Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Adam Jurčo

Existence a jednoznačnost rozdělení náhodné míry na základě konečněrozměrných projekcí

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce:	prof. RNDr. Jan Rataj, CSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2015

Zde bych chtěl poděkovat svému vedoucímu prof. RNDr. Janu Ratajovi, CSc. za cenné rady a připomínky.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Existence a jednoznačnost rozdělení náhodné míry na základě konečně-

rozměrných projekcí

Autor: Adam Jurčo

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Jan Rataj, CSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Tato práce se zabývá existencí a jednoznačností rozdělení náhodné míry, máme-li k dispozici systém konečněrozměrných rozdělení. Náhodnou míru, můžeme interpretovat jako určitý systém náhodných veličin. V této práci nás bude zajímat, za jakých podmínek lze naopak systém náhodných veličin chápat jako náhodnou míru a zda je takové rozšíření určeno jednoznačně. Budeme vycházet z konzistentního systému konečněrozměrných rozdělení a s pomocí Daniell-Kolmogorovy věty dokážeme nutné a postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost takového rozšíření. V závěru také uvedeme protipříklad, na kterém ukážeme, že danou teorii nelze použít pro znaménkové náhodné míry.

Klíčová slova: Náhodná míra, bodový proces, konečněrozměrné projekce.

Title: Existence and uniqueness of the distribution of a random measure given by finite dimensional projections

Author: Adam Jurčo

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: prof. RNDr. Jan Rataj, CSc., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: This thesis deals with the existence and uniqueness of the distribution of a random measure given a system of finite-dimensional distributions. A random measure can be interpreted as a particular system of random variables. Conversely, we will want to know what conditions would allow a system of random variables to be extended to a random measure and if this extension is unique. We will start with a consistent system of finite-dimensional distributions and use Daniell-Kolmogorov theorem to find the necessary and sufficient conditions for the existence of such extension. A counterexample will be included to show that it is not possible to use this theory for random signed measures.

Keywords: Random measure, point process, finite-dimensional distributions.

Obsah

Úvod

Práce se věnuje možnosti rozšířit systém konečněrozměrných rozdělení na náhodnou míru. V první kapitole jsou shrnuty některé základní vlastnosti lokálně konečných měr a příslušných prostorů. Dále jsou uvedeny nutné podmínky pro existenci rozšíření systému náhodných veličin na náhodnou míru a následuje řešení stěžejního problému, kterým je možnost rozšířit platnost těchto podmínek ze spočetného systému náhodných veličin na systém nespočetný. To nám dále umožní formulovat a dokázat větu o konstrukci náhodné míry za pomoci konečněrozměrných rozdělení. K tomu využijeme Daniell-Kolmogorovu větu pro konzistentní systém distribučních funkcí. Dokážeme také jednoznačnost takového rozšíření. Druhá kapitola obsahuje několik příkladů a obsahuje důležitý protipříklad, který ukazuje, že danou teorii nelze použít pro náhodné znaménkové míry. Nalezení nutných a postačujících podmínek, aby daná konečněrozměrná rozdělení určovala náhodnou znaménkovou míru je zatím otevřený problém.

Většinu vět a tvrzení uvedených v části této práce zabývající se existencí náhodné míry pokrývá kapitola IX. v publikaci (Daley a Vere-Jones, 2008). K takovým tvrzením zde uvedeme podrobný důkaz a některá uvedeme a dokážeme s odlišnými předpoklady. Jedná se například o lemma 6, k jehož důkazu se v (Daley a Vere-Jones, 2008) používá předpoklad složitější struktury na daném okruhu a které zde dokážeme pomocí upravené standardní konstrukce z teorie míry. Část o jednoznačnosti náhodné míry a některá další tvrzení naopak podobným způsobem vychází z (Rataj, 2006). Ve druhé kapitole dokážeme větu 13, která je kompromisem mezi obecnější větou o existenci a snahou o co nejjednodušší ověřování předpokladů v konkrétních příkladech.

Kapitola 1

Existence a jednoznačnost rozdělení náhodné míry

1.1 Úvodní definice a tvrzení

Nechť X je úplný separabilní metrický prostor (polský prostor) a $\mathcal{B}(X)$ je borelovská σ-algebra na X. Systém omezených borelovských množin na X budeme značit $\mathcal{B}_0(X)$.

Definice 1. *Řekneme, že borelovská míra μ na X je lokálně konečná, jestliže pro každou $B \in \mathcal{B}_0(X)$ platí: $\mu(B) < \infty$.*

Definice 2.

1. *Symbolem $\mathcal{M}_X^{\#}$ budeme značit množinu všech lokálně konečných měr na $(X, \mathcal{B}(X))$.*

2. *Dále označíme $\mathcal{N}_X^{\#} = \{\mu \in \mathcal{M}_X^{\#} : \mu(B) \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}, \forall B \in \mathcal{B}(X)\}$ množinu všech lokálně konečných celočíselných měr. Těm budeme říkat čítací míry.*

3. *$\mathcal{M}_X$ (resp. $\mathcal{N}_X$) bude značit množinu všech konečných (resp. konečných celočíselných) měr $\mu \in \mathcal{M}_X^{\#}$.*

Na těchto prostorech nyní definujeme σ-algebry.

Definice 3.

1. $\mathfrak{M} = \sigma\{\mu \in \mathcal{M}_X^{\#} : \mu \longmapsto \mu(B)$ *měřitelné,* $B \in \mathcal{B}(X)\}$

2. $\mathfrak{N} = \{M \cap \mathcal{N}_X^{\#} : M \in \mathfrak{M}\}$

Poznámka. $\mathfrak{M}$ je nejmenší σ-algebra taková, že jsou vůči ní měřitelná všechna zobrazení $\mu \longmapsto \mu(B)$. Můžeme ji tedy přepsat do tvaru:

$$\begin{aligned}\mathfrak{M} &= \sigma\{\{\mu \in \mathcal{M}_X^{\#} :\ \mu(B) \in A\}, A \in \mathcal{B}[0,\infty),\ B \in \mathcal{B}(X)\}\\ &= \sigma\{\{\mu \in \mathcal{M}_X^{\#} :\ \mu(B) < a\}, a > 0,\ B \in \mathcal{B}(X)\}.\end{aligned}$$

Druhá rovnost plyne ze známého tvrzení z teorie míry, že měřitelnost zobrazení stačí ověřit na generující množině příslušné σ-algebry. Následující tvrzení ukazuje, že podobně se můžeme omezit i v definici σ-algebry $\mathfrak{M}$.

Lemma 1. *Platí následující tvrzení:*

1. *Buď $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}_0(X)$ množinový systém uzavřený na konečné průniky takový, že $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(X)$ a existují $A_n \in \mathcal{A}$, $A_n \nearrow X$ pro $n \to \infty$. Pak*

$$\mathfrak{M} = \sigma\{\mu \longmapsto \mu(A) \text{ měřitelné}, A \in \mathcal{A}\}.$$

2. $\mathcal{N}_X^{\#} \in \mathfrak{M}$.

Důkaz. Viz (Rataj, 2006, Lemma 2.3).

□

Definice 4. *Nechť μ je míra na měřitelném prostoru $(X, \mathcal{B}(X))$. Řekneme, že $x \in X$ je atom míry μ, jestliže $\mu(x) > 0$.*

Definice 5. *Definujeme Diracovu míru v bodě $x \in X$ na borelovských množinách A takto:*

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } x \in A, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Poznámka. Uvažujme míru $\mu \in \mathcal{M}_X^{\#}$. X je separabilní a tedy μ je σ-konečná. Může tedy mít nejvýše spočetně mnoho atomů. Označíme je $\{x_j, j = 1,2,...\}$ a $b_j = \mu\{x\}$, míra $\mu_a(\cdot) \equiv \sum_{j=1}^{\infty} b_j \delta_{x_j}(\cdot)$ se potom soustředí pouze na atomech míry μ. Potom ale míra

$$\mu_d(\cdot) := \mu(\cdot) - \mu_a(\cdot) = \mu(\cdot) - \sum_{j=1}^{\infty} b_j \delta_{x_j}(\cdot) \tag{1.1}$$

nemá žádné atomy. Pro každou míru $\mu \in \mathcal{M}_X^{\#}$ tedy existuje jednoznačný rozklad $\mu = \mu_a + \mu_d$, kde μ_a (resp. μ_d) nazýváme diskrétní (resp. spojitou) částí μ.

Definice 6. *Definujeme nosič míry μ na X takto:*

$$\operatorname{supp}(\mu) = X \setminus \bigcup\{G \subset X \text{ otevřená: } \mu(G) = 0\}.$$

Lemma 2. *Platí:* $\mu(X \setminus \operatorname{supp}(\mu)) = 0$.

Důkaz. Důkaz můžeme najít v (Štěpán, 1987, kap. I.7)

□

Tvrzení 3. *Lokálně konečná míra N na $\mathcal{B}(X)$ je čítací (tj. $N \in \mathcal{N}_X^{\#}$), právě když její spojitá část je nulová, v* (1.1) *jsou všechna b_j kladná celá čísla (tj. $b_j = k_j \in \mathbb{N}$) a $\{x_j\}$ je spočetná množina s nejvýše konečně mnoha prvky v každé omezené borelovské množině.*

Důkaz. Buď nejprve $\mu \equiv 0$, $b_j \in \mathbb{N}$, a nechť platí předpoklad lokální konečnosti. Potom podle (1.1) je N zřejmě čítací míra. Nechť naopak $N \in \mathcal{N}_X^{\#}$. Prostor X je separabilní a lze ho tedy pokrýt spočetně mnoha omezenými množinami. N je celočíselná a lokálně konečná, v každé omezené množině může mít tedy jen konečně mnoho atomů a na celém prostoru X tedy nejvýše spočetně mnoho.

Nyní stačí ukázat, že spojitá část míry N je nulová. Dokážeme, že nosič míry N obsahuje pouze atomy. Nechť $x \in X$ je libovolný bod, $\epsilon_j > 0$ jsou taková reálná čísla, že $\epsilon_j \searrow 0$ pro $j \longrightarrow \infty$. Označíme $B(x,\epsilon_j)$ otevřenou kouli o poloměru ϵ_j a středu x. Potom platí: $B(x,\epsilon_j) \searrow \{x\}$ a

$$\lim_{j \longrightarrow \infty} N(B(x,\epsilon_j)) = N\{x\}. \tag{1.2}$$

Každý člen levé strany je celé nezáporné číslo, a tedy i $N\{x\} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pokud x není atom N, potom podle (1.2) musí existovat otevřená koule $B \subset X$ taková, že $x \in B$ a $N(B) = 0$. Tedy $x \notin \operatorname{supp}(N)$.

$\square$

Definice 7.

1. *Řekneme, že posloupnost konečných měr $\mu_n \in \mathcal{M}_X$ konverguje slabě k míře μ (značíme $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$), jestliže $\int f d\mu_n \xrightarrow{n\to\infty} \int f d\mu$ pro každou spojitou omezenou funkci f na X*

2. *Pro posloupnost lokálně konečných měr $\mu_n \in \mathcal{M}_X^{\#}$ definujeme $w^{\#}$ konvergenci takto: $\mu_n \xrightarrow{w^{\#}} \mu$, jestliže $\int f d\mu_n \xrightarrow{n\to\infty} \int f d\mu$, pro každou funkci f s nosičem na omezené množině (tj. $\exists A \in \mathcal{B}_0(X)$ taková, že $f = 0$ na $X \setminus A$).*

Tvrzení 4.

1. V $w^{\#}$ topologii je $\mathcal{M}_X^{\#}$ polský prostor.

2. Borelovská σ-algebra $\mathcal{B}(\mathcal{M}_X^{\#})$ je nejmenší σ-algebra vůči níž jsou měřitelná všechna zobrazení $\mu \longmapsto \mu(B)$ pro $B \in \mathcal{B}(X)$. Tedy platí $\mathcal{B}(\mathcal{M}_X^{\#}) = \mathfrak{M}$.

Důkaz. Viz (Daley a Vere-Jones, 2003, A2.6.III.).

$\square$

Poznámka. Na prostoru konečných měr $\mathcal{M}_X$ můžeme uvažovat Prochorovovu metriku (Daley a Vere-Jones, 2003, A2.5.1). Pomocí ní pak lze definovat úplnou metriku na $\mathcal{M}_X^{\#}$ metrizující $w^{\#}$ konvergenci (Daley a Vere-Jones, 2003, A2.6.1).

Definice 8. *Řekneme, že množinový systém $\mathcal{A} \subset 2^X$ je okruh, jestliže je uzavřený na konečné průniky a symetrickou diferenci.*

Poznámka. Z definice okruhu plyne, že $\emptyset \in \mathcal{A}$ a pro $A,B \in \mathcal{A}$ platí také $A \cup B \in \mathcal{A}$ a $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

1.2 Existence rozdělení náhodné míry

Definice 9. *Buď* $(\Omega,\ \Sigma,\ P)$ *pravděpodobnostní prostor. Měřitelné zobrazení*

$$\Psi : (\Omega,\ \Sigma,\ P) \longrightarrow (\mathcal{M}_X^{\#}, \mathfrak{M})$$

se nazývá náhodná míra na X*. Pravděpodobnostní míra* P_Ψ *na* $(\mathcal{M}_X^{\#}, \mathfrak{M})$ *pro kterou* $P_\Psi(M) = P(\Psi \in M)$ *pro každou* $M \in \mathfrak{M}$*, se nazývá rozdělení náhodné míry* Ψ*.*

Je-li $\xi(A,\omega)$ hodnota náhodné míry pro $A \in \mathcal{B}_0(X)$ a $\omega \in \Omega$, pak pro pevnou $A \in \mathcal{B}_0(X)$ je $\xi_A \equiv \xi(A,\cdot)$ zobrazení z Ω do $\mathbb{R}^+$.

Značení. V dalším budeme zobrazení $\mu \longmapsto \mu(A)$ z $\mathcal{M}_X^{\#}$ do $\mathbb{R}^+$ značit jako Φ_A.

Věta 5. *Nechť* ξ *je zobrazení z pravděpodobnostního prostoru* $(\Omega,\ \Sigma\ ,P)$ *do* $\mathcal{M}_X^{\#}$ *a* $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}_0(X)$ *je systém uzavřený na konečné průniky takový, že* $\sigma\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$ *a existují* $A_n \in \mathcal{A}$*,* $A_n \nearrow X$*. Potom* ξ *je náhodná míra, právě když* ξ_A *je náhodná veličina pro každé* $A \in \mathcal{A}$*.*

Důkaz. Označme

$$\mathcal{U} = \{U \subset \mathcal{M}_X^{\#} : \xi^{-1}(U) \in \Sigma\}.$$

$\mathcal{U}$ tvoří σ -algebru. Protože platí následující rovnost $\xi_A(\omega) = \Phi_A(\xi(\cdot,\omega))$, můžeme pro libovolnou množinu $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$ psát:

$$\xi^{-1}(\Phi_A^{-1}(B)) = \xi_A^{-1}(B). \tag{1.3}$$

Jsou-li ξ_A náhodné veličiny, pak $\xi_A^{-1}(B) \in \Sigma$ a tedy $\xi^{-1}(\Phi_A^{-1}(B)) \in \Sigma$. Z definice σ -algebry $\mathcal{U}$ dostáváme, že

$$\Phi_A^{-1}(B) \in \mathcal{U} \text{ pro každou } A \in \mathcal{A}. \tag{1.4}$$

Dále označme

$$\tilde{\mathcal{U}} := \{\Phi_A^{-1}(B),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+),\ A \in \mathcal{A}\}.$$

Z (1.4) vidíme, že $\tilde{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}$. Protože $\mathcal{U}$ je σ -algebra, platí dokonce $\sigma\tilde{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}$. Nyní stačí použít lemma 1 a tvrzení 4 a ihned dostáváme následující:

$$\mathcal{B}(\mathcal{M}_X^{\#}) = \mathfrak{M} = \sigma(\tilde{\mathcal{U}}) \subset \mathcal{U}.$$

Zobrazení ξ je tedy měřitelné a podle definice 9 je to náhodná míra.

Nechť naopak ξ je náhodná míra. Z definice σ -algebry $\mathfrak{M}$ a podle tvrzení 4 platí $\Phi_A^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_X^{\#})$ pro každou $A \in \mathcal{A}$ a $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$. Potom $\xi^{-1}(\Phi_A^{-1}(B)) \in \Sigma$ a z (1.3) dostáváme, že ξ_A jsou náhodné veličiny.

$\square$

Důsledek. Zobrazení $\xi : \Omega \longrightarrow \mathcal{M}_X^{\#}$ je náhodná míra, právě když ξ_A jsou náhodné veličiny pro každou $A \in \mathcal{B}_0(X)$.

Náhodnou míru tedy můžeme chápat jako soubor náhodných veličin indexovaných pomocí borelovských množin na X. Kvůli vlastnostem míry mají vztahy mezi těmito náhodnými veličinami složitější strukturu. Z aditivity a spojitosti míry musí platit následující:

1. Pro všechny disjunktní množiny $A, B \in \mathcal{B}(X)$ platí

$$\xi_A + \xi_B = \xi_{A \cup B} \quad \text{s.j.} \tag{1.5}$$

   a

2. pro všechny posloupnosti omezených borelovských množin $\{A_n\} \subset \mathcal{B}_0(X)$ takových, že $A_n \searrow \emptyset$ pro $n \longrightarrow \infty$ platí

$$\xi_{A_n} \xrightarrow{n \to \infty} 0 \quad \text{s.j.} \tag{1.6}$$

Poznámka. Podmínka (1.5) říká, že pro každé dvě disjunktní borelovské množiny existuje nějaká množina $N_{A,B} \subset \Omega$, $P(N_{A,B}) = 0$ taková, že pro každé $\omega \in \Omega \backslash N_{A,B}$ platí $\xi_A(\omega) + \xi_B(\omega) = \xi_{A \cup B}(\omega)$. Protože $A,B \in \mathcal{B}(X)$, máme nespočetně mnoho podmínek tvaru (1.5) a není ihned jasné, zda nespočetné sjednocení množin $N_{A,B}$ má také nulovou míru. K rozšíření systému náhodných veličin na míru pro s.v. $\omega \in \Omega$ tedy budeme potřebovat následující tvrzení.

Lemma 6. *Nechť $\mathcal{A}$ je spočetný okruh, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}_0(X)$ a nechť $\{\xi_A,\ A \in \mathcal{A}\}$ je systém nezáporných náhodných veličin indexovaných množinami $A \in \mathcal{A}$. Pak $\xi(\cdot,\omega)$ lze rozšířit na míru na $\sigma\mathcal{A}$ skoro jistě, právě když* (1.5) *platí pro všechny dvojice disjunktních množin $A,B \in \mathcal{A}$ a* (1.6) *platí pro všechny posloupnosti $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$, pro které $A_n \searrow \emptyset$.*

Důkaz. Označme

$$N_{A,B} := \{\omega \in \Omega : \xi_A(\omega) + \xi_B(\omega) \neq \xi_{A \cup B}(\omega)\}$$

pro $A,B \in \mathcal{A}$ disjunktní. Z podmínky (1.5) víme, že $P(N_{A,B}) = 0$ a protože $\mathcal{A}$ je spočetný, je i sjednocení $N = \bigcup N_{A,B}$ spočetné a platí

$$P(N) = P(\bigcup N_{A,B}) \leq \sum P(N_{A,B}) = 0.$$

Máme, že (1.5) platí pro každé $\omega \in \Omega \setminus N$. Potom indukcí dostáváme, že pro všechny disjunktní množiny $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ platí

$$\xi_{A_1} + \cdots + \xi_{A_n} = \xi_{A_1 \cup \cdots \cup A_n} \text{ na } \Omega \setminus N.$$

$\xi(\cdot,\omega)$ je potom s.j. konečně aditivní množinová funkce na $\mathcal{A}$, pro kterou zřejmě $\xi(\emptyset,\omega) = 0$. Dále budeme značit $\xi(\cdot) \equiv \xi(\cdot,\omega)$. Nyní chceme tuto množinovou funkci rozšířit na míru na $\sigma\mathcal{A}$. Protože máme k dispozici pouze konečnou aditivitu, nemůžeme použít Hopfovu větu přímo. Využijeme proto podmínky (1.6).

K rozšíření použijeme standardní konstrukci z teorie míry. Definujeme:

$$\xi^*(B) := \inf\Big\{ \sum_{j=1}^{\infty} \xi(B_j) :\ B_j \in \mathcal{A}, B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \Big\}. \tag{1.7}$$

Z teorie míry (Lukeš a Malý, 2005, theorem 4.3.) víme, že $\xi^*(\cdot)$ je vnější míra na X. Množina $M \subset X$ je ξ^* -měřitelná podle definice (Lukeš a Malý, 2005, 4.4.), jestliže pro každou $T \subset X$ platí $\xi^*(T) = \xi^*(T \cap M) + \xi^*(T \setminus M)$. Pak z

Caratheodoryovy věty (Lukeš a Malý, 2005, theorem 4.5.) dostáváme, že systém ξ^* -měřitelných množin $\mathfrak{M}(\xi^*)$ tvoří σ -algebru a $\xi^*|_{\mathfrak{M}(\xi^*)}$ je míra. Nyní zbývá dokázat, že $(\mathfrak{M}(\xi^*), \xi^*|_{\mathfrak{M}(\xi^*)})$ rozšiřuje $(\mathcal{A}, \xi)$.

Nejprve ukážeme, že $\mathcal{A} \subset \mathfrak{M}(\xi^*)$. Nechť $A \in \mathcal{A}$, $T \subset X$ a $\{B_j\} \subset \mathcal{A}$ jsou takové, že $T \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$. Systém $\mathcal{A}$ je okruh a tedy $B_j \cap A$, $B_j \setminus A \in \mathcal{A}$. Z konečné aditivity ξ platí

$$\xi(B_j) = \xi(B_j \cap A) + \xi(B_j \setminus A)$$

a dále podle (1.7)

$$\xi^*(T \cap A) + \xi^*(T \setminus A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \xi(B_j \cap A) + \sum_{j=1}^{\infty} \xi(B_j \setminus A) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi(B_j).$$

Přechodem k infimu přes všechny horní součty a ze subaditivity vnější míry pak ihned dostáváme měřitelnost množiny A a tedy platí $\mathcal{A} \subset \mathfrak{M}(\xi^*)$ a $\sigma\mathcal{A} \subset \mathfrak{M}(\xi^*)$.

Nyní stačí dokázat, že $\xi = \xi^*$ na $\mathcal{A}$ s.j. Nechť $A \in \mathcal{A}$, $\{B_j\} \subset \mathcal{A}$ a $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$. Zdisjunktněním množin $B_j \cap A$ najdeme po dvou disjunktní množiny $E_j \in \mathcal{A}$ takové, že $E_j \subset (B_j \cap A)$ a platí

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} (B_j \cap A) = A.$$

Označme $A_n = A \setminus \bigcup_{j=1}^{n} E_j$. Potom $A_n \searrow \emptyset$ pro $n \to \infty$ a podle (1.6) platí $\xi(A_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ s.j. Dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \xi(\bigcup_{j=1}^{n} E_j) = \xi(A) \text{ s.j.}$$

a protože ξ jsou konečně aditivní s.j., platí

$$\sum_{j=1}^{\infty} \xi(E_j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \xi(E_j) = \xi(A) \text{ s.j.}$$

Ukázali jsme, že

$$\xi(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi(E_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \xi(B_j) \text{ s.j.}$$

a tedy

$$\xi(A) \leq \xi^*(A) \text{ s.j.} \tag{1.8}$$

Protože $\xi(A)$ je horní součet k $\xi^*(A)$, platí i opačná nerovnost. Vzhledem k tomu, že okruh $\mathcal{A}$ je spočetný, máme pouze spočetně mnoho podmínek (1.6) a proto vztah (1.8) platí skoro jistě už pro všechny $A \in \mathcal{A}$ zároveň. Dokázali jsme, že $(\sigma\mathcal{A}, \xi^*)$ skoro jistě rozšiřuje $(\mathcal{A}, \xi)$.

Nutnost obou podmínek plyne z aditivity a spojitosti míry.

$\square$

Věta 7. *Nechť $\{\xi_A,\ A \in \mathcal{B}(X)\}$ je systém nezáporných náhodných veličin indexovaných množinami z $\mathcal{B}(X)$, které jsou skoro jistě konečné na $\mathcal{B}_0(X)$. Pak náhodná míra $\xi^*(A,\omega)$ taková, že pro každou $A \in \mathcal{B}(X)$ platí*

$$\xi^*(A,\omega) = \xi_A(\omega) \text{ s.j.}$$

existuje, právě když (1.5) *platí pro každé dvě disjunktní omezené borelovské množiny $A,B \in \mathcal{B}_0(X)$ a* (1.6) *platí pro všechny posloupnosti $\{A_n\} \subset \mathcal{B}_0(X)$ omezených borelovských množin.*

Důkaz. Buď $\mathcal{A}$ libovolný spočetný okruh takový, že $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}_0(X)$, $\sigma\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$ a existují $A_n \in \mathcal{A}$ takové, že $A_n \nearrow X$. Podmínky (1.5) a (1.6) platí na $\mathcal{B}_0(X)$ a tedy i na $\mathcal{A}$. Podle lemmatu 6 nyní s pravděpodobností 1 existuje rozšíření konečně aditivních funkcí $\xi(\cdot,\omega)$ definovaných pro $A \in \mathcal{A}$ na míry $\xi^*(\cdot,\omega)$, definované pro všechny $A \in \sigma\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$.

Označme $U \subset \Omega$, $P(U) = 0$, množinu těch $\omega \in \Omega$, pro které takové rozšíření neexistuje. Pro $\omega \in U$ definujeme $\xi^*(A,\omega) = 0$. Potom je ξ^* náhodná míra, která se na $\mathcal{A}$ shoduje s náhodnými veličinami $\xi_A(\omega)$ skoro jistě. Dokážeme, že pro každou množinu $A \in \mathcal{B}(X)$ platí

$$\xi_A(\omega) = \xi^*(A,\omega) \text{ s.j.}$$

Označme

$$\mathcal{D}_n = \{B \in \mathcal{B}(X) : \xi_{B\cap A_n}(\omega) = \xi^*(B \cap A_n,\omega) \text{ s.j.}\}.$$

Ukážeme, že $\mathcal{D}_n$ je Dynkinův systém. Nechť $A,B \in \mathcal{D}_n$ a $A \subset B$. Potom

$$\begin{aligned}\xi_{(B\setminus A)\cap A_n}(\omega) &= \xi_{B\cap A_n}(\omega) - \xi_{A\cap A_n}(\omega)\\ &= \xi^*(B\cap A_n,\omega) - \xi^*(A\cap A_n,\omega)\\ &= \xi^*((B\setminus A)\cap A_n,\ \omega) \text{ s.j.}\end{aligned}$$

a $B \setminus A \in \mathcal{D}_n$. Buď B_j po dvou disjunktní množiny, $\{B_j\} \subset \mathcal{D}_n$. Protože platí

$$\bigcup_{j=k+1}^{\infty} (B_j \cap A_n) \searrow \emptyset,\ k \to \infty$$

můžeme psát

$$\begin{aligned}\xi(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \cap A_n,\omega) &= \lim_{k\to\infty} \xi(\bigcup_{j=1}^{k} B_j \cap A_n,\omega)\\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \xi(B_j \cap A_n,\omega)\\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \xi^*(B_j \cap A_n,\omega)\\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \xi^*(B_j \cap A_n,\omega) = \xi^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \cap A_n,\omega) \text{ s.j.}\end{aligned}$$

Zřejmě $X \in \mathcal{D}_n$. Ukázali jsme, že $\mathcal{D}_n$ je Dynkinův systém pro každé $n \in \mathbb{N}$. Z lemmatu 6 víme, že $(\sigma\mathcal{A}, \xi^*)$ rozšiřuje $(\mathcal{A},\xi)$ a tedy $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}_n$. Z Dynkinova lemmatu dostáváme, že $\mathcal{B}(X) = \sigma\mathcal{A} \subset \mathcal{D}_n \subset \mathcal{B}(X)$ a $\mathcal{D}_n = \mathcal{B}(X)$. Tedy pro každou $B \in \mathcal{B}(X)$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\xi_{B\cap A_n} = \xi^*(B \cap A_n,\cdot) \ s.j.,$$

a tedy $\xi_B = \xi^*(B,\cdot)$ s.j. Nutnost obou podmínek ihned dostáváme z aditivity a spojitosti míry.

□

Věta 8. *Nechť ξ je náhodná míra definovaná na pravděpodobnostním prostoru (Ω,Σ, P) s úplným, separabilním stavovým prostorem X a $\mathcal{F} \subset \Sigma$ je σ -algebra. Pak existují verze podmíněných středních hodnot $\eta(A,\omega) = \mathbb{E}[\xi_A|\mathcal{F}](\omega)$ takové, že*

1. *Pro každou $A \in \mathcal{B}(X)$ je $\eta(A,\cdot)$ $\mathcal{F}$ -měřitelná náhodná veličina*

2. *η je náhodná míra se stavovým prostorem X.*

Důkaz. Pro $A,B \in \mathcal{B}_0(X)$ disjunktní platí

$$\begin{aligned}\eta(A) + \eta(B) &= \mathbb{E}[\xi_A|\mathcal{F}] + \mathbb{E}[\xi_B|\mathcal{F}] \\ &= \mathbb{E}[\xi_A + \xi_B|\mathcal{F}] = \mathbb{E}[\xi_{A\cup B}|\mathcal{F}] \text{ s.j.} \\ &= \eta(A \cup B).\end{aligned}$$

Nechť dále $\{A_n\} \subset \mathcal{B}_0(X)$, $A_n \searrow \emptyset$, pak $\xi_{A_n} \longrightarrow 0$ s.j. a podle (Lachout, 1998, Věta 7.12 iv) platí

$$\mathbb{E}[\xi_{A_n}|\mathcal{F}] \longrightarrow 0 \text{ s.j.}$$

Podmíněné střední hodnoty $\eta(A,\omega)$ tedy splňují podmínky (1.5) a (1.6) pro omezené borelovské množiny. Podmíněné střední hodnoty jsou z definice $\mathcal{F}$ -měřitelné, viz (Lachout, 1998, Definice 7.1). Podle věty 7 nyní existuje $\mathcal{F}$ -měřitelná náhodná míra ξ^* taková, že pro každou $A \in \mathcal{B}(X)$ platí $\xi^*(A) = \xi(A)$ skoro jistě.

□

Definice 10. *Konečněrozměrná rozdělení náhodné míry ξ jsou sdružená rozdělení náhodných veličin $\xi_{A_1}, \ldots ,\xi_{A_n}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $A_1, \ldots ,A_n \in \mathcal{B}_0(X)$. Příslušné distribuční funkce budeme značit $F_n(A_1, \ldots ,A_n; x_1, \ldots ,x_n)$, kde*

$$F_n(A_1, \ldots ,A_n; x_1, \ldots ,x_n) = P(\xi_{A_1} \leq x_1, \ldots ,\xi_{A_n} \leq x_n).$$

Definice 11. (Kolmogorovy podmínky konzistence)
Mějme systém distribučních funkcí $\{F_n(\cdot; \cdot)\}$ jako výše. Řekneme, že tento systém je konzistentní, jestliže jsou splněny následující podmínky.

1. *Pro každé $k \in \mathbb{N}$ a každou permutaci $i_1, \ldots ,i_k$ čísel $1, \ldots ,k$ platí*

$$F_k(A_1, \ldots ,A_k; x_1, \ldots ,x_k) = F_k(A_{i_1}, \ldots ,A_{i_k}; x_{i_1}, \ldots ,x_{i_k})$$

2. *Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí*

$$\lim_{x_{k+1}\to\infty} F_{k+1}(A_1,\dots,A_k,A_{k+1};x_1,\dots,x_k,x_{k+1}) = F_k(A_1,\dots,A_k;x_1,\dots,x_k)$$

Definice 12. (Podmínky pro existenci míry)
Mějme systém distribučních funkcí jako výše, pak definujeme následující podmínky.

1. Aditivita. *Pro dvojici disjunktních množin $A_1,A_2 \in \mathcal{B}(X)$ je rozdělení odpovídající distribuční funkci $F_3(A_1,A_2,A_1 \cup A_2;x_1,x_2,x_3)$ soustředěno na přímce $x_1 + x_2 = x_3$.*

2. Spojitost. *Pro každou posloupnost $\{A_n\} \subset \mathcal{B}_0(X)$ omezených borelovských množin takových, že $A_n \searrow \emptyset$ a pro každé $\epsilon > 0$ platí*

$$1 - F_1(A_n;\epsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \tag{1.9}$$

Nyní uvedeme verzi Daniell-Kolmogorovy věty. Její obecnější znění můžeme najít v (Štěpán, 1987, věta I.10.3.).

Věta 9. *Nechť $\{F_k(A_1,\dots,A_k;x_1,\dots,x_k)\}$ je konzistentní systém distribučních funkcí. Pak existuje pravděpodobnostní prostor (Ω,Σ,P) a na něm definovaný náhodný proces $\{\xi_A, A \in \mathcal{B}(X)\}$ takový, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $A_1,\dots,A_k \in \mathcal{B}(X)$ a reálná $x_1,\dots,x_k$ platí*

$$P(\xi_{A_1} \le x_1,\dots,\xi_{A_k} \le x_k) = F_k(A_1,\dots,A_k;x_1,\dots,x_k). \tag{1.10}$$

Věta 10. *Buď $\{F_k(\cdot;\cdot)\}$ systém distribučních funkcí splňující Kolmogorovy podmínky konzistence. Pak $F_k(\cdot)$ jsou konečněrozměrná rozdělení náhodné míry, právě když platí*

1. *Distribuční funkce $F_k(\cdot)$ jsou nenulové pouze pro nezáporné hodnoty $x_1,...,x_k$.*

2. *Funkce $F_k(\cdot)$ splňují podmínky v definici* (12).

Důkaz. Nutnost obou podmínek plyne z lemmatu 6. Nechť $F_k(\cdot)$ splňují Kolmogorovovy podmínky konzistence. Pak podle věty 9 existuje pravděpodobnostní prostor (Ω,Σ,P) a na něm definované náhodné veličiny ξ_A pro $A \in \mathcal{B}_0(X)$, které splňují (1.10). Z předpokladu (1) plyne, že $\xi_A \ge 0$ s.j. a platnost podmínky (1) z definice 12 nám dává platnost (1.5).

Dále z předpokladu (1.9) plyne, že pro $A_n \in \mathcal{B}_0(X)$, $A_n \searrow \emptyset$ platí $\xi_{A_n} \xrightarrow{P} 0$. Potom podle (Lachout, 1998, věta 6.7. (ii)) existuje podposloupnost $\xi_{A_{n_k}}$, $k \in \mathbb{N}$ taková, že $\xi_{A_{n_k}} \longrightarrow 0$ s.j. Posloupnost ξ_{A_n} je ale s.j. monotónní, má tedy limitu s.j. a proto $\xi_{A_n} \longrightarrow 0$ s.j. Dostáváme platnost podmínky (1.6) a tím jsou splněny předpoklady lemmatu 6. Existuje proto náhodná míra ξ^* taková, že pro každou $A \in \mathcal{B}(X)$ platí $\xi^*(A) = \xi_A$ s.j. Z toho ale plyne, že ξ^* a ξ mají stejná konečněrozměrná rozdělení.

□

1.3 Jednoznačnost rozdělení náhodné míry

Definice 13. *Pro $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}_0$ označme*

$$\mathfrak{M}_{A_1,\ldots,A_n} = \sigma\{\mu \longmapsto \mu(A_i) \text{měřitelné}, i = 1, \ldots, n\} \tag{1.11}$$

Lemma 11. *Buď $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}_0(X)$ systém uzavřený na konečné průniky takový, že $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(X)$ a existují $A_n \in \mathcal{A}, A_n \nearrow X$. Pak*

$$\mathfrak{M}_0 = \bigcup \{\mathfrak{M}_{A_1,\ldots,A_n} : \ A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}, A_i \text{ po dvou disjunktní}\}$$

je algebra a $\sigma\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}$.

Důkaz. Nejprve dokážeme, že $\mathfrak{M}_0$ je algebra. Ověříme, že

1. $\mathcal{M}_X^{\#} \in \mathfrak{M}_0$,
2. $U, V \in \mathfrak{M}_0 \Rightarrow U \setminus V \in \mathfrak{M}_0$,
3. $U, V \in \mathfrak{M}_0 \Rightarrow U \cup V \in \mathfrak{M}_0$.

Zřejmě platí $\mathcal{M}_X^{\#} \in \mathfrak{M}_0$. Podmínky 2 a 3 nejprve dokážeme ve speciálním případě. Nechť $U \in \mathfrak{M}_A, V \in \mathfrak{M}_B$, pak $U, V \in \mathfrak{M}_{A\setminus B, A\cap B, B\setminus A}$. Uvažujme následující zobrazení

$$\begin{aligned} \Phi_A : (\mathcal{M}_X^{\#}, \mathfrak{M}_A) &\longrightarrow ([0,\infty), \mathcal{B}[0,\infty)) \\ \mu &\longmapsto \mu(A), \end{aligned}$$

kde $\mathfrak{M}_A$ je nejmenší σ-algebra, vůči které je zobrazení Φ_A měřitelné. Z výrazu (1.11) v Definici 13. máme, že zobrazení $\Phi_{A\setminus B}, \Phi_{A\cap B}$ jsou měřitelná vůči σ-algebře $\mathfrak{M}_{A\setminus B, A\cap B, B\setminus A}$ a $\mathfrak{M}_{A\setminus B, A\cap B, B\setminus A} \in \mathfrak{M}_0$, protože $A, B \in \mathcal{A}$ a $\mathcal{A}$ je okruh. Potom Φ_A je součtem dvou měřitelných zobrazení

$$\Phi_A = \Phi_{A\setminus B} + \Phi_{A\cap B}$$

a je proto také $\mathfrak{M}_{A\setminus B, A\cap B, B\setminus A}$-měřitelné, tedy $\mathfrak{M}_A \subset \mathfrak{M}_{A\setminus B, A\cap B, B\setminus A}$. Pro zobrazení Φ_B je situace symetrická, ihned proto dostáváme $\mathfrak{M}_B \subset \mathfrak{M}_{A\setminus B, A\cap B, B\setminus A}$ a $U, V \in \mathfrak{M}_{A\setminus B, A\cap B, B\setminus A}$. Odtud $U, V \in \mathfrak{M}_0$.

Mějme nyní obecně $U, V \in \mathfrak{M}_0$, tedy platí: $U \in \mathfrak{M}_{A_1,\ldots,A_n}, V \in \mathfrak{M}_{B_1,\ldots,B_m}$ pro nějaké množiny $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{A}$ takové, že pro všechny $i \neq j$ platí $A_i \cap A_j = \emptyset$ a $B_i \cap B_j = \emptyset$. Uvažujme po dvou disjunktní množiny $C_1, \ldots, C_k \in \mathcal{A}$, které jsou tvořeny množinami typu $A_i \setminus \bigcup_{j=1}^m B_j$, $A_i \cap B_j$, $B_i \setminus \bigcup_{j=1}^n A_j$. Potom zobrazení Φ_{A_i} se pro $i \in \{1, \ldots, n\}$ dá vyjádřit jako konečný součet $\mathfrak{M}_{C_1,\ldots,C_k}$-měřitelných zobrazení

$$\Phi_{A_i} = \sum_{j \in I_i} \Phi_{C_j}$$

pro vhodnou $I_i \subset \{1, \ldots, k\}$. Odtud máme, že Φ_{A_i} jsou $\mathfrak{M}_{C_1,\ldots,C_k}$ -měřitelné. Obdobně dostaneme, že Φ_{B_j} pro $j = 1, \ldots, m$ jsou také $\mathfrak{M}_{C_1,\ldots,C_k}$-měřitelné, tedy $U, V \in \mathfrak{M}_{C_1,\ldots,C_k}$ a $U \setminus V, U \cap V \in \mathfrak{M}_0$. Dokázali jsme, že $\mathfrak{M}_0$ je algebra.

Nyní dokážeme, že $\sigma\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}$. Pro $A \in \mathcal{A}$ označíme

$$\mathcal{D}_A = \{B \in \mathcal{B}(X) : \ \mu \longmapsto \mu(B \cap A) \text{ je } \sigma\mathfrak{M}_0\text{-měřitelné}\}.$$

Ukážeme, že $\mathcal{D}_A$ je Dynkinův systém obsahující $\mathcal{A}$. Nechť $\tilde{A} \in \mathcal{A}$, pak $\tilde{A} \cap A \in \mathcal{A}$ a z definice $\mathfrak{M}_0$ je $\mu \longmapsto \mu(\tilde{A} \cap A)$ $\sigma\mathfrak{M}_0$-měřitelné a tedy $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}_A$.

$X \in \mathcal{D}_A$, protože $\mu(X \cap A) = \mu(A)$ a $A \in \mathcal{A}$. Nechť $B,C \in \mathcal{D}_A$, $C \subset B$, potom $\mu((B \setminus C) \cap A) = \mu(B \cap A) - \mu(C \cap A)$. Zobrazení $\Phi_{A\cap B}$, $\Phi_{A\cap C}$ jsou $\sigma\mathfrak{M}_0$-měřitelná, $\Phi_{B\setminus C} = \Phi_{A\cap B} - \Phi_{A\cap C}$, tedy $\Phi_{B\setminus C}$ je měřitelné a $B \setminus C \in \mathcal{D}_A$. Zbývá ukázat uzavřenost $\mathcal{D}_A$ na disjunktní sjednocení.

Nechť $B_j \in \mathcal{D}_A$ jsou po dvou disjunktní, pak platí:

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \cap A) = \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty}(B_j \cap A)) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j \cap A).$$

Uvažujme nyní zobrazení

$$\Phi_n : \mu \longmapsto \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j \cap A).$$

Zobrazení $\mu \longmapsto \mu(B_j \cap A)$ jsou $\sigma\mathfrak{M}_0$-měřitelná podle předpokladu a proto Φ_n jsou $\sigma\mathfrak{M}_0$-měřitelné pro každé n. Máme, že $\Phi_n \xrightarrow{n\to\infty} \Phi$, kde $\Phi : \mu \longmapsto \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j \cap A)$. Φ je tedy limitou monotónní posloupnosti $\sigma\mathfrak{M}_0$-měřitelných funkcí, je tedy také $\sigma\mathfrak{M}_0$-měřitelné a dostáváme, že

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{D}_A.$$

Protože $\mathcal{A}$ je uzavřený na konečné průniky, můžeme použít Dynkinovo lemma a dostaneme $\mathcal{B}(X) = \sigma\mathcal{A} \subset \mathcal{D}_A$ a $\mathcal{D}_A = \mathcal{B}(X)$. Nechť $B \in \mathcal{B}(X)$, $A_i \in \mathcal{A}$ a $A_i \nearrow X$, $i \to \infty$. Nyní víme, že funkce $\Phi_{A_i \cap B}$ jsou $\sigma\mathfrak{M}_0$-měřitelné a z monotonie míry platí:

$$\Phi_B = \lim_{i\to\infty} \Phi_{A_i \cap B}.$$

Pro každou $B \in \mathcal{B}(X)$ je tedy Φ_B $\sigma(\mathfrak{M}_0)$-měřitelné. Vzhledem k tomu, že σ - algebra $\mathfrak{M}$ je z definice nejmenší taková, vůči níž jsou měřitelná zobrazení Φ_B pro každou $B \in \mathcal{B}(X)$, dostáváme $\mathfrak{M} \subset \sigma\mathfrak{M}_0$ a konečně $\sigma\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}$.

□

Značení. Pro Y,Z měřitelné funkce na pravděpodobnostním prostoru budeme symbolem $Y \overset{\mathsf{d}}{=} Z$ značit rovnost v distribuci, tedy $P(Y^{-1}) = P(Z^{-1})$.

Věta 12. *Buď $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}_0(X)$ okruh generující $\mathcal{B}(X)$ a ξ, Ψ dvě náhodné míry takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a po dvou disjunktní $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ platí:*

$$\left(\xi_{A_1}, \ldots, \xi_{A_n}\right) \overset{\mathsf{d}}{=} \left(\Psi_{A_1}, \ldots, \Psi_{A_n}\right) \tag{1.12}$$

Pak $\xi \overset{\mathsf{d}}{=} \Psi$.

Důkaz. Nechť $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ jsou po dvou disjunktní. Pro $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ označme

$$B_{a_1,\ldots,a_n} = \{\mu \in \mathcal{M}_X^{\#} :\ \mu(A_1) < a_1, \ldots, \mu(A_n) < a_n\}.$$

Pak podle předpokladu platí

$$\begin{aligned} P_\xi(B_{a_1,\dots,a_n}) &= P\Big[\xi_{A_1} < a_1, \dots, \xi_{A_n} < a_n\Big] \\ &= P\Big[\Psi_{A_1} < a_1, \dots, \Psi_{A_n} < a_n\Big] \\ &= P_\Psi(B_{a_1,\dots,a_n}). \end{aligned}$$

Z poznámky u definice 3 vidíme, že systém $\{B_{a_1,\dots,a_n},\ a_1,\dots,a_n \geq 0\}$ generuje σ -algebru $\mathfrak{M}_{A_1,\dots,A_n}$. Tento systém je zřejmě uzavřený na konečné průniky a z tvrzení o jednoznačnosti z teorie míry (viz např. (Rataj, 2006, lemma 2.2)) plyne, že $P_\xi = P_\Psi$ na $\mathfrak{M}_{A_1,\dots,A_n}$ a tedy rozdělení náhodných měr ξ a Ψ se shodují na $\mathfrak{M}_0$. Opětovným použitím (Rataj, 2006, lemma 2.2) a předchozího lemmatu 11 dostaneme, že $P_\xi = P_\Psi$ na $\sigma\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M} = \mathcal{B}(\mathcal{M}_X^{\#})$, kde poslední rovnost plyne z tvrzení 4.

$\square$

Kapitola 2

Příklady náhodných měr

2.1 Varianta věty o existenci náhodné míry

Ověřování předpokladů věty 10 může být v konkrétních příkladech pracné. Uvedeme proto její méně obecnou variantu, jejíž předpoklady ale snáze ověříme.

Věta 13. *Nechť Q_B, $B \in \mathcal{B}_0(X)$ jsou pravděpodobnostní míry na $\big([0,\infty),\mathcal{B}[0,\infty)\big)$ a platí:*

1. *Pro disjunktní množiny $A,B \in \mathcal{B}_0(X)$ je $(Q_A \otimes Q_B)\eta^{-1} = Q_{A\cup B}$, kde $\eta : (x,y) \longmapsto x + y$.*

2. *Jsou-li $A_n \in \mathcal{B}_0(X)$ a $A_n \searrow \emptyset$, pak $Q_{A_n} \xrightarrow{w} 0$.*

Pak existuje právě jedna náhodná míra ξ na X taková, že

1. *$\xi(B,\cdot) \sim Q_B$ pro každé $B \in \mathcal{B}_0(X)$,*

2. *pro $B_1, \dots ,B_k \in \mathcal{B}_0(X)$ po dvou disjunktní jsou n.v. $\xi(B_1), \dots ,\xi(B_k)$ nezávislé.*

Důkaz. Pro po dvou disjunktní množiny $B_1, \dots ,B_k \in \mathcal{B}_0(X)$ pomocí součinové míry definujeme:

$$Q_{B_1,\dots,B_k} := Q_{B_1} \otimes \dots \otimes Q_{B_k} \equiv \bigotimes_{j=1}^{k} Q_j.$$

Z této definice ihned plyne projektivita a symetrie:

1. $Q_{B_1,\dots,B_k}(U) = Q_{B_1,\dots,B_k,B_{k+1}}(U \times [0,\infty))$,

2. $Q_{B_1,\dots,B_k}(U_1 \times \dots \times U_k) = Q_{B_{\pi(1)},\dots,B_{\pi(k)}}(U_{\pi(1)} \times \dots \times U_{\pi(k)})$ pro každou permutaci π čísel $\{1, \dots ,k\}$.

Pro (ne nutně po dvou disjunktní) $A_1,\dots,A_n \in \mathcal{B}_0(X)$ najdeme po dvou disjunktní $B_1,\dots,B_k \in \mathcal{B}_0(X)$, $B_1 \cup \dots \cup B_k \subset A_1 \cup \dots \cup A_n$ takové, že pro každé A_i existuje $I_i \subset \{1,...,k\}$ a

$$A_i = \bigcup_{j \in I_i} B_j.$$

Pro $A_1,\dots,A_n \in \mathcal{B}_0(X)$ nyní definujeme

$$Q_{A_1,\dots,A_n} := Q_{B_1,\dots,B_k}\phi^{-1},$$

kde

$$\phi : (x_1,\dots,x_k) \longmapsto \Big(\sum_{i \in I_1} x_i, \dots, \sum_{i \in I_n} x_i\Big).$$

Ukážeme, že tato definice nezávisí na volbě rozkladu.

Uvažujme nejprve speciální případ, kdy $A_1,\dots,A_n$ jsou navíc po dvou disjunktní a $B_1,\dots,B_k$ je rozklad jako výše. Pro $M_j \in \mathcal{B}[0,\infty)$ označme měřitelný obdélník $M := \prod_{j=1}^n M_j$. Nechť $A_1',A_1'' \in \mathcal{B}_0(X)$, $A_1' \cap A_1'' = \emptyset$, $A_1 = A_1' \cup A_1''$ a pro takto vzniklý rozklad $A_1',A_1'',A_2,\dots,A_n$ definujme zobrazení ρ analogicky k zobrazení ϕ. Pak platí:

$$\begin{aligned}
\rho^{-1}(M) &= \{(x_1',x_1'',x_2,\dots,x_n) : (x_1' + x_1'',\dots,x_n) \in M\} \\
&= \{(x_1',x_1'') : x_1' + x_1'' \in M_1\} \times \prod_{j=2}^n M_j \\
&= \eta^{-1}(M_1) \times \prod_{j=2}^n M_j,
\end{aligned}$$

kde η je jako v předpokladech. Tedy platí:

$$\begin{aligned}
Q_{A_1',A_1'',A_2,\dots,A_n}\rho^{-1}(M) &= Q_{A_1'} \otimes Q_{A_1''} \otimes \dots \otimes Q_{A_n}\Big(\eta^{-1}(M_1) \times \prod_{j=2}^n M_j\Big) \\
&= (Q_{A_1'} \otimes Q_{A_1''})\eta^{-1}(M_1) \cdot \prod_{j=2}^n Q_{A_j}(M_j) \\
&= Q_{A_1}(M_1) \cdot \prod_{j=2}^n Q_{A_j}(M_j) \\
&= Q_{A_1,\dots,A_n}(M).
\end{aligned}$$

S využitím projektivnosti a symetrie tedy indukcí dostáváme:

$$Q_{A_1,\dots,A_n} = Q_{B_1,\dots,B_k}\phi^{-1}.$$

Pro obecný případ (ne nutně po dvou disjunktních) množin $A_1,\dots,A_n \in \mathcal{B}_0(X)$ uvažujme rozklady $B_1,\dots,B_k$; $C_1,\dots,C_l$ a příslušná zobrazení ϕ a ψ. Chceme ukázat, že

$$Q_{B_1,\dots,B_k}\phi^{-1} = Q_{C_1,\dots,C_l}\psi^{-1}.$$

Uvažujme jejich společný rozklad $D_1,\dots,D_m$ a příslušná zobrazení γ_1 a γ_2 tak, aby platilo:

$$\begin{aligned}
Q_{B_1,\dots,B_k} &= Q_{D_1,\dots,D_m}\gamma_1^{-1}, \\
Q_{C_1,\dots,C_l} &= Q_{D_1,\dots,D_m}\gamma_2^{-1}.
\end{aligned}$$

Tato definice je podle předchozího korektní (nezávisí na volbě $D_1,\ldots,D_m$). Pro měřitelný obdélník M platí:

$$\begin{aligned}Q_{B_1,\ldots,B_k}\phi^{-1}(M) &= Q_{D_1,\ldots,D_m}\gamma_1^{-1}(\phi^{-1}(M))\\ &= Q_{D_1,\ldots,D_m}\gamma_2^{-1}(\psi^{-1}(M))\\ &= Q_{C_1,\ldots,C_l}\psi^{-1}(M),\end{aligned}$$

a definice $Q_{A_1,\ldots,A_n}$ je tedy korektní.

Uvažujme $C_1,\ldots,C_l,E$ disjunktní rozklad $A_1,\ldots,A_n,A_{n+1}$, kde $E = A_{n+1}\setminus\bigcup_{j=1}^{n} A_j$. Mějme následující zobrazení:

$$\phi : (x_1,\ldots,x_l) \longmapsto \Big(\sum_{i\in I_1} x_i,\ldots,\sum_{i\in I_n} x_i\Big),$$

$$\psi : (x_1,\ldots,x_{l+1}) \longmapsto \Big(\sum_{i\in I_1} x_i,\ldots,\sum_{i\in I_{n+1}} x_i\Big).$$

Pak pro měřitelný obdélník M platí:

$$\begin{aligned}Q_{A_1,\ldots,A_n}(M) &= Q_{C_1,\ldots,C_l}\phi^{-1}(M)\\ &= Q_{C_1,\ldots,C_l,E}\Big(\phi^{-1}(M)\times[0,\infty)\Big)\\ &= Q_{A_1,\ldots,A_{n+1}}\psi\Big(\phi^{-1}(M)\times[0,\infty)\Big)\\ &= Q_{A_1,\ldots,A_{n+1}}(M\times[0,\infty)).\end{aligned}$$

Nyní podle Daniell-Kolmogorovy věty (věta 9) existuje pravděpodobnostní prostor (Ω,Σ,P) a na něm definované náhodné veličiny $\xi_A, A\in\mathcal{B}_0(X)$ takové, že $(\xi_{A_1},\ldots,\xi_{A_n}) \sim Q_{A_1,\ldots,A_n}$. Tyto n.v. jsou zřejmě nezáporné a z předpokladu 1) plyne aditivita, tj. platí podmínka 1.5. Pro $A_n \searrow \emptyset$ je podle předpokladu $Q_{A_n} \xrightarrow{w} 0$ a z definice tedy ξ_{A_n} konvergují k nule v distribuci. Pak podle (Lachout, 1998, 13.4.) platí $\xi_{A_n} \xrightarrow{P} 0$. Stejně jako v důkazu věty 10 ukážeme, že $\xi_{A_n} \longrightarrow 0$ s.j. a podmínka 1.6 je splněna. Jsou tedy splněny předpoklady věty 7 a proto existuje náhodná míra ξ taková, že $\xi(B,\cdot) \sim Q_B$, tedy $\xi(B,\cdot) = \xi_B$ s.j. Nezávislost n.v. $\xi(B_1),\ldots,\xi(B_k)$ pro po dvou disjunktní množiny $B_1,\ldots,B_k \in \mathcal{B}_0(X)$ plyne z definice $Q_{B_1,\ldots,B_k}$ jako součinové míry a jednoznačnost ξ plyne z věty 12.

□

2.2 Příklady

2.2.1 Proces s nezápornými přírůstky

Nechť $X=\mathbb{R}$. Mějme náhodný proces $\{X_t,\ t\in\mathbb{R}\}$, který má skoro jistě rostoucí trajektorie a platí $|X_t|<\infty$ s.j. Dále budeme požadovat spojitost zprava, tedy

$$\lim_{h\to 0^+} X_{t+h}(\omega) = X_t(\omega) \text{ s.j.}$$

Definujme

$$\xi(a,b] := X_b - X_a.$$

To je podle našich předpokladů skoro jistě nezáporná, zprava spojitá, aditivní funkce intervalu. Označme $\mathcal{A}$ okruh všech konečných sjednocení omezených intervalů tvaru $(a,b]$. Podle (Daley a Vere-Jones, 2003, A2.2.VI) je ξ σ -aditivní na $\mathcal{A}$ a jsou tedy splněny předpoklady Hopfovy věty (Lukeš a Malý, 2005, 5.5.). Množinovou funkci ξ proto lze rozšířit na lokálně konečnou míru ξ^* na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ skoro jistě. ξ^* je tedy zobrazení z pravděpodobnostního prostoru Ω do $\mathcal{M}^{\#}_{\mathbb{R}}$. $\xi^*(a,b]$ jsou náhodné veličiny pro každý polouzavřený interval $(a,b]$ a podle věty 5 je ξ^* náhodná míra.

2.2.2 Poissonův proces

Mějme lokálně konečnou borelovskou míru Λ na X. Pro $A \in \mathcal{B}_0(X)$ definujme náhodné veličiny N_A tak, že platí následující:

1. $N_A \sim \text{Poiss}(\Lambda(A))$

2. Pro všechny po dvou disjunktní množiny $A_1, \dots A_n \in \mathcal{B}_0(X)$ jsou n.v. $N_{A_1}, \dots, N_{A_n}$ nezávislé.

Nechť $A,B \in \mathcal{B}_0(X)$ jsou disjunktní a $N_A \sim \text{Poiss}(\Lambda(A))$, $N_B \sim \text{Poiss}(\Lambda(B))$. Podle předpokladu jsou N_A a N_B nezávislé a tedy platí

$$N_A + N_B \sim \text{Poiss}(\Lambda(A) + \Lambda(B)) \equiv \text{Poiss}(\Lambda(A \cup B)).$$

Dostáváme tedy, že $N_A + N_B = N_{A\cup B}$ s.j.

Nyní stačí ověřit podmínku monotonie. Mějme $A_n \searrow \emptyset$, pak

$$P_1(A_n; 0) = e^{-\Lambda(A_n)} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

S využitím věty 13 lze tedy systém náhodných veličin $\{N_A, A \in \mathcal{B}_0(X)\}$ rozšířit na bodový proces.

2.2.3 Wienerův homogenní chaos

Nyní uvedeme protipříklad na kterém ukážeme, že bez předpokladu nezápornosti náhodných veličin obecně neexistuje rozšíření na znaménkovou náhodnou míru skoro jistě. Pro $A \in \mathcal{B}(X)$ uvažujme náhodné veličiny s normálním rozdělením $\xi_A \sim N(0,\mu(A))$, kde $\mu \in \mathcal{M}^{\#}_X$ je neatomická. Stejně jako v předchozím příkladě budeme předpokládat, že pro $A_1, \dots, A_n$ disjunktní jsou n.v. $\xi_{A_1}, \dots, \xi_{A_n}$ nezávislé. Z důkazu lemmatu 13 plyne platnost Kolmogorovových podmínek konzistence.

Dále ověříme konečnou aditivitu. Nechť $A,B \in \mathcal{B}_0(X)$ jsou disjunktní, $\xi_A \sim N(0,\mu(A))$ a $\xi_B \sim N(0,\mu(B))$. Podle předpokladu jsou ξ_A a ξ_B nezávislé a z věty o konvoluci (Anděl, 2007, Věta 4.8) platí $\xi_A + \xi_B \sim N(0,\mu(A) + \mu(B)) \equiv N(0,\mu(A \cup B))$. Tedy $\xi_A + \xi_B = \xi_{A\cup B}$ skoro jistě.

Nyní ukážeme, že pro $A_n \in \mathcal{B}_0(X)$, $A_n \searrow \emptyset$ platí $\xi_{A_n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ skoro jistě. Mějme nejprve posloupnost $\{E_n\}$ po dvou disjunktních omezených borelovských množin. Buď $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, kde E je také omezená. Označíme

$$W_n := \xi\Big(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \xi(E_j) \text{ s.j.},$$

kde jsme využili konečné aditivity. Dále označíme $W := \xi(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)$ a ukážeme, že $W_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_2} W$. Podle předpokladu je $\mathsf{E}\, W_n = \mathsf{E}\, W = 0$ a tedy můžeme psát:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(W - W_n)^2 &= \mathsf{E}\, W^2 - 2\,\mathsf{E}\, W_n W + \mathsf{E}\, W_n^2 \\
&= \operatorname{var} W + \operatorname{var} W_n - 2\,\mathsf{E}\, W_n W \\
&= \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big) + \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\Big) - 2\,\mathsf{E}\,\Big(\xi(\bigcup_{j=1}^{n} E_j)\Big)\Big(\xi(\bigcup_{j=1}^{n} E_j) + \xi(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} E_j)\Big) \\
&= \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big) + \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\Big) - 2\,\mathsf{E}\,\Big(\xi(\bigcup_{j=1}^{n} E_j)\Big)^2 \\
&= \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big) - \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\Big) \\
&= \sum_{j=n+1}^{\infty} \mu(E_j) \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Využili jsme konečné aditivity a nezávislosti n.v. ξ_A pro disjunktní množiny. Nakonec jsme využili toho, že $E \in \mathcal{B}_0(X)$ a tedy $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) = \mu(E) < \infty$. Podle (Lachout, 1998, Věta 6.8.) platí $W_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} W$ a řada $\sum_{j=1}^{\infty} \xi(E_j)$ je tedy sčítatelná v pravděpodobnosti. Náhodné veličiny $\xi(E_j)$ jsou podle předpokladu nezávislé a z (Lachout, 1998, Věta 10.3.) plyne i sčítatelnost skoro jistě. Tedy platí

$$\sum_{j=1}^{n} \xi(E_j) \xrightarrow{n\to\infty} \xi(E) \text{ s.j.} \tag{2.1}$$

Nechť nyní $A_n \searrow \emptyset$, $A_n \in \mathcal{B}_0(X)$. Označme $E_n := A_n \setminus A_{n+1}$. Protože $A_n \supset A_{n+1}$, jsou E_n po dvou disjunktní a s využitím 2.1 dostáváme, že

$$\xi(A_n) = \xi\Big(\bigcup_{j=n}^{\infty} E_j\Big) = \sum_{j=n}^{\infty} \xi(E_j) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Dokázali jsme, že kromě požadavku nezápornosti náhodných veličin platí všechny předpoklady věty 10. Neplatí ale, že by $\xi(\cdot,\omega)$ byly skoro jistě znaménkové míry. Předpoklad nezápornosti je tedy zásadní. Budeme postupovat sporem.

Předpokládejme, že $\xi(\cdot,\omega)$ jsou skoro jistě znaménkové míry. Nechť $\{A_1, \dots, A_n\}$ je rozklad množiny $A \in \mathcal{B}_0(X)$ (tj. A_j jsou po dvou disjunktní a $\bigcup_{j=1}^{n} A_j = A$). Definujeme

$$Y_n := \sum_{j=1}^{n} |\xi(A_j)|.$$

Jsou-li $\xi(\cdot,\omega)$ znaménkové míry, pak jsou Y_n dolní součty k variaci $|\xi|(A)$ (viz definice variace míry (Lukeš a Malý, 2005, 6.10.)). Podle věty (Lukeš a Malý, 2005, 6.11.) je $|\xi|(A) < \infty$ a proto Y_n jsou skoro jistě stejně omezené, t.j. $Y_n \le |\xi|(A) < \infty$ s.j. Pro n.v. $Y \sim N(0,\sigma^2)$ platí $\mathsf{E}\,|Y| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$ a můžeme tedy psát:

$$\mathsf{E}\, Y_n = \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}(|\xi(A_j)|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{\mu(A_j)},$$

a dále

$$\sum_{j=1}^{n}\sqrt{\mu(A_j)} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\mu(A_j)}{\sqrt{\mu(A_j)}} \geq \frac{\sum_{j=1}^{n}\mu(A_j)}{\max_{1\leq j\leq n}\sqrt{\mu(A_j)}} = \frac{\mu(A)}{\max_{1\leq j\leq n}\sqrt{\mu(A_j)}}.$$

Protože μ nemá podle předpokladu žádné atomy, můžeme vhodnou volbou rozkladu množiny A zajistit, aby $\mathsf{E}\,Y_n$ bylo libovolně velké. Nyní spočteme odhad pro rozptyl Y_n. Z předpokladu nezávislosti n.v. $\xi(A_j)$ a z (Lachout, 1998, Lemma 4.13.) plyne nezávislost n.v. $|\xi(A_j)|$. Pak můžeme psát:

$$\operatorname{var} Y_n = \operatorname{var}\sum_{j=1}^{n}|\xi(A_j)| = \sum_{j=1}^{n}\operatorname{var}|\xi(A_j)|,$$

a

$$\begin{aligned}\operatorname{var}|\xi(A_j)| &= \mathsf{E}(\xi(A_j))^2 - (\mathsf{E}\,|\xi(A_j)|)^2\\ &= \mu(A_j) - \frac{2}{\pi}\mu(A_j)\\ &\leq \mu(A_j).\end{aligned}$$

Dostáváme následující:

$$\operatorname{var} Y_n \leq \sum_{j=1}^{n}\mu(A_j) = \mu(A).$$

Z Čebyševovy nerovnosti pak plyne:

$$P\{|Y_n - \mathsf{E}\,Y_n| \geq y\} \leq \frac{\operatorname{var} Y_n}{y^2} \leq \frac{\mu(A)}{y^2} \xrightarrow{y\to\infty} 0.$$

Tato pravděpodobnost tedy konverguje k nule nezávisle na rozkladu množiny A. To ale nemůže být pravda, pokud jsou Y_n s.j. omezené. Zvolíme $\epsilon > 0$ a najdeme $y > 0$ tak, že

$$P\{|Y_n - \mathsf{E}\,Y_n| \geq y\} < \epsilon. \tag{2.2}$$

Dále mějme $K > 0$, pro které platí

$$P\{|\xi|(A) \leq K\} \geq 1 - \epsilon.$$

Potom pro $M := \{Y_n \leq K\}$ je $P(M) \geq 1 - \epsilon$. Nyní najdeme rozklad množiny A takový, že $\mathsf{E}\,Y_n - K \geq y$. Na množině M potom platí $\mathsf{E}\,Y_n - Y_n \geq y$, což je spor s 2.2.

Závěr

Cílem této práce bylo dokázat existenci a jednoznačnost rozdělení náhodné míry dané konečněrozměrnými projekcemi a uvést příklady náhodných měr. Nejprve jsme zavedli prostor lokálně konečných měr na úplném separabilním metrickém prostoru a definovali potřebné sigma-algebry. V první části práce jsme se zabývali hlavně základními vlastnostmi těchto prostorů a uvedli některá tvrzení o lokálně konečných měrách. Dále jsme se zabývali měřitelností zobrazení do prostoru lokálně konečných měr a následně sestrojili rozšíření systému náhodných veličin na náhodnou míru. S využitím Daniell-Kolmogorovy věty jsme následně dokázali stěžejní větu o existenci. Na konci první kapitoly jsme dokázali i jednoznačnost rozdělení náhodné míry. Ve druhé kapitole jsme danou teorii použili na Poissonův bodový proces. Nakonec jsme uvedli protipříklad, který ukazuje, že danou teorii nelze použít pro případ znaménkových měr.

Literatura

ANDĚL, J. (2007). *Statistické metody*. Matfyzpress.

DALEY, D. J. a VERE-JONES, D. (2003). *An Introduction to the Theory of Point Processes*, volume 1, Elementary theory and methods. Springer.

DALEY, D. J. a VERE-JONES, D. (2008). *An Introduction to the Theory of Point Processes*, volume 2, General theory and structure. Springer.

LACHOUT, P. (1998). *Teorie Pravděpodobnosti*. Karolinum.

LUKEŠ, J. a MALÝ, J. (2005). *Measure and Integral*. Matfyzpress.

RATAJ, J. (2006). *Bodové Procesy*. Karolinum.

ŠTĚPÁN, J. (1987). *Teorie pravděpodobnosti*. Academia, Praha.