Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Stanislav Hlubocký

Učící se prodavač novin

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce:	doc. RNDr. Petr Lachout CSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2015

Poděkování

Děkuji vedoucímu, doc. RNDr. Petru Lachoutovi CSc., za to, že vypsal téma, které mě skutečně bavilo řešit a rozebírat.
Dále všem přátelům a příbuzným, kteří mě vydrželi poslouchat ve chvílích, kdy jsem s nimi nadšeně rozebíral střední hodnoty, zisky, rozptyly či noviny. A to přestože se bez matematického vzdělání většinou ztráceli u prvního slova "důkaz"či "program".

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Učící se prodavač novin

Autor: Stanislav Hlubocký

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Petr Lachout CSc. Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Prodavač novin je klasická stochastická optimalizační úloha, kdy kamelot (prodavač) nakoupí várku novin a snaží se je prodat za větší cenu. Noviny na konci dne pozbývají hodnoty. V této práci jsou rozebrány různé požadavky, které si novinář neznalý poměrů může klást a strategie, na které vedou. Následuje řešení některých zobecněných úloh jako je problém květinářky či získávání informací z předpovědi počasí. Práce je zakončena numerickou simulací.

Klíčová slova: Prodavač novin, květinářka, simulace, Littlewoodova pravidlo, Riziko

Title: Learning Newsboy

Author: Stanislav Hlubocký

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Petr Lachout CSc. Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: The newsboy problem is a classical stochastic optimization program. The newsboy buys a bulk of papers and tries to sell them at a fixed higher price. The newspapers lose all value at the end of the day. In this thesis, different demands the newsboy can have and the strategies that result from their satisfying are analysed, including some generalised problems (Weather forecast, the flower-girl). All theoretical results and conjectures are tested using a simulation.

Keywords: Newsboy, Flower-girl, simulation, Littlewood rule, Risk

Obsah

Kapitola 1

Úvod do problému prodavače novin

1.1 Motivace a varianty

Problém prodavače novin se používá pro modelování situací, kdy produkt má omezenou životnost a poptávna po něm je předem neznámá. Existuje mnoho různých variant. Příkladem budiž problém květinářky, kdy květiny uvadají až po dvou či více dnech. Případně různá rozdělení v různé dny. (Pokud prší, přijde si pro noviny méně lidí než za slunečního dne) Dá se taký zabývat prodejem více produktů (Např více druhů novin na stejné téma. Viz Di Huang (2011)) zároveň, množstevními slevami či soutěží prodejců o zákazníky, kdy zisk jednoho může znamenat ztrátu druhého. Další varianty byly navrženy například v M.Khouja (1999) .

1.2 Formulace úlohy

Do nového města přijede kamelot (prodavač novin), který s předstihem objednává noviny za pořizovací cenu a a prodává je za prodejní cenu b (Předpoklad $b > a$. V opačném případě je kamelot odsouzen k rychlému krachu). On ovšem neví, kolik novinchtivých lidí přijde v libovolný daný den. Pokud objedná příliš mnoho novin a neprodá je, protože přijde málo zákazníků, bude mít obrovské ztráty. Pokud objedná novin málo, neuživí se, protože bude mít příliš malé zisky. V klasické úloze zná předem rozdělení, podle kterého lidé chodí. V praxi to ovšem není pravda a toto rozdělení (či alespoň některé jeho vlastnosti) se musí odhadovat.
My máme za úkol pro něj vybrat strategii, kterou se má řídit, v závislosti na požadavcích, které na ni budou kladeny. Ke konci uvedu výsledky simulací, které porovnávají chování kamelota za předpokladu, že zná rozdělení, podle kterého lidé chodí, a za předpokladu, že jej nezná a musí odhadovat.

1.3 Předpoklady, rozebíraná varianta

Nejprve studuji základní problém prodavače novin. Kamelot nakupuje a prodává za předem známé pevné ceny a produkt je po jednom dni nenávratně znehodnocen. Předpokládám, že všechny dny jsou si co do rozdělení pravděpodobnosti příchodu zákazníků rovnocenné. Tedy že pravděpodobnost, že v daný den přijde daný počet zákazníků, nezávisí na tom, který den uvažujeme. Ve třetí kapitole (Rozšíření základní úlohy) budu tuto předpoklady postupně vypouštět a rozebírat složitější varianty.

1.4 Použité značení

a,b jsou pořizovací a prodejní ceny novin.
P,V,Z jsou po řadě příjmy, výdaje a zisk kamelota za jeden den. Zisk je určen jako Z:=P-V
A pro lepší orientaci a omezení počtu indexů v důkazech závádím zkrácené zápisy:
$p(n)$ = pravděpodobnost, že v daný den přijde právě n zákazníků.
$p(> n) = \sum_{i=n+1}^{\infty} p(i)$ = pravděpodobnost, že v daný den přijde ostře více než n zákazníků.
$p(\geq n) = \sum_{i=n}^{\infty} p(i)$= pravděpodobnost, že v daný den přijde alespoň n zákazníků.
Obecně jakoukoliv náhodnou veličinu závislou na počtu novin, který známe, označím $(X|n)$. Například $(P|n)$ budou příjmy kamelota z prodeje, pokud koupí n novin.
$sum(n)$=$\sum_{i=1}^{n} i * p(i)$
$sum2(n)$=$\sum_{i=1}^{n} i^2 * p(i)$
Obecně náhodné veličiny značím velkým písmenem.

Kapitola 2

Jednotlivá kritéria a strategie, na které vedou.

Následující výpočty se opakují na více místech.

Lemma 1. *Střední hodnota příjmů kamelota* $E(P|n) = b\ sum(n) + b\ p(>n)n$
Druhý moment příjmů kamelota $E((P|n)^2) = b^2 sum2(n) + b^2 n^2 p(>n)$.

Důkaz. Pro každý přijatelný počet zákazníků i bude mít kamelot příjem $b\,min(n,i)$. Pokud jich přijde méně, neprodá všech n novin. Pokud jich přijde moc, nebude moct prodat více než svých n novin. Právě i zákazníků přijde s pravděpodobnosti $p(i)$ a tedy:

$$\begin{aligned}
E(P|n) &= \sum_{i=1}^{n} p(i)\ b\ min(i,n) + \sum_{i=n+1}^{\infty} p(i)\ b\ min(i,n) \\
&= b\sum_{i=1}^{n} p(i)\ i + \sum_{i=n+1}^{\infty} p(i)\ b\ n \\
&= b\ sum(n) + b\ n \sum_{i=n+1}^{\infty} p(i) \\
&= b\ sum(n) + b\ n\ p(>n)
\end{aligned}$$

Druhý moment se spočítá analogicky:

$$\begin{aligned}
E((P|n)^2) &= \sum_{i=1}^{n} p(i)\ b^2 min(i,n)^2 + \sum_{i=n+1}^{\infty} p(i)\ b^2 min(i,n)^2 = \\
&= b^2 \sum_{i=1}^{n} p(i)\ i^2 + \sum_{i=n+1}^{\infty} p(i)\ b^2 n^2 = \\
&= b^2\ sum2(n) + b^2 n^2 \sum_{i=n+1}^{\infty} p(i) = \\
&= b\ sum2(n) + b^2 n^2 p(>n)
\end{aligned}$$

❑

2.1 Maximální střední hodnota zisku

Asi první a nejpřirozenější kritérium. Kamelot se snaží dosáhnout co největšího zisku. Podobnou strategii mohou využívat obchodníci, kteří mají dostatečně velký kapitál. Nikde totiž nezaručuje, že nejprve nepřijde řetězec velkých ztrát (který by menší obchodníky dohnal k bankrotu) a až poté zisk, který jim to vynahradí.

Věta 2. *Střední hodnota zisku je funkcí počtu nakoupených novin s přírůstkem* $E(Z|n+1) - E(Z|n) = bp(>n) - a$. *Tento přírůstek je nerostoucí funkce* n

Důkaz. Vyjádřím si střední hodnotu zisku:
$E(Z|n) = E(P|n) - na = b(sum(n) + np(>n)) - na$
A spočítám její přírůstek, pokud se rozhodnu koupit o jeden výtisk novin více:

$$\begin{gathered} E(Z|n+1) - E(Z|n) = E(P|n+1) - E(P|n) - a = \\ = b(sum(n+1) + (n+1)p(n+1) - sum(n) - np(>n)) - a = \\ = b((n+1)p(n+1) + (n+1)p(>n+1) - np(n+1) - np(>n+1)) - a = \\ = b(p(n+1) + p(>n+1)) - a = bp(>n) - a. \end{gathered}$$

Pravděpodobnost $p(>n)$ je jako funkce n nerostoucí. Tedy přírůstek střední hodnoty zisku je také nerostoucí funkce n

❑

Poznámka. Věta výše říká, že střední hodnota zisku je v určitém slova smyslu konkávní. Pro libovolná tři různá přirozená čísla $m < k < n$ platí, že $E(Z|k)$ leží nad přímkou (či na ní) spojující $E(Z|m)aE(Z|n)$.

Věta 3. *Řešení úlohy maximalizace střední hodnoty zisku tvoří neprázdnou konečnou posloupnost po sobě jdoucích čísel K,K+1,K+2,...,K+N*

Důkaz. Existuje přirození číslo H (Horní odhad) takové, že $p(>H) < \frac{a}{b}$. Jelikož $p(>n)$ je nerostoucí funkce n, tato vlastnost platí i pro všechna čísla větší než H. A pokud by kamelot koupil n novin (kde n>H), Přírůstek střední hodnoty zisku by byl: $E(Z|n+1) - E(Z|n) = bp(>n) - a < b(\frac{a}{b}) - a = 0$.
Jelikož v takto velkých číslech nemůže ležet optimální řešení a zbylých řešení je konečně mnoho, musí existovat maximum. Označme nejmenší číslo, kde střední hodnota zisku nabývá svého maxima, jako K, a největší z nich jako K+N (Kde N klidně může být nula).
Jelikož střední hodnota zisku je "konkávní"funkce (ve smyslu předchozího lemmatu), není možné, aby nabývala maxima na dvou různých bodech a nikoliv mezi nimi.

❑

Při hledání maxima použiji následující postup: Začnu na n=0. A pokud je přírůstek zisku stále kladný, rozhodnu se nakoupit více novin (uvažuji n o jedničku větší) a toto opakuji. Věty výše mi říkají, že tento postup maximum skutečně nalezne.

Věta 4. *Optimální řešení úlohy maximalizace střední hodnoty zisku je nejmenší možné n takové, že* $F(n) \geq (1 - \frac{a}{b})$, *kde F je distribuční funkce rozdělení příchodu zákazníků.*

Důkaz. Další noviny se vyplatí pořídit právě tehdy, pokud:

$$bp(>n) - a > 0$$
$$p(>n) > \frac{a}{b}$$
$$1 - p(\leq n) > \frac{a}{b}$$
$$F(n) = p(\leq n) < (1 - \frac{a}{b})$$

❑

Poznámka. Jak jsem následně zjistil, tento výsledek je pro spojité rozdělení v literatuře znám jako Littlewoodovo pravidlo.

Poznámka. Pokud je bodů maxima více, tento postup mi vrátí ten s nejmenším rozptylem. (Plyne z následujícího důkazu)

2.2 Minimalizace rozptylu zisku

Jiný pohled na věc může přinést toto kritérium. S tím, jak kamelot kupuje více a více novin, riskuje, že o své peníze přijde. Pokud by se podařilo nalézt nějaké (alespoň lokální) minimum v rozptylu zisku, mohl by si přijít na slušný peníz a zároveň neriskovat více, než je nutné.

Věta 5. *Rozptyl zisku je neklesající funkcí počtu nakoupených novin. Navíc pokud $P(>n) = 0$, zůstává již s rostoucím n konstantní.*

Důkaz. Nejprve si najdu nějaké jednodušší vyjádření $var(Z|n)$.
$var(Z|n) = var(P - V|n) = var(P|n)$, protože pokud známe počet koupených novin, výdaje jsou již pevně danou konstantou $V = n * a$.
Z lemmatu výše dosadím:

$$var(P|n) = E(P|n)^2 - (E(P|n))^2 =$$
$$b^2 sum2(n) + b^2 n^2 p(>n) - (b\ sum(n) + b\ p(>n)n)^2 =$$
$$b^2 sum2(n) + b^2 n^2 p(>n) - b^2(sum(n))^2 - 2b^2 np(>n)sum(n) - p(>n)^2 b^2 n^2.$$

Snažím se dokázat, že $var(P|n+1) - var(P|n) \geq 0$ nezávisle na rozdělení příchodu lidí. Vzhledem k tomu, že rozptyl $var(P|n)$ je přímo úměrný b^2, což je kladné číslo, počítám pro pohodlí $R := \frac{var(P|n+1) - var(P|n)}{b^2}$.

$$R = sum2(n+1) + (n+1)^2 p(>n+1) - (sum(n+1))^2$$
$$-2(n+1)p(>n+1)sum(n+1) - p(>n+1)^2(n+1)^2$$
$$-sum2(n) - n^2 p(>n) + (sum(n))^2 + 2np(>n)sum(n) + p(>n)^2 n^2$$

Pokračuji tím, že rozkládám $p(>n) = p(n+1) + p(>n+1)$, $sum(n+1) = (n+1)p(n+1) + sum(n)$ a $sum2(n+1) = (n+1)^2 p(n+1) + sum2(n)$. Výpočty také velmi zjednoduší vztah $(n+1)^2 - n^2 = (2n+1)$ Po roznásobení a odečtení několika členů zbude následující:

$$\begin{gathered}R = p(n+1)(n+1)^2 + (2n+1)p(>n+1) - (n+1)^2 p(n+1)^2 \\ -2sum(n)(n+1)p(n+1) - 2p(>n+1)sum(n) - p(>n+1)^2(2n+1) \\ -n^2 p(n+1) - 2(n+1)^2 p(>n+1)p(n+1) + 2np(n+1)sum(n) \\ +2p(n+1)p(>n+1)n^2 + p(n+1)^2 n^2 + p(n+1)(2n+1)+ \\ (2n+1)p(>n+1) - (2n+1)p(n+1)^2 - 2sum(n)p(n+1) \\ +2p(n+1)p(>n+1)n^2 - 2p(>n+1)sum(n) - p(>n+1)^2(2n+1) \\ -2(n+1)^2 p(n+1)P(>n+1) = \\ = p(>n)(2n+1) - 2p(>n)sum(n) - 2(2n+1)p(n+1)p(>n+1) \\ -(2n+1)(p(n+1)^2 + p(>n+1)^2)\end{gathered}$$

Závorka $(p(n+1)^2 + p(>n+1)^1)$ v poslední části výrazu se dá přepsat jako $(p(>n))^2 - 2p(n+1)p(>n+1)$ a díky tomu dostanu hodnotu R na již poměrně pěkný tvar:

$$R = p(>n)(2n+1) - 2p(>n)sum(n) - (2n+1)p(>n)^2.$$

Z toho je vidět druhá část tvrzení věty. Pokud $p(>n) = 0$, rozptyl již dále neroste. Hodnotu V se snažím porovnávat s nulou. Pokud je $p(>n)$ nenulová, mohu jí dělit a porovnání s nulou vyjde stejně. Po rozepsání sumy mám tvar:

$$R = (2n+1) - 2(\sum_{i=1}^{n} i * p(i) + np(>n)) - p(>n)$$

Pokud závorka vyjde menší než n, výraz vyjde nezáporný a věta bude dokázána. Potřebuju dokázat, že $\sum_{i=1}^{n} i * p(i) + np(>n) \leq n$. Vydělím n.

$$\sum_{i=1}^{n} (i/n) * p(i) + p(>n) \leq 1$$

a požadovaná nerovnost je zřejmá z podmínky $\sum_{i=1}^{\infty} p(i) = 1$

❑

Z toho ovšem plyne, že optimální strategie je dát od prodávání novin ruce pryč a že žádné (ani lokální) minimum rozptylu není možné za žádných podmínek najít. To ovšem není zrovna dobrá strategie z pohledu uživení kamelota.

2.3 'Safe for lunch'

Zde požadujeme, aby měl kamelot každý den zisk alespoň takový, aby si mohl koupit něco k jídlu. Jelikož nic nezaručuje, že přijde byť jen jediný zákazník, snažíme se maximalizovat pravděpodobnost, že zadaného zisku dosáhne.

Chceme tedy zajistit co největší $p(Z \geq k)$ pro zadané $k \in \mathbb{R}^+$
Nejprve triviální odhad: Abychom mohli mít dostatečně velký zisk, musíme koupit alespoň $\lceil \frac{k}{b-a} \rceil$ novin. Jinak, nehledě na to, kolik lidí přijde, jich prodáme málo a zisk nám nebude stačit.

Věta 6. *Pro $n \geq \lceil \frac{k}{b-a} \rceil$ je $p(Z \geq k)$ nerostoucí funkcí počtu novin n. Pro n menší $p(Z \geq k)$ je nulová a tedy $\lceil \frac{k}{b-a} \rceil$ je optimální řešení úlohy maximalizovat $p(Z \geq k)$.*

Důkaz. Chceme vydělat alespoň k a z jedněch novin máme zisk (b-a). Tedy $\lceil \frac{k}{b-a} \rceil$ je minimální počet objednaných novin, abychom měli vůbec možnost se uživit. Tím je dokázána druhá část tvrzení. Chci ukázat, že pokud koupím více novin, než říká odhad výše, tak $p(Z \geq k)$ se nezvětší. Označím si počet příchozích zákazníků jako N. Maximalizovanou pravděpodobnost si upravím:

$$p(Z > k) = p(P - V > k) = p(P > V + k) =$$
$$= p(bN > V + k) = p\left(N > \frac{V + k}{b}\right)$$

Jelikož s rostoucím počtem koupených novin roste hodnota výrazu na pravé straně, je lepší nekupovat žádné noviny navíc a tvrzení je dokázáno celé. ❑

Pokud k je opravdu cena jídla/vyžití do dalšího dne, tak tato velmi opatrná strategie kamelota uživí, kde jen to bude možné. Ovšem stačí, aby jednou přišlo méně lidí, a kamelot bude mít problém, neb bude mít minimální (pokud nějaké) rezervy na horší časy. A pokud nežije kamelot v ideálním světě, kde tato možnost nemůže nastat, tak s postupujícím časem se pravděpodobnost krachu stejně bude blížit k jedné. Pokud k je ale nějaký kamelotův cíl spojený s postupným šetřením si na horší časy, tato strategie by se mohla vyplatit.

2.4 Kombinace předchozích

Soustředit se na jedno kritérium nemusí být nutně z praktického hlediska ideální řešení. V této části se pokusím předchozí požadavky (Co největší střední hodnotu zisku, co nejmenší rozptyl, co největší jistotu, že vydělám alespoň k) zkombinovat a to buď podmiňováním nebo vážením.
Podmiňování: Budu se snažit maximalizovat střední hodnotu zisku, ale zároveň si ponechat nějakou jistotu. Matematicky zapsáno, řeším úlohy: $max(EZ)$ za podmínky $VarZ \leq K$ případně za podmínky $p(Z > K) > \alpha$ pro dané konstanty K resp. α

Již jsme dokázali (Věta 2), že střední hodnota zisku je konkávní funkce n a umíme najít její maximum (Věta 4). Podmínky navíc způsobí, že některá přípustná řešení o svou přípustnosti přijdou. Jediné změny se tedy dočkáme, pokud se toto stane optimálnímu řešení z věty 4.
Nechť se tak stane. Poté ovšem žádné řešení pro větší n také nebude přípustné. (Jak plyne z vět 6 a 5). Na takto zúžené množině přípustných řešení je střední hodnota zisku neklesající funkcí n a optimální řešení je tedy vždy právě to největší přípustné.

Obdobná situace nastane, pokud se rozhodnu podmiňovat obráceně. Uvažujme úlohu $min(VarZ)$ za podmínky $EZ > K$ (Případně $EZ \geq K$). Pokud není K příliš veliké a máme alespoň nějaké přípustné řešení, optimální bude vždy

to nejmenší z nich. (VarZ je neklesající funkce n a nejmenší řešení existuje, protože jsme na podmnožině přirozených čísel.) Úloha "Safe for lunch"za podmínky na střední hodnotu vyjde shodně: Nejmenší přípustné řešení je optimální.
Zajímavější případ nastane, pokud se pokoušíme maximalizovat užitkovou funkci danou jako $EZ - \lambda VarZ$ či lépe $EZ - \lambda\sqrt{VarZ}$. λ zde značí averzi k riziku, která je konstantní a závisí na uvážení kamelota. Tento přístup je příkladem Markowitzova modelu a v této obecnosti se explicitní řešení nedá najít. Numerické řešení pro konkrétní λ bude uvedeno v závěrečné části. Stejně tak důsledky volby různých konstant λ.

Kapitola 3

Rozšíření základní úlohy.

Základní úloha prodavače novin má, jak jsme zjistili na předchozích stránkách, z hlediska optimalizace překvapivě jednoduché řešení. Zde se pokusím vytvořit trochu složitější model

3.1 Předpověď počasí

Ne každý den je stejně vhodný na prodávání novin. Kamelot se může snažit odhadnout, jaké budou podmínky následující den a podle toho se zachovat. Za pěkného počasí se příchod lidí bude řídit jiným rozdělením než za mizerného. Uvažuji zde dvě možnosti (Bude pršet / Nebude pršet) a kamelot bude vědět, jaká je předpověď na následující den, s dostatečný předstihem, aby se mohl podle toho rozhodnout při nákupu novin.
V reálném světě nemusí být předpovědi počasí zdaleka spolehlivé. Předpokládejme, že meteorolog bude mít pravdu s nějakou pravděpodobností p. Jaký to bude mít vliv na postup řešení? Poměrně snadno ukážu, že žádný.
Jev, kdy meteorolog řekne, že bude pršet, si označím jako [bude]. Doplňkový jev [nebude].
Skutečné počasí druhý den bude buď [prsi] nebo [neprsi]. Přípomínám, že $p(n)$ je pravděpodobnost, že druhý den přijde právě n zákazníků. Snažíme se určit $p(n|bude)$ a $p(n|nebude)$.

Poznámka. Ačkoliv v následující větě vyjde přesný vzorec, uvádím jej jen pro úplnost. Důležité je, že nějaký existuje a tedy že se úloha s nepřesným meteorologem dá převést na předchozí případ.

Věta 7. *Mějme dvě rozdělení, podle kterých mohou chodit zákazníci v závislosti na tom, jestli bude pršet nebo ne. Déšť se bude řídit alternativním rozdělením se známým parametrem. Mějme meteorologa, který se snaží předpovědět, zdali bude příští den pršet nebo ne. Nechť je nám známa spolehlivost meteorologa (tedy víme v jakou pravděpodobností správně předpoví déšť a s jakou pravděpodobností správně předpoví jasný den).*
Potom existují a dají se určit rozdělení počtu zákazníků za podmínky známé předpovědi počasí.

$$p(n|bude) = \frac{(1-p(nebude|prsi))p(n|prsi)p(prsi)}{p(bude|prsi)p(prsi)+p(bude|neprsi)p(neprsi)} + \\ + \frac{(1-p(nebude|neprsi))p(n|neprsi)p(neprsi)}{p(bude|prsi)p(prsi)+p(bude|neprsi)p(neprsi)}$$

$p(n|nebude)$ se dá určit analogicky, neb role rozdělení za deště a za jasného dne jsou naprosto obecná a záměnná.

Důkaz. Z věty o úplné pravděpodobnosti (dále VOÚP) platí následující rovnost:

$$p(n|bude)p(bude) + p(n|nebude)p(nebude) = p(n|prsi)p(prsi) + p(n|neprsi)p(neprsi)$$

Podle předpokladů známé všechny proměnné na pravé straně rovnice. Pokusme se spočítat člen $p(n|nebude)p(nebude)$

$$p(n|nebude)p(nebude) = p(n\&nebude) = \\ = p(n\&nebude|prsi)p(prsi) + p(n\&nebude|neprsi)p(neprsi)$$

První rovnost je přímo z definice podmíněné pravděpodobnosti, druhá je opět VOÚP. Dále, pokud bychom věděli naprosto přesně (podmínili náhodnou veličinou), jestli bude pršet nebo nikoliv, tak meteorologova předpověď a skutečný počet zákazníků, který dorazí následující den, budou už nezávislé veličiny. Pro obě navíc známe rozdělení, kterým se řídí. Pokračuji v úpravách:

$$p(n\&nebude|prsi)p(prsi) + p(n\&nebude|neprsi)p(neprsi) = \\ = p(n|prsi)p(nebude|prsi)p(prsi) + p(n|neprsi)p(nebude|neprsi)p(neprsi)$$

V obou součinech jsou pravděpodobnosti známých rozdělení příchodu zákazníků, pravděpodobnost, že meteorolog udělá chybu ci že dodá správnou předpověď a nakonec pravděpodobnost, že bude/nebude pršet. Všechna tato čísla podle předpokladů známe.

Nyní nám zbývá ještě určit $p(bude)$ tj pravděpodobnost, že meteorolog bude varovat před deštěm. Opět používám VOÚP:

$$p(bude) = p(bude|prsi)p(prsi) + p(bude|neprsi)p(neprsi)$$

A opět nám jsou na pravé straně všechny pravděpodobnosti známy. Po dosazení do první rovnosti vyjde lineární rovnice o jedné neznámé. Můžeme tedy jednoznačně určit $p(n|bude)$ pro libovolné n a po dosazení a vytknutí vyjde vzorec v tvrzení věty.

❑

Poznámka. Pokud známe spolehlivost meteorologa, pak si tímto postupem můžeme spočítat rozdělení v závislosti na předpovědi a následně bez újmy na obecnosti předpokládat, že meteorolog má vždy naprostou pravdu, jakkoliv zvrácená myšlenka to může být.

Poznámka. Pokud spolehlivost meteorologa případně místní klima neznáme, jsou to parametry alternativního rozdělení, z něhož budeme s postupem času získávat náhodný výběr a tedy se dají snadno odhadnout. Může to maximálně zpomalit konvergenci kamelotova odhadu k ideální hodnotě.

Poznámka. Obdobný postup bych mohl použít i pro důkaz věty pro více druhů počasí (jasno/polojasno/lehký déšť/bouřka...) a vyšel by naprosto stejně. Jen vzorce by byly adekvátně delší a nepřehlednější.

3.2 Květinářka

Květiny mají sice také krátkou trvanlivost, ale nemusí být znehodnoceny hned druhý den. Uvažujme variantu úlohy, kdy neprodané zboží se dá skladovat do druhého dne bez ztráty na hodnotě. Do třetího dne už nepřežije. Květinářka samozřejmě prodává nejprve starší zboží, kterého se potřebuje rychleji zbavit. Až poté sáhne po čerstvé dodávce.
Řešení "opatrných"úloh s minimalizací rozptylu nebo snahou vydělat si na oběd se touto změnou předpokladu nezmění. Střední hodnota zisku ovšem ano.

Věta 8. *Optimální řešení úlohy maximalizovat střední hodnotu zisku pro květinářku je koupit nejmenší n květin takové, že* $\sum_{i=0}^{n} p(i)F(n-i) > 1 - \frac{a}{b}$, *kde F je distribuční funkce příchodu zákazníků a dvojice (a,b) označuje pořizovací resp. prodejní ceny květin.*

Důkaz. Stejně jako u důkazu Littlewoodova pravidla (Věta 4) předpokládám, že na skladě mám n květin a určím změnu střední hodnoty zisku, pokud koupím jednu navíc. Kladný zisk bude, pokud (n+1) květinu prodám buď první nebo druhý den. Střední zisk z prodeje první den je stejný jako minule: $bp(>n)$. (n+1) květinu prodám druhý den, pokud první den přijde nejvýše n zákazníků a druhý den přijde více než $(n-i)$, kde i je počet zákazníků první den. V obou případech ji prodám za cenu b. Střední hodnota zisku se tedy zvětší, pokud:

$$bp(>n) + b\sum_{i=0}^{n} p(i)p(>n-i) - a > 0$$
$$p(>n) + \sum_{i=0}^{n} p(i)p(>n-i) > \frac{a}{b}$$
$$1 - p(\leq n) + \sum_{i=0}^{n} p(i)(1 - p(\leq n-i)) > \frac{a}{b}$$
$$1 - p(\leq n) + \sum_{i=0}^{n} p(i) - \sum_{i=0}^{n} p(i)p(\leq n-i)) > \frac{a}{b}$$
$$1 - \sum_{i=0}^{n} p(i)p(\leq n-i)) > \frac{a}{b}$$
$$\sum_{i=0}^{n} p(i)p(\leq n-i)) \leq 1 - \frac{a}{b}$$
$$\sum_{i=0}^{n} p(i)F(n-i) \leq 1 - \frac{a}{b}$$

A tedy maxima dosáhneme na nejmenším n takovém, že

$$\sum_{i=0}^{n} p(i)F(n-i) > 1 - \frac{a}{b}$$

❑

Poznámka. Narozdíl od Littlewooda, zde se mi nepodařilo najít žádný hezký vzorec, do kterého by se dalo dosadit a vrátil by optimální řešení. To je však stále určeno jednoznačně a dá se vždy konečným počtem dosazení dopočítat.(Dosadit $n = 1$ a postupně zvětšovat. Jakmile bude jednou nerovnost porušena, máme optimální řešení.)

Kapitola 4

Numerické výsledky.

Vytvořil jsem program v C#, ve kterém simuluji příchod zákazníků a rozhodování kamelota. Situace je taková, že kamelot přijede do města s tisícikorunou v kapse a jeden měsíc (30 dní) nakupuje noviny po 6kč a prodává je za 10kč. (Stejný poměr cen, jaký zkoumal R.J.Casimir (1990)). Na rozdíl od R.J.Casimir (1999) zde za lépe informovaného kamelota považuji toho, který zná informace o rozdělení příchodu zákazníků, nikoliv přesné počty, které v daný den přijdou. Neinformovaný kamelot si sestavuje empirickou distribuční funkcí a rozdělení se snaží odhadnout. Kameloti se rozhodují podle strategií rozebíraných výše a tam, kde to má smysl, uvádím výsledky jak pro informovaného tak odhadujícího kamelota. Příchod zákazníků jsem simuloval pomocí Poissonova rozdělení se střední hodnotou 10 zákazníků denně. U posledních dvou měření (S meteorologem a vlivem počasí) jsem si nadefinoval vlastní rozdělení se stejnou střední hodnotou. Detailní popis je přímo u nich. Tento první měsíc jsem nechal simulovat tisíckrát a z každé simulace jsem si pamatoval kamelotův průměrný denní zisk, výběrový rozptyl jeho zisků a jeho maximální a minimální kapitál během měsíce. Tyto hodnoty beru jako naměřená data a vytvářím z nich statistiky.
Zároveň přikládám podrobnější data ze simulace jednoho takového měsíce.

4.1 Největší střední hodnota

Na první pohled si tento prodavač novin během simulací vedl ze všech nejlépe. V porovnání s květinářkou a meteorology však samozřejmě prohrál kvůli nerovným podmínkám. Jelikož se snažil maximalizovat očekávaný zisk, vydělával další kapitál poměrně rychle. (Viz řádek "Průměrný zisk") V následujících dvou tabulkách jsou jeho výsledky, pokud musel příchody zákazníků odhadovat.
Připomínám, že z každé třicetidenní simulace si pamatuji průměrný denní zisk, minimální a maximální kapitál během ní a výběrový rozptyl denních zisků. Z těchto naměřených čtveřic poté konstruuji průměr, vybírám minimum, maximum a počítám směrodatnou odchylku

Poznámka. Hodnota kapitálu 1000kč se v simulacích s odhadováním bude objevovat často. První den neměl kamelot žádné informace o příchodu zákazníků a rozhodl se nekupovat žádné zboží. Proto vždy na konci prvního dne měl pořád svoji startovní tisícovku

V následujících dvou tabulkách jsou výsledky pro kamelota, který znal předem přesné rozdělení a snažil se maximalizovat střední zisk. V průměru si počínal o něco lépe než jeho odhadující kolega. Má vetší průměrný zisk a menší průměrný rozptyl.

Poznámka. V simulacích, kdy má kamelot všechny informace o rozdělení již od začátku, se rozhoduje naprosto konstantně. Zákazníci přichází podle stejného rozdělení a tedy nemá důvod měnit odhad.

4.2 Minimální rozptyl

(Nesimulováno. Není důvod)

4.3 Safe for lunch

Zde se kamelot snaží vydělat každý den alespoň 10kč. Na to potřebuje prodat troje noviny (A tím vydělat 12kč). Jelikož se drží takto při zemi, rozptyl je minimální a do červených čísel se dostává jen velmi výjimečně. Na druhou stranu, jeho zisky jsou o to menší.

4.4 Kombinace předchozích

Zde má kamelot snahu maximalizovat užitkovou funkci zadanou jako: Střední hodnota zisku mínus dvakrát střední hodnota rozptylu. Koeficient je to malý, ale promítne se: Oproti čisté snaze maximalizovat zisk si počíná o trochu opatrněji.

Littlewood (Odhad)	Průměr	Min	Max	Směr. odchylka
Průměrný zisk	26,1	17,66	34,06	2,737
Minimální kapitál	997,46	918	1000	8,476
Maximální kapitál	1783,8	1530	2022	81,973
Rozptyl denního zisku	214,31	19,92	745,29	106,423

Tabulka 4.1: Maximalizace středního zisku. Neznámé rozdělení.

Číslo dne	1	2	3	4	...	28	29	30
Nákup	0	9	9	9		9	9	8
Zákazníků	9	10	9	10		7	5	12
Kapitál	1000	1036	1072	1108		1738	1734	1766

Tabulka 4.2: Maximalizace středního zisku. Neznámé rozdělení. (Jeden průběh)

Littlewood (Real)	Průměr	Min	Max	Směr. odchylka
Průměrný zisk	28,15	18	34,33	2,539
Minimální kapitál	1026,32	966	1036	14,813
Maximální kapitál	1845,36	1544	2030	75,805
Rozptyl denního zisku	181,48	24,17	493,93	77,824

Tabulka 4.3: Maximalizace středního zisku. Známé rozdělení.

Číslo dne	1	2	3	4	...	28	29	30
Nákup	9	9	9	9		9	9	9
Zákazníků	9	10	9	10		7	5	12
Kapitál	1036	1072	1108	1144		1778	1774	1810

Tabulka 4.4: Maximalizace středního zisku. Známé rozdělení.

SFL (Real)	Průměr	Min	Max	Směr. odchylka
Průměrný zisk	11,966	11	12	0,124
Minimální kapitál	1011,97	1002	1012	0,547
Maximální kapitál	1358,97	1330	1360	3,722
Rozptyl denního zisku	0,452	0	29,96	2,066

Tabulka 4.5: Safe for lunch (10kč). Známé rozdělení

Číslo dne	1	2	3	4	...	28	29	30
Nákup	3	3	3	3		3	3	3
Zákazníků	9	10	9	10		7	5	12
Kapitál	1012	1024	1036	1048		1336	1348	1360

Tabulka 4.6: Safe for lunch (10kč). Známé rozdělení. (Jeden průběh)

Averze k riziku (Odhad)	Průměr	Min	Max	Směr. odchylka
Průměrný zisk	19,33	5,33	30,06	4,346
Minimální kapitál	998,26	924	1000	6,875
Maximální kapitál	1580,17	1160	1902	130,426
Rozptyl denního zisku	44,54	0,44	254,89	38,993

Tabulka 4.7: Averze k riziku. Koeficient 2. Neznámé rozdělení.

Číslo dne	1	2	3	4	...	28	29	30
Nákup	0	8	8	8		4	4	5
Zákazníků	9	10	9	10		7	5	12
Kapitál	1000	1032	1064	1096		1598	1614	1634

Tabulka 4.8: Averze k riziku. Koeficient 2. Neznámé rozdělení. (Jeden průběh)

Averze k riziku (Real)	Průměr	Min	Max	Směr. odchylka
Průměrný zisk	19,57	17	20	0,508
Minimální kapitál	1019,46	990	1020	3,020
Maximální kapitál	1587,22	1510	1600	15,209
Rozptyl denního zisku	7,386	0	95,847	11,965

Tabulka 4.9: Averze k riziku. Koeficient 2. Známé rozdělení.

Číslo dne	1	2	3	4	...	28	29	30
Nákup	5	5	5	5		5	5	5
Zákazníků	9	10	9	10		7	5	12
Kapitál	1020	1040	1060	1080		1550	1570	1590

Tabulka 4.10: Averze k riziku. Koeficient 2. Známé rozdělení. (Jeden průběh)

4.5 Předpověď počasí

Zde velmi záleží na tom, zdali bude pršet nebo nikoliv. Stále používám Poissonovo rozdělení. Pokud prší, přijde ve střední hodnotě 1 osamělý zákazník. Pokud je hezky, přijde jich 19. Prší s pravděpodobností 0,5 a tedy stále přijde ve střední hodnotě 10 zákazníků jako v minulých případech.
Zde je vidět, že takto proměnlivé rozdělení je pro kamelota zhoubné. V simulacích se pravidelně střídala snaha kamelota kupovat hodně (Více než 10) novin a málo (jedny, maximálně dvoje) noviny. Protože byl ovšem poměr cen nákup/prodej větší než polovina, nevyplatilo se riskovat a později zůstal u malých hodnot a postupoval velmi opatrně. I tak ale měl často ze začátku obrovské ztráty, jak je vidět v souhrnných statistikách.

Kamelot, který se řídil podle předpovědi počasí, má zde znatelně lepší výsledky. Dokonce díky lepšímu odhadu pro každý následující den má větší průměrný zisk než úplně původní strategie, přestože v průměru stále chodí 10 zákazníků.

Ignoruje meteo	Průměr	Min	Max	Směr. odchylka
Průměrný zisk	-1,45	-18,86	27,26	4,222
Minimální kapitál	896,85	418	1000	94,044
Maximální kapitál	1088,31	1000	1914	109,571
Rozptyl denního zisku	1171,59	2,312	5682,10	1301,614

Tabulka 4.11: Kamelot ignoruje meteorologa. Odhaduje rozdělení.

Číslo dne	1	2	3	4	...	28	29	30
Nákup	0	1	1	1		1	1	1
Zákazníků	1	14	0	16		19	20	2
Kapitál	1000	1004	998	1002		1048	1052	1056

Tabulka 4.12: Kamelot ignoruje meteorologa. Odhaduje rozdělení. (Jeden průběh)

Sleduje meteo	Průměr	Min	Max	Směr. odchylka
Průměrný zisk	30,14	11,73	50,4	5,883
Minimální kapitál	1026	962	1072	33,186
Maximální kapitál	195,65	1352	2512	175,972
Rozptyl denního zisku	1072,05	508,61	1478,68	113,622

Tabulka 4.13: Kamelot poslouchá meteorologa. Známé rozdělení.

Číslo dne	1	2	3	4	...	28	29	30
Nákup	1	18	1	18		18	18	1
Zákazníků	1	14	0	16		19	20	2
Kapitál	1004	1036	1030	1082		1744	1816	1820

Tabulka 4.14: Kamelot poslouchá meteorologa. Známé rozdělení. (Jeden průběh)

4.6 Květinářka

Jak již bylo řečeno, květinářka může více riskovat, protože co neprodá jeden den, může prodat během dne následujícího. Přesná strategie je popsána v předchozí kapitole. Proti kamelotům má ovšem nezanedbatelnou konkurenční výhodu, jak potvrzují následující data. Vzhledem k tomu, že průměrný denní zisk by neměl překročit 40kč (každý den v průměru přijde 10 zákazníků a na každém jde vydělat maximálně 4kč), značí zvýšení z průměru 26-28kč denně na cca. 31kč denně a snížení rozptylu rozhodně lepší výsledek.

Kvetinarka (Odhad)	Průměr	Min	Max	Směr. odchylka
Průměrný zisk	31,21	20,93	41,73	3,154
Minimální kapitál	965,16	818	1000	34,929
Maximální kapitál	1938,63	1628	2252	94,273
Rozptyl denního zisku	1500,71	500,39	3825,24	514,246

Tabulka 4.15: Květinářka. Odhaduje rozdělení.

Číslo dne	1	2	3	4	...	28	29	30
Rozhodnutí	0	30	9	15		12	11	9
Zákazníků	15	12	9	11		11	7	10
Zbylo květin	0	18	9	13		9	11	9
Kapitál	1000	940	976	996		1904	1908	1954

Tabulka 4.16: Květinářka. Odhaduje rozdělení. (Jeden průběh)

Kvetinarka (Real)	Průměr	Min	Max	Směr. odchylka
Průměrný zisk	31,95	18,26	43,46	3,893
Minimální kapitál	976,6	906	1000	21,178
Maximální kapitál	1960,73	1578	2304	116,286
Rozptyl denního zisku	1271,38	387,33	2847,78	386,302

Tabulka 4.17: Květinářka. Známe rozdělení.

Číslo dne	1	2	3	4	...	28	29	30
Nákup	19	15	12	9		12	11	8
Zákazníků	15	12	9	11		11	7	10
Zbylo květin	4	7	10	8		8	11	8
Kapitál	1036	1066	1084	1040		2108	2112	2164

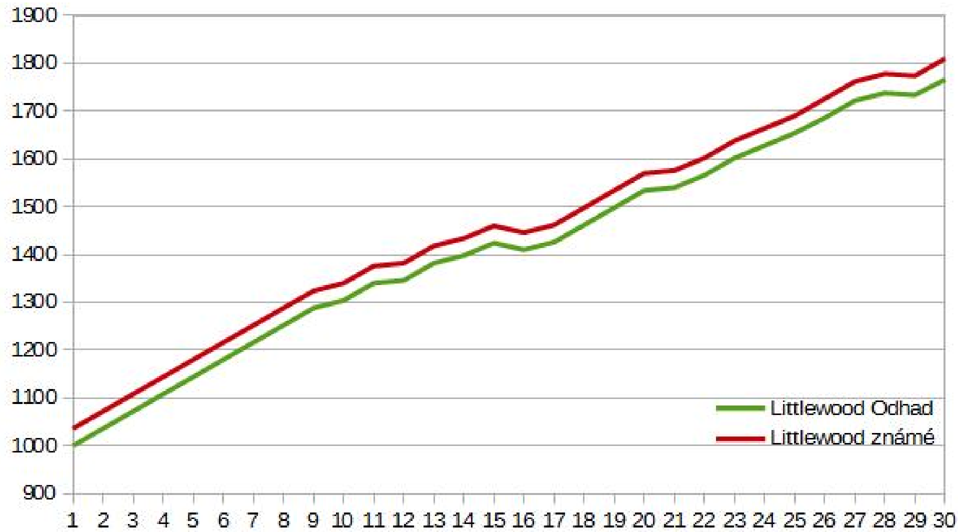
Tabulka 4.18: Květinářka. Známe rozdělení. (Jeden průběh)

4.7 Grafy a trendy

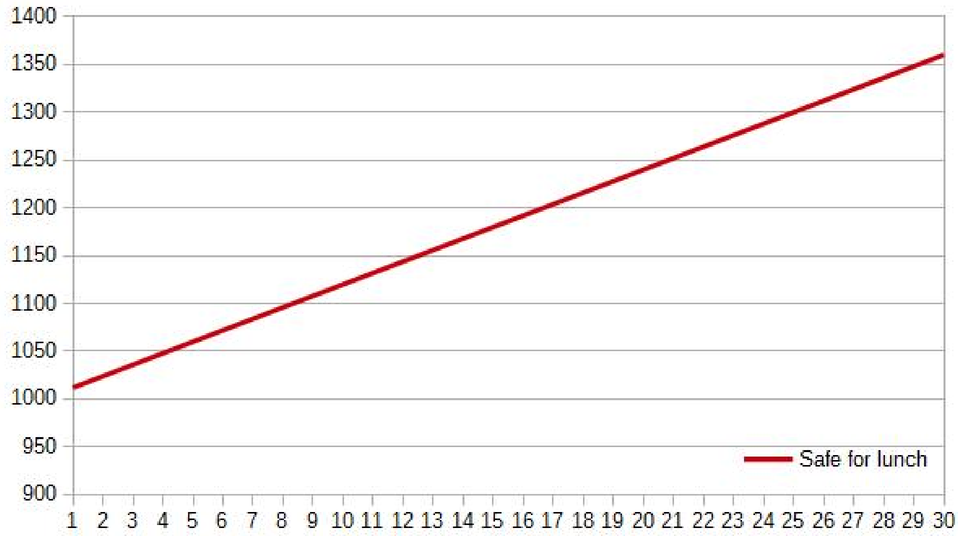
4.7.1 Jeden měsíc

Pro zvýraznění podobností a odlišností jednotlivých strategií jsem porovnávané simulace pouštěl vždy na stejnou posloupnost příchodu zákazníků a tyto porovnávané následně zanesl do jednoho grafu.

V grafu 4.1 porovnávám dvě situace: Buď kamelot rozdělení příchodu zákazníků zná a nebo nikoliv. Jak je vidět, jediný rozdíl je na začátku, kdy odhadující kamelot nemá tušení. V rádu prvních pár dnů se ovšem vždy chytil a následně byly trajektorie stejné až na posunutí či sem tam náhodnou odchylku o jedny noviny. Prodavač novin se učil skutečně rychle.

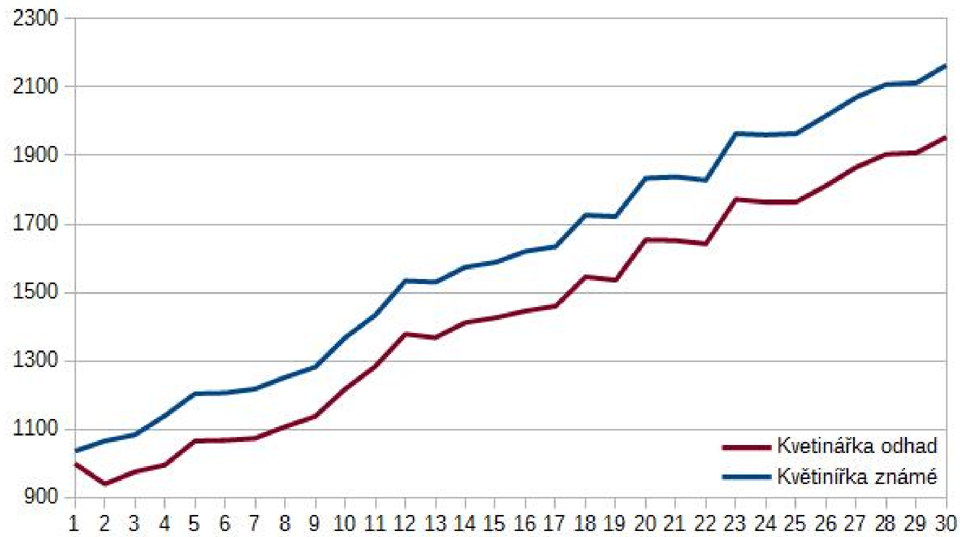


Obrázek 4.1: Trajektorie jednoho měsíce s Littlewoodovým pravidlem.



Obrázek 4.2: Trajektorie jednoho měsíce se strategií SFL

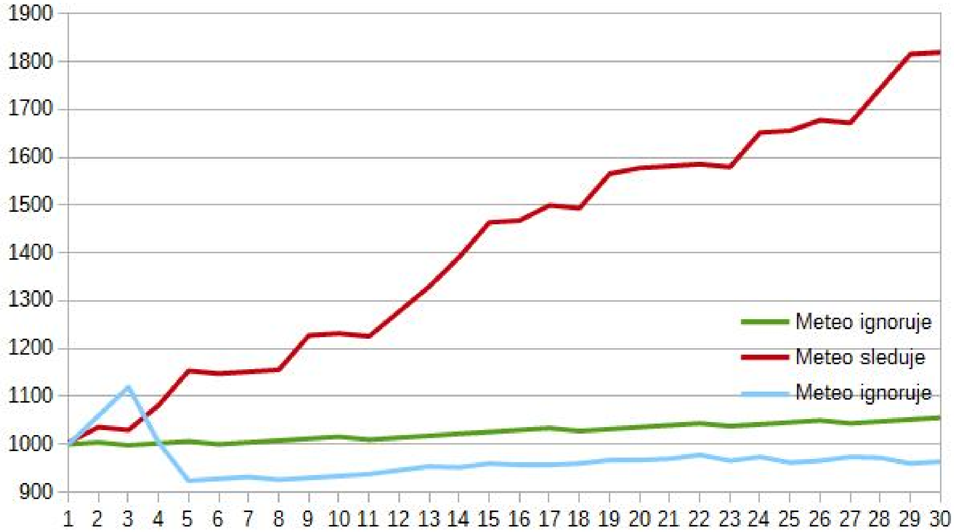
V grafu 4.2 je vidět extrémně opatrné obchodování strategie "Safe for lunch"(Níže též pod zkratkou SFL). Jelikož většinou chodilo dost lidí, kamelot neměl problém své dva výtisky prodat a kapitál mu tak jistě, ale velmi pomalu stoupal.
Graf 4.3 se chová velmi podobně jako 4.1. Květinářka se totiž řídí zobecněnou



Obrázek 4.3: Trajektorie jednoho měsíce květinářky

verzí Littewoodova pravidla. Stejně jako dříve, odhady velmi rychle zkonvergovaly ke správné hodnotě a pak už se grafy chovají obdobně.

V grafu 4.4 uvádím výsledky dvou různých simulací. Světle modrá pochází z jiného náhodného výběru. Kamelot sledující předpověď má obrovské zisky, neb za těchto podmínek je v předpovědi velká informace. Kameloti ignorující předpověď se buď chovají velmi opatrně (Zelená) nebo nejprve mají několik málo hezkých dní, než přijdou deště, první velká ztráta a pak už si dávají pozor a odmítají riskovat. Pokud by pravděpodobnost deště byla dostatečně malá (Zde 50%), risk by se mohl vyplatit. Zde jsou ovšem potenciální ztráty veliké a kameloti ignorující předpověď nemají šanci dlouhodobě vydělávat.



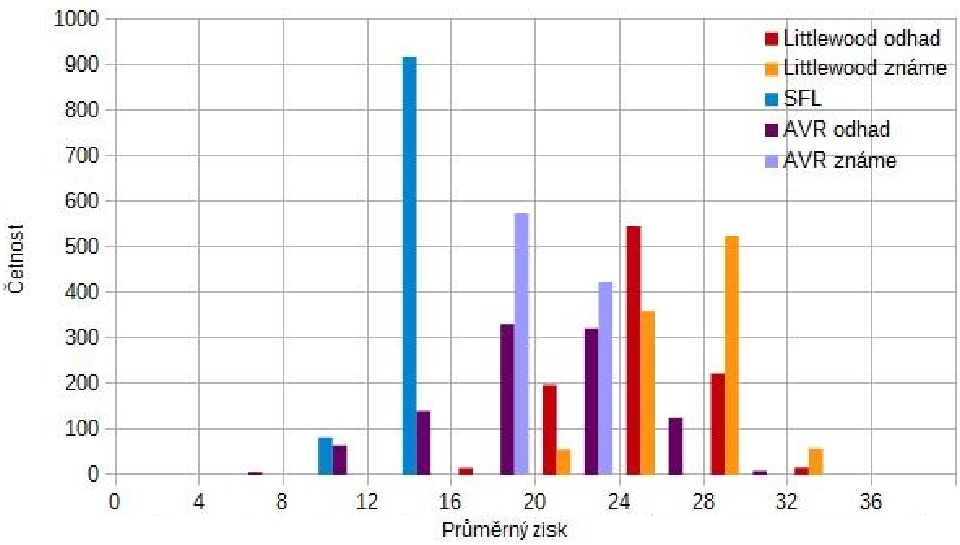
Obrázek 4.4: Trajektorie jednoho měsíce s předpovědí počasí

4.7.2 Opakovaná simulace

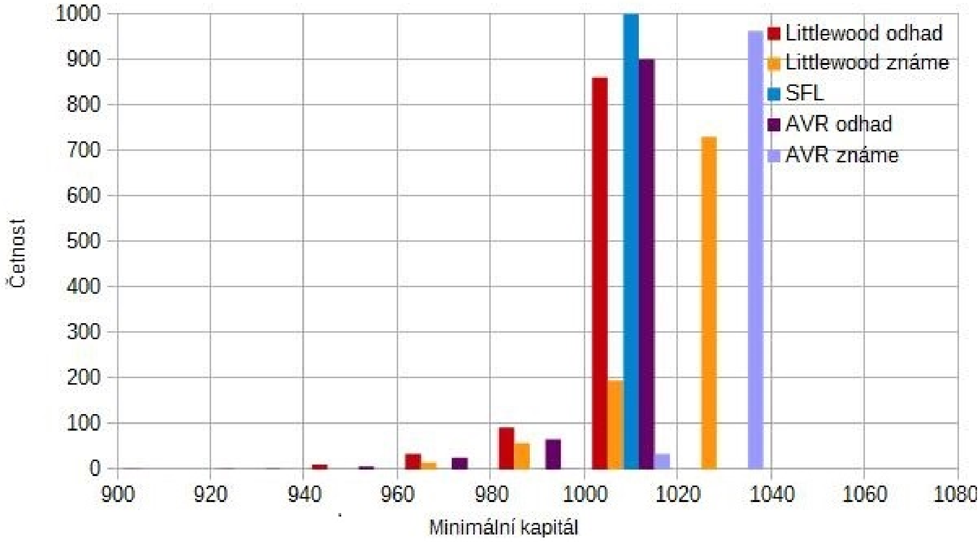
Zde budu rozebírat dlouhodobé chování jednotlivých strategií. Neprve kameloty, kteří měli stejné podmínky, ale různé strategie, pak květinářku a nakonec kameloty s možností sledovat předpověď počasí. Každou sadu podmínek a strategií jsem simuloval tisíckrát. To je na vypozorování trendů více než dostačující a v praxi je takový rozsah stejně nedosažitelný. Dohromady je to totiž přes 83 let čistého prodeje novin/květin. Jelikož se většinou výsledky lišily o poměrně malé hodnody, sloučil jsem pro přehlednost naměřené hodnoty do intervalů, jejichž dolní meze je obsažena, horní nikoliv.
Příklad: Graf 4.5 nám říká, že naprostá většina simulací, kdy se kamelot řídil strategií "Safe for lunch"měla průměrný denní zisk mezi 12 (včetně) a 16 korunami. Ve skutečnosti měla valná většina průměrný denní zisk přesně 12 korun. Víc tato strategie ani neumožňuje

Různé strategie

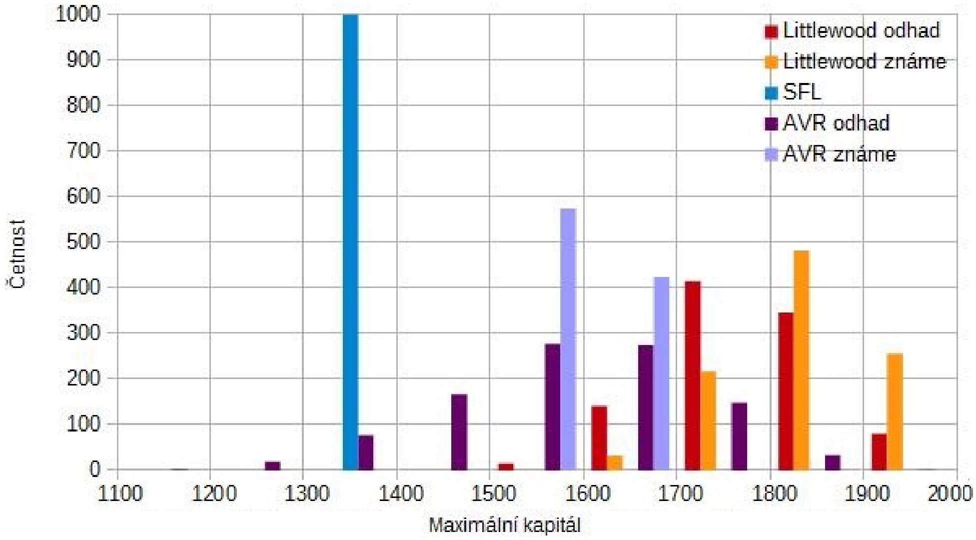
Z grafů 4.5,4.6,4.7 a 4.8 se dají vyčíst následující nijak překvapivá zjištění: Jakákoliv strategie dosahuje v průměru lepších výsledků (Větší průměrný zisk, menší rozptyl), pokud zná předem rozdělení, podle kterého zákazníci přicházejí. Littlewoodova strategie skutečně má nejlepší průměrný denní zisk. Strategie SFL skutečně zřídkakdy má nějaké ztráty, ovšem má také nejmělší zisky. A někde mezi SFL a Littlewoodem stojí strategie, kdy se kamelot snaží maximalizovat zisk, ale má jistou averzi vůči riziku. (Zkratka AVR). Ukazuje se ovšem také, že strategie AVR s jen malou konstantou averze je téměr přímým zlepšením strategie SFL. Má v výlučně větší zisky. Jak minimální, tak maximální kapitál a rozptyl zisku se prakticky nezměnil. Pak záleží na každém prodejci, jak se rozhodne a jak moc je ochoten riskovat.



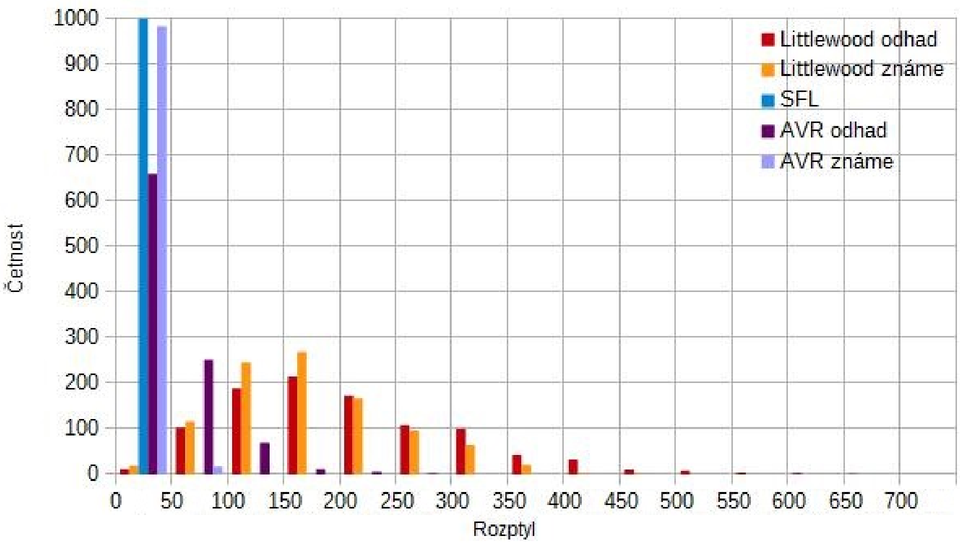
Obrázek 4.5: Průměrné denní zisky kamelotů za jeden měsíc



Obrázek 4.6: Minimální hodnoty kapitálu kamelotů během jednoho měsíce



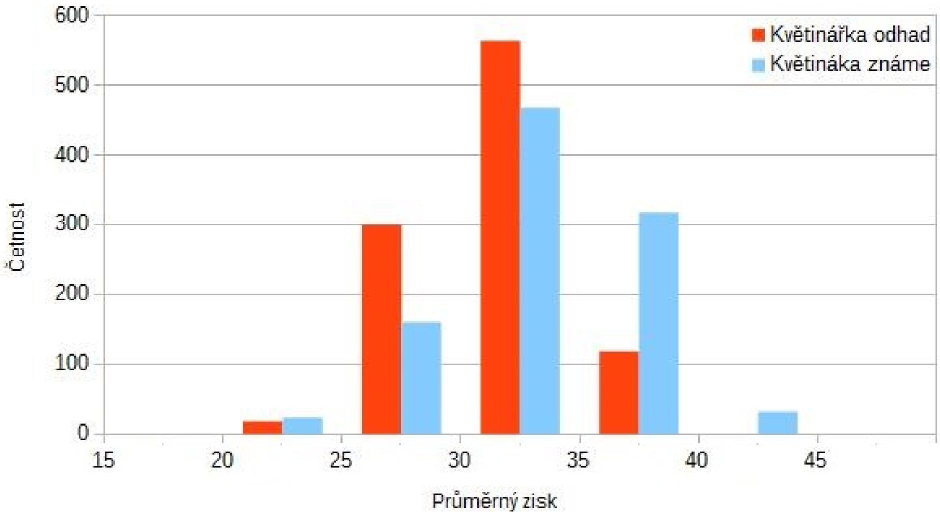
Obrázek 4.7: Maximální hodnoty kapitálu kamelotů během jednoho měsíce



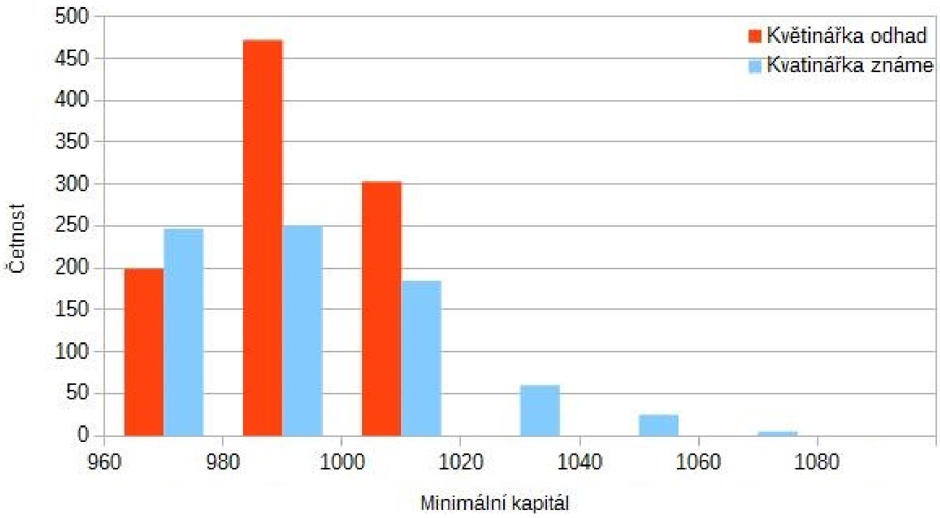
Obrázek 4.8: Výběrové rozptyly zisku kamelotů během jednoho měsíce

Květnářka

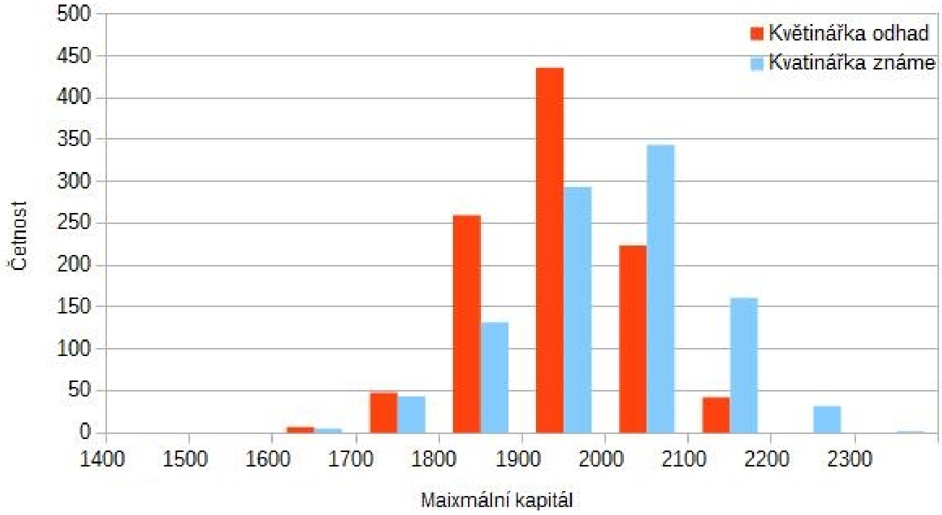
Grafy s výsledky květinářky potvrzují to, co bylo z teorie i tabulek již vidět: Květinářka má nezanedbatelnou konkurenční výhodu. Může víc riskovat a dokáže se přizpůsobit výkyvům v příchodech zákazníků. Její průměrně příjmy jsou větší, stejně tak ale i drasticky větší rozptyl. To je právě důsledkem skladování. Jeden den může nakoupit hodně, mít ztrátu či velmi malý zisk a druhý den bez nákupů prodat zbytek a mít za ten den obrovský zisk. Rozptyl denních zisků tak zde není přiliš dobrým ukazatelem. Stejný však zůstává trend končit s citelně lepšími výsledky, pokud předem známe rozdělení.



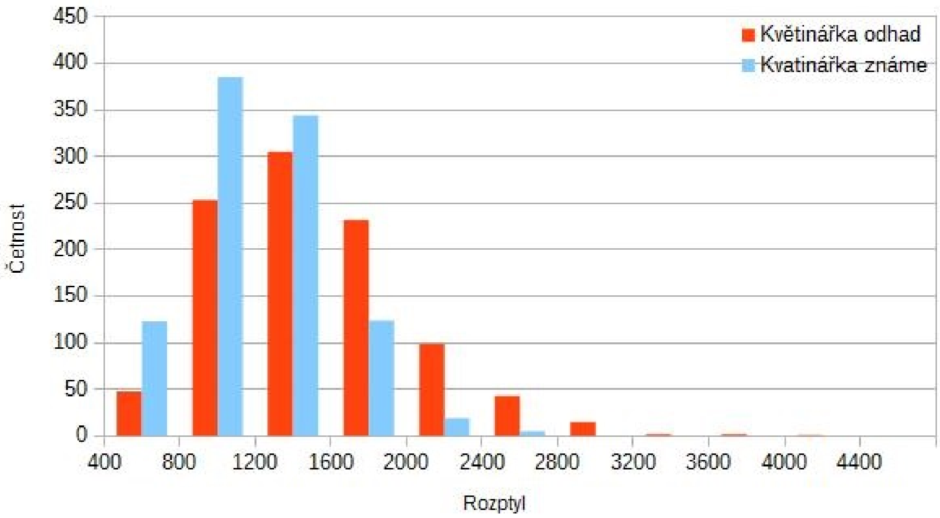
Obrázek 4.9: Průměrné denní zisky květinářek za jeden měsíc



Obrázek 4.10: Minimální hodnoty kapitálu květinářek během jednoho měsíce



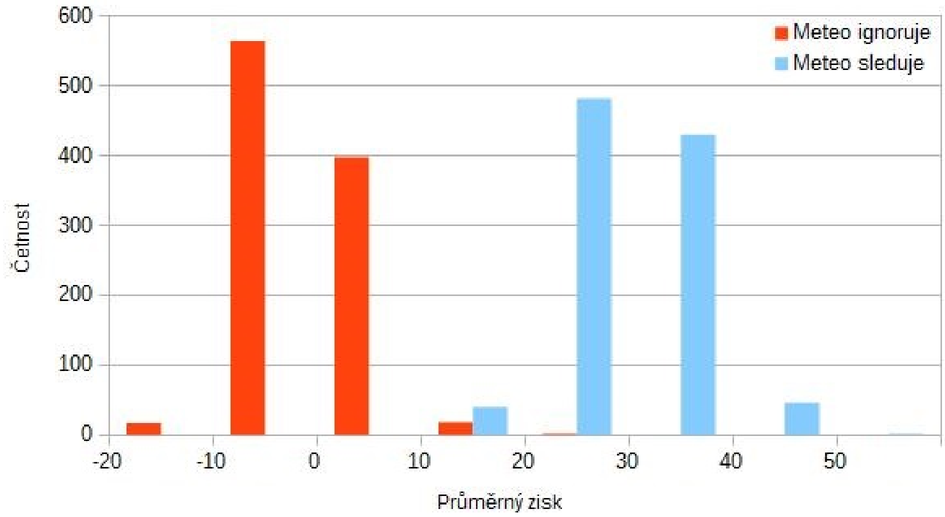
Obrázek 4.11: Maximální hodnoty kapitálu květinářek během jednoho měsíce



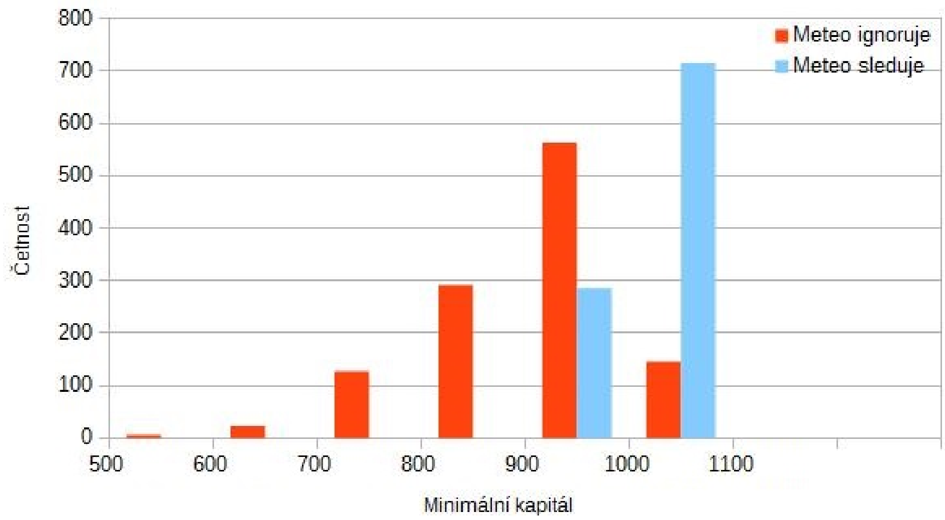
Obrázek 4.12: Výběrové rozptyly zisku květinářek během jednoho měsíce

Předpověď počasí

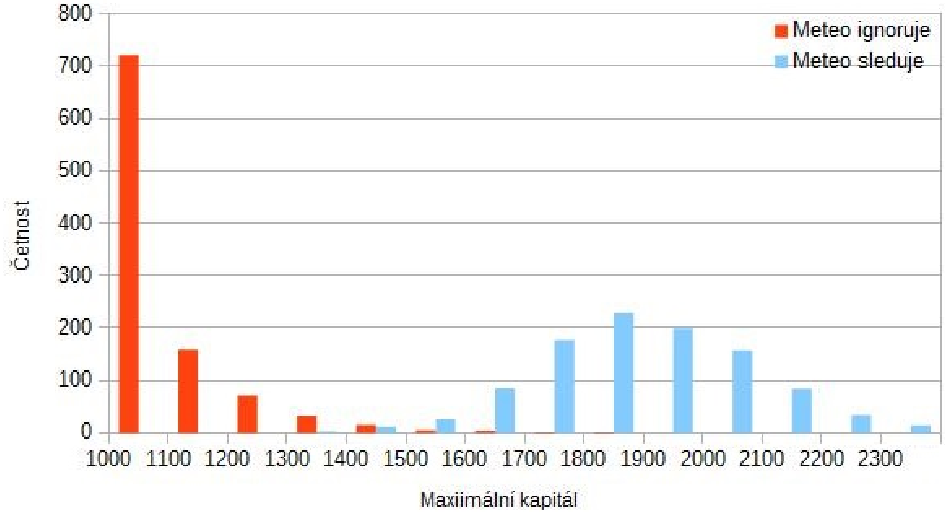
Podmínky zde byly nastavené tak, aby rozdíl mezi informovaným a neinformovaným kamelotem byl propastný. A skutečně. Zatímco kamelot bez informace o počasí má vůbec problémy zůstat na nule (více než polovina simulací měla v průměru denní ztrátu), kamelot s přesnou předpovědí dosahuje velkých zisků. Překvapivě však i citelně většího rozptylu zisků. To je ovšem důsledkem toho, že kamelot bez předpovědi se poměrně rychle vzdává, kupuje minimální počet výtisků a tedy jeho zisky/ztráty zůstávají blízko nuly a nikam nekmitají.



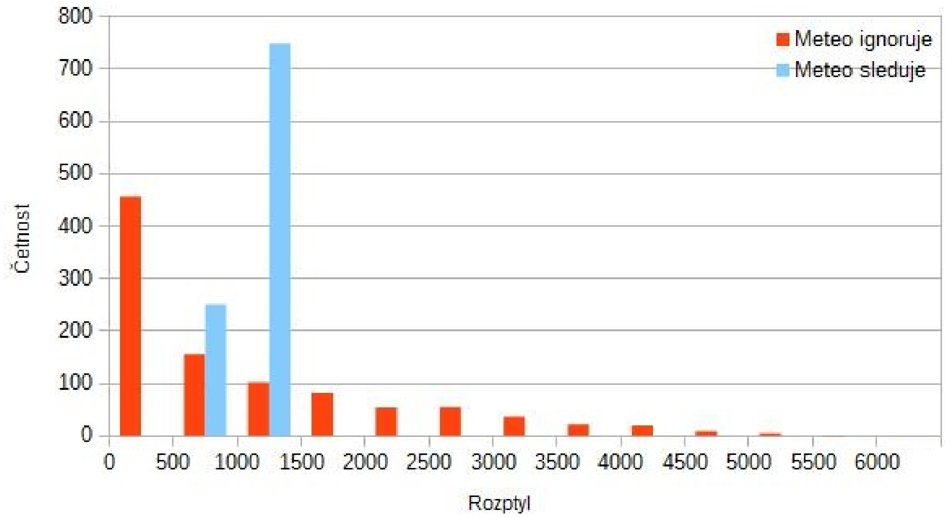
Obrázek 4.13: Zisky kamelotů v závislosti na předpovědi počasí



Obrázek 4.14: Minimální kapitál kamelotů v závislosti na předpovědi počasí



Obrázek 4.15: Maximální kapitál kamelotů v závislosti na předpovědi počasí



Obrázek 4.16: Výběrové rozptyly zisku kamelotů v závislosti na předpovědi počasí

4.8 Shrnutí

Zkoumání a simulace dopadly přesně podle očekávání. Jediný trochu překvapivý výsledek byla velká rychlost, s jakou se zpřesňovaly odhady kamelotů/květinářek rozdělení neznalých. Během rozebírání různých strategií kamelotů však mohla vyvstat otázka: Dají se strategie a požadavky převádět mezi sebou? Do určité míry určitě ano. Strategie AVR s nulovou konstantou averze je ekvivalentní Littlewoodovu pravidlu. Pokud s konstantou averze půjdu do nekonečna, dostanu se na triviální strategii "minimalizace rozptylu".
Na druhou stranu, strategie, které na žádném parametru nezávisí, se očividně převádět nedají. Příkladem je právě Littlewoodovo pravidlo.
Triviální, i když trochu smutný, závěr jest ovšem: Pokud mi v této situaci (Známe rozdělení či máme stejná data) nějaká strategie řekne "Kup N novin,"není způsob, jak zjistit, která z nekonečného množství kombinací strategií a parametrů to byla. Všechny totiž degenerují právě na strategii "Neřeš nic a kup N novin", kde N je parametr.
S postupem času a odhadů, kdy neznáme přesné rozdělení, je ovšem situace jiná. Převádění strategií a volba správných parametrů, aby dávaly stejné výsledky, by mohlo být zajímavou oblastí dalšího zkoumání.

Literatura

Di Huang, Hong Zhou, Q.-H. Z. (2011). A competitive multiple-product newsboy problem with partial product substitution. *Omega*, **39**, 302–312.

M.Khouja (1999). The single-period (news-vendor) problem:literature review and suggestions for future research. *Omega*, **27**, 537–553.

R.J.Casimir (1990). The newsboy and the flower-girl. *Omega*, **18**, 395–398.

R.J.Casimir (1999). Strategies for a blind newsboy. *Omega*, **27**, 129–134.

Seznam obrázků

Seznam tabulek