Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Rigorózní práce

Praha 2015

Barbora Korečková

Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Geometrické úlohy řešitelné bez výpočtu

Geometric Problems Solvable without Calculations

Barbora Korečková

Rigorózní práce

Praha 2015

Školící pracoviště: Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Studijní program: Pedagogika

Obor: Didaktika matematiky

Prohlašuji, že jsem dizertační práci vypracovala samostatně s použitím uvedených pramenů a literatury. Práce nebyla dosud využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Byla jsem seznámena s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Karlova má právo uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Karlova oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v Univerzitní knihovně Univerzity Karlovy v Praze.

Duben 2012

Ráda bych zde poděkovala doc. RNDr. Nadě Vondrové (Stehlíkové), Ph.D. za odborné vedení mé dizertační práce, za čas, který mi věnovala, a za velké množství rad a zkušeností, které mi předala.

Dále bych chtěla poděkovat prof. RNDr. Milanu Hejnému, CSc. za zájem a čas, který mi věnoval při konzultacích.

Za podněty a nejrůznější rady patří mé díky i ostatním členům katedry.

Děkuji také členům vedení škol, které mi poskytly prostor pro mé experimenty, jmenovitě ZŠ a Gymnáziu J. G. Jarkovského v Praze 1, ZŠ a MŠ Aš na Okružní ulici, Gymnáziu a střední odborné škole Aš a ZŠ Aš v Hlávkově ulici. Dále chci poděkovat všem vyučujícím na těchto školách za věnovaný čas a pomoc při realizaci mých experimentů.

V neposlední řadě děkuji všem žákům, kteří se zúčastnili mých experimentů.

Název: Geometrické úlohy řešitelné bez výpočtu

Abstrakt: Práce se věnuje geometrickým úlohám, které jsou zadané zpravidla pomocí obrázku a ptají se po nějakém číselném vyjádření. Tyto úlohy jsou řešitelné geometrickou strategií, tedy strategií s malým podílem výpočtů. Jejich obtížnost spočívá zejména v nutnosti rozeznat v obrázku dílčí konfigurace nezbytné pro řešení. Cílem výzkumu bylo popsat řešitelské strategie žáků různého věku u těchto úloh a zjistit, zda jsou tyto strategie závislé na věku. Teoretické pozadí práce sestává z pojmů vizualizace, role obrázků v geometrii a jejich vnímání žáky a umění vidět v geometrii.

V pilotní studii byly vybrány úlohy daného typu pro hlavní studii. V první fázi hlavní studie byly použity tři úlohy v rámci polostrukturovaných rozhovorů s 9 žáky různého věku s cílem získat vhled do strategií a jejich charakteristik a prozkoumat vliv připravených nápověd na řešení žáků. Ve druhé fázi byla využita jedna úloha v rámci samostatné práce žáků (125 žáků od 12 do 19 let) a ve třetí fázi (která byla metodologickým kompromisem mezi první a druhou fází v tom smyslu, že žáci řešili úlohy individuálně, ovšem měli možnost nápověd a mohli své řešení ústně vysvětlit) dvě úlohy (130 žáků od 12 do 19 let). Žákovská řešení a přepisy rozhovorů byly analyzovány technikami založenými na zakotvené teorii a zpracovány i kvantitativně.

Výsledkem analýzy je přehled řešitelských strategií a dalších jevů objevujících se v pracích žáků. Jejich četnost byla zkoumána u žáků stejného věku a dále porovnána u skupin mladších a starších žáků. Bylo např. zjištěno, že u všech věkových kategorií žáků včetně posledního ročníku gymnázia se objevila nekorektní řešení zahrnující měření, manipulaci s obrázkem, přerýsování obrazců apod. Připravené nápovědy vedly k žádoucímu geometrickému řešení jen částečně, a to zejména u starších žáků. Nezanedbatelné procento žáků mělo tendence automaticky začít s výpočtovými strategiemi, aniž by provedlo prvotní rozbor úlohy pomocí obrázku. Práce uvádí i omezení výzkumu, jeho možná pokračování a praktické aplikace.

Klíčová slova: geometrie, vizualizace, umění vidět, řešitelské strategie, reprezentace

Title: Geometric Problems Solvable without Calculations

Abstract: The thesis focuses on geometric problems which are usually set with a picture and ask for some numerical value. They are solvable by a geometric strategy, i.e., strategy with a small involvement of calculations. Their difficulty lies in the necessity to distinguish partial configurations in the picture. The goal of the research was to describe pupils' solving strategies and find out if they are age dependent. The theoretical background of the thesis consists of the concepts of visualisation, roles of pictures in geometry and their understanding by pupils and the ability to see in geometry.

In the pilot study, tasks of the given type were selected for the main study. In the first phase of the main study, three problems were used with 9 pupils of different ages in semi-structured interviews with the goal to get an insight into the solving strategies and their characteristics and look into the influence of prepared hints on the pupils' solutions. In the second phase, 125 pupils aged 12 till 19 solved independently one problem while in the third one (which was a methodological compromise between the previous two), 130 pupils aged 12 till 19 solved two problems independently but had an opportunity to get hints and could explain their solutions verbally. The pupils' written solutions and transcripts of the interviews were analysed in a qualitative way using the techniques based on the grounded theory and elaborated in a quantitative way, too.

The results of the analysis consist of solving strategies for the three tasks and a list of other phenomena which appeared in the pupils' works. Their frequency was investigated for pupils of the same age and groups of younger and older pupils were compared. It was found out, e.g., that mathematically incorrect solutions based on measuring, manipulation, redrawing of the figure, etc. appeared for all age groups, even the oldest pupils. The hints let to geometric strategies only partially and mainly for older pupils. Substantial number of pupils tended to start the solution automatically by calculations without any prior analysis of the picture. The thesis also describes the limitations of the research, its possible continuation and practical applications.

Keywords: geometry, visualisation, ability to see, solving strategies, representation

Obsah

1 Úvod

Geometrie byla vždy má nejoblíbenější část matematiky, proto jsem si i při své výuce matematiky na osmiletém gymnáziu všímala toho, jaké obtíže žáci v geometrii mají a jak řeší geometrické úlohy. Předkládala jsem svým žákům nejrůznější, podle mého názoru zajímavé, úlohy a sledovala jejich postupy řešení. Tehdy jsem si uvědomila, že řada žáků používá jiné strategie, než které bych využila já. Rozdíl se objevoval zejména u úloh, které byly zadány obrázkem, a zjišťovalo se nějaké číselné vyjádření, například obsah, délka strany apod. Zatímco já jsem volila strategie, při nichž bylo potřebné využít obrázek, nikoliv však cokoliv počítat algebraicky, žáci se naopak přikláněli k algebraickým postupům. Moje řešení, které bylo často mnohem jednodušší, pak považovali za „matematické kouzlo“ či nedostatečně matematické. Žáci měli navíc tendenci používat většinou pouze nedávno nabyté znalosti (vzorce, poučky, strategie) pro aritmetické či algebraické řešení. To mě zaujalo. O podobných zkušenostech jsem navíc slýchala na konferencích pro učitele od svých kolegů a též od některých přednášejících (např. F. Kuřina zmiňuje podobné problémy žáků ve svých pracích opakovaně).

Rozhodla jsem se provést malý experiment a zjistit, zda má moje pozorování nějaké opodstatnění. Svým žákům jsem předložila dvě úlohy, které se dají efektivně řešit bez výpočtu, a zjišťovala jsem jejich způsoby řešení. Ukázalo se, že je situace mnohem pestřejší, než jsem si zprvu myslela. Rozhodla jsem se tedy, že právě na tuto problematiku se zaměřím ve své disertační práci.

V kapitole 2 popisuji svůj výše zmíněný experiment, který mi přinesl první vhled do situace. Na jeho základě jsem a) charakterizovala úlohy, které jsou základem mého výzkumu, b) formulovala výzkumné otázky. Úlohy, jejichž řešení budu zkoumat, jsou úlohy zadané zpravidla pomocí obrázku, s otázkou po nějakém číselném vyjádření a efektivně řešitelné bez výpočtu. Hledání v literatuře s cílem zjistit, zda pro podobné úlohy existuje nějaký zavedený termín, bylo neúspěšné. Proto jsem se rozhodla jim dát ve své práci popisné jméno *geometrické úlohy efektivně řešitelné bez výpočtu*. Cílem mého výzkumu je popsat řešitelské strategie žáků různého věku u úloh efektivně řešitelných bez výpočtu a zjistit, zda jsou tyto strategie závislé na věku. Konkrétní výzkumné otázky jsou rozpracovány v oddíle 2.3 a dále v kapitole 5 u jednotlivých fází hlavní studie.

Ve třetí, teoretické kapitole, jsou podány pojmy související s úlohami efektivně řešitelnými bez výpočtu, a sice různé role obrázků v geometrii a jejich vnímání žáky, umění vidět v geometrii a vizualizace. Výzkumů, jež by se zabývaly úlohami toho typu, který mě zajímá, příliš není. Rešerší literatury jsem dospěla k několika souvisejícím studiím a ty jsem popsala ve druhé části teoretické kapitoly, v oddíle 3.4.

Čtvrtá kapitola obsahuje popis pilotní studie, jejímž hlavním cílem je vybrat úlohy daného typu pro hlavní studii, tedy úlohy vhodné pro žáky různého věku a řešitelné různými způsoby, z nichž alespoň jeden je geometrický (resp. primárně bez výpočtů). Výsledkem pilotní studie je seznam řešitelských strategií pro každou z pěti použitých úloh a zejména poučení pro hlavní studii z hlediska výběru úloh, způsobu analýzy dat a použité metody.

Na základě výsledků pilotní studie byly vybrány tři úlohy pro hlavní studii, která je popsána v páté kapitole. Hlavní studie se skládá ze tří fází. V první z nich (oddíl 5.1) jsou použity všechny tři úlohy v rámci polostrukturovaných rozhovorů s žáky různého věku. Jejím cílem je získat hlubší vhled do použitých strategií a jejich charakteristik a prozkoumat vliv připravených nápověd na řešení žáků. Ve druhé fázi, viz oddíl 5.2, je využita jen jedna úloha v rámci samostatné práce žáků bez možnosti nápověd. Jejím cílem je popsat použité řešitelské strategie a prozkoumat možnou souvislost volby strategie s věkem řešitele. Konečně ve třetí fázi, viz oddíl 5.3, dochází ke spojení první a druhé fáze v tom smyslu, že žáci sice řeší úlohy individuálně, a mohu tak získat více dat (žákovských řešení) najednou, ovšem žáci mají možnost nápověd a mohou mi své řešení vysvětlit. Ve třetí fázi hlavní studie je důraz položen zejména na třetí výzkumnou otázku – změnu strategií s věkem.

Závěrečná šestá kapitola shrnuje celý výzkum, prezentuje hlavní výsledky a otevírá některé nové otázky.

Sedmá kapitola obsahuje seznam použité literatury.

Práce je doplněna šesti přílohami, které obsahují ukázky z analýzy dat a tabulky čísel pro v textu uvedené grafy.

2 Formulace problému

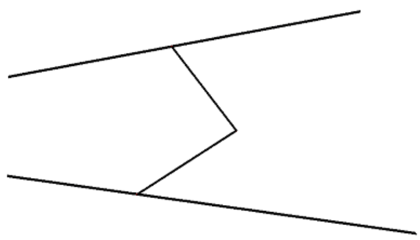
Jak již bylo řečeno v úvodu, při své výuce matematiky na osmiletém gymnáziu jsem si všímala toho, jaké obtíže žáci v geometrii mají a jak řeší geometrické úlohy. Velký problém se objevil zejména u takových úloh, které byly zadány obrázkem a u nichž se zjišťovalo nějaké číselné vyjádření, například obsah, délka strany apod. Žáci často nevyužívali rychlé a efektivní geometrické postupy, ale měli tendenci přiklánět se k algebraickým postupům. Rozhodla jsem se tedy zjistit, zda je moje pozorování správné, a položila jsem si otázku: Jaké strategie řešení budou žáci využívat pro geometrické úlohy, které lze řešit bez výpočtu?

Pro svůj účel jsem vybrala dvě takové úlohy (zde nazvané *Ploty zahrad* a *Cestička*) a zadala je písemnou formou mým žákům. Následně jsem analyzovala jejich způsoby řešení.

2.1 Úloha Ploty zahrad

S úlohou, kterou jsem nazvala *Ploty zahrad*, jsem se setkala na jednom z doktorandských seminářů, kde nám byla prezentována na videozáznamu hodina z japonské základní školy; hodina byla natočena v 8. ročníku v rámci TIMSS Video Studie 1999. Zadání úlohy bylo následující:

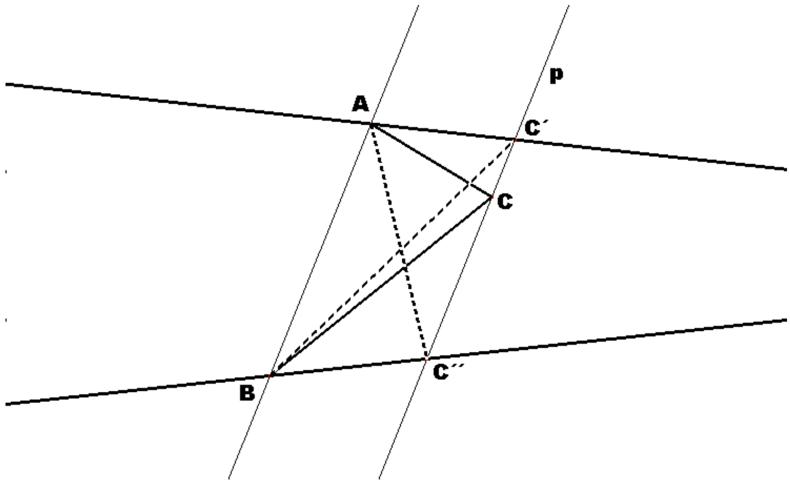
Na obrázku (obr. 2.1.) *vidíte dva pozemky. Přestavte plot, který tyto dva pozemky odděluje, tak, aby byl rovný (úsečka) a přitom se nezměnily velikosti ploch zahrad.*



Obr. 2.1 Původní zadání úlohy *Ploty zahrad*

Úlohu je teoreticky možné řešit výpočetně, v tom případě by bylo ale nutné pracovat s obrázkem jako s plánem v daném měřítku, změřit jednotlivé strany zahrady a teprve pak s těmito daty pracovat. Takové řešení ale není přesné a už vůbec ne obecné. Proto je vhodné řešení geometrické. To je navíc velice jednoduché a elegantní. Vychází z pochopení vzorce o obsahu trojúhelníku (tedy ze vztahu mezi obsahem, délkou strany a k ní příslušné výšky: $S = a \cdot v_a/2$, kde a je délka strany trojúhelníku a v_a je délka výšky na danou stranu), se kterým se žáci setkávají již od 7. ročníku základní školy. Úloha je však problémová v tom smyslu, že ani jeden ze zmíněných dvou parametrů není v obrázku vyznačen nebo zdůrazněn v zadání úlohy. Ze zadání úlohy není ani jasné, že řešení povede právě přes trojúhelník a jeho obsah.

Řešit úlohu je nejvhodnější tak, jak ukazuje obr. 2.2,[1] v němž jsou vyznačeny body *A, B, C.* Dále je bodem *A* a *B* vedena přímka a s ní rovnoběžná přímka *p* procházející bodem *C*. Nyní je již trojúhelník *ABC* zřejmý. Vzdálenost rovnoběžek *AB* a *p* určuje výšku v_c v trojúhelníku *ABC*. Je tedy zřejmé, že při libovolném posouvání bodu *C* po přímce *p* bude obsah trojúhelníku *ABC* zachován. Stačí tedy bod *C* posunout až na okraj zahrady do bodu *C´* nebo *C´´*, jak je vidět na obr. 2.2.



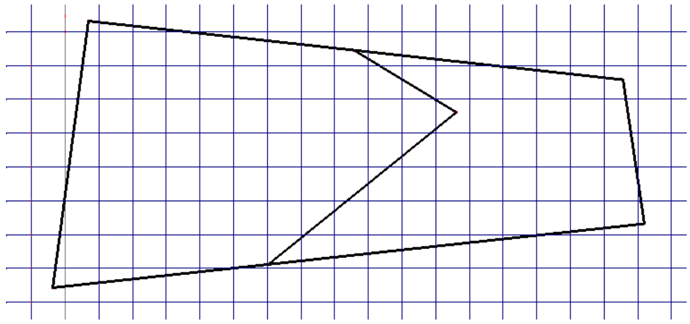
Obr. 2.2 Řešení úlohy *Ploty zahrad* pomocí obrázku

V japonské hodině z výše uvedeného videozáznamu byla úloha zadána na „prázdném“ papíru. Zajímalo mě, jak bude řešení ovlivněno, pokud zadám úlohu na čtverečkovaném papíru. Předpokládala jsem, že takto zadaná úloha by mohla vést též k výpočtové strategii řešení (připadalo mi zajímavé, že v japonské hodině žádný žák toto výpočtové řešení zřejmě nepoužil). Navíc by neomezené útvary mohly u žáků středních škol odvrátit pozornost k problémům nekonečna, proto jsem se rozhodla ohraničit plochy pozemků i ze zbylých dvou stran – obr. 2.3.

Úlohu jsem zadala v jedné třídě 5. ročníku (kvintě) všeobecného osmiletého gymnázia.[2] Ve třídě bylo přítomno 27 žáků (12 dívek a 15 chlapců), kteří úlohu řešili v průběhu jedné vyučovací hodiny. Za vyřešení úlohy nebyla slíbena žádná odměna, ale ani trest. Bohužel čtyři chlapci zadanou úlohu okamžitě vzdali a věnovali se řešení jiných úloh z učebnice.

[1] Tento způsob řešení byl využit i ve zmíněné japonské hodině.

[2] Gymnázium J. G. Jarkovského, Truhlářská 22, Praha 1.



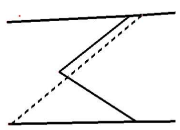
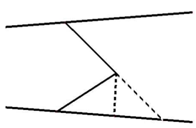
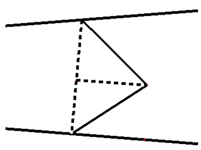
Obr. 2.3 Upravený obrázek k zadání úlohy *Ploty zahrad* pro žáky střední školy

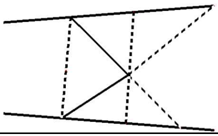
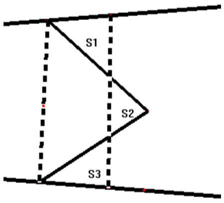
V žákovských řešeních jsem našla jak pokusy o geometrická, tak početní řešení. Při jejich podrobnějším rozboru jsem zaznamenala jevy, které jsem shrnula v tab. 2.1 a 2.2. Některé z nich jsou korektní, tj. mohly by vést ke správnému řešení. Jiné představují slepé uličky.

Tab. 2.1 Početní kroky z žákovských řešení a počty žáků, u kterých se objevily

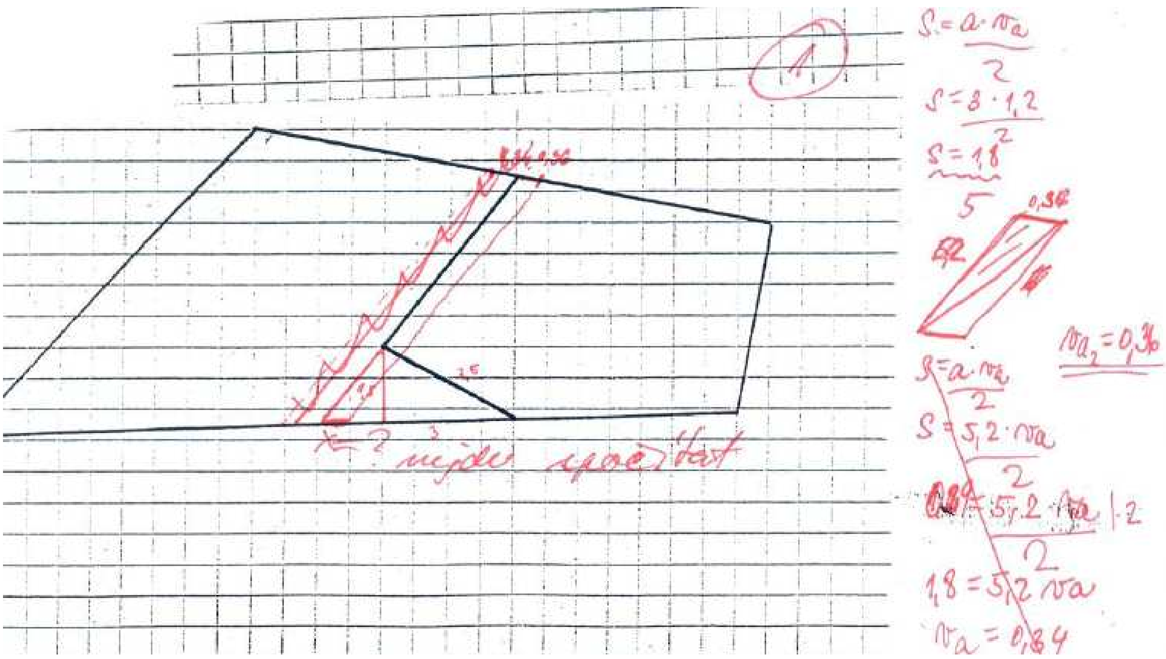
Kód jevu	**Popis jevu**	**Počet řešení**
P1	Výpočet pomocí vzorce $S = (a \cdot v_a)/2$	3
P2	Využití znalosti, že dva trojúhelníky mají stejný obsah, pokud mají stejně dlouhou stranu a k ní příslušnou výšku	1
P3	Označení úseček písmeny a hledání vztahů mezi nimi	3
P4	Využití Pythagorovy věty	2
P5	Snaha o výpočet délky střední příčky	6
P6	Využití Eukleidovy věty o výšce	1

Tab. 2.2 Geometrické kroky z žákovských řešení a počty žáků, u kterých se objevily

Kód jevu	**Popis jevu**	**Počet řešení**
G1	Posouvání úsečky 	2
G2	Dělení na dva trojúhelníky 	3
G3	Rozdělení zadaného obrázku různým způsobem na co nejvíce pravoúhlých trojúhelníků	12
G4	Půlení úseček, které tvoří hranici mezi pozemky	1
G5	Vytvoření jednoho trojúhelníku a jeho rozdělení na dva pravoúhlé trojúhelníky 	6

G6	Vytvoření pěti trojúhelníků 	1
G7	Vybarvování čtverečků proťatých úsečkami	2
G8	Hledání podobných trojúhelníků tak, aby $\lvert S2\rvert = \lvert S1\rvert + \lvert S3\rvert$ 	1

Z tab. 2.1 a 2.2 je na první pohled patrné, že v žákovských řešeních se objevilo 16 početních jevů a 28 jevů geometrických. Vypadá to tedy, že žáci upřednostňují geometrická řešení. Při hlubším prozkoumání je ale nápadný velký počet žáků, v jejichž řešení se objevuje jev G3, který ani v jednom případě nevedl k úspěšnému řešení a často byl využíván tehdy, kdy už žáci nevěděli, jak úlohu dále řešit. Proto ho nepovažuji za rovnocenný s ostatními. Tak se tedy počet geometrických jevů sníží na 16.



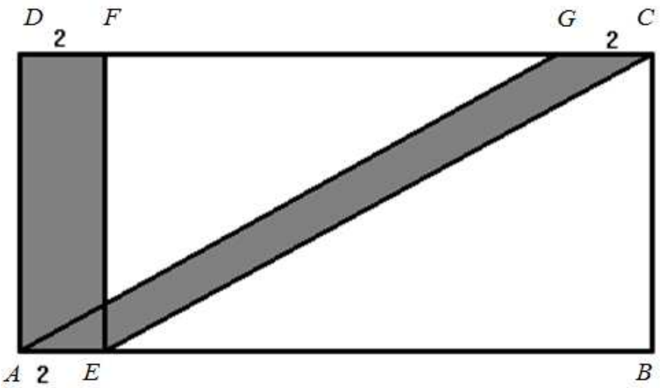
Obr. 2.4 Jedno z žákovských řešení úlohy *Ploty zahrad*

Čistě geometricky, tedy bez jediného početního kroku, řešilo úlohu deset žáků, z nichž jeden žák dospěl s malými nepřesnostmi ke správnému řešení, tři žáci došli k naprosto správnému řešení a navíc uměli svůj postup bez problémů odůvodnit a vysvětlit. Dvanáct žáků řešilo úlohu nejprve početně, a když viděli, že jejich řešení nikam nevede, pokusili se úlohu řešit i geometricky. Z těchto dvanácti žáků ke správnému řešení dospěli pouze dva, ale neuměli své řešení dobře odůvodnit. Pouze jeden žák řešil úlohu čistě početně, avšak k výsledku se nedobral. Příklad řešení jednoho žáka je na obr. 2.4.

2.2 Úloha Cestička

Zadání této úlohy jsem našla v textech F. Kuřiny vytvořených pro účely kurzu ESF (Kuřina, 2006). Úloha mne zaujala, a tak jsem se rozhodla ji zařadit do výuky ve svých hodinách matematiky v 6. ročníku základní školy a v 5. ročníku osmiletého gymnázia (kvinta). Jednak jsem tyto třídy právě učila a jednak mě zajímalo, zda se bude řešení žáků z tak odlišných věkových skupin lišit. Znění úlohy bylo následující:

Na obrázku (obr. 2.5.) *jsou nakresleny dvě cesty přes obdélníkovou louku. Která zaujímá větší plochu?*



Obr. 2.5 Zadání úlohy *Cestička* (označení bodů v zadání pro žáky nebylo)

Řešení této úlohy není složité, pokud žák odhalí shodnost tří trojúhelníků *AGD*, *ECF* a *EBC* (body jsem v obrázku vyznačila pro potřeby tohoto popisu). Celý obdélník se tedy skládá z jedné z cestiček a dvou shodných trojúhelníků. Tedy jinými slovy, cestička je v obou případech doplněk dvou ze tří shodných trojúhelníků do obsahu celého obdélníku. Proto tedy musí být obsahy obou cestiček shodné.

Tato úloha byla zařazená mezi úlohy, které F. Kuřina nazývá aplikační. Žáci by v ní měli aplikovat matematické poznatky, které se již naučili. Úloha je také ukázkou toho, že matematické dovednosti jsou uplatnitelné v běžném životě. Aplikační úlohy mohou tedy plnit i motivační funkci. K tomu však musíme zejména mladším žákům uvést důvod, proč by měli zjišťovat plochu nějaké cesty v poli. Proto jsem pro žáky 6. ročníku základní školy úlohu přeformulovala:[3]

Zemědělci nutně potřebují postavit cestu přes svá pole. Chtějí ale zabrat co nejmenší plochu, aby se výnosy nezmenšily. Rozhodují se mezi dvěma variantami vyznačenými na obrázku (obr. 2.5)[4]*. Pro jakou možnost se rozhodnou? Jaká cesta zabírá nejmenší plochu pole?*

Úlohu jsem zadala ve dvou již zmíněných třídách v hodině matematiky a následně jsem analyzovala způsoby řešení žáků.

Žáci 5. ročníku gymnázia řešili úlohu výhradně početně. Jen tři studenti znali vzorec pro výpočet obsahu kosodélníku, ostatní si kosodélník rozdělili na obdélník a dva shodné trojúhelníky. Ani jeden z žáků neřešil úlohu obecně. Žáci si zvolili konkrétní šířku i délku obdélníkového pole, neboť věděli, že plochy cest stačí jen porovnat.

Pouze jedna žákyně se nad úlohou zamyslela i geometricky. Po zjištění, že plochy cest jsou stejné, hledala i jiné možné řešení. Našla v obrázku všechny tři shodné trojúhelníky *AGD*, *ECF* a *EBC* a odvodila řešení: „Obsah cesty je v obou případech obsah obdélníkové louky bez dvou ze tří shodných trojúhelníků. Cesty mají tedy stejné obsahy.“

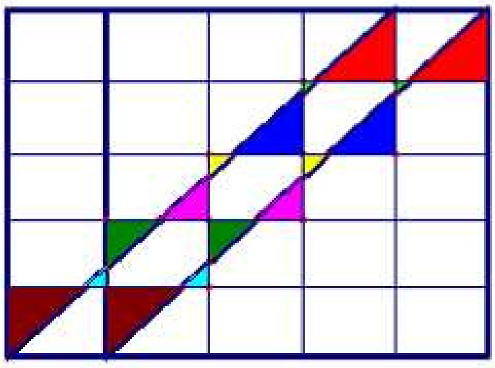
Žáci 6. ročníku základní školy řešili také úlohu zprvu výhradně početně. Jim jsem dala radu, ať si zvolí délky stran obdélníkového pole. Na výpočet obsahu kosodélníku jim ale bohužel nestačil matematický aparát, a tak si výsledky spíše tipovali či k nim docházeli dosazováním čísel do různých vzorců. Na správné řešení přišli pouze dva žáci a jejich řešení se velice podobala. Rozdělili si obrázek na 25 shodných obdélníků, jak naznačuje obr. 2.6. Jeden žák použil barev stejně jako zde v obrázku. Druhý žák namísto stejných barev označil políčka stejnými čísly.

Oba žáci měli stejné argumenty. V rozhovoru se mnou tvrdili, že shodně obarvená či očíslovaná políčka mají i stejný obsah. Proto je možné přidat k cestě obarvené (očíslované) políčko, které leží mimo cestu. Potom se dá zjistit, že políčka v jednom řádku obrázku je možné poskládat tak, aby bylo vidět, že dohromady tvoří jeden obdélník. Šikmá cesta stejně jako kolmá cesta zabírá jeden obdélník na každém řádku. Mají tedy stejný obsah.

[3] Pro žáky 5. ročníku osmiletého gymnázia jsem nechala zadání nezměněné.

[4] Body v zadání označeny nebyly.

Ještě zbývá dokázat, že stejně barevné obrazce mají opravdu stejný obsah. Oba žáci mi to vysvětlili spíše intuitivně.



Obr. 2.6 Jedno z řešení úlohy *Cestička* žáka 6. ročníku ZŠ

2.3 Výzkumné otázky a charakteristika zkoumaných úloh

Na základě výše popsané sondy jsem se utvrdila v přesvědčení, že zkoumání podobných úloh a jejich žákovských řešení má smysl. Zdá se, že žáci různého věku dávají přednost výpočtovým strategiím a že mají obtíže identifikovat (vidět) v obrázku jeho dílčí konfigurace (např. trojúhelník na obr. 2.1, kde si musí domyslet jednu jeho stranu, či tři shodné trojúhelníky na obr. 2.5). Nejdříve je nutné vymezit typy úloh, u nichž je možné tyto jevy zkoumat.

Studium odborné literatury nepřineslo žádné výsledky, co se týče možného užívaného termínu pro úlohy toho typu, které mám na mysli. Konkrétně jde o úlohu, která je výpočtově řešitelná jen velmi obtížně, anebo je dokonce výpočtově zcela neřešitelné, je však naopak velmi dobře řešitelná geometricky. Přesněji je to úloha, které splňuje následující požadavky:

1. Je zadána pomocí obrázku nebo slovně tak, aby bylo možné její zadání jednoduše do podoby obrázku přeformulovat.
2. Má vždy uvedené (známé) některé parametry, ať už číselně nebo obecně, či je zadána tak, aby budila dojem, že se tyto parametry dají odvodit.[5]
3. Měla by se ptát po číselném, popřípadě obecném vyjádření hledané hodnoty (délce, obvodu, obsahu atd.).

[5] Je například zadána na čtverečkovaném nebo milimetrovém papíře.

4. Je vždy řešitelná strategií, která není převážně výpočtová. V této strategii hraje důležitou roli obrázek a pro potřebu mé práci ji budu nazývat geometrická.[6]

Poznámka: Termín výpočtová strategie bude zahrnovat takovou strategii, která obsahuje výpočty s čísly, tedy aritmetické, a s písmeny, tedy algebraické.

Úlohy, které splňují výše uvedené charakteristiky, jsem z důvodu neexistence zaužívaného termínu pro potřeby své práce nazvala *geometrické úlohy efektivně řešitelné bez výpočtu* (zde budu používat zkratku úlohy typu RBV).

Řadu úloh, jež lze zařadit mezi úlohy typu RBV, najdeme např. v publikacích F. Kuřiny (např. Kuřina, 1989, 1996, 2006). Ke zkoumanému typu úloh je možné zařadit i geometrické důkazy matematických vět, jakými jsou třeba grafický důkaz Pythagorovy věty, Eukleidových vět atd.[7]

V souvislosti s výše charakterizovanými typy úloh se budu ve svém výzkumu zabývat těmito otázkami:

1. Jaké jsou strategie žáků při řešení RBV úloh (se zvláštním zřetelem na geometrické versus výpočtové strategie)? Jaké obtíže mají žáci s řešením těchto typů úloh?
2. Jaké druhy nápověd mohou vést žáka ke geometrickému řešení spíše než k výpočtovému?
3. Mění se žákovské strategie s věkem?

Výzkum bude mít charakter kvalitativně-kvantitativní s tím, že před hlavní studií provedu pilotní studii s cílem vybrat vhodné úlohy. Před jejím popisem bude zařazena teoretická kapitola, která je výsledkem studia odborné literatury týkající se mnou zkoumaného tématu.

---

[6] Samozřejmě může mít i jiná možná řešení, ale ta by měla být komplikovanější či zdlouhavější a nemusí být v rozsahu učiva patřičného věku žáků a studentů. Uvědomuji si, že zejména bod 4 lze interpretovat různě. Hranice, co ještě je úloha požadovaného typu a co již není, je neostrá.

[7] Osobní konzultace s L. Bočkem.

3 Teoretická východiska práce

Kapitola se skládá ze dvou hlavních částí. V první z nich se zabývám pojmy, které tak či onak souvisejí s mým výzkumem. Zaprvé jde o dvojí roli obrázků, které současně odkazují na teoretický geometrický objekt i jeho konkrétního reprezentanta (oddíl 3.1). Tento oddíl obsahuje též některé další pohledy na charakter obrázků v geometrii. V oddíle 3.2 je shrnut pojem umění vidět v geometrii s důrazem na vnímání dílčích konfigurací v obrázku. Vizualizaci je věnován oddíl 3.3.

Ve druhé části kapitoly, konkrétně v oddíle 3.4, jsou shrnuty některé související výzkumy, tedy výzkumy, které se týkají řešitelských strategií pro úlohy, jež bych zařadila mezi úlohy typu RBV.

3.1 Obrázky v geometrických úlohách

R. Duval (2006) upozorňuje na důležitý rys matematického uvažování, které ho odlišuje od uvažování v jiných oblastech lidského vědění: pro jakoukoli matematickou aktivitu je nutné použít sémiotickou reprezentaci, ale matematické objekty se nesmějí za použité sémiotické reprezentace zaměnit.

> Klíčový problém matematického porozumění žáků […] spočívá v kognitivním konfliktu mezi dvěma proti sobě jdoucími požadavky: jak mohou odlišit reprezentovaný objekt od použité sémiotické reprezentace, pokud nemohou získat přístup k matematickému objektu jinak než díky těmto sémiotických reprezentacím? A to se projevuje v tom, že schopnost přecházet mezi systémy reprezentací je často kritickou hranicí pro rozvoj učení a řešení problémů. (Duval, 2006, s. 107)[8]

[8] The crucial problem of mathematics comprehension for learners […] arises from the cognitive conflict between these two opposite requirements: how can they distinguish the represented object from the semiotic representation used if they cannot get access to the mathematical object apart from the semiotic representations? And that manifests itself in the fact that the ability to change from one representation system to another is very often the critical threshold for progress in learning and for problem solving.

To platí pro matematiku obecně, ale pro geometrii zvlášť. Geometrické objekty jako body, přímky, mnohoúhelníky apod. jsou abstraktní povahy, jejich geometrická znázornění prostřednictvím obrázků mohou být jen jejich nedokonalými reprezentacemi. Pro řešení úloh v geometrii se musí používat minimálně dva systémy reprezentací (Duval 2006) – jeden pro slovní vyjádření vlastností či numerické vyjádření velikostí a druhý pro vizualizaci. Geometrický obrázek tak spojuje oba typy reprezentací, mezi nimiž mají žáci přepínat.

3.1.1 Geometrický prostor versus prostor reprezentací

Z výše řečeného plyne, že obrázky v geometrii mají nejednoznačnou roli. Na jedné straně odkazují na *teoretické geometrické vlastnosti* a na druhé straně přinášejí *prostorově grafické informace*, které vyvolávají percepční aktivitu.

Z této dvojí role pak plynou potíže, které se objevují zejména u žáků a studentů, kteří ještě tyto role neodlišují. I když vědec – matematik také pracuje s fyzickým obrázkem, uvědomuje si, že tento obrázek zobrazuje pouze určité vlastnosti ideálního geometrického objektu. Když chce učitel po žácích, aby zkonstruovali nějaký objekt, očekává, že žáci budou pracovat na geometricko-teoretické úrovni. Žáci však často zůstávají na grafické úrovni. Např. když mají narýsovat tečnu ke kružnici, narýsují pouze čáru, která se kružnice dotýká, aniž by konstrukci provedli teoreticky korektně, tj. přes kolmici na poloměr kružnice v bodě dotyku. Dvojí roli obrázků se věnovalo více autorů, podrobněji zmíním alespoň dva (Laborde, 2005; Mesquita, 1998a).

C. Laborde (2005) rozlišuje prostor geometrických objektů a vztahů (T – *theoretical*) a prostor prostorově grafických entit (SG – *spatio-graphical*). Do T prostoru patří takové činnosti žáka, v nichž se odkazuje na vlastnosti ideálních geometrických objektů a geometrické věty. Do SG prostoru patří činnosti typu rýsování či kreslení do obrázku, pohyb s obrázkem apod. Podobně A. L. Mesquita (1998a) využívá Poincarého (1902) myšlenku odlišení *geometrického prostoru* a *prostoru reprezentací*[9]. Matematici pracují v geometrickém prostoru a automaticky kontrolují či opravují informace přicházející z prostoru reprezentací. Uvědomují si omezení prostoru reprezentací a reprezentace považují spíše za ilustrace, v nichž se objevují pouze některé vlastnosti geometrického prostoru. Vědí, že mají co do činění s geometrickým prostorem, i když pracují v prostoru reprezentací. Naproti tomu žáci mohou oba prostory zaměňovat.

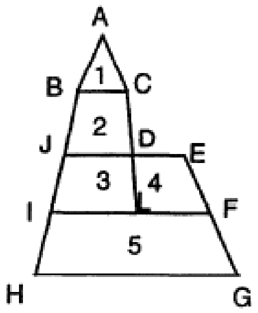
[9] geometrical and representative spaces

C. Laborde (2005) provedla výzkum, v němž zjišťovala, v jakém prostoru se žáci pohybují při řešení úloh, a došla k závěru, že řešitelé přecházejí z jednoho prostoru do druhého a že úloha, která je učitelem zamýšlena jako T typu, nemusí tak být žáky uchopena. Podle Laborde je koexistence teoretických a prostorově grafických aspektů nejen zdrojem problémů u žáků, ale také umožňuje diagnostikovat jejich vyspělost:[10] „Učit se geometrii zahrnuje nejen učit se používat teoretické výroky při deduktivním usuzování, ale také se učit rozeznávat vizuálně relevantní prostorově-grafické invarianty spojené s geometrickými invarianty." (ibid, s. 177) Tedy jde o to, aby se žáci učili odlišovat teoretické a prostorově-grafické vlastnosti. Řešení úloh v geometrii zahrnuje zpravidla využití obou typů vlastností ve vzájemné interakci.

3.1.2 Obrázky charakteru ilustrace versus objektu

A. L. Mesquita (1998a) nabízí ještě jiné rozlišení obrázků v geometrických úlohách podle jejich charakteru. Obrázek může být buď *ilustrací* (illustration), nebo *objektem* (object). Pod ilustrací Mesquita rozumí náčrtek, topologické schéma, doplňující zadání úlohy, který ale nemusí splňovat přesné proporce uvedené v zadání úlohy (jako např. rovnoběžnost, délky úseček, velikosti úhlů apod.). Oproti tomu objekt všechny tyto vlastnosti splňuje a dá se z něj usuzovat na další geometrické vlastnosti. Proto je zejména pro žáky mnohem čitelnější a srozumitelnější. Asi 300 čtrnáctiletých žáků dostalo následující úlohu (Mesquita, 1998a):

> *Předpokládejme, že útvar číslo 1 na obrázku* (obr. 3.1) *je rovnostranný trojúhelník, útvar 2 je obdélník, útvary 3 a 4 jsou čtverce a obrazec, který sestává z útvarů 3, 4 a 5, je čtverec. Chceme dokázat shodnost úseček AC, LF a FG.*

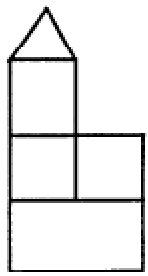


Obr. 3.1 Obrázek charakteru ilustrace (Mesquita, 1989a, s. 192)

[10] Learning geometry seems to involve not only learning how to use theoretical statements in deductive reasoning but also learning to recognise visually relevant spatio-graphical invariants attached to geometrical invariants.

Obrázek tedy má roli ilustrace. Rovnost $|LF| = |AC|$ dokázalo správně 64 % žáků, zatímco rovnost $|FG| = |AC|$ pouze 50 % žáků. Dále bylo zjištěno, že 51 % žáků vzalo v úvahu informace ze slovního popisu i obrázku, zatímco 24 % žáků řešilo úlohu pouze na základě obrázku; žáci se snažili měřit vzdálenosti a hledat poměry.

Na obr. 3.2 je obrázek ke stejné úloze, který má charakter objektu. (Oba obrázky mají deskriptivní roli, viz oddíl 3.1.4.) Ve zmiňovaném výzkumu někteří žáci při řešení úlohy spontánně načrtli reprezentaci situace v podobě objektu sami. Deskriptivní obrázek, který má charakter ilustrace spíše než objektu, tak může působit pro řešení některých žáků jako překážka.



Obr. 3.2 Obrázek charakteru objektu (Mesquita, 1989a, s. 193)

3.1.3 Obrázek jako abstraktní geometrický objekt i určitý případ

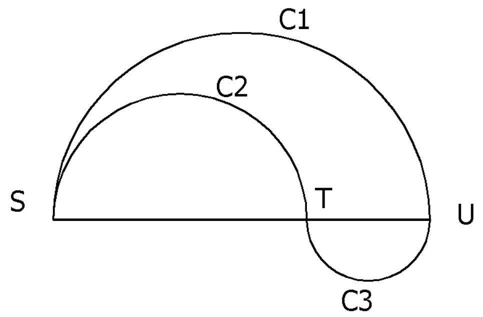
Konečně je zřejmé, že zdrojem obtíží žáků při řešení geometrických úloh je také fakt, že stejný obrázek může reprezentovat *abstraktní geometrický objekt* i jeho *určitý konkrétní případ*. Např. čára na papíře může reprezentovat úsečku určité konkrétní délky nebo i konkrétního umístění, nebo úsečku libovolné délky. Záleží pak na konkrétní situaci, zda se zajímáme o první či druhý význam (Mesquita, 1998a), a k pochopení, o který případ jde, nestačí obrázek sám, ale je nutná znalost dalšího kontextu (např. slovního zadání). Jako příklad uvádím jednu ilustraci.[11] V písemné práci pro 6. ročník byla zadána úloha: *Těžnice t_b v trojúhelníku ABC má délku 24 cm. Jaká je vzdálenost těžiště T od vrcholu B?* U úlohy byl udělán náčrtek trojúhelníku s těžnicí t_b, která však pochopitelně nebyla 24 cm dlouhá. Pro některé žáky to nebyl problém. Chápali náčrtek jako reprezentaci abstraktního geometrického objektu a dokázali z něj vyvodit hledanou délku. Pro řadu žáků byl však náčrtek nepřekonatelnou překážkou – očekávaly, že obrázek trojúhelníku bude odpovídat parametrům, tedy že těžnice bude 24 cm dlouhá; viděli náčrtek jako reprezentaci konkrétního případu.

[11] Pochází z konzultace s N. Vondrovou.

Je třeba dodat, že A. L. Mesquita (1998a) upozorňuje, že zatímco symbolicky se „cokoli" dá vyjádřit jednoduše (v algebře pomocí písmen), pomocí obrázku to tak jednoduché není. Obrázek vždy představuje konkrétní objekt, i když jde vlastně o abstraktní objekt, jehož je obrázek reprezentací.

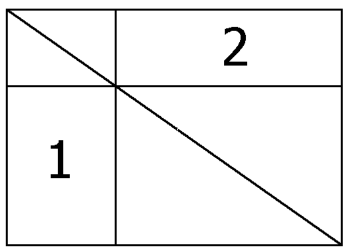
3.1.4 Deskriptivní a heuristická role obrázků

Na roli obrázků v geometrických úlohách se je možné podívat ještě z jiného úhlu pohledu (Mesquita, 1998a). Obrázek může hrát *deskriptivní* (descriptive) roli. Takovou roli má obrázek, který pouze zobrazuje zadání a neposkytuje žádná vodítka k řešení úlohy. Jako příklad je uvedena tato úloha: *Obr. 3.3 je tvořen třemi polokružnicemi C1, C2 a C3, jejichž průměry jsou SU, ST a TU. Porovnejte délky oblouku C1 a křivky tvořené oblouky C2 a C3.*



Obr. 3.3 Deskriptivní role obrázku (Mesquita, 1998a, s. 191)

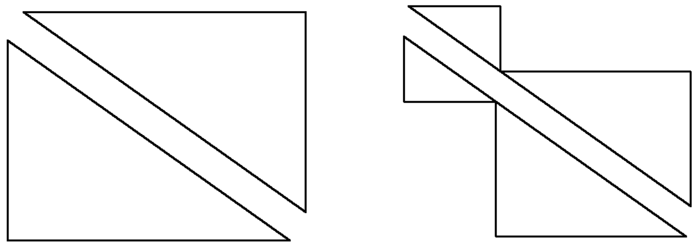
Druhá je role *heuristická* (heuristical), kdy již samotný obrázek obsahuje prvky navádějící ke správnému řešení. Tato role je demonstrována na následující úloze: *Dokažte, že obdélníky 1 a 2 mají stejný obsah (obr. 3.4).*



Obr. 3.4 Heuristická role obrázku (Mesquita, 1989a, s. 191)[12]

Obr. 3.4 může navádět k řešení, jež je naznačeno v obrázku 3.5. Rozdělení původního obdélníku úhlopříčkou může být určitým návodem k řešení. Proto je tento obrázek řazen mezi obrázky s heuristickou rolí.

[12] Úloha je ze zmíněného článku, je však dostatečně známá. Jedná se o adaptaci věty o obdélnících u Euklida.



Obr. 3.5 Dílčí konfigurace v obrázku (Mesquita, 1989a, s. 192)

Je možné dodat, že rozlišování heuristických a deskriptivních obrázků je do velké míry subjektivní. Obrázek může být pro jednoho žáka srozumitelný a může mu pomoci nalézt správné řešení, zatímco pro jiného žáka může představovat pouze popis zadání bez jakékoli nápovědy. Domnívám se, že to souvisí s žákovým „uměním vidět“.

3.2 Umění vidět v geometrii

F. Kuřina (2002a, 2002b) se domnívá, že základní roli při výuce matematiky by měly hrát ty dovednosti, které „matematiku utvářely v historii a jejichž pěstováním lze matematiku přiblížit studentům“. Tyto dovednosti nazývá *umění* a rozlišuje umění počítat, umění vidět, umění sestrojovat, umění dokazovat a umění abstrahovat. Při řešení úloh typu RBV jsou jistě nutná všechna tato umění, nicméně umění vidět (v geometrii)[13] u nich hraje největší roli.

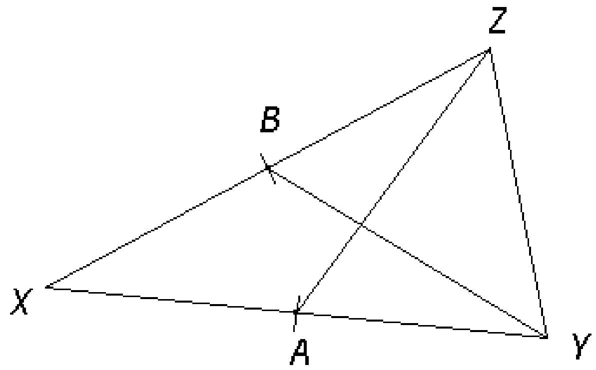
Sám autor *umění vidět* charakterizuje jen velmi volně. Podle něj umění vidět zahrnuje „geometrické vyjadřování, geometrickou představivost a rozvíjení intuice při řešení úloh“ a dále uvádí vhodné úlohy, které mají k umění vidět přispívat. Úlohy typu RBV mohou sloužit jako úlohy, které vedou k rozvoji umění vidět, a současně i jako úlohy, které mají toto umění diagnostikovat. Např. u úlohy na obr. 3.4 musí řešitel „uvidět“, rozlišit, shodné pravoúhlé trojúhelníky.

S Kuřinovým pojmem umění vidět úzce souvisí pojem *geometric eye* („geometrické oko“), s nímž je možné se setkat v zahraniční literatuře a který zavedl na počátku minulého století patrně Ch. Godfrey (1910, cit. v Fujita, Jones, 2002) a charakterizoval jej jako „schopnost vidět, jak geometrické vlastnosti vystupují z obrázku“[14]. T. Fujita a K. Jones (2002) ilustrují tento pojem úlohou z učebnice, kde byl Godfrey spoluautor: *Nechť jsou A a B středy shodných stran XY a XZ rovnoramenného trojúhelníku. Dokažte, že* $|AZ| = |BY|$. (Viz obr. 3.6.) Pro správné řešení úlohy je nutné „vidět“ trojúhelníky AYZ a BZY, aby se s nimi

[13] Autor rozvíjí myšlenku umění vidět i v aritmetice a algebře (viz Kuřina, 1989).

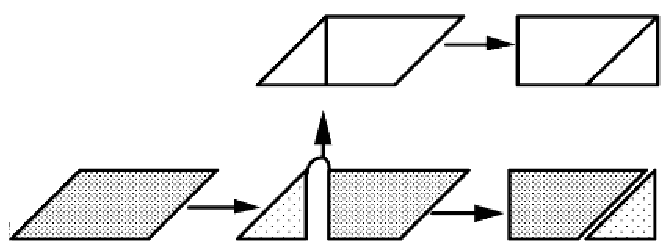
[14] the power of seeing geometrical properties detach themselves from a figure

dalo pracovat a ukázat, že jsou shodné. Podle Duvala (2006) je tedy pro řešení podobných geometrických úloh potřebná schopnost rychle rozlišit v původním obrázku určité možné dílčí konfigurace. Obtížnost pro žáky spočívá v tom, že musejí rozhodnout, které ty dílčí konfigurace jsou ty pravé. Např. v útvaru na obr. 3.4 je celá řada dílčích konfigurací, na něž je možné upřít pozornost, ovšem pro správné řešení úlohy je nutné vidět právě ty, které jsou uvedeny na obr. 3.5.



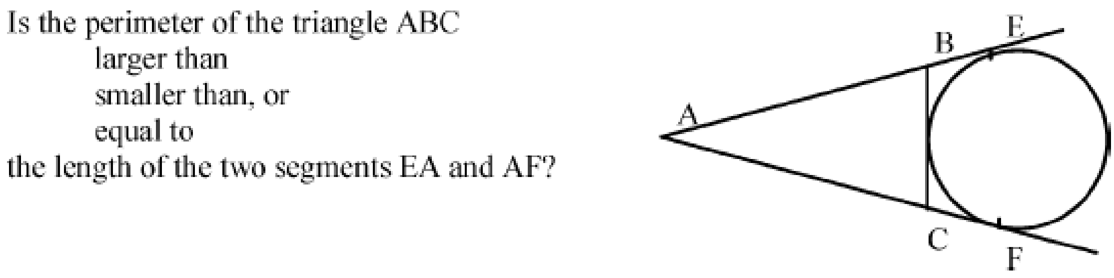
Obr. 3.6 Rovnoramenný trojúhelník *XYZ*

R. Duval (2006) dokládá, že existuje více způsobu „vidění“ v geometrii. Je rozdíl mezi chápáním obrázku v běžném životě, kdy je chápán ikonickým způsobem, a v matematice. Např. „vidět“ v případě dvou horních útvarů na obr. 3.7 znamená rozlišit v původním obrázku transformace, které dovolí přeskupit jeho části do nového celku. Pokud žák umí vypočítat obsah obdélníku, vidí pak, jak vypočítat i obsah kosodélníku. Obrázky nahoře ukazují přechod od kosodélníku k obdélníku založený na popisu jednodimenzionálních vlastností (strana a k ní příslušná výška), zatímco obrázky dole ilustrují vizuální proces, který stojí v pozadí daného přeskupení, a ten vyžaduje, abychom zaměřili pozornost na dvojdimenzionální prvky (útvary).



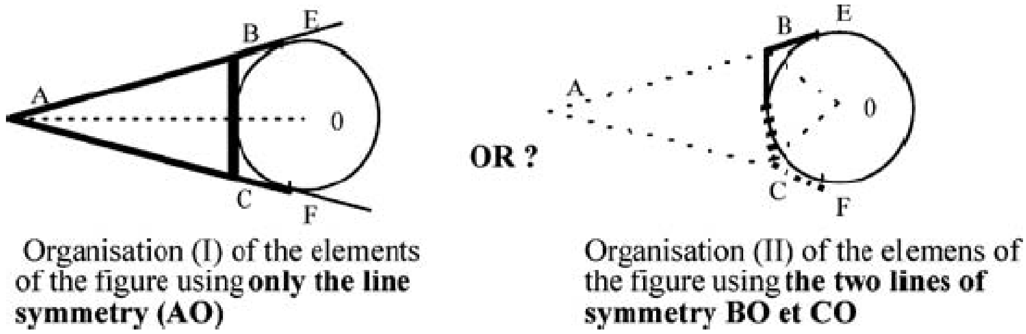
Obr. 3.7 Odvození obsahu kosodélníku (Duval, 2006, s. 116)

Další příklad úlohy typu RBV, v níž je třeba rozlišit dílčí konfigurace obrázku, je na obr. 3.8: *Je obvod trojúhelníku ABC větší, menší nebo roven součtu délek obou úseček EA a AF?* (Mesquita, 1989b, cit.[15] v Duval, 2006).



Obr. 3.8 Úloha z výzkumu (Mesquita, 1989b); obrázek viz (Duval, 2006, s. 118)

Na objekty v obrázku se můžeme dívat minimálně dvěma způsoby, z nichž ale jen jeden vede k řešení a vysvětlení (obr. 3.9). Z obrázku vpravo vyčteme symetrii úsečky *BE* a příslušné úsečky, která představuje polovinu úsečky *BC*, přes osu *BO*.



Obr. 3.9 Rozklad útvaru na obr. 3.8; obrázek viz (Duval, 2006, s. 118)

Podle Duvala obrázek vlevo představuje spontánní vnímání obrázku, osa souměrnosti je vidět takřka na první pohled. Přechod ke konfiguraci v pravém obrázku není jednoduchý. Úsečka *BC* se musí rozdělit na dvě části. K tomu, aby většina žáků správné řešení uviděla, museli dostat instrukci, která měla formu nápovědy: „Nechť je *I* průsečík úsečky *AO* a *BC*; porovnej délky *BI* a *IC*." Je zřejmé, že nezbytným předpokladem správného řešení úloh podobného typu je dobré porozumění geometrickým pojmům.

[15] R. Duval ovšem celý bibliografický odkaz v seznamu použité literatury vůbec neuvádí a mně se nepodařilo originální pramen dohledat. Pravděpodobně se jedná o autorčinu disertační práci, která je psána ve francouzštině. Nezbývá, než se spolehnout na přesnost informací, které uvádí R. Duval. Bohužel nepřináší žádné další podrobnosti o daném výzkumu, který by jinak byl pro mou práci zajímavý. Proto ho neuvádím v oddíle 3.4, kde popisuji související výzkumy.

H. Gal a L. Linchevski (2010) na základě práce (Anderson, 1995) podrobněji rozebírají identifikace dílčích konfigurací a jejich využití pro řešení úloh a rozlišují tři fáze interakce řešitele s obrázkem[16]:

- *organizace* – z obrázku se vynořují tvary a objekty,
- *rozpoznání* – tyto tvary a objekty jsou rozeznány,
- *reprezentace* – teprve v této fázi se informace dostává do kognitivního systému jedince a způsob, jakým je s ní naloženo, závisí na způsobu, jakým je v tomto systému reprezentována.

Výsledkem rozpoznání je tedy reprezentace objektu v mysli člověka. Rozpoznání je výsledkem analýzy, během níž je objekt rozdělen na dílčí objekty (např. v obdélníku rozděleném úhlopříčkami jsou vidět čtyři trojúhelníky). Objekt je pak viděn jako vzor skládající se z dílčích částí.

Z vnějšího pohledu by se mohlo zdát, že řešitel jakoby náhle řešení uviděl, jakoby měl vhled[17] do situace. Vhled je možné chápat jako „osobité a zdánlivě náhlé porozumění problému nebo strategii, která jej napomáhá řešit" (Sternberg, 2002, s. 399). Pozorovateli se sice jeví jako náhlé, v jeho pozadí však většinou stojí dlouhé uvažování a nabyté předchozí zkušenosti; v jeho pozadí tedy je činnost mysli, které si v dané chvíli řešitel ani nemusí být vědom. A. Gutiérrez (1996) vhled definuje jako druh myšlenkové činnosti, která je založena na využití prostorových nebo vizuálních prvků, a to buď mentálních, nebo fyzických. Někteří odborníci ale tvrdí, že takovéto zaškatulkování „vhledu" je mylné, že neexistuje žádné speciální myšlení označené jako „vhled" a že jde pouze o prodloužení obyčejného vnímání, rozpoznávání, učení a vytváření pojmů (Sternberg, 2002). Pro mou práci je zajímavé, že D. Brown a L. G. Wheatley (1997) za důležitou složku vhledu považují schopnost studenta rozdělit vizuální obraz na jednodušší části a ty části znovu spojit do nového obrazu.

---

[16] organization, recognition, representation

[17] Podle psychologického slovníku zavedl termín *vhled* W. Köhler a představuje „pochopení vztahové souvislosti jevu a důvodu, prostředku a účelu, příčiny a účinku, části a celku, jednotlivého případu a zákona" (Hartl, Hartlová, 2000, s. 669).

3.3 Vizualizace

S rolí obrázků v geometrii úzce souvisí pojem vizualizace. R. Zazkis, E. Dubinsky a J. Dautermann (1996, cit. v Stylianou, 2002) charakterizují vizualizaci jako[18]

> proces, kterým jedinec buduje pevný vztah mezi mentálním konstruktem a něčím, s čím může navázat spojení pomocí smyslů. Tento vztah může být jedním nebo druhým směrem. Proces vizualizace může sestávat z mentálních konstrukcí objektů nebo procesů, jež si jedinec spojuje s objekty nebo událostmi, které vnímá jako externí. Případně může proces vizualizace obsahovat konstrukce na nějaké vnější médium (jako např. papír) těch objektů a událostí, které jedinec ztotožňuje s objekty nebo procesy ve své mysli.

Situaci jsem se pokusila uchopit pomocí schématu na obr. 3.10.

Realita		**Mysl jedince**
objekty, události v realitě	→	mentální konstrukt, představa
konstrukce např. na papír	←	mentální představa

Obr. 3.10 Schéma vizualizace I

Jako dvousměrný proces mezi myslí jedince a vnějším prostředím vidí vizualizaci i další autoři. M. C. Borba a M. E. Villarreal (2005) charakterizují vizualizaci již více ve spojení s geometrií. Podle nich vizualizace na jedné straně zahrnuje schopnost interpretovat informace zadané ve formě obrázku nebo diagramu a rozumět jim, na druhé straně zahrnuje tvorbu obrázků (a to v kreslené podobě, na papíře, na počítači, ale i v podobně mentálního obrázku) na základě nějakých abstraktních myšlenek či textu (viz moje schéma na obr. 3.11). Vzhledem k prvnímu parametru úloh typu RBV budou v této práci důležité oba tyto aspekty vizualizace.

[18] act in which an individual establishes a strong connection between an internal construct and something to which access is gained through the senses. Such a connection can be made in either of two directions. An act of visualization may consist of any mental construction of objects or processes that an individual associates with objects or events perceived by her or him as external. Alternatively, an act of visualization may consist of the construction, on some external medium such as paper of objects or events that the individual identifies with objects or processes in her or his mind.

<table>
<tr><th>Realita</th><th></th><th>Mysl jedince</th></tr>
<tr><td>informace zadané ve formě obrázku</td><td>→</td><td>interpretace a porozumění</td></tr>
<tr><td>text</td><td>→</td><td rowspan="2">mentální představa</td></tr>
<tr><td>tvorba obrázků např. na papír</td><td>←</td></tr>
</table>

Obr. 3.11 Schéma vizualizace II

F. Roubíček (1999) v podobném duchu mluví o *vnitřní formě* vizualizace, kdy si jedinec konstruuje představy pouze v mysli na základě zadaných informací, zkušeností a logického myšlení, a o *vnější formě*, kdy jde o vizualizaci za pomoci modelu nebo obrázku, kterou nazýváme *vnější formou*. Je zřejmé, že zkoumání je otevřena vnější forma vizualizace, protože představy jedince jsou nepřístupné.

Pro úplnost pojednáni o vizualizaci ještě dodejme, že M. Senechal (1991) rozlišuje *vizualizaci* a *vizuální myšlení* (visual thinking). Za vizualizaci považuje proces, kterým se věci ve své podstatě viditelné dostávají do mysli člověka (např. prostorová vizualizace). Pojem vizuální myšlení podle něj popisuje proces vizuálního překladu myšlenek, které nejsou ve své podstatě prostorové. Jedná se o vytvoření vizuálních analogií pro pojmy, které byly zavedeny nevizuálně – např. model obdélníku a jeho obsahu je vytvořen jako vizuální analogie pro násobení, které bylo zavedeno kalkulativně.

V oblasti výzkumu vizualizace ve smyslu převodu textu na obrázek jsou zřejmě nejcitovanější práce T. Eisenberga a T. Dreyfuse (1986, 1990, 1991). Ti dospěli k závěru, že žáci se často zdráhají použít vizualizaci pro řešení úlohy a dávají přednost analytickému zpracování.[19] Často také nevědí, jak využít obrázek, který si sami nakreslili. Autoři se odkazují na řadu starších prací, kde se tato tendence objevuje. Jedním z důvodů je podle nich to, že učitelé dávají najevo (implicitně či explicitně), že analytický přístup je nadřazený vizuálnímu. Vizualizaci je tak ve škole dána podřadná role.

Dalším důležitým důvodem žákových problémů je, že vizuální uvažování (zpracování informace) představuje vyšší úroveň mentální aktivity než analytické uvažování. T. Eisenberg

[19] Někteří autoři však upozorňují, že se situace mění. D. A. Stylianou (2001) cituje některé novější práce (kolem roku 1998), z nichž je patrné, že žáci a studenti se již tolik nezdráhají využít vizualizaci v řešení úloh. Tento fakt přičítá změnám osnov, kdy se v řadě zemí zvýšilo používání obrázků a diagramů ve výuce. Také ve svém výzkumném projektu s deseti vysokoškolskými studenty a jejich deseti profesory zjistila, že obě skupiny u předložených úloh často sahaly po diagramech, obrázcích a grafech.

a T. Dreyfus přirovnávají situaci k rozdílu mezi analytickou a obrázkovou prezentací látky. Analytická prezentace je sekvenční, informace jdou za sebou, můžeme je sledovat a žádnou nevynechat. Pokud mezi jednotlivými informacemi existují nějaké vztahy, jsou vysloveny zvlášť. Obrázková prezentace je simultánní, informace a vztahy mezi nimi jsou prezentovány najednou, na jednom místě. Výhoda použití obrázků, které mohou být mnohem výstižnější než popis pomocí slov, se pak mění v nevýhodu, protože může být obtížné si vše uvědomit a interpretovat. A. L. Mesquita (1998a) upozorňuje, že obrázky mohou sice mobilizovat celou řadu vztahů najednou, ovšem na rozdíl od textu, kde jde o sekvenční záležitost, neumožňují rozlišit, co je dáno a co se má zjistit. Podobně ve svých pracích uvažuje i F. Kuřina.

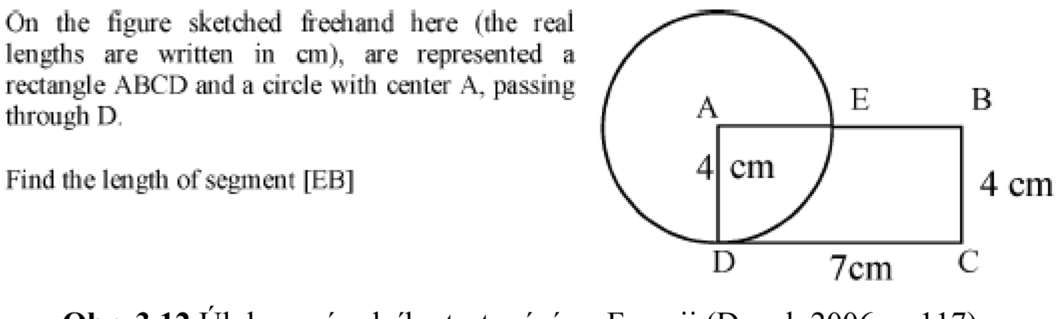
3.4 Výzkum týkající se „umění vidět“[20]

V tomto oddíle se zaměřím na ty výzkumy z oblasti geometrie, které zkoumaly žákovská řešení u úloh, jež bych zařadila mezi mnou charakterizované geometrické úlohy typu RBV. Bohužel rozsáhlá rešerše mně dostupné literatury zejména přes databáze Scopus, Web of Science, EBSCO a Springer ukázala, že skutečně souvisejících výzkumů není mnoho.

3.4.1 Úloha z národního testování ve Francii

R. Duval (2006) popisuje strategie řešení úlohy na obr. 3.12. Úloha zněla:

Na obrázku, který je načrtnut od ruky (skutečné délky jsou dány v cm), je obdélník ABCD[21] *a kružnice se středem v bodě A a procházející bodem D. Najděte délku úsečky EB.*



Obr. 3.12 Úloha z národního testování ve Francii (Duval, 2006, s. 117)

[20] Vzhledem k zaměření mého výzkumu nebudu zmiňovat např. výzkumy, které se zabývají porozuměním obrázků při výuce nové látky, ani výzkumy, kde jde o uchopení dvoudimenzionální reprezentace trojdimenzionálního objektu.

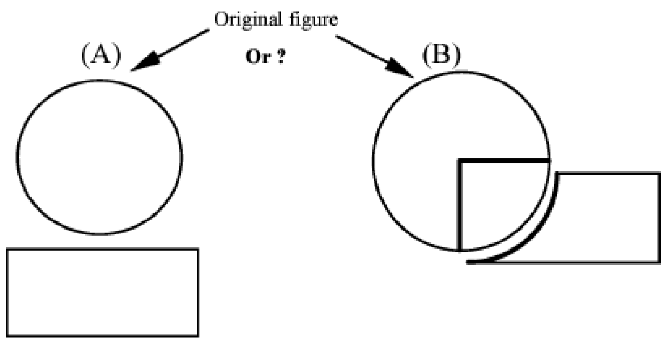
[21] Obdélník je označen po směru hodinových ručiček.

Úloha byla opakovaně zadávána v rámci francouzského národního testování žákům v době přechodu na druhý stupeň základní školy. Výsledky ze dvou po sobě následujících let ukazuje tab. 3.1.

Tab. 3.1 Úspěšnost úlohy typu RBV z francouzského národního testování

Září 1997	**2 604 žáků**	**Září 1998**	**2 590 žáků**
Matematická odpověď (*AE* je úsečka délky 4 cm, tedy *EB* je 3 cm)	9 %	Matematická odpověď (*AE* je úsečka délky 4 cm, tedy *EB* je 3 cm)	22,2 %
Odpovědi založené na měření úsečky (asi 2 cm)	16 %	Odpovědi založené na měření úsečky (asi 3,5 cm)	39,6 %
Odpovědi založené na vizuálním odhadu (*E* je asi v polovině *AB*, kolem 3,5 cm)	26 %		
Jiné odpovědi	30 %	Jiné odpovědi	24,4 %
Žádná odpověď	16 %		

Jak je vidět, matematicky správné odpovědi podalo jen 9 %, resp. 22,2 % žáků, zatímco poměrně velké procento žáků odpovědělo na základě měření úsečky nebo odhadu. Autor neuvádí, jaké povahy byly ostatní odpovědi (např. šlo-li o nějaké výpočtové strategie). Rozebírá však, jaké dílčí konfigurace museli žáci pro správné řešení rozeznat. Pokud viděli oba útvary odděleně (obr. 3.13 vlevo), k řešení je to nedovedlo. Přitom lze říci, že právě tyto útvary jsou viditelné na první pohled a jsou zmíněny i ve slovním popisu. Bylo nutné, aby žáci upřeli pozornost na dílčí konfigurace uvedené na obr. 3.13 vpravo, protože jen tak je vidět, že ony dvě úsečky tvořící poloměr kružnice jsou současně stranou a částí strany obdélníku. To je pro mnohé žáky obtížné, jak je vidět z výsledků výzkumu.



Obr. 3.13 Rozklad útvaru z obr. 3.12 na dílčí konfigurace (Duval, 2006, s. 118)

3.4.2 Geometrická schémata

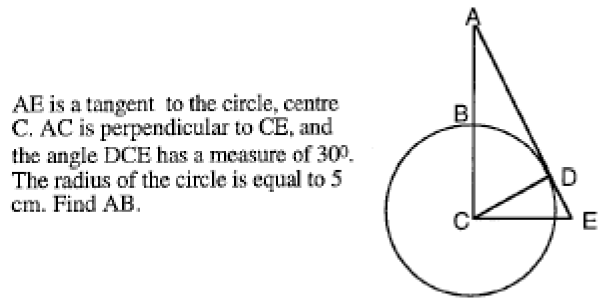
M. Chinnappan (1998) využívá ve svém výzkumu pojem schéma,[22] které charakterizuje jako[23]

> *klastr znalostí, který obsahuje informace o klíčových pojmech, vztazích mezi těmito pojmy a znalost toho, jak a kdy tyto pojmy použít. Jako organizované znalostní struktury schémata řídí jak příjem informace a její vyhledání, tak její následné použití.*

V oblasti geometrie pak navrhuje hovořit o schématech organizovaných kolem určitého tvaru. Tak by se např. dalo mluvit o schématu pravoúhlého trojúhelníku. Jeho součástí jsou všechny znalosti a dovednosti, které jsou s ním nějak spojené (tedy např. i Pythagorova věta). Kvalita schématu je dána jeho organizací (tedy tvorbou spojnic mezi pojmy) a rozsahem (tedy šíří záběru těchto spojnic).

M. Chinnappan ve svém výzkumu zkoumal, jaká schémata se objevují při řešení úlohy na obrázku 3.14. Úloha zněla:

> *AE je tečnou dané kružnice se středem C. AC je kolmá na CE a úhel DCE má velikost 30°. Poloměr kružnice se rovná 5 centimetrům. Najdi AB.*



Obr. 3.14 Úloha z výzkumu geometrických schémat (Chinnappan, 1998, s. 206)

---

[22] Podobně M. Hejný (2007), který vychází z Gerrigova (1991) pojetí, vymezuje pojem schéma jako paměťovou strukturu zahrnující klastry informací relevantní k porozumění, a upřesňuje, že pro vznik schématu tvoří půdu izolované modely vystupující jako informace shlukující se do klastrů. Schéma vzniká až s prvním generickým modelem. M. Hejný dále zdůrazňuje, že na schéma hledíme jako na dynamickou organizaci různorodých prvků.

[23] a cluster of knowledge that contains information about core concepts, the relations between these concepts and knowledge about how and when to use these concepts. As organised knowledge structures, schemas guide both information acceptance and retrieval, and their subsequent use.

Obrázek v úloze se skládá z několika útvarů, jež jsou spojené takovým způsobem, který vyžaduje, aby si řešitel dokázal uvědomit, že jejich části mají více než jednu funkci. Např. stranu *AE* musí vidět jako úsečku, jako tečnu ke kružnici a jako přeponu pravoúhlého trojúhelníku. Podle Chinnappana si žák musí nejdříve tyto násobné role částí obrázku uvědomit, než může aktivovat příslušná schémata a jejich části. Teprve pak může např. poznat, že protože je *AE* tečna, pak je úhel *CDA* pravý.

Před vlastním výzkumem byla úloha předložena několika řešitelům, jmenovitě profesionálnímu matematikovi, dvěma středoškolským učitelům matematiky a dvěma žákům střední školy, s cílem získat expertní způsoby řešení. Ukázalo se, že tito respondenti aktivovali celkem 17 geometrických schémat. V samotném výzkumu, který sestával z rozhovorů se 30 žáky 10. ročníku, se zjistilo, že při řešení úlohy aktivovali celkem 15 schémat a že mezi žáky existují významné rozdíly v závislosti na jejich výsledcích v matematice.[24] Nadanější žáci aktivovali čtyřikrát více schémat. To ukazuje, že méně schopní žáci buď neměli potřebné znalosti, nebo si vůbec neuvědomili, že mezi těmito znalostmi a řešenou úlohu je nějaká souvislost. Nadanější žáci také od začátku řešení směřovali kroky určitým směrem, zatímco ti méně nadaní navrhovali kroky řešení spíše nahodilé a nezacílené.

V řešení původních pěti respondentů M. Chinnappan identifikoval celkem čtyři řešitelské strategie, z nichž je pro mé účely důležitá jedna, která je spíše geometrická. Tato strategie zahrnuje konstrukci úsečky spojující bod *B* a *D*, čímž je možno ukázat, že trojúhelník *BCD* je rovnostranný a trojúhelník *ABD* je rovnoramenný. Dále je nutné použít větu o součtu velikostí úhlů v trojúhelníku a vlastnosti rovnoramenného trojúhelníku a poloměru kružnice. Tak lze dospět k závěru, že úsečka *BD* má stejnou délku jako poloměr kružnice a že úsečka *AB* je stejně dlouhá jako úsečka *BD*.

Ukázalo se, že ze zkoumaných žáků tuto geometrickou strategii nepoužil nikdo. Nejvíce žáků (17) použilo strategii založenou na trigonometrických vztazích. Dva použili strategii, která zahrnovala trigonometrické vztahy a Pythagorovu větu, a další dva k trigonometrickým vztahům přidali ještě věty o podobných trojúhelnících.[25] U devíti žáků se nepodařilo strategii určit. Autor činí mezi jinými závěr, že úloha vyvolala u žáků primárně výpočtová geometrická schémata týkající se trigonometrie. To je možné pozorovat i u následující sondy F. Kuřiny.

[24] V angličtině mluví o *high* a *low-achievers*.

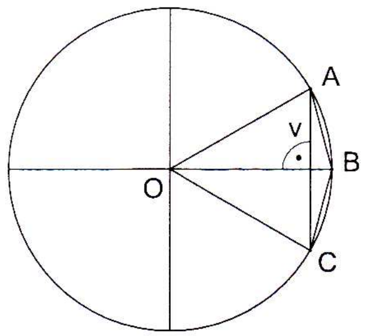
[25] Bohužel článek neobsahuje žádné žákovské řešení, abych mohla být konkrétnější.

3.4.3 Obsah pravidelného dvanáctiúhelníku

F. Kuřina (2011) popisuje, jaké různě vyjádřené výsledky získal od řešitelů, kterými byli absolventi středních škol. Úloha zněla:

Vypočítejte obsah pravidelného dvanáctiúhelníku vepsaného do kružnice poloměru r.

F. Kuřina uvádí jednoduché řešení úlohy založené na faktu, že dvanáctiúhelník je složen z 12 rovnoramenných trojúhelníků, jejichž ramena svírají úhel 360°/12 = 30° (viz obr. 3.15, např. úhel *OAC* má 30°). Protože je $v = 1/2\ |AC| = r/2$, platí pro obsah *S* pravidelného dvanáctiúhelníku $S = 12\ .\ 1/2\ r\ .\ r/2 = 3\ r^2$.



Obr. 3.15 Jednoduché řešení úlohy o obsahu dvanáctiúhelníku (Kuřina, 2011, s. 154)

$$S = 6r^2.\frac{\sin 30°}{\sin 75°}.\sqrt{1 - \frac{\sin^2 30°}{4\sin^2 75°}},$$

$$S = 3r^2.\frac{1}{\sin 75°}.\sqrt{1 - \frac{1}{16\sin^2 75°}},$$

$$S = 12.\sqrt{\frac{r(2+\sqrt{2-\sqrt{3}})}{2}.\frac{r\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.\frac{r\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.\frac{r(2-\sqrt{2-\sqrt{3}})}{2}},$$

$$S = 12.\frac{r^2}{4}\sqrt{2-\sqrt{3}}.\sqrt{2+\sqrt{3}},$$

$$S = 6r^2.\sqrt{2-\sqrt{3}}.\sin 75°,$$

$$S = \frac{12r^2.\sin 30° \cos 15°}{2\sin 75°}$$

$$S = 12r^2.\sin 75° \cos 75°,$$

$$S = 12r^2.\sin 15° \cos 15°,$$

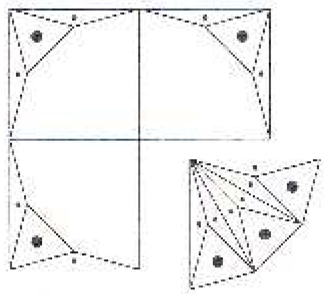
$$S = 6r^2 \sin 30°,$$

$$S = 3r^2.$$

Obr. 3.16 Různě vyjádřené správné výsledky úlohy o obsahu dvanáctiúhelníku (Kuřina, 2011, s. 160)

Na několika příkladech je ukázána nízká matematická kultura některých řešitelů, jmenovitě se hovoří o „nízké úrovni umění vidět souvislosti a řešit úlohu jednoduše adekvátními matematickými prostředky“. Studenti vypracovávali neobyčejně komplikovaná řešení, v nichž nejčastěji využívali kosinovou a sinovou větu a goniometrické funkce. Někdy však nedošli až ke konci řešení. F. Kuřina uvádí přehled správných výsledků, které v řešení absolventů středních škol našel (viz obr. 3.16).

Podle Kuřiny (2006) tedy větší rozsah matematických poznatků nemusí vést k „lepšímu“ řešení. Dokumentuje to také řešením neznámého čínského matematika, který úlohu vyřešil někdy kolem roku 300 n.l. bez jakéhokoli počítání pomocí konstrukce tří čtverců (viz obr. 3.17).

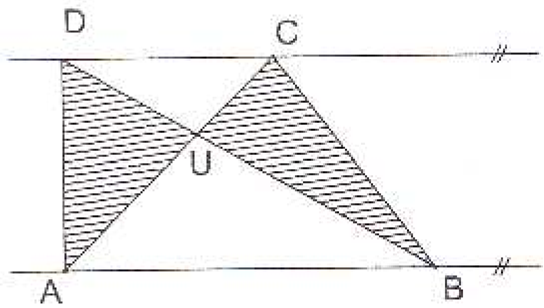


Obr. 3.17 Řešení úlohy o obsahu dvanáctiúhelníku pomocí konstrukce tří čtverců (Kuřina, 2011, s. 155)

3.4.4 Trojúhelníky v lichoběžníku

F. Kuřina (2011) provedl sondu se 140 středoškoláky u úlohy, která je typu RBV:

U je průsečík úhlopříček lichoběžníku ABCD se základnou AB (obr. 3.18). *Mají trojúhelníky ADU a BCU stejný obsah? Odpověď zdůvodněte.*

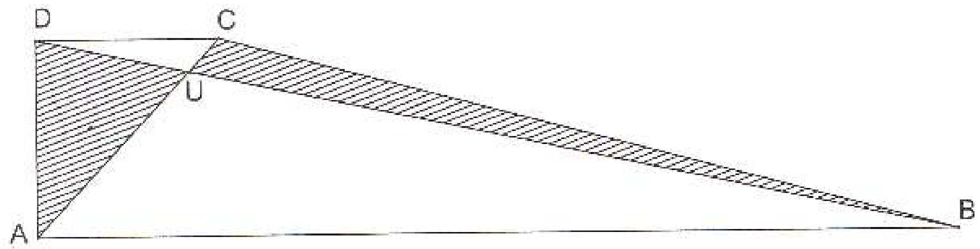


Obr. 3.18 Zadání úlohy trojúhelníky v lichoběžníku (Kuřina, 2011, s. 168)

Kladnou odpověď lze nahlédnout geometrickým způsobem – k tomu je však nutné rozpoznat v obrázku mezi různými útvary, které se nabízejí, dva klíčové trojúhelníky *ABC* a *ABD* a uvědomit si, že mají stejné obsahy (neboť mají společnou základnu *AB* a stejnou výšku) a že jsou sjednocením nepřekrývajících se trojúhelníků, z nichž trojúhelník *AUB* mají společný. F. Kuřina uvádí ještě dvě další řešení, která bych zařadila mezi primárně geometrická, a tři výpočetní (bohužel neuvádí, kolik studentů využilo jakou strategii).

Obtížnost úlohy spočívá podle mého názoru v tom, že zatímco na první pohled z obrázku vystupují trojúhelníky *ADU* a *BCU*, protože jsou šrafované, uvidět je nutné jiné dva trojúhelníky – jakoby při jednom pohledu vystoupil z obrázku trojúhelník *ABD* a při druhém pohledu trojúhelník *ABC*.

F. Kuřina uvádí, že 74 % všech řešitelů úlohu vůbec nevyřešilo[26] a jen 10 % podalo úplné a správné řešení. Podle něj byla příčinou neúspěchu nízká úroveň představivosti, neschopnost vidět souvislosti a nahlédnout situaci z nového pohledu. Zřejmě na základě analýzy řešení si všímá toho, že někteří studenti si formulovali analogickou úlohu pro obdélník, což je vedlo ke kladné odpovědi, a naopak, že nikdo nepřišel na kladnou odpověď zprostředkovanou rovnoramenným lichoběžníkem. Několik studentů si formulovalo analogickou úlohu pro lichoběžník s rameny „velmi odlišných délek“ (viz obr. 3.19), což je bohužel vedlo k záporné odpovědi. Zde se studenti zřejmě nechali vést „názornými představami“.



Obr. 3.19 Zadání analogické úlohy pro lichoběžník s výrazně odlišnými délkami ramen (Kuřina, 2011, s. 168)

3.4.5 Rovnoramenný trojúhelník

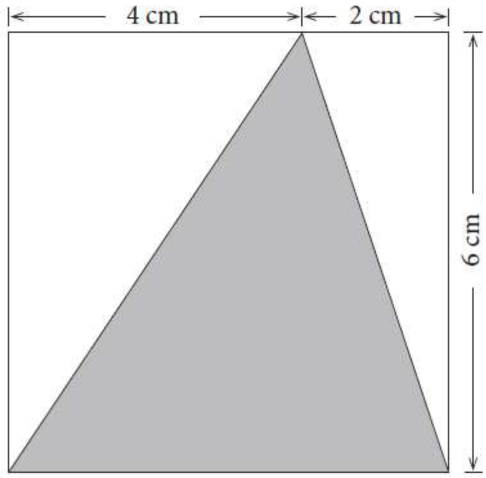
T. Fujita a K. Jones citují v práci z roku 2002 studii (Nakanishi, 1987), v níž bylo 87 žákům ve věku 14 a 15 let v Japonsku dána úloha o rovnoramenném trojúhelníku (viz obr. 3.6 a zadání úlohy v oddíle 3.2). Devět žáků nedokázalo úlohu řešit, protože žádné shodné trojúhelníky neviděli, a čtyři žáci nedokázali zacílit pozornost na tu správnou dvojici shodných trojúhelníků. Ukazuje se, že pro některé žáky je skutečně obtížné „vidět“ v obrázku jeho určité dílčí konfigurace a zaměřit na ně pozornost. Autoři však neuvádějí žádné podrobnosti o řešitelských strategiích.

[26] Bohužel neuvádí, jak vypadaly neúspěšné výpočtové strategie, nebo zda se žáci do řešení vůbec nepustili.

3.4.6 Úloha z TIMSS

Závěrem zmíním ještě úlohu typu RBV, která se objevila v mezinárodní srovnávací studii TIMSS (viz obr. 3.20; Tomášek a kol., 2009).

Na obrázku je uvnitř čtverce vybarvený trojúhelník.



Jaký je obsah vybarveného trojúhelníku?

Obr. 3.20 Úloha z TIMSS 2007 M01-12

Podle autorů úlohy se jedná o úlohu s geometrickým zaměřením, která testuje používání vhodných vzorců pro výpočet obsahů. Úloha byla zadána žákům 8. ročníku v roce 1999 a 2007. Jejich úspěšnost je vidět z tab. 3.2.

Tab. 3.2 Úspěšnost úlohy typu RBV v TIMSS

Úspěšnost v %	**Celkem**	**Dívky**	**Chlapci**
Česká republika 1999	33,2	33,0	33,5
Česká republika 2007	23,1	20,6	25,3
Mezinárodní průměr	28,7	29,1	28.4

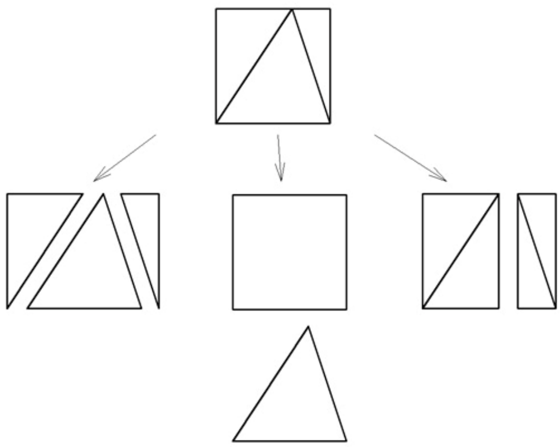
Jak je vidět, v této úloze se naši žáci od roku 1999 zhoršili a v roce 2007 byli pod mezinárodním průměrem. Navíc více než 32 % našich žáků úlohu vůbec neřešilo, lze tedy předpokládat, že nenašli žádnou strategii řešení. Z mého hlediska je však zajímavé, že v komentáři se doslova píše (Tomášek a kol., 2009, s. 66):

> V úloze mají žáci vypočítat obsah trojúhelníku vepsaného do čtverce daných rozměrů. Při jejím řešení mají prokázat nejen to, že znají a umí použít vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku, ale i že parametry potřebné pro výpočet dokážou vyčíst z obrázku. To, že nebyla explicitně uvedena délka strany a příslušná výška trojúhelníku, byl pravděpodobný důvod poměrně nízké úspěšnosti řešení úlohy.

Domnívám se, že existují přinejmenším tři možnosti, jak úlohu řešit, z nichž první je výpočtová, zatímco zbylé jsou spíše geometrické:

- Výpočtová strategie pomocí vzorce pro obsah trojúhelníku – je nutno si uvědomit, že výška trojúhelníku je stejně velká jako strana čtverce.
- Strategie pomocí rozdělení čtverce na dílčí konfigurace (obr. 3.21) – na dva obdélníky dokreslením nebo domyšlením si kolmice jdoucí vrcholem trojúhelníku; je nutno si uvědomit, že pak strany trojúhelníku jsou úhlopříčky těchto obdélníků a že tedy v nich vyšrafovaná část zabírá právě jednu polovinu. Obsah vyšrafované části je tedy polovinou obsahu čtverce.
- Strategie pomocí posunutí vrcholu trojúhelníku např. do pravého horního vrcholu čtverce – obsah trojúhelníku se nezmění, protože se nezmění ani strana ani výška, a je vidět na první pohled, že hledaný obsah je polovinou obsahu čtverce.

Je škoda, že není možné získat informace o použitých způsobech řešení pro úlohu z obr. 3.20. Lze se jen domnívat, že ani v roce 1999 žáci nevyužívali hojně nevýpočtové strategie, ale je možné, že byli více cvičeni ve vzorci pro obsah trojúhelníku a dovedli najít délku výšky i v tomto obrázku. Pokud i autoři úlohy píší, že je primárně zaměřena na využití vzorce a na to, zda žáci dokáží jeho parametry vyčíst z obrázku, neznamená to, že žáci jsou právě k tomuto způsobu řešení vedeni a že jsou geometrické způsoby řešení ve výuce spíše potlačeny?[27]



Obr. 3.21 Možné dílčí konfigurace u úlohy z TIMSS 2007

[27] Konzultace s N. Vondrovou.

Třetí strategie je svým charakterem dynamická a pro žáky obtížná. Nestačí znát vzorec pro obsah trojúhelníku, ale je nutné si uvědomit, že i když změní trojúhelník svůj tvar, nezmění svůj obsah. Jde vlastně o princip konzervace obsahu (Piaget, 1999).[28] Z výzkumu je známo (např. Kordaki, 2003), že žáci sice vzorec pro obsah trojúhelníka ovládají, ale princip konzervace obsahu jim v tomto kontextu zůstává skryt a často se domnívají, že dva trojúhelníky musí být shodné, aby měly stejný obsah (Kospentaris, Spyrou, Lappas, 2011). Příčinou může být i přílišný důraz na počítání na úkor konceptuálního porozumění obsahu (Kospentaris, Spyrou, Lappas, 2011). Např. je možné více využít úlohy, v nichž se obsah útvaru nepočítá, ale útvary se z hlediska obsahu jen porovnávají. V případě TIMSS úlohy je při využití třetí strategie okamžitě vidět, že obsah trojúhelníku je polovina obsahu čtverce. Dalším úkolem, který vede spíše ke konceptuálnímu porozumění obsahu trojúhelníku, je úkol v programu dynamické geometrie nechat žáky experimentovat s trojúhelníkem, konkrétně posunovat jeden jeho vrchol po přímce a sledovat, jak se mění obsah tohoto trojúhelníku – tím zjistí, že obsah trojúhelníku závisí na jeho výšce, a následně i to, že když onu přímku sestrojí jako rovnoběžku s protilehlou stranou trojúhelníku, pak se obsah trojúhelníku nemění (Vaníček, 2009, s. 95). J. Vaníček uvádí, že tento úkol mohou žáci plnit i v době, kdy už žáci vzorec pro obsah trojúhelníku znají – pak slouží jako diagnostická úloha jejich porozumění.

3.5 Závěr kapitoly

V této kapitole byly popsány pojmy související s geometrickými úlohami typu RBV. Podrobně se věnovala zejména problematice rolí a vnímání obrázků v geometrii a možným zdrojům obtíží žáků při jejich řešení. Byly podány výsledky šesti výzkumů, v nichž byla použita úloha typu RBV a zkoumány řešitelské strategie žáků. Jejich společným znakem bylo, že žáci různého věku mají s těmito úlohami problémy, často se snaží využívat výpočtové strategie a obecně mají problém s „viděním“ v obrázku, zejména s rozeznáním dílčích konfigurací, které jsou nutné pro úspěšné vyřešení úlohy.

Na základě výše řečeného a úvodních experimentů z kapitoly 2 jsem formulovala hypotézu, že u úloh typu RBV dávají žáci přednost výpočtovému řešení a že jednou z příčin

[28] Úloha Ploty zahrad z oddílu 2.1 je stejného charakteru a konzervace obsahu se objevuje i v úlohách z obr. 3.7 a 3.19. Podobně D. Jirotková (2010, s. 96, s. 211) uvádí, že žáci i budoucí učitelé mají často problém najít na čtverečkovaném papíru se čtverci o délce strany 1 j trojúhelník o obsahu ½ j^2 jiného tvaru, než je pravoúhlý trojúhelník, který tvoří polovinu čtverce. Příčinu vidí v nedostatečném množství izolovaných modelů takového trojúhelníka.

může být to, že znalost vzorců a algebraických postupů je pro ně překážkou nalezení geometrického řešení, resp. že se ani geometrické řešení nepokoušejí hledat. Další z možných příčin, jak ukázal výzkum, může být fakt, že žáci jsou přesvědčeni o tom, že algebraické řešení je „matematičtější“ a hodnotnější než řešení geometrické. Konečně další příčinou může být složitost uchopení obrázku, který obsahuje velké množství informací najednou. Pokud jeho jednotlivé části popíšeme písmeny a vytvoříme z nich nějaké výrazy, stane se s konceptuálního problému problém procedurální, který žáci pociťují jako jednodušší.

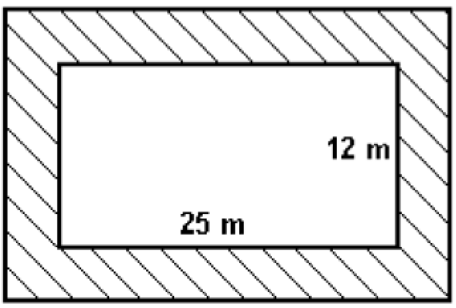
4 Pilotní studie

Na základě prvotních experimentů jsem formulovala výzkumné otázky (viz oddíl 2.3) a na základě studia literatury jsem stanovila předběžné hypotézy (viz oddíl 3.5). V další fázi jsem provedla pilotní studii s cílem nalézt vhodné úlohy typu RBV pro hlavní studii výzkumu. Konkrétně jsem chtěla posoudit, zda jsou jejich zadání pro žáky různého věku srozumitelná, zda vedou k různým strategiím řešení a zda nejsou pro žáky příliš jednoduché. Úlohy jsem plánovala zadat žákům v rámci hodin matematiky ve škole, kde jsem pracovala. Práce žáků neměla být hodnocena známkou, což žáci měli vědět předem. Každý žák měl pracovat samostatně a ani já jsem neměla v úmyslu žákům pomáhat. Úlohy jsem plánovala předložit dvěma třídám různého věku (konkrétně 5. a 7. ročníku osmiletého gymnázia), abych potom mohla alespoň částečně výsledky porovnat. Následná analýza řešení žáků měla přinést zejména soubor řešitelských strategií a posoudit vhodnost úloh pro hlavní studii.

4.1 Výběr úloh pro pilotní studii a jejich popis

Výběr možných úloh byl požadavkem, že mají být řešitelné žáky různého věku, podstatně omezen, nemohla jsem např. použít řadu úloh ze souvisejících výzkumů (viz oddíl 3.4). Nakonec jsem vybrala pět úloh, které se mi zdály být slibné, jelikož odpovídaly charakteristikám úloh RBV a zároveň neměly shodné způsoby řešení, byly různorodé. Úlohy jsou zde uvedeny s řešením, které považuji za geometrické (resp. za nevýpočtové). Mohou mít samozřejmě i jiné způsoby řešení, ty jsou však komplikovanější či zdlouhavější nebo nejsou přiměřené věku žáků, pro něž jsou úlohy plánovány.

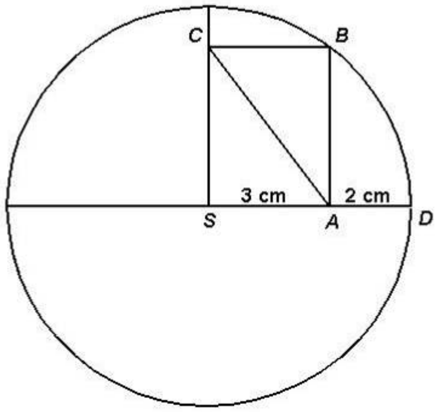
Úloha 1: *Kolem bazénu s rozměry 25 m a 12 m je pás trávy, který je po stranách bazénu široký 4,5 m* (viz obr. 4.1). *Vypočítejte obsah travnaté plochy.*



Obr. 4.1 Trávník kolem bazénu

Na první pohled se může zdát, že tato úloha je spíše výpočtová než geometrická. Za geometrické řešení považuji takový přístup žáků, kdy v obrázku rozezná dva obdélníky (velký a vnitřní) a uvědomí si, že trávník je ve skutečnosti doplněk vnitřního obdélníku do obdélníku velkého. Pak stačí odečíst obsah vnitřního obdélníku od obsahu velkého obdélníku. Tedy jakýsi výpočet je nutno udělat, ovšem je vcelku přímočarý a předchází mu geometrická úvaha, která řešení významně ulehčuje. Překážkou může být to, že trávník je vyšrafován, což automaticky přitahuje pozornost řešitele, který však pro geometrické řešení musí upřít svou pozornost na malý obdélník, tedy komplement toho, co z obrázku vystupuje.

Úloha 2: *V kružnici je dán obdélník SABC podle obrázku* (viz obr. 4.2). *Určete velikost úsečky AC, jsou-li dány velikosti SA a AD. Své řešení zdůvodněte.*



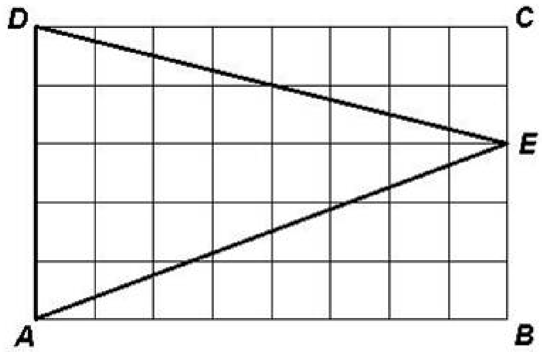
Obr. 4.2 Obdélník v kružnici

Geometrické řešení v prostoru T[29] je u této úlohy velmi elegantní. Řešitel musí rozeznat obdélník *SABC*, což v tomto případě není tak obtížné, protože na něj upozorňuje už text úlohy.[30] Dále si stačí uvědomit shodnost úhlopříček v obdélníku a všimnout si faktu, že úhlopříčka *SB* je nejen shodná s úhlopříčkou *AC*, ale že je zároveň poloměrem kružnice (má tedy dvojí roli, kterou si žák musí uvědomit). Tento poloměr je podle obrázku známý, je tedy známá i velikost úhlopříčky *AC*. Mohli bychom říci, že obrázek má v tomto případě heuristickou roli (Mesquita, 1998a), protože úhlopříčka *AC*, která je v obrázku již nakreslena, do jisté míry napovídá, že lze dokreslit či domyslet si i druhou úhlopříčku *SB*.

[29] Tedy prostoru geometrických objektů a vztahů (T – *theoretical*), viz oddíl 3.1.1.

[30] Ovšem jsou možné i další dílčí konfigurace, např. čtvrtkruh, trojúhelník *SAC* a *ACB*, případně i trojúhelník *ADB*; žák si musí uvědomit, která konfigurace je ta pravá.

Úloha 3: *Zjistěte, jakou část obsahu obdélníku ABCD zaujímá obsah trojúhelníku AED* (viz obr. 4.3).



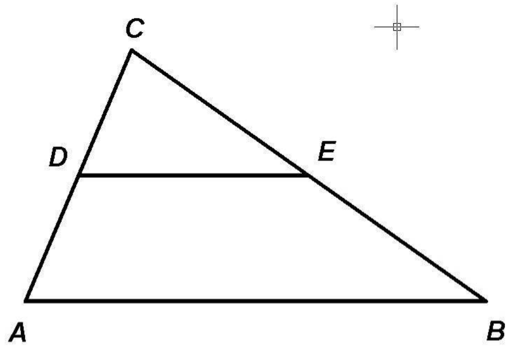
Obr. 4.3 Obsah trojúhelníku ve čtvercové síti

Úloha do jisté míry připomíná úlohu z TIMSS 2007 (viz oddíl 3.4.6), ovšem v době pilotní studie ještě nebyla uvolněna, resp. já jsem s ní seznámena nebyla. I když je má úloha zadána ve čtvercové síti a trojúhelník je vepsán do obdélníku a ne čtverce, může pilotní studie částečně naznačit odpověď na otázku po strategiích řešení úlohy z TIMSS 2007. Úspěšnost řešení mnou navržené úlohy může být pozitivně ovlivněna tím, že je použita čtvercová síť (výška trojúhelníku je v podstatě již narýsována), ovšem negativní vliv může mít fakt, že trojúhelník je zde v netypické poloze (se základnou umístěnou svisle ne vodorovně).

Možné řešitelské strategie jsem popsala už v oddíle 3.4.6; pro úplnost zde uvedu druhou a třetí z nich, které jsou spíše geometrické než výpočtové.

- Strategie pomocí rozdělení obdélníku na dílčí konfigurace – na dva obdélníky pomocí kolmice jdoucí vrcholem *E* na stranu *AD*; je nutno si uvědomit, že strany trojúhelníku *AE* a *DE* jsou úhlopříčky těchto obdélníků, a že tedy v nich vyšrafovaná část zabírá právě jednu polovinu. Obsah vyšrafované části je tedy polovinou obsahu obdélníku.
- Strategie pomocí posunutí vrcholu trojúhelníku např. do bodu *C* – obsah trojúhelníku se nezmění, protože se nezmění ani strana ani výška, a je vidět na první pohled, že hledaný obsah je polovinou obsahu obdélníku.

Úloha 4: *Je dán obecný trojúhelník ABC a body D, E, které jsou po řadě středy stran AC, BC* (viz obr. 4.4). *Úsečka DE rozdělí trojúhelník ABC na trojúhelník a lichoběžník. Zjistěte poměr jejich obsahů. Své řešení vysvětlete.*

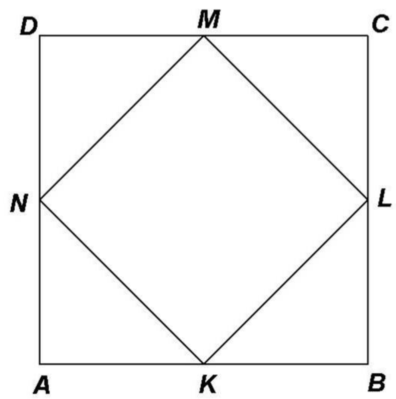


Obr. 4.4 Poměr obsahů trojúhelníku a lichoběžníku

Zde za nejrychlejší postup řešení považuji doplnění zbylých dvou středních příček trojúhelníku *ABC*. Tak se vytvoří i bod *F*, který bude ležet ve středu strany *AB*. Poté je možné dokázat, například pomocí věty o shodnosti trojúhelníků sss, že jsou všechny čtyři takto vzniklé trojúhelníky shodné, jelikož se shodují v délkách všech tří stran ($|AD| = |DC| = |EF|$, $|AF| = |FB| = |DE|$, $|DF| = |EC| = |BE|$). Pak je zřejmé, že trojúhelník *DEC* se skládá pouze z jednoho takového trojúhelníku, zatímco lichoběžník *ABED* ze tří takových shodných trojúhelníků. Poměr je tedy 1 : 3.

Obtížnost úlohy spočívá v nutnosti uvědomit si, že *DE* je střední příčka, a v případě geometrického řešení dokreslit si zbývající střední příčky (u úlohy 2 jde také o dokreslení úsečky, ovšem její krajní body jsou již v obrázku přítomny). Na rozdíl od předchozích úloh nejsou u této úlohy a následující úlohy dány žádné rozměry, úlohy jsou zadány zcela obecně. Pro geometrické řešení je nutno chápat obrázky jako reprezentanty abstraktních geometrických objektů, ne konkrétního případu.

Úloha 5: *Do čtverce ABCD je vepsán další čtverec KLMN tak, že spojíme postupně středy stran čtverce ABCD* (viz obr. 4.5). *Určete poměr obsahů čtverců ABCD a KLMN a své řešení vysvětlete.*



Obr. 4.5 Čtverec ve čtverci

V útvaru jasně vystupuje kromě velkého čtverce čtverec *KLMN* a případně čtyři rohové pravoúhlé trojúhelníky. Pokud se doplní úhlopříčky čtverce *KLMN*, ke správnému řešení vede rozeznání čtyř shodných čtverců, v nichž jsou strany čtverce *KLMN* úhlopříčkami (opět hrají dvě role). Úhlopříčky čtverce ho dělí na dva shodné trojúhelníky (což lze ukázat teoreticky pomocí věty o shodnosti trojúhelníků sss), takže je již patrné, že se malý čtverec skládá ze čtyř shodných trojúhelníků, zatímco velký čtverec *ABCD* z osmi takových trojúhelníků. Proto je jeho obsah dvakrát větší a hledaný poměr je 2 : 1.

4.2 Průběh pilotní studie a její účastníci

Pilotní studie byla realizována v říjnu roku 2009. Úlohy jsem zadávala v průběhu vyučovací hodiny ve dvou třídách, ve kterých jsem vyučovala matematiku, formou pracovního listu. Žáci věděli, že nebudou z úloh klasifikováni, a jejich práce tedy neovlivní školní výsledky. Na vypracování úloh měli 45 minut a o plánovaném experimentu nebyli dopředu informováni. Nemohli se tedy na něj připravit, ani si donést pomůcky, které běžně do hodin matematiky nenosí. Někteří tedy neměli ani rýsovací potřeby.

Experimentu se zúčastnilo 23 žáků 5. ročníku osmiletého gymnázia (žáci ve věku 14 – 16 let) a 12 žáků 7. ročníku osmiletého gymnázia (žáci ve věku 17 – 18 let).[31] Považovala jsem za důležité, aby byl věkový rozdíl mezi třídami alespoň dva roky, abych se více přiblížila k odpovědi na otázku týkající se porovnání strategií řešení u žáků různého věku. Nechtěla jsem však pracovat s žáky maturitních ročníků, kteří se již více specializují na své maturitní předměty. Někteří tak v matematice začali více vynikat, neboť navštěvovali maturitní semináře a byli více vnitřně motivováni k práci v tomto předmětu. Jiní naopak nepovažovali matematiku za svůj upřednostňovaný předmět, a tak by se nad úlohami nejspíš ani hlouběji nezamysleli.

Na vypracování úloh měli žáci dostatek času a v obou třídách všichni pracovní list odevzdali ještě před koncem hodiny. Neobjevili se ani žáci, kteří by úlohy odevzdali výrazně dříve než ostatní. Z pracovních listů pak ale bylo patrné, že někteří žáci 7. ročníku vypracovali úlohy rychleji a pouze vyčkali, až budou práci odevzdávat i ostatní.

Protože byli žáci na začátku seznámeni s tím, že si musí při řešení úloh poradit sami, nevyžadovali v průběhu práce téměř žádný zásah experimentátora. Výjimkou byly v obou

[31] Gymnázium J. G. Jarkovského, Truhlářská 22, Praha 1.

třídách dotazy, zda mohou úlohy vypracovat na zvláštní papír, jelikož v pracovním listě neměli dostatek místa. Zde jim bylo vyhověno.

4.3 Analýza žákovských řešení úloh a její výsledky

Na analýzu dat z pilotní studie jsem využila kvalitativní analýzu zaměřenou na použité řešitelské strategie. Strategie jsou pro jednotlivé úlohy sepsány v tab. 4.1 až 4.5 současně s počty žáků obou ročníků, kteří si danou strategii zvolili. V tabulkách je také uvedeno, u kolika žáků vedla vybraná strategie ke správnému či naopak nesprávnému výsledku. Strategie jsou dále pod tabulkami komentovány a vysvětleny.

4.3.1 Úloha 1 – trávník kolem bazénu

U této úlohy se objevily dvě strategie (S1 a S2).

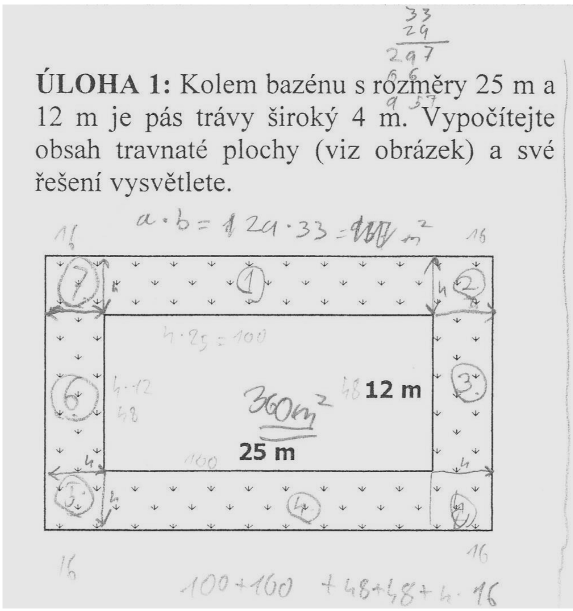
Tab. 4.1 Strategie u úlohy 1

	Strategie 1		**Strategie 2**	
	Správný výsledek	**Nesprávný výsledek**	**Správný výsledek**	**Nesprávný výsledek**
5. ročník (23)[32]	16	4	3	0
7. ročník (12)	7	1	2	2

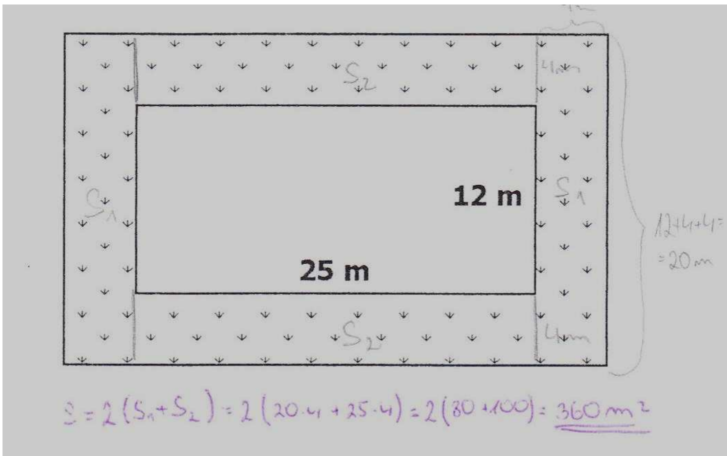
S1: Tato strategie, kterou považuji za primárně geometrickou, odpovídá způsobu řešení, který jsem uvedla v oddíle 4.1.

S2: Můj předpoklad, že jako překážka bude působit vyšrafovaný pás, který na sebe strhne řešitelovu pozornost, se naplnil. Několik žáků se zaměřilo pouze na vyšrafovanou plochu a rozdělilo si ji do čtyř (popřípadě osmi) obdélníků (popřípadě čtyř obdélníků a čtyř čtverců). Žáci vypočítali jednotlivé obsahy, které následně sečetli (obr. 4.6). Ti početně zběhlejší žáci si alespoň postup zjednodušili tím, že si uvědomili shodnost některých obdélníků (popřípadě čtverců) a při výpočtech využili násobení (obr. 4.7).

[32] Číslo uvádí, pro lepší přehlednost, celkový počet testovaných žáků v ročníku.



Obr. 4.6 Výpočtová strategie u úlohy 1 – bez zjednodušení



Obr. 4.7 Výpočtová strategie u úlohy 1 – se zjednodušením

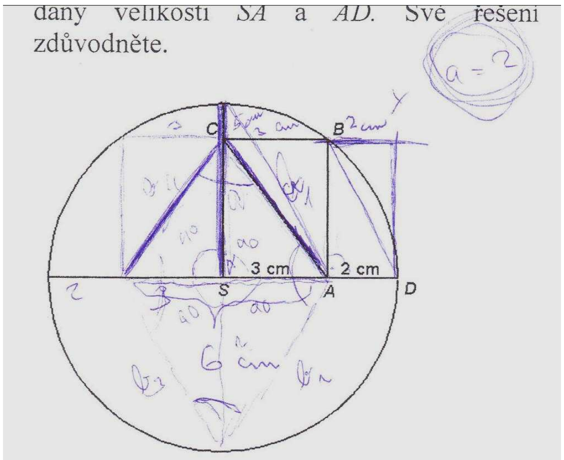
4.3.2 Úloha 2 – obdélník v kružnici

Tato úloha vedla k více strategiím. Tři z nich (S1, S2, S3) se objevovaly poměrně často. Zbylé strategie jsem do tab. 4.2 shrnula pod názvem Ostatní. Jejich zastoupení v pracích žáků bylo malé a zároveň se jednalo spíše o nezacílené pokusy řešení, kdy žáci nevěděli, jak postupovat, a patrně zkoušeli, jestli je črtáním do obrázku něco nenapadne.

Tab. 4.2 Strategie u úlohy 2

	Strategie 1		**Strategie 2**		**Strategie 3**		**Ostatní strategie**	
	Spr. výs.	**Nespr. výs.**	**Spr. výs.**	**Nespr. výs.**	**Spr. výs.**	**Nespr. výs.**	**Spr. výs.**	**Nespr. výs.**
5. roč. (23)	0	2	5	0	11	1	0	4
7. roč. (12)	0	1	1	0	10	0	0	0

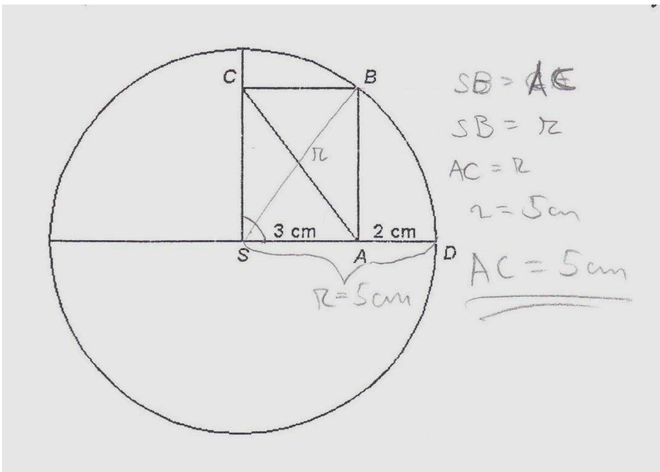
S1: Žáci si zakreslili do obrázku obdélník symetrický podle osy *SC* do levé části kruhu a pokoušeli se zjistit délky různých úseček tak, aby si z nich pak mohli odvodit i délku hledané úsečky *AC* (obr. 4.8). Tato strategie samozřejmě nevedla ani u jednoho žáka ke správnému řešení. Poloměr, na němž leží úsečka *SC*, těmto žákům zřejmě navodil představu osové souměrnosti.



Obr. 4.8 Neúspěšné řešení úlohy 2 pomocí souměrnosti

S2: Žáci zřejmě rozpoznali v obrázku pravoúhlý trojúhelník s délkou odvěsny 3 cm, což jim evokovalo pravoúhlý trojúhelník se stranami délek 3 j, 4 j a 5 j. Odvodili tak tedy i délku přepony, ovšem za ničím nepodloženého předpokladu, že úsečka *SC* má délku 4 cm. Toto řešení, které použilo poměrně dost žáků, mě překvapilo, nepředpokládala jsem ho. Ukázalo se, že mnou zadané hodnoty v obrázku nejsou vhodné.

S3: Tato strategie odpovídá řešení úlohy uvedenému v oddíle 4.1 (viz obr. 4.9).



Obr. 4.9 Správné řešení úlohy 2

Ostatní strategie nevedly ani u jednoho žáka ke správnému řešení. Buď to byly pouze pokusy a črtání do obrázku, nebo žák stanovil špatný předpoklad, ze kterého potom v dalších svých úvahách vycházel. Příkladem je žák, který považoval trojúhelník *SAC* za rovnoramenný.

4.3.3 Úloha 3 – obsah trojúhelníku ve čtvercové síti

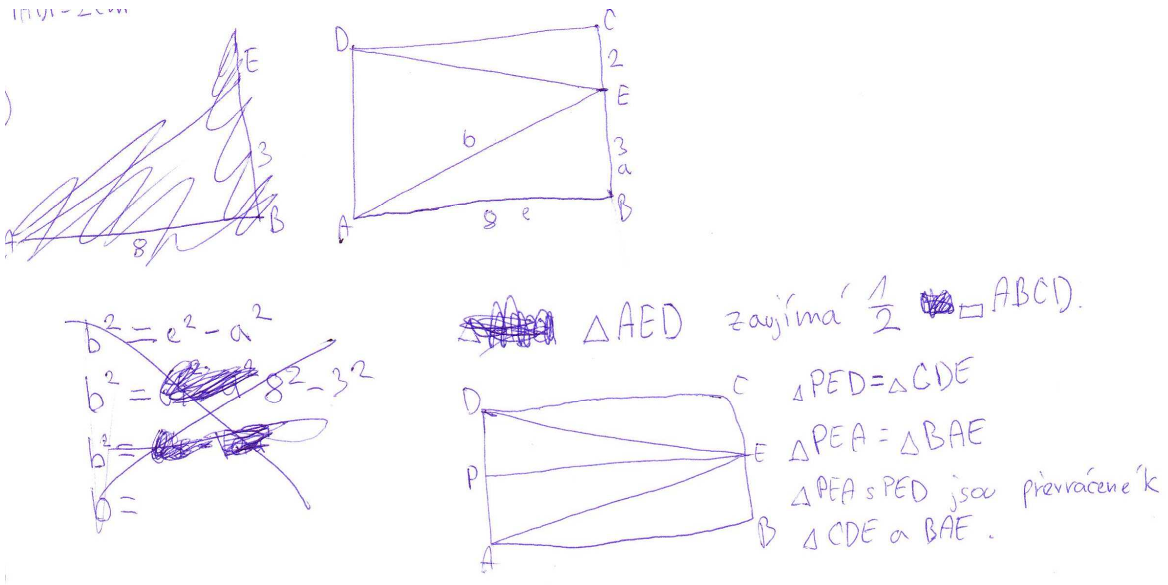
U této úlohy jsem identifikovala tři nejčastěji zastoupené strategie (S1, S2, S3) a dvě strategie, které se objevily pouze jednou a které jsou zahrnuty mezi Ostatní (viz tab. 4.3).

Tab. 4.3 Strategie u úlohy 3

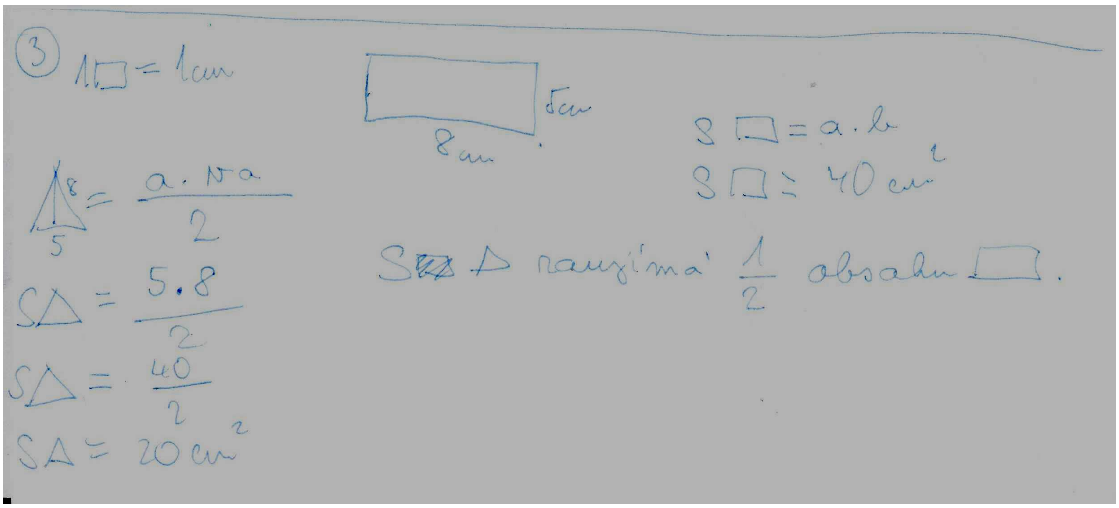
	Strategie 1		**Strategie 2**		**Strategie 3**		**Ostatní**	
	Spr. výs.	**Nespr. výs.**	**Spr. výs.**	**Nespr. výs.**	**Spr. výs.**	**Nespr. výs.**	**Spr. výs.**	**Nespr. výs.**
5. roč. (23)	7	0	7	0	4	3	0	2
7. roč. (12)	7	0	3	0	2	0	0	0

S1: Tato strategie vedla u všech žáků, kteří ji použili, ke správnému řešení (obr. 4.10). Jedná se o první z předpokládaných geometrických strategií (viz oddíl 4.1).

S2: Tato strategie byla výrazně výpočtová (obr. 4.11). Žáci použili čtvercovou mřížku pro určení délek úseček. Tyto délky úseček dosadili do vzorců na výpočet obsahů trojúhelníku a obdélníku a následně jejich obsahy porovnali. Výpočty všichni žáci provedli bezchybně, takže došli ke správnému řešení.

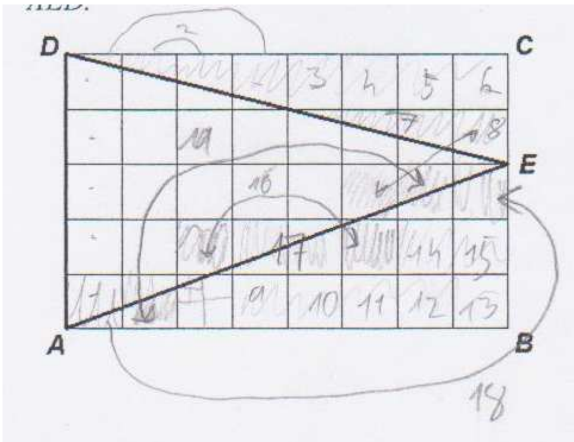


Obr. 4.10 Geometrická strategie u úlohy 3



Obr. 4.11 Výpočetní řešení úlohy 3

S3: Třetí strategii jsem nazvala „počítání čtverečků“ – žáci se snažili spočítat čtverečky uvnitř trojúhelníku (popřípadě i vně trojúhelníku) a porovnat je s celkovým počtem čtverečků v celém obdélníku, jak to ukazuje obr. 4.12. Při tom museli skládat části čtverečků, kterými procházejí strany trojúhelníku, dohromady. Někteří nepracovali pouze s jednotlivými čtverečky, ale vždy s celým sloupečkem. S ohledem na věk žáků jsem byla použitím této strategie překvapena. Zejména když je z tab. 4.3 patrné, že tuto strategii využili i dva žáci 7. ročníku. Úspěšnost řešení při použití této strategie závisela na schopnosti žáka, „kvalifikovaně“ porovnat části čtverců, například pomocí podobnosti trojúhelníků. Domnívám se však, že to spíše odhadovali, o podobnosti trojúhelníků se nikdo ve svém řešení nezmínil.



Obr. 4.12 Strategie „počítání čtverečků“ u úlohy 3

Mezi Ostatní strategie v tab. 4.3 zahrnuji dva marné pokusy žáků 5. ročníku, kteří nakonec úlohu vzdali.

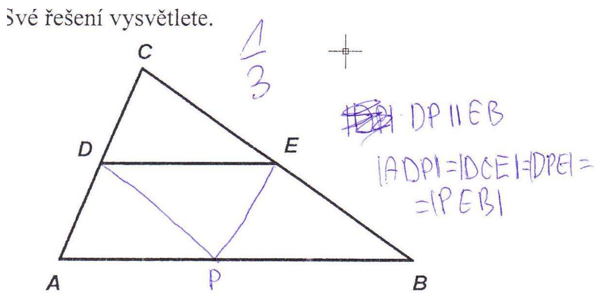
4.3.4 Úloha 4 – poměr obsahů trojúhelníku a lichoběžníku

V žákovských řešeních jsem identifikovala tři nejčastější strategie (S1, S2, S3). Zbylé strategie jsem shrnula mezi Ostatní, viz tab. 4.4.

Tab. 4.4 Strategie u úlohy 4

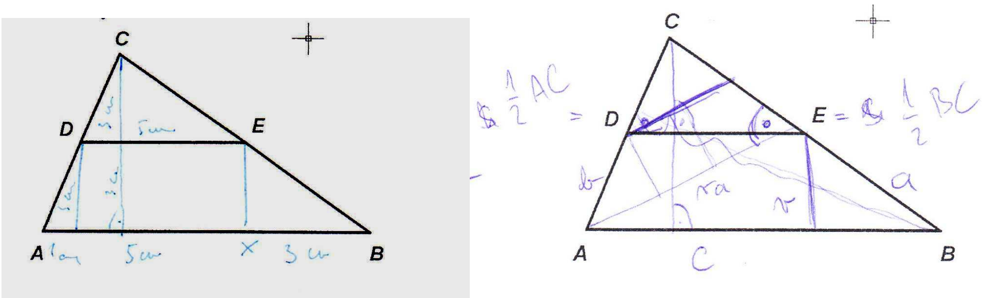
	Strategie 1		**Strategie 2**		**Strategie 3**		**Ostatní strategie**	
	Spr. výs.	**Nespr. výs.**	**Spr. výs.**	**Nespr. výs.**	**Spr. výs.**	**Nespr. výs.**	**Spr. výs.**	**Nespr. výs.**
5. roč. (23)	10	0	0	7	0	2	0	4
7. roč. (12)	5	2	0	1	0	1	0	2

S1: Žáci si všimli, že úsečka *DE* je ve skutečnosti střední příčkou trojúhelníku, doplnili i zbylé dvě jeho střední příčky a objevili čtyři shodné trojúhelníky (obr. 4.13). Jednalo se o geometrickou strategii uvedenou v oddíle 4.1.



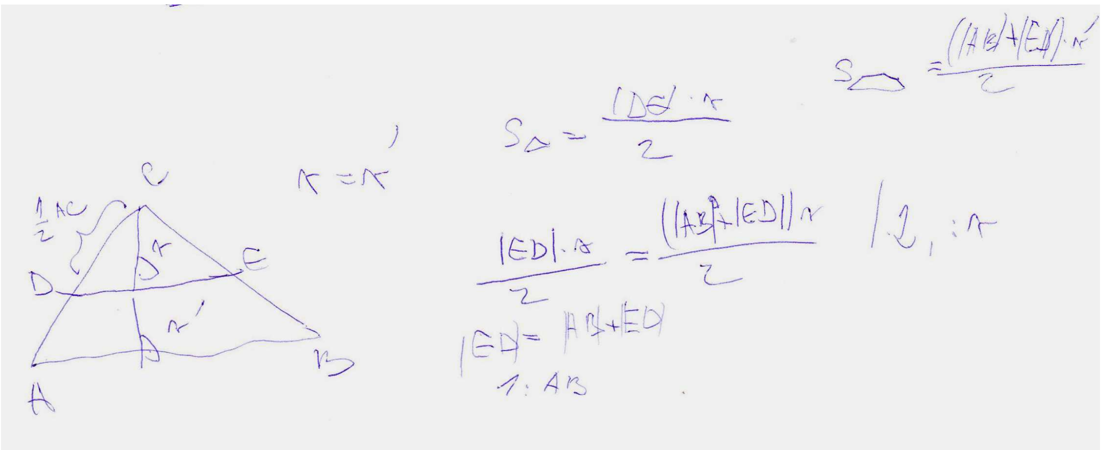
Obr. 4.13 Řešení pomocí shodných trojúhelníků u úlohy 4

Zbylé strategie nevedly ani u jednoho žáka ke správnému řešení, jelikož byly vystaveny na jejich špatných předpokladech. Žáci se zpravidla pokoušeli různými způsoby nalézt nějaký pravoúhlý trojúhelník, který by jim mohl pomoci. Ve strategii **S2** rozdělili lichoběžník na dva pravoúhlé trojúhelníky a jeden obdélník a hledali jejich obsah (viz obr. 4.14 vlevo). V případě strategie **S3** rozdělili trojúhelník na různý počet pravoúhlých trojúhelníků (viz obr. 4.14 vpravo).



Obr. 4.14 Dělení trojúhelníku na různé útvary u úlohy 4

Dva žáci se úlohu řešit nepokusili a čtyři žáci se snažili vyznačovat různé části trojúhelníku a počítat jejich obsahy různými vzorci (viz např. obr. 4.15). Tyto postupy ale nikam nevedly.



Obr. 4.15 Využívání různých vzorců u úlohy 4

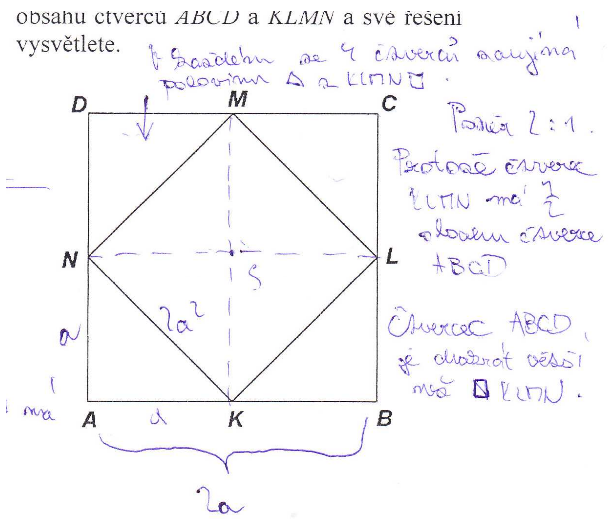
4.3.5 Úloha 5 – čtverec ve čtverci

V této úloze se výrazně objevily dvě strategie řešení (S1, S2), viz tab. 4.5.

Tab. 4.5 Strategie u úlohy 5

	Strategie 1		**Strategie 2**		**Ostatní strategie**	
	Spr. výs.	**Nespr. výs.**	**Spr. výs.**	**Nespr. výs.**	**Spr. výs.**	**Nespr. výs.**
5. roč. (23)	17	0	3	0	0	1
7. roč. (12)	7	2	0	1	0	2

S1: Většina žáků využila strategii, která je popsána v oddíle 4.1 (obr. 4.16). Jeden z nich odůvodnil své řešení tak, že by „ohnul“ trojúhelníky *AKN*, *KBL*, *LCM* a *MDN* do středu malého čtverce, a tak by byl malý čtverec pokrytý dvěma vrstvami papíru.

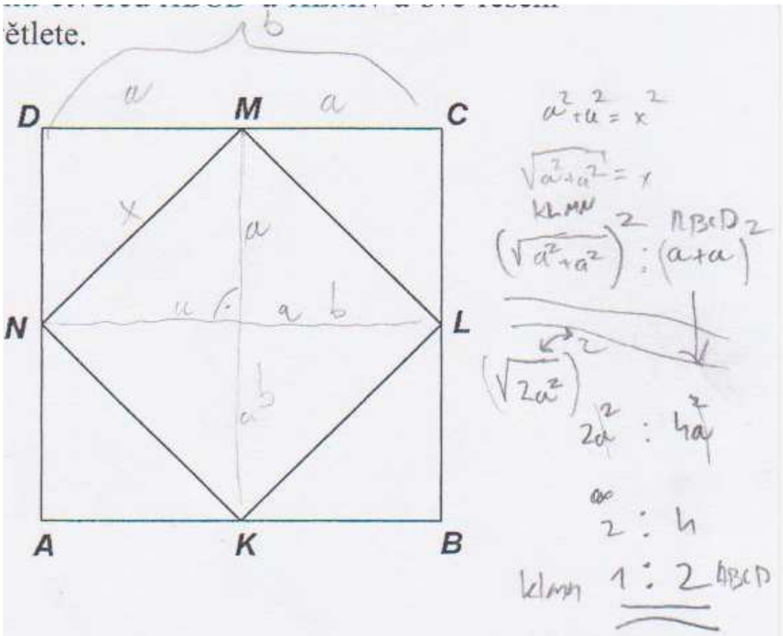


Obr. 4.16 Geometrické řešení u úlohy 5[33]

S2: Tato strategie byla výpočtová. Žáci si označili zpravidla délku úsečky *DM* jako parametr a pomocí Pythagorovy věty vyjádřili i délku úsečky *MN*, jak ukazuje obr. 4.17. Zjištěné výrazy dosadili do vzorců na výpočet obsahu obou čtverců. Oba výsledky pak mezi sebou porovnali, a tak se dostali k poměru 2 : 1. Pouze jeden žák 7. ročníku nedošel ke správnému výsledku, a to díky chybám ve výpočtech.

Mezi Ostatní strategie jsou zařazeny pokusy tří žáků, které nevedly ke správnému řešení. V jednom případě žák do obrázku zakreslil všechny úhly, které znal – v trojúhelnících mimo čtverec *KLMN* tak vyznačil všechny pravé úhly a zbývající úhly doplnil správnou hodnotou 45°. Jiný žák vepsal další čtverec do čtverce *KLMN* pomocí stejných pravidel, jako byl čtverec *KLMN* vepsán do čtverce *ABCD*. Jelikož mu tento způsob řešení nepomohl, pokusil se v nově vzniklém čtverci vyznačit různé trojúhelníky. Poslední z těchto žáků porovnával délky stran obou čtverců a odpověděl takto: „Čtverec *KLMN* zabírá 2/3 z obsahu čtverce *ABCD*, protože úsečka *KL* má 2/3 délky úsečky *AB*.“ Nejenže porovnával délky stran čtverců místo jejich obsahů, ale také špatně odvodil délku strany menšího čtverce.

[33] V obrázku se objevuje parametr a a vyjádření strany *KN*. To samozřejmě není součástí strategie S1. Zde se žák nejprve pokusil o početní řešení.



Obr. 4.17 Výpočtová strategie u úlohy 5

4.4 Závěr pilotní studie a poučení pro hlavní studii

Cílem pilotní studie bylo identifikovat vhodné úlohy pro hlavní výzkum, tedy úlohy typu RBV, které vedou k různým strategiím (jak geometrickým, tak výpočtovým) a jsou řešitelné žáky různého věku. Z tohoto hlediska jsem tedy výsledky studie hodnotila.

I když byl počet žáků v pilotní studii malý, zajímaly mě i případné rozdíly v použitých strategiích u žáků různého ročníku. U úloh 1 až 3 jsem žádné rozdíly nenalezla. Naopak mne spíše zarazila strategie „počítání čtverečků" u žáků 7. ročníku. Takovou strategii bych předpokládala spíše u žáků 5. ročníku či dokonce u žáků základní školy. V úlohách 4 a 5 byli úspěšnější mladší žáci, kteří upřednostňovali geometrické způsoby řešení. Je možné spekulovat, zda to je dáno tím, že žáci 7. ročníku mají více matematických znalostí a možná se snažili je využít. Ukazuje se, že jen písemné řešení žáků nebude pro hlubší zkoumání problematiky stačit.

Úlohu 1 bylo schopno řešit pomocí obrázku poměrně dost žáků, a tak nevedla k širší škále strategií řešení. Úlohu žáci zřejmě považovali za jednoduchou, mohla by být zajímavá spíše pro žáky základní školy. Úloha 4 vedla sice k více strategiím a byla pro žáky střední školy pochopitelná, ovšem po dalším zvážení jsem došla k závěru, že pro žáky základní školy by mohla být příliš obtížná. Úloha 3 neukázala rozdíly ve výběru strategií u žáků různého věku. Proto jsem se rozhodla úlohy 1, 3 a 4 z hlavní studie vyřadit.

Poučení pro hlavní studii z hlediska výběru úloh: Jako vhodné se ukázaly úlohy 2 a 5. V úloze 2 budou změněny délky úseček tak, aby nebyli žáci vedeni k pseudo-strategii, v níž využili pravoúhlý trojúhelník se stranami 3 j, 4 j a 5 j. Budou použita desetinná čísla tak, aby byl obrázek proporčně správný. Je možné, že desetinná čísla, s nimiž je počítání komplikovanější, ovlivní žáky v tom smyslu, že budou hledat jednodušší řešení. Úloha 5 zůstane v původním znění. Ovšem bez úlohy 3 a 4 výzkum postrádá úlohu zaměřenou na práci s trojúhelníkem. V úloze 5 se sice trojúhelníky objevují, ale dá se s nimi pracovat bez úvah nad jejich vlastnostmi. Všechny trojúhelníky jsou na první pohled shodné, a k vyřešení úlohy tak stačí pouze jejich počet. Proto bude do experimentu zařazena nová úloha (viz oddíl 5.1.1). Na rozdíl od pilotní studie budou u hlavní studie použity i nápovědy, kterými se pokusím navést žáky na geometrické řešení.

Na základě výsledků pilotní studie jsem také stanovila hypotézu, že úspěšnost řešení úloh 2 a 5 je žáky srovnatelná.

Poučení pro hlavní studii z hlediska způsobu analýzy dat: Analýzu dat je třeba udělat hlubší, nejen na úrovni popisu celých řešitelských strategií, ale na úrovni jednotlivých jevů, které se v řešeních objevují, včetně např. sledování, co vedlo k výběru dané strategie, přechodu k jiné strategii apod. K tomu budou využity techniky zakotvené teorie.

Poučení pro hlavní studii z hlediska použité metody: Ukázalo se, že samotné písemné řešení bez možnosti podrobnějšího vysvětlení od žáka či přímo možnosti pozorovat žáka při práci je nedostatečné, neboť jsem v řadě případů mohla jen spekulovat, proč žák udělal to či ono. Proto je vhodné v hlavní studii provést se žáky rozhovory, při nichž budou úlohy přímo řešit. Na druhou stranu pomocí rozhovorů nezískám dostatečný počet řešení, abych mohla zodpovědět své výzkumné otázky. Proto bude provedena ještě další fáze, v níž budou žáci pracovat samostatně, případně s možností doptání se po vysvětlení jejich řešení. Jak jsem nakonec hlavní studii koncipovala, je uvedeno v kapitole 5.

5 Hlavní studie

Na základě závěrů pilotní studie jsem připravila tři fáze hlavní studie.[34] Plán byl následující:

- V první fázi se bude pracovat s malým počtem žáků v rámci polostrukturovaného rozhovoru, aby bylo možné udělat hlubší analýzu jednotlivých žákovských řešení a popsat důležité jevy, které se v nich objeví. Žáci budou požádáni, aby přemýšleli nahlas, tedy aby podrobněji popisovali své myšlenky a vysvětlovali své úvahy. Kromě úloh budou žákům předkládány též nápovědy vedoucí ke geometrickému způsobu řešení. Výsledky první fáze výzkumu ovlivní druhou a třetí fázi, zejména co se týče výběru úloh, nápověd a zkoumaných jevů.
- Ve druhé fázi bude žákům zadána úloha písemnou formou a budou ji řešit samostatně. Tím se získá větší vzorek respondentů. Pro tuto fázi může být ale zvolena pouze taková úloha, u níž jsou žákovská řešení víceméně jednoznačně interpretovatelná a která nevyžaduje následné dotazy experimentátora. Analýza bude zaměřena zejména na jevy identifikované v první fázi.
- Ve třetí fázi budou žáci sice řešit předložené úlohy sami, ale současně přijdou do kontaktu s experimentátorem, který jim může položit doplňující otázku, aby měl jistotu, že žákovské řešení pochopil. Sám však žákům předkládá pouze předem nachystané nápovědy pomocí obrázku, které byly prověřeny v první fázi hlavní studie. Třetí fáze je tedy jakýmsi metodologickým kompromisem mezi první a druhou fází. Přinese více dat (žákovských řešení) než při osobním rozhovoru, ovšem více podrobností pro žákovská písemná řešení než test ve druhé fázi.

Podrobněji jsou fáze popsány v oddílech 5.1, 5.2 a 5.3.

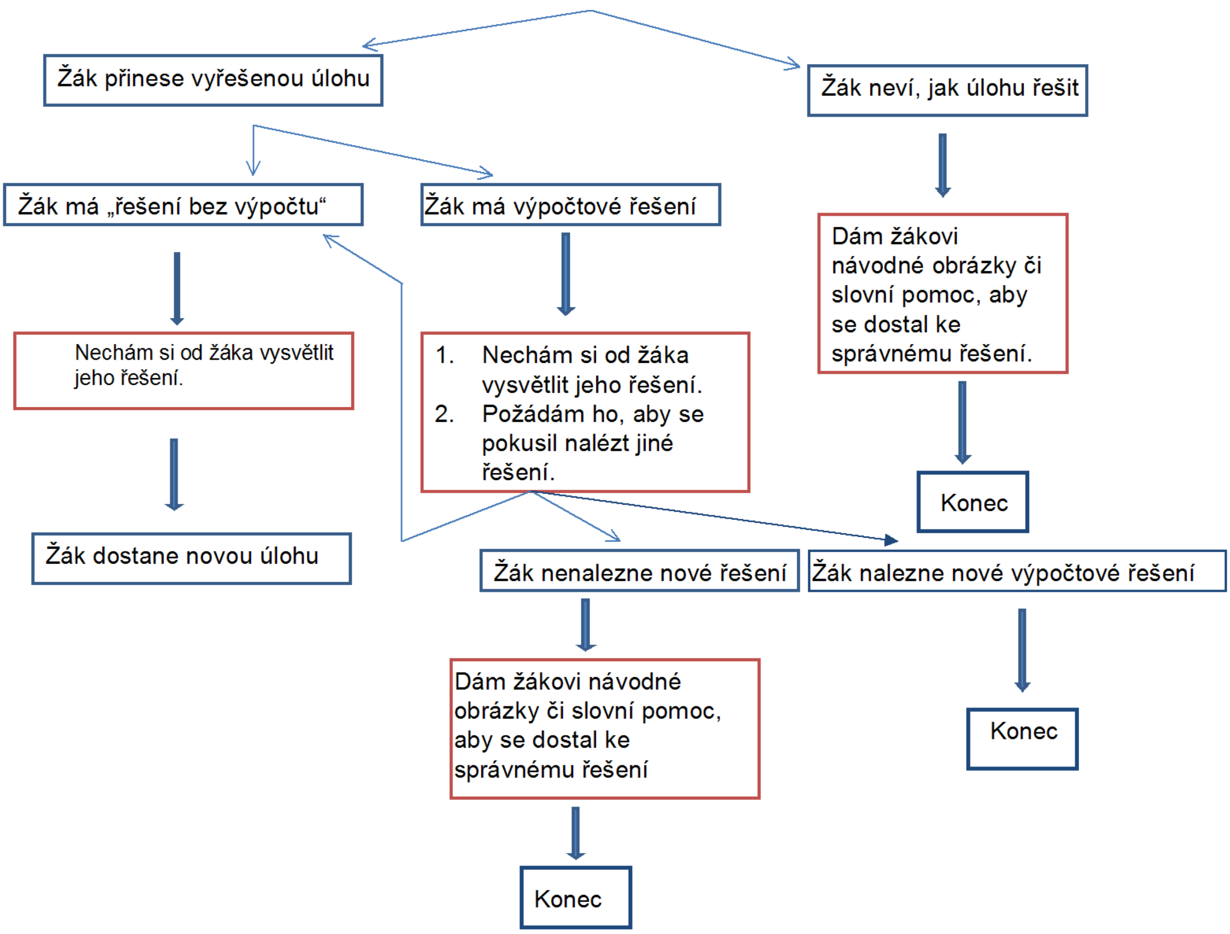
Poznámka: V této kapitole budou obrázky i tabulky číslovány pomocí čísla kapitoly i oddílu, aby bylo na první pohled jasné, z které fáze hlavní studie pocházejí. Tak obrázky s čísly 5.1.x budou patřit k první fázi hlavní studie, obrázky 5.2.x ke druhé fázi a obrázky 5.3.x ke třetí fázi.

[34] Rámcový plán jsem konzultovala též s M. Hejným, který mi pomohl koncipovat třetí fázi hlavní studie.

5.1 První fáze – polostrukturované rozhovory

První fáze výzkumu se zaměřila na výzkumné otázky uvedené v oddíle 2.3. Konkrétně šlo o hlubší pohled na použité strategie a jejich charakteristiky a na prozkoumání vlivu nápověd.

J. Švaříček, K. Šeďová a kol. (2007, s. 177) doporučují při výzkumu s žáky používat pro zachycení kognitivních procesů odehrávajících se během řešení matematických či jazykových úloh techniku myšlení nahlas. Žákovi je zadán úkol s tím, že výzkumníka zajímá vše, co se odehrává v jeho hlavě při řešení úlohy. Tento přístup jsem plánovala použít v rámci polostrukturovaných rozhovorů, tedy hloubkových rozhovorů, které vycházejí z předem připraveného seznamu témat a otázek (Švaříček, Šeďová a kol., 2007, s. 160). V mém případě půjde o rozhovor nad předem připravenými matematickými úlohami s cílem dobrat se co nejpodrobnějšího popisu řešitelské strategie daného žáka.



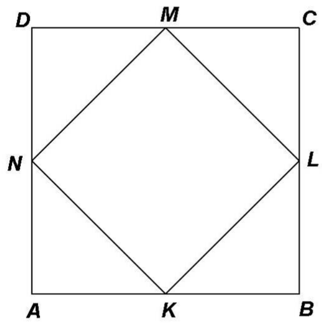
Obr. 5.1.1 Příprava na polostrukturované rozhovory

Předpokládala jsem, že se mé otázky budou týkat zejména podrobnějšího popisu toho, co žák napsal, dalšího vysvětlení něčeho, co řekl, případně povzbuzení k další práci, k jiné strategii řešení apod. Předjímala jsem též jisté obtíže plynoucí z toho, že zejména mladší žáci nebudou schopni své řešení adekvátně vysvětlit. Připravila jsem nápovědy pro případ, že se žák dostane do slepé uličky nebo bude chtít úlohu vzdát (viz oddíl 5.1.1). Podrobnější příprava na průběh rozhovoru je na obr. 5.1.1.

5.1.1 Úlohy a nápovědy

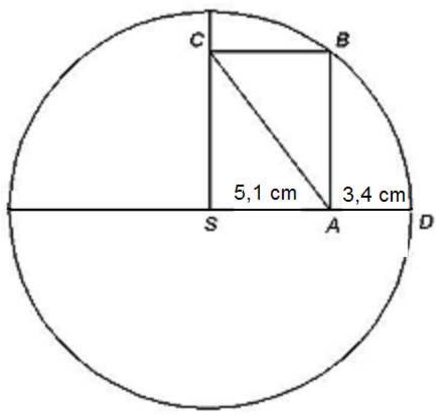
V tomto oddíle popíši jednotlivé úlohy v pořadí, v němž byly žákům zadány. Možné strategie u úlohy 1 a 2 byly popsány v oddíle 4.1, zde uvedu jen očekávané strategie u úlohy 3.

Úloha 1: *Do čtverce ABCD na obrázku* (viz obr. 5.1.2) *je vepsán další čtverec KLMN tak, že jsou spojeny postupně středy stran čtverce ABCD. Urči poměr obsahů čtverců ABCD a KLMN a své řešení vysvětli. Pokud tě po vyřešení úlohy napadne ještě jiné řešení, zapiš ho.*



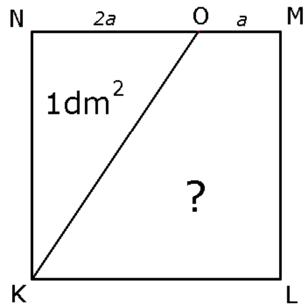
Obr. 5.1.2 Čtverec ve čtverci

Úloha 2: *Na obrázku* (viz obr. 5.1.3) *je znázorněna kružnice a obdélník SABC, kde bod S leží ve středu kružnice a bod B leží na kružnici. Zjisti vzdálenost bodů A a C, jsou-li dány velikosti SA a AD. Své řešení zdůvodni. Pokud tě po vyřešení úlohy napadne ještě jiné řešení, zapiš ho.*



Obr. 5.1.3 Obdélník v kružnici

Úloha 3: *Do čtverce KLMN je vepsána úsečka KO tak, že bod O leží ve třetině úsečky MN podle obrázku* (viz obr. 5.1.4). *Zjisti obsah čtyřúhelníku KLMO, když víš, že obsah trojúhelníku KON je 1 dm^2. Pokud tě po vyřešení úlohy napadne ještě jiné řešení, zapiš ho.*



Obr. 5.1.4 Trojúhelník a čtyřúhelník

Tato úloha může díky zadané velikosti obsahu trojúhelníku *KON* a proměnné *a* vyvolat u žáků dojem, že nejjednodušší strategií řešení bude strategie výpočtová. Žák si tak může pomocí vzorce na výpočet obsahu trojúhelníku vypočítat délku strany čtverce *KLMN*. Pak už zbývá dopočítat podle vzorce i hledaný obsah lichoběžníku. Pokud žák takový vzorec nezná, může si lichoběžník rozdělit na trojúhelník *KXO* a obdélník *XLMO*, kde *X* je pata kolmice na stranu *KL* procházející bodem *O*, a vypočítat obsah těchto dvou geometrických útvarů zvlášť.

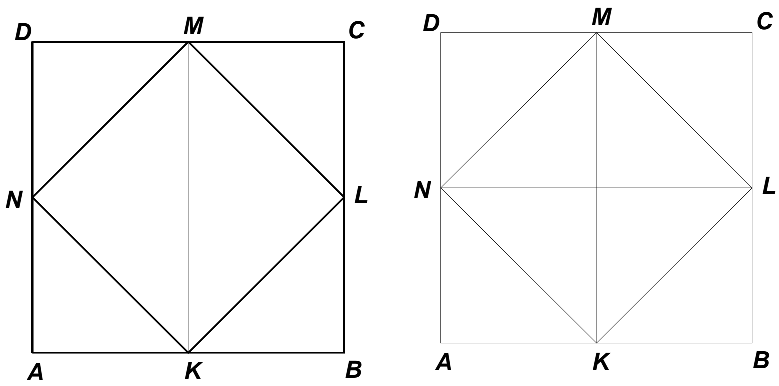
Elegantněji úlohu žák vyřeší, když si po rozdělení hledaného lichoběžníku na trojúhelník *KXO* a obdélník *XLMO* všimne shodnosti trojúhelníků *KON* a *KXO*. Tyto dva trojúhelníky společně tvoří obdélník *KXON*, který má tedy obsah 2 dm^2 a zároveň vyplňuje 2/3 obsahu celého čtverce *KLMN*. Obdélník *XLMO* pak zaujímá 1/3 celého čtverce, tedy 1 dm^2. Součtem obsahů trojúhelníku a obdélníku žák nakonec získá i hledaný obsah lichoběžníku, který činí 2 dm^2.

Pro všechny tři úlohy jsem připravila řadu po sobě jdoucích nápověd, které měly žáka postupně přibližovat k cíli, tedy geometrické strategii. Původní deskriptivní role obrázku v zadání úloh se mění na heuristickou (viz oddíl 3.1.4).

Nápovědy k úloze 1

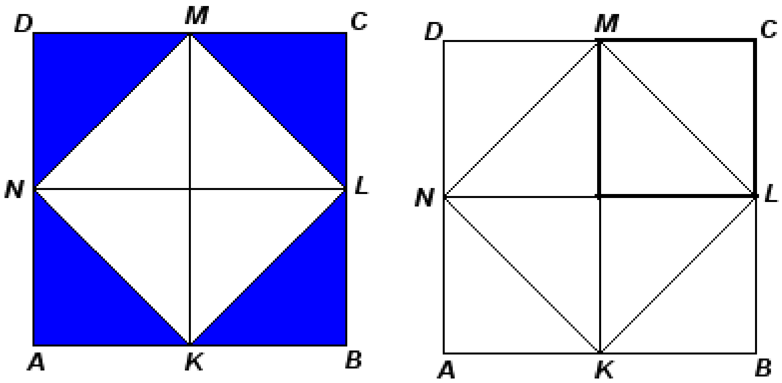
Nápověda 1:[35] Byly připraveny dva obrázky, v nichž byly postupně dokresleny úhlopříčky (viz obr. 5.1.5). Ty měly zaměřovat pozornost žáka vůbec k možnosti dokreslení úseček do obrázku a dále k vzniklým malým čtvercům.

[35] Nápovědy byly při rozhovorech označeny svými kódy tak, jak je uvádím v označení obrázků.



Obr. 5.1.5 Nápověda 1 k úloze 1 (N1a a N1b)

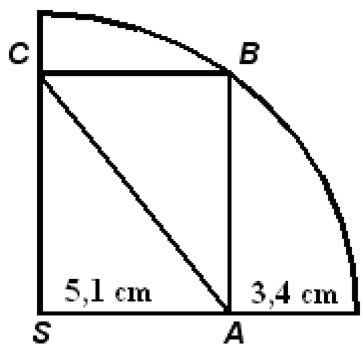
Nápověda 2: I zde je na výběr ze dvou možností (viz obr. 5.1.6), které jsem plánovala dávat žákům podle situace. Vybarvení má zaměřit pozornost řešitele na trojúhelníky. U druhého obrázku je tučně obtažen jeden z malých čtverců.



Obr. 5.1.6 Nápověda 2 k úloze 1 (N2a a N2b)

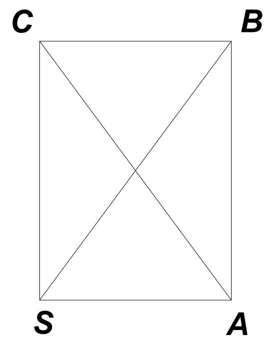
Nápovědy k úloze 2

Nápověda 1: Tato nápověda měla žáky navést k dorýsování hledané úhlopříčky do obrázku, aby bylo pro ně zadání úlohy zjevnější. Žákova pozornost se měla zaměřit jen na část kružnice, ve které byl vepsán obdélník (viz obr. 5.1.7).



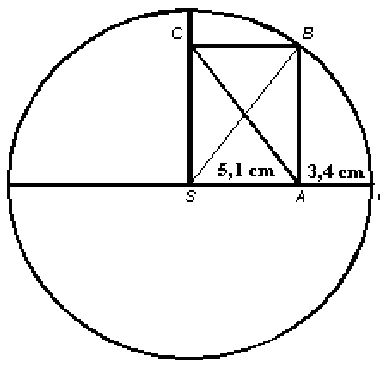
Obr. 5.1.7 Nápověda 1 k úloze 2 (N1)

Nápověda 2: Před podáním této nápovědy měl být žák dotázán, zda upřednostňuje nápovědu slovní či pomocí obrázku. Slovní nápověda spočívala ve větě *Úhlopříčky v obdélníku jsou shodné* (N2a). Obrázková nápověda je na obr. 5.1.8. V obou případech šlo o zaměření pozornosti žáka jen na obdélník *SABC*. U slovní nápovědy však nebyl explicitně zmíněn tento konkrétní obdélník, šlo o připomenutí obecné vlastnosti obdélníku.



Obr. 5.1.8 Nápověda 2 k úloze 2 (N2b)

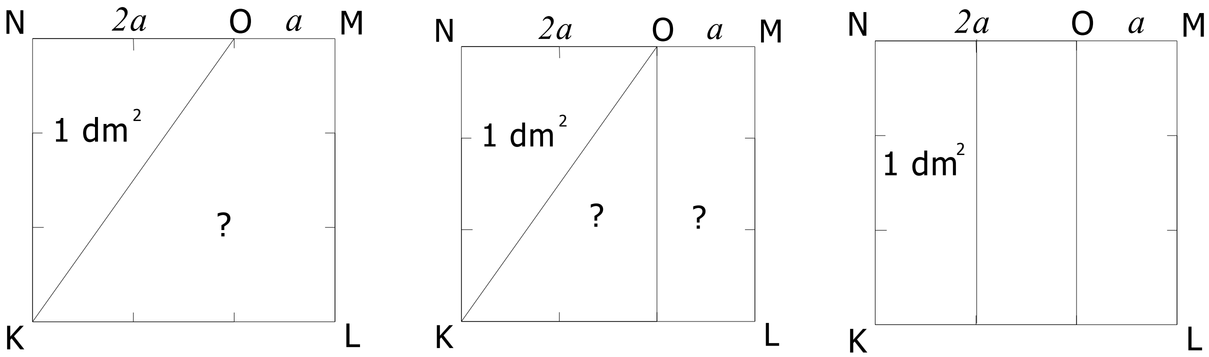
Nápověda 3: Tato nápověda (viz obr. 5.1.9), na rozdíl od té předcházející, měla žáka odkázat od části obrázku zpět k jeho celku – klíčová úsečka *SB* v něm byla dokreslena (viz obr. 5.1.9).



Obr. 5.1.9 Nápověda 3 k úloze 2 (N3)

Nápovědy k úloze 3

Pro tuto úlohu byla připravena sekvence obrázků (obr. 5.1.10a až c). Nejdříve byly jen naznačeny třetiny stran čtverce, dále následovala nová úsečka (kolmice bodem *O* na stranu *KL*) a konečně ve třetím případě šlo o transformaci trojúhelníku *KON* na obdélník stejného obsahu.



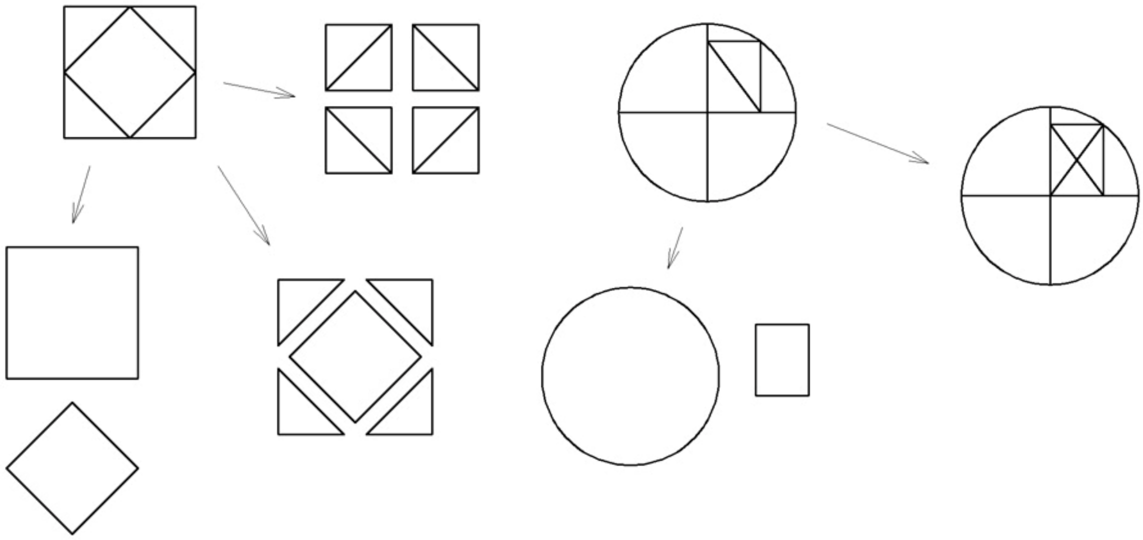
Obr. 5.1.10 a) až c) Nápovědy k úloze 3 (N1, N2, N3)

Tab. 5.1.1 přehledně sumarizuje základní charakteristiky všech tří úloh hlavní studie a obr. 5.1.11 a 5.1.12 ukazují některé dílčí konfigurace, které může řešitel v obrázku rozeznat. Některé z nich jsou pro geometrické řešení z T prostoru vhodné, jiné nikoli.

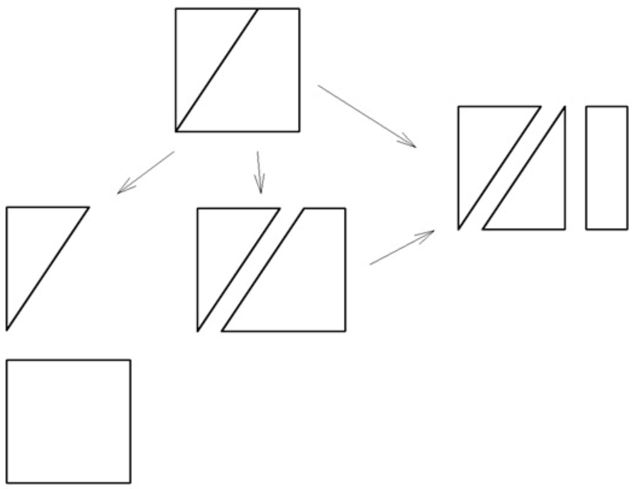
Tab. 5.1.1 Charakteristiky úloh hlavní studie

	Zadány rozměry	**Možnost početního řešení**	**Role obrázku**	**Dílčí konfigurace**	**Nutné teoretické znalosti z geometrie**
Úloha 1	ne	ano	objekt, deskriptivní	čtyři shodné čtverce, osm shodných trojúhelníků	vlastnosti čtverce, úhlopříčka dělí čtverec na dva shodné trojúhelníky, věta sss
Úloha 2	čísla	ne	objekt, deskriptivní / heuristická	obdélník, úsečka představující poloměr a úhlopříčku	vlastnosti obdélníku a kružnice, úhlopříčky obdélníku jsou stejně dlouhé, úsečka s krajním bodem na kružnici a druhým krajním bodem ve středu kružnice představuje poloměr
Úloha 3	čísla / písmeno	ano	objekt, deskriptivní	trojúhelník, obdélník, lichoběžník	úhlopříčka dělí obdélník na dva shodné trojúhelníky, trojúhelníky se stejnou základnou a výškou mají stejný obsah, změna trojúhelníku na obdélník stejného obsahu, věta sss

Stanovila jsem si též hypotézu, že úloha 3 bude mít díky přítomnosti proměnné nejmenší úspěšnost a že na rozdíl od úlohy 1 bude častěji řešena výpočetními způsoby.



Obr. 5.1.11 Dílčí konfigurace v obrázcích u úloh 1 a 2



Obr. 5.1.12 Dílčí konfigurace v obrázcích u úlohy 3

5.1.2 Průběh rozhovorů

Pro realizaci rozhovorů byla zvolena jedna základní škola[36] a jedno osmileté gymnázium[37]. Zúčastnilo se pět žáků druhého stupně základní školy a čtyři žáci vyššího stupně gymnázia tak, aby byly pokryty všechny ročníky těchto stupňů škol. Na základní škole se jednalo o čtyři chlapce a jednu dívku a na gymnáziu o dva chlapce a dvě dívky. S každým z nich jsem provedla rozhovor individuálně v září 2010. Žáci byli vybráni jejich učiteli matematiky

[36] ZŠ a MŠ Aš, Okružní 1580/57, Aš

[37] Gymnázium a střední odborná škola Aš, Hlavní 106, Aš

namátkově bez ohledu na jejich výsledky v matematice. Požadovala jsem jen, aby šlo o žáky komunikativní.

Rozhovory probíhaly v oddělené místnosti, kde žák nebyl rušen probíhající výukou. Celý proces byl zaznamenáván na videokameru[38] pro pozdější rozbor, např. aby bylo možné určit, které kroky řešení byly výchozí a v jakém sledu na ně navazovaly další kroky. Pracovní list byl označen číselným kódem, který označoval školu, věk a pohlaví žáka, aby byl v množství záznamů jednoduše rozpoznatelný. Průběh experimentu postupoval podle plánu (obr. 5.1.1). Na začátku rozhovoru jsem žáky seznámila s cílem své práce a požádala je, aby co nejvíce přemýšleli nahlas. Postupně jsem jim předkládala tři úlohy tak, že následující úlohu dostali až tehdy, když ukončili práci na úloze předcházející; na vyřešení měli vždy dostatek času. Nebylo nutné stihnout všechny tři úlohy, ale žáci se vždy zajímali o následující úlohu a práce je viditelně bavila, a to i v případě, že jim řešení úloh dělalo potíže.

5.1.3 Analýza první fáze hlavní studie

Rozhovory je vždy nutno přepsat do protokolů, což je časově náročné. Při analýze a interpretaci dat je velmi důležité se k údajům opětovně vracet a znovu je pročítat a následně kódovat. Přepis rozhovoru tedy usnadní práci, protože neustálé poslouchání dat (uchovaných pouze v audiopodobě) spojené s analýzou a interpretací by zabralo mnohem více času. Dalším významným důvodem přepisu je vizualizace dat. Při jejich analýze je možné je zvýrazňovat, kódovat, komentovat poznámkami, lépe se v nich orientovat, vytvářet sítě vztahů na všech analytických úrovních apod. (Švaříček, Šeďová a kol., 2007).

Protokoly rozhovorů jsem analyzovala kvalitativně pomocí techniky založené na zakotvené teorii. To mi pomohlo najít škálu jevů, které se v řešeních objevily, a z nich pak poskládat řešitelské strategie. Strategie a jevy jsem po následné analýze vytřídila a vytvořila jsem souhrn kategorií jevů a jejich charakteristik. Dále jsem vymezila dimenze jednotlivých kategorií, které reprezentují umístění charakteristiky kategorie na nějaké škále (jde o tzv. dimenzionální rozsah; Strauss, Corbinová, 1999). U některé kategorie jsem určila více typů charakteristik (vlastností) a jejich dimenzí; ty jsou většinou vyjádřeny škálou. Naopak u jiných kategorií jsem mohla pouze určit, zda se daná charakteristika v žákovském řešení objevila či ne. Přehled jednotlivých kategorií, podkategorií a jejich charakteristik uvádím v následujícím textu, kde jsou sepsány obecně pro všechny tři úlohy.

[38] Na videokameru byl zaznamenáván pouze pracovní list, nikoliv obličej žáka.

5.1.4 Přehled identifikovaných kategorií a jejich charakteristik

Strategii řešení matematické úlohy je možné volně charakterizovat jako sled myšlenkových kroků, které určují nejbližší další krok. Kategorie A *Kroky řešitelských strategií* tedy zahrnuje dílčí kroky, které v různých konfiguracích tvoří řešitelskou strategii. Kategorie B *Chyby a nedostatky v práci žáků* zahrnuje nevhodné použití vzorců, numerické chyby, nedostatky v matematickém vyjadřování, špatné pochopení pojmů apod. Do kategorie C *Sociální kategorie* jsem zahrnula vliv experimentátora a vliv osobnostních charakteristik na práci žáků.

A. Kroky řešitelských strategií

Poznámka: U geometrických kroků bude uvedeno, zda se podle mého názoru žák pohybuje v prostoru geometrických objektů a vztahů (T – *theoretical*), nebo prostoru prostorově grafických entit (SG – *spatio-graphical*) (viz oddíl 3.1.1).

Zjišťování délek měřením nebo odhadem (SG)

Žák považuje za nutné znát délky neznámých úseček a pokouší se je zjistit. Ilustruje to následující ukázka, kde poté, co bylo žákovi vysvětleno zadání úlohy 1, on začíná pracovat a s dotazem „Můžu?“ bere do ruky pravítko. Tři tečky značí krátkou odmlku.

2:25	E	Můžeš cokoliv.
2:37	Ž	*(šeptem)* Dobře.
2:50	Ž	*(žák začíná pravítkem přeměřovat délky stran čtverců)* … čtyři osm (*myslí tím 4,8*) … a … čtyři osm. Takže tak, vlastně ... Jo! Vychází to. Že vlastně ... Ne, já si to radši ještě jednou změřím ... čtyř… čtyři osm ... *a* je dlouhá šest … sedm ... A o kolik přesně?
3:28	E	Hm.
3:30	Ž	Aha. O devatenáct milimetrů?
3:43	E	Jak jsi na to přišel?
3:45	Ž	Protože vlastně jsem si změřil celou tu stranu toho *ML*... *(strana menšího čtverce)*
3:50	E	Hm.
3:51	Ž	Protože je to vlastně čtverec, tak má stejný strany, a potom jsem to změřil … potom jsem si to vlastně změřil s tou stranou *DA* ... *(strana většího čtverce)*
3:57	E	Hm.
3:58	Ž	A to vlastně vycházelo čtyři celých osm a potom jenom to ... to, co zbývalo vlastně ... *(má na mysli rozdíl délek těchto stran čtverců)*
4:03	E	A když chci porovnat obsahy? Porovnal jsi teď obsahy těch … *(žák experimentátora nenechal domluvit.)*
4:07	Ž	Jo.

Charakteristika 1: Využití pravítka

- úplně – žák přeměřuje všechny strany
- částečně – žák změří jen nezbytně nutné délky, ostatní odvodí na základě znalosti vlastností obrazce (např. u úlohy 1 neměří všechny strany čtverce, ale změří pouze jednu)
- vůbec – žák nepoužívá pravítko a velikosti stran odhaduje

Charakteristika 2: Přesnost měření (z hlediska úsilí žáka)

- velká – žák si zakládá na přesnosti měření
- malá – žák sice měří pravítkem, ale na přesnosti si nezakládá

Manipulace (SG)

Žák pohybuje obrázkem či částí obrázku, aby došel ke správnému řešení. V následující ukázce je zaznamenán rozhovor s žákyní, která úlohu 1 vyřešila početně a poté byla vyzvána k jinému řešení. Žákyně si nevěděla rady, ale s nápovědou N1a postupovala pomocí manipulace.

10:47	E	Tak já vám dám nápovědu, maličkou nápovědu. *(Podává žákyni papír s nápovědou.)* Jestli to nějak pomůže.
11:48	Ž	Kdybychom to teďka sehly[39] na půl, a potom ještě jednou na půl, tak tyhlecty čtverce budou stejně velký. A i ty trojúhelníky budou stejně velký, jako tyhlencty. *(Chce dvakrát přeložit větší čtverec ABCD.)*
11:55	E	No, můžete mi to tam nakreslit?
12:00	Ž	To se sehne tahlenctak.
12:02	E	Tak.
12:06	Ž	No, když se ohnou ještě jednou takhlenc, tak jsou vlastně stejný. *(Chce přehnout vzniklý čtverec ještě po úhlopříčce tak, aby vytvořila dva trojúhelníky, jejichž obsah je shodný.)*
12:09	E	Ano. Takže co z toho vyplývá?
12:10	Ž	No, že tenhle čtverec je stejně velkej jako tamten, že bych potřebovala asi stejně barvy… *(Zde se žákyně dopustila omylu – neporovnává obsahy dvou čtverců, ale obsah čtverce KLMN s obsahem čtyř trojúhelníků mimo čtverec KLMN.) (Je zajímavé, že obsah charakterizuje množstvím barvy.)*
12:14	E	Chápu to dobře, že vy opravdu ohýbáte ten roh? *(Experimentátor zde špatně pochopil její řešení.)*
12:21	Ž	No, kdybych to vzala a složila nejdřív na půl a potom ještě jednou na půl, tak bych měla ten malý čtvereček.
12:25	E	Malý čtvereček, souhlasím.

[39] Tato žákyně je cizinka, která již delší dobu žije v ČR, a proto má trochu problémy s matematickým vyjadřováním.

12:27	Ž	A potom kdybych ho sehla na půl, tak tady mám ten trojúhelníček, tak vyjde stejně velkej, takže… *(dále žákyně měla problémy s terminologií, ale nakonec dospěla ke správnému výsledku).*
12:33	E	Ano, takže všechny ty trojúhelníky jsou vlastně stejné, a? … Co tedy můžeme říct?
12:46	Ž	No, nevim, že je potřeba stejně barvy na tyhlencty části, jako na tydle…

- fyzická (reálná) manipulace[40] – žák fyzicky pracuje s obrázkem (i vystřiženým obrázkem): přehýbá rohy čtverce, přehýbá obrázek na poloviny, přehýbá obrázek na čtvrtiny
- mentální manipulace – žák popisuje, jak by pohyboval obrázkem, aby našel řešení: posunutí či otočení obrázku, přehýbání

Rýsování – zakreslování (SG)

Žák si přerýsovává (překresluje) zadání či nápovědu do svého pracovního listu.

Charakteristika 1: Úroveň přesnosti

- žák rýsuje podle pravítka, odměřuje přesné hodnoty
- žák používá pravítko, ale jen proto, aby „čára byla rovná“, a nepřeměřuje přesné hodnoty
- žák črtá od ruky a přesnost nepovažuje za důležitou

Charakteristika 2: Přerýsování (zaznamenání) nově zjištěné informace do svého obrázku

- žák zaznamenává do obrázku veškeré informace, které ví či zjistí
- žák zaznamenává do obrázku pouze některé informace
- žák si nezaznamenává do obrázku žádné nové informace

Charakteristika 3: Kopírování nápovědy

- žák přerýsovává (překresluje) celou nápovědu do svého obrázku
- žák přerýsovává (překresluje) jen některé nové informace z nápovědy do svého obrázku
- žák nepřerýsovává (nepřekresluje) do svého obrázku žádné nové informace z nápovědy

Využití obrázku (T)

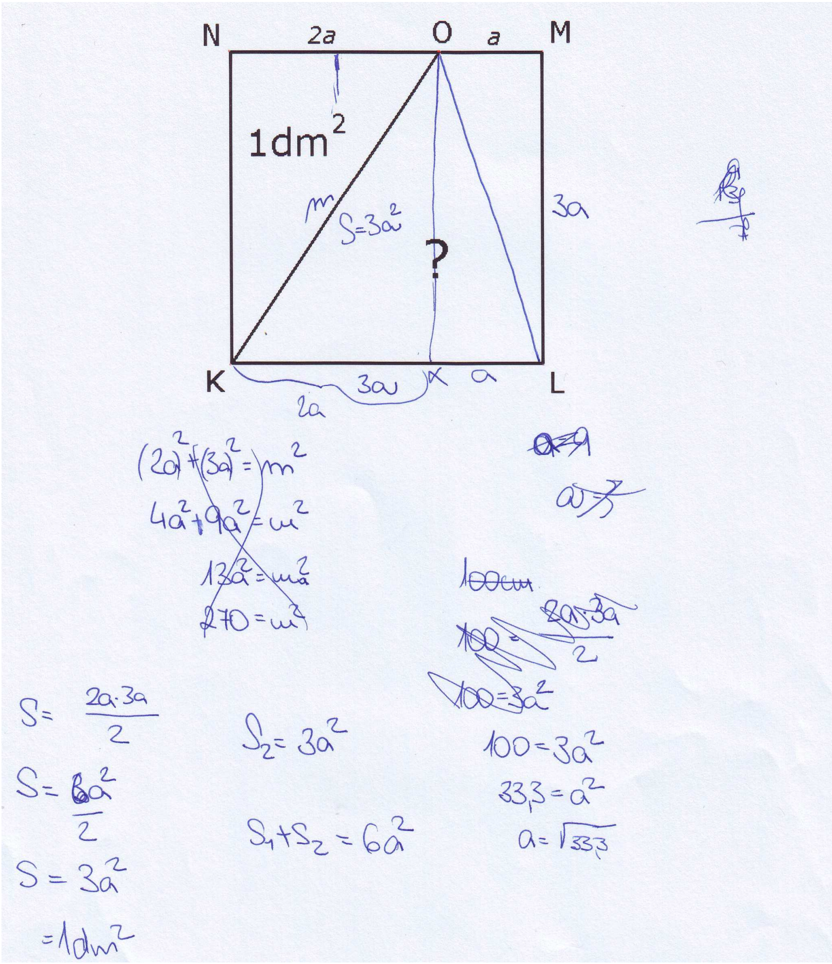
Žák využívá vlastností geometrických objektů, které jsou reprezentovány obrázkem, k nalezení strategie řešení. Jedná se např. o autorský způsob řešení úlohy 1 pomocí čtverců a shodných trojúhelníků, které vzniknou díky úhlopříčkám těchto čtverců (viz oddíl 4.1).

[40] Fyzická (reálná) manipulace se objevila pouze u úlohy 1.

- žák využívá výhradně výpočetní strategie
- žák začne úlohu řešit početně, ale pak svoji strategii změní a začne využívat obrázek
- žák řeší úlohu od začátku až do konce výhradně geometricky

Používání vzorců

Příklad používání vzorců je na části pracovního listu, v němž žákyně využívá vzorec na výpočet obsahu trojúhelníku (viz obr. 5.1.13).



Obr. 5.1.13 Řešení úlohy 3 pomocí vzorců

Charakteristika 1: Použití vzorce (odhlížím od správnosti použitých vzorců)

- žák využívá vzorce v průběhu celého řešení úlohy
- žák využívá vzorce pouze v části řešení úlohy a pak svou strategii změní
- žák vzorce ve svém řešení vůbec nevyužívá

Charakteristika 2: „Vhodnost" vzorců

- žák používá pouze potřebné vzorce

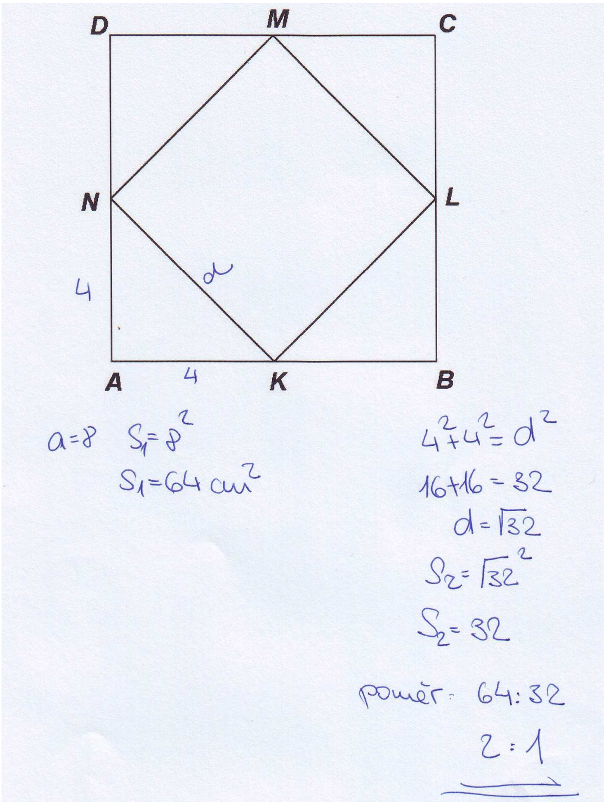
- žák používá i nepotřebné vzorce, ale v průběhu řešení to napraví
- žák používá vzorce, které nevedou ke správnému řešení

Provedení výpočtů

- žák počítá bezchybně nebo si své chyby opraví
- žák provádí chybné výpočty

Dosazování za neznámou

Žák si zvolí nějakou délku neznámé úsečky, ovšem nejedná se přitom o odhadování délky úsečky. Žák si uvědomuje, že na délce nezáleží, pokud dodrží dané zadání (proporce obrázku – například, že čtverec zůstane čtvercem, bod, který má být ve středu úsečky, zůstane opravdu v jejím středu apod.). Takto postupovala i žákyně, jejíž řešení znázorňuje obr. 5.1.14.



Obr. 5.1.14 Řešení pomocí dosazování za neznámou u úlohy 1[41]

Charakteristika 1: Dosazení za neznámou

- žák si zvolí/nezvolí délku úsečky

[41] Žákyně zná Pythagorovu větu zřejmě jen formálně nebo jen výpočetně. Chybí jí porozumění geometrické podstatě věty. Neuvědomuje si, že d^2 je obsah čtverce nad přeponou, který je v obrázku již nakreslen. Nemusí tedy nejdřív odmocnit číslo 32 a následně výsledek zase umocnit.

Charakteristika 2: Míra obecnosti

- žák si uvědomuje/ neuvědomuje, že řešení není obecné

Použití parametru

Žák použije parametr místo neznámé délky úsečky a s ním dále obecně pracuje ve výpočtech. Jako příklad tohoto strategického kroku je možné použít práci žákyně, jejíž řešení je uvedeno již u strategického kroku *Používání vzorců* na obr. 5.1.13. Žákyně si sice vypočítala neznámou a (v pravé části obrázku), ale nakonec její hodnotu nevyužila a vyřešila úlohu parametricky přes poměr obsahů. V levé spodní části obrázku jsou vyjádřeny obsahy obou trojúhelníků i zbývajícího obdélníku. Dále je zde poznamenáno, že $3a^2$ odpovídá 1 dm^2. Také je zde dopočítán obsah hledaného lichoběžníku, který tak činí $6a^2$. Na obrázku chybí celkový výsledek, ale v odpovědi ho žákyně správně zapsala.

Charakteristika 1: Použití parametru

- žák použije/nepoužije parametr

Charakteristika 2: Efektivita použití parametru

- žák volí parametr jen tam, kde je to nezbytně nutné, a zbylé délky odvodí na základě teoretických vlastností geometrického objektu
- žák volí parametr i tam, kde se dá délka odvodit

<u>Poznámka:</u> Jak jsou strategické kroky „poskládány“ do jednotlivých řešitelských strategií, bude zřejmé z grafických schémat (viz oddíl 5.1.5).

B. Chyby a nedostatky v práci žáků

Matematické vyjadřování

Žák má problém s vyjadřováním; zná zřejmě správné řešení, ale nedokáže ho vysvětlit či svůj postup popsat. U této charakteristiky jsem se zaměřila na úroveň vyjadřování (smysluplnost vět, skladba vět, …).

- žák používá nesprávné/částečně správné/správné vyjadřování

Neznalosti vzorců

Žák ví, který vzorec by měl použít, popřípadě jak by postupoval, kdyby znal potřebný vzorec. Bohužel si jej však nepamatuje či ještě danou problematiku neprobíral v hodinách matematiky a vzorec zatím nezná.

Charakteristika 1: Kompatibilita vzorce k danému věku, ročníku

- žák si vystačí se vzorci, které zná
- žák vyžaduje vzorce z ještě neprobíraného učiva (takového, které ještě nemůže znát)

Charakteristika 2: Znalost či neznalost potřebného vzorce, který by žák již měl plně ovládat

- žák zná/nezná potřebné vzorce

Neznalost početních operací

Žák si neumí poradit s početní operací (např. počítání s desetinnými čísly, vyjadřování neznámé ze vzorce apod.).

- žák zná/nezná potřebné početní operace

Neznalost pojmů

Žák neovládá některé pojmy, a tak nerozumí zadání úlohy či nemůže pokračovat v práci.

- žák neovládá/částečně ovládá/ovládá pojmy, které již probíral

C. Sociální kategorie

Vliv experimentátora

Práci žáka různým způsobem ovlivňuje experimentátor, který mu poskytuje potřebné nápovědy a i jinak reaguje na jeho práci – např. povzbuzením, návodnou otázkou, doplňkovou otázkou, otázkou po zdůvodnění apod.

- experimentátor velmi často radí žákovi v průběhu jeho práce a povzbuzuje ho
- experimentátor podává žákovi pouze předem připravené nápovědy
- experimentátor nepodává žákovi žádné nápovědy

Poznámka: Vliv experimentátora je možné do jisté míry vidět z grafických schémat (viz oddíly 5.1.5 a 5.1.6).

Charakteristika žáka

Charakteristika 1: Míra ochoty žáka zabývat se problémem

- žák od začátku není ochoten pracovat na úloze
- žák řešení vzdá, jelikož ho nebaví nebo neví, jak dál
- žák se zabývá celou dobu řešením úlohy

Charakteristika 2: Míra žákovi potřeby ujištění o správnosti řešení během práce

- žák vyžaduje neustálé ujišťování od experimentátora
- žák občas žádá o nápovědu
- žák pracuje samostatně

Poznámka: Tyto dvě charakteristiky uvádím jako příklad těch, které jsem přímo pozorovala v průběhu rozhovorů. Ovšem je zřejmé, že takových charakteristik by byla celá řada, včetně přístupu žáka k matematice, k učení obecně apod. Rozbor sociálních kategorií by byl příliš obsáhlý, nemám pro něj dostatek informací o žácích a pro mou práci není ani stěžejní.

5.1.5 Grafické schéma procesu řešení žáků

Abych mohla sledovat a porovnávat u žáků jak strategie řešení, tak i jejich změny v závislosti na čase, množství použitých nápověd a zásahů experimentátora, potřebovala jsem si vytvořit nějaké schéma. Vzhledem k tomu, že mým hlavním cílem je sledovat, zda a jak se v práci žáků objevují výpočtové strategie či geometrické strategie, rozhodla jsem se právě toto hledisko dát do centra pozornosti. Příklad grafického schématu je na obr. 5.1.15.

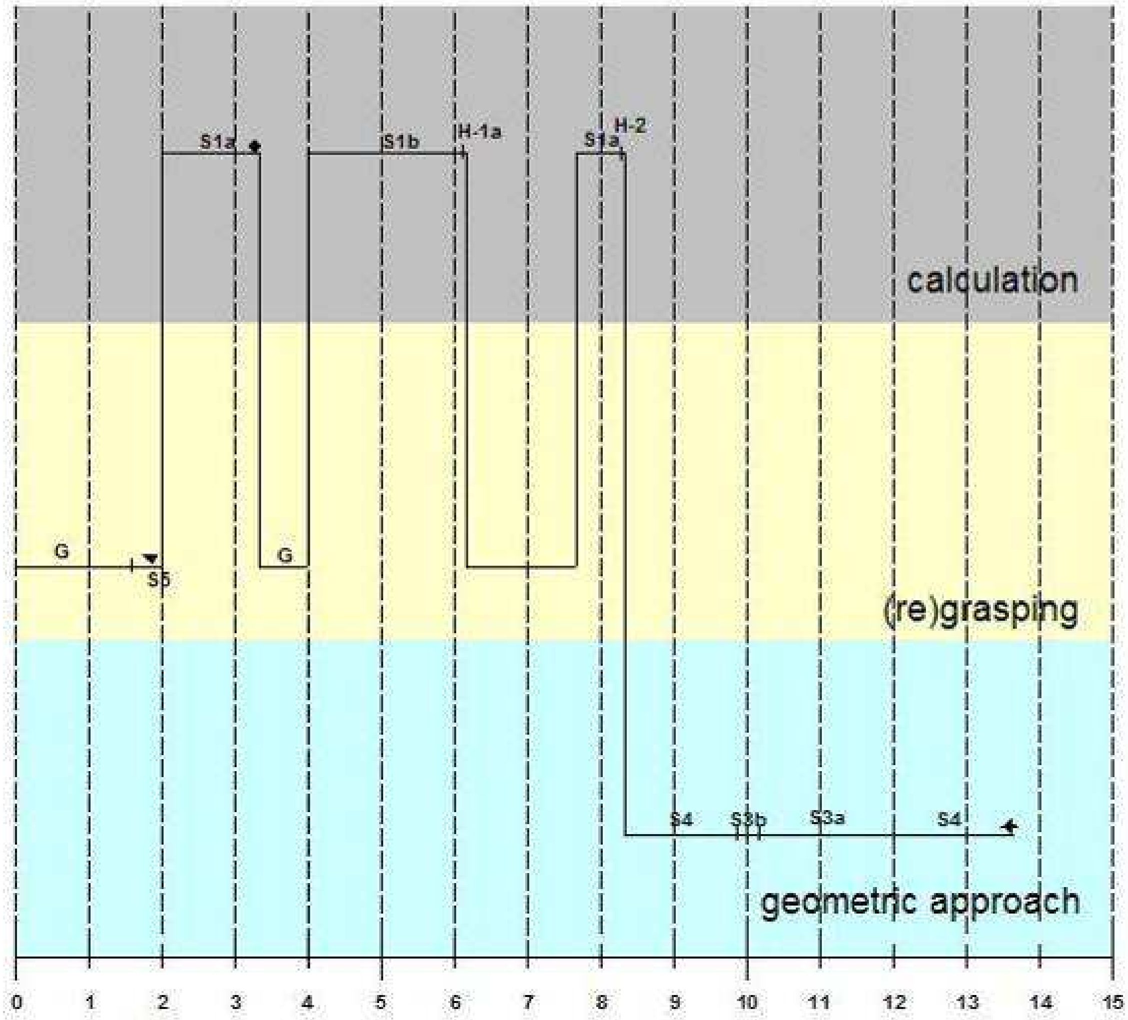
Struktura grafického schématu

V grafu postupujeme zleva doprava, čímž se pohybujeme v čase – sloupce představují čas v minutách. Sledujeme přitom lomenou čáru, zde nazývanou *linie*, která představuje řešitelský proces jednoho žáka při řešení jedné úlohy. Horizontálně je graf rozdělen do tří barevně odlišených polí. Horní pole (*výpočet,* angl. *calculation*[42]) představuje výpočetní oblast. Zde se žák pohybuje v případě, že prokazatelně provádí výpočty, používá vzorce a hledá k nim potřebné hodnoty takovým způsobem, že nepracuje přímo s obrázkem a nevyužívá známých informací o geometrickém objektu reprezentovaném na obrázku.

Ve středním poli, které je označeno *(znovu)uchopování* (angl. *(re)grasping*), se žák nachází v případě, že není možné jistě určit, zda pracuje s obrázkem geometricky a hledá nové souvislosti, či zda přemýšlí nad výpočetními postupy. V tomto poli více času „trávili" žáci střední školy, jelikož mnohdy pracovali samostatně a nepopisovali své myšlenky nahlas a ani nic nepsali či nekreslili, a tak nebylo možné určit, jak přesně v daný okamžik uvažovali.

[42] Ve schématech ponechávám anglické názvy oněch tří oblastí. Měla jsem je totiž připraveny pro výzkumnou zprávu na konferenci SEMT 2011 a jejich přepsání ve všech schématech (která jsou vytvořena v programu Power Point) by bylo neúměrně technicky náročné.

V tomto poli se žáci vyskytovali také vždy na začátku řešení úlohy, kdy si museli přečíst její zadání, pochopit ho a zvolit si strategii svého následného řešení. Někteří žáci se do toho pole dostali také po zásahu experimentátora, který je upozornil na chybu v jejich strategii či je pobídnul k jinému řešení, a žáci se snažili úlohu znovu uchopit.



Obr. 5.1.15 Příklad grafického schématu

Ve spodním poli *geometrických přístupů* (angl. *geometric approach*) se žák nacházel v případě, že prokazatelně pracoval s geometrickým objektem, který je reprezentován na obrázku, a hledal geometrické souvislosti mezi objekty, a to bez ohledu na to, zda se pohyboval v prostoru T či SG.

V grafu nehraje roli výška, ve které se linie grafu v jednotlivých barevných polích nachází. Pole jsou dostatečně široká proto, aby bylo možné do jednoho grafu zakreslit více linií, tudíž více řešitelských strategií žáků. Ve schématu na obr. 5.1.15 je znázorněna pouze jedna linie, tedy pouze postup řešení jednoho žáka u jedné úlohy.

Délky jednotlivých úseček v grafu představují dobu, po kterou se žák zabýval daným řešitelským krokem. Tyto úsečky jsou od sebe viditelně odděleny buď zlomem v linii či malou čárkou, která naznačuje změnu v kroku. Typ strategického kroku je u úsečky označen kódem (viz tab. 5.1.2).

Tab. 5.1.2 Strategie a strategické kroky u úloh 1 až 3 v první fázi hlavní studie

<table>
<tr><th>Kód strategie</th><th colspan="3">Název strategie</th></tr>
<tr><td>S1</td><td colspan="3">Měření (S1a) a počítání (S1b)</td></tr>
<tr><td>S2</td><td colspan="3">Odhad (S2a) a počítání (S2b)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">S3</td><td rowspan="2">Manipulace s obrázkem</td><td>S3a</td><td>Fyzická (reálná) manipulace</td></tr>
<tr><td>S3b</td><td>Mentální manipulace</td></tr>
<tr><td>S4</td><td colspan="3">Využití obrázku</td></tr>
<tr><td>S5</td><td colspan="3">Intuitivní řešení</td></tr>
</table>

Písmeno G (z angl. *grasping*) v grafu označuje úsečky představující dobu, kdy se žák nacházel ve fázi uchopování úlohy, tedy seznamoval se s ní, případně ji znovu promýšlel. Některé úsečky ve středním poli označení nemají, jelikož není možno jednoznačně určit, o jakém řešení žák momentálně uvažuje. V grafu se také objevuje označení písmenem H (z angl. *hint*) a číslem, jež představuje místo, kdy byla podána nápověda, a číslo pak uvádí, o jakou nápovědu se jednalo (viz oddíl 5.1.1).

Kromě zmíněných označení se v grafu objevují ještě další tři symboly: trojúhelník, kolečko a hvězdička. Trojúhelník představuje okamžik, kdy do práce žáka nějakým způsobem zasáhl experimentátor[43] a pobídl ho k jinému způsobu řešení či upozornil na nepřesnosti v jeho úvahách. Kolečko představuje takový zásah experimentátora, který poukazuje na chybu, které se žák dopustil. Jedná se nejčastěji o chybný výpočet či úvahu, která by naprosto změnila výsledek řešení. Žák by pak bez toho upozornění mohl získat dojem, že je s prací hotov, a nedostal by se ke správnému řešení. Posledním symbolem v grafu je hvězdička, která představuje moment, kdy se žák dostal ke správnému řešení. Tato hvězdička se objevuje i ve výpočetním poli, kdy se žák dobral správného řešení početně.

Geometrická část by se dala ještě dále členit podle Laborde (2005; viz oddíl 3.1.1), a sice znázornit, kdy se žáci pohybují v prostoru T (*theoretical*) a prostoru SG (*spatio-graphical*). To by však schéma spíše znepřehlednilo, proto tuto charakteristiku uvádím jen u jednotlivých kroků řešitelských strategií v oddíle 5.1.4. Navíc je někdy zařazení daného kroku do T či SG prostoru sporné.

[43] Tedy já.

Poznámka: Setkala jsem se i s dotazy, zda by neměl být geometrický způsob řešení jaksi nadřazený a jeho pole tedy umístěný nad polem výpočetním. Ovšem graf nemá představovat nadřazenost jednoho typu řešení nad druhým a navíc, pokud by bylo geometrické pole nahoře, znamenalo by to, že při každé změně strategického kroku či při novém uchopování úlohy by linie řešení přecházela přes výpočetní oblast do oblasti (znovu)uchopování, což neodpovídá skutečnosti. Proto se mi jevilo jako výhodné mít pole uchopování uprostřed.

Ilustrace grafického schématu

Podívejme se nyní na grafické schéma na obr. 5.1.15 podrobněji. Jedná se o zápis postupu řešení Michala[44] (13 let), který řešil úlohu 1, kde měl porovnat obsahy dvou čtverců (viz oddíl 5.1.1). Z linie je patrné, že se žák zdržel přibližně dvě minuty v oblasti Uchopování. Nejprve se snažil pochopit, co je jeho úkolem (tato etapa je označena písmenem G), a poté usoudil, že čtverec *ABCD* je větší než *KLMN*. Zde jsem ale zasáhla já v roli experimentátora, což naznačuje malý trojúhelník, a upozornila jsem ho, že se v úloze ptají na poměr mezi obsahy čtverců. Zde se žák dostal do výpočetního pole, jelikož začal přeměřovat jednotlivé délky stran čtverců pravítkem. I tento postup by někdo mohl považovat za práci s obrázkem, ale z mého pohledu to tak není, protože jde o měření, což naznačuje, že žák bude chtít použít nějaký výpočet. Jak naznačuje malé kolečko v grafu, opět jsem zasáhla do práce žáka a upozornila ho, že se jedná o náčrtek a že jeho měření nikdy nebude dost přesné.[45] Žák byl tedy donucen přehodnotit svůj postup řešení a, obrazně řečeno, vrátil se do středního pole, kde znovu promýšlel úlohu.

Po necelé minutě se však Michal vrátil k naměřeným hodnotám délek úseček a chtěl je dosadit do vzorců na výpočet obsahů čtverců. Je vidět, že je dostatečně autonomní, aby i přes můj zásah pokračoval ve svém původním řešení. Já jsem ho ale přerušila, jelikož jsem nechtěla, aby byl zdržován počítáním. Pro tuto chvíli bylo pro mne důležité pouze to, že chtěl úlohu řešit početně pomocí vzorce. V grafu je tak označen moment, kdy jsem žákovi podala první nápovědu. Michal se opět zamýšlel nad úlohou a před koncem osmé minuty se dostal do výpočetního pole tím, že si přeměřil novou úsečku, kterou mu ukázala nápověda. Zde je jasné, že žák nepracoval s obrázkem z geometrického hlediska, nepohyboval se v T prostoru, protože opět měřil, tentokrát úhlopříčku menšího čtverce, která je ve skutečnosti stejně dlouhá

[44] Uvedená jména neodpovídají skutečnosti.

[45] Při zpětném pohledu se tento zásah nezdá šťastný. Měla jsem ho nechat, aby postupoval sám, a zasáhnout, až by se v řešení ztratil.

jako strana čtverce *ABCD* a jejíž hodnotu tedy již žák změřenou má (byl stále v SG prostoru). Proto jsem mu podala druhou nápovědu.

Druhá nápověda již byla pro žáka tak nápomocná, že se jeho pozornost zaměřila na geometrický objekt reprezentovaný obrázkem a napadlo ho nové řešení. Jeho terminologie byla ale špatná, např. hovořil o shodných stranách místo o shodných trojúhelnících. Nevěděl, jak své řešení vysvětlit, a proto kolem desáté minuty pomocí mentální manipulace s obrázkem ukazoval, že vzniklé trojúhelníky jsou shodné (zřejmě se stále jedná o práci v SG prostoru). Poté žák zpřehýbal rohy vystřiženého obrázku, aby porovnal trojúhelníky uvnitř a vně menšího čtverce *KLMN,* a v poslední fázi porovnal i obsahy obou čtverců. Jak dokazuje hvězdička na konci linie, úlohu vyřešil a správný výsledek získal přibližně za 13,5 minut od zadání úlohy.

5.1.6 Výsledky analýzy rozhovorů

Jak již bylo řečeno, cílem rozhovorů bylo hlouběji proniknout do řešitelských strategií žáků a vlivu nápověd na jejich řešení. Tento obecný cíl jsem rozdělila na pět dílčích otázek a) až e), které jsou uvedeny níže v příslušných oddílech.

Celkem jsem vytvořila 27 jednotlivých schémat, pro každého z devíti žáků tři, po jednom pro každou úlohu. Ty jsem dále seskupovala a) pro jednotlivé úlohy pro všechny žáky,[46] b) pro jednotlivé žáky pro všechny tři úlohy.

Zhodnocení jednotlivých grafických schémat

V prvním případě jsem se dívala na každé schéma samostatně (příklad schématu pro žáka z 6. ročníku je v příloze 1) s cílem zjistit:

a) jak často se objevovaly jednotlivé řešitelské kroky a výpočetní a geometrické strategie,
b) co vedlo žáky ke změnám kroků řešitelských strategií,
c) jestli žáci potřebovali všechny nápovědy,
d) zda po nápovědě vždy změnili strategii či dokonce přešli od výpočtových řešení ke geometrickým.

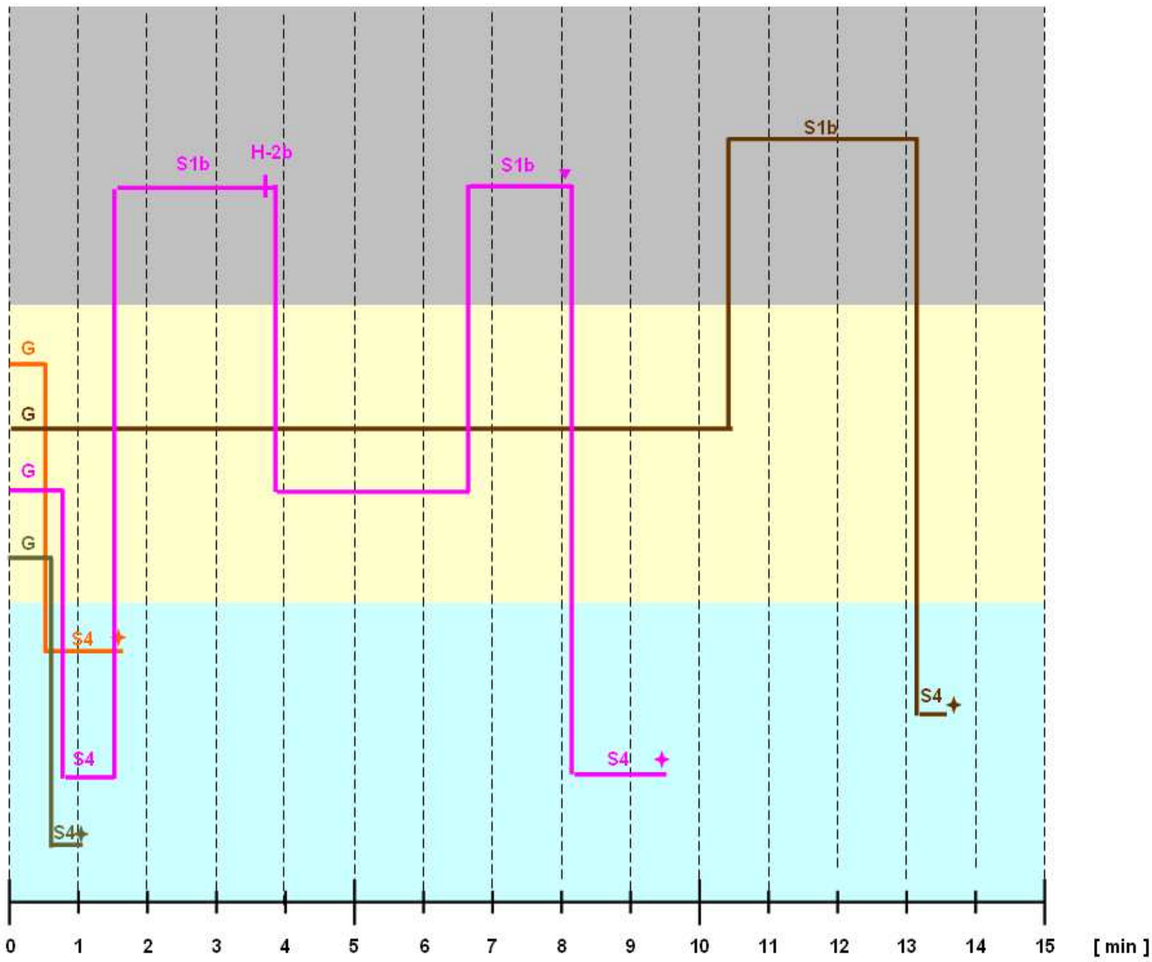
[46] V příloze 2 jsou schémata žáků základní školy pro jednotlivé úlohy a v příloze 3 je totéž pro žáky gymnázia.

Tab. 5.1.3 Četnost použití strategických kroků a nápověd

Žák		ZŠ					SŠ – Gymnázium			
		Vítek (12)	**Zdenda (12)**	**Michal (13)**	**Pavel (15)**	**Eva (16)**	**Tereza (15)**	**David (16)**	**Karel (18)**	**Lada (18)**
Počet správných geometrických řešení		3	2	2	3	3	3	3	3	3
Počet správných výpočetních řešení		0	1	1	0	1	1	0	0	2
Počty výskytů jednotlivých strategických kroků										
Zjišťování délek	**odhadem**	3	0	1	2	1	0	0	0	0
	měřením	5	6	7	1	2	0	0	0	0
Manipulace	**fyzická**	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	mentální	0	0	1	2	2	0	0	0	0
Použití parametru		0	0	0	0	0	0	0	0	1
Využití výpočtů		2	4	3	2	2	4	2	3	8
Využití obrázku		5	4	5	4	0	3	4	6	5
Intuitivní řešení		0	0	1	2	0	0	0	0	0
Využití jednotlivých nápověd										
Úloha 1	**N1a**	1	0	1	0	1	0	0	0	1
	N1b	0	1	0	0	0	0	1	0	0
	N2a	0	1	1	0	0	0	0	0	0
	N2b	0	0	0	0	0	0	1	0	0
Úloha 2	**N1**	1	1	1	0	0	0	0	0	0
	N2a	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	N2b	1	0	0	1	0	0	0	0	0
	N3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Úloha 3	**N1**	0	1	1	1	0	0	1	1	0
	N2	1	1	0	1	0	1	1	1	0
	N3	0	0	1	0	0	0	0	0	1

V tab. 5.1.3 je uvedeno, kolikrát žák využil daného strategického kroku či nápovědy, tj. kolikrát se k danému kroku vrátil, i když sám již předtím strategii změnil či byla jeho práce přerušena zásahem experimentátora nebo nápovědou. U žáků výrazně převažují řešení pomocí obrázku nad výpočetními řešeními. Je ale nutné si uvědomit, že se jednalo o rozhovor, v němž jsem podávala žákům návodné obrázky tak, aby řešení pomocí obrázku nalezli (i tak měli žáci stále potřebu řešit úlohu početně). Proto většina žáků (kromě dvou) našla řešení pomocí obrázku v každé úloze, jak naznačuje v tab. 5.1.3 číslo 3 na pozici *správných geometrických* *řešení* u žáků. Někdy žáci pouze nastínili, jak by úlohu početně řešili. I když se jednalo o správný postup, požádala jsem je o jiné řešení, tentokrát bez výpočtů.[47] Tato řešení ale nejsou započítána v tabulce.

Z tab. 5.1.3 je dále patrné, že *odhadování* a *měření délek úseček* se objevilo pouze u žáků základní školy, stejně jako *manipulace* s obrázkem. Žáci totiž manipulaci používali zejména k vysvětlení svého tvrzení, jelikož se jim to díky špatné terminologii nedařilo. Žáci gymnázia s prezentací svých závěrů neměli větší problémy, i když byla terminologie také velice často nepřesná. Žáci gymnázia místo zjišťování délek úseček upřednostňovali *dosazení za neznámou* libovolné číslo. Tento strategický krok je zahrnut v tabulce v položce *využití výpočtů*, jelikož se vyskytoval u všech žáků gymnázia, kteří v úlohách počítali. Pouze Lada místo dosazení za neznámou použila v jednom případě parametr.



Obr. 5.1.16 Schéma pro řešení úlohy 2 jen pro žáky SŠ z první fáze hlavní studie

[47] Chtěla jsem zjistit, jaké strategické kroky žáci používají, nikoliv hodnotit, jak dobře a rychle žáci počítají.

Úlohy 1 a 3 jsou poměrně bohaté na strategické kroky, z příslušných schémat je vidět, že žáci často střídají výpočetní a geometrické kroky. Ze schématu na obr. 5.1.16 plyne, že úloha 2 není na žákovské strategie příliš bohatá. Tato úloha byla pro některé žáky naprosto zjevná, pokud okamžitě zaměřili pozornost na klíčový obdélník, a pro jiné velice komplikovaná.

Zhodnocení vlivu nápověd a experimentátora pro jednotlivé úlohy

Nápovědy využívali žáci základní školy o něco častěji než žáci gymnázia, kteří pracovali autonomněji. Větší rozdíly ve využívání nápověd jsou mezi žáky základní školy a žáky gymnázia patrné v úloze 1 a 2, v úloze 3 je jejich využívání na obou školách téměř shodné.

Pro zkoumané žáky střední školy byly nápovědy velice užitečné. V sedmi z deseti případů, kdy jim byla poskytnuta nápověda, přešli ke geometrickým strategiím. Pouze ve třech případech zůstali u výpočtových strategií či se znovu pokusili uchopit úlohu. U žáků základní školy nemohu říci, zda jim byly nápovědy takto užitečné. Sice je jisté, že by se většina z nich ke správnému řešení bez nápověd nedostala, ale pouze v deseti z celkového počtu osmnácti použití nápověd přešli k některé z geometrických strategií.

V úloze 1, kde byl žákům při první nápovědě předložen jeden z obrázků 5.1.5, nehrálo roli, zda v obrázku dostali jednu či rovnou dvě úhlopříčky, jelikož si většina žáků tu druhou stejně ihned dokreslila sama. Pouze jedna dívka z těch, kteří dostali nápovědu s jednou úhlopříčkou, si ji tam nedokreslila, jelikož ji ihned napadlo správné řešení. Z výběru dvou obrázků (viz obr. 5.1.6) pro druhou nápovědu této úlohy nelze ale určit, který z nich byl vhodnější, a zda by žák reagoval jinak v případě, kdyby dostal právě tu druhou nápovědu. Jestli by ho vedla ke stejnému postupu řešení či jeho řešení prodloužila nebo zkrátila. Na to byl v první fázi příliš malý vzorek respondentů. Navíc tuto nápovědu ani všichni žáci nepotřebovali, a tak jim nebyla předložena.

Díky první nápovědě úlohy 2 žáci zaměřili pozornost jen na potřebnou část kružnice, ale k dokreslení druhé úhlopříčky pomohla až nápověda N2. Tato druhá nápověda bohužel ale omezila žákovu pozornost pouze na obdélník *SABC*, z něhož nebylo patrné, že se u jeho úhlopříčky ve skutečnosti jedná o poloměr kružnice, proto někteří žáci ani s touto nápovědou úlohu nevyřešili. Ti se ke komplexnímu pohledu na úlohu a obrázek vrátili až po obdržení třetí nápovědy. Druhá nápověda se tak nejeví jako přínosná.

V úloze 3 žáci nápovědy hojně využívali, jelikož se jim tato úloha jevila často jako nejobtížnější. Ale ani v tomto případě nebyly využity u každého žáka všechny tři nápovědy.

Podobným způsobem jako vliv nápověd jsem původně chtěla zhodnotit i mé zásahy v roli experimentátora do žákovských řešení. To se ale ukázalo jako nemožné. Mé zásahy nebyly u jednotlivých žáků stejné, jako tomu bylo u nápověd. Někteří mladší žáci potřebovali více povzbudit, musela jsem tedy s nimi v průběhu experimentu více komunikovat a ujišťovat je o správnosti jejich cesty. Odpovědi žáků základní školy byly pro mě často nesrozumitelné, a tak jsem se musela ptát na vysvětlení, a to mohlo být samo o sobě pro žáky nápovědou. Naopak žáci střední školy pracovali hodně samostatně a vystačili si s danými nápovědami.

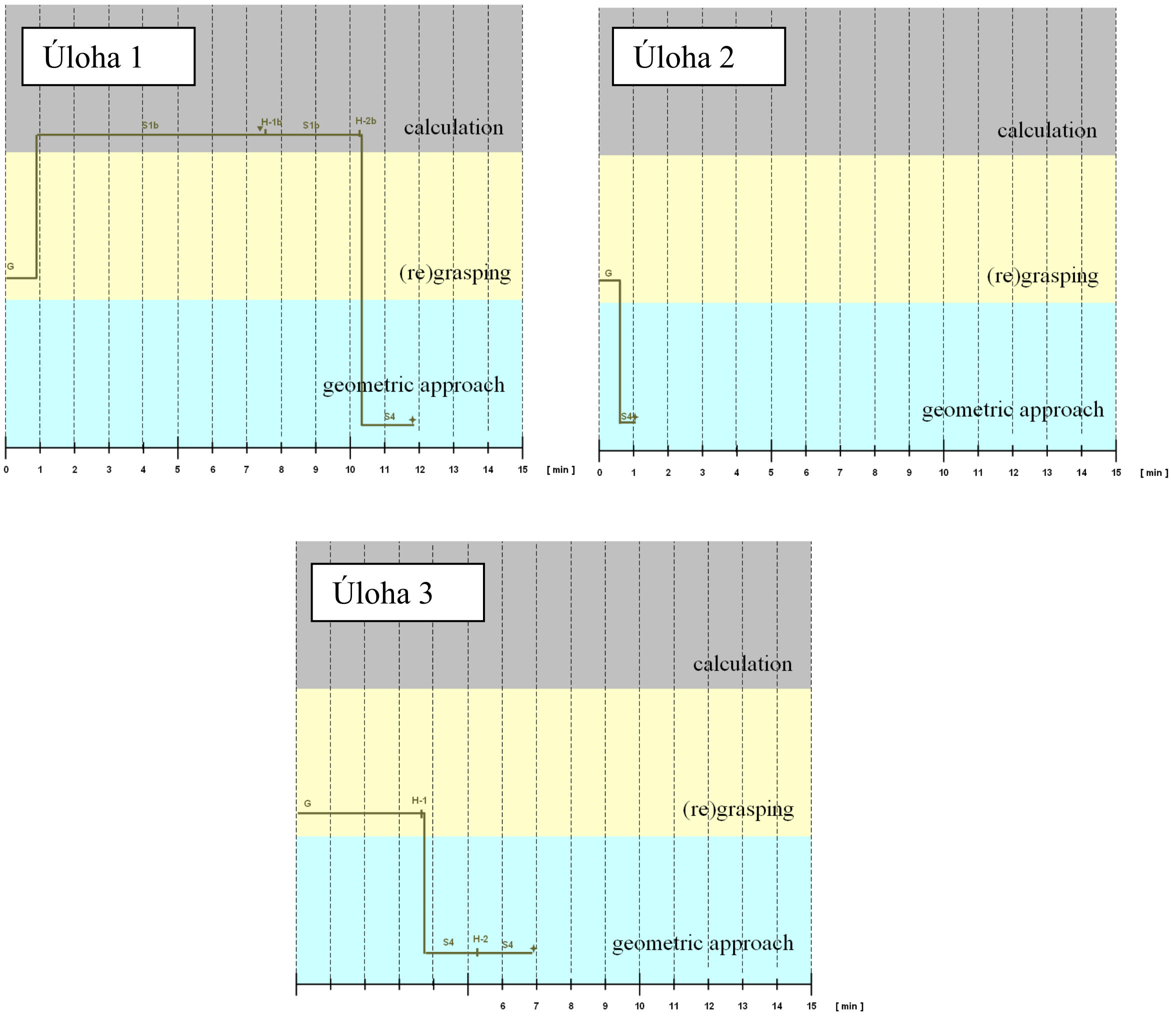
Zhodnocení grafických schémat žáka u všech úloh

Ve druhém případě jsem uspořádala grafická schémata všech tří úloh pro jednoho žáka pod sebe a snažila se zjistit:

e) zda u žáků dochází k posunu při postupném řešení úloh, resp. zda žáci využívají dovednosti získané v první úloze v úlohách následujících či zda jsou jejich postupy rezistentní.

U žáků gymnázia můžeme sledovat mírný posun v užívaných strategiích při řešení úloh. Žáci již v první úloze pochopili, že jde spíše o jiná než početní řešení, a tak se je pokoušeli hledat. V tom je navíc ujistila úloha 2, u které si nevěděli rady, protože jim pro výpočty chyběly potřebné informace. Např. David (viz obr. 5.1.17) se pokoušel úlohu 1 řešit hlavně početně. Ve druhé úloze přišel David téměř okamžitě na správné řešení pomocí obrázku – otázkou však je, zda to je dáno zkušeností z první úlohy nebo charakterem druhé úlohy. David se ale vyhnul početnímu řešení i v úloze 3, kterou se žáci většinou snažili řešit početně (i když např. díky nápovědě pak přešli ke geometrickému řešení). Ani u žáků gymnázia však nemohu jednoznačně říct, že se s počtem úloh zvyšuje poměr geometrických strategií. K takovému tvrzení nemám jednak dostatečný počet respondentů a jednak jsou úlohy dost různorodé.

Naproti tomu u žáků základní školy nejen že posun ve výběru geometrických strategií není vůbec patrný, ale některé strategické kroky žáci neopouštěli a používali je ve všech úlohách i v případě, že jim v úloze bylo pokaždé ukázáno, že nevedou k cíli či jsou dokonce chybné. Takovým krokem je měření úseček. Většina žáků základní školy (zejména 6. a 7. ročníku) přeměřovala v obrázku délky stran (viz tab. 5.1.3), které se pak pokoušeli dosazovat do vzorce. I když jim bylo v první úloze vysvětleno, že se jedná pouze o náčrtek a obrazce tedy nemusí být přesné a že jejich měření pravítkem či odhad délek stran také není přesný, přeměřovali si neznámé úsečky (strany) většinou ve všech úlohách. Někdy se dokonce zeptali, zda se jedná opravdu jen o náčrtek a zda mohou měřit strany, ale i po záporné odpovědi se nakonec chopili pravítka a strany si přeměřili. Od této strategie je neodradil ani fakt, že v předchozích úlohách se nakonec dobrali ke správnému řešení a délky stran znát ani nepotřebovali. Takové jednání se u žáků střední školy neobjevilo, své chyby v následujících úlohách neopakovali.



Obr. 5.1.17 Schéma pro řešení Davida (16) u všech tří úloh

Příkladem neustálého vracení se k měření úseček je i úryvek z rozhovoru s žákem 6. ročníku základní školy nad úlohou 3. Tomuto žákovi bylo vysvětleno zadání včetně toho, co znamená, že bod *O* leží ve třetině úsečky *MN*.

Ž: Tak tady máme ty třetiny, tak…. mě by zajímalo spíš, jak je dlouhá? To je zase náčrtek? *(Žák se ptá, protože mu v předcházejících úlohách bylo vysvětleno, proč v náčrtku nemá smysl přeměřovat délky stran.)*

E: Zase je to náčrtek, když si to změříš a kdyby sis spočítal obsah toho trojúhelníku, tak by ti nevyšel ten 1 dm^2. To je zase obrázek.

Ž: Ale já si chci jenom změřit, jak je dlouhý tady to. Protože to musí být *(žák měří pravítkem délku strany čtverce)* … šest a půl, zase. *(Dále je žákovi opět vysvětleno, že měřit délku strany nemůže a on odkládá pravítko.)*

[…]

Ž: Ale ten teď právě *(má na mysli ten 1 dm^2)* … když je to šest a půl … *(vrací se zpět k naměřené hodnotě),* tak to by bylo zase šest a půlkrát šest a půl a to zase nevím. *(Opět je žákovi vysvětleno, proč nemůže pracovat s naměřenou hodnotou 6,5 cm.)*

[…]

(Žák si nechá znovu vysvětlit, co znamená 2a.)

Ž: Třetina úsečky … Takže tady je jedna třetina, jinak už jsou tři třetiny. Jedna třetina je *a*. Decimetr a tohle jsou dvě třetiny a tři třetiny. Takže, tady by byla jedna třetina a tady by bylo zase šest a půl a šest a půl. A třetina z šest a půl, to je dva a něco.

E: Ehm.

Ž: No, takže dva a něco. Takže šest plus půl a šest a půl je dvanáct, třináct. A třináct plus ty dva. Počkej. Kolik je šest celých pět, to je dva celý dva a do desíti mi to nevychází, aby se to dalo vydělit třema. Šest a půl prostě třema vydělit nejde.

[…]

(Žák chce nejprve vypočítat obsahy obrazců, ale má na mysli jejich obvody, a z nich teprve délky stran odvodit.)

E: A jak bysme vypočítali obsah obdélníku a obsah toho trojúhelníku?

Ž: No, jedna třetina, tady.

E: No jo, jenomže my vlastně nevíme ve skutečnosti, jak je ta strana dlouhá. My si ji můžeme změřit, ale víme, že to samozřejmě nemusí být pravda.

Ž: Nemusí.

E: Takže my ty délky těch stran neznáme.

Závěry pro první fázi hlavní studie budou podány v oddíle 5.4.1.

5.2 Druhá fáze hlavní studie – písemná forma bez možnosti nápovědy

V druhé fázi hlavní studie jsem se zaměřila na žákovská řešení úlohy 2 (viz oddíl 5.1.1). Jak se ukázalo v první fázi, tato úloha nevede k širokému spektru řešitelských strategií, ani se v žákovských řešeních neobjevuje velké množství jevů. Způsoby řešení byly poměrně přesně popsatelné již na základě písemného řešení žáků. Proto jsem se rozhodla předložit ji většímu počtu žáků formou pracovního listu k samostatnému řešení tak, že nebudou mít možnost dotazů a získání nápovědy. Zaměřila jsem se zejména na první a třetí výzkumnou otázku z oddílu 2.3, tedy na použité řešitelské strategie a souvislost volby strategie s věkem.

5.2.1 Průběh druhé fáze hlavní studie

Úlohu jsem zadala v říjnu 2011 formou pracovního listu v pěti třídách – seřazeno podle věku šlo o 1. a 2. ročník osmiletého gymnázia, 8. ročník základní školy a 4. a 6. ročník osmiletého gymnázia.[48] Počty žáků jsou uvedeny v tab. 5.2.1.

Žáci měli na vypracování úlohy dostatek času v průběhu jedné vyučovací hodiny.[49] V pracovním listu byli vyzváni k tomu, aby své řešení písemně odůvodnili.

Tab. 5.2.1 Počty žáků ve druhé fázi hlavní studie v jednotlivých ročnících

	Celkový počet žáků	Počet dívek	Počet chlapců
G.I.A	30	19	11
G.II.B	27	15	12
Z.8.A	19	10	9
G.IV.A	27	11	16
G.VI.A	22	9	13
Celkem	**125**	**64**	**61**

5.2.2 Analýza druhé fáze hlavní studie a její výsledky

Při analýze žákovských řešení úlohy jsem využila kategorie strategických kroků a jevů z první fáze výzkumu, ovšem jen těch, které se daly odlišit bez osobní komunikace s žákem.

V analýze jsem se zaměřila a) na čas, který žáci potřebovali na vyřešení úlohy, jelikož jsem chtěla zjistit, zda starší žáci s většími zkušenostmi z matematiky vyřeší úlohu za výrazně kratší čas než mladší žáci; b) na množství jevů a strategických kroků, kterých žáci při svém řešení využili; c) poměr výpočtových řešení a řešení geometrických. Samozřejmě byla v analýze zjišťována i úspěšnost v jednotlivých ročnících škol.

Poznámka: V níže uvedeném textu jsou některé výsledky analýzy pro přehlednost uvedeny formou grafu. Příslušné tabulky, z nichž grafy vznikly, jsou v příloze 4 a jsou rozděleny do oddílů stejně jako zde v textu.

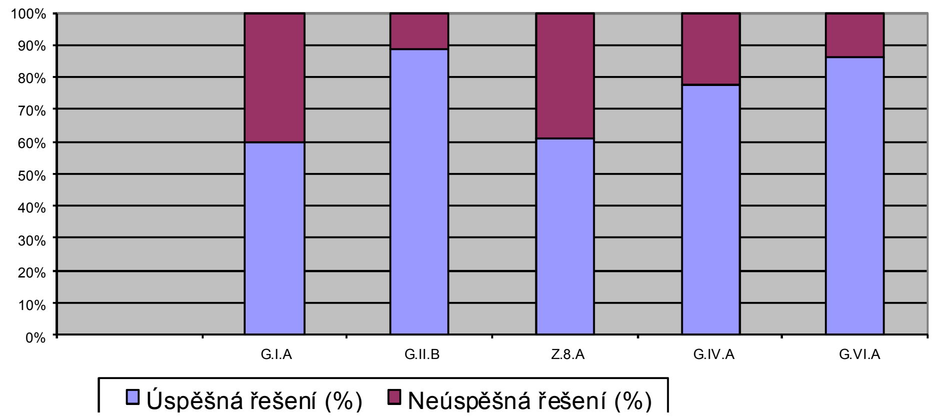
[48] Vše na ZŠ a Gymnázium J. G. Jarkovského, Truhlářská 22, Praha 1.

[49] Ani jeden z žáků ale nepotřeboval celých 45 minut.

5.2.3 Úspěšnost a čas potřebný k řešení úlohy

Pro každou třídu jsem vypracovala tabulku, kde jsem ke každému žákovi přiřadila dobu řešení úlohy, zda byl v řešení úspěšný či nikoliv a všechny jeho strategické kroky a jevy, které jsem vyčetla z písemného řešení. Dále jsem vytvořila souhrnné tabulky pro všechny třídy, aby se daly mezi sebou porovnávat.

Nejdříve bude zhodnocena úspěšnost žáků při řešení úlohy (viz obr. 5.2.1). V grafu není brán zřetel na chyby, kterých se žáci v průběhu své práce dopouštěli. Je zde znázorněno, jaké procento žáků nakonec úlohu správně vyřešilo, tedy použilo vlastností obdélníku a faktu, že hledaná úsečka je současně poloměrem kružnice (viz řešení v oddíle 4.1).



Obr. 5.2.1 Úspěšnost řešení úlohy 2 po třídách

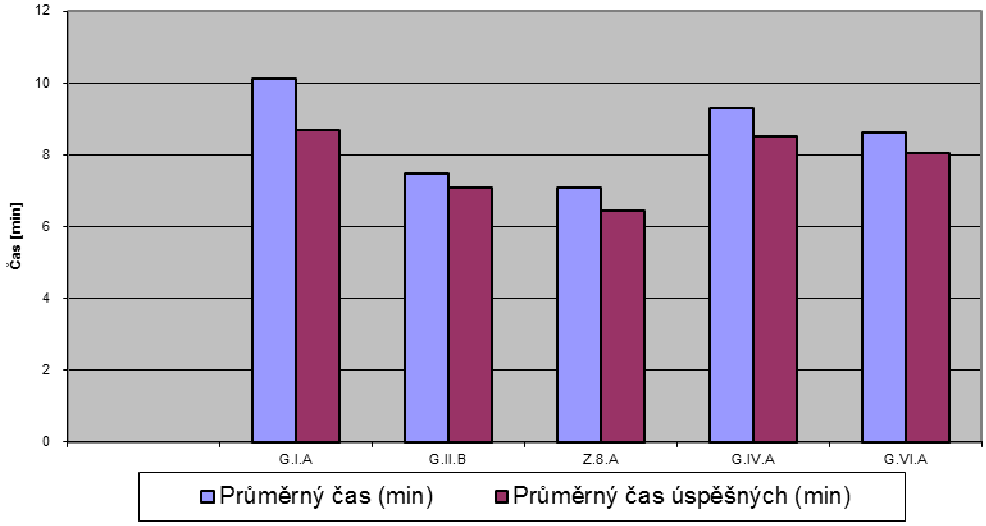
Nejúspěšnější byl druhý ročník gymnázia.[50] Pokud od této třídy odhlédneme, vidíme, že starší žáci jsou v řešení této úlohy úspěšnější o 18–25 %.

Dále se podívejme na čas potřebný pro řešení úlohy. Z obr. 5.2.2 je zřejmé, že je situace ve všech třídách podobná, rozdíl je maximálně 3 minuty. Aby se vyloučila možnost, že se ve třídě mohli vyskytovat žáci, kteří úlohu odmítli řešit, nebo zahraniční studenti bez srovnatelného vzdělání atd., byl graf doplněn také o průměrné časy úspěšných řešitelů. To, že žáci vyřeší úlohu stejně rychle bez rozdílu věku, by mohlo být způsobeno jejím charakterem (kdy je řešení při dobrém vhledu vidět na první pohled). Doba řešení úlohy by mohla být ovlivněna také v případě, kdyby někteří žáci tipovali své výsledky či prostě jen sečetli jediná dvě čísla, která v zadání našli,[51] aniž by věděli proč. Na základě analýzy řešení jednotlivých žáků vyplývá, že k takovému jevu došlo jen minimálně. Žáci své výsledky většinou písemně vysvětlili, což po nich úloha vyžadovala. Závěry šetření by samozřejmě mohlo ovlivnit

[50] Podle třídního učitele se jedná o výjimečně šikovnou třídu.

[51] A tak došli ke správnému výsledku.

i opisování žáků sedících vedle sebe. Jsem ale přesvědčena, že k tomu nedocházelo, alespoň ne v hojné míře, a vzorek studentů v jednotlivých třídách byl dost velký na to, aby nebyl výsledek šetření výrazně ovlivněn.



Obr. 5.2.2 Průměrný čas řešení úlohy 2 po třídách

Co se týče absolutní doby potřebné k vyřešení úlohy, u většiny tříd jsou viditelné dvě hlavní skupiny úspěšných řešitelů. První skupina vyřešila úlohu během několika minut. Jedná se o ty žáky, kteří nepoužili žádné početní strategie a při pohledu na obrázek rychle viděli správné řešení. Do druhé skupiny úspěšných řešitelů patří ti, kteří se pokusili nejprve o výpočetní řešení, když selhalo, přešli k řešení pomocí obrázku. Zatímco u mladších tříd jsou tyto dvě skupiny žáků na časové ose výrazně vzdálené, u G.VI.A tyto dvě skupiny téměř splývají. Důvodem může být, že jsou tito žáci rychlejší v početních úkonech a také rychleji zjistí, že pro potřebné výpočty nemají dostatek informací, a začnou dříve hledat jiné řešení. Nutno ještě podotknout, že u žáků G.IV.A se objevuje ještě jedna výrazná skupina žáků, kteří na vyřešení úlohy potřebovali poměrně hodně času, jelikož zvolili časově náročnou strategii. Tito žáci si zadání přesně přerýsovali, aby se nejednalo o náčrtek, a poté hledanou úsečku přeměřili. (Viz také oddíl 5.2.4.)

5.2.4 Geometrické vs. výpočtové přístupy k řešení

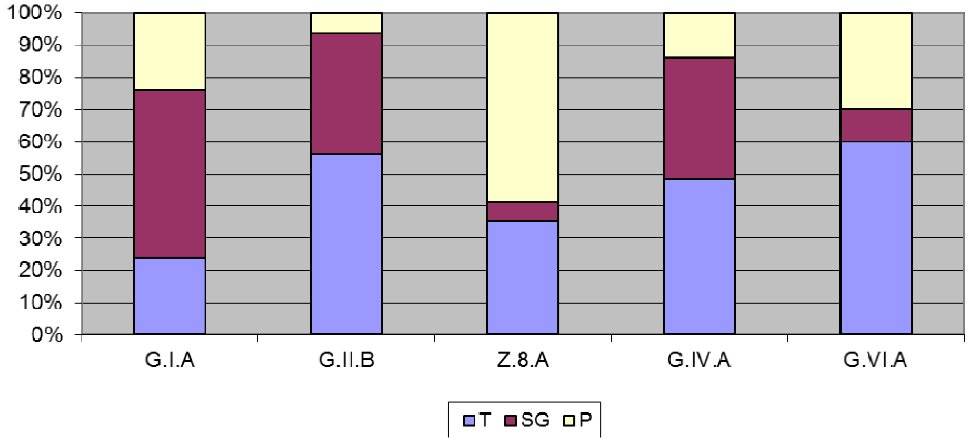
Nyní se podíváme na to, jaké strategické kroky se v řešení žáků nacházejí, a to bez ohledu na úspěšnost jejich řešení. Jejich četnost ukazuje tab. 5.2.2. Kroky jsou rozděleny na geometrické (T a SG) a výpočetní (P). V případě geometrických jsem odlišila ty, které ukazují, že žák pracuje spíše v T prostoru (tedy využívá teoretické vlastnosti útvarů, v tomto případě obdélníku a kružnice), a ty, které poukazují spíše na práci v SG prostoru. Podrobněji jsou jednotlivé jevy vysvětleny v dalším textu.

Tab. 5.2.2 Četnost strategických kroků u úlohy 2

	T	SG					P		
	Využití obrázku v T prostoru	Manipulace s obrázkem	Porovnávání délek úseček	Přerýsování zadání	Dokreslování obrazců dovnitř i vně kružnice	Zjišťování délek úseček	Používání vzorců	Pythagorova věta - dvě čísla	Žák sčítá jediná dvě čísla, která má k dispozici
G.I.A	5	0	10	0	1	0	3	0	2
G.II.B	9	0	4	0	2	0	1	0	0
Z.8.A	6	0	1	0	0	0	7	3	0
G.IV.A	14	0	1	10	0	0	4	0	0
G.VI.A	18	1	0	0	0	2	9	0	0

Pro znázornění výsledků jsem zjistila pro každou třídu celkový počet jevů, které se v jejich řešení objevily. Na obr. 5.2.3 je graficky ukázáno, jaké procento jevů v dané třídě patří do geometrického způsobu řešení s rozlišením na T prostor a SG prostor a jaké procento patří do výpočetního způsobu řešení.

Výrazné zastoupení geometrického řešení u žáků G.IV.A je zejména dáno již výše zmíněnou strategií – žáci si obrázek přerýsovali a pak úsečku změřili. Jedná se sice o geometrické řešení, ovšem ne z T prostoru, jako mnou očekávané řešení, ale z SG prostoru. (O možných důvodech spekuluji níže.) Podobnou roli hrál ve třídě G.I.A jev *Porovnávání délek úseček*. Ve třídě Z.8.A je výrazné zastoupení výpočetních jevů. Úspěšnost v této třídě byla asi 60 %, tedy toto procento žáků využilo geometrického způsobu řešení v T prostoru, ovšem i v řešeních těchto žáků se objevily pokusy úlohu řešit nejdříve výpočetně. Když vynecháme třídu základní školy a vezmeme v úvahu, že třída G.II.B je podle učitele „neobvykle šikovná“, lze u žáků gymnázia vysledovat vzestupnou tendenci využívání geometrického způsobu řešení v T prostoru.



Obr. 5.2.3 Procentuální zastoupení geometrických strategických kroků v T i SG prostoru a výpočetních kroků (P)

Nyní se podíváme na podrobnější popis jednotlivých jevů a jejich ilustrace.

Využití obrázku v T prostoru

Tento krok představuje vlastně celou strategii řešení – zde žák rozeznal v obrázku obdélník a uvědomil si, že úsečka, jejíž délku hledáme, je současně úhlopříčkou obdélníku a poloměrem kružnice.

Manipulace s obrázkem (SG prostor)

Fyzická (reálná) manipulace se v žákovských řešeních podle mých očekávání neobjevila. I v rozhovorech v první fázi hlavní studie byla použita pouze v případě, kdy žák slovně dokazoval své řešení, které nedovedl jinak vysvětlit.

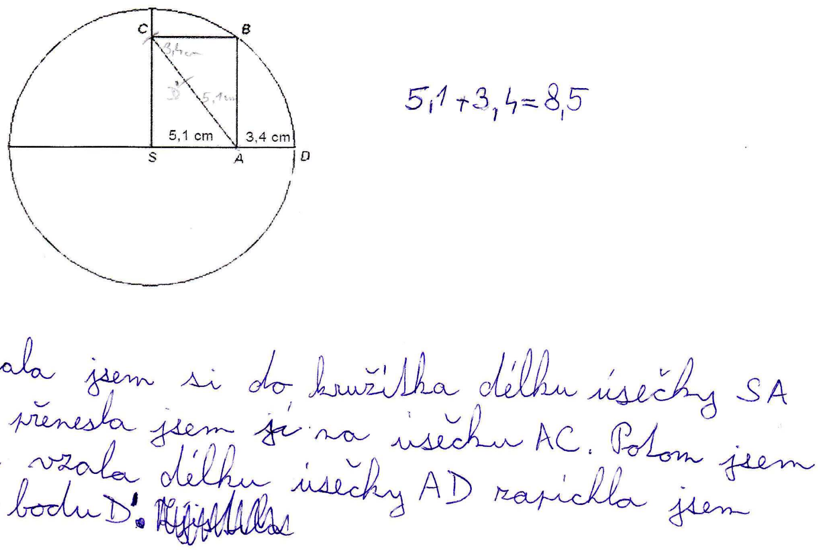
Mentální manipulace se objevila pouze jednou u žáka G.VI.A, kdy žák popsal v písemné odpovědi otočení úsečky *SD* kolem středu *S* do polohy úsečky *SB*, a tím dokázal, že jsou tyto úsečky stejně dlouhé. Není možné ale tvrdit, že se u ostatních žáků mentální manipulace neobjevila. Zejména mladší žáci měli často velké problémy s písemným popisem svých řešení, a mentální manipulace se popisuje poměrně složitě.

Porovnávání délek úseček (SG prostor)

Tento jev se alespoň v jednom případě objevil ve všech ročnících kromě G.VI.A. Nejednalo se o odhad délek stran, nýbrž o poměřování délek jednotlivých úseček. Tak žáci došli k závěru, že úsečky *AC* a *SD* jsou stejně dlouhé. K poměřování nejčastěji využívali kružítko, ale objevovali se i žáci, kteří si vystačili s papírkem či tužkou, na které si vyznačili čárkou hledanou délku. Tuto metodu ve větším počtu využili žáci G.I.A (deset žáků) a G.II.B (čtyři žáci) : „… Nakonec jsem si udělala rýhy na tužce jak je dlouhá *SA* a přibližně jsem zjistila že

SA = *CA*.“ (žákyně z G.I.A) „Vzala jsem si kus papíru a ustřihla, aby byl dlouhý jako úsečka *SD*. Úsečka *SD* má stejnou délku jako úsečka *AC*.“ (žákyně z G.I.A) „Do kružítka jsem si vzal velikost úsečky *SD*, tu jsem poté přiložil na *AC* a jelikož to bylo výše, předpokládám 8,4 cm.“ (žák z G.I.A) apod. Nemám vysvětlení, proč právě v této třídě se tento jev objevil.

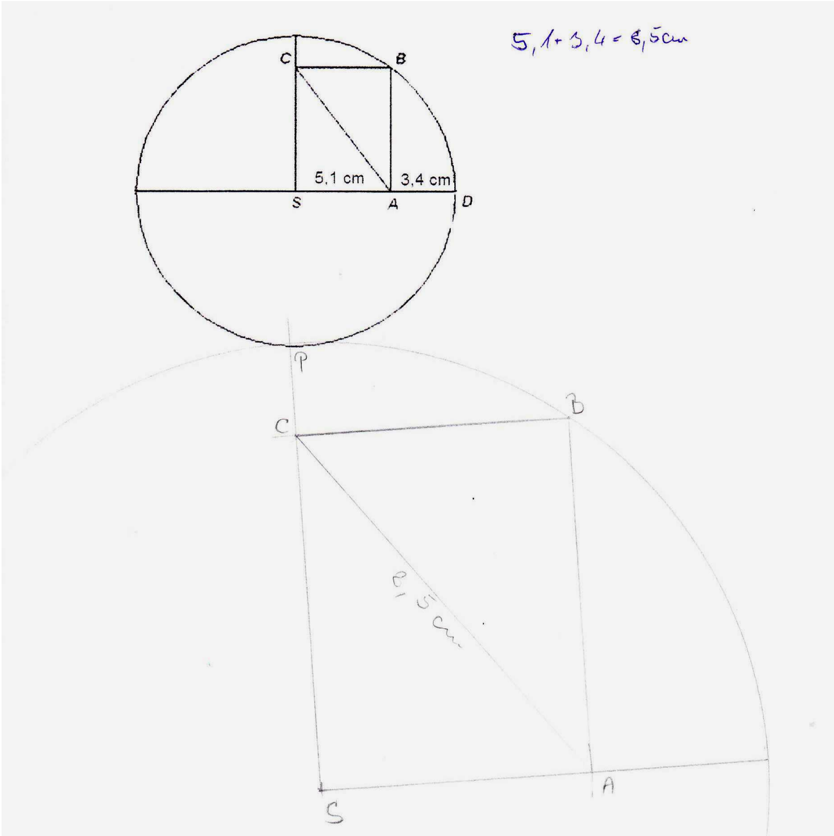
Zajímavostí jsou práce dvou žákyň 1. ročníku gymnázia, které na úhlopříčku *AC* nepřenesly celou úsečku *SD* (poloměr kružnice), ale každou z jejích dvou částí zvlášť (úsečku *SA* a úsečku *AD*) tak, jak znázorňuje obr. 5.2.4.



Obr. 5.2.4 Řešení úlohy 2 pomocí porovnávání délek úseček, žákyně G.I.A

Přerýsování zadání (SG prostor)

Někteří žáci si zadání přerýsovali do pracovního listu tak, aby délky úseček odpovídaly hodnotám uvedeným v zadání, a pak hledanou úsečku přeměřili (viz obr. 5.2.5). Pohybovali se tedy stále v SG prostoru. Tento jev se ale objevil pouze u jediné třídy, kde ho použilo hned deset žáků. To mohlo být způsobeno i tím, že právě v hodinách matematiky probírali geometrii. Nejenže je tedy takové řešení napadlo, ale dokonce pro jeho realizaci měli veškeré potřebné pomůcky. Také je dost možné, že používání rýsovacích pomůcek u jednoho žáka inspirovalo i ostatní žáky.

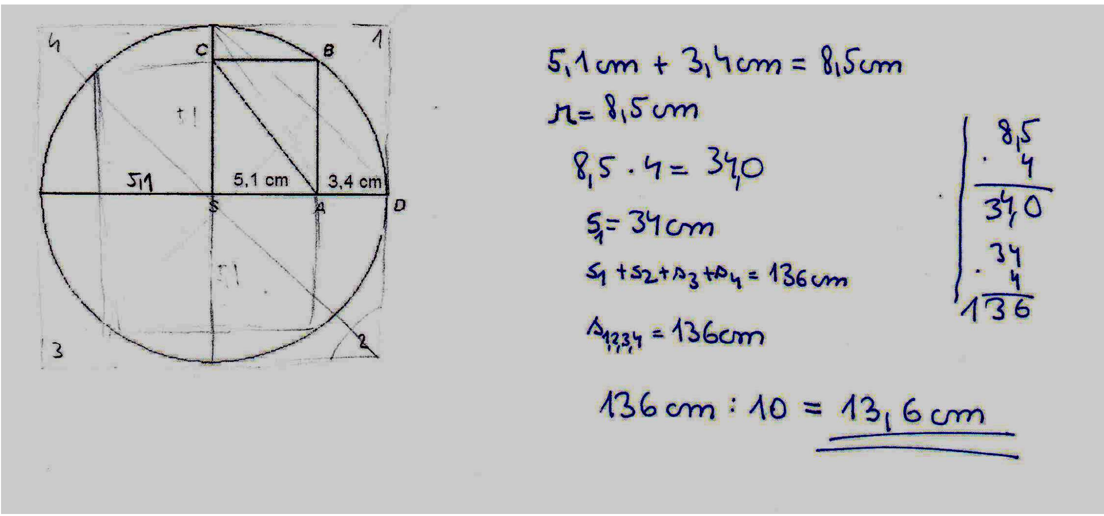


Obr. 5.2.5 Řešení úlohy 2 pomocí přerýsování zadání, žák G.IV.A

Dokreslování obrazců dovnitř i vně kružnice (SG prostor, potenciálně T prostor)

Tento jev se neobjevil pouze u žákyně, jejíž postup je na obr. 5.2.6, ale ještě u její spolužačky a u jedné žákyně z G.I.A. V první fázi hlavní studie se tento jev objevoval častěji, a to u žáků, kteří si s úlohou nevěděli rady a vkreslováním pravoúhlých obrazců chtěli najít nějaké geometrické tvary, jejichž vlastnosti znali.

Žákyně, jejíž řešení je na obr. 5.2.6, vepsala jeden čtverec do kružnice a jeden čtverec naopak vně kružnice. Do obrázku také znázornila úhlopříčky těchto čtverců. Nakonec se ale rozhodla pro početní řešení. Ve svém obrázku uviděla čtyři shodné čtverce, jejichž strana představovala poloměr kružnice. Tento poloměr ještě spočítala správně, ale potom si popletla výpočet obsahu a obvodu čtverce. Výsledek vynásobila čtyřmi, jelikož je obrázek složen ze čtyř takových čtverců. Bohužel se mi nepodařilo zjistit, proč výsledek vydělila deseti. Žákyni jsem později vyhledala, ale ani ona sama mi už nedokázala odpovědět.



Obr. 5.2.6 Dokreslování obrazců u úlohy 2, žákyně G.II.B

Zjišťování délek úseček (SG prostor)

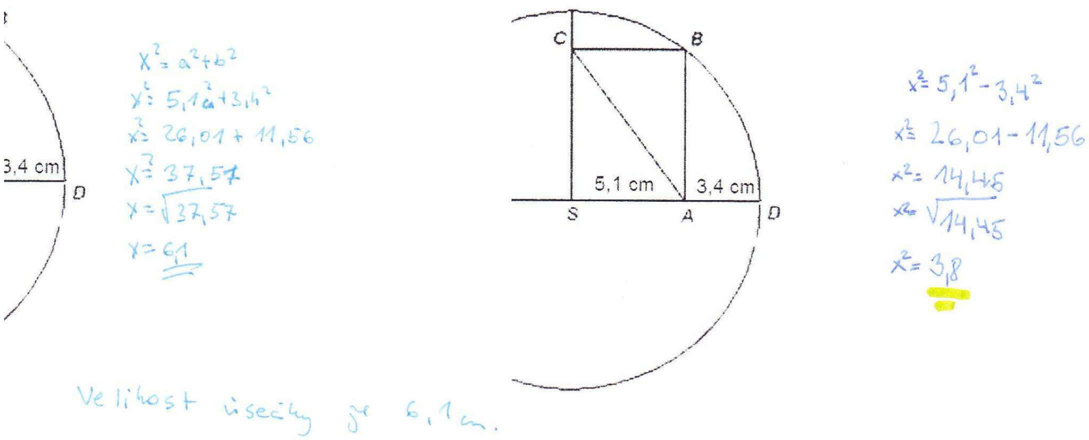
Zjišťování délek úseček se hojně objevovalo v první fázi hlavní studie, kdy zejména žáci základní školy pravítky přeměřovali jednotlivé úsečky (strany geometrických obrazců) v obrázcích v zadání úloh, a to u úlohy 1 a 3. U úlohy 2 se o to nepokusil nikdo. Ve druhé fázi hlavní studie se zjišťování délek úseček objevilo pouze dvakrát. Zajímavé ovšem je, že v obou případech šlo o žáky G.VI.A, tedy nejstarší žáky. Nejednalo se o přeměřování úseček pravítkem, nýbrž o odhad délky neznámé strany obdélníku. Žáci usoudili, že strana *SC* je stejně dlouhá jako součet délky strany *SA* a poloviny délky úsečky *AD*. Tak zjistili, že délka strany *SC* je 6,8 cm. Úlohu pak řešili početně pomocí Pythagorovy věty a dospěli samozřejmě ke špatnému výsledku.

Používání vzorců

V žákovských řešeních se nejčastěji objevoval vzorec na výpočet přepony trojúhelníku pomocí Pythagorovy věty. U mladších žáků byl ale častý i vzorec na výpočet obsahu obdélníku. V obou případech jim to mohlo připadat logické, protože v obrázku se objevoval pravoúhlý trojúhelník, resp. obdélník, a číselné údaje. Záhy ale většina žáků zjistila, že pro takové výpočty nezná potřebné délky úseček, a přešla k jiné strategii řešení. Ve výpočtech pak pokračovali pouze ti žáci, kteří si délky těchto úseček zjistili (odhadem, viz výše) či použili ještě některý další špatný předpoklad (viz níže).

Pythagorova věta – dvě čísla

Dvě žákyně a jeden žák 8. ročníku základní školy použili znalosti Pythagorovy věty, a to tak, že jediná dvě čísla, která vyčetli ze zadání, dosadili do vzorce (viz obr. 5.2.7). Jedna žákyně použila větu na výpočet délky odvěsny trojúhelníky, druhá žákyně a žák počítali délku přepony. Jednalo se o výrazně formální (Hejný, Kuřina, 2001) využití této věty, bez porozumění.



Obr. 5.2.7 Formální využití Pythagorovy věty u úlohy 2, žákyně 8. ročník

Některé další jevy z žákovských řešeních

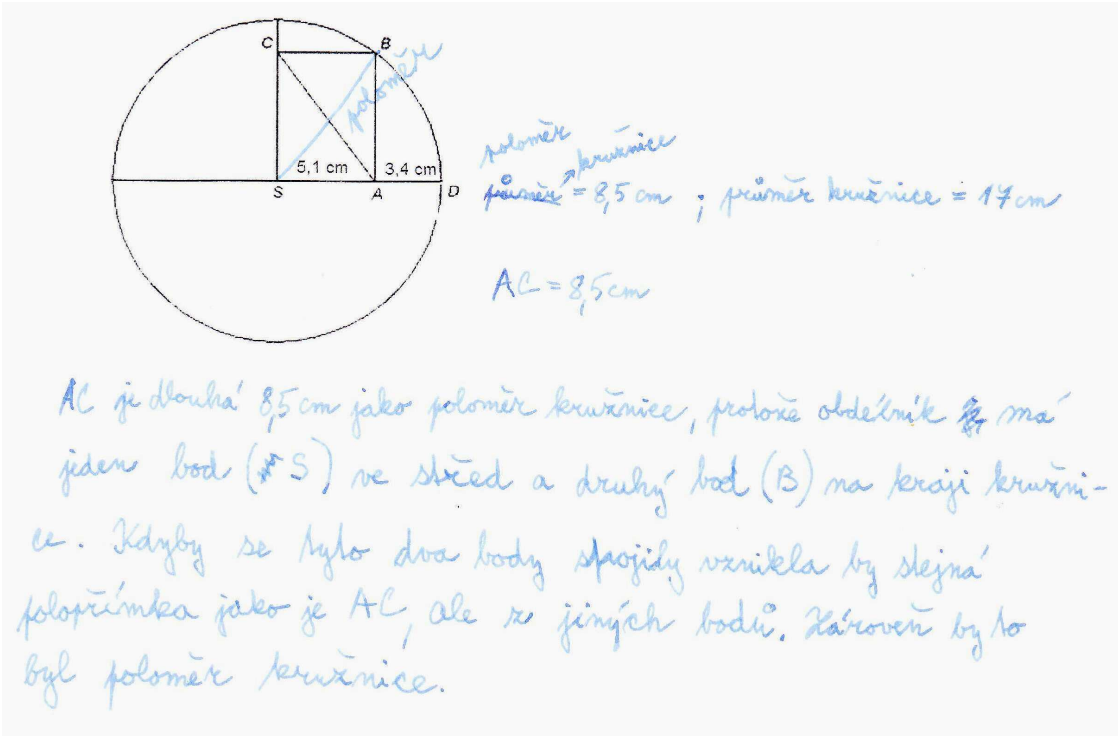
Závěrem této části zmíním pro úplnost další jevy, jejichž výskyt jsem v žákovských řešeních zaznamenala a které nelze zařadit jednoznačně mezi geometrické či výpočetní kroky.

Žák sčítá jediná dvě čísla, která má k dispozici.

Tímto způsobem řešili úlohu dva žáci z G.I.A. Dokonce svá řešení zdůvodnili v písemných odpovědích: „Napadlo mě to, tipnul jsem si to. Přišlo mi to logické, protože jsou to jediné údaje, které vím.“ „Přišel jsem na to tak, že jsem si řekl, proč tam je ta úsečka *AD*, tak jsem ji sečetl s délkou *SA*.“ Žáci se ani nesnažili úlohu uchopit a přistoupili k jejímu řešení formálně.

Žák navíc počítá i průměr

Tento jev se objevuje zejména u mladších žáků – u dvou žáků G.I.A a tří žáků G.II.B. Ti správně určí velikost poloměru kružnice a pak pro úplnost dopočítají a zapíší i velikost jejího průměru, i když tento údaj ve svém řešení nepotřebují (viz obr. 5.2.8).



Obr. 5.2.8 Řešení úlohy 2, dopočítání průměru, žák z G.I.A

Špatná odpověď díky nepozornosti

Tento jev se objevil pouze dvakrát. Jednou tomu bylo u žákyně G.II.B, která napsala chybnou písemnou odpověď, i když její zápis řešení byl správný. Ve druhém případě žákyně z G.I.A omylem v odpovědi zaměnila název hledané úsečky.

Nesprávné použití termínů

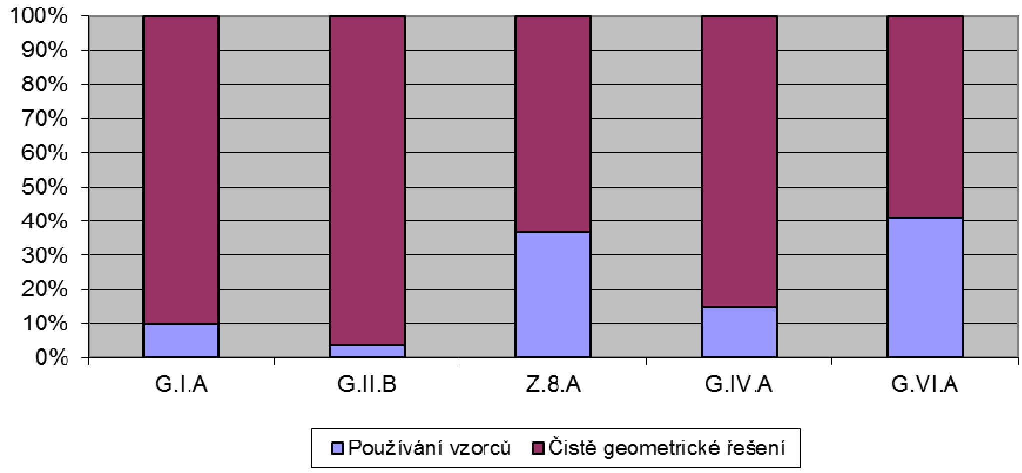
Při komunikaci s žáky v první fázi hlavní studie jsem evidovala výrazné nedostatky v terminologii. V písemném projevu v pracovním listě se tento jev ale objevil minimálně. Například: „Nejprve jsem zkusil porovnat vzdálenost úsečky *AC*…“ (žák z G.IV.A, měl na mysli délku úsečky) „8,5 cm protože je to *průměr* kružnice.“ (žák z G.IV.A, měl na mysli poloměr) „Vypočítala jsem *průměr* kružnice“ (žákyně z G.II.B, měla na mysli poloměr kružnice) „*Poloměr obdélníku* je roven poloměru kružnice.“ (žák z G.II.B) „Kdyby se tyto dva body spojily vznikla by stejná *polopřímka* jako je AC, ale z jiných bodů.“ (žák z G.I.A, měl na mysli úsečku) apod.

Chybný předpoklad

Chybný předpoklad se objevil u sedmi žáků z G.I.A, u jednoho žáka z G.II.B a překvapivě i u dvou žáků G.VI.A. Šlo o situaci, kdy žák získal špatný výsledek na základě špatného předpokladu, tj. vyvodil si z obrázku chybnou informaci; např. považoval vepsaný obdélník za čtverec, špatně odvodil vztah mezi jednotlivými úsečkami, tvrdil, že úhlopříčka je přibližně stejně dlouhá jako delší strana či že je dvakrát delší než kratší strana apod.

Snaha o používání vzorců

Další hledisko, které jsem v řešení žáků sledovala, se týkalo toho, zda žáci někdy v průběhu své práce používali vzorce (bez ohledu na jejich úspěšnost). To ukazuje obr. 5.2.9; procenta jsou vztažena k celkovému počtu žáků ve třídě. Převažují čistě geometrické způsoby řešení. Významnější procento žáků, kteří se snažili vzorce využít, jsem zaznamenala pouze u žáků základní školy Z.8.A a třídy G.VI.A.



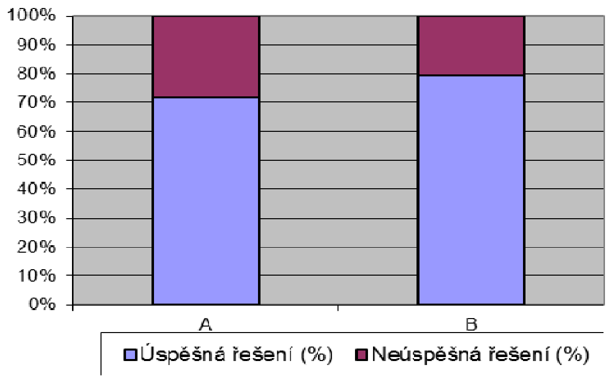
Obr. 5.2.9 Používání vzorců v průběhu řešení úlohy 2

5.2.5 Porovnání řešitelských strategií u mladších a starších žáků

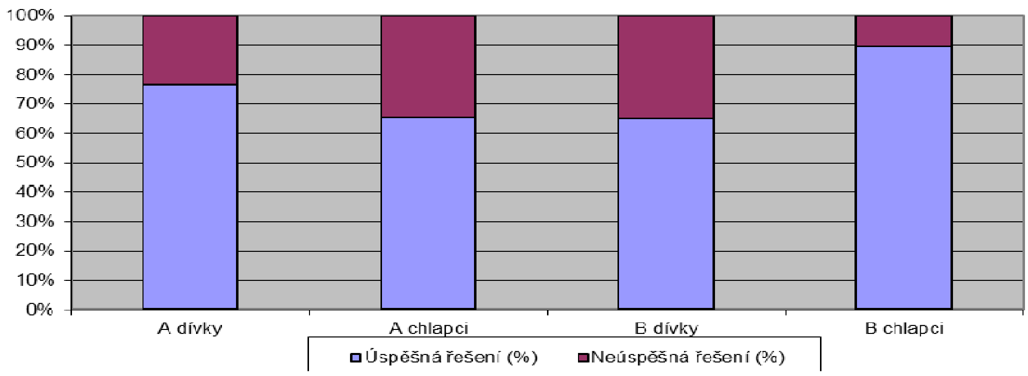
Pro porovnání řešitelských strategií vzhledem k věku žáků jsem vytvořila dvě skupiny žáků. Skupina A zahrnuje žáky G.I.A a G.II.A a skupina B žáky G.IV.A a G.VI.A (třídu Z.8.A z tohoto porovnání vynechávám; jednak se vymyká tím, že se nejedná o gymnázium, a jednak jsem chtěla, aby mezi oběma skupinami byl větší věkový rozdíl).

Poznámka: Pro zhodnocení významnosti rozdílů mezi skupinami žáků jsem zde i v oddíle 5.3.9 použila Pearsonovu veličinu chí-kvadrát pro kontingenční tabulky. Pomocí nich jsem zjišťovala s pravděpodobností chyby do 5 %, zda můžeme zamítnout nezávislost charakteristik řešitelských procesů na tom, z jaké skupiny pochází. Stručně řečeno, zjišťovala jsem, zda jsou rozdíly mezi charakteristikami obou skupin statisticky významné.

Podobně jako obr. 5.2.1 ukazují obr. 5.2.10, resp. obr. 5.2.11 úspěšnost řešení úlohy 2, tentokrát však pro skupiny A a B, resp. pro dívky a chlapce. Jak je vidět, starší žáci jsou jen zhruba o 9 % úspěšnější než mladší žáci a pro dívky a chlapce je situace dokonce zcela opačná u obou skupin. U mladších žáků byly úspěšnější dívky a u starších žáků zase chlapci, a to významně. U dívek skupiny B to může být dáno tím, že se významněji než chlapci snažily používat výpočetní řešení (viz obr. 5.2.13).



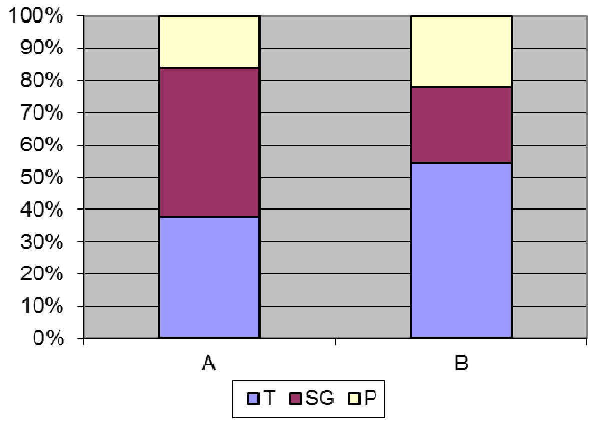
Obr. 5.2.10 Úspěšnost řešení úlohy 2 pro skupinu mladších a starších žáků



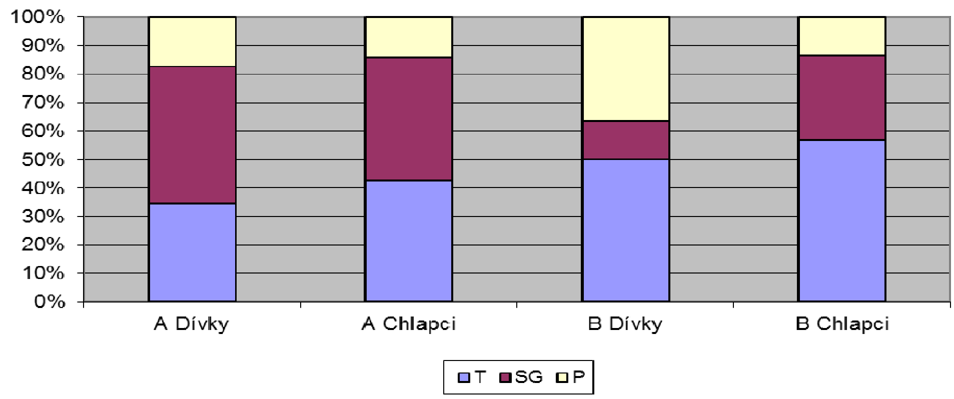
Obr. 5.2.11 Jako obr. 5.2.10 s rozdělením na dívky a chlapce

Paralelou k obr. 5.2.3 je obr. 5.2.12, který ukazuje procentuální zastoupení geometrických strategických kroků v T i SG prostoru a výpočetních kroků u obou zkoumaných skupin žáků. Obr. 5.2.13 ukazuje totéž pro skupiny dívek a chlapců.

Lze říci, že s věkem stoupá významně zastoupení T geometrických řešení a snižuje se práce v SG prostoru. Vyšší zastoupení výpočetních jevů u skupiny B není významné. U dívek a chlapců pozorujeme významný rozdíl jen u zastoupení výpočetního řešení u dívek ve skupině B, ve skupině A je však situace srovnatelná pro dívky a chlapce. Chlapci mají v každé skupině mírně větší tendenci k T geometrickému řešení.



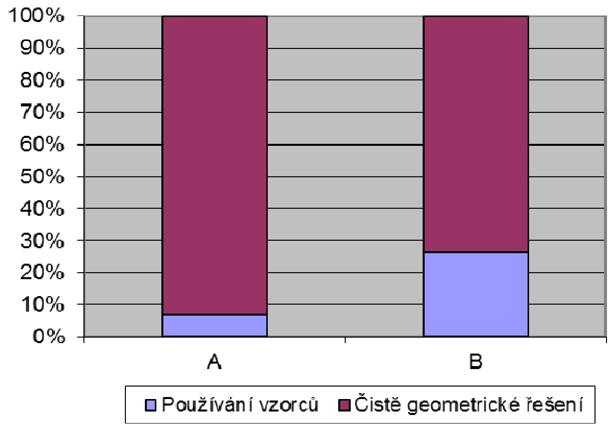
Obr. 5.2.12 Procentuální zastoupení geometrických strategických kroků v T i SG prostoru a výpočetních kroků pro mladší a starší žáky



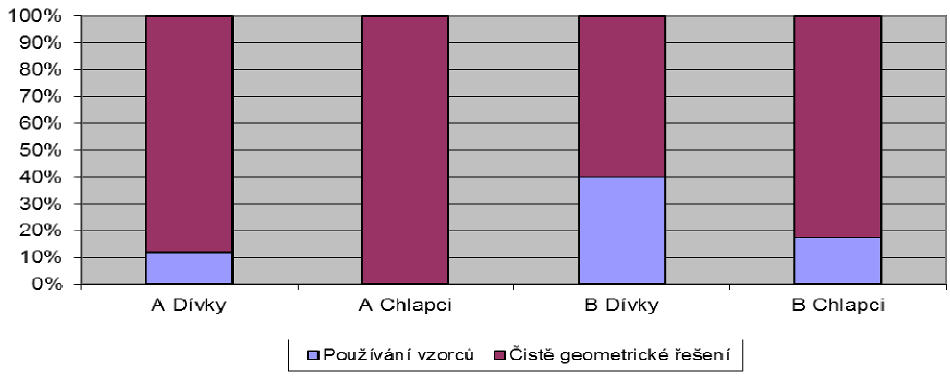
Obr. 5.2.13 Jako obr. 5.2.12 s rozdělením na dívky a chlapce

Co se týče snahy žáků využít někdy v průběhu řešení vzorce, situaci ukazuje obr. 5.2.14 a obr. 5.2.15, který obsahuje údaje pro dívky a chlapce. Rozdíl mezi skupinami mladších a starších žáků je významný, což potvrdila i kontingenční tabulka. Starší žáci mají větší tendenci řešit úlohu pomocí vzorců. Jejich celková úspěšnost v řešení je však o 9 % vyšší než u mladších žáků. Je tedy vidět, že se dovedou z neúspěšného výpočetního řešení poučit a přecházejí ke geometrickému řešení.

Na používání vzorců se ve skupině A podílejí jen dívky (a to jen asi 11 %), je zajímavé, že chlapci se vzorce nepokoušeli používat. Celkově jsou však v řešení dívky úspěšnější než chlapci. Dívky ze skupiny B prokazují výrazně četnější použití vzorců a nakonec jsou také výrazně méně úspěšné než chlapci a dokonce méně úspěšné než mladší dívky!



Obr. 5.2.14 Používání vzorců v průběhu řešení úlohy 2 u skupin mladších a starších žáků



Obr. 5.2.15 Jako obr. 5.2.14 s rozdělením na dívky a chlapce

5.3 Třetí fáze hlavní studie – písemná forma s možností nápověd

Ve třetí fázi hlavní studie jsem se zaměřila na úlohy 1 a 3,[52] které popisuji v oddíle 5.1.1. Tato fáze představuje z metodologického hlediska kompromis mezi individuálními rozhovory se žáky (které přinesou hodně informací o řešitelských postupech žáků, ale málo dat) a mezi písemnými řešeními žáků (které přinesou hodně dat, ale méně podrobností o tom, jak žák uvažoval).

Opět jsem se zaměřila na výzkumné otázky z oddílu 2.3, přičemž byl důraz položen zejména na třetí otázku – změnu strategií s věkem.

[52] Úlohu, která byla v této fázi výzkumu použita jako v pořadí druhá, budu stále nazývat úlohou 3, aby byla zachována kontinuita v celé hlavní studii.

5.3.1 Průběh třetí fáze hlavní studie

Experiment probíhal na jedné základní škole[53] a na jednom osmiletém gymnáziu[54] v lednu 2012; zúčastnilo se ho celkem 130 žáků (64 dívek a 66 chlapců, viz tab. 5.3.1). Někteří žáci se věnovali pouze úloze 1, a tak je počet žáků pro úlohu 3 o něco nižší. Tentokrát byly pokryty všechny ročníky druhého stupně základní školy a střední školy.

Tab. 5.3.1 Počty žáků třetí fáze hlavní studie v jednotlivých ročnících

		6. roč.	**7. roč.**	**8. roč.**	**9. roč.**	**G.V.A**	**G.VI.A**	**G.VII.A**	**G.VIII**	**Celkem**
Úloha 1	**Žáků**	**17**	**19**	**27**	**16**	**11**	**12**	**11**	**17**	**130**
	Dívek	5	9	10	11	6	8	4	11	**64**
	Chlapců	12	10	17	5	5	4	7	6	**66**
Úloha 3	**Žáků**	**15**	**19**	**15**	**14**	**11**	**12**	**11**	**16**	**113**
	Dívek	5	9	7	9	6	8	4	10	**58**
	Chlapců	10	10	8	5	5	4	7	6	**55**

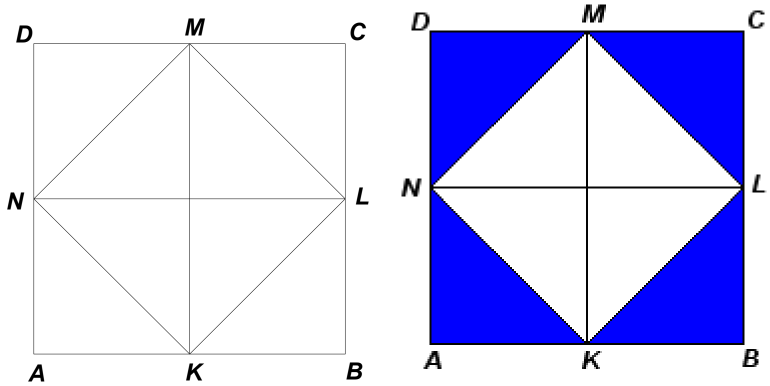
V této fázi hlavní studie jsem postupovala podle stejného schématu jako v první fázi (viz obr. 5.1.1). Přítomna jsem byla já a moje pomocnice, jejímž úkolem bylo pomáhat mi s organizací práce.

Žáci byli na začátku seznámeni s celým průběhem práce, takže věděli o tom, že dostanou po sobě dvě úlohy a že na každé z nich mohou pracovat tak dlouho, jak budou potřebovat. Dále se dozvěděli o možnosti nápověd, pro které si mohou dojít v případě, že si s úlohou nebudou vědět rady. Informovala jsem je o možnosti, že i v případě správného vyřešení úlohy je mohu poprosit o další řešení, případně jim poskytnout nápovědu, která by je k novému způsobu řešení mohla dovést. Tuto informaci jsem zdůraznila proto, aby si žáci o sobě samých ani o sobě navzájem nemohli myslet, že neuspěli, a abych se vyhnula strachu z neúspěchu či jejich vzájemnému posměchu. Musím ale podotknout, že to nebylo potřeba a že si žáci nevšímali svých spolužáků tolik, jak jsem očekávala. Vysvětlování pravidel práce netrvalo déle než deset minut.

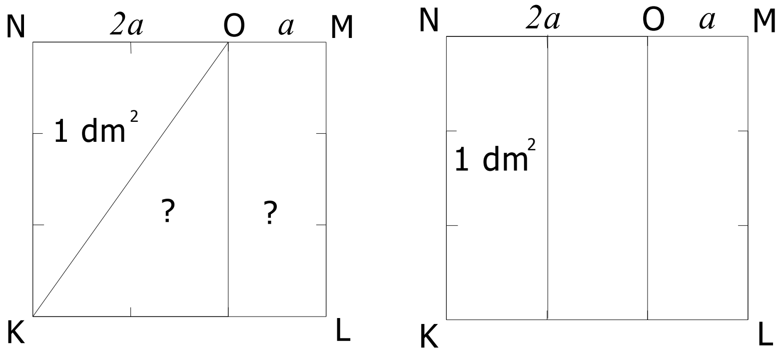
Nápovědy dostávali žáci pouze pomocí předem připravených obrázků, nikoli slovně. V této fázi hlavní studie jsem omezila množství možných nápověd podle výsledků první fáze hlavní studie. Konkrétně jsem využila nápovědy N1b a N2a pro první úlohu (viz obr. 5.3.1) a nápovědy N2 a N3 pro třetí úlohu (viz obr. 5.3.2).

[53] Základní škola Aš, Hlávkova 26, Aš.

[54] Gymnázium J. G. Jarkovského, Truhlářská 22, Praha 1.



Obr. 5.3.1 Nápovědy k úloze 1 – N1b, N2a



Obr. 5.3.2 Nápovědy k úloze 3 – N2, N3

Pokud měl žák informace, které obsahovala první nápověda, již vyznačeny v pracovním listě, předložila jsem mu rovnou druhou nápovědu.

V 7. ročníku, kde jsem úlohy zadávala jako v první ze zkoumaných tříd, jsem pravděpodobně nedostatečně vysvětlila způsob podávání nápověd. Žáci sice o jejich možnosti věděli, ale jakoby se báli o ně požádat. To se ukázalo hned při první úloze, se kterou se všichni dlouze trápili až do doby, kdy se jedna žákyně zvedla a úlohu chtěla odevzdat. V ten moment se zvedl i zbytek třídy a hromadně mi začali svá řešení skládat na stůl. Musela jsem jim znovu vysvětlit, že si mohou říci o nápovědu a že je lepší vyřešit úlohu s pomocí, než odevzdat prázdný papír. Rozdala jsem pracovní listy zpět a žáci si začali chodit pro nápovědy. U druhé úlohy již vše probíhalo tak, jak jsem plánovala.

Další problém jsem shledala v počtu žáků ve třídě. Nestíhala jsem podávat nápovědy tak rychle, jak to situace vyžadovala, i když jsem měla při výzkumu pomocnici. Ta ale měla na starost pouze dohled nad žáky z hlediska chování, případně dohlédla na to, aby žáci spolu nespolupracovali. V ten den jsem zadávala úlohy ještě v 8. ročníku. Na další den jsem se domluvila s ředitelem školy a vyučujícím, že si ve třídě ponechám jen část žáků, abych byla schopna experiment provést, takže v 6. a 9. ročníku byl průběh práce mnohem poklidnější. Aby byl přítomen jen omezený počet žáků i na gymnáziu a zároveň aby se jednalo o běžný vzorek žáků (tedy žáci nebyli zvlášť vybíráni), využila jsem k provedení studie vyučovací hodiny jazyků.[55]

Do pracovních listů žáků jsem si již v průběhu experimentu vpisovala poznámky, když si žáci přišli pro nápovědu či odevzdat svá řešení. Nejenže jsem si poznamenala, kdy a jakou nápovědu jsem žákovi podala, ale také jsem si někdy musela svými slovy popsat způsob jejich řešení, který jsem si nechala vysvětlit. Očekávala jsem, že zejména mladší žáci základní školy nebudou umět svá tvrzení písemně popsat tak, abych jim později při analýze jejich práce rozuměla.

5.3.2 Způsob analýzy třetí fáze hlavní studie

Podobně jako v druhé fázi hlavní studie jsem v pracovních listech žáků vyhledávala kroky řešitelských strategií a různé jevy, které jsem identifikovala v první a druhé fázi. V tom mi hodně pomohly poznámky, které jsem si do pracovních listů vpisovala (viz výše). Z kroků jsem následně vytvořila jednotlivé řešitelské strategie. Vše jsem zapisovala do tabulek.

Pro každou třídu a každou úlohu jsem vytvořila tabulku, kde jsem ke každému žákovi zapisovala informace, zda úlohu vyřešil či nikoliv, které nápovědy dostal, a dále mu přiřazovala jevy a kroky řešitelských strategií. Dále jsem vytvořila souhrnné tabulky pro jednotlivé úlohy tak, abych měla přehled, jak hojně se jednotlivé strategie a jevy objevují v jednotlivých ročnících, jak žáci využívali nápovědy v jednotlivých ročnících či jaká je úspěšnost při řešení úloh v těchto ročnících.

Výsledky analýzy budou pro přehlednost prezentovány takto: kroky řešitelských strategií, řešitelské strategie potenciálně vedoucí k úspěšnému vyřešení úloh, četnost úspěšně použitých strategií, neúspěšné strategie řešení a různé jevy chybovosti.

Poznámka: Podobně jako v oddíle 5.2 i zde jsou některé výsledky analýzy uvedeny formou grafu. Příslušné tabulky, z nichž grafy vznikly, jsou v příloze 6 a jsou rozděleny do oddílů stejně jako zde v textu.

[55] Jednalo se o tzv. výběrové jazyky, kde žáci nejsou rozděleni do skupin podle schopností, ale podle zvoleného jazyku.

5.3.3 Kroky řešitelských strategií

Již v předchozích fázích výzkumu se ukázalo, že některé kroky patří spíše ke geometrickým strategiím, jiné k výpočetním a další mohou patřit k oběma typům. (Ty jevy, které byly chybné a nevedly žáky ke správnému řešení, budou popsány zvlášť v oddíle 5.3.8.)

Kroky řešitelských strategií, které vedou ke geometrickému řešení

V úlohách se objevují dva hlavní kroky geometrických strategií – *Manipulace* (SG prostor) a *Využití obrázku* (T prostor). Tyto kroky se v obou úlohách liší a zahrnují různé jevy, jež se objevily v žákovských pracích.

V úloze 1 žáci manipulovali nejčastěji s jednotlivými trojúhelníky, které získali pomocí úhlopříček čtverce *KLMN*. V jiném případě přehýbali obrázek. V úloze 3 se manipulace projevila v posouvání úsečky *KO* do bodu *M*. V některých případech žáci posunuli společně s úsečkou i celý trojúhelník *KON*.

Využití obrázku se v úloze 1 projevovalo tak, že žáci po doplnění úhlopříček čtverce *KLMN* rozeznali čtyři shodné čtverce o délce strany, která byla shodná s polovinou délky strany čtverce *ABCD*, nebo dokonce jejich shodné „protější“ trojúhelníky, kdy jeden ležel uvnitř čtverce *KLMN* a druhý vně. Jiní žáci si uvědomili, že je obrázek složen z osmi shodných trojúhelníků. V úloze 3 si žáci rozdělovali obrázek na menší útvary. V některých případech vedl tento krok jen k částečnému vyřešení úlohy.

Kroky řešitelských strategií, které vedou k výpočetním strategiím

Některé z kroků, které žáky vedly k výpočetním strategiím, jsem zaznamenala již v první fázi hlavní studie. Jiné jsem doplnila až ve fázi třetí. Přehledně jsou shrnuty v tab. 5.3.2.

Tab. 5.3.2 Kroky výpočetních řešitelských strategií v úloze 1 a 3

Úloha 1	Úloha 3
- Zjišťuje délky úseček	- Zjišťuje délky úseček
- Počítá	- Počítá
- Používá vzorce	- Používá vzorce
- Dosazuje za neznámou	- Převádí jednotky
- Používá parametr	- Používá parametr
- Využívá Pythagorovu větu	- Vyjadřuje *a*
- Dopočítává strany pomocí funkce sinus /cosinus	- Používá trojčlenku

V obou úlohách se často objevoval strategický krok, ve kterém žáci *zjišťovali délky úseček*. Jednalo se o mladší žáky na základní škole. Ti potřebovali znát délky stran obrazců, a tak si je změřili pravítkem. V úloze 3 si jeden žák dokonce změřil délku úsečky a tu pak zaokrouhlil, aby se mu lépe počítalo.

Strategický krok *Počítá* zahrnuje veškeré početní operace, které žáci použili ve svých řešeních. Žák v tomto případě nemusel používat žádné vzorce. Tento krok v podstatě zahrnuje i níže uvedené kroky, jelikož nelze používat vzorce bez následných výpočtů.

V úlohách byly nejčastěji *použity vzorce* na výpočet obsahů geometrických obrazců, hlavně trojúhelníků a obdélníků, v úloze 3 i vzorec na výpočet obsahu lichoběžníku. U mladších žáků se často objevovaly i vzorce na výpočty obvodů geometrických obrazců, ale ty neměly v jejich řešení další uplatnění či byly jejich výsledky chybně interpretovány (viz oddíl 5.3.8).

Dosazování za neznámou byl strategický krok, který byl využit jen v úloze 1. Žáci si zde zvolili délku strany čtverce *ABCD*, aby mohli dopočítat stranu čtverce *KLMN* pomocí *Pythagorovy věty*.

U obou úloh docházelo u žáků k *používání parametru*. V úloze 1 si zvolili žáci parametr pro polovinu strany čtverce *ABCD* a pak dopočítali stranu čtverce *KLMN* pomocí *Pythagorovy věty*. V úloze 3 si žáci pomocí parametru zapsali obsah trojúhelníku *KON* a také obsahy dalších obrazců, aby je pak mohli porovnávat. V úloze 3 se tak objevuje i strategický krok, v němž žáci pomocí trojúhelníku *KON* vyjadřují délku úsečky *a*, aby s ní mohli dále počítat.

Kromě zmíněných strategických kroků se v úloze 1 objevil neúspěšný pokus o výpočet délek stran pomocí *sinové a kosinové věty* a v úloze 3 výpočty pomocí *trojčlenky*.

Konečně, v žákovských řešeních se objevily dva jevy, které jsou součástí obou základních typů strategií. Jedním z nich je *rýsuje/črtá*, který popisuje zaznamenávání získaných informací (včetně informací získaných nápovědou) žákem bez ohledu na to, zda posléze volí výpočetní či geometrickou strategii. Druhým je *překresluje si nápovědu* (viz tab. 5.3.3), tj. zda si žák informace získané z nápovědy překresluje do svého obrázku či nikoliv. Z tab. 5.3.3 je patrné, že si žáci většinou nápovědu do svého obrázku zakreslují, a zároveň je možné jednoznačně říci, že s věkem přibývá těch, kteří nekladou důraz na přesné zanesení skutečnosti do obrázku, a tak informace do obrázku črtají od ruky. Na střední škole rýsují žáci už jen výjimečně.

Tab. 5.3.3 Počty žáků překreslujících nápovědu do svého pracovního listu[56]

		6. roč.	7. roč.	8. roč.	9. roč.	G.V.A	G.VI.A	G.VII.A	G.VIII
Ú1	**Překresluje si nápovědu**	14/17	6/7	13/16	12/12	2/3	4/4	2/3	11/11
	Nepřekresluje si nápovědu	3/17	1/7	3/16	0/12	1/3	0/4	1/3	0/11
Ú3	**Překresluje si nápovědu**	8/8	12/13	7/7	6/8	2/2	3/3	2/2	3/5
	Nepřekresluje si nápovědu	0/8	1/13	0/7	2/8	0/2	0/3	0/2	2/5
	Rýsuje	22/25	18/20	20/23	18/20	4/5	7/7	4/5	14/16
	Črtá	3/25	2/20	3/23	2/20	2/5	0/7	1/5	2/16

5.3.4 Řešitelské strategie potenciálně vedoucí k úspěšnému vyřešení úlohy

V další fázi analýzy jsem se zaměřila na strukturu kroků (tedy jak jsou poskládány do celku, který v případě bezchybné práce žáka vede ke správnému řešení). Výsledkem je seznam řešitelských strategií žáků rozdělených do tří skupin (viz tab. 5.3.4) – *Geometrické v T prostoru (T), Geometrické v SG prostoru (SG)* a *Početní (P).*

Za správné geometrické řešení u úlohy 1 jsem považovala takové, kde si žáci uvědomili shodnost osmi pravoúhlých trojúhelníků a pomocí ní pak našli správný výsledek. Nebylo však jednoduché zařadit jejich řešení jednoznačně do T či SG prostoru. Do SG prostoru podle mě patří takové způsoby, které využívají měření či manipulaci s obrázkem nebo jeho dílčími konfiguracemi. Do T prostoru patří způsoby, které obsahují teoretická zdůvodnění na základě vlastností útvarů. U úlohy 1 by se jednalo o zdůvodnění shodnosti trojúhelníků jejich překrytím v případě SG řešení a o využití věty sss k témuž účelu v případě T řešení. Ovšem z řešení žáků to nelze zcela přesně identifikovat. Je také možné, že považují fakt, že úhlopříčka čtverce (či obdélníku u úlohy 3) ho dělí na dva shodné trojúhelníky, za zřejmý a nepociťují tedy nutnost zdůvodnění. V průběhu řešení se žáci mohou též pohybovat mezi T a SG prostorem. Ve své práci jsem postupovala tak, že jsem strategii zařadila do SG prostoru, pokud využívala převážně SG vlastnosti (např. explicitní vyjádření pohybu s útvary), a do T prostoru, pokud se v něm objevilo výraznější zastoupení T vlastností. Někdy

[56] Počty uvádíme vzhledem k celkovému počtu, např. v řádku *Překresluje si nápovědu* znamená 14/17, že 14 žáků ze 17 si ji překreslilo.

bylo rozhodnutí jasné (zejména pokud jsem s žákem přímo mluvila a mohla se ho na jeho řešení doptat), jindy bylo problematické.

Tab. 5.3.4 Řešitelské strategie, které mohou vést k úspěšnému vyřešení úlohy

Úloha 1	**Název řešitelské strategie**	**Kód**
Geometricky	Vidí shodné trojúhelníky (viz oddíl 4.1.)	T1
	Skládá z vnějších trojúhelníků čtverec stejného obsahu, jako má čtverec *KLMN*	SG1
	Vyplní čtyřmi trojúhelníky polovinu čtverce *ABCD*	SG2
	Překládá „rohy“ do středu čtverce	SG3
Početně	Odečítá od sebe hodnoty obsahů čtverců	P1
	Dává hodnoty obsahů čtverců do poměru	P2
Úloha 3	**Název řešitelské strategie**	**Kód**
Geometricky	Řeší způsobem popsaným oddílu 5.1.1	T2
	Rozděluje čtverec na obdélníky	T3
	„Stejná základna a stejná výška“ trojúhelníka => stejný obsah trojúhelníka	T4
	Vyjadřuje obsah obdélníka jiným způsobem	SG4
	Přeskupuje obrazce v obrázku	SG5
Početně	Odečítá 1 dm^2 od obsahu celého čtverce	P3
	Počítá obsahy čtyř trojúhelníků	P4
	Řeší úlohu parametricky přes poměr obsahů	P5

Nyní budou řešitelské strategie podrobněji popsány, četnost jejich použití je uvedena v oddíle 5.3.5.

Strategie k úloze 1

T1 Vidí shodné trojúhelníky

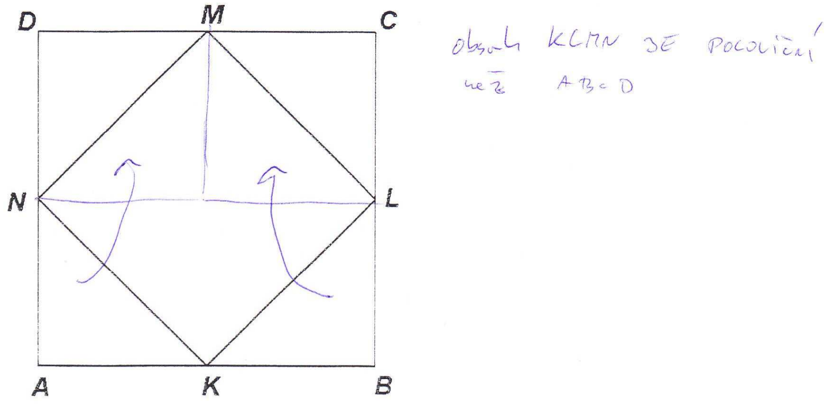
Jedná se o řešitelskou strategii, která je již popsána v oddíle 4.1 a k níž byl žák též veden pomocí nápověd. Přičemž jsem netrvala na tom, aby bylo v řešení přímo napsáno, jak by se shodnost trojúhelníků dala dokázat.

SG1 Skládá z vnějších trojúhelníků čtverec stejného obsahu, jako má čtverec KLMN

I v tomto případě si žák rozdělí vepsaný čtverec *KLMN* pomocí úhlopříček na shodné trojúhelníky. Tentokrát ale využije mentální manipulaci a z pravoúhlých trojúhelníků vně čtverce *KLMN* poskládá nový čtverec, který má stejný obsah jako čtverec *KLMN*. O tomto pohybu je v řešení přímo zmínka nebo mi o něm žák následně řekl. Tedy do čtverce *ABCD* se vejdou dva čtverce s obsahem, jako má čtverec *KLMN*.

SG2 Vyplní čtyřmi trojúhelníky polovinu čtverce ABCD

Žák si rozdělí vepsaný čtverec *KLMN* pomocí úhlopříček na shodné trojúhelníky, ovšem dva trojúhelníky ležící u vrcholů čtverce *ABCD* přesune tak, aby se zbývajícími dvěma trojúhelníky vyplnily polovinu čtverce *ABCD* (obr. 5.3.3).



Obr. 5.3.3 Řešení úlohy 1, strategie SG2, žák G. VII.A

SG3 Překládá „rohy“ do středu čtverce

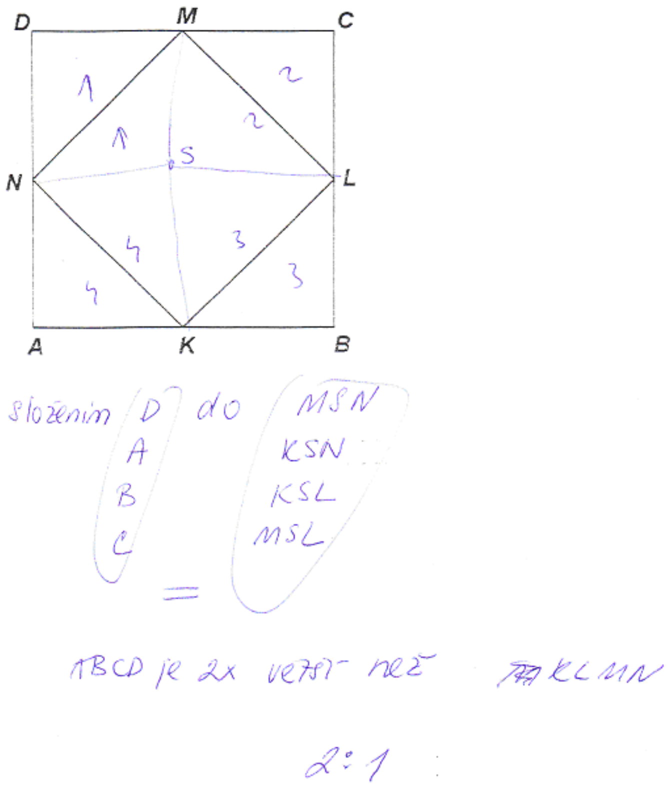
Žákyně mentální manipulací s obrázkem ukazuje, že je obsah čtverce *ABCD* dvakrát větší než obsah čtverce *KLMN* tak, že ohne trojúhelníky ležící při vrcholech čtverce *ABCD* do středu čtverců přes osy ohybu, které vedou jednotlivými stranami čtverce *KLMN* (viz obr. 5.3.4).

P1 Odečítá od sebe obsahy čtverců

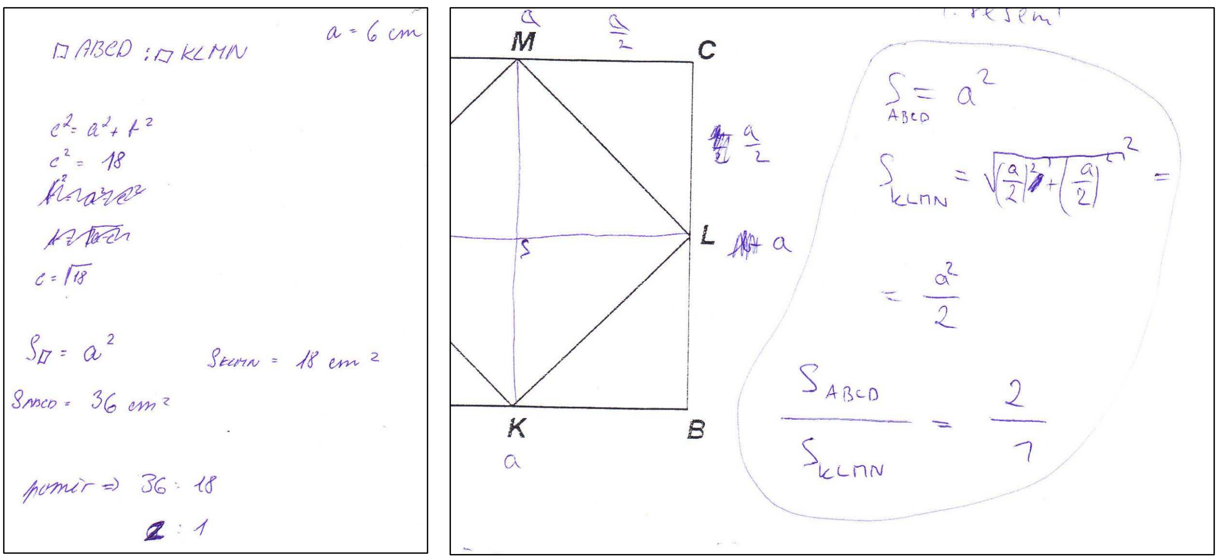
Žák využívá různé početní kroky řešitelských strategií, aby vypočítal obsahy obou čtverců a poté odečetl obsah menšího čtverce od obsahu většího čtverce.

P2 Dává obsahy čtverců do poměru

Žák postupuje jako u P1, jen dává obsahy obou čtverců do poměru (viz obr. 5.3.5).



Obr. 5.3.4 Geometrické řešení úlohy 1, strategie SG3, žákyně G.VIII.A



Obr. 5.3.5 Výpočetní řešení úlohy 1, strategie P2, žáci G.VI.A a G.VIII.A

Strategie k úloze 3

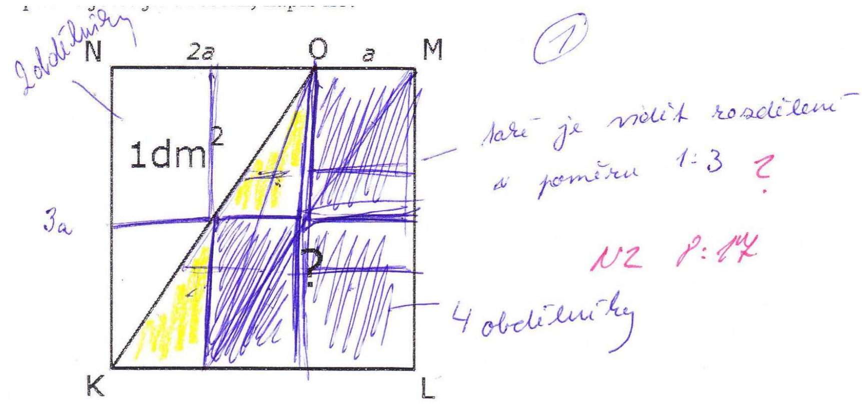
Poznámka: Pro přehlednost vysvětlení se na patu kolmice z bodu *O* na stranu *KL* (viz obr. 5.1.4) budu odkazovat písmenem *X*.

T2 Řešení z oddílu 5.1.1

Na tuto řešitelskou strategii také navádí žáky předkládané nápovědy.

T3 Rozděluje čtverec na obdélníky

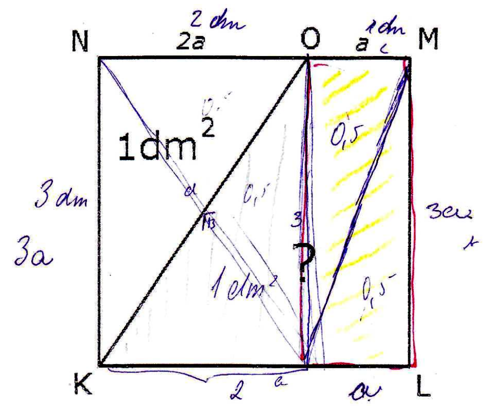
Při této řešitelské strategii si žákyně rozdělí obrázek na šest shodných obdélníků (viz obr. 5.3.6) pomocí dvou rovnoběžek se stranou *KN* vždy ve třetině a dvou třetinách úsečky *NM* a pomocí rovnoběžky s *NM*, která prochází středem úsečky *ML*. Dva ze vzniklých obdélníků jsou rozděleny diagonálně úsečkou *KO* vždy na dva shodné trojúhelníky. Pak je již zřejmé, že známý trojúhelník *KON* zabírá stejný obsah jako dva obdélníky (jeden obdélník a dva trojúhelníky), zatímco lichoběžník *KLMO* zabírá obsah jako čtyři takové obdélníky (tři obdélníky a dva trojúhelníky), a proto je jeho obsah dvakrát větší než obsah trojúhelníku *KON*. Žákyně využívá teoretické znalosti o rozdělení obdélníku na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky.



Obr. 5.3.6 Řešení úlohy 3, strategie T3, žákyně G.VI.A

T4 „Stejná základna a stejná výška“ trojúhelníku => stejný obsah trojúhelníku

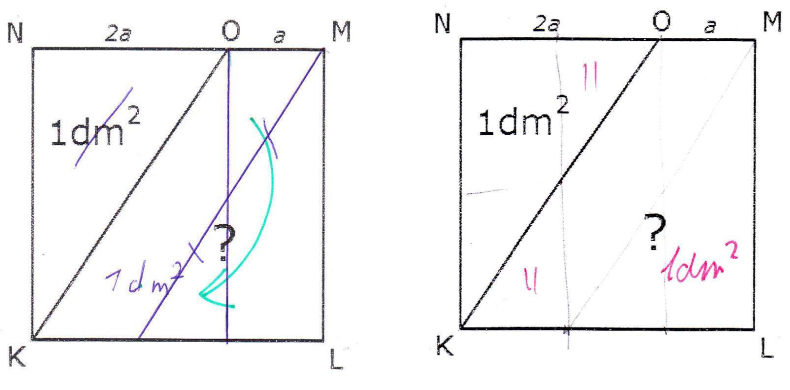
Žákyně při zjišťování obsahu zbylého obdélníku *XLMO* využije znalost o obsahu trojúhelníku – trojúhelníky se stejně dlouhou základnou a stejně dlouhou výškou mají stejný obsah. Rozdělí si obdélník *XLMO* diagonálně na dva trojúhelníky (viz obr. 5.3.7), které mají stejnou výšku jako trojúhelník *KON*, ale poloviční základnu, a mají tak i poloviční obsah. Dohromady tyto dva trojúhelníky, resp. zbylý obdélník, mají obsah také 1 dm^2.



Obr. 5.3.7 Řešení úlohy 3, strategie T4, žákyně G.VI.A [57]

SG4 Vyjadřuje obsah obdélníku jiným způsobem

Žák začíná stejným způsobem jako u předcházející strategie a odvodí obsah druhého trojúhelníku *KXO*. Na odvození obsahu zbývajícího obdélníku *XLMO* ale využije jinou řešitelskou strategii. Na obr. 5.3.8 jsou dvě řešení žáků, kteří si rozdělili a) trojúhelník *YLM*, kde *Y* leží v jedné třetině strany *KL* blíže k bodu *K* (obrázek vlevo), b) trojúhelník *KON* (obrázek vpravo), jehož obsah znali, na lichoběžník a malý trojúhelník tak, že vedli rovnoběžku se stranou *LM* a) středem úsečky *YL* (obrázek vlevo), b) středem úsečky *NO* (obrázek vpravo). V obrázku pak rozpoznali dva shodné malé trojúhelníky, kde jeden s lichoběžníkem tvoří původní trojúhelník o obsahu 1 dm^2 a druhý společně se stejným lichoběžníkem tvoří hledaný obdélník, který tedy musí mít také obsah 1 dm^2.



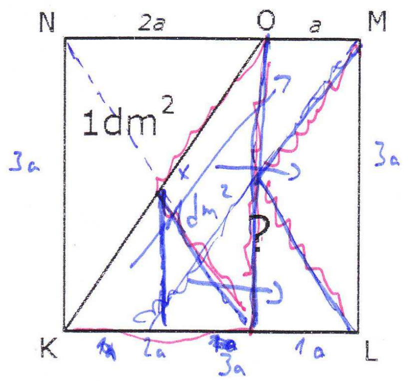
Obr. 5.3.8 Řešení úlohy 3, strategie SG4, žákyně 8 ročníku, žák G.VII.A

[57] Žákyně nejprve řešila úlohu početně, a proto jsou v obrázku i jiné, v tomto případě přebytečné, informace. Její řešení řadím mezi geometrické, pomocí obrázku, protože sice začala výpočty, ty ale nikam nevedly.

Poznámka: U této strategie jsem si nebyla jistá, kam přesně ji zařadit, zda do T nebo SG. Zde shodnost dvou vzniklých trojúhelníků již není tak zřejmá jako shodnost trojúhelníků, které vzniknou z obdélníku pomocí úhlopříčky, proto bych očekávala nějaké zdůvodnění. To však v řešení chybí, naopak se tam objevuje, jako např. v obr. 5.3.8 vlevo, náznak pohybu. Proto jsem se nakonec rozhodla zařadit tuto strategii do SG.

SG5 Přeskupuje geometrické obrazce v obrázku

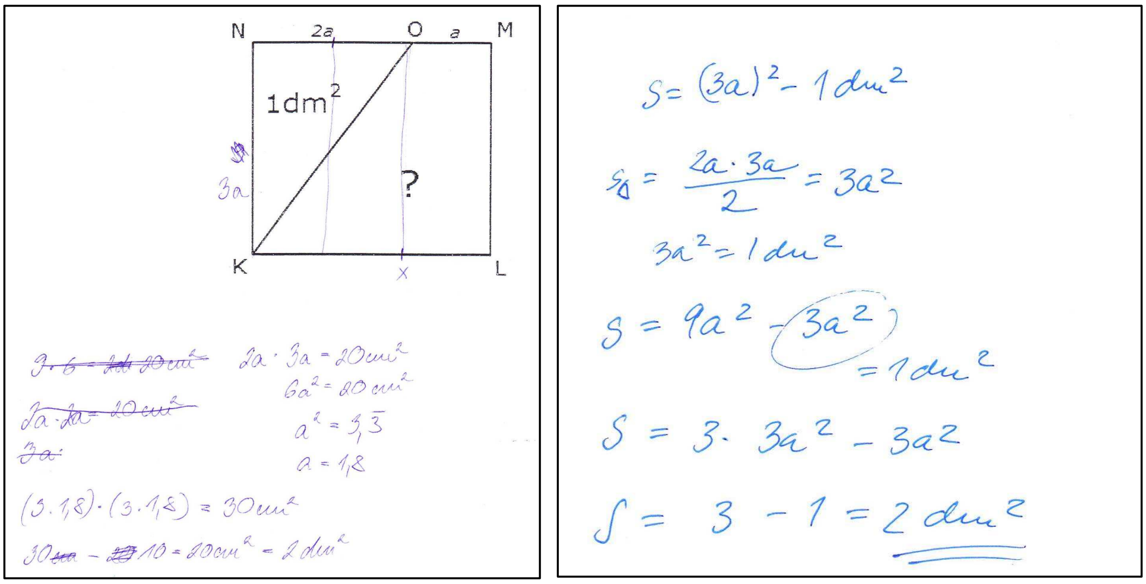
V případě této řešitelské strategie si žák rozdělí geometrický obrazec o známém obsahu na různé menší geometrické obrazce, které pak přesouvá a skládá tak, aby z nich vytvořil jiný obrazec. Například na obr. 5.3.9 žákyně rozdělila trojúhelník *KXO* na tři trojúhelníky a vyplnila jimi hledaný obdélník *XLMO* beze zbytku. Proto je obsah trojúhelníku *KXO* shodný s obsahem obdélníku *XLMO*. Žákyně se při ústním vysvětlení pokusila o matematické zdůvodnění, ovšem nebylo příliš propracované.



Obr. 5.3.9 Řešení úlohy 3, strategie SG5, žákyně G.VI.A

P3 Odečítá 1 dm² od obsahu celého čtverce

Žákyně si nejprve vypočítá neznámou a z obdélníku *KXON* s obsahem 2 dm², aby zjistila délku strany čtverce *KLMN* a vypočítala i jeho obsah. Nakonec od obsahu celého čtverce *KLMN* odečte obsah trojúhelníku *KON*, a získá tak obsah lichoběžníku *KLMO* (viz obr. 5.3.10 vlevo). V jiném případě nezjišťuje neznámou a, ale zjistí pomocí trojúhelníku *KON*, že 1 dm² = $3a^2$, což použije jako substituci (viz obr. 5.3.10 vpravo).



Obr. 5.3.10 Řešení úlohy 3, strategie P3, žákyně G.VI.A a G.VIII.A

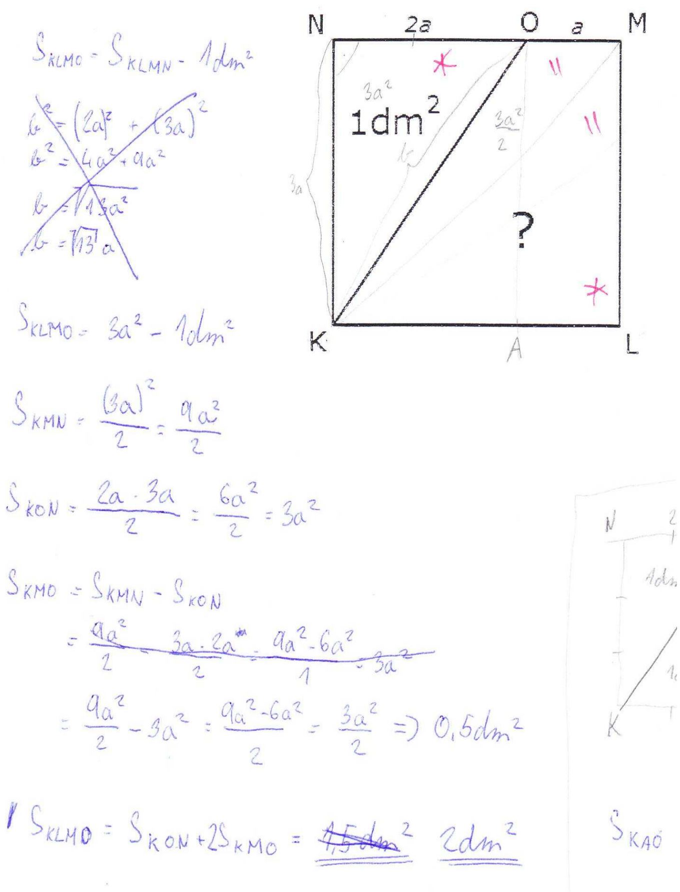
P4 Počítá obsahy čtyř trojúhelníků

Tato řešitelská strategie by mohla být zahrnuta pod předchozí řešitelskou strategii, žákyně ale neodečítá od obsahu celého čtverce *KLMN* 1 dm^2, i když se tato myšlenka v jejím řešení na začátku také objevuje. Ve skutečnosti hledá obsah trojúhelníku *KMO* tak, že od obsahu trojúhelníku *KMN* odečítá $3a^2$ (tj. 1 dm^2). Poté zná obsahy dvou shodných dvojic trojúhelníků tak, jak ukazuje obr. 5.3.11, a sečtením třech z těchto obsahů získává i obsah hledaného lichoběžníku.

P5 Řeší úlohu parametricky přes poměr obsahů

Žák zjistí, že obsah trojúhelníku *KON* je $3a^2$. Dále si vyjádří obsah lichoběžníku *KLMO* jako $6a^2$. Když ví, že 1 dm^2= $3a^2$ a zároveň, že poměr obsahů trojúhelníku *KON* a lichoběžníku je 1 : 2 ($3a^2$: $6a^2$), pak je mu již jasné, že lichoběžník má dvakrát větší obsah než trojúhelník *KON*, tedy 2 dm^2.

V jiném případě žák neporovnává obsah trojúhelníku *KON* a zbylého lichoběžníku, jelikož už měl lichoběžník rozdělen na trojúhelník a obdélník. Obsah trojúhelníku odvodil stejně, jako je popsáno v T2. Strategii P5 pak využil na zjištění obsahu zbylého obdélníku. Parametricky si vyjádřil jeho obsah a porovnal ho se známým obsahem trojúhelníku *KON*. Tak zjistil, že jsou oba tyto obsahy shodné a obdélník má tedy také obsah 1 dm^2.



Obr. 5.3.11 Řešení úlohy 3, strategie P4, žákyně G.VI.A

5.3.5 Četnost úspěšně použitých řešitelských strategií

Při pokusu analyzovat úspěšnost žáků při řešení úloh jsem narazila na problém. Zatímco v druhé fázi hlavní studie byla úspěšnost vyhodnocena jednoznačně (žák úlohu vyřešil či nikoliv), nyní to již tak jednoznačné nebylo. Žáci využívali nápovědy, a tak je nutné rozlišit nejen, zda žáci uspěli či nikoliv, ale také kolik a jakých nápověd při své práci využili. V tab. 5.3.5 jako úspěšného řešitele označuji žáka, který úlohu vyřešil, přičemž první číslo znamená, že úlohu vyřešil bez nápovědy, a druhé číslo za lomítkem, že úlohu vyřešil s nápovědou (bez ohledu na jejich počet). Proto jsem si vytvořila pomocnou tabulku (viz příloha 5), která pro každého žáka obsahuje více informací – zda úlohu vyřešil, jakým způsobem úlohu vyřešil, jaké strategie využil a kolik jich bylo, zda změnil strategii řešení po nápovědě, kolik dostal nápověd i zda našel správné řešení více způsoby.

Tab. 5.3.5 Strategie použitá pro úspěšné řešení úlohy

	Kód	6. roč.	7. roč.	8. roč.	9. roč.	G.V.A	G.VI.A	G.VII.A	G.VIII
Úloha 1	T1	0/1	1/2	4/8	0/3	3/6	2/6	3/3	2/9
	SG1	-	-	3/7	1/2	3/3	1/1	2/2	0/1
	SG2	-	-	-	2/2	-	2/2	3/4	1/1
	SG3	-	-	-	-	-	-	-	2/2
	P1	-	-	-	-	-	-	-	-
	P2	-	-	1/1	0/1	1/1	7/7	3/5	10/10
Úloha 3	T2	0/1	0/5	3/6	3/6	9/11	2/4	7/7	4/8
	T3	-	-	1/1	-	-	1/1	-	-
	T4	-	-	-	0/1	-	1/1	1/1	-
	SG4	-	-	2/2	-	-	-	1/1	-
	SG5	-	-	-	-	-	2/2	-	-
	P3	-	-	-	-	-	2/3	0/1	1\1
	P4	-	-	-	-	-	1/1	-	-
	P5	-	-	-	-	0/1	3/5	2/4	4/5

Tab. 5.3.6 ukazuje, kolik žáků dokázalo vyřešit úlohy více způsoby. Jedná se v podstatě o žáky vyšších stupňů gymnázia.

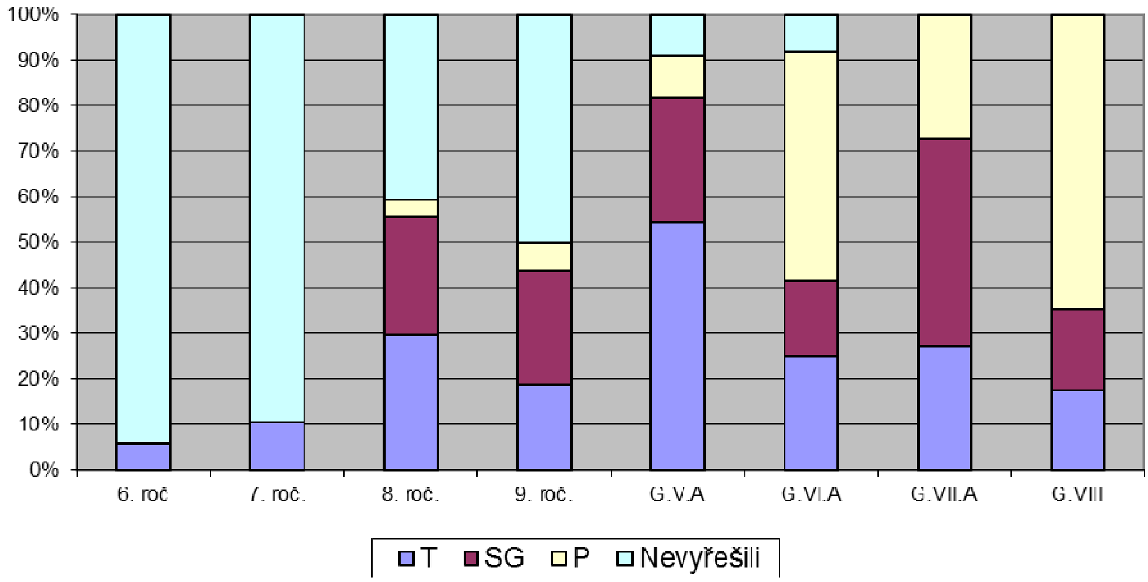
Tab. 5.3.6 Počty žáků, kteří vyřešili úlohy více způsoby

			6. roč.	7. roč.	8. roč.	9. roč.	G.V.A	G.VI.A	G.VII.A	G.VIII
Ú1	2 řešení	bez nápovědy	0	0	0	0	0	3	1	2
		po nápovědě	0	0	0	0	0	3	0	6
	3 řešení		0	0	0	0	0	0	1[58]	0
Ú3	2 řešení	bez nápovědy	0	0	0	0	0	3	2	0
		po nápovědě	0	0	0	0	1	2	1	1

Na obr. 5.3.12 a 5.3.13 je přehledně zobrazeno, jakým způsobem žáci jednotlivých tříd úlohy vyřešili a jaké procento z nich úlohu nevyřešilo vůbec. U těch žáků, kteří vyřešili úlohu více způsoby, je ponechán jen první úspěšný pokus. U grafů se pokusím zaměřit na trendy změn v řešitelských přístupech založených na věku, ovšem vzhledem k malému počtu žáků

[58] Tento žák vyřešil úlohu nejprve dvěma výpočetními způsoby a po nápovědě ještě jedním způsobem pomocí obrázku.

v jednotlivých třídách je nemožné dělat závěry. O ty se budu snažit spíše v oddílu 5.3.9, kde budu porovnávat větší skupiny žáků.

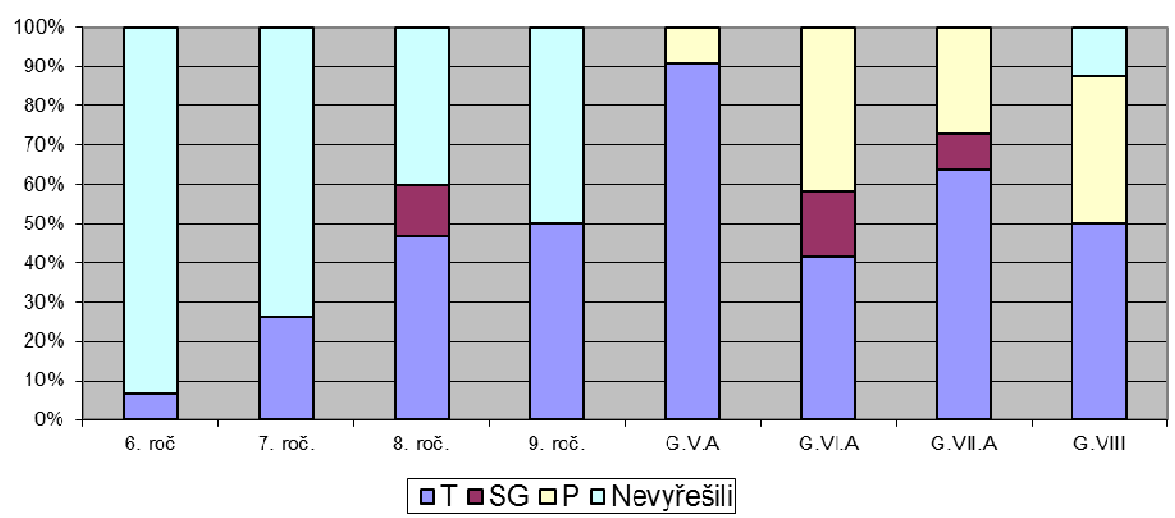


Obr. 5.3.12 Zastoupení úspěšně použitých strategií typu T, SG a P u úlohy 1 v řešení žáků jednotlivých tříd

Úspěšnost žáků u této úlohy se zvyšuje s věkem, kdy žáci posledních dvou ročníků gymnázií jsou již stoprocentně úspěšní. Z tohoto pravidla se vymyká 9. ročník, který je méně úspěšný než 8. ročník. To by mohlo být vysvětleno např. menší motivovaností žáků 9. ročníku k učení, což by bylo v souladu se zkušenostmi mnoha učitelů z praxe.

Zastoupení výpočetních způsobů řešení stoupá s věkem (s výjimkou třídy G.VI.A, kde je velmi vysoké), zatímco podíl T geometrických řešení zůstává podobný (tentokrát s výjimkou třídy G.V.A). Mohlo by se říci, že žáci gymnázia pociťovali výpočetní způsob řešení jako více matematický, resp. korektnější, než geometrický způsob. Ovšem tomuto vysvětlení se vymyká třída G.VII.A, kde největší procento žák zvolilo SG geometrické řešení založené na myšleném překrývání shodných útvarů. Ovšem, jak jsem uvedla již výše, je možné, že teoretické zdůvodnění by žáci byli schopni přinést též, jen neměli potřebu ho zapsat.

Strategie *Odečítá od sebe obsahy čtverců* (P1) nevedla ani u jednoho z žáků k vyřešení úlohy; objevuje se pouze u žáků 6. a 7. ročníku a jak bude popsáno níže, většina jejich kroků řešitelských strategií byla chybná. K úspěšnému řešení vedla strategie *Dává obsahy čtverců do poměru* (P2), která se častěji objevuje pouze ve třech nejstarších ročnících, kde žáci využili zejména dva strategické kroky – *Použití parametru* a *Myšlenka Pythagorovy věty*.



Obr. 5.3.13 Zastoupení úspěšně použitých strategií typu T, SG a P u úlohy 3 v řešení žáků jednotlivých tříd

Také u úlohy 3 je velmi malá úspěšnost u žáků 6. a 7. ročníku. Na gymnáziu byla až na 2 žáky (jedna žákyně a jeden žák) z G.VIII stoprocentní úspěšnost. Fakt, že ti žáci všech ročníků základní školy, kteří byli v této úloze úspěšní, použili jen T geometrické řešení (s výjimkou dvou žáků 8. ročníku, kteří úlohu řešili strategií SG4[59]), je dán vysokým podílem nápověd, které dostali (viz tab. 5.3.8). Nápovědy vedou právě na geometrické řešení z T prostoru.

Větší množství strategií, konkrétně sedm, se objevuje ve třídě G.VI.A. Pouze v této třídě předčila geometrickou strategii T2 o jednoho žáka výpočetní strategie P5.

Řešitelská strategie *Vyjadřuje obsah obdélníku jiným způsobem* (SG4) se v žákovských řešeních vyskytla pouze třikrát. Zajímavé je, že to bylo dvakrát v 8. ročníku a jednou v G.VII.A. a uvažování žáků bylo téměř totožné, i když měli mezi sebou pětiletý věkový rozdíl (viz obr. 5.3.8).

Strategie „*Stejná základna a stejná výška*“ *trojúhelníku => stejný obsah trojúhelníku* (T4) se objevila jen ojediněle. Je to strategie, kterou vyžadovala úloha *Ploty zahrad* z oddílu 2.1. Při analýze této úlohy jsem tehdy zjistila, že i když žáci znají bez problému vzorec na výpočet obsahu trojúhelníku, stejně si neuvědomují, že jeho obsah je ovlivněn právě délkou podstavy a výšky onoho trojúhelníku. Proto mne nepřekvapuje tak malý výskyt této strategie ani fakt, že se neobjevuje u mladších žáků.

[59] Ta je však na pomezí SG a T, jak jsem uvedla výše.

Úspěšné výpočetní způsoby řešení se objevují jen na gymnáziu. Nejpočetněji je zastoupena výpočetní strategie *Řeší úlohu parametricky přes poměr obsahů* (P5) a pak *Odečítá 1 dm^2 od obsahu celého čtverce* (P3).

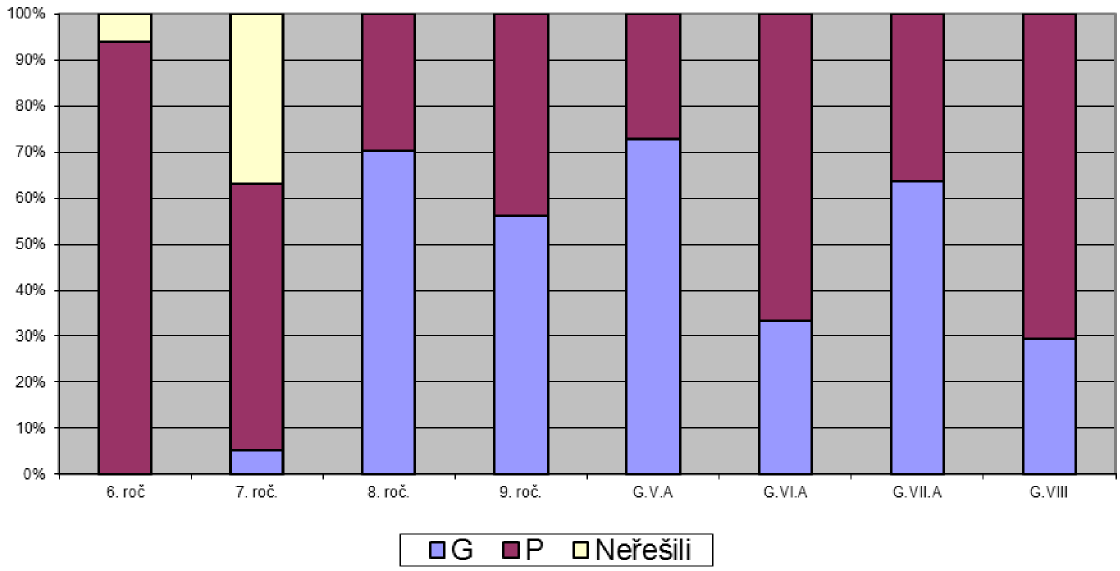
5.3.6 Primárně použité strategie

Zajímavou informací může být nejen to, jakou strategií žáci úlohu úspěšně vyřešili, ale také to, jaká strategie je napadla jako první (ať už ji k úspěšnému řešení nakonec použili, nebo ne). Proto jsem v řešeních žáků sledovala i toto hledisko. Primárně použité strategie byly často neúplné (šlo spíše o jednotlivé strategické kroky), žáci je opustili a přešli k jiné strategii. Proto jsem pro potřeby tohoto hlediska sloučila strategie T a SG do jednoho typu strategie – geometrické (G). Při rozhodování o tom, co udělal žák jako první, jsem vycházela z písemného řešení, které jsem si však nechala žákem stručně popsat, pokud jsem si nebyla jistá pořadím, v jakém své řešení psal. Výsledky pro úlohu 1 jsou na obr. 5.3.14 a pro úlohu 3 na obr. 5.3.15.

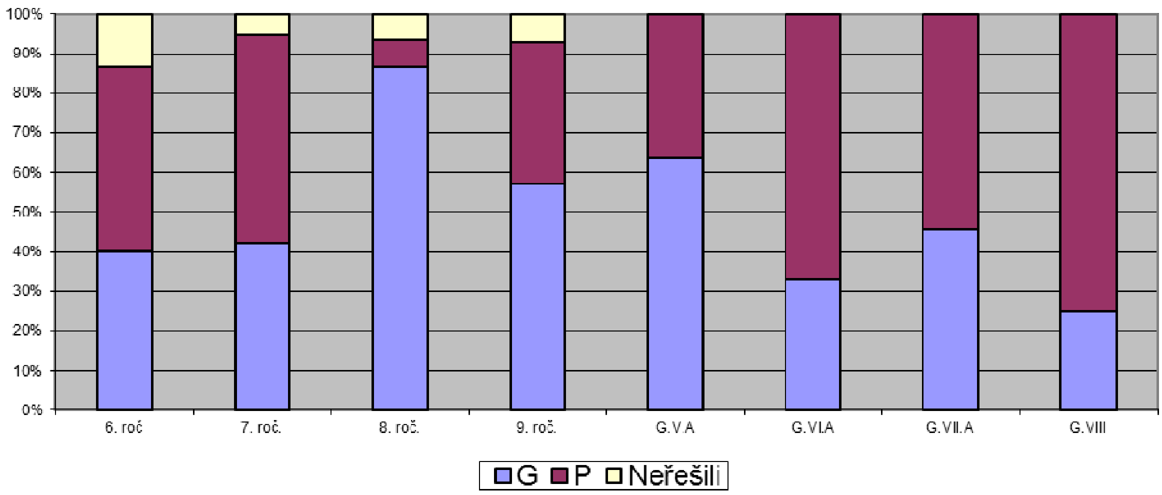
Z obr. 5.3.12 a 5.3.13 je vidět, že žáci 6. a 7. ročníku byli v řešení obou úloh skutečně velmi málo úspěšní. Z obr. 5.3.14 a 5.3.15 je vidět do jisté míry, proč tomu takto bylo. Je v nich patrné, že žáci 6. a 7. ročníku dali na začátku své práce přednost výpočetním strategiím (v případě úlohy 1 téměř všichni, kteří začali úlohu řešit, v případě úlohy 3 převážná část žáků); ty ale ani v jednom případě nevedly k správnému řešení. Žáci těchto tříd nejenže dělali chyby v početních úkonech, špatně převáděli jednotky, ale velice často si pletli obsahy a obvody obrazců. Pouze jediný žák řešil úlohu 1 od začátku pomocí obrázku a také byl jediným, kdo z těchto dvou tříd úlohu skutečně vyřešil. V 8. a 9. ročníku a dále ve třídách G.V.A a G.VII.A řešili žáci úlohu 1 primárně geometricky, zatímco ve třídách G.VI.A a G.VIII dávali výrazně přednost početním strategiím. Na rozdíl od nejmladších tříd byly tyto početní strategie správné a v mnoha případech vedly k vyřešení úlohy.

Je zajímavé, že úloha 1 inspirovala žáky 6. a 7. ročníku výhradně k výpočetnímu řešení, zatímco úloha 3 též ke geometrickému. Očekávala jsem, že vzhledem k přítomnosti proměnné v obrázku úlohy 3 tomu bude naopak. Vysvětlením může být, že u úlohy 3 nemohli žáci na rozdíl od úlohy 1 měřit (a pokud tak učinili, nevycházel jim ten výsledek 1 dm^2). Kromě toho v tomto věku ještě neumí pracovat s výrazy s proměnnou, proto se o to ani nepokoušeli.

U žáků počínaje 9. ročníkem vyvolala úloha 1 a 3 primárně stejné strategie (alespoň z globálního hlediska pro celou třídu. Můj předpoklad, že se více žáků pokusí využít geometrickou strategii u úlohy 3 už kvůli tomu, že se to vyplatilo v předcházející úloze 1, se nepotvrdil. Dokonce i někteří žáci, kteří řešili úlohu 1 geometricky hned od začátku, volili v úloze 3 primárně výpočetní strategie.



Obr. 5.3.14 Primárně použité strategie typu G a P u úlohy 1 u žáků jednotlivých tříd



Obr. 5.3.15 Primárně použité strategie typu G a P u úlohy 3 u žáků jednotlivých tříd

5.3.7 Využití nápověd a jejich vliv na řešitelskou strategii

Nyní se podíváme na to, jak hodně žáci využívali nápověd a jak jimi byli ovlivněni v jejich dalším řešení. Starší žáci daleko častěji potřebovali pouze jednu nápovědu. Není totiž pravda, že druhou nápovědu využili vždy žáci, kteří již předtím dostali nápovědu první. Někteří žáci ji nepotřebovali, jelikož na poznatek, který obsahovala první nápověda, přišli sami. Obě dvě nápovědy ze starších žáků využila u úlohy 1 pouze jedna žákyně v G.VIII a u úlohy 3 pouze jedna žákyně v G.V.A. Mladší žáci potřebovali obě dvě nápovědy hlavně při řešení úlohy 1. To neplatí pro 7. ročník, který obecně využil v úloze 1 nápovědy jen minimálně. Jak jsem již uvedla, žáci se ostýchali využít možnosti nápovědy, i když k tomu byli vybízeni. Při řešení úlohy 3 již tento ostych alespoň částečně zmizel.

Ve třetí úloze žáci 6. a 7. ročníku nepotřebovali druhou nápovědu. První nápověda, která jim poradila, aby si lichoběžník rozdělili na trojúhelník a obdélník, byla pro ně dostatečná. Změřili si délky stran[60] a obsah dopočítali. Tato strategie je chybná, ale žáci těchto tříd ji vesměs odmítali měnit. Ještě nepociťovali nutnost přesného řešení. Je možné, že u nich ještě nedošlo k osamostatnění ideálních geometrických objektů – žáci těchto ročníků je ještě ztotožňují s jejich reprezentanty. Tedy pracují spíše v SG než T prostoru.

Z tab. 5.3.7 a 5.3.8 je vidět i vliv nápověd na přechod ke geometrickým řešením. U úlohy 1 přešlo na geometrický způsob řešení 45 % z těch, kteří nějakou nápovědu dostali, u úlohy 3 to bylo 41 %. U ostatních nápovědy buď nepomohly, nebo vedly spíše k výpočetním způsobům řešení. Je možné říci, že čím starší žáci, tím jednodušeji přecházejí po nápovědě ke geometrickým strategiím, zatímco mladší žáci jsou více rezistentní a preferují svou původní strategii.

Nápovědy u úlohy 3 byly u žáků úspěšnější – 53,1 % žáků, kteří nápovědu dostali, našlo správné řešení (u úlohy 1 to bylo 41,1 %).

Tab. 5.3.7 Využití nápověd pro úlohu 1 (číslo v závorce udává počet nápověd, které žáci dostali poté, co našli správné řešení početně, abych je navedla na geometrické řešení)

	Počet žáků, kteří dostali alespoň jednu nápovědu	**Kolik z žáků, kteří dostali nápovědu, přešli ke geometrickému řešení**	**Počet žáků, kteří po nápovědě našli správné řešení**	**Jaké procento z žáků, kteří dostali nápovědu, přešlo ke geometrickému řešení /našlo správné řešení**
6. roč.	17	1	1	
7. roč.	7	1	5	
8. roč.	16	10	4	
9. roč.	12	5	2	
G.V.A	3	2	3	
G.VI.A	4 (3)	4	3	
G.VII.A	3 (2)	1	2	
G.VIII	11 (6)	9	10	
	73	**33**	**30**	**45,21 % / 41,1 %**

[60] Délky stran v 6. ročníku přeměřovalo deset žáků z patnácti a v 7. ročníku sedm žáků z devatenácti.

Tab. 5.3.8 Využití nápověd pro úlohu 3 (číslo v závorce udává počet nápověd, které žáci dostali poté, co našli správné řešení početně, abych je navedla na geometrické řešení)

	Počet žáků, kteří dostali alespoň jednu nápovědu	**Kolik z žáků, kteří dostali nápovědu, přešli ke geometrickému řešení**	**Počet žáků, kteří po nápovědě našli správné řešení (i výpočetní)**	**Jaké procento z žáků, kteří dostali nápovědu, přešlo ke geometrickému řešení / našlo správné řešení**
6. roč.	8	3	1	
7. roč.	13	5	5	
8. roč.	7	3	3	
9. roč.	8	2	4	
G.V.A	2	2	2	
G.VI.A	4 (2)	1	4	
G.VII.A	2 (2)	1	2	
G.VIII	5 (1)	3	5	
	49	**20**	**26**	**40,81 % / 53,1 %**

5.3.8 Neúspěšné řešitelské strategie a různé jevy chybovosti

Jedním z významných důvodů neúspěchu řešení úloh 1 a 3 u mladších žáků je fakt, že si pletou obsah s obvodem geometrických obrazců (tab. 5.3.9). Dále se objevují problémy s pochopením jednotek délky a obsahu. Někteří žáci s nimi dokonce pracují současně, provádějí s nimi početní operace či je porovnávají (tab. 5.3.10).

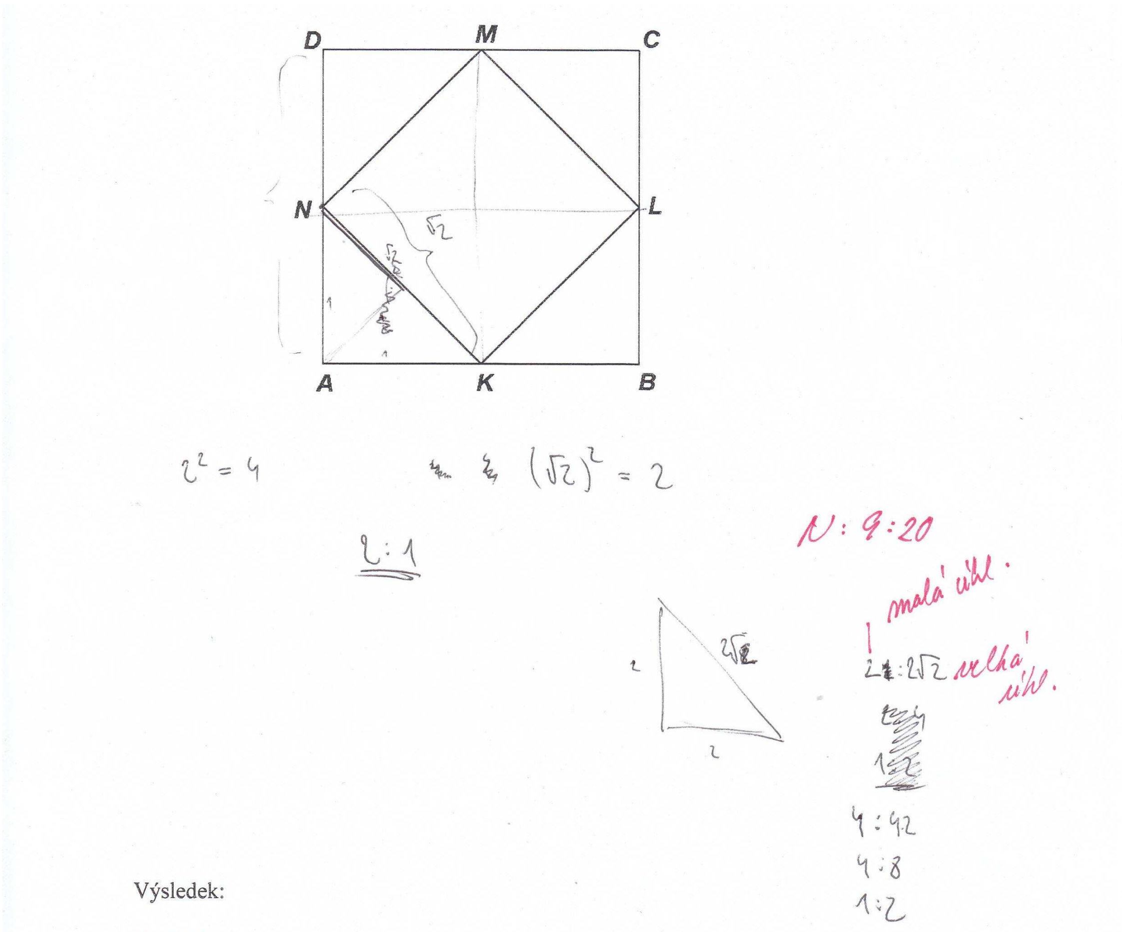
Tab. 5.3.9 Počet žáků zaměňujících obsah a obvod geometrických útvarů

	6. roč.	**7. roč.**	**8. roč.**	**9. roč.**	**G.V.A**	**G.VI.A**	**G.VII.A**	**G.VIII**
Úl. 1	9	8	4	2	1	0	1	0
Úl. 3	3	3	0	3	1	0	0	1

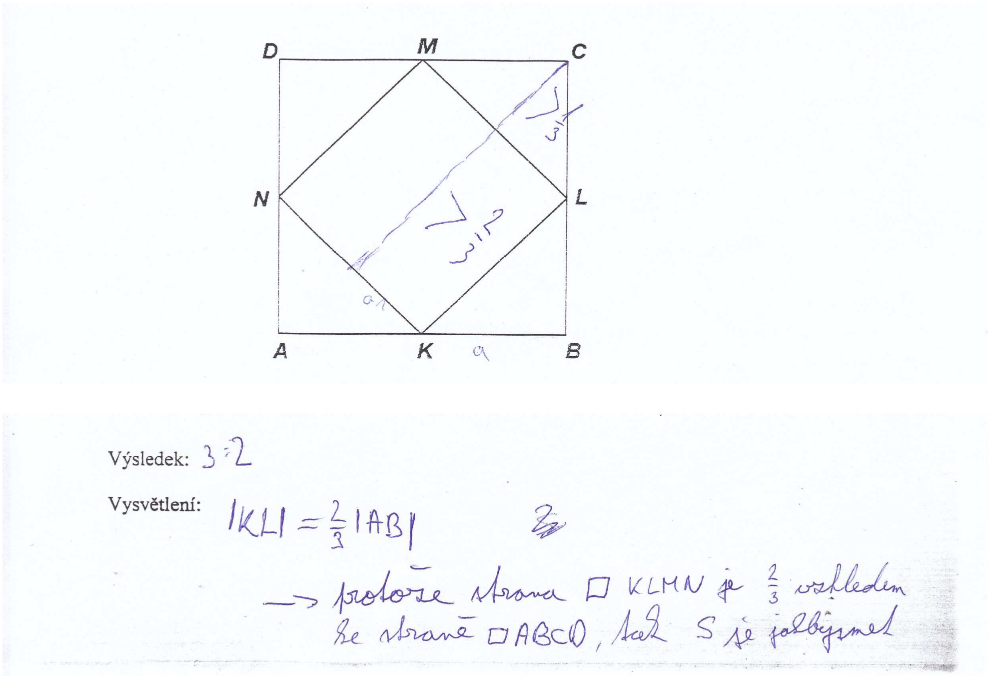
Tab. 5.3.10 Počet žáků převádějících jednotky u úlohy 3

	6. roč.	**7. roč.**	**8. roč.**	**9. roč.**	**G.V.A**	**G.VI.A**	**G.VII.A**	**G.VIII**
Počet žáků, kteří převáděli jednotky	2	2	2	1	0	3	0	0
Z toho chybně	0	2	2	1	0	1	0	0

V některých případech žáci neporovnávali obsahy útvarů, jak bylo požadováno, ale délky jejich stran či úhlopříček, a z toho pak vyvodili závěr i pro obsahy útvarů. Je překvapivé, že se tento jev objevuje i u žáků vyšších ročníků gymnázia. Konkrétně u úlohy 1 jeden žák z G.V.A (viz obr. 5.3.16) a jeden žák z G.VII.A (viz obr. 5.3.17) neporovnávají délky stran, ale části úhlopříček čtverců a své závěry považují za platné i pro obsahy obou čtverců.



Obr. 5.3.16 Chybné řešení úlohy 1, žák G.V.A (červený text značí moje poznámky)



Obr. 5.3.17 Chybné řešení žáka úlohy 1, G.VII.A

Dalším velkým problémem byly chybné výpočty žáků, žáci se dopouštěli numerických chyb. Když pomineme špatný součet či součin, problémem u starších žáků bylo násobení s parametrem, kdy žáci zapomínali parametr umocnit. Někteří žáci také udělali chybu ve vzorci již na začátku své práce (pouze u úlohy 3). Výskyt těchto jevů shrnuje tab. 5.3.11, z níž je patrné, že ti žáci, kteří vzorce používali, je většinou dobře znali, jelikož se tyto chyby objevují pouze v 7. ročníku. Numerické chyby se ale kromě 6. a 7. ročníku objevují ve všech třídách. Zejména ve třídě G.VIII je jejich výskyt u úlohy 3 vysoký, když si uvědomíme, že celkový počet žáků v tomto ročníku je 16.

Tab. 5.3.11 Četnost určitých typů chyb

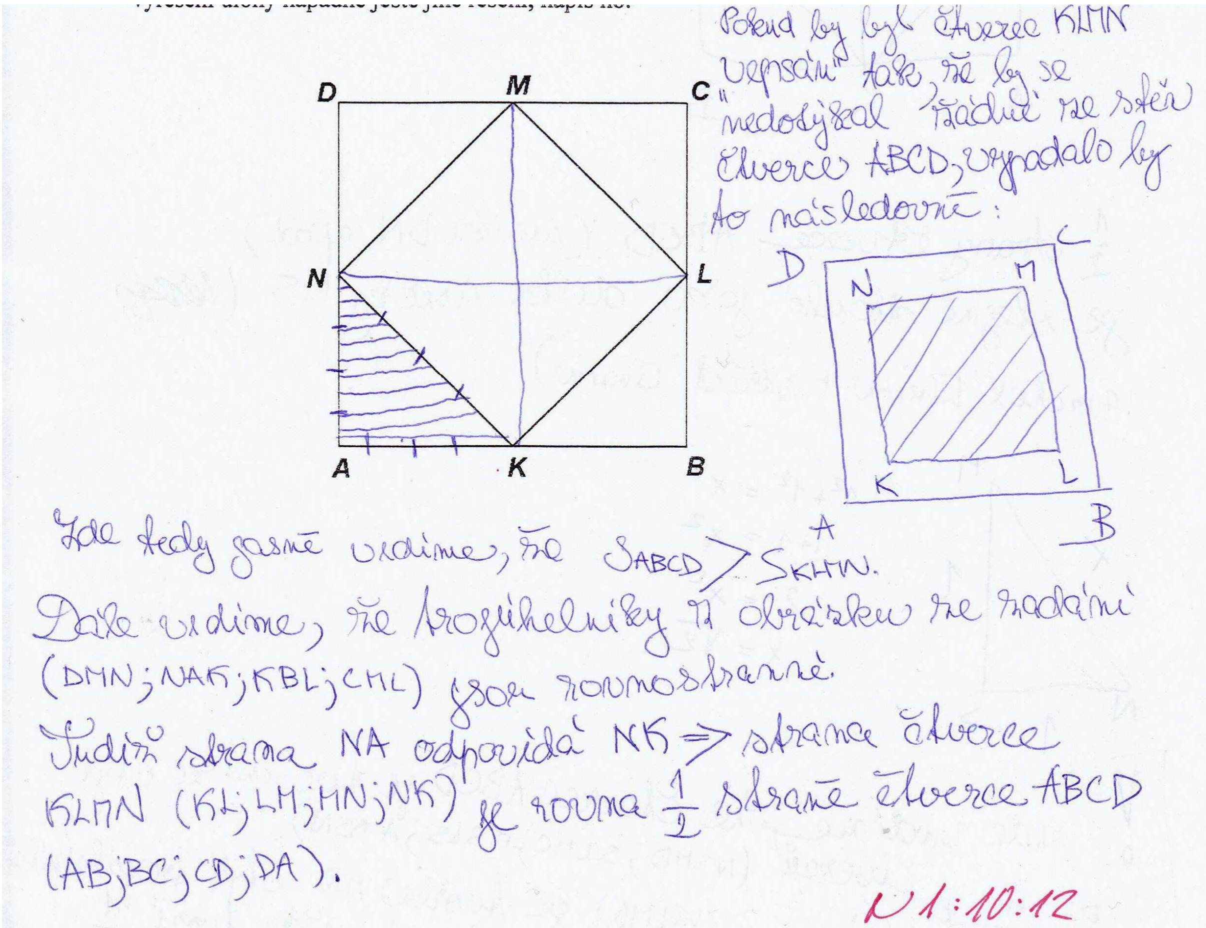
		6. roč.	7. roč.	8. roč.	9. roč.	G.V.A	G.VI.A	G.VII.A	G.VIII
Chybně počítá	**Ú1**	0	0	0	0	0	2	1	0
	Ú3	0	0	2	1	1	2	0	6
Chyby ve vzorci Ú3		0	3	0	0	0	0	0	0
Chyby v úpr. výrazů s par. Ú3		0	0	0	0	1	2	0	0

V některých žákovských řešeních se objevovaly vzorce, které v dané situaci nebyly vhodné (s jejich výsledky se nedalo dále pracovat či byly nadbytečné) a žákům tedy při řešení nepomohly. Navíc pokus o jejich využití často vypovídá o nesprávném uchopení úlohy žákem. V tab. 5.3.12 je možné vidět, kolik žáků ve svých řešeních využilo nějaký vzorec a kolik z nich se pokusilo řešit úlohu pro situaci nevhodnými vzorci.

Tab. 5.3.12 Využití vzorců

		6. roč.	7. roč.	8. roč.	9. roč.	G.V.A	G.VI.A	G.VII.A	G.VIII
Ú1	**Používá vzorce**	11	2	5	5	3	8	4	12
	Z toho nevhodné	8	0	0	1	0	0	0	0
Ú3	**Používá vzorce**	3	5	3	5	3	10	6	12
	Z toho nevhodné	1	1	2	4	0	0	0	5

U žáků základní školy všech ročníků se u úlohy 3 po jednom žákovi objevil i jev, kdy žák dospěl k chybnému výsledku, jelikož si na začátku své práce vytvořil chybný předpoklad či úvahu, se kterou dále pracoval. Tyto chybné předpoklady a úvahy vycházejí z nedostatečné znalosti geometrických útvarů a jejich vlastností. Jako špatný předpoklad také můžeme u úlohy 1 označit jev, kdy žákyně považuje malé trojúhelníky, vytvořené pomocí úhlopříček čtverce *KLMN*, za rovnostranné. Žákyně (viz obr. 5.3.18) nezaměňuje pouze názvy rovnostranných a rovnoramenných trojúhelníků. To dokazuje její následná práce s těmito trojúhelníky, když odvozuje délku strany čtverce *KLMN*, která je podle ní díky tomuto chybnému předpokladu rovna polovině strany velkého čtverce. I když je zvláštní, že takový zřejmý pravoúhlý trojúhelník někdo označí za rovnostranný, je o to zvláštnější, že to byla žákyně střední školy z G.V.A.[61]



Obr. 5.3.18 Chybné předpoklady v řešení úlohy 1, žákyně G.V.A

Někdy žáci nevěděli, jak úlohu řešit, a tak začali, jak sami poznamenali, tipovat či odhadovat, aniž by svá tvrzení měli nějakým způsobem podložená (viz tab. 5.3.13). U úlohy 1 se v žákovských řešeních objevuje jev *Tipuje na základě polovin stran*. V takovém řešení spoléhal žák na „hezký výsledek" a usoudil, že když jsou vrcholy menšího čtverce v polovinách stran většího čtverce, tak by mohl mít menší čtverec i poloviční obsah. Takové řešení jsem si nechávala od žáků při jeho odevzdání vysvětlit. Většina těchto žáků tvrdila, že je prostě nic jiného nenapadlo. Pouze jeden žák byl přesvědčen, že toto tvrzení musí být

[61] Jeden žák G.VII.A dokonce ve své odpovědi pojmenoval čtverec *KLMN* kosočtvercem. Tohoto žáka jsem ale nezahrnula mezi žáky, u kterých se objevil jev *Chybná úvaha či předpoklad*, jelikož to nemělo vliv na jeho strategii řešení a konečný výsledek.

správné a že bude „fungovat“ do nekonečna i pro další vepisované menší a menší čtverce, i když své tvrzení nedovedl dokázat. Dalším jevem jsou *chybné odhady* obsahů útvarů, kdy se žáci pokusí na základě vizuálního dojmu odhadnout obsah nějakého útvaru, který v obrázku vznikl (např. obdélníku, lichoběžníku). Objevuje se však jen u žáků základní školy.

Tab. 5.3.13 Četnost dalších typů chyb v řešení žáků

		6. roč.	7. roč.	8. roč.	9. roč.	G.V.A	G.VI.A	G.VII.A	G.VIII
Ú1	**Tipuje na základě polovin stran**	0	1	2	1	1	1	0	0
Ú3	**Chybné odhady obsahů**	2	1	1	1	0	0	0	0

Ve fázi uchopování úlohy se v řešeních objevuje řada jevů, které k úspěšnému řešení nevedly, samy o sobě však nemusí být chybné; je také možné, že žáka určitým způsobem v řešení posunuly. Objevují se většinou ve fázi uchopování úlohy, kdy si žák úlohu promýšlí. Nejvíce bylo zastoupeno *Zakreslování úhlopříček většího čtverce* u úlohy 1 (tab. 5.3.14). Žákům, s nimiž jsem dělala rozhovory v první fázi hlavní studie, se často stávalo, že nakonec odpověděli na jinou otázku, než která byla úlohou položena. Zabrali se do řešení úlohy a odpověděli, aniž by se přesvědčili, zda si správně pamatují otázku. Tento jev se v žákovských řešeních objevil i ve třetí fázi hlavní studie. Opravdu jen minimálně byl zastoupen u úlohy 1, zato se mnohem častěji objevuje u úlohy 3 (viz tab. 5.3.15). Zde žáci ve svých odpovědích za výsledek označili obsah celého čtverce *KLMN*, nikoliv lichoběžníku *KLMO*, i když měli obsah lichoběžníku správně vyřešen. Tyto žáky jsem zahrnula mezi úspěšné řešitele, protože jejich odpověď neměnila nic na tom, že přišli na strategii, která je dovedla ke správnému cíli.

Tab. 5.3.14 Četnost dalších jevů nevedoucích k vyřešení úlohy

	6. roč.	7. roč.	8. roč.	9. roč.	G.V.A	G.VI.A	G.VII.A	G.VIII
Zakreslování úhlopříček většího čtverce (Ú1)	2	3	3	5	2	1	0	1
Různé jevy nevedoucí k cíli (Ú1)	0	1	1	0	0	1	0	0
Různé jevy nevedoucí k cíli (Ú3)	3	3	6	2	0	4	1	3

Tab. 5.3.15 Chyby v odpovědích žáků z důvodu nepozornosti

		6. roč.	7. roč.	8. roč.	9. roč.	G.V.A	G.VI.A	G.VII.A	G.VIII
Ú1	**Odpovídá na jinou otázku**	0	1	0	1	0	0	0	1
Ú3	**Odpovídá na obsah celého čtverce**	0	1	1	0	1	1	3	5

Žáci všech ročníků měli velký problém vysvětlit, ať už písemně či ústně, svá řešení, což nebylo způsobeno pouze nedostatečnými jazykovými schopnostmi. Na vině je také velmi špatná terminologie. Žáci například zaměňovali názvy geometrických útvarů natolik, že při vysvětlování svých řešení jsem jim často vůbec nerozuměla. Tak žák např. „ohýbal strany“, ale myslel tím, že „ohne“ trojúhelníky. Čtverec a obdélník nerozlišovali někdy ani žáci střední školy atd. Další problémy měli žáci se zlomky. Např. žák střední školy zapsal tuto odpověď: „Spojení trojúhelníku do 1 obdélníku mi vyplní 1/2 čtverce *ABCD* a tím pádem na *KLMN* zbývá jen 2/2 čtverce.“ Nedokáži bohužel provést statistiku takových chyb žáků, jelikož se jich většina objevila v jejich ústním projevu, když mi vysvětlovali svá řešení (a já si je nedokázala všechny zapsat), a jen málo jich je v jejich písemných odpovědích.

5.3.9 Porovnání řešitelských strategií a dalších jevů u skupin žáků

Pro potřeby porovnání žáků a jejich přístupů podle věku jsem vytvořila dva způsoby dělení žáků na skupiny (viz tab. 5.3.16). Jednak na žáky základní školy (Skupina ZŠ) a gymnázia (Skupina G) a jednak na mladší žáky (Skupina A, která zahrnuje 6., 7. a 8. ročník ZŠ) a starší žáky (Skupina B, která zahrnuje třídy G.VI.A, G.VII.A a G.VIII). Ve druhém případě jsem vynechala 9. ročník a třídu G.V.A, aby byl mezi skupinami větší věkový rozdíl.

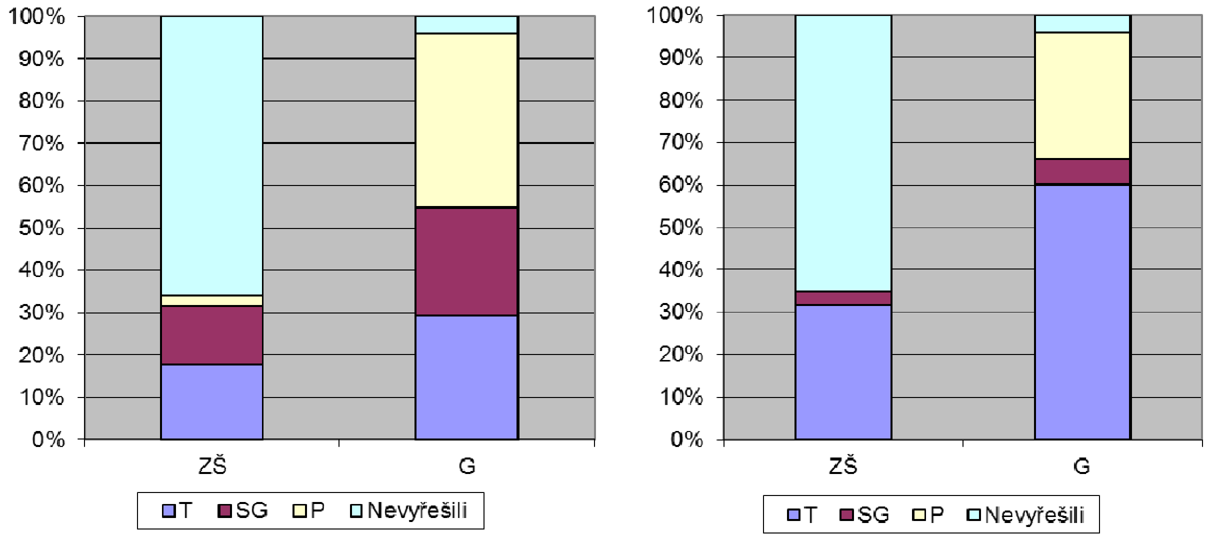
Tab. 5.3.16 Dělení na skupiny pro potřeby porovnání

		Skupina ZŠ	Skupina G	Skupina C	Skupina D
Úloha 1	**Žáků**	**79**	**51**	**63**	**40**
	Dívek	35	29	24	23
	Chlapců	44	22	39	17
Úloha 3	**Žáků**	**63**	**50**	**49**	**39**
	Dívek	30	28	21	22
	Chlapců	33	22	28	17

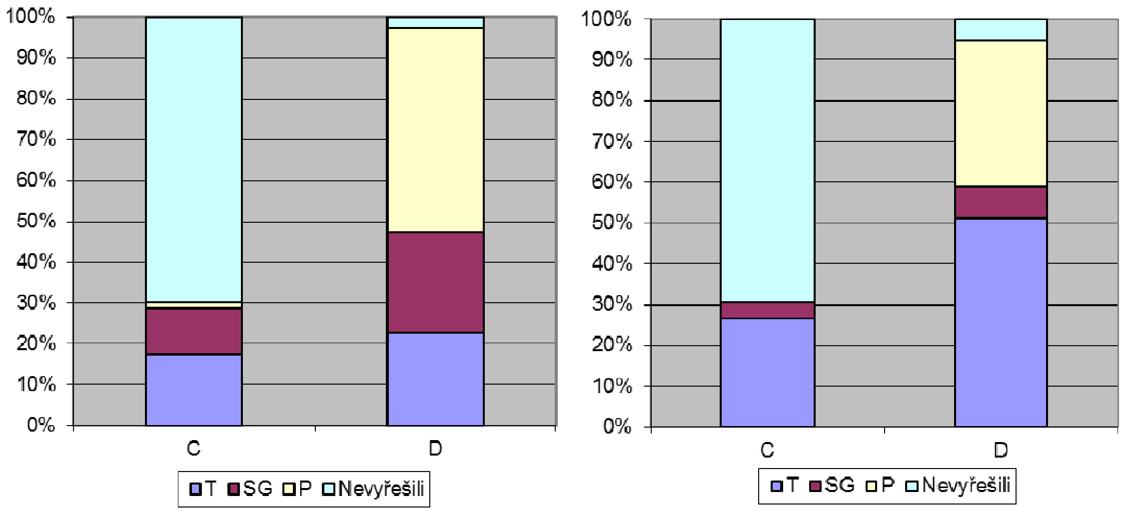
Porovnání bude uděláno z hledisek, které byly popsány v oddílech 5.3.5 až 5.3.8.

Porovnání četností úspěšně použitých strategií a vlivu nápověd

Na obr. 5.3.19, resp. 5.3.20 je uděláno porovnání četností úspěšně použitých strategií u skupiny ZŠ a G, resp. C a D, pro úlohy 1 (vždy vlevo) a 3 (vždy vpravo). U žáků, kteří úlohu vyřešili správně více způsoby (viz tab. 5.3.6), je ponechán jen první úspěšný způsob.



Obr. 5.3.19 Zastoupení úspěšně použitých strategií typu T, SG a P u úlohy 1 (vlevo) a 3 (vpravo) pro skupiny ZŠ a G



Obr. 5.3.20 Zastoupení úspěšně použitých strategií typu T, SG a P u úlohy 1 (vlevo) a 3 (vpravo) pro skupiny C a D

Rozdíly mezi skupinami mladších a starších žáků obou typů jsou na první pohled patrné a kontingenční tabulky potvrdily, že jsou statisticky významné (zjišťovala jsem rozdíly pro T, SG a P bez těch žáků, kteří nevyřešili, i pro T+SG a P (opět bez žáků, kteří nevyřešili) a konečně i pro T+SG a P+Nevyřešili). Výsledky jsou pro obě rozdělení na skupiny podobné.

U úlohy 1 i 3 je úspěšnost starších žáků více než třikrát větší než úspěšnost mladších žáků. Je však třeba vzít v úvahu i fakt, že základní škola nepředstavuje běžnou populaci žáků, protože studijně zaměřené děti odešly zpravidla na osmiletá gymnázia.

Úspěšné výpočetní strategie se u obou úloh objevují jen u starších žáků a u nich též stoupá podíl T geometrických řešení na celkovém úspěšném řešení (u úlohy 3 významně). Ovšem u starších žáků se objevuje také nezanedbatelný podíl SG geometrických řešení, která jsem sice považovala za správná, která však představují spíše uvažování na nižší úrovni než teoretické a nejsou zcela matematicky korektní.

Pro mě překvapivý je velký podíl výpočetních strategií u starších žáků u úlohy 1, kde jsem očekávala spíše geometrické řešení. Důvodem může být i fakt, že žáci gymnázia nepovažovali takové řešení za dostatečně matematické a považovali za nutné provést i výpočty. U některých z nich se tento názor projevil při osobním vysvětlení jejich práce.

Naopak u úlohy 3 jsem očekávala spíše větší podíl výpočetního řešení, ovšem u starších žáků ho předčila geometrická strategie T2. Jedním z faktorů může být i nápověda, která k tomuto způsobu naváděla – zhruba 16 % žáků gymnázia dostala nápovědu (viz tab. 5.3.18). Z nich však jen někteří přešli na geometrický způsob řešení. Naopak nezanedbatelná část starších žáků začala úlohu 3 řešit geometricky už od začátku (viz obr. 5.3.21 a 5.3.22).

Z tab. 5.3.17 a 5.3.18 je možné vysledovat, že mladší žáci vyžadovali výrazně více nápověd než starší žáci. Je to celkem logické, protože úlohy byly pro ně obtížnější než pro žáky gymnázia. U úlohy 3 obě skupiny vyžadovaly již méně nápověd než u úlohy 1 (starší žáci již výrazně méně). Důvodem může být i fakt, že u úlohy 1 poznali charakter úloh, o něž šlo, čehož využili u úlohy 3.

Z tabulek dále vyčteme i fakt, že nápovědy byly pro přechod ke geometrickému způsobu řešení (což bylo jejich cílem) výrazně úspěšnější u starších žáků. Pro tyto žáky byla výrazně účinnější nápověda k úloze 1 než k úloze 3 – to je zřejmě dáno tím, že úloha 1 byla pro ně jednodušší.

Tab. 5.3.17 Využití nápověd a jejich vliv na strategii u úlohy 1 pro skupiny žáků (kurzívou jsou počty, z nichž jsou odečteny ty nápovědy, které dostali žáci jako podnět ke geometrickému způsobu poté, co úlohu vyřešili početně)

	Počet žáků, kteří dostali alespoň jednu nápovědu	**Kolik z žáků, kteří dostali nápovědu, přešli ke geometrickému řešení**	**Jaké procento z žáků, kteří dostali nápovědu, přešli ke geometrickému řešení**
ZŠ 79 ž.	52 (66 %)	17	32,69%
G 51 ž.	21 (41 %) *10 (19,6 %)*	16	76,19%
C 63 ž.	40 (63 %)	12	30,00%
D 40 ž.	18 (45 %) *9 (22,5 %)*	14	77,78%

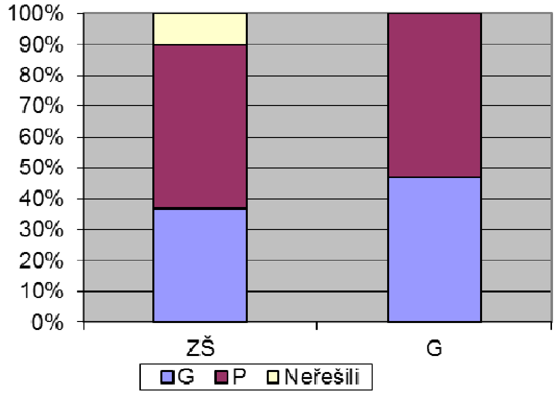
Tab. 5.3.18 Využití nápověd a jejich vliv na strategii u úlohy 3 pro skupiny žáků (kurzívou jsou počty, z nichž jsou odečteny ty nápovědy, které dostali žáci jako podnět ke geometrickému způsobu poté, co úlohu vyřešili početně)

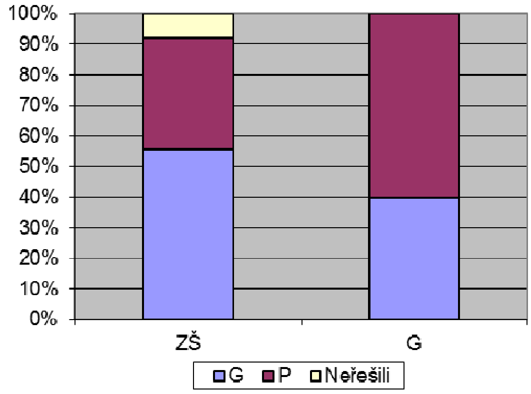
	Počet žáků, kteří dostali alespoň jednu nápovědu	**Kolik z žáků, kteří dostali nápovědu, přešli ke geometrickému řešení**	**Jaké procento z žáků, kteří dostali nápovědu, přešli ke geometrickému řešení**
ZŠ 63 ž.	36 (57 %)	13	36,11%
G 50 ž.	13 (26 %) *8 (16 %)*	7	53,85%
C 49 ž.	28 (57 %)	11	39,29%
D 39 ž.	11 (28 %) *6 (15,38 %)*	5	45,45%

Porovnání četností primárně použitých strategií

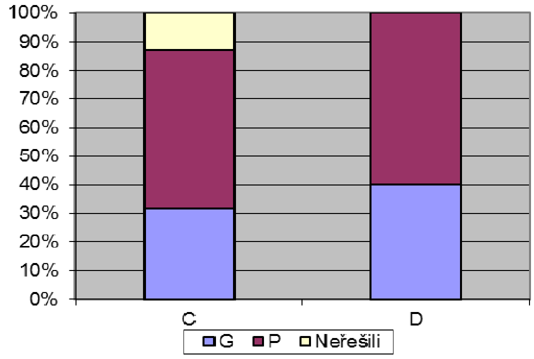
Na obr. 5.3.21, resp. 5.3.22 je uděláno porovnání četnosti primárně použitých strategií u skupiny ZŠ a G, resp. C a D, pro úlohy 1 (vždy vlevo) a 3 (vždy vpravo). Jak jsem již uvedla, primárně použité strategie byly často použity neúplně (šlo spíše o jednotlivé strategické kroky), žáci je opustili a přešli k jiné strategii. Proto jsem sloučila strategie T a SG do jednoho typu strategie – geometrické (G).

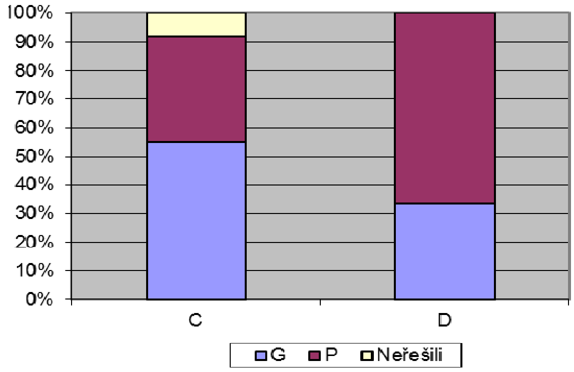
Opět jsou výsledky podobné u obou typů skupin žáků. Statisticky významný rozdíl mezi skupinami mladších a starších žáků se potvrdil jen u úlohy 3, kde významně větší procento mladších žáků (55 %, oproti 32 % starších žáků) dalo přednost geometrickým strategiím. Jedním z faktorů, který zde může hrát roli, je to, že mladší žáci ještě nemají tolik zkušeností s proměnnou (strana čtverce je označena jako 2a a a), nemohou tedy automaticky začít s nějakými výpočty a hledají jiný způsob řešení. To by potvrzoval i fakt, že u úlohy 1 přibližně stejné procento mladších žáků jako starších žáků začalo automaticky s výpočty (v nichž však nebyli úspěšní). U úlohy 1 se totiž jednalo o čtverce a pravoúhlé trojúhelníky, tedy o útvary jim dostatečně známé, a neobjevovala se žádná proměnná.





Obr. 5.3.21 Primárně použité strategie u úlohy 1 (vlevo) a 3 (vpravo) pro skupiny ZŠ a G





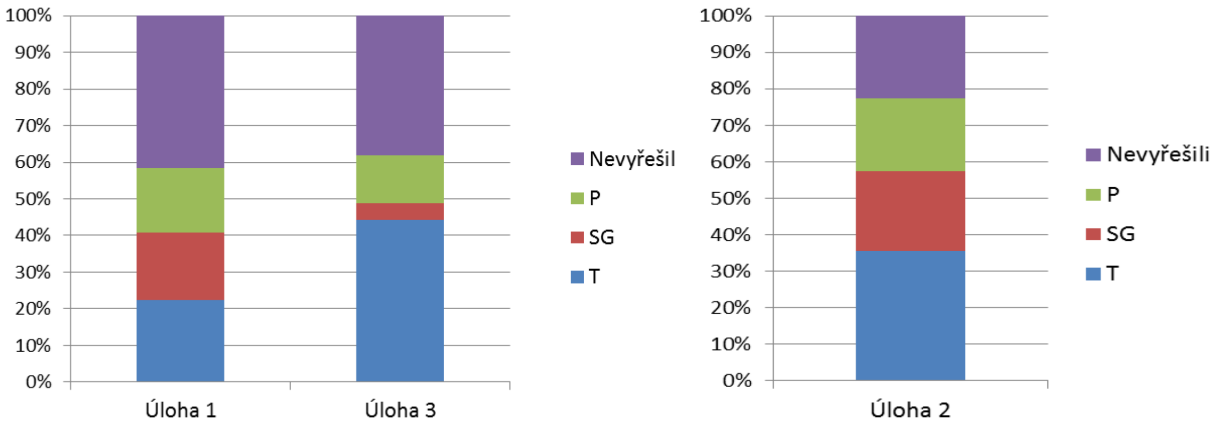
Obr. 5.3.22 Primárně použité strategie u úlohy 1 (vlevo) a 3 (vpravo) pro skupiny C a D

Porovnání obou úloh u všech žáků

Na obr. 5.3.23 vlevo je graf zastoupení úspěšně použitých strategií typu T, SG a P u úlohy 1 a 3 u všech žáků. Úspěšnost žáků v obou úlohách je srovnatelná, u úlohy 3 dokonce trochu vyšší. Úloha 3 se mi jevila i vzhledem k přítomnosti proměnné obtížnější, ovšem výsledky to neukazují.

Statisticky významné rozdíly se potvrdily v zastoupení T a SG v rámci geometrických řešení. Ovšem, jak bylo uvedeno výše, zařazení strategií do T a SG bylo někdy problematické. Více úspěšných výpočetních řešení se objevuje u úlohy 1, což odpovídá tomu, že u úlohy 1 se může pracovat s čísly, zatímco u úlohy 3 se objevuje proměnná.

Pro zajímavost uvádím i příslušný graf pro úlohu 2. Ovšem u ní je nutné vzít v úvahu, že žáci neměli možnost nápověd a že poměr P/SG/T vznikl jako poměr příslušných typů kroků k celkovému počtu kroků. Tuto úlohu řešili také jiní žáci, i když celkově vzhledem k věku odpovídající žákům třetí fáze. Bylo mezi nimi však větší zastoupení žáků osmiletého gymnázia. Úloha je ze všech úloh nejúspěšnější, což jsem očekávala.



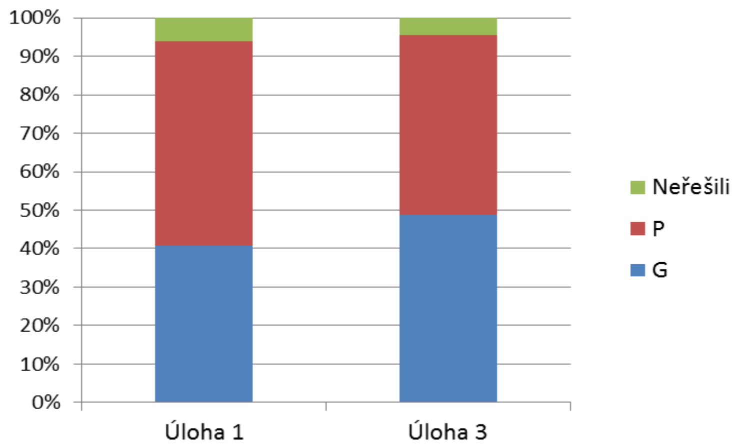
Obr. 5.3.23 Zastoupení úspěšně použitých strategií typu T, SG a P u úlohy 1 až 3 u všech žáků

Tab. 5.3.19 potvrzuje závěry uvedené výše. Žáci potřebovali více nápověd u úlohy 1 a nápovědy k této úloze byly více nápomocné ke geometrickému řešení než nápovědy u úlohy 3. To může být dáno obtížností úlohy 3.

Tab. 5.3.19 Využití nápověd a jejich vliv na strategii u obou úloh pro všechny žáky

	Počet žáků, kteří dostali alespoň jednu nápovědu	**Kolik z žáků, kteří dostali nápovědu, přešli ke geometrickému řešení**
Úloha 1	56,15 %	45,21 %
Úloha 3	43,36 %	40,82 %

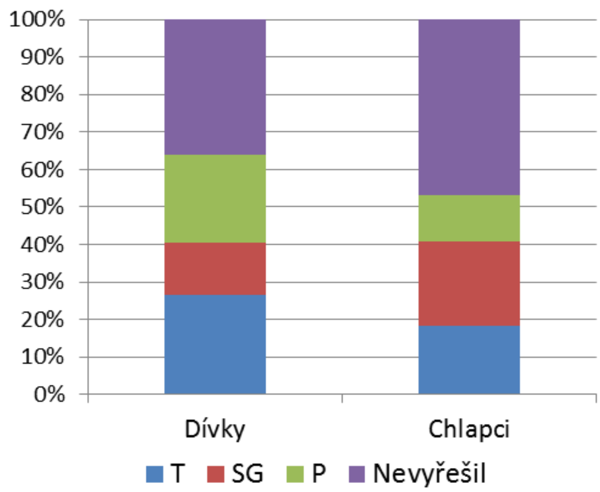
Na obr. 5.3.24 je porovnání primárně použitých strategií u obou úloh pro všechny žáky. Odhlédneme-li od žáků, kteří úlohu vůbec nezačali řešit, pak se nejedná o statisticky významné rozdíly. Mírně větší procento žáků začalo řešit úlohu 3 geometricky než úlohu 1. To bylo překvapivé, neboť jak jsem již uvedla, očekávala jsem vzhledem k přítomnosti proměnné spíše výpočetní řešení.

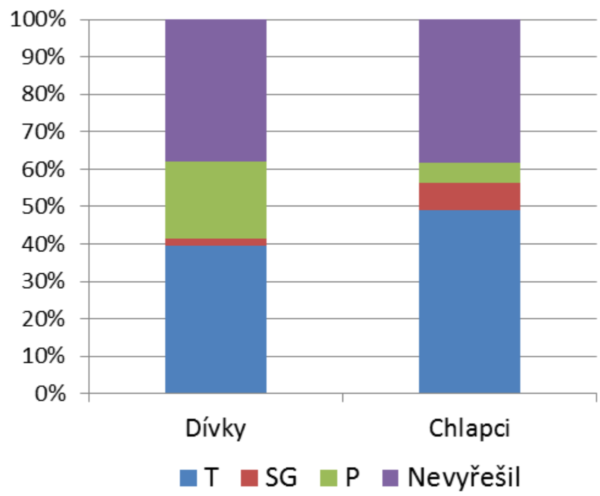


Obr. 5.3.24 Primárně použité strategie u úlohy 1 a 3 pro všechny žáky

Porovnání řešitelských procesů u dívek a chlapců

Nakonec z výše uvedených hledisek porovnám řešení dívek a chlapců. Zde jsem dívky ze všech tříd dala do jedné skupiny a všechny chlapce zase do druhé.

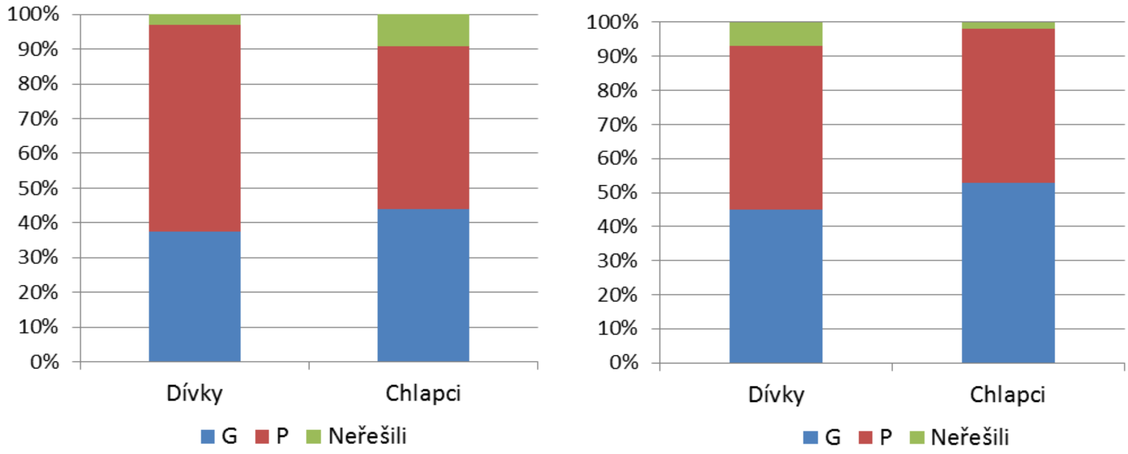




Obr. 5.3.25 Zastoupení úspěšně použitých strategií typu T, SG a P u úlohy 1 (vlevo) a 3 (vpravo) pro skupiny dívek a chlapců

Na obr. 5.3.25 jsou grafy pro úspěšně použité strategie typu T, SG a P u úlohy 1 (vlevo) a 3 (vpravo) pro skupiny dívek a chlapců. Úlohu 1 vyřešilo výrazně méně chlapců než dívek, u úlohy 3 je situace vyrovnaná. Rozdíl v úspěšnosti u úlohy 1 je dán výpočetními postupy (podíl úspěšných geometrických řešení je stejný u dívek i chlapců). Tedy více dívek než chlapců bylo schopno úlohu správně vyřešit výpočetními způsoby – chlapci toto řešení nedotáhli do konce, i když se o ně pokoušeli (viz obr. 5.3.26, kde je vidět, že asi 45 % chlapců začalo úlohu řešit výpočetně).

Významné rozdíly mezi použitými strategiemi se potvrdily jen u úlohy 3. Výrazně více chlapců řešilo úlohu úspěšně T geometrickými postupy, zatímco více dívek použilo úspěšně výpočty.



Obr. 5.3.26 Primárně použité strategie u úlohy 1 (vlevo) a 3 (vpravo) pro dívky a chlapce

Primárně použité strategie pro skupiny dívek a chlapců jsou na obr. 5.3.26. Mezi dívkami a chlapci nejsou významné rozdíly. U obou úloh je mírně větší zastoupení dívek ve výpočetních přístupech. Úloha 3 motivovala mírně větší procento dívek i chlapců ke geometrickému řešení než úloha 1. Vzhledem k přítomnosti proměnné v úloze jsem očekávala spíše výpočetní řešení jako primární. Je možné, že žáci se poučili z řešení úlohy 1, kde úspěšně použili geometrické řešení, a tedy ho na začátku zkusili i u úlohy 3.

5.4 Závěry hlavní studie

5.4.1 Závěry pro první fázi hlavní studie

V první fázi hlavní studie se mi podařilo získat hlubší vhled do řešitelských strategií žáků při řešení úloh typu RBV díky polostrukturovaným rozhovorům. Vytvořila jsem přehled jevů a jejich kategorií v žákovských řešeních a v některých případech jsem vymezila dimenze těchto jevů. Tento přehled byl využit v dalších fázích výzkumu s větším množstvím respondentů pro popis jejich řešitelských strategií. Navrhla jsem grafické schéma řešitelského procesu, které jej podrobně a přehledně popisuje a umožňuje sledovat přechody mezi výpočtovými a geometrickými postupy.

Výsledky první fáze hlavní studie se v žádném případě nedají zobecňovat, ale snad lze říci, že se u geometrického způsobu řešení zejména žáci základní školy pohybují spíše v SG prostoru a i když jsou opakovaně ujišťováni o nevhodnosti takového postupu, mají tendence zjišťovat délky úseček měřením nebo odhadem a manipulovat s obrázky (tedy obrázek vnímají spíše jako reprezentaci konkrétního objektu s konkrétními rozměry než jako reprezentaci abstraktního geometrického objektu). Nápovědy byly úspěšnější co do přechodu ke geometrickému způsobu řešení u žáků střední školy. Nejvíce nápovědu využívali žáci u úlohy 3, která se jim jevila jako nejobtížnější (pravděpodobně díky přítomnosti proměnné *a*).

První fáze výzkumu mi umožnila vybrat úlohy do dalších fází. Úloha 2 má na úrovni žáků základní a střední školy pouze jediné, a to geometrické řešení.[62] Při rozhovorech se ukázalo, že takové řešení žáci buď hned vidí, nebo ne. Počet řešitelských strategií je omezen, což na druhou stranu znamená, že jsou poměrně jednoduše identifikovatelné již z písemné formy žákovského řešení. Proto jsem se rozhodla ve druhé fázi výzkumu, která měla proběhnout pouze v písemné podobě bez možnosti nápovědy, využít právě tuto úlohu.

Výsledky první fáze výzkumu mě dále přesvědčily, že úlohy 1 a 3 jsou pro další výzkum vhodné. Žáci v nich používají množství různých výpočtových i geometrických strategických kroků. Ve třetí fázi výzkumu měly být zadávány jedna po druhé většímu počtu respondentů, jimž se na rozdíl od druhé fáze a úlohy 2 mělo dostat možnosti nápovědy. Protože však nemělo jít o práci s jednotlivci ale s celou třídou, bylo nutné vybrat jen menší počet nápověd, aby byl celý proces organizačně zvládnutelný. Pro úlohu 1 jsem vybrala nápovědy N1b a N2a. Nápovědu N1b jsem zvolila proto, že většina žáků si stejně druhou úhlopříčku okamžitě také dokreslila a až poté začala nad úlohou přemýšlet. Pro úlohu 3 jsem vybrala nápovědy N2 a N3, protože nápověda N1 žákům příliš nepomohla. Někteří ji považovali za samozřejmost a jiní ji nedovedli využít.

5.4.2 Závěry pro druhou fázi hlavní studie

Ve druhé fázi pracovali žáci samostatně a neměli možnost nápověd. Domnívám se, že úloha byla pro tento způsob vybrána vhodně, i když se samozřejmě objevily případy, kdy jsem nedokázala přesně říci, jak žák uvažoval.

Na základě analýzy jsem stanovila tři způsoby řešení. První spočívalo v geometrickém řešení v T prostoru, šlo tedy o korektní matematické řešení. Druhé je též geometrického charakteru, ale v SG prostoru. V tomto případě šlo o nekorektní, zpravidla jen přibližné řešení. Tento způsob řešení se objevil i v řešení starších žáků a žáků gymnázia, kde bych očekávala, že si žáci již nekorektnost použitých technik (tedy přerýsování zadání a měření

[62] Pro žáky VŠ se nabízí řešení např. pomocí integrálního počtu či analytické geometrie.

úseček, případně jejich vizuální porovnávání nebo odhad délek) uvědomují. Je možné, že nedokázali nalézt žádnou strategii vedoucí k matematicky korektnímu řešení, a tak provedli alespoň toto přibližné řešení, přičemž si nekorektnosti této strategie vědomi byli. To však z řešení vyčíst nedokážu.

Třetí způsob řešení, který však k cíli nevedl vůbec, byl výpočetní. Žáci se snažili používat různé vzorce, zejména pro obsah a obvod útvarů, a Pythagorovu větu. V používání vzorců jsem našla statisticky významný rozdíl mezi mladšími a staršími žáky. Starší žáci využívají vzorců více, ovšem alespoň někteří z nich přecházejí ke geometrickému řešení. Tendence k využívání vzorců se objevila ve všech ročnících, nejvýznamněji však u dívek skupiny B, tedy starších dívek, které byly zřejmě díky tomu výrazně méně úspěšné než chlapci ze stejné skupiny, ale i méně úspěšné než dívky skupiny A. Jakoby se na rozdíl od mladších dívek nedovedly oprostit od používání výpočtů a přejít ke geometrickému řešení.

Z hlediska řešení úlohy je zajímavé zejména zastoupení geometrického T způsobu řešení. Nejnižší bylo v případě nejmladších žáků a dále žáků 8. ročníku základní školy. Nejmladší žáci se pohybují více v SG prostoru a nejsou ještě připraveni použít teoretické úvahy. U žáků základní školy zase můžeme předpokládat, že ti z nich, kteří uvažovali v geometrii spíše teoreticky, svých znalostí využili k přechodu na osmileté gymnázium a že na základní škole zůstali spíše žáci, jejichž výsledky v matematice, a tedy i v geometrii, jsou horší. Při porovnání obou skupin mladších a starších žáků vidíme, že zastoupení T kroků v rámci všech geometrických kroků výrazně stoupá s věkem.

Co se týče úspěšnosti, pokud odhlédneme od nejúspěšnější třídy G.II.B, starší žáci jsou úspěšnější než mladší žáci o 18–25 %. Pokud však tuto třídu zahrneme a porovnáme skupinu A a B, pak starší žáci nejsou výrazně úspěšnější. Není to příliš překvapivé, když vezmeme v úvahu, že úloha je řešitelná pomocí znalostí, které pocházejí víceméně z prvního stupně základní školy. Důvody neúspěchu jsou do určité míry dány snahou o výpočetní řešení, které zde není úspěšné. Větší roli však hrálo to, že neúspěšní žáci nedovedli rozlišit dílčí konfigurace v obrázku a použít pak vlastnosti geometrických objektů, které jsou v jiných kontextech pro žáky zřejmé.

5.4.3 Závěry pro třetí fázi hlavní studie

Ve třetí fázi hlavní studie jsem žákovská písemná řešení doplnila též krátkými rozhovory se žáky. To mi umožnilo následně přesněji vyhodnotit jejich práci, i když ani tak nejsou mé interpretace tak přesné, jako tomu bylo u rozhovorů v první fázi, kdy jsem se skutečně mohla doptat na veškeré nejasnosti a mohla jsem sledovat žáky v průběhu celé jejich práce.

U úloh 1 a 3 jsem identifikovala strategie typu SG, T a P a sledovala jejich zastoupení v úspěšných řešeních žáků nejdříve po jednotlivých třídách, dále ve skupinách mladších a starších žáků, ve skupině dívek a chlapců a nakonec u všech žáků. Totéž jsem provedla pro primárně použité strategie a vliv nápověd. Porovnání skupin mladších a starších žáků je však problematické v tom, že mladší žáci jsou žáci základní školy, kde je možno předpokládat, že studijně zaměřené děti odešly na osmiletá gymnázia. To je nutné mít na paměti při čtení výsledků.

U úlohy 1 i 3 je úspěšnost starších žáků téměř třikrát větší než mladších žáků. Pro mě překvapivá je mizivá úspěšnost žáků 6. a 7. ročníku. U úlohy 1 v 7. ročníku se dá částečně vysvětlit tím, že se žáci ostýchali si říci o nápovědy, nicméně i bez nich jsem očekávala, že někdo úspěšný bude. Ukazuje to obtížnost obou úloh, a to i první úlohy, která je řešitelná matematickými prostředky prvního stupně základní školy.

Úspěšné výpočetní strategie se u obou úloh objevují jen u starších žáků a u nich též stoupá podíl T geometrických řešení na celkovém úspěšném řešení. Ovšem u starších žáků se objevuje nezanedbatelný podíl SG geometrických řešení, která nejsou zcela matematicky korektní.

Překvapivý je velký podíl výpočetních strategií u starších žáků u úlohy 1, kde jsem očekávala spíše geometrické řešení. Důvodem může být i fakt, že žáci gymnázia nepovažovali takové řešení za dostatečně matematické a považovali za nutné provést i výpočty. U některých z nich se tento názor projevil při osobním vysvětlení jejich práce.

U úlohy 3 jsem očekávala větší podíl výpočetního řešení, ovšem u starších žáků ho předčila T geometrická strategie. Malou roli zde hrála nápověda, která k tomuto způsobu naváděla. Ovšem velká část starších žáků začala úlohu 3 řešit geometricky už od začátku.

U úlohy 3 významně větší procento mladších žáků než starších žáků dalo přednost geometrickým strategiím. Jedním z faktorů by mohl být fakt, že mladší žáci ještě nemají tolik zkušeností s proměnnou. U úlohy 1 (kde se jednalo o jim známé útvary) přibližně stejné procento mladších žáků jako starších žáků začalo automaticky s výpočty, ale nebyli úspěšní. To, že významné procento žáků začalo úlohu 1 řešit výpočetně, ukazuje podle mého názoru na to, že jsou i u úloh z geometrie zvyklí zejména provádět výpočty a ne se snažit nejdříve „dívat“ na obrázek a číst z něj.

V řešeních žáků se u obou úloh objevovala celá řada problémů. Poměrně dost žáků základní školy zaměňuje obvod a obsah (což je problém známý z běžné výuky matematiky). Dalším problémem u žáků základní školy jsou převody jednotek a používání v dané situaci nevhodných vzorců. Téměř ve všech ročnících se objevovaly numerické chyby.

Co se týče nápověd, ty byly pro přechod ke geometrickému způsobu řešení (což bylo jejich cílem) výrazně úspěšnější u starších žáků. Žáci potřebovali více nápověd u úlohy 1 a nápovědy k této úloze byly více nápomocné k nalezení geometrického řešení než nápovědy u úlohy 3. To může být dáno obtížností a celkovým charakterem úlohy 3.

Úspěšnost žáků v obou úlohách je srovnatelná, u úlohy 3 dokonce trochu vyšší. Úloha 3 se mi jevila i vzhledem k přítomnosti proměnné obtížnější, ovšem výsledky to neukazují. Nejúspěšněji ze všech úloh byla řešena úloha 2 použitá ve druhé fázi hlavní studie.

6 Závěr

V závěrečné kapitole shrnu hlavní výsledky a nastíním možné pokračování svého výzkumu.

Odpovědi na výzkumné otázky

Na základě své výukové praxe jsem si všimla obtíží, které někteří žáci mají s řešením určitých typů úloh. Tyto úlohy jsem nazvala úlohy efektivně řešitelné bez výpočtu a vymezila je výčtem jejich charakteristik. Rešerše literatury ukázala, že žákovské strategie pro tyto typy úloh nejsou dostatečně probádané. Proto jsem se rozhodla této problematice věnovat. V pilotní studii jsem vybrala vhodné úlohy pro hlavní studii, formulovala jsem tři výzkumné otázky a stanovila několik hypotéz. Výsledky jsou podrobně shrnuty v závěrech hlavní studie, tedy v oddílech 5.4.1 až 5.4.3. Proto je nebudu opakovat, jen zmíním nejdůležitější aspekty.

1. *Jaké jsou strategie žáků při řešení RBV úloh (se zvláštním zřetelem na geometrické versus výpočtové strategie)? Jaké obtíže mají žáci s řešením těchto typů úloh?*
2. *Jaké druhy nápověd mohou vést žáka ke geometrickému řešení spíše než k výpočtovému?*
3. *Mění se žákovské strategie s věkem?*

Na základě analýzy žákovských řešení jsem stanovila pro každou úlohu použitá geometrická a výpočetní řešení. Jako účelné se ukázalo rozdělení geometrických způsobů z hlediska zastoupení T a SG strategických kroků, i když bylo někdy problematické rozhodnout, kam který geometrický krok zařadit. Za T geometrické řešení jsem prohlásila takové, kde byla převaha T kroků. Stejně pro SG geometrické řešení.

Ukázalo se, že žáci všech věkových skupin hojně využívají matematicky ne zcela korektní (přinejmenším pro starší žáky) kroky typu měření úseček, přerýsování zadání, poměřování úseček, manipulaci apod., a to nejen ve fázi získávání vhledu do řešení úlohy, ale i pro prezentování výsledků úlohy. To je ve shodě s výsledkem národního šetření, které prezentuje Duval (2006) (viz oddíl 3.4.1) a v němž jen malé procento žáků podalo T geometrické vysvětlení.

V mém výzkumu se dále ukázalo, že zejména mladší žáci jsou v používání SG kroků rezistentní k úsilí experimentátora či nápověd směrovat je k teoretickému náhledu. U mladších žáků jde do jisté míry o vývojové stádium, neboť geometrické objekty se teprve osamostatňují od svých reprezentací na papíře. Mohli bychom tedy v jazyce teorie didaktických situací říci, že se jedná o překážku ontogenetického původu (Brousseau, 1997) – žáci ještě ztotožňují geometrické útvary s jejich reprezentanty, nedospěli do abstraktní úrovně. U starších žáků, u nichž by se dalo očekávat, že si nekorektnost podobných kroků již uvědomují (tedy uvažují více teoreticky z hlediska vlastností ideálních geometrických útvarů), je nutné vzít v úvahu i fakt, že si nekorektnosti vědomi byli, ale nedokázali najít žádné jiné řešení, proto prezentovali alespoň toto.

V početních řešeních žáků se u obou úloh objevovala řada problémů. Žáci základní školy zaměňovali obvod a obsah, měli problémy s převody jednotek a často používali v dané situaci nevhodných vzorců. U žáků téměř všech ročníků byly numerické chyby. O výpočetní strategie se snažili zejména starší žáci a z nich zejména dívky. Starší dívky byly méně úspěšné než starší chlapci ale dokonce než mladší dívky. Jakoby se příliš upínaly na výpočetní řešení, nedovedly se od nich oprostit a podívat se na situaci čistě geometricky. Bohužel není možné říci, co bylo příčinou takového jevu. Výpočetní řešení je do jisté míry bezpečné, protože umožňuje využít procedury, které se ve škole pravidelně opakují a cvičí.

Co se týče nápověd, které jsem k úlohám vytvořila, ty byly pro přechod ke geometrickému způsobu řešení (což bylo jejich cílem) výrazně úspěšnější u starších žáků. Žáci potřebovali více nápověd u úlohy 1 a nápovědy k této úloze byly více nápomocné k nalezení geometrického řešení než nápovědy u úlohy 3. To může být dáno obtížností a celkovým charakterem úlohy 3.

U úlohy 1 i 3 je úspěšnost starších žáků téměř třikrát větší než mladších žáků, zatímco u úlohy 2 není nárůst úspěšnosti velký. To může být dáno charakterem úlohy, která je řešitelná pomocí rozeznání dílčí konfigurace obdélníku v obrázku a uvědomění si vlastnosti úhlopříček obdélníku. Jde tedy o látku prvního stupně základní školy. Ukazuje to však také to, že výuka matematiky k umění vidět příliš nepřispívá.

Hypotéza, že *u úloh typu RBV dávají žáci přednost výpočtovému řešení*, se potvrdila jen částečně. Mezi primárními strategiemi se u všech úloh objevily jak výpočtové, tak geometrické strategie. Starší žáci měli větší tendenci řešit úlohy výpočtově pomocí vzorců a byli v tom úspěšnější než mladší žáci. To, že významné procento žáků začalo úlohu 1 řešit výpočetně, přestože je T geometrické řešení poměrně jednoduché, může ukazovat na to, že jsou i u úloh z geometrie zvyklí zejména provádět výpočty a ne se učit „dívat" na obrázek a číst z něj. Z toho plynou určité pedagogické implikace (viz níže).

Hypotézy týkající se úspěšnosti (*Úspěšnost řešení úloh 1 a 2 je žáky srovnatelná. Úloha 3 bude mít díky přítomnosti proměnné nejmenší úspěšnost a na rozdíl od úlohy 1 bude častěji* *řešena výpočetními způsoby.)* se nepotvrdily. V úloze 2 byli žáci úspěšnější než v úloze 1 a naopak úloha 3 byla téměř stejně úspěšná jako úloha 1. Žáci se snažili více řešit geometricky úlohu 3 než úlohu 1, kde se oproti mému očekávání častěji objevovaly výpočetní způsoby. Jako možná překážka pro geometrické řešení se může projevit znalost matematických vzorců a algebraických postupů, které jsou v podstatě správné a které se žákům při řešení školních úloh již mnohokrát dobře osvědčily. Avšak ve spojení s přesvědčením žáků, že např. jen řešení obsahující výpočet je to správné „matematické“, může působit jako překážka přechodu k jinému způsobu řešení. Jednalo by se tedy o překážku didaktického původu ve smyslu G. Brousseau (1997). Takový závěr mohu učinit jen velmi opatrně. Z písemných řešení se vyčíst nedá, musela bych s každým žákem osobně v tomto smyslu hovořit.

Výsledky mého výzkumu potvrzují ve shodě s výzkumy v oddíle 3.4, že geometrické úlohy typu RBV jsou náročné a že umění vidět v geometrii není zcela samozřejmé a musí se vhodně zvolenými úlohami rozvíjet. Náročnost spočívá v prvním kroku, který je nutno učinit při řešení těchto úloh – rozeznat v obrázku možné dílčí konfigurace (přičemž u všech zkoumaných úloh je nutné nejprve do obrázku něco dokreslit či si představit, aby se tyto konfigurace zviditelnily) a mezi nimi ty, které v daném případě vedou k řešení. Druhý krok, který spočívá v uvědomění si vlastností geometrických útvarů z těchto dílčích konfigurací, je pak již jednodušší, protože se jedná o útvary známé žákům prvního či druhého stupně základní školy. Obtížnost úloh typu RBV tedy nelze redukovat poukázkou na to, že stačí znát vlastnosti základních geometrických útvarů.

Metodologické závěry a omezení výzkumu

Na základě svého výzkumu se domnívám, že je vhodné kombinovat kvalitativní výzkum s kvantitativním. Bez první fáze hlavní studie bych si nebyla vědoma variability strategických kroků, kterých žáci využívají, a těžko bych dokázala analyzovat písemná řešení ve druhé a třetí fázi. Třetí fáze je vhodným metodologickým kompromisem, protože jednak přinesla více dat, která se dají kvantitativně vyhodnotit, a jednak mi umožnila doptat se na nejasnosti, a snížit tak míru nejistoty vždy přítomné při interpretaci žákovských řešení.

Při čtení uvedených závěrů je dále nutné mít na paměti omezení mého výzkumu.

Závěry týkající se řešitelských strategií žáků u úloh typu RBV vyplývají z řešení tří konkrétních úloh tohoto typu. Je možné, že u jiných úloh by byly výsledky jiné. Já jsem byla omezena ve výběru vhodných úloh faktem, že jsem požadovala, aby byly řešitelné žáky různých věkových skupin.

Zejména u vyhodnocování výsledků třetí fáze se ukazovala složitost dané problematiky. Při každé interpretaci nějaké tabulky s daty se vynořovaly další otázky, další hlediska, která bylo nutno vzít v úvahu, abychom mohli hledat souvislosti a hlavně formulovat možné příčiny jevů. Ne vždy se daly v písemných řešeních sledovat, a tak i přes veškerou snahu o korektní interpretaci jsem se jistě dopustila řady nepřesností a zjednodušujících pohledů.

Pro porovnání mladších a starších žáků u úlohy 1 a 3 by bylo vhodnější, abych měla k dispozici nejen žáky druhého stupně základní školy, ale též žáky nižších ročníků gymnázia. To však v době, kdy probíhala třetí fáze hlavní studie, možné nebylo.

Konečně větší počet žáků by výsledky zpřesnil, protože by se eliminovaly různé nežádoucí vlivy, jako např. vliv třídy G.II.B („výjimečně šikovné třídy") na výsledky ve druhé fázi.

Možné pokračování výzkumu a aplikace v praxi

Výzkum není v žádném případě uzavřený. Jak již bylo uvedeno, řešitelské strategie by mohly být sledovány u jiných úloh typu RBV, s větším počtem respondentů. Analýzy by mohly jít do větší hloubky. Dále jsem jen naznačila možné rozdíly mezi řešením dívek a chlapců, které by si zasloužily větší pozornost a srovnání s relevantními výsledky výzkumu. Zajímavé by jistě bylo i prozkoumání toho, jak rozvíjet dovednost řešit úlohy typu RBV – např. formou dlouhodobé případové studie.

Výsledky mého výzkumu mají i praktické aplikace. Za prvé jde o identifikování geometrických úloh typu RBV mezi ostatními úlohami. V práci uvádím nejen ty, které jsem zkoumala, ale také úlohy použité v několika dalších výzkumech. Ty může učitel využít a navíc má možnost porovnat strategie jeho žáků s mými výsledky.

Má práce dále upozornila na fakt, že nezanedbatelné procento žáků má tendence automaticky začít s výpočtovými strategiemi, aniž by provedlo prvotní rozbor úlohy na základě analýzy obrázků. Příčinou může být i přílišný důraz na počítání na úkor konceptuálního porozumění (Kospentaris, Spyrou, Lappas, 2011). Např. pokud se zabýváme obsahem útvarů, je možné více využít úlohy, v nichž se obsah útvaru nepočítá, ale útvary se z hlediska obsahu jen porovnávají. V případě TIMSS úlohy z oddílu 3.4.6 je při využití třetí strategie okamžitě vidět, že obsah trojúhelníku je polovina obsahu čtverce. Dalším úkolem, který vede spíše ke konceptuálnímu porozumění obsahu trojúhelníku, je úkol v programu dynamické geometrie nechat žáky experimentovat s trojúhelníkem, konkrétně posunovat jeden jeho vrchol po přímce a sledovat, jak se mění obsah tohoto trojúhelníku. Tím zjistí, že obsah trojúhelníku závisí na jeho výšce, a následně i to, že když onu přímku sestrojí jako rovnoběžku s protilehlou stranou trojúhelníku, pak se obsah trojúhelníku nemění (Vaníček, 2009, s. 95). J. Vaníček uvádí, že tento úkol mohou žáci plnit i v době, kdy už žáci vzorec pro obsah trojúhelníku znají – pak slouží jako diagnostická úloha jejich porozumění.

Neschopnost žáků identifikovat v obrázku relevantní dílčí konfigurace si zaslouží pozornost učitelů (i badatelů). Domnívám se, že se jedná o určité kritické místo školské matematiky, kterému se však nepřikládá velký důraz. Žáci by se měli v geometrii více setkávat s úlohami, které se dají řešit bez výpočtu a zdůrazňují spíše porozumění pojmům než výpočtové postupy. Vždyť matematice se učíme právě řešením úloh.

Závěrem si dovolím osobní poznámku. Při své práci jsem se naučila nejen naplánovat a realizovat výzkumné šetření a analyzovat žákovská řešení, ale též jsem získala mnohem hlubší vhled do matematického myšlení mých žáků. Zjistila jsem, že jejich matematický svět je mnohem barvitější a jejich přístupy často originální, i když často ne zcela matematicky korektní.

7 Seznam literatury

Borba, M.C., Villarreal, M. E. (2005). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking*. The USA: Springer.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. 1. vyd. The Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Brown, D. L., Wheatley, G. (1997). Components of imagery and mathematical understanding, *Focus on Learning Problems in Mathematics,* vol. 19, no. 1, 45–70.

Dreyfus, T., Eisenberg, T**.** (1986). On visual versus analytical thinking in mathematics. In *Proceedings of the 10th PME International konference.* London: University of London, Institute of Education, vol. 1, 152–158.

Dreyfus, T., Eisenberg, T. (1990). On difficulties with diagrams: Theoretical Issues. In Booker G., Cobb P., Mendicuti T. N. (Eds.), *Proceedings of the 14th PME International konference*. Mexico: Oaxtapec, vol. 1, 27–34.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* vol. 61, no. 1, 103–131.

Eisenberg, T., Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. In Zimmermann, W. Cunningham, S. (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics*. Washington, DC: The Mathematical Association of America, MAA Notes, 19, 26–37.

Fujita, T., Jones, K. (2002). The bridge between practical and deductive geometry: Developing the ‚geometrical eye'. In Cockburn A. D., Nardi E. (Eds.), *Proceedings of the 26th PME International Conference.* Norwich: University of East Anglia, vol. 2, 384–391.

Gal, H., Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational studies in mathematics*, vol. 74, no. 2, 163–183.

Gerrig, R. J. (1991). Text comprehension. In Sternberg, R. J., Smith, E. E. (Eds.), *The Psychology of Human Thought*. Cambridge: Cambridge University Press, 244–245.

Godfrey, C. (1910). The board of education circular on the teaching of geometry. *Mathematical Gazette,* 5, 195–200.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: in search of a framework. In Puig, L., Gutiérrez, A. (Eds.), *Proceedings of PME20.* Spain: University of Valencia, vol. 1, 3–19.

Hartl, P., Hartlová, H. (2000). *Psychologický slovník*. Praha: Portál.

Hejný, M. (2007). Budování matematických schémat. In Hošpesová, A., Stehlíková, N., Tichá, M. (Eds.), *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice.* České Budějovice: Jihočeská univerzita, 81–121.

Chinnappan, M. (1998). Schemas and mental models in geometry problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 36, no. 3, 201–217.

Jirotková, D. (2010). *Cesty ke zkvalitňování výuky geometrie.* Praha: UK v Praze, Pedagogická fakulta. 330 s.

Kordaki, M. (2003). The effect oftools of a computer microworld on students‘ strategies regarding the concept of conservation of area. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 52, no. 2, 177–209.

Kospentaris, G., Spyrou, P., Lappas, D. (2011). Exploring students’ strategies in area conservation geometrical tasks. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 77, no. 1, 105–127.

Kuřina, F. (1989). *Umění vidět v matematice*. 1. vyd. Praha: SPN.

Kuřina, F. (1996). *10 pohledů na geometrii*. 1. vyd. Praha: Matematický ústav AV ČR.

Kuřina, F. (2002a). O matematice a jejím vyučování. *Obzory matematiky, fyziky a informatiky,* roč. 31, č. 1, 1–8.

Kuřina, F. (2002b). Realismus konstruktivních přístupů k vyučování matematice. *Disputationes Scientificae Universitatis Catholicae in Ružomberok*, roč. 2, č. 1, 40–47.

Kuřina, F. (2006). Geometrie jako příležitost k rozvoji žákovských kompetencí. In *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP : Studijní materiály k projektu.* 1. vyd. Praha: JČMF. CD ROM. 43 stran.

Kuřina, F. (2011). *Matematika a řešení úloh.* České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích.

Laborde, C. (2005). The Hidden Role of Diagrams in Students’ Construction of Meaning in Geometry. In Kilpatrick, J., Hoyles, C., Skovsmose, O. (Eds.), *Meaning in Mathematics Education.* New York: Springer, 159–179.

Mesquita, A. L. (1998a). On Conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *Journal of Mathematical Behavior,* vol. 17, no. 2, 183–195.

Mesquita, A. L. (1998b). Cit. v (Duval, 2006), v seznamu literatury však chybí.

Nakanishi, C. (1987). The analysis of the difficulties of proof. In Koseki, K. (Ed.), *The Teaching of Demonstration in Geometry*. Tokyo: Meiji Publisher, 129–158.

Novotná, J., Pelantová, A., Hrabáková, H., Krátká, M. (2006). Příprava a analýza didaktických situací. In *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP : Studijní materiály k projektu.* 1. vyd. Praha: JČMF. CD ROM.

Piaget, J. (1999.) *Psychologie inteligence.* Praha: Portál.

Poincaré, H. (1902/1968). *La science et l'hypothese.* Paris: Flammarion.

Roubíček, F. (1999). Pojem vizualizace v didaktice matematiky. In *XVII Mezinárodní kolokvium o řízení osvojovacího procesu II (sborník příspěvků)*. Vyškov: VVŠPV, 184–187.

Senechal, M. (1991). Visualisation and visual thinking. In Makevitch J. (Ed.), *Geometry's future*. Alrington, MA: Community Map Analysis Project, 15–21.

Sternberg, R. J. (2002). *Kognitivní psychologie*. 1. vyd. Praha: Portál.

Stylianou, D. (2001). On the reluctance to visualise in mathematics: Is the picture changing? In van den Heuvel-Panhuizuen, M. (Ed.), *Proceedings of the 25th PME International Conference.* Utrecht: Freudenthal Institute, Utrecht University, vol. 4, 225–232.

Stylianou, D. A. (2002). On the interaction of visualization and analysis: the negotiation of a visual representation in expert problem solving, *Journal of Mathematical Behavior,* vol. 21, no. 3, 303–317.

Švaříček, R., Šeďová, K. a kol. *Kvalitativní výzkum v pedagogických vědách*. Praha: Portál, 2007.

Tomášek, V. a kol. (2009). *Výzkum TIMSS 2007. Úlohy z matematiky pro 8. ročník*. Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání.

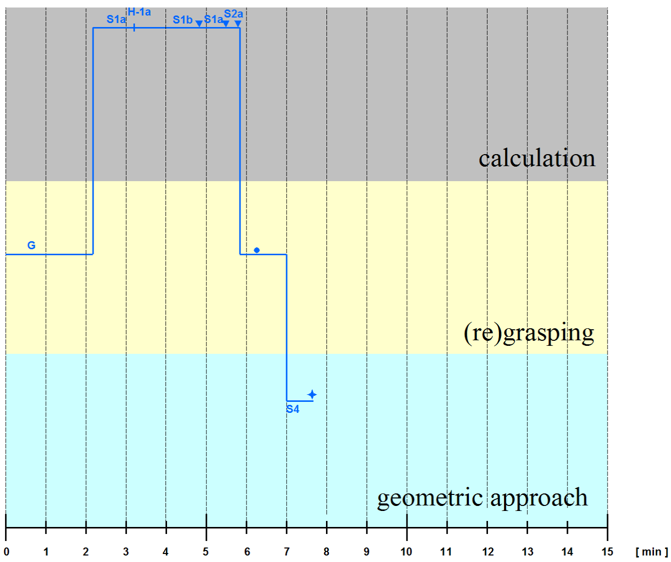
Vaníček, J. (2009). *Počítačové kognitivní technologie ve výuce geometrie*. Praha: UK v Praze, Pedagogická fakulta. 212 s.

Zazkis, R., Dubinsky, E., Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: a study of students' understanding. *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 27, no. 4, 435–437.

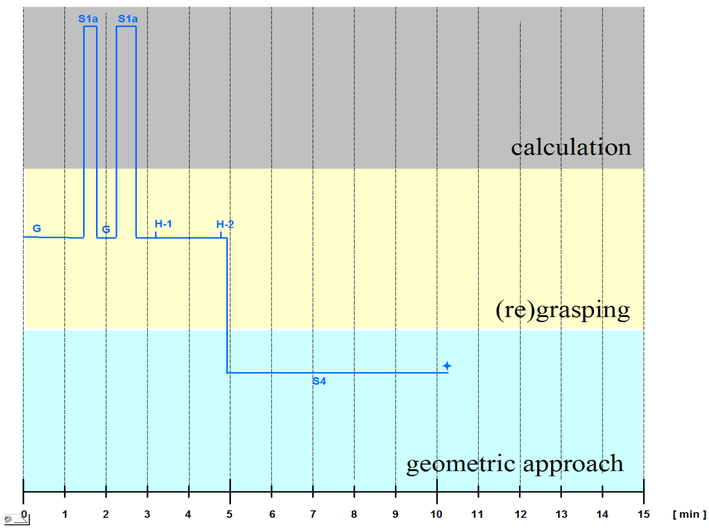
8 Přílohy

Příloha 1: Grafická schémata pro žáka 6. ročníku

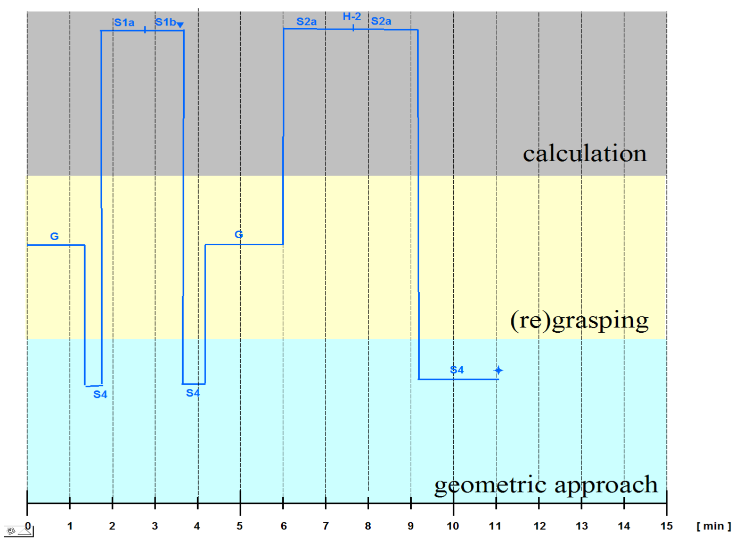
Úloha 1



Úloha 2

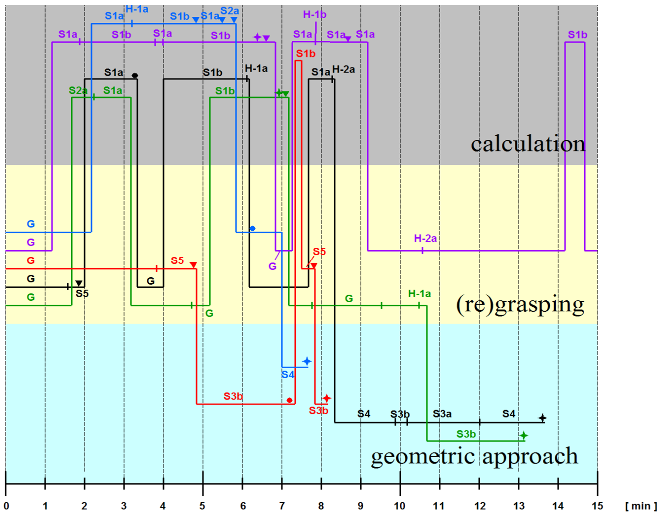


Úloha 3

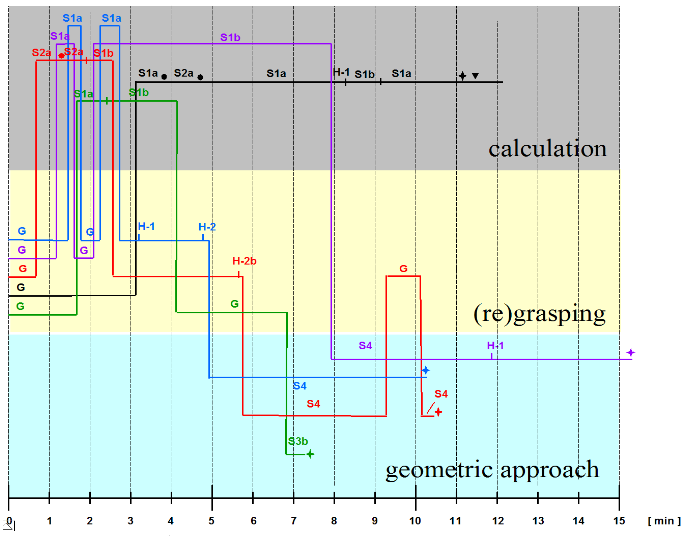


Příloha 2: Grafická schémata pro žáky základní školy pro jednotlivé úlohy

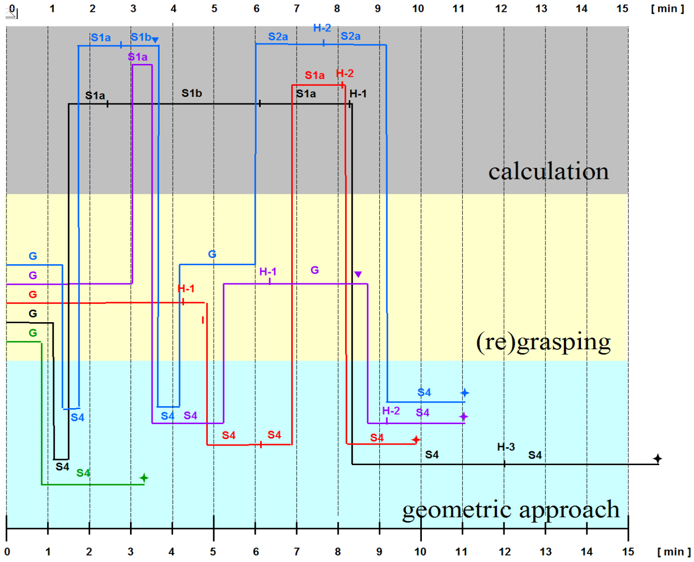
Úloha 1



Úloha 2

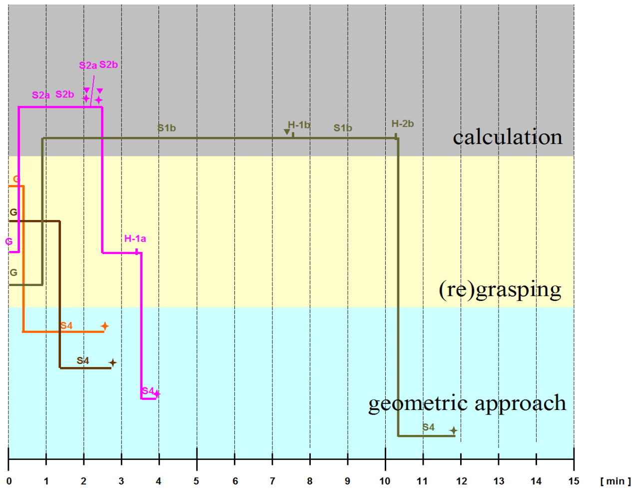


Úloha 3

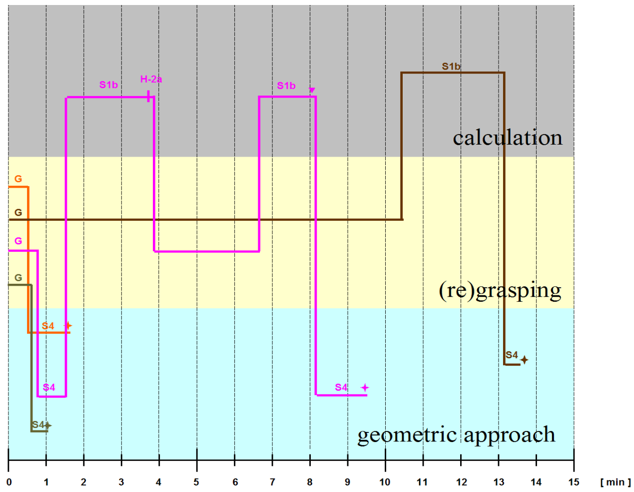


Příloha 3: Grafická schémata pro žáky gymnázia pro jednotlivé úlohy

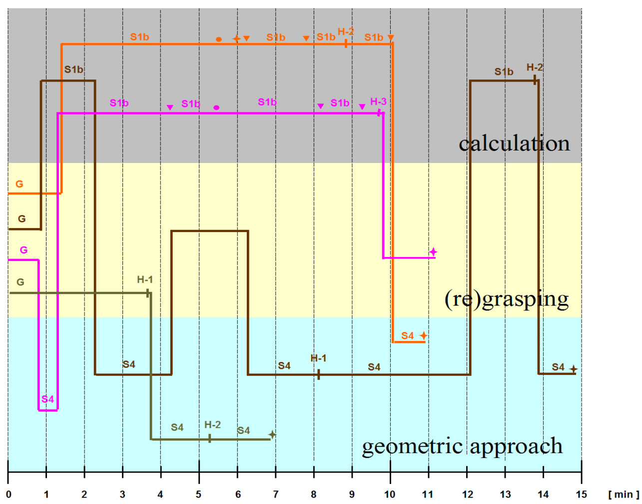
Úloha 1



Úloha 2



Úloha 3



Příloha 4: Tabulky ke grafům z oddílu 5.2 (pro úlohu 2 z druhé fáze hlavní studie)

Tabulky ke grafům z oddílu 5.2.3

Tabulka ke grafu na obr. 5.2.1 (Úspěšnost řešení úlohy 2 po třídách)

Ročníky	**Úspěšná řešení (%)**	**Neúspěšná řešení (%)**
G.I.A	60	40
G.II.B	88,5	11,5
Z.8.A	61,2	38,8
G.IV.A	77,8	22,2
G.VI.A	86,4	13,6

Tabulka ke grafu na obr. 5.2.2 (Průměrný čas řešení úlohy 2 po třídách)

Ročníky	**Průměrný čas (min)**	**Průměrný čas úspěšných (min)**
G.I.A	10,1	8,7
G.II.B	7,48	7,1
Z.8.A	7,1	6,45
G.IV.A	9,3	8,5
G.VI.A	8,62	8,05

Tabulky ke grafům z oddílu 5.2.4

Tabulka ke grafu na obr. 5.2.3 (Procentuální zastoupení geometrických strategických kroků v T i SG prostoru a výpočetních kroků)

Ročníky	**T**	**SG**	**P**
G.I.A	23,81%	52,38%	23,81%
G.II.B	56,25%	37,50%	6,25%
Z.8.A	35,29%	5,88%	58,82%
G.IV.A	48,28%	37,93%	13,79%
G.VI.A	60,00%	10,00%	30,00%

Tabulka ke grafu na obr. 5.2.9 (Primárně použitý způsob řešení u úlohy 2)

Ročníky	**Používání vzorců**	**Čistě geometrické řešení**
G.I.A	10,00%	90,00%
G.II.B	3,70%	96,30%
Z.8.A	36,84%	63,16%
G.IV.A	14,81%	85,19%
G.VI.A	40,91%	59,09%

Tabulky ke grafům z oddílu 5.2.5

Tabulka ke grafu na obr. 5.2.10 (Úspěšnost řešení úlohy 2 pro skupinu mladších a starších žáků)

	Úspěšná řešení (%)	Neúspěšná řešení (%)
A	71,93%	28,07%
B	79,59%	20,41%

Tabulka ke grafu na obr. 5.2.11 (Jako obr. 5.2.10 s rozdělením na dívky a chlapce)

	Úspěšná řešení (%)	Neúspěšná řešení (%)
A dívky	76,47%	23,53%
A chlapci	65,22%	34,78%
B dívky	65,00%	35,00%
B chlapci	89,66%	10,34%

Tabulka ke grafu na obr. 5.2.12 (Procentuální zastoupení geometrických strategických kroků v T i SG prostoru a výpočetních kroků pro mladší a starší žáky)

	T	SG	P
A	37,84%	45,95%	16,22%
B	54,24%	23,73%	22,03%

Tabulka ke grafu na obr. 5.2.13 (Jako obr. 5.2.12 s rozdělením na dívky a chlapce)

	T	SG	P
A Dívky	34,78%	47,83%	17,39%
A Chlapci	42,86%	42,86%	14,29%
B Dívky	50,00%	13,64%	36,36%
B Chlapci	56,76%	29,73%	13,51%

Tabulka ke grafu na obr. 5.2.14 (Primárně použité strategie u skupin mladších a starších žáků)

	Používání vzorců	Čistě geometrické řešení
A	7,02%	92,98%
B	26,53%	73,47%

Tabulka ke grafu na obr. 5.2.15 (Jako obr. 5.2.14 s rozdělením na dívky a chlapce)

	Používání vzorců	Čistě geometrické řešení
A Dívky	11,76%	88,24%
A Chlapci	0,00%	100,00%
B Dívky	40,00%	60,00%
B Chlapci	17,24%	82,76%

Příloha 5: Ukázka tabulky pro zaznamenávání strategických kroků

Pomocí tabulky, ze které je zde pouze výřez pro dva ročníky, bylo možné zaznamenat větší množství informací pro každého žáka. Tito žáci jsou označeny v levém sloupci kódem, který jim byl přidělen ihned v počátku experimentu. Jedná se o šestimístné číslo, kde první dvojčíslí znamená kód třídy a školy, druhé dvojčíslí znamená věk a současně pohlaví žáka (u chlapců přímo věk, u dívek je ke skutečnému věku přičteno 50) a třetí dvojčíslí znamená pořadové číslo žáka v daném ročníku.

Tabulka shrnuje obě dvě úlohy a je z ní možné vyčíst, zda se žák neúspěšně pokusil úlohu řešit početně (P) či geometricky (G). Pokud bylo jeho řešení úspěšné, je dané políčko podbarveno fialově a opatřeno kódem řešitelské strategie, které jsou popsané v oddíle 5.3.4 (Řešitelské strategie potenciálně vedoucí k úspěšnému vyřešení úlohy) v tab. 5.3.4 (Řešitelské strategie, které mohou vést k úspěšnému vyřešení úlohy).

Tabulka dále zaznamenává, které nápovědy žák v průběhu své práce obdržel. Sloupce s těmito informacemi jsou modré a označeny kódem nápovědy. Pro každého žáka tak mohu vyčíst, zda danou nápovědu dostal (A), nebo nedostal (N).

Díky této tabulce bylo možné jednoduše zjistit (a to i zvlášť pro dívky a chlapce):

- Kolik žáků využilo nápověd a kolik nápověd bylo.
- Kolik žáků úspěšně vyřešilo úlohu a pomocí jaké strategie.
- Kolik žáků vyřešilo úlohu po obdržení nápovědy, kolik nápověd k vyřešení úlohy potřebovali a které to byly.
- Kolik žáků nalezlo více řešitelských strategií.
- Kolik žáků změnilo řešitelskou strategii v průběhu své práce a kolika z nich k tomu pomohla nápověda.
- Zda žák primárně úlohu řešil geometricky či početně bez ohledu na úspěšnost řešení.

G.V.A	ÚLOHA 1							ÚLOHA 3						
	1. řeš.	2. řeš.	N1b	3. řeš.	4. řeš.	N2a	5. řeš	1. řeš.	2. řeš.	N2	3. řeš.	4. řeš.	N3	5. řeš
126601	G		A	P	T1	N		P		A	P5		A	T2
121702	G		N			N				A	T2		N	
126603	P		N			A	T1	T2		N			N	
126604	P		A	T1		N		T2		N			N	
126605	SG1		N			N		T2		N			N	
121607	T1		N			N		P	T2	N			N	
126508	SG1		N			N		O	T2	N			N	
126609	P2		N			N		T2		N			N	
121610	T1		N			N		P	T2	N			N	
121611	T1		N			N		T2		N			N	
121612	SG1		N			N		P	T2	N			N	

G.VI.A	ÚLOHA 1							ÚLOHA 3						
	1. řeš.	2. řeš.	N1b	3. řeš.	4. řeš.	N2a	5. řeš	1. řeš.	2. řeš.	N2	3. řeš.	4. řeš.	N3	5. řeš
136701	P2		A	T1		N		P	T5	N			N	
131702	P		A	O		N		O	T2	N			N	
136703	P2		A	T1		N		P4		A	P5		N	
136604	P2		A	T1		N		P		N			A	T2
131705	T1		N			N		P5		N			N	
136706	P2		N			N		P3		N			N	
136707	P2	SG2	N			N		P3	T2	N			N	
136708	P	SG1	N			N		P5		A	P5		N	
131709	SG2		N			N		P	T2	N			N	
136710	T1	P2	N			N		SG5	P5	N			N	
131611	T1		N			N		SG5		N			N	
136712	P2		N			N		T4		A	P3		N	

Příloha 6: Tabulky ke grafům z oddílu 5.3 (pro úlohu 1 a 3 ze třetí fáze hlavní studie)

Tabulky ke grafům z oddílu 5.3.5

Tabulka ke grafu na obr. 5.3.12 (Zastoupení strategií typu T, SG a P u úlohy 1 v řešení žáků jednotlivých tříd)

	T	SG	P	Nevyřešili
6. roč	5,88%	0,00%	0,00%	94,12%
7. roč.	10,53%	0,00%	0,00%	89,47%
8. roč.	29,63%	25,93%	3,70%	40,74%
9. roč.	18,75%	25,00%	6,25%	50,00%
G.V.A	54,55%	27,27%	9,09%	9,09%
G.VI.A	25,00%	16,67%	50,00%	8,33%
G.VII.A	27,27%	45,45%	27,27%	0,00%
G.VIII	17,65%	17,65%	64,71%	0,00%

Tabulka ke grafu na obr. 5.3.13 (Zastoupení úspěšně použitých strategií typu T, SG a P u úlohy 3 v řešení žáků jednotlivých tříd)

	T	SG	P	Nevyřešili
6. roč	6,67%	0,00%	0,00%	93,33%
7. roč.	26,32%	0,00%	0,00%	73,68%
8. roč.	46,67%	13,33%	0,00%	40,00%
9. roč.	50,00%	0,00%	0,00%	50,00%
G.V.A	90,91%	0,00%	9,09%	0,00%
G.VI.A	41,67%	16,67%	41,67%	0,00%
G.VII.A	63,64%	9,09%	27,27%	0,00%
G.VIII	50,00%	0,00%	37,50%	12,50%

Tabulky ke grafům z oddílu 5.3.6

Tabulka ke grafu na obr. 5.3.14 (Primárně použité strategie typu G a P u úlohy 1 u žáků jednotlivých tříd)

	G	P	Neřešili
6. roč	0,00%	94,12%	5,88%
7. roč.	5,26%	57,89%	36,84%
8. roč.	70,37%	29,63%	0,00%
9. roč.	56,25%	43,75%	0,00%
G.V.A	72,73%	27,27%	0,00%
G.VI.A	33,33%	66,67%	0,00%
G.VII.A	63,64%	36,36%	0,00%
G.VIII	29,41%	70,59%	0,00%

Tabulka ke grafu na obr. 5.3.15 (Primárně použité strategie typu G a P u úlohy 3 u žáků jednotlivých tříd)

	G	P	Neřešili
6. roč	40,00%	46,67%	13,33%
7. roč.	42,11%	52,63%	5,26%
8. roč.	86,67%	6,67%	6,67%
9. roč.	57,14%	35,71%	7,14%
G.V.A	63,64%	36,36%	0,00%
G.VI.A	33,33%	66,67%	0,00%
G.VII.A	45,45%	54,55%	0,00%
G.VIII	25,00%	75,00%	0,00%

Tabulky ke grafům z oddílu 5.3.9

Tabulky ke grafu na obr. 5.3.19 (Zastoupení úspěšně použitých strategií typu T, SG a P u úlohy 1 (vlevo) a 3 (vpravo) pro skupiny ZŠ a G)

Úloha 1	T	SG	P	Nevyřešili
ZŠ	17,72%	13,92%	2,53%	65,82%
G	29,41%	25,49%	41,18%	3,92%

Úloha 3	T	SG	P	Nevyřešili
ZŠ	31,75%	3,17%	0,00%	65,08%
G	60,00%	6,00%	30,00%	4,00%

Tabulky ke grafu na obr. 5.3.20 (Zastoupení úspěšně použitých strategií typu T, SG a P u úlohy 1 (vlevo) a 3 (vpravo) pro skupiny C a D)

Úloha 1	T	SG	P	Nevyřešili
C	17,46%	11,11%	1,59%	69,84%
D	22,50%	25,00%	50,00%	2,50%

Úloha 3	T	SG	P	Nevyřešili
C	26,53%	4,08%	0,00%	69,39%
D	51,28%	7,69%	35,90%	5,13%

Tabulky ke grafu na obr. 5.3.21 (Primárně použité strategie u úlohy 1 (vlevo) a 3 (vpravo) pro skupiny ZŠ a G)

Úloha 1	G	P	Neřešili
ZŠ	36,71%	53,16%	10,13%
G	47,06%	52,94%	0,00%

Úloha 3	G	P	Neřešili
ZŠ	55,56%	36,51%	7,94%
G	40,00%	60,00%	0,00%

Tabulky ke grafu na obr. 5.3.22 (Primárně použité strategie u úlohy 1 (vlevo) a 3 (vpravo) pro skupiny C a D)

Úloha 1	G	P	Neřešili
C	31,75%	55,56%	12,70%
D	40,00%	60,00%	0,00%

Úloha 3	G	P	Neřešili
C	55,10%	36,73%	8,16%
D	33,33%	66,67%	0,00%

Tabulka ke grafu na obr. 5.3.23 (Zastoupení úspěšně použitých strategií typu T, SG a P u úlohy 1 až 3 u všech žáků)

	T	SG	P	Nevyřešil
Úloha 1	22,31%	18,46%	17,69%	41,54%
Úloha 2	35,62%	21,92%	19,86%	22,60%
Úloha 3	44,25%	4,42%	13,27%	38,05%

Tabulka k obr. 5.3.24 (Primárně použité strategie u úlohy 1 a 3 pro všechny žáky)

	G	P	Neřešili
Úloha 1	40,77%	53,08%	6,15%
Úloha 3	48,67%	46,90%	4,42%

Tabulky k obr. 5.3.25 (Zastoupení úspěšně použitých strategií typu T, SG a P u úlohy 1 (vlevo) a 3 (vpravo) pro skupiny dívek a chlapců)

Úloha 1	T	SG	P	Nevyřešil
Dívky	26,56%	14,06%	23,44%	35,94%
Chlapci	18,18%	22,73%	12,12%	46,97%

Úloha 3	T	SG	P	Nevyřešil
Dívky	39,66%	1,72%	20,69%	37,93%
Chlapci	49,09%	7,27%	5,45%	38,18%

Tabulky k obr. 5.3.26 (Primárně použité strategie u úlohy 1 (vlevo) a 3 (vpravo) pro dívky a chlapce)

Úloha 1	G	P	Neřešili
Dívky	37,50%	59,38%	3,13%
Chlapci	43,94%	46,97%	9,09%

Úloha 3	G	P	Neřešili
Dívky	44,83%	48,28%	6,90%
Chlapci	52,73%	45,45%	1,82%