (u, v, x, y)

$$u = \xi - z, \quad v = \xi + z, \quad (3.2)$$

$$\xi = \frac{v + u}{2}, \quad z = \frac{v - u}{2}. \quad (3.3)$$

Metrika má (3.1) tvar

$$ds^2 = -e^f du dv + \left(\frac{v + u}{2} e^p\right) dx^2 + \left(\frac{v + u}{2} e^{-p}\right) dy^2. \quad (3.4)$$

Pomocí programu Maple 2015 jsme získali Einsteinovy rovnice (které odpovídají obecnému tvaru (2.25-2.28))

$$\begin{aligned} \text{ER}_v^u : \quad & (p_{,v})^2 - \frac{2f_{,v}}{u+v} - \frac{1}{(u+v)^2} = 8\pi e^f T_v^u, \\ \text{ER}_u^v : \quad & (p_{,u})^2 - \frac{2f_{,u}}{u+v} - \frac{1}{(u+v)^2} = 8\pi e^f T_u^v, \\ \text{ER}_x^x : \quad & 2f_{,uv} - 2p_{,uv} - \frac{1}{u+v}(p_{,u} + p_{,v}) + p_{,u}p_{,v} - \frac{1}{(u+v)^2} = -8\pi e^f T_x^x, \\ \text{ER}_y^y : \quad & 2f_{,uv} + 2p_{,uv} + \frac{1}{u+v}(p_{,u} + p_{,v}) + p_{,u}p_{,v} - \frac{1}{(u+v)^2} = -8\pi e^f T_y^y. \end{aligned}$$

Einsteinův tenzor má jen čtyři nenulové složky, což omezuje i tvar tenzoru energie a hybnosti. V dalším je podstatné, že použité tenzory energie a hybnosti splňují podmínky

$$g_{vu} T_u^u = T_{vu} = T_{uv} = 0. \quad (3.5)$$

I ostatní křížové složky jsou nulové, kovariantní tenzor energie a hybnosti je tedy diagonální.

Vyloučíme z rovnic druhé derivace f . Odečtením složek $ER_y^y - ER_x^x$ získáme rovnici jen pro $p(u, v)$

$$2p_{,uv} + \frac{1}{(u+v)} (p_{,v} + p_{,u}) = 4\pi e^f (T_y^y - T_x^x) . \quad (3.6)$$

V případě $T_y^y = T_x^x$ (např. pro skalární pole) se pravá strana vynuluje.

Ze složek ER_u^u, ER_v^v můžeme vyjádřit první derivace f :

$$f_{,v} = \frac{1}{2}(u+v) [p_{,v}^2 + 16\pi T_{vv}] - \frac{1}{2(u+v)} , \quad (3.7)$$

$$f_{,u} = \frac{1}{2}(u+v) [p_{,u}^2 + 16\pi T_{uu}] - \frac{1}{2(u+v)} . \quad (3.8)$$

Tyto rovnice můžeme zderivovat, smíšenou derivaci $f_{,uv} = f_{,vu}$ dosadit do $ER_y^y + ER_x^x$ a s využitím 3.6 získáváme

$$T_y^y + T_x^x + 4e^{-f} [(u+v)T_{vv}]_{,u} = (T_x^x - T_y^y) (u+v)p_{,v} , \quad (3.9)$$

$$T_y^y + T_x^x + 4e^{-f} [(u+v)T_{uu}]_{,v} = (T_x^x - T_y^y) (u+v)p_{,u} . \quad (3.10)$$

Rovnice (3.6 – 3.10) tvoří soustavu Einsteinových rovnic pro zobecněnou Einsteinovu-Rosenovu metriku, ze které jsme vyloučili druhé derivace f .

3.2 Amplituda vlny ve WKB aproximaci

Vyšetříme šíření vysokofrekvenční vlny ve WKB aproximaci (1.54) ve tvaru

$$h_{\mu\nu} = Re [A_{\mu\nu} e^{i\Phi(u)}] , \quad (3.11)$$

kde jsme zvolili fázi $\Phi = \Phi(u)$, na pozadí daném metrikou (3.4). Určíme tak omezení na tvar tenzoru amplitudy $A_{\mu\nu} = \mathcal{A}e_{\mu\nu}$. Aby byla použita aproximace konzistentní s volbou požadové metriky, musí být splněny podmínky (1.66). Probereme je postupně:

1. Podmínka $\gamma^{\mu\nu} \mathbf{k}_\mu \mathbf{k}_\nu = \mathbf{0}$ je pro k_μ s jedinou složkou $k_u = \Phi_{,u}$ automaticky splněna, neboť $\gamma^{uu} = 0$.
2. $\mathbf{k}^\mu e_{\mu\nu} = \mathbf{0}$ znamená $e_{v\nu} = 0$, jelikož vlnový vektor k^μ má (jedinou) nenulovou složku $k^v = -2e^{-f}\Phi_{,u}$.

Jediná složka kontravariantního vlnového vektoru k^v znamená, že uvažovaná vlna se v soustavě (ξ, z, x, y) šíří ve směru prostorové souřadnice z .

3. $\gamma^{\mu\nu} e_{\mu\nu} = \mathbf{0}$ je podmínka bezestoposti, která vede na vztah mezi složkami tenzoru polarizace

$$e_{xx} = -e_{yy} e^{2p} \quad (3.12)$$

S uvážením kalibrační volnosti, která nám dovoluje zvolit souřadnice takové, že $e_{\mu u} = 0$ (1.46), můžeme zatím psát tenzor polarizace ve tvaru

$$e_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{c}e^p & \bar{d} \\ 0 & 0 & \bar{d} & -\bar{c}e^{-p} \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

kde \bar{c} a \bar{d} mohou být funkcí u a v .

4. V takovém případě získávám z $k^\alpha e_{\mu\nu;\alpha} = \mathbf{0}$ podmínky

$$(u+v)\bar{c}_{,v} - \bar{c} = 0, \quad (3.14)$$

$$(u+v)\bar{d}_{,v} - \bar{d} = 0. \quad (3.15)$$

Netriviální řešení je $\bar{c} \sim (u+v)$, vezmeme tedy

$$\bar{c} = \frac{1}{\sqrt{8}}c(u+v), \quad (3.16)$$

$$\bar{d} = \frac{1}{\sqrt{8}}d(u+v). \quad (3.17)$$

A tenzor polarizace dostává tvar

$$e_{ab} = \frac{u+v}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} ce^p & d \\ d & -ce^{-p} \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

kde c, d jsou konstanty, a indexy a, b stojí za x a y .

5. Pátá podmínka $e^{\mu\nu}e_{\mu\nu} = 1$ pak dává jednoduchou rovnici

$$c^2 + d^2 = 1. \quad (3.19)$$

6. Poslední je rovnice pro amplitudu $(\mathcal{A}^2 k^\beta)_{;\beta} = \mathbf{0}$, která vede na

$$2\mathcal{A}_{,u}(u+v) + \mathcal{A} = 0, \quad (3.20)$$

a tedy

$$\mathcal{A}(u, v) = \sqrt{\frac{h(u)}{u+v}}, \quad (3.21)$$

kde $h(u)$ je libovolná funkce volená tak, aby byly zachovány podmínky aproximace $\mathcal{A} = O(\epsilon)$, $\mathcal{A}_{,\mu} = O(\epsilon)$.

Stejný tvar amplitudy můžeme dostat, jestliže tenzor energie a hybnosti odpovídající perturbaci (3.11) dosadíme do podmínky (3.10), která plyne z Einsteinových rovnic.

Tenzor amplitudy má tedy pouze příčné složky, a ty lze zapsat jako

$$A_{ab} = \sqrt{\frac{h(u)(u+v)}{8}} \left[c \begin{pmatrix} e^p & 0 \\ 0 & -e^{-p} \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right], \quad (3.22)$$

kde $c^2 + d^2 = 1$.

Zcela obdobné výsledky lze získat, pokud uvažujeme fázi $\Phi = \Phi(v)$, tedy vlnu šířící se proti směru souřadnice z . Jediný rozdíl nacházíme v amplitudě, kde $h(u) \rightarrow j(v)$.

3.3 Slučitelnost skalárního pole a WKB vlny

Charachův-Malinův model uvažuje nehmotné skalární pole φ s minimální vazbou na gravitaci, které splňuje podmínku $\varphi^{;\alpha}_{;\alpha} = 0$ a má tenzor energie a hybnosti

$$T_{\mu\nu}^{(\varphi)}(g, \varphi) = \varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha}, \quad (3.23)$$

který nezávisí na derivacích metriky, a o jehož závislosti na ϵ předpokládáme $T_{\mu\nu}^{(\varphi)} = O(1)$. Můžeme tedy použít metodu popsanou v sekci (1.2.2). V řádu $O(1)$ nahradíme $g_{\mu\nu}$ pozadřovou metrikou $\gamma_{\mu\nu}$:

$$T_{\mu\nu}^{(0)}(\gamma, \varphi) \equiv \varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha}. \quad (3.24)$$

Tento tenzor energie a hybnosti závisí jen na derivacích φ , nemusíme tedy předpokládat nic o jeho frekvenci. Uvažujme dvě fyzikálně zajímavé situace:

- a) Skalární pole se mění srovnatelně s pozadřovou metrikou, tedy $\varphi = O(1)$, $\varphi_{,\alpha} = O(1)$.
- b) Pole φ lze považovat za malou poruchu ve stejném smyslu jako gravitační vlnu: $\varphi = O(\epsilon)$, $\varphi_{,\alpha} = O(1)$, a jestliže má být vysokofrekvenční, pak i $\varphi_{,\alpha\beta} = O(\epsilon^{-1})$. Vlnová rovnice pro skalární pole $\varphi^{;\alpha}_{;\alpha} = 0$ má pak stejný řád, jako rovnice šíření vlny pro gravitační perturbaci (1.47).

$T_{\mu\nu}^{(0)}$ má v obou případech řádově stejnou velikost s tenzorem energie a hybnosti gravitační perturbace (1.72), a tedy můžeme sestavit efektivní tenzor energie a hybnosti ve smyslu rovnice (1.52)

$$(T^{\text{EF}})_{\mu\nu} \equiv (T^{(0)})_{\mu\nu} + (T^{\text{GW}})_{\mu\nu}. \quad (3.25)$$

3.4 Model se skalárním polem a perturbace v jednom směru

Uvažujme model daný metrikou (3.4) a skalárním polem φ , ke kterému přidáme vysokofrekvenční vlnu ve WKB aproximaci. Skalární pole je popsáno tenzorem energie a hybnosti (3.24), který má pro $\varphi = \varphi(u, v)$ nenulové složky

$$T_{\mu\nu}^{(0)} = \begin{pmatrix} \varphi_{,u}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{,v}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (v+u)e^{-f+p}\varphi_{,u}\varphi_{,v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (v+u)e^{-f-p}\varphi_{,u}\varphi_{,v} \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

K tomu přidáme vlnu ve WKB tvaru (3.11), což podle (1.52) znamená použití efektivního tenzoru energie a hybnosti s jedinou nenulovou složkou

$$T_{uu}^{\text{GW}} = A^2 (\Phi_{,u})^2, \quad (3.27)$$

$$A^2 = \frac{1}{64\pi} \mathcal{A}^2. \quad (3.28)$$

To odpovídá vysokofrekvenční gravitační vlně šířící se v prostorovém směru z . Einsteinovy rovnice pro vývoj pozadové metriky mají tvar

$$(G^{(0)})_{\nu}^{\mu} = 8\pi [(T^{(0)})_{\nu}^{\mu} + (T^{\text{GW}})_{\nu}^{\mu}] \equiv 8\pi (T^{\text{EF}})_{\nu}^{\mu} .$$

Jestliže $(T^{\text{EF}})_{\nu}^{\mu}$ dosadíme do rovnic (3.6 – 3.10), dostáváme:

$$0 = 2(u + v) \varphi_{,uv} + \varphi_{,v} + \varphi_{,u} , \quad (3.29)$$

$$0 = 2(u + v) p_{,uv} + p_{,v} + p_{,u} , \quad (3.30)$$

$$f_{,v} = \frac{1}{2}(u + v) (p_{,v})^2 - \frac{1}{2(u + v)} + 8\pi(u + v) (\varphi_{,v})^2 , \quad (3.31)$$

$$f_{,u} = \frac{1}{2}(u + v) (p_{,u})^2 - \frac{1}{2(u + v)} + 8\pi(u + v) [(\varphi_{,u})^2 + A^2 (\Phi_{,u})^2] . \quad (3.32)$$

To je až na člen obsahující Φ soustava (2.44 – 2.47) zapsaná v nulových souřadnicích. První rovnici (3.29) jsme dostali z (3.9) aplikací na $T_{\mu\nu}^{(0)}$. Zároveň jde o explicitní zápis podmínky $\varphi^i{}_{;\alpha} = 0$ kladené na skalární pole. Z rovnice (3.10) plyne rovnice pro amplitudu (3.20). Soustava je tedy konzistentní jak s podmínkami kladenými na skalární pole, tak s WKB aproximací.

3.4.1 Neperiodické řešení

Ilustrujeme řešení soustavy (3.29 – 3.32). První dvě rovnice mají tvar vlnové rovnice pro úhlově symetrickou funkci ve 2+1 dimenzích. Lépe je to vidět v souřadnicích (ξ, z) (soustava 2.44 – 2.47), kde ξ formálně odpovídá radiální souřadnici a z času: první dva členy v (2.44) odpovídají dvourozměrnému Laplaceovu operátoru pro úhlově symetrickou funkci, poslední člen je druhá derivace podle času. Charach a Malin tyto rovnice vyřešili pomocí (2.48, 2.49). My vezmeme jiné řešení, které lze získat separací proměnných $p(u, v) = p(u)p(v)$. Pak

$$p = \frac{a_1}{\sqrt{a_2 - u}\sqrt{a_2 + v}} , \quad (3.33)$$

$$(3.34)$$

kde $a_{1,2}$ jsou integrační konstanty. Pak integrací rovnice (3.31) dostáváme

$$f = -\frac{1}{2} \ln(u + v) + \frac{1}{16} \frac{a_1^2(u + 2v + a_2)}{(a_2 - u)(a_2 + v)^2} + f_1(u) , \quad (3.35)$$

kde $f_1(u)$ je zatím neurčená funkce. Po zderivování, dosazení do (3.32) a dosazení za poruchový člen

$$\int 8\pi(u + v)A^2 (\Phi_{,u})^2 du = \frac{1}{8} \int (u + v)\mathcal{A}^2 (\Phi_{,u})^2 du = \frac{1}{8} \int h(u) (\Phi_{,u})^2 du , \quad (3.36)$$

dostáváme

$$f = f_0 - \frac{1}{2} \ln(u + v) + \frac{1}{16} \frac{a_1^2(u + v)^2}{(a_2 - u)^2(a_2 + v)^2} + \frac{1}{8} \int h(u) (\Phi_{,u})^2 du . \quad (3.37)$$

Jestliže uvažujeme též skalární pole ve stejném tvaru jako p , tedy

$$\varphi = \frac{b_1}{\sqrt{b_2 - u}\sqrt{b_2 + v}} , \quad (3.38)$$

kde $b_{1,2}$ jsou konstanty, dostávám pro funkci f

$$f = f_0 - \frac{1}{2} \ln(u+v) + \frac{1}{16} \frac{a_1^2 (u+v)^2}{(a_2+v)^2 (-a_2+u)^2} + \frac{\pi b_1^2 (u+v)^2}{(b_2+v)^2 (-b_2+u)^2} + \frac{1}{8} \int h(u) (\Phi_{,u}(u))^2 du . \quad (3.39)$$

Příspěvky skalárního pole φ a příčné části gravitačního pole p jsou oddělené a liší se pouze záměnou $a \rightarrow b$ a faktorem 16π .

Vlnová rovnice (3.30) je lineární, lze tedy sčítat řešení. Počet členů ve funkci f však rychle narůstá. Jestliže například přičteme další jednoduchá řešení, která lze uhadnout (lineární řešení $c_1 (u-v)$ a $\alpha \ln\left(\frac{u+v}{2}\right)$, což je prostorově homogenní řešení), máme

$$p = p_0 + c_1 (u-v) + \alpha \ln\left(\frac{u+v}{2}\right) + \frac{a_1}{\sqrt{a_2-u}\sqrt{a_2+v}} , \quad (3.40)$$

a z toho dostáváme funkci f obsahující křížové členy

$$f = \frac{1}{2} (\alpha-1)(\alpha+1) \ln(u+v) + \frac{1}{4} (u^2 + 4uv + v^2) c_1^2 + \left(\frac{(u-v-2a_2)a_1}{\sqrt{a_2-u}\sqrt{a_2+v}} + \alpha(u-v) \right) c_1 + \frac{1}{16} \frac{(u+v)^2 a_1^2}{(-a_2+u)^2 (a_2+v)^2} + \frac{\alpha a_1}{\sqrt{a_2-u}\sqrt{a_2+v}} + \frac{1}{8} \int h(u) (\Phi_{,u}(u))^2 du + f_0 \quad (3.41)$$

Uvedená řešení jsou reálná pouze pro $u > a_2$, $v < -a_2$, nebo $u < a_2$, $v > -a_2$, a nelze je periodizovat v $z = (v-u)/2$.

3.4.2 Charachův-Malinův model s vysokofrekvenční vlnou v jednom směru - periodizace

V předchozí sekci jsme ilustrovali, že přidání vysokofrekvenční vlny k Einsteinově-Rosenově metrice vede v každém konkrétním případě na přidání jediného členu do funkce f . Podobně můžeme vzít libovolné řešení soustavy (3.29 – 3.32) bez $T_{\mu\nu}^{(GW)}$ a WKB vlna ve tvaru splňujícím podmínky aproximace s ním bude slučitelná. Je-li však původní řešení periodické (s netriviální topologií), jako Gowdyho modely nebo Charachovo-Malinovo řešení, musíme i perturbaci uvažovat periodickou v $z = \frac{v-u}{2}$.

Soustavu rovnic (3.29 – 3.32) lze integrovat stejným způsobem, jako to udělali Charach a Malin v článku (2.40) a jak jsme popsali v sekci (2.2.3), tedy s použitím

řešení pro p a ϕ periodických v z . Tato mají v nulových souřadnicích tvar

$$p = p_0 + \alpha \ln \left(\frac{v-u}{2} \right) + \quad (3.42)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \cos \left[\left(\frac{v+u}{2} - z_n \right) \right] \left[A_n J_0 \left(n \frac{v+u}{2} \right) + B_n N_0 \left(n \frac{v-u}{2} \right) \right] ,$$

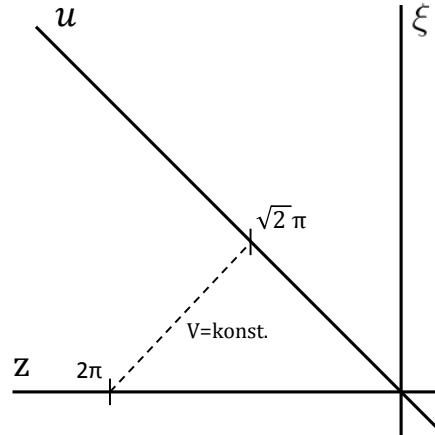
$$\varphi = \varphi_0 + \beta_0 \ln \left(\frac{v-u}{2} \right) + \quad (3.43)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \cos \left[n \left(\frac{v+u}{2} - z_n \right) \right] \left[C_n J_0 \left(n \frac{v+u}{2} \right) + D_n N_0 \left(n \frac{v-u}{2} \right) \right] .$$

To po přidání vysokofrekvenční vlny vede na funkci f v Charachově-Malinově tvaru [20] s jedním dodatečným členem:

$$f = f_0 - \frac{1}{2} \ln \xi + f_{GW} + f_S + \int h(u) (\Phi_{,u}(u))^2 du . \quad (3.44)$$

Dodatečný člen



Obrázek 3.1: Perioda funkce ve směru u .

$$g(u) \equiv \int h(u) (\Phi_{,u}(u))^2 du \quad (3.45)$$

ve funkci f představuje zpětné ovlivnění pozadí vlnou. Vidíme, že je funkcí pouze u , a tedy podél souřadnice v je konstantní. Chceme-li funkci 2π -periodickou v z

$$g(z) = g(z + 2\pi) , \quad (3.46)$$

musíme ji volit periodickou v u s periodou $\sqrt{2}\pi$ (viz. obrázek 3.1), tedy

$$g(u) = g(u + \sqrt{2}\pi) . \quad (3.47)$$

Jestliže zvolíme $\sqrt{2}\pi$ -periodické funkce $h(u)$ a $k_u = \Phi_{,u}(u)$, pak jistě integrand bude periodický, a tedy i primitivní funkce bude periodická.

Nejjednodušší volba tohoto typu, která splňuje podmínky WKB aproximace $k_\mu = O(\epsilon^{-1})$, $\mathcal{A} = O(\epsilon)$ a $\mathcal{A}_{,\mu} = O(\epsilon)$, je

$$h(u) = \epsilon^2 \text{konst.} , \quad k_u = \text{konst.}/\epsilon, \quad (3.48)$$

a tedy tvar vysokofrekvenční vlny

$$h_{\mu\nu} = \sqrt{\frac{\epsilon^2 h}{u+v}} e_{\mu\nu} e^{i\frac{k}{\epsilon}u} \quad (3.49)$$

s konstantami h a k je konzistentní s Charachovým-Malinovým modelem.

Tímto jsme ukázali, že WKB vlny lze přidat i v prostorově kompaktním případě.

3.5 Kasnerův model a vlny ve dvou směrech

V sekci (2.2.3) jsme shrnuli, že Charachův-Malinův model v limitě velkých časů přechází na prostorově homogenní anizotropní řešení s tenzorem energie a hybnosti odpovídajícím gravitačním a skalárním vlnám. Ukážeme, do jaké míry je tento výsledek konzistentní s Isaacsonovou vysokofrekvenční perturbací na pozadí $\gamma_{\mu\nu}$ daném metrikou (2.58)

$$\begin{aligned} ds^2 &= e^f (dz^2 - d\xi^2) + \xi^{\alpha+1} dx^2 + \xi^{-\alpha+1} dy^2 = \\ &= -e^f dudv + \left(\frac{v+u}{2}\right)^{\alpha+1} dx^2 + \left(\frac{v+u}{2}\right)^{-\alpha+1} dy^2 . \end{aligned} \quad (3.50)$$

Pro přehlednost se budeme zabývat pouze případem bez skalárního pole. Jedná se v zásadě o přidání vysokofrekvenční gravitační vlny do Kasnerova modelu, viz. sekce (2.1.4) a odstavec o homogenním řešení v sekci (2.2.3).

Tvar prostorové části metriky odpovídá

$$p = \alpha \ln \xi = \alpha \ln \left(\frac{u+v}{2}\right) . \quad (3.51)$$

Jestliže tuto funkci dosadíme do rovnic (3.6 – 3.10), získáme soustavu

$$0 = T_y^y - T_x^x , \quad (3.52)$$

$$0 = T_y^y + T_x^x + [(u+v)T_{,vv}]_{,u} = T_y^y + T_x^x + [(u+v)T_{,uu}]_{,v} , \quad (3.53)$$

$$f_{,v} = \frac{\alpha^2 - 1}{2(u+v)} + 16\pi \left(\frac{u+v}{2}\right) T_{vv} , \quad (3.54)$$

$$f_{,u} = \frac{\alpha^2 - 1}{2(u+v)} + 16\pi \left(\frac{u+v}{2}\right) T_{uu} . \quad (3.55)$$

V případě WKB vlny je $T_x^x = T_y^y = 0$, první rovnice je tedy triviálně splněna, rovnice (3.53) přejde na rovnici pro amplitudu (kterou jsme řešili v sekci (3.20)), a zůstávají pouze poslední dvě diferenciální rovnice pro funkci f .

3.5.1 Tvar vysokofrekvenční vlny, tenzor energie a hybnosti a obecné řešení

Jak jsme popsali v odstavci (1.2.5), lze uvažovat více nezávislých vln z různých směrů nebo s různými frekvencemi, které musí splňovat podmínky WKB aproximace zcela nezávisle na sobě. V sekci (3.20) jsme pro vlnu s reálnou amplitudou a fází závislou na u ukázali, že pro

$$h_{\mu\nu} = \text{Re} [A_{\mu\nu} e^{i\Phi(u)}] = \text{Re} [\mathcal{A} e_{\mu\nu} e^{i\Phi(u)}] , \quad (3.56)$$

platí

$$\mathcal{A}(u, v) = \sqrt{\frac{h(u)}{u+v}} . \quad (3.57)$$

Zcela obdobně můžeme pro vlnu ve směru v

$$h_{\mu\nu} = \text{Re} [A_{\mu\nu} e^{i\tilde{\Phi}(v)}] = \text{Re} [\mathcal{A} e_{\mu\nu} e^{i\tilde{\Phi}(v)}] , \quad (3.58)$$

zjistit, že

$$\mathcal{A}(u, v) = \sqrt{\frac{j(v)}{u+v}} , \quad (3.59)$$

kde $j(v)$ je vhodná funkce. Tenzor polarizace je v obou případech stejný, a jelikož v této sekci pracujeme s metrikou pozadí (3.50), která je diagonální v x, y , budeme uvažovat také diagonální tenzor polarizace (polarizace „+“), tedy podle (3.18, 3.19)

$$e_{ab} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \left(\frac{u+v}{2}\right)^{\alpha+1} & 0 \\ 0 & -\left(\frac{u+v}{2}\right)^{-\alpha+1} \end{pmatrix} \quad \text{pro } a, b \in \{x, y\} . \quad (3.60)$$

Vlny ve tvaru (3.56), 3.58) se šíří prostorově ve směru a proti směru souřadnice z . Jestliže vlny ve stejném směru mají různé frekvence, lze je podle (1.75) sčítat. Navíc, dosadíme-li fáze vln závislé na u a v do vztahu (1.76), můžeme ověřit, že

$$\left\langle \sin \Phi(u) \sin \tilde{\Phi}(v) \right\rangle = \int_{\text{středová oblast}} \sin \Phi(u) \sin \tilde{\Phi}(v) \, du dv = 0 . \quad (3.61)$$

Lze tedy uvažovat i fáze závislé na u a v , a tenzor energie a hybnosti (1.77) zůstává ve tvaru součtu.

Pro nekoherentní WKB vlny ve dvou směrech napíšeme

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} &= \sum_{\{m,n\}} h_{\mu\nu}^{(m,n)} \\ &= e_{\mu\nu} \left\{ \sum_m \text{Re} [\mathcal{A}_{(m,u)} e^{i\Phi^{(m)}(u)}] + \sum_n \text{Re} [\mathcal{A}_{(n,v)} e^{i\tilde{\Phi}^{(n)}(v)}] \right\} , \end{aligned} \quad (3.62)$$

kde m, n čísují fáze (může se jednat o libovolný počet diskretních hodnot), a kde jsme popsali $\Phi^{(m)}(u)$ fáze vln závislé pouze na u a $\mathcal{A}_{(m,u)}$ jejich amplitudy, obdobně pro v . Takovému $h_{\mu\nu}$ podle (1.77) a po upřesnění tvaru amplitudy (3.57,

3.59) přísluší tenzor energie a hybnosti se dvěma složkami

$$T_{uu}^{\text{GW}} = \sum_m T_{uu}^{(m)\text{GW}} = \frac{1}{64\pi} \sum_m \frac{h^{(m)}(u)}{u+v} \left(k_u^{(m)} \right)^2, \quad (3.63)$$

$$T_{vv}^{\text{GW}} = \sum_n T_{vv}^{(n)\text{GW}} = \frac{1}{64\pi} \sum_n \frac{j^{(n)}(v)}{u+v} \left(k_v^{(n)} \right)^2. \quad (3.64)$$

Dosazením T_{uu} , T_{vv} do rovnic (3.54, 3.55) a zintegrováním zjistíme, že funkce f má tvar

$$f = f_0 + \frac{\alpha^2 - 1}{2} \ln \left(\frac{u+v}{2} \right) + \quad (3.65)$$

$$+ \frac{1}{8} \left\{ \sum_m \int h^{(m)}(u) k_u^{(m)} du + \sum_n \int j^{(n)}(v) k_v^{(n)} dv \right\}.$$

První dva členy odpovídají Kasnerově modelu, druhé dva vyjadřují ovlivnění požadové metriky vysokofrekvenčními vlnami.

3.5.2 Srovnání s limitou dlouhých časů Charachova-Malinova modelu

Uvedli jsme v sekci (2.2.3), že Charach a Malin interpretují limitu $\xi \rightarrow \infty$ jako homogenní (Kasnerův) model se skalárním polem a s vysokofrekvenčními gravitačními a skalárními vlnami. Ověříme, do jaké míry lze rovnice (2.54) a (2.56) převést do Isaacsonova formalismu, a zda jsou konzistentní navzájem. Budeme uvažovat pouze případ bez skalárního pole (Gowdyho model). Máme tedy požadovou metriku (3.50) a poruchu $h_{\mu\nu}^{\text{(ChM)}}$ danou rovnicí (2.58):

$$h_{\mu\nu}^{\text{(ChM)}} = \text{diag} \left(0, 0, \left(\frac{u+v}{2} \right)^{\alpha+1} \bar{p}, - \left(\frac{u+v}{2} \right)^{-\alpha+1} \bar{p} \right), \quad (3.66)$$

$$\bar{p} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi n(u+v)} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \left[n \left(\left(\frac{v-u}{2} \right) - z_n \right) \right] \times \quad (3.67)$$

$$\times \left\{ A_n \cos \left[n \left(\frac{u+v}{2} \right) - \frac{\pi}{4} \right] + B_n \sin \left[n \left(\frac{u+v}{2} \right) - \frac{\pi}{4} \right] \right\},$$

Toto $h_{\mu\nu}^{\text{(ChM)}}$ bychom rádi dostali do WKB tvaru. Srovnáním s (3.62) vidíme, že bychom rádi dostali

$$h_{\mu\nu}^{\text{(ChM)}} = \sum_{\{m,n\}} \text{Re} \left[\mathcal{A}^{(m,n)} e^{i\Phi^{(m,n)}} \right] e_{\mu\nu}, \quad (3.68)$$

kde fáze $\Phi^{(m,n)}$ závisí buď na u nebo na v . Za použití tvaru tenzoru polarizace (3.60) máme

$$h_{\mu\nu}^{\text{(ChM)}} = \sqrt{2\bar{p}} e_{\mu\nu}. \quad (3.69)$$

Navíc víme, že $\mathcal{A}^{(m,n)} \sim (u+v)^{-1/2}$, což je stejná závislost jako v \bar{p} . Chceme tedy dostat $(u+v)^{1/2} \bar{p}$ do tvaru součtu kosínů, které jsou závislé pouze na jedné

souřadnici, čehož snadno dosáhneme za pomoci vzorců pro součin:

$$\begin{aligned} 2A_n \cos \left[n \left(\frac{v-u}{2} \right) - z_n \right] \cos \left[n \left(\frac{u+v}{2} \right) - \frac{\pi}{4} \right] &= \\ &= A_n \cos \left[nu + nz_n - \frac{\pi}{4} \right] + A_n \cos \left[nv - nz_n - \frac{\pi}{4} \right] , \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} 2B_n \cos \left[n \left(\frac{v-u}{2} \right) - z_n \right] \sin \left[n \left(\frac{u+v}{2} \right) - \frac{\pi}{4} \right] &= \\ &= B_n \cos \left[nu + nz_n - \frac{3\pi}{4} \right] + B_n \cos \left[nv - nz_n - \frac{3\pi}{4} \right] . \end{aligned} \quad (3.71)$$

Po dosazení do (3.69) jsme zdánlivě hotovi

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}^{(\text{ChM})} &= e_{\mu\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{n\pi(u+v)}} \left(A_n \cos \left[nu + nz_n - \frac{\pi}{4} \right] + B_n \cos \left[nu + nz_n - \frac{3\pi}{4} \right] \right) + \\ &+ e_{\mu\nu} \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{m\pi(u+v)}} \left(A_m \cos \left[mv - mz_m - \frac{\pi}{4} \right] + B_m \cos \left[mv - mz_m - \frac{3\pi}{4} \right] \right) . \end{aligned} \quad (3.72)$$

Ke stejnému výsledku dochází Berger ([31], str. 469), který tento výpočet provedl pro limitu velkých časů Gowdyho modelu. Ve své práci na základě ověření podmínek (1.66) konstatuje, že WKB aproximaci lze použít, a dále pracuje s odvozeným tenzorem energie a hybnosti.

Diskuse podmínek aproximace Při podrobnějším pohledu zjistíme, že je nutné diskutovat dva problémy. První se týká nekoherence vln. Rovnice (3.72) obsahuje členy typu $A_n \cos \left[\frac{n}{\epsilon}u + nz_n - \frac{\pi}{4} \right] + B_n \cos \left[\frac{n}{\epsilon}u + nz_n - \frac{3\pi}{4} \right]$, které mají stejnou frekvenci a stejný směr, nesplňují tedy na první pohled podmínky, za kterých jsme odvodili vystředovaný tenzor energie a hybnosti (1.77). Dosadíme tedy příslušné fáze vln do vztahu (1.76). Pro koherentní vlny zůstane křížový člen

$$\begin{aligned} &\left\langle \sin \left[\frac{n}{\epsilon}u + nz_n - \frac{\pi}{4} \right] \sin \left[\frac{n}{\epsilon}u + nz_n - \frac{3\pi}{4} \right] \right\rangle \\ &= \left\langle \cos \left[2\frac{n}{\epsilon}u + 2nz_n - \pi \right] \right\rangle + \left\langle \cos \frac{\pi}{2} \right\rangle = 0 . \end{aligned} \quad (3.73)$$

Díky tomu, že rozdíl fází je přesně $\frac{\pi}{2}$, můžeme přidat obě vlny a tenzor energie a hybnosti zůstává stejný. Koherence vlnění tedy nevádí.

Druhý problém je, že v rovnici (3.72) nevidíme, zda má vlna skutečně vysokofrekvenční charakter. Ve WKB aproximaci požadujeme, aby vlnový vektor měl velikost $k_\mu = O(\epsilon^{-1})$ a aby derivace vlnového vektoru nebyly větší než $k_{\mu;\nu} = O(\epsilon^{-1})$, kde $\epsilon \sim \lambda \ll L$. Též na amplitudu klademe podmínku $\mathcal{A} = O(\epsilon)$ a její derivace je nejvýše $\mathcal{A}_{,\mu} = O(\epsilon)$.

Vlnová délka členů v $h_{\mu\nu}^{(\text{ChM})}$ (3.72) je úměrná $1/n$. Ověříme, pro jaké mody (jaká n) je vlna skutečně vysokofrekvenční. Jestliže napočítáme Riemannův tenzor křivosti pro pozadřovou metriku, můžeme odhadnout škálu zakřivení pozadí z největších složek jako $L \sim R \dots^{-\frac{1}{2}}$. Zjistíme, že L je úměrné $\left(\frac{u+v}{2}\right)^\kappa$, kde κ je

větší z čísel $\frac{(\alpha \pm 1)^2}{2}$ pro $|\alpha| > \sqrt{2} - 1$ a $\kappa = 1$ pro $|\alpha| \leq \sqrt{2} - 1$. Pro malá α je tedy rozumné předpokládat, že charakteristická křivost pozadové metriky je řádově rovna $L \sim (u + v)$.

Pak má platit $\frac{\lambda}{L} \sim 1/[n(u + v)] \ll 1$. To je v každém konkrétním čase $\xi = \frac{u+v}{2}$ splněno pro $n \gg \frac{1}{(u+v)}$, tedy pro všechna n , pokud se pohybujeme v režimu velkých časů $\frac{(u+v)}{2} \gg 1$. Můžeme zjednodušeně uvažovat $\epsilon \sim \frac{1}{n}$, a vlnový vektor $k_u = n$ (nebo $k_v = m$) pak splňuje podmínku $k_\mu = O(\epsilon^{-1})$. Pro amplitudu však máme $\mathcal{A} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} = O(\epsilon^{\frac{1}{2}})$. To můžeme „opravit“, jestliže budeme uvažovat pouze módy n řádově rovné $(u + v)$, tedy $(u + v) \sim \epsilon^{-1}$. Pak skutečně $\mathcal{A} = O(\epsilon)$, a pro derivaci platí dokonce $\mathcal{A}_{,\mu} = O(\epsilon^2)$. Celé $h_{\mu\nu}$ splňuje $h_{\mu\nu} = O(\epsilon)$, $h_{\mu\nu,\kappa} = O(1)$, atd.

Ze zmíněných úvah plyne, že porucha ve tvaru (3.72) nespĺňuje podmínky WKB aproximace. Je možné uvažovat pouze některé módy s $m, n \sim (u + v)$. Pak můžeme psát

$$h_{\mu\nu}^{(\text{ChM})} = \frac{e_{\mu\nu}}{\sqrt{u+v}} \text{Re} \sum_{n \sim (u+v)} \left\{ \sqrt{h_1^{(n)}} e^{i\Phi_1^{(n)}(u)} + \sqrt{h_2^{(n)}} e^{i\Phi_2^{(n)}(u)} + \right. \quad (3.74)$$

$$\left. + \sqrt{j_3^{(n)}} e^{i\Phi_3^{(n)}(v)} + \sqrt{j_4^{(n)}} e^{i\Phi_4^{(n)}(v)} \right\} ,$$

kde fáze Φ a konstanty $h_{1,2}, j_{3,4}$ jsou dané jako

$$\sqrt{h_1^{(n)}} = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} A_n \quad \Phi_1^{(n)}(u) = nu + nz_n - \frac{\pi}{4} \quad (3.75)$$

$$\sqrt{h_2^{(n)}} = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} B_n \quad \Phi_2^{(n)}(u) = nu + nz_n - \frac{3\pi}{4} \quad (3.76)$$

$$\sqrt{j_3^{(n)}} = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} A_n \quad \Phi_3^{(n)}(v) = nv - nz_n - \frac{\pi}{4} \quad (3.77)$$

$$\sqrt{j_4^{(n)}} = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} B_n \quad \Phi_4^{(n)}(v) = nv - nz_n - \frac{3\pi}{4} . \quad (3.78)$$

Dosadíme nyní do (3.63, 3.64) a zjistíme, že tenzor energie a hybnosti má tvar

$$T_{uu}^{\text{GW}} = T_{vv}^{\text{GW}} = \frac{1}{32\pi^2 (u+v)} \sum_{n \sim (u+v)} (A_n^2 + B_n^2) n , \quad (3.79)$$

a funkce f je podle (3.65)

$$f = f_0 + \frac{\alpha^2 - 1}{2} \ln \left(\frac{u+v}{2} \right) + \frac{1}{4\pi} (u+v) \sum_{n \sim (u+v)} (A_n^2 + B_n^2) n . \quad (3.80)$$

To je v souladu s funkcí (2.56), kterou dostali Charach a Malin jako výsledek asymptotického rozvoje pro $\xi = \frac{u+v}{2} \rightarrow \infty$, až na to, že jsme nemohli započítat všechny módy. Na rozdíl od Bergera tedy soudíme, že rozvoj Gowdyho modelu v limitě velkých časů nelze bez dalšího omezení přepsat do WKB aproximace.

Poslední člen jsme dostali jako ovlivnění pozadí vlnou. Vidíme, že čím větší ξ , tím více dominují členy odpovídající vysokofrekvenčním vlnám nad členy $f_0 + \frac{\alpha^2 - 1}{2} \ln \left(\frac{u+v}{2} \right)$, které odpovídaly pozadové metrice.

Pozměněný tvar poruchy Druhá možnost, jak splnit podmínky na velikost vlnového vektoru a amplitudy, je zavést frekvenční závislost uměle

$$h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} \sum_n \sqrt{\frac{2\epsilon^2}{n\pi(u+v)}} \left(A_n \cos \left[\frac{n}{\epsilon}u + nz_n - \frac{\pi}{4} \right] + B_n \cos \left[\frac{n}{\epsilon}u + nz_n - \frac{3\pi}{4} \right] \right) + e_{\mu\nu} \sum_m \sqrt{\frac{2\epsilon^2}{m\pi(u+v)}} \left(A_m \cos \left[\frac{m}{\epsilon}v - mz_m - \frac{\pi}{4} \right] + B_m \cos \left[\frac{m}{\epsilon}v - mz_m - \frac{3\pi}{4} \right] \right). \quad (3.81)$$

Tento tvar odpovídá (3.62) a je vhodný pro WKB aproximaci, neboť splňuje jak podmínky na velikost vlnového vektoru a amplitudy, tak podmínky pro šíření vlny (1.66). Pochopitelně už ale nejde přesně o poruchu (3.66), ze které jsme vyšli. Takováto porucha Kasnerova modelu však dává tenzor energie a hybnosti nezávislý na ϵ a ve stejném tvaru jako (3.79) a funkci f

$$f = f_0 + \frac{\alpha^2 - 1}{2} \ln \left(\frac{u+v}{2} \right) + \frac{1}{4\pi} (u+v) \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^2 + B_n^2) n, \quad (3.82)$$

ve stejném tvaru jako (3.80), až na to, že umožňuje započítat zcela libovolné n . Není ani závislá na limitě velkých časů, pro každý čas můžeme najít vhodné ϵ , ačkoli je dobré mít na paměti, že tenzor energie a hybnosti diverguje v okolí počáteční singularity $u+v=0$.

Můžeme tedy uzavřít, že v Isaacsonově formalismu je možné uvažovat *část* poruchy (3.66) jako WKB vlnu na Kasnerovském pozadí. Tato pak určuje ovlivnění pozadí, které se shoduje s výsledkem asymptotického rozvoje (limitou velkých časů) pro Charachův-Malinův model. V tomto smyslu dává WKB aproximace stejné výsledky jako Charachův-Malinův postup, který ovšem neodhaluje souvislost mezi poruchou (3.66) a tvarem metrické funkce (3.80). Z naší práce je vidět, že oba tvary si navzájem odpovídají alespoň pro některé vlnové délky.

Alternativně lze zavést dodatečný parametr úměrný vlnové délce $\epsilon \rightarrow 0$. Pak uvažujeme Kasnerův model s poruchou (3.81). Tenzor energie a hybnosti gravitační vlny, ani ovlivnění pozadí nezávisí na ϵ , a výsledná metrika se shoduje s limitou dlouhých časů Charachova-Malinova modelu. Dostáváme tak stejné řešení Einsteinových rovnic, jako Charach a Malin v limitě dlouhých časů, avšak tentokrát jako konzistentní výsledek přidání WKB perturbace ke Kasnerově modelu a výpočtu zpětného ovlivnění pozadové metriky.

Závěr

V této práci jsme se zabývali přidáním vysokofrekvenční vlny v Isaacsonově formalismu a WKB aproximaci k některým známým řešením ve třídě zobecněných Einsteinových-Rosenových prostoročasů. Zaměřili jsme se zejména na zpětné ovlivnění pozadové metriky vlnou. Uvažovali jsme model homogenní na prostorových nadplochách (x, y) s metrikou (3.4)

$$ds^2 = -e^f dudv + \left(\frac{v+u}{2}e^p\right) dx^2 + \left(\frac{v-u}{2}e^{-p}\right) dy^2,$$

kde $f = f(u, v)$, $p = p(u, v)$. Sestavili jsme Einsteinovy rovnice pro libovolný tenzor energie a hybnosti (vztahy 3.6-3.10). Z podmínek WKB aproximace jsme určili možné tvary vlny šířící se ve směru (či proti směru) prostorové souřadnice $z = (v - u)/2$ na tomto pozadí.

Diskutovali jsme, že přidat vysokofrekvenční vlnu je možné i pokud uvažujeme nevakuový prostoročas s nehmotným skalárním polem s minimální vazbou na gravitaci, které se může v prostoru měnit řádově stejně rychle jako pozadová metrika, anebo může být vysokofrekvenční ve stejném smyslu jako Isaacsonova gravitační vlna. Tenzor energie a hybnosti skalárního pole a efektivní tenzor energie a hybnosti gravitační vlny v tom případě dávají příspěvek stejného řádu. Metodou separace proměnných jsme našli řešení Einsteinových rovnic (3.29-3.32) pro tento případ (sekce 3.4.1). Ukázali jsme v souladu s výsledkem práce [15] pro Einsteinovy-Rosenovy vlny (viz rovnice 1.88), že ovlivnění pozadové metriky vlnou se realizuje pouze přidáním dodatečného členu ve tvaru (3.36) do metrické funkce f .

Novým výsledkem této práce je, že WKB vlnu lze uvažovat i v případě prostorové kompaktifikace (periodicity souřadnice z), jak jsme ukázali pro Charachův-Malinův model. Vlnu splňující podmínky aproximace lze volit tak, aby ovlivnění pozadí bylo periodické.

Dále jsme prostudovali možnost přidání více nekoherentních vln šířících se po i proti směru souřadnice z do Kasnerova modelu. Ukázali jsme, že ovlivnění pozadí je dané součtem příspěvků od jednotlivých vln (3.65).

Konečně v sekci (3.5.2) jsme zkoumali možnost zapsat limitu dlouhých časů Gowdyho modelu (nebo Charachova-Malinova modelu bez skalárního pole) jako součet vln ve WKB aproximaci na pozadí v Kasnerově tvaru. Toto provedl již Berger v práci z roku 1974 [31], kde používá WKB aproximaci k odvození tenzoru energie a hybnosti. Berger však nediskutuje podmínky na velikost amplitudy a vlnového vektoru. V této práci zjišťujeme, že WKB aproximaci lze použít pouze pro mody s frekvencí řádově rovnou charakteristické škále změn pozadové metriky.

Alternativně můžeme v každém čase zavést parametr úměrný vlnové délce, který pošleme k nule. Takto upravená porucha (rovnice 3.81) pak v rámci Isaacsonova formalismu generuje tenzor energie a hybnosti a funkci f , které odpovídají limitě velkých časů Charachova-Malinova modelu. Jedná se tedy o aproximativní řešení, ve kterém konzistentně souvisí vysokofrekvenční vlna s ovlivněním pozadí.

Dodatek A: Izometrie na varietě

Základní pojmy diferenciální geometrie (variety, vektor, tečný prostor,...) lze najít ve většině učebnic obecné relativity (např. [8,9]). Připomeneme pouze přenos vektorů a tenzorů a definici izometrie podle ([8], dodatek C).

Nechť M a N jsou variety, na kterých máme hladké C^∞ zobrazení (mapu) $\Phi : M \rightarrow N$. To umožňuje přenášet vektory (a kontravariantní tenzory) z M do N a formy z N do M . Je-li Φ difeomorfismus (je prosté a na, a má hladkou inverzi) umožňuje přenášet všechna tenzorová pole:

Nejprve definujeme **pullback funkce** pomocí zobrazení Φ . Mějme $f : N \rightarrow \mathbb{R}$. Pak tato funkce přenesená na M je

$$f \circ \Phi : M \rightarrow \mathbb{R} . \quad (3.83)$$

Pomocí pullbacku funkce můžeme přenést tečný vektor v bodě $p \in M$ do bodu $\Phi(p) \in N$:

Pro všechny $v^a \in V_p M$, kde $V_p M$ je tečný prostor variety M v bodě p , definují **pushforward vektoru** $\Phi^* : V_p M \rightarrow V_{\Phi(p)} N$ jako

$$(\Phi^* v)^a (f) = v^a (f \circ \Phi) . \quad (3.84)$$

Naopak pro formu μ_a definujeme **pullback formy**, $\Phi_* : V_{\Phi(p)}^* N \rightarrow V_p^* M$, kde V^* je kotečný prostor, tak, že pro všechny vektory $v^a \in V_p M$ platí

$$(\Phi_* \mu)_a v^a = \mu_a (\Phi^* v)^a \quad (3.85)$$

(přes index a se sčítá).

Pokud Φ je difeomorfismus, můžeme rozšířit definici $\Phi^* T$ na tenzor libovolného typu:

$$(\Phi^* T)_{a_1 \dots a_l}^{b_1 \dots b_k} (\mu_1)_{b_1} \dots (t_1)^{a_1} = T_{a_1 \dots a_l}^{b_1 \dots b_k} (\Phi_* \mu_1)_{b_1} \dots ([\Phi^{-1}]^* t_1)^{a_1} . \quad (3.86)$$

Speciálně, pokud $\Phi : M \rightarrow M$ můžeme srovnávat tenzor původní a přenesený. Φ je **symetrie** tenzoru T právě tehdy, když

$$\Phi^* T = T . \quad (3.87)$$

Pokud za tenzor T vezmeme metriku a platí

$$\Phi^* g_{ab} = g_{ab} , \quad (3.88)$$

nazýváme zobrazení Φ **izometrie**.

U difeomorfismu můžeme také použít „pasivní interpretaci“ v souřadnicích. Nechť v okolí U bodu p máme souřadnice x^μ a v okolí V bodu $\Phi(p)$ souřadnice y^μ . Na jistém okolí bodu p , $O = \Phi^{-1}[V]$, můžeme pro $q \in O$ definovat nové souřadnice $x'^\mu(q) = y^\mu(\Phi(q))$. Pak řekneme, že Φ nechává tenzory v okolí p nezměněné, ale dělá transformaci souřadnic $x \rightarrow x'$. Složky tenzoru $T(p)$ v nových souřadnicích jsou přesně složky přeneseného T v souřadnicích y .

Dodatek B: Některé pojmy z teorie Lieových grup

Uvedeme některé matematické pojmy potřebné k pochopení Bianchiho klasifikace.

Grupa, akce grupy

Grupa je množina G s definovanou binární operací $\circ : G \times G \rightarrow G$ a preferovaným prvkem e (identita) taková, že

$$\begin{aligned} \text{Operace } \circ \text{ je asociativní} & & g_1 \circ (g_2 \circ g_3) &= (g_1 \circ g_2) \circ g_3 \\ \text{Pro všechna } g \in G \text{ platí} & & g \circ e &= e \circ g = g \\ \text{Pro každý prvek } g \in G \text{ existuje} & & & \\ \text{inverzní prvek } g^{-1} \text{ takový, že} & & g \circ g^{-1} &= g^{-1} \circ g . \end{aligned}$$

(Levá) akce grupy G na množině X je funkce

$$\begin{aligned} \phi : G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\rightarrow \phi(g, x) \equiv g.x , \end{aligned}$$

taková, že $\forall x \in X$ a $\forall g, h \in G$ platí $e.x = x$ (kde e je jednotkový prvek grupy), a $(gh).x = g(h.x)$.

Akce grupy je **volně tranzitivní**, pokud pro každé $x, y \in X$ existuje právě jeden prvek grupy $g \in G$ takový, že $g.x = y$.

V případě Bianchiho prostoročasů jsou G izometrie, a X jsou body nadplochy Σ_t .

Lieovy grupy

Lieovy grupy jsou speciálním případem spojitých grup. **Lieova grupa** je grupa, která je zároveň hladkou varietou a na níž jsou zobrazení násobení a inverze hladké. [26]

Každé Lieově grupě lze připsat Lieovu algebru. **Lieova algebra** je vektorový prostor V nad tělesem \mathbb{F} spolu s operací Lieova závorka $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$, která $\forall a, b \in \mathbb{F}$ a $\forall X, Y, Z \in V$ splňuje následující podmínky [26]:

$$\begin{aligned} & [X, Y] \in V \\ \text{Linearita} & [aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z] \\ \text{Antisymetrie} & [X, Y] = -[Y, X] \\ \text{Jakobiho indentita} & [X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0 . \end{aligned}$$

Z definice vyplývá též bilinearita $[Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y]$.

Pro Lieovu algebru můžeme zvolit množinu tzv. generátorů, vektorů $X_{(a)} \in V$, které tvoří bazi V . Pro generátory platí

$$[X_{(a)}, X_{(b)}] = \sum_c C_{ab}^c X_{(c)} .$$

Reálná čísla C_{ab}^c jsou strukturní konstanty Lieovy algebry vzhledem k bazi. Jsou antisymetrické vzhledem ke spodním dvěma indexům

$$C_{ab}^c = -C_{ba}^c$$

a splňují Jacobiho identitu ve tvaru

$$C_{pq}^s C_{rs}^t + C_{qr}^s C_{ps}^t + C_{rp}^s C_{qs}^t = 0 .$$

V relativitě obvykle uvažujeme Lieovu algebru hladkých vektorových polí na varietě, spolu s Lieovou závorkou, jejíž působení je pro libovolná hladká vektorová pole X, Y a funkci f dáno jako

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) .$$

Dodatek C: Funkce f v Charachově-Malinově modelu

Metrická funkce f v Charachově-Malinově řešení, diskutovaném v sekci (2.2.3), má tvar

$$f = f_0 - \frac{1}{2} \ln \xi + f_{GW} + f_S .$$

Člen odpovídající podélné části gravitačního pole je [20]

$$\begin{aligned} f_{GW} = & \frac{\alpha_0^2}{2} \ln \xi + \alpha_0 \sum_{n=1}^{\infty} \cos[n(z - z_n)] [A_n J_0(n\xi) + B_n N_0(n\xi)] \\ & + \frac{\xi^2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \{ [A_n J_0(n\xi) + B_n N_0(n\xi)]^2 + [A_n J_1(n\xi) + B_n N_1(n\xi)]^2 \} \\ & - \frac{\xi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n \cos^2[n(z - z_n)] \{ A_n^2 J_0(n\xi) J_1(n\xi) + A_n B_n [N_0(n\xi) J_1(n\xi) + J_0(n\xi) N_1(n\xi)] + B_n^2 N_0(n\xi) N_1(n\xi) \} \\ & + \frac{\xi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{m=1 \\ n \neq m}}^{\infty} \frac{nm}{n^2 - m^2} \{ \sin[n(z - z_n)] \sin[m(z - z_m)] [n U_{nm}^{(0)}(\xi) - m U_{nm}^{(0)}(\xi)] \\ & \quad + \cos[n(z - z_n)] \cos[m(z - z_m)] [m U_{nm}^{(0)}(\xi) - n U_{nm}^{(1)}(\xi)] \}, \end{aligned}$$

kde funkce $U_{nm}^{(0)}, U_{nm}^{(1)}$ jsou definovány jako

$$U_{nm}^{(0)}(\xi) = A_n A_m J_1(n\xi) J_0(m\xi) + B_n B_m N_0(m\xi) N_1(n\xi) + 2A_n B_m J_1(n\xi) N_0(m\xi),$$

$$U_{nm}^{(1)}(\xi) = A_n A_m J_0(n\xi) J_1(m\xi) + B_n B_m N_0(n\xi) N_1(m\xi) + 2A_n B_m J_0(n\xi) N_1(m\xi).$$

Člen f_S odpovídající skalárnímu poli dostaneme, jestliže f_{GW} vynásobíme 16π a zaměníme $\alpha_0 \rightarrow \beta_0$.

Literatura

- [1] Einstein, A. *Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation*. Preuss. Akad. Wiss. Sitz. 1, 1916, 688-696.
- [2] Einstein, A. *Über Gravitationswellen*. Preuss. Akad. Wiss. Sitz. 1, 1918, 154-167.
- [3] Einstein, A, Rosen, N. *On Gravitational Waves*. Journal of the Franklin Institute, 1937, 43-54.
- [4] Weisenberg, J M, Nice, D J, Taylor, J H. *Timing measurements of the relativistic binary pulsar PSR B1913+16*. The astrophysical journal, 2010, 722: 1030-1034.
- [5] Moore, C J, Cole, R H, Berry, C P L. *Gravitational-wave sensitivity curves*. 2014, arXiv:1408.0740v2.
- [6] Stephani, H et al. *Exact Solutions to Einstein's Field Equations*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 2.vydani, 2003.
- [7] Griffiths, J B, Podolský, J. *Exact Space-Times in Einstein's General Relativity*. New York: Cambridge University Press, 2009.
- [8] Wald, R M. *General Relativity*. University of Chicago, 1984.
- [9] Misner, C W, Thorne, K S; and Wheeler J A. *Gravitation*. San Francisco: W. H. Freeman, 1973.
- [10] Bičák, J, Rudenko, V N. *Teorie relativity a gravitační vlny*. Praha: Univerzita Karlova, 1986.
- [11] Landau, L D, Lifšic, E M. *The Classical Theory of Fields*. Third revised english edition. Bradly: Pergamon Press, 1971.
- [12] Isaacson, R A. Gravitational Radiation in the Limit of High Frequency I., *Phys. Rev.*, 1968, 166, 1263-1271.
- [13] Isaacson, R A. Gravitational Radiation in the Limit of High Frequency II., *Phys. Rev.*, 1968, 166, 1272-1280.
- [14] Svítek, O, Podolský, J. Evolution of high-frequency gravitational waves in some cosmological models, *Czechoslovak Journal of Physics*, 2006, 56.12, 1367-1381.
- [15] Podolský, J, Svítek, O. Some high-frequency gravitational waves related to exact radiative spacetimes, *Gen.Rel.Grav.*, 2008, 36, 387-401.
- [16] Green, S R, Wald, R M. A new framework for analyzing the effects of small scale inhomogeneities in comology. *Physical Review D*, 2011, 83:8.

- [17] Brill, D R, Hartle, J B. Method of the Self-Consistent Field in General Relativity and its Application to the Gravitational Geon, *Physical Review*, 1964, 135:1B, B271-B277.
- [18] Plebański, J, Krasinski, A. *An Introduction to General Relativity and Cosmology*. New York: Cambridge University Press, 2006.
- [19] Krasinski, A. *Inhomogeneous Cosmological Models*. New York: Cambridge University Press, 1997 (opravená verze 2006).
- [20] Charach, Ch, Malin, S. Cosmological model with gravitational and scalar waves. *Physical Review D*, 1979, 19.4: 1058-1064.
- [21] Charach, Ch, Malin, S. Cosmological model with gravitational, scalar and electromagnetic waves. *Physical Review D*, 1980, 21.12: 3284-3295.
- [22] Carmeli, M, Charach, Ch, Malin, S. Survey of cosmological models with gravitational, scalar and electromagnetic waves. *Physics Reports*, 1981, 76.2: 79-156.
- [23] Bianchi, L. Sugli spazi a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti [On three-dimensional spaces which admit a continuous group of motions] *Memorie di Matematica e di Fisica della Societa Italiana delle Scienze*, 1897, 11.3: 267-352.
- [24] Taub, A. H. Empty space-times admitting a three parameter group of motions. *Annals of Mathematics*, 1950, 53.3: 472-490.
- [25] Ellis, G F R, MacCallum, M A H. A Class of Homogeneous Cosmological Models. *Commun. math. Phys.*, 1969, 12: 108-141.
- [26] Houfek, K. Poznámky k přednáškám Teorie grup a její aplikace ve fyzice, dostupné z <http://utf.mff.cuni.cz/houfek/grupy/TMF061.htm>, citováno 5.10.2015.
- [27] Kasner, E. Geometrical Theorems on Einstein's Cosmological Equations *American Journal of Mathematics*, 1921, 43.4: 217-221.
- [28] Gowdy, R H. Gravitational Waves in Closed Universes. *Physical Review Letters*, 1971, 27.12: 826-829.
- [29] Gowdy, R H. Vacuum spacetimes with Two-Parameter Spacelike Isometry Groups and Compact Invariant Hypersurfaces. *Annals of Physics*, 1974, 83, 203-241.
- [30] Gowdy, R H. Closed gravitational-wave universes: Analytic solutions with two-parameter symmetry. *Journal of Mathematical Physics*, 1975, 16.2, 224-226.
- [31] Berger, B K. Quantum Graviton Creation in a Model Universe. *Annals of physics*, 1974, 83, 458-490.
- [32] Misner, C W. A Minisuperspace Example: The Gowdy T^3 Cosmology. *Physical Review D*, 1973, 8.10, 3271-3286.