Posudek oponenta diplomové práce **F. Laciny** s názvem

Stochastic Integrals

Student se ve své diplomové práci věnuje různým definicím stochastického integrálu (SI) v případech, kdy je (SI) definován jako limita v pravděpodobnosti nebo po trajektoriích.

Práce je psána (jakoby narychlo) v angličtině, což vhledem k ledabylé úrovni práce vede k mísení několika zdrojů chyb a výsledkem je faktická nečitelnost některých částí textu. Extrémním příkladem je znění věty 40, která jako jedna z mála není opsaná z jiných zdrojů. Podle všeho se zde setkává neschopnost autora formulovat matematický výrok s nepozorností a nedůsledností při formulaci věty v angličtině. Zde klíčem k rozluštění autorovy formulace je rozpoznání dvou identických chyb spočívající v záměně dvou anglických slov *is* a *if*. Čitelnost práce snižují i chyby typu *if* místo *of*, *an* místo *and*.

Zmiňovanou nedůslednost lze vystopovat již na samém začátku práce a to v definici 2, znění lemmatu 1 a v poznámce ještě před definicí 2. Zmíněná poznámka je v diplomové práci špatně opsaná do té míry, že neplatí, přičemž lze snadno najít triviální protipříklad. V definici 2 jsou to chybějící závorky u faktoru -1^n a chybějící n-tá mocnina u diferenciálu v čitateli, ve znění lemmatu 1 je to rovnost $H_n(x) = (-1)^n H_n(x)$, která dává tušit, že znění tohoto lemmatu bylo zřejmě špatně opsáno. Kromě toho je chybně opsán i předcházející rekurzivní vzorec, ve kterém na levé straně chybí faktor $(n+1)$. Toto je spíše typický případ situace, která se v práci objevuje relativně často, kdy je uvedeno znění, které budí oprávněné pochybnosti s tím, že důkaz není uveden vzhledem k převážně kompilačnímu charakteru práce.

Jedny z nejzávažnějších chyb, které studentovi obrazně lámou vaz, jsou definice Malliavinovy derivace (definice 9 - vzorec (1.8), část 1.5.1, definice 14 - vzorec (1.41)). Malliavinova derivace je jedním z ústředních pojmů diplomové práce a ani jedno ze (všech) tří uvedení není oproštěno od chyb, které nezasvěceného čtenáře naprosto vyřadí ze hry.

Tyto a další faktická nedopatření znemožňují efektivní čtení práce bez soustavné opory podkladové literatury, která však není vždy dostatečně precizní, aby studentovi dovolovala beztrestně opsat znění jednotlivých vět. Zde je vhodné poznamenat, že student znění vět neopisuje doslova, což je v tomto případě spíše na škodu, neboť provedené změny čitelnost práce spíše zhoršují, ačkoli vzhledem k nedůslednosti v podkladové literatuře se zde prostor na vylepšení přímo nabízí.

Student v závislosti na zdroji naprosto pomíjí množinu míry nula (jako Nualart), či ji zmiňuje např. ve větách 25, 26, 27 (podobně jako Zähle). V práci tak není sjednocen přístup k množině míry nula a pochopitelně není ani uvedena poznámka, jak se k pomíjení množiny míry nula stavět tak, aby bylo zabráněno nedorozuměním či chybám. Bohužel zde není možné beztrestně množinu míry nula ignorovat. Objevují se zde totiž situace, kdy taková ignorace vede k systematickému vynechávání podstatných předpokladů.

Abych upozornil na důležitost ostražitosti vůči množině míry nula při zacházení se stochastickým integrálem, uvádím následující příklad omezený na interval $[0,1]$.
(a) Z vlastností Itôova integrálu plyne, že existuje měřitelná funkce I taková, že platí $I(H,W) \overset{\text{sj}}{=} \int_0^1 H \,\mathrm{d}W$, kdykoli H je spojitý $\mathcal{F}^W$-adaptovaný proces, kde W je Wienerův proces.
(b) Z věty 30 a vzorců (1.21, 3.8) plyne, že existuje L^2 integrál $(L^2)\int_0^1 W\,\mathrm{d}W$ a sj. se liší od $I(W,W)$.
(c) Z definice L^2 integrálu pak plyne, že existuje měřitelná funkce L taková, že

$$L(W,W) \overset{\text{sj}}{=} (L^2)\int_0^1 W\,\mathrm{d}W, \quad L(f,W) \overset{\text{sj}}{=} (L^2)\int_0^1 f\,\mathrm{d}W \overset{\text{sj}}{=} \int_0^1 f\,\mathrm{d}W \overset{\text{sj}}{=} I(f,W), \quad f \in L^2[0,1].$$

(d) Protože má Wienerův proces spojité trajektorie, závěrem zde je, že pro každé $\tilde{\omega} \in \Omega$ platí rovnost

$$I(W(\tilde{\omega}),W) \overset{\text{sj}}{=} L(W(\tilde{\omega}),W), \qquad \text{ale} \qquad I(W,W) \overset{\text{sj}}{\neq} L(W,W).$$

Množina $N \triangleq \{(f,w) \in (\mathbb{C}[0,1])^2; I(f,w) \neq L(f,w)\}$ má tak řezy $N_f \triangleq \{w \in \mathbb{C}[0,1]; (f,w) \in N\}$ nulové Wienerovy míry, ale její diagonála má plnou Wienerovu míru $P_{\{W_t; t\in[0,1]\}}$.

- Ve větě 8 na str. 8 student nepožaduje měřitelnost trajektorie funkce, kterou integruje podle Wienerova procesu a to jak ve znění na pravé straně vzorce (1.6) tak i v důkaze. Zde jde o to, že integrál $\int_0^{t_2} f(t_1,t_2)\,\mathrm{d}B_{t_1}$ nemusí být definován tak, že výsledek je skutečně funkce měřitelná v proměnné t_2 a následná integrace podle Wienerova procesu dostává velmi pochybný charakter.
- Malliavinova derivace je definována jako proces s hodnotami v Hilbertově prostoru H (aniž je zmíněno, že jednoznačně pouze skoro jistě). Na straně 10 při volbě $H = L^2(X,\mathcal{B},\mu)$ je již interpretována jako reálný náhodný proces, ačkoli to předpokládá, že pro pevné t je odpovídající hodnota D_tF náhodná veličina, což mj. znamená, že musí být nějak definována. Zde pro t pevné lze pro každé $\omega \in \Omega$ vybrat reprezentaci $DF(\omega) \in L^2(X,\mathcal{B},\mu)$, která v bodě t mají libovolnou hodnotu. Ve výsledku tak pro t pevné D_tF může být cokoli a to i funkce proměnné ω, která v této proměnné není měřitelná. Zde je tedy naprosto vynechán předpoklad, že uvažované funkce musí být sdruženě měřitelné, což mj. umožňuje používat Fubiniho větu a beztrestně zaměňovat *skoro jistě* a *skoro všude*.
- Příkladem situace, kdy student pomíjí předpoklad, že Malliavinova derivace je *měřitelným* procesem, je lemma 12. Ve znění lemmatu 12 má student chybně uvedeno *skoro jistě* na kartézském součinu, přičemž uvažovaná míra nemusí být pravděpodobnostní, protože je součinem pravděpodobnostní míry a nějaké obecné σ-konečné míry. Tato chyba by sama o sobě při *opisování* lemmatu 12 nebyla tak významná, pokud by nebyla součástí sítě tragických chyb. Navíc charakter chyby spíše naznačuje chybnou či ne zcela domyšlenou interpretaci tvrzení, které lemma 12 představuje. Kromě toho se ve znění zmiňovaného lemmatu objevuje nedefinovaný symbol $\mathcal{F}_A$.

Student má také potíže s užitím značení $\to$ pro zobrazení, viz L5 (str. 6), D10 (str. 11) a dokonce občas vynechává střední hodnotu, viz důsledek na str. 9 a *trojnásobné vynechání střední hodnoty* na str. 13. Zde navíc volí chybnou strategii výpočtu tím, že začíná rovností, kterou chce ukázat. Občas má student problémy s kvantifikací parametru p, viz důkaz P10 na str. 10, T19 na str. 18, T20 na str. 19.

Způsob, kterým se student odkazuje na užívanou literaturu je tragický. Téměř výhradně k odkazu užívá číslo stránky, které v některých případech neodpovídá skutečnosti. U jednoho zdroje (Øksendal) vynechává celkem tři spoluautory.

V odkazech na Nualart (2006) se poslední odkaz liší od správného o jednu stranu. V odkazech na Nourdin, Peccati (2012) jsem všechny 4 odkazy vyhodnotil jako velmi nesprávné. V odkazech na Øksendal a spol. (2008) jsem dva odkazy vyhodnotil jako chybné a to odkaz na stranu 286 a poslední odkaz odkazující na stranu 130. V odkazech na Zähle (1998) jsem vyhodnotil dva odkazy jako chybné a to odkaz na str. 341 a druhý z odkazů na stranu 338.

Vlastní důkaz věty 40 je neefektivně prezentovaný, obsahuje chyby a to i v hlavním objektu, což první čtení důkazu naprosto znemožňuje, a čtenář je tak schopen důkaz přijmout až poté, co sám odstraní zásadní pochybení autora.

(1) Funkce f tak, jak je v důkaze definována, nesplňuje deklarovanou vlastnost

$$\forall\, x,y \in Z_n = \{k2^{-n}; k = 1,\dots,2^n\} \qquad |f(x)-f(y)| \geq |x-y|^\nu .$$

Pro některé hodnoty parametru ν lze totiž velmi brzy dojít ke sporu. Podle uvedené definice postupně dostaneme

$$f(0) = 0 = f(1), \qquad f\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2^{-\nu} =: a \in \left(\tfrac{1}{2},1\right), \qquad f\left(\tfrac{1}{4}\right) = a^2, \qquad f\left(\tfrac{3}{8}\right) = \tfrac{a(a+1)}{2}.$$

Pak ovšem pro $a \in (\frac{1}{2},1)$ dostatečně blízko 1 (tedy pro $\nu \in (0,1)$ blízko nule) platí

$$0 \leq f\left(\tfrac{3}{8}\right) - f\left(\tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{a(1-a)}{2} < a^3 = 8^{-\nu} = |\tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{4}|^\nu .$$

(2) Závěrem předchozího bodu je, že v definici funkce f je chyba a zřejmě i množina Z_n má být obohacena o bod 0. Podle všeho tak funkce f má být definována jako limita funkcí f_n, které jsou polygony s dělicími body tvořící množinu $Z_n = \{k2^{-n}; k = 0,1,\dots,2^n\}$ s hodnotou v $x \in Z_n$ definovanou předpisem

$$f_n(x) = \begin{cases} f_{n-1}(x), & \text{pokud } |f_{n-1}(x-2^{-n}) - f_{n-1}(x+2^{-n})| \geq 2a^n, \\ a^n + f_{n-1}(x-2^{-n}) \vee f_{n-1}(x+2^{-n}) & \text{jinak.} \end{cases}$$

(3) Pokud je hypotéza z předchozího bodu správná, pak chyba spočívá v tom, že v podmínce rozdělující jednotlivé větve je v diplomové práci místo správného znaménka $-$ uvnitř absolutní hodnoty uvedeno znaménko $+$. Bohužel tato chyba nejen v definici ale i následném důkazu deklarovaných tvrzení a to nejméně dvakrát, což svědčí minimálně o ztráty kontroly autora nad důkazem.

(4) Dále v důkazu na straně 46 minimálně dvakrát je opomenuta mocnina ν, jednou chybí pravá část absolutní hodnoty. Ve čtvrté deklarované vlastnosti je opět *if* místo *is*. Na straně 47 jsou dvakrát užity symboly $a, b \in \mathbb{R}$ ve dvou neslučitelných významech. Zde se hodí upozornit, že důkaz věty 40 má více než 4 strany a že v takovém případě je vhodné jej rozdělit do menších částí (lemmat) mj. i proto, aby si autor nad důkazem zachoval kontrolu, čehož zde zjevně dosaženo nebylo.

(5) Ve druhé odsazené formuli na straně 47 se studentovi rozutíkaly dolní a horní indexy u sumy $\sum_{k=n}^{\infty}$, přičemž následující suma na dalším řádku by měla být správně vynásobena hodnotou 3. První ze zmíněných nedopatření svým charakterem trochu připomíná nedopatření z definice 31, kde se omylem ocitl místo odkazu na literaturu symbol **?** svědčící o chvatném přístupu při sepisování práce. Podobně na straně 40 chybí \.

(6) O intervalu $I = [a, b]$ na straně 47 je třeba předpokládat, že je nedegenerovaný, tj. $a < b$.

(7) Ve třetí odsazené formuli na straně 48 má být M_{n_0} místo H_{n_0}. Na témže místě je první z četné série chyb, kdy index i prochází množinou, která by správně měla obsahovat i nulu, kterou ale neobsahuje. Na téže straně je minimálně osm chyb spočívající v nadbytečném užití levé či pravé závorky či její vynechání. Obě série chyb pokračují i na další straně.

(8) Na straně 48 v dolní části stránky je odsazená formule obsahující nerovnost

$$\tfrac{1}{2^n} + \tfrac{1}{2^n} > (d_{i+1} - d_i) + 2\eta,$$

která v závislosti na hodnotě $\eta \in (0, 2^{-n})$ nemusí platit, neboť zde $d_{i+1} - d_i = 2^{-n}$.

(9) Na konci strany 48 má místo T být malé t a na konci vzorce chybí pravá část absolutní hodnoty.

(10) V první dvouřádkové odsazené formuli na straně 48 je uveden výraz $|f(d_i) - f(p_{i+1})|$, ve kterém má místo indexu $i + 1$ být pouze index i.

Další poznámky.

(1) Ve větě 6 má student $L^2(X)$ místo $L^2(X^m)$, přičemž symbol $L^2(X^m)$ používá, aniž by se zmínil o tom, jak je definován.

(2) Proposition 13 je špatně opsáno. Pro daný Hilbertův prostor H a Skorochodův integrál $\delta : L^2(\Omega, H) \to L^2(\Omega)$ má být nejprve definován prostor $\mathbb{D}^{1,2}(H)$ a znění má být $\mathbb{D}^{1,2}(H) \subseteq \mathrm{Dom}(\delta)$. V práci má uvedeno $\mathbb{D}^{1,2} \subseteq \mathrm{Dom}(\delta)$, což není správně, neboť $\mathrm{Dom}(\delta) \subseteq L^2(\Omega; H)$ zatímco v práci je pro $p \in [1, \infty)$ definován prostor $\mathbb{D}^{1,p} \subseteq L^p(\Omega)$.

(3) Ve větě 19 na str. 18 má student kromě již zmíněné nespecifikované hodnoty parametru p dvě chyby v posledním vzorci, jednu na levé a jednu na pravé straně. Na levé straně zjevně chybí druhá mocnina a na pravé straně chybně užívá absolutní hodnotu. Zde student doplácí na to, že začátek i konec absolutní hodnoty se značí stejným symbolem.

(4) Ve větě 20 kromě také již dříve zmíněné chybějící kvantifikace p chybí ve vzorci (1.40) mocnina p a nerovnost ve vzorci (1.40) má být neostrá, protože pro $u \equiv 0$ nastává rovnost.

(5) Ve vzorci (1.42) má být na levé straně vyznačena závislost na hodnotě $u \in \mathrm{Dom}(\delta^m)$.

(6) V definici 16 ve vzorci (2.2) má být místo $(-1)^\alpha$ hodnota $(-1)^{-\alpha}$.

(7) V definici 17 ve vzorci (2.5) má být místo $x - y$ napsáno $y - x$.

(8) V definici 22 ve vzorci (2.9) chybí vztah k definované hodnotě I.

(9) Vzorec (2.14) je také špatně opsaný. Na pravé straně chybí integrační proměnná x u funkce g_{a+}. Chybně je okomentovaná hodnota α, místo které vystupuje α'. Navíc student přebírá velmi delikátní značení frakcionálního integrálu $\int_a^b \mathrm{d}g(x)\ f(x)$ funkce f podle g, přičemž vynechává poslední velmi chatrnou zábranu proti případnému nedorozumění ve formě mezery mezi $\mathrm{d}g(x)$ a mezi $f(x)$ a velmi matoucím způsobem píše $\int_a^b \mathrm{d}g(x)f(x)$.

(10) U Proposition 32 na straně 32 chybí předpoklad, že dva ze tří výrazů existují.

(11) Student se zavázal Kurzweilův integrál značit symbolem (K) jako Schwabik (1985), ale při používání jiné literatury, Tvrdý (2012), tento integrál bez varování označuje symbolem (SK).

(12) Ve vzorci (1.18) má být v prvním integrálu na pravé straně vytknuto F_j před integrál.
(13) Na pravé staně (1.19) u posledního integrálu chybí diferenciál $\mathrm{d}\mu_t$.
(14) Konstanta α_H užívaná ve vzorci (1.27) a (1.34) není zadefinována.
(15) Za vzorcem (1.25) v izometrii $1_{[0,T]} \to B_t^H$ má být místo T malé t.
(16) Vzorec (1.29) má být uveden pouze pro $\phi \in \mathcal{E}$. O prvcích $\mathscr{H}$ totiž není ukázáno, že by to byly funkce, a pro ně tak není pravá strana apriori definována.
(17) Vnoření $|\mathscr{H}|$ do $\mathscr{H}$ na str. 17 dole pro $H < 1/2$ nemá oporu v podkladové literatuře a ani v diplomové práci.
(18) Symbol $|\mathcal{P} \to 0|$ zaváděný v poznámce na straně 28 má být nejspíš ve tvaru $|\mathcal{P}| \to 0$, ve kterém se následně užívá.
(19) Věta na pomezí stran 23 a 24 v důkazu věty 22 je nešťastně formulována. Podle všeho má být místo Δ v části uvedené na straně 24 napsána příslušná norma dělení. Další otázkou je, zda lze spoléhat na následné tvrzení *It is well known that* ... Podle všeho je následné tvrzení víceméně pravdivé, ale autor tímto obratem podstatnou část důkazu vynechává a víceméně ji nechává na pospas čtenáři, který však tuto pasáž může oprávněně vnímat jako mezeru v důkazu. Pokud je tvrzení typu *well known* pravdivé, předpokládám, že pro studenta nebude žádný problém dodat příslušný odkaz na literaturu, kde je korektně zformulováno tvrzení, na které se relativně neurčitě student odkazuje.
(20) V přehledové části práce na straně 37 u definice *Anticipating integral* chybí suma přes $n \in \mathbb{N}_0$.
(21) Na straně 7 na konci prvního odstavce student bez jakéhokoli odkazu na nějaké matematické tvrzení píše, že násobný Wiener-Itôův integrál nemůže být definován po trajektoriích, což v případě, kdy se omezuje na deterministické integrandy, není pravda. Pro funkci $f \in L^2(X^m)$ totiž z tvrzeních téhož odstavce okamžitě plyne, že existuje posloupnost elementárních funkcí $(f_n)_{n=1}^{\infty} \in L^2(X^m)^{\mathbb{N}}$ taková, že $\sum_n \int (f - f_n)^2 \,\mathrm{d}\mu^m < \infty$. Pak ovšem $WI_m(f_n) \to WI_m(f)$ skoro jistě pro $n \to \infty$, a tedy $WI_m(f)$ zde může být definována jako limita $WI_m(f_n)$ v případech, kdy tato limita existuje a jako nula jinak.
(22) Kromě již zmíněných záměn mezi slovy *is* a *if* student občas vynechává sloveso *be* v konstrukci Let - be. V práci lze také narazit na následující víceméně typografické chyby decompostion (str. 2), aslo (13), functions (16), trajectiories (24), stochsatic (25), refference (35), Itôintegral (42), assumtpions (49), ptoblem (51), approcah (52), kurzweil-henstock (52), chybějící n ve spojení: for a give n.
(23) Ve větě 22 značí student dvě odlišné věci symbolem v.
(24) Na konci vzorce (3.8) má místo malého t být velké T.
(25) Student na straně 33 opisuje formuli z knihy Øksendal (2008), aniž by vzal v úvahu, že v práci uvažuje jinou definici frakcionálního integrálu lišící se o multiplikativní faktor.

Na závěr mi vzhledem k výše uvedeným nedostatkům nezbývá než konstatovat, že předložená práce nesplňuje požadavky kladené na diplomovou práci na MFF UK a to z důvodu míry, závažnosti a kritického rozmístění naprosto tragických nedostatků, které se vzhledem k převážně kompilačnímu charakteru práce vymykají jakékoli myslitelné představě o tom, jak by práce měla vypadat, aby byla mohla být za diplomovou uznána.

Bylo zadání předloženou prací splněno ?	patrně ANO, ovšem velmi chatrně
Jaká byla obtížnost zpracovávaného tématu ?	dostatečná
Je v práci příspěvek autora dostatečně specifikován ?	ANO
V čem spočívá ?	především znění a důkaz věty 40
Obsahuje práce vlastní důkaz nějakého tvrzení ?	podle všeho ANO
Obsahuje práce matematickou část s rigorózně a korektně zformulovaným textem ?	některé věty jsou správně opsané a některé z nich patrně i platí, vlastní věta 40 není formulována nejlépe, příliš mnoho chyb o rigoróznosti nesvědčí
Nejsou v práci závažné faktické chyby ?	všechny chyby jsou odstranitelné, i když některé jsou velmi závažné
Jsou zdroje správně citovány ?	NE, kromě zmíněných chyb je to obecně nevhodný způsob odkazování
Je práce po formální stránce v pořádku ?	členění práce je v pořádku
Lze práci uznat jako diplomovou ?	já bych to nedoporučoval - vzhledem k invazi tragických chyb