Oponentský posudek na doktorskou dizertační práci

Mgr. Marcely Mikové

„Výuka diferenciálního počtu na gymnáziu"

Předložená práce je věnována metodickým otázkám výuky diferenciálního počtu (DP) na středních všeobecně vzdělávacích školách, tedy gymnáziích. Jak upřesňuje autorka v úvodu, jde jí především o výuku této disciplíny v třídách s nižší hodinovou dotací matematiky. Hlavním cílem práce bylo vytvoření projektu (učebního textu), podle kterého by dle autorčiných představ bylo možné tuto výuku uskutečňovat.

Ve svém posudku nejprve popíšu, z jakých částí je disertační práce složena, poté přejdu k výčtu kladů i nedostatků práce a nakonec k jejímu celkovému zhodnocení.

Na prvních cca 20 stranách se autorka věnuje výuce matematiky v obecných rysech, z literatury uvádí poznatky z psychologie o struktuře matematických schopností člověka, jejich vývoji v průběhu života jedince, o procesu učení a jeho cílech. Tuto všeobecnou část uzavírá některými postřehy o obecných principech výuky matematiky na gymnáziích, uspořádání jejího učiva, vyzdvihuje stěžejní roli tématu *Funkce*.

Další kapitola o 10 stranách je věnována stručnému nástinu historie a vývoji pojmů *spojitost, limita a derivace* funkce.

Následuje 50stránková kapitola věnovaná analýze učebnic DP pro střední školy. Autorka tak popisuje (s četnými citacemi) metodické postupy zavádění pojmů *spojitost, limita a derivace*, jejich definice a typické příklady u jediné současné české učebnice [10] (Hrubý-Kubát), jedné německé učebnice [11] a tří rakouských učebnic [3-4], [29] a [37]. Učebnice nejsou hodnoceny odděleně, ale po tématech.

Poznatky, které autorka získala studiem literatury a které zachytila v předchozích kapitolách, uplatnila při přípravě stěžejní 6. kapitoly práce, kterou je její projekt výuky DP na gymnáziu. Nepochybně k tomu využila i své osobní zkušenosti z praktické výuky. V úvodu projektu autorka shrnuje principy, na kterých svůj výklad učiva zakládá a které jsou vedeny snahou o co největší názornost, jež pojmům DP poskytují ve vizuální podobě grafy funkcí. Vytvořený učební text pro studenty, který je naplněn mnoha dobře volenými obrázky a který je v disertační práci vyznačen rámečky, doprovází průběžně uváděný podrobný autorčin metodický komentář. Jak sama autorka přiznává, prezentovaný učební text nepokrývá celou látku DP pro gymnázia, ale jen ty partie, ve kterých by se podle ní výuka v nematematicky zaměřených třídách měla odlišovat od pojetí učebnice [10]. K těmto odlišnostem ovšem patří přístup ke všem třem základním pojmům (spojitost, limita, derivace) a změna pořadí výkladu první dvou z nich, takže autorčin projekt není pouhou „kosmetickou" úpravou detailů zmíněné učebnice, ale její podstatně změněnou alternativou.

Nejprve **zhodnotím kapitolu 5 s analýzou učebnic**. Domnívám se, že popis těchto textů je obsažný a poskytuje čtenáři dobrou představu o jejich obsahu. Autorčiny hodnotící komentáře jsou zajímavé a svědčí o její schopnosti dobrého analytického myšlení. Při čtení úryvků zahraničních učebnic jsem byl příjemně překvapen, v jaké šíři se uvádějí příklady motivující zavedení derivace a příklady na grafické derivování (stejně jako autorka na str. 52 se ptám, kolik hodin na to ve školách mají a zda takové pasáže při tom nepřeskakují). Na druhou stranu mě rozladilo, jaká „věda" se ještě v některých současných učebnicích dělá z *přechodu* od derivace $f'(x_0)$ v bodě x_0 k derivaci jakožto funkci $x \mapsto f'(x)$. Samotným označením $f'(x_0)$ je přece na funkci f' „zaděláno" a rovněž vyjádření „derivace v bodě ... je rovna ..." je v plném souladu s obecným „funkce v bodě ... je rovna ...". Žáci dříve prožili podobný *přechod* například při zavádění goniometrických funkcí, kde to celé prošlo automaticky bez jakéhokoliv zneklidňování. Jsem rád, že i autorka toto shledává na str. 53 jako zbytečné komplikování výkladu.

Ke kapitole o učebnicích mám několik obsahových připomínek, přitom poslední z nich, uvedenou pod číslem 6, považuji za velice **závažnou**:

(1) Dala-li autorka přednost popisu „po tématech" před popisem „po jednotlivých učebnicích" (z důvodů, kterým rozumím), měla úvodem zřetelně zaznamenat, v jakém pořadí pořadí témata *spojitost, limita, derivace* v jednotlivých učebnicích následují. Tyto zmínky o pořadí se v textu sice občas objevují, avšak čtenář, který nemá hodnocenou učebnici po ruce, se na toto pořadí může ptát častěji. Zdá se mi, že ani autorka si toto pořadí jednou neuvědomila. Na str. 36-37 autorka uvádí, že namísto Definice 20 jednostranné spojitosti (bez limit) z učebnice [10] by pro středoškolské studenty byla přístupnější Definice 21 (s jednostrannými limitami). Tu však autoři [10] dost dobře uvést nemohli, neboť v jejich učebnici následuje kapitola o limitách až za kapitolou o spojitosti. Z daného místa ještě ocituji autorčin dovětek, ke kterému se v posudku vrátím později: „pokud bychom považovali za nutné na střední škole spojitost zleva a zprava zavádět".

(2) Některé závěry plynoucí z ukázek jsem musel vyhodnocovat sám. Například pokud jde o definici spojitosti funkce v bodě, jediná učebnice [37] se v příslušné kapitole spokojí s intuitivním popisem pomocí infinitezimál (a to mlhavým spojením „neomezeně blízko" v Tvrzení 14 citovaném na str. 33), ostatní učebnice pracují s okolími bodů. Tento rozdíl autorka nevyzdvihuje, pouze za uvedeným Tvrzením 14 uvádí pochybnost, zda je možné takové charakteristiky považovat za definice. Nedala to do souvislosti s tím, že v předchozí kapitole psala o historii DP, tj. právě o přechodu od nepřesných infinitezimálních úvah k teorii limit založené na okolích bodů. (Teprve o 10 stran později na str. 44 se dočteme, že rovněž učebnice [37] uvádí ve svém úplném závěru tématu DP stručně exaktnější definice limity a spojitosti.)

(3) Souhlasím s autorčinou kritikou ze str. 39 nadbytečného komentáře (o tloušťce čáry z náčrtku grafu) z citovaného příkladu, ne však s její kritikou postupu výkladu dalšího příkladu ze str. 46-47. Nevidím v něm žádnou, cituji „zbytečnou komplikaci". Naopak citované řešení uvedeného příkladu považuji za velmi zdařilé a přesně a jasně popsané (zvídavé studenty by jistě zaujala i otázka, které z čísel $\sqrt{4-\varepsilon}$ a $\sqrt{4+\varepsilon}$ je číslu 2 blíže).

(4) Chápu, že autorku na str. 56 zaujalo v učebnici [29] jednoduché odvození vzorce pro derivaci podílu pomocí vzorce pro derivaci součinu, mohla však sama dodat, že to odvození bude korektní jen tehdy, když *předem* dokážeme, že derivace podílu vůbec existuje. A to lze stěží vyvodit jinak než odvozením kýženého vzorce pro derivaci podílu klasickou cestou. Jestli je zmíněný postup skutečně v učebnici [29] prohlášen za důkaz, je to kamufláž. Jinak by tomu bylo, kdyby bylo dotyčné odvození uvedeno podmínkou „za předpokladu, že derivace podílu existuje". S autorčinou větou, kde se píše o vztahu „spadlém z nebe", ovšem plně souhlasím (s oběma částmi).

(5) Myslím, že obrázky z učebnice [37] reprodukované na str. 67 by zasloužily mírnou kritiku: přece ne každá konvexní funkce je rostoucí a ne každá konkávní funkce je klesající. Uvedené příklady mohou žáky poplést v závěrech.

(6) Autorka cituje „pro ilustraci" na str. 60-61 příklad z rakouské učebnice [37] bez povšimnutí, že v jeho řešení je hrubá věcná chyba, kterou si mohou žáci ve svých myslích nebezpečně zafixovat. Chyba spočívá v tom, že hodnota derivace jakožto limity diferenčního kvocientu $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ je ztotožněna s hodnotou tohoto kvocientu pro přírůstek $\Delta x = 1$ (!!!). Dokonce je to ztotožnění (poslední tři řádky na str. 60) uvedeno slovem „Přesněji". Autorka tuto do očí bijící chybu měla odhalit a kritizovat. Konkrétní správné přírůstky jsou: plus 79 párů (a ne 80) při zvýšení výdajů na reklamu z 30 000 S na 31 000 S, minus 21 párů (a ne 20) při zvýšení výdajů na reklamu z 60 000 S na 61 000 S.

Přejdu nyní k **hodnocení vlastního projektu** výuky, který autorka předkládá v kapitole 6. Předně musím prohlásit, že otázku výuky DP na střední škole považuji za velmi složitou a polemickou, tím více, budeme-li uvažovat o výuce ve třídách s nižší hodinovou dotací matematiky. V takových třídách na gymnáziu se DP často vůbec neprobírá, nebo se „proletí za týden". Nemá smyslu mít v tomto směru přehnané nároky. Budeme-li chtít, aby všichni absolventi gymnázií měli o derivacích aspoň nějaké ponětí (snad to patří ke všeobecnému rozhledu člověka stejně jako znalosti literárních proudů 19. století), musíme o přiměřeném způsobu výuky DP v takových třídách uvažovat. Proto považuji autorčin projekt za aktuální a užitečný pokus. Jediná existující učebnice DP pro střední školy [10] (Hrubý-Kubát) je pojata tak (a je to dle mého velice dobře), aby vyhovovala výuce i v těch gymnaziálních třídách, které jsou zaměřené na matematiku. Na učitelích ostatních tříd je, aby s žáky tuto učebnici probírali v redukované podobě, nebo aby předstoupili před žáky s jinou koncepcí. V tomto světle je třeba posuzovat a hodnotit i projekt Mgr. Mikové. Myslím si, že se v něm pozitivně odrazily inspirace, která autorka získala studiem zahraničních učebnic, vedena hlavním principem, který si vytyčila a který spočívá v názorně-intuitivním přístupu k výkladu nových, pro žáky neobvykle náročných pojmů.

V úvodní části kapitoly je uvedený hlavní princip popsán bohužel pouze v obecné poloze, nejsou vysloveny konkrétní metodicko-obsahové otázky DP, na které si musí sám autor odpovědět, než se do přípravy takového projektu výuky pustí. V daném případě jde o nejméně dvě zásadní otázky:

1) V jakém pořadí přistoupím k výkladu pojmů *limita* a *spojitost*?

2) Budu popisovat limitní procesy exaktně pomocí okolí bodů, nebo zůstanu

u intuitivního „neomezeného přibližování“?

Zdůrazním, že pokud jde o výuku v „humanitních“ třídách, nemám sám jasnou odpověď ani na jednu z postavených otázek. Od autorky disertace jsem očekával, že alespoň posoudí otázku číslo 1. Každé z obou pořadí má své přednosti, autorka se rozhodla pro obvyklejší pořadí limita-spojitost (a začíná výkladem limity v nevlastním bodě, neboť studenti by měli ovládat pojem limity posloupnosti). Česká učebnice [10], stejně jako jedna z posuzovaných učebnic rakouských, vede výklad v opačném pořadí, patrně z toho důvodu, že pojem „spojitosti“ čáry je žákům intuitivně blízký. K otázce číslo 2 poznamenám, že zcela intuitivní přístup autorka poznala v učebnici [37] a patrně o něm pro svůj projekt vůbec neuvažovala pro jeho malou exaktnost. Já na jeho obranu dodám osobní názor, že v matematicky slabších třídách mají šanci pochopit výroky typu $\boxed{\forall x \in A\, \exists y \in B \colon V(x,y)}$ pouze výjimeční jedinci (a nechápu, proč se takové formule s konečnými množinami A, B při tématu *Základy matematické logiky* neprocvičují, rád bych se v tom mýlil).

Kladně hodnotím, že autorka často přerušuje vlastní „zarámečkovaný“ učební text zdařilými komentáři o tom, co na příslušném místě od studentů očekává, k čemu je předchozí text připraví, co bude následovat, které věci budou žákům dělat potíže, jakou formou v daném místě bude vhodné s třídou pracovat a pod. Tento metodický komentář jasně dokládá, že autorka má z vlastní praktické výuky dostatečně bohaté zkušenosti.

Přejdu nyní k obsahovým připomínkám, které seřadím chronologicky podle textu projektu. Za **nejzávažnější** nedostatek celé práce považuji prezentaci Bolzanovy-Weierstrassovy věty ze str. 91 a Bolzanovy větě o nulové hodnotě ze str. 92 (viz připomínka číslo 3 níže).

(1) Nesouhlasím z tvrzením z rámečku na str. 75, že „graf jedné funkce neodpovídá přesně zadání“. To je omyl, příslušný graf je přímka s jedním vyloučeným bodem; jeho vyloučení není schopno lidské oko rozeznat, bude-li graf dostatečně přesně nakreslen, tedy tak, že „mezera jednoho bodu“ nebude nahrazena intervalem viditelné délky. Myslím si, že takovou pravdu by měli být schopni maturanti „strávit“ a s odpovídajícím kritickým nadhledem (nevyslovovaným ale uvědomovaným) přistupovat ke všem následujícím grafickým zadáním funkcí: u všech takových zadání se předpokládá, že funkce má jen takové vlastnosti, jaké *vidíme* (tedy že čáry jsou spojité křivky, že vyloučené body křivek a všechny izolované body grafů jsou viditelně vyznačeny apod.) Počítač TI InterActive na str. 75 tedy splnil svou úlohu dostatečně přesně. Kdyby ten graf však nakreslil žák, úkol by dobře nesplnil, neboť by nedodržel výše zmíněné konvence. Myslím, že běžný počítač na ně uzpůsobený není.

(2) Proměnná x v úloze C5 na str. 84 není kvantifikována, takto chybně zadávat úkoly je velký nedostatek. Čtu to a opravdu tomu nerozumím, k tomu ještě to „neexistuje δ, aby“. Nebyla by vhodnější formulace, aby pro každé δ platila negace toho, co chtěla autorka napsat?

(3) Na str. 91 je uvedena Bolzanova-Weierstrassova věta ve tvaru, který přesně ocituji: „*u funkcí spojitých v intervalu (a, b) můžeme ke zvolenému K z intervalu $(f(a), f(b))$ vždy najít odpovídající hodnotu x z intervalu (a, b), pro kterou platí $f(x) = K$*“. To je špatně, stejně jako je špatné následné znění

Bolzanovy věty na str. 92, neboť pro vlastnost funkce f „být spojitá v otevřeném intervalu (a, b)" hodnoty $f(a)$ a $f(b)$ *nemají žádný význam*, takže je v případě omezené funkce f můžeme pozměnit tak, aby citovaná věta přestala platit. Bohužel nejde o nějaké drobné opomenutí autorky, která se spletla pouze v tom, že místo „spojitých v intervalu (a, b)" měla napsat „spojitých v intervalu $\langle a, b\rangle$". Ve svém projektu totiž takovou spojitost nezavádí, potřebovala by k němu pojmy „spojitost v bodě zleva a zprava", kterým se vyhnula a jejichž uvedení v učebnici [10] dvakrát v disertaci zmiňuje (str. 38: „ ... pokud bychom považovali za nutné na střední škole spojitost zleva a zprava zavádět" a str. 71: „v žádné z učebnic (rozuměj zahraničních, pozn. J.Š) nebyly definovány jednostranné limity"). Jsem si jist, že k zařazení pojmů jednostranné spojitosti a jednostranných limit do učebnice [10] autory Hrubého a Kubáta přiměla významně právě ta skutečnost, že základní věty o vlastnostech spojitých funkcí se obecně týkají funkcí spojitých v omezených a uzavřených intervalech. Musím s politováním konstatovat, že na základě mylného názoru o funkcích spojitých v otevřeném intervalu (podepřeného zavádějícím obrázkem ze str. 90), autorka chybným způsobem „opracovala" jednu ze základních pouček matematické analýzy o vlastnostech spojitých funkcí. Bude-li chtít v budoucnu učební text bez větších zásahů popravit, může se bez pojmu jednostranné spojitosti obejít, když využije takovou náhradní definici: Řekneme, že funkce f je spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$, je-li v každém bodě spojitá následující funkce

$$f_1(x) = \begin{cases} f(a) & x < a, \\ f(x) & a \le x \le b, \\ f(b) & x > b. \end{cases}$$

(4) U bombičky na straně 99 uvedené upozornění o tom, že derivace funkce může existovat pouze v bodech, které patří do definičního oboru, má pádnější důvod než pouze ten, že si to přejeme ve výše uvedené definici. Derivace funkce f v bodě x_p je totiž limita lomeného výrazu

$$\frac{f(x) - f(x_p)}{x - x_p},$$

jehož čitatel nemá smysl, pokud nemá smysl $f(x_p)$.

Po **formální stránce** je předložená práce na dobré úrovni. Práce je vhodně rozčleněna do kapitol a paragrafů; zhodnotím-li stavbu jednotlivých vět a jejich styl, je celý text napsán jasně, dostatečně přesně a kultivovaně, takže mám jen několik drobných formulačních připomínek.

(1) Věta ze str. 22: *Postupně byl pojem „nekonečně malého čísla" nahrazen „číslem libovolně malým"* je dle mého dosti nejasná.

(2) V textu se několikrát zkracuje „tečna grafu funkce" na „tečna funkce" (viz str. 53, 62, 99, 101, 102), což dle mého je na hranici únosnosti. Nevídanou zkratkou je „směrnice funkce" namísto „směrnice tečny grafu funkce" v rámečku na str. 98.

(3) Na str. 66 místo „v lokálním maximu“ má být „v bodě lokálního maxima“.
(4) Na str. 78 je nevhodné spojení „členy posloupnosti a_n do této funkce patří“. Copak je funkce nějakou množinou? Přitom stačilo napsat $a_n = f(n)$ pro každé n.
(5) Na str. 79 nahoře „pro všechna x patří všechny funkční hodnoty“ je velmi neobratné (zbytečně dvakrát „všechny“ , pojmenované x dále nevyužito).
(6) V závěru horní definice na str. 89 by mělo místo „není spojitá“ být „je nespojitá“. Pojem „není spojitá“ není třeba definovat, vyjadřuje jen, že vlastnost „spojitá“ chybí. Termín „je nespojitá“ chce autorka užívat, dokazuje to horní rámeček na str. 88.
(7) Věta u bombičky na str. 110 o důležitosti „pořadí vět v matematické větě“ je velmi nevhodná. Nejde o věty v souřadném souvětí, ale o hlavní a vedlejší větu, přesněji podmínku a závěr. Upozornění tedy mělo znít, že musíme rozlišovat, co je podmínka a co závěr věty, a že je obecně nemůžeme navzájem vyměňovat. Kdybych podle autorky vyměnil *pouze pořadí* vět v souvětí „Jestliže A, pak B“, dostanu větu „B, jestliže A“ a nic se neděje!

Sazba a grafické ztvárnění výsledné podoby disertace je zdařilé. Členění textu je přehledné. Výjimkou je značení citovaných příkladů, které by měly být očíslovány (obvyklým způsobem). Tak například podle odkazu „příklad [4], 105 z kapitoly 5.2“ uvedeného na straně 47 nezbude čtenáři než prolistovat celou kapitolu 5.2 .

Práce obsahuje velké množství obrázků, které jsou provedeny (či reprodukovány) a vytištěny v dobré kvalitě.

V celém textu jsem našel neobvykle malé (jednociferné) množství překlepů, které jsem vyznačil tužkou přímo ve výtisku. Oceňuji, že autorka věnovala formálnímu zpracování výsledné práce velkou péči. Nápadné jsou vždy překlepy v matematických značkách, tady jsem objevil pouze dva, zato téhož druhu: $\{x_1, x_2\} \in D(f)$ na str. 61 a $I \in D(f)$ na str. 92. Také chybnou dvojici intervalů $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$ na str. 90 nahoře namísto správných $(-\infty, 1)$ a $(1, +\infty)$ považuji za pouhý překlep, stejně jako absenci rovnosti $L = \lim \ldots$ v zadání úlohy B2 na str. 78.

Závěr: Shrnuji, že předložená práce je aktuálním a původním příspěvkem k problému vyučování *Diferenciálního počtu* na gymnáziích, kterým autorka prokázala schopnost samostatné tvůrčí práce. Posoudím-li v souhrnu všechny přednosti i nedostatky, které jsem na práci shledal a v posudku podrobně popsal i s uvedením míry jejich závažnosti, docházím k závěru, že *v současné podobě* může být práce obhájena před komisí pro obor „Obecné otázky matematiky a informatiky“ na MFF UK až po nesnadném jednání. Její obhajobu doporučuji jen s velkými výhradami.

Jaromír Šimša

V Brně 18. července 2006 doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.