Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

Disertační práce

Mgr. Marcela Miková

Výuka diferenciálního počtu na gymnáziu

Katedra didaktiky matematiky

Školitel: *doc. RNDr. Oldřich Odvárko, DrSc.*

Studijní program: *D-1 Obecné otázky matematiky a informatiky*

Praha, 2006

Prohlašuji, že jsem tuto disertační práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 30. dubna 2006

Marcela Miková

Obsah:

1. Úvod

Gymnázium je škola, která má poskytovat všeobecné vzdělání. Některá gymnázia se přesto zaměřují určitým směrem, aby se lépe profilovala mezi konkurencí a přilákala studenty, kteří mají zájem o určitý obor a zároveň chtějí získat všeobecné vzdělání. Jsou to gymnázia, ve kterých jsou třídy s vyšší hodinovou dotací například estetické výchovy, cizích jazyků, tělesné výchovy nebo přírodovědných předmětů. Vyšší hodinová dotace těchto předmětů se však projeví v menším počtu vyučovacích hodin předmětů ostatních, tedy i matematiky. Přesto výuka matematiky v takových třídách musí studentům poskytnout všeobecný přehled středoškolské látky. Nabízí se proto otázka, jak a co z matematiky v těchto třídách učit.

Zeptáme-li se středoškolských učitelů, zda by bylo možno některou kapitolu středoškolské matematiky bez újmy na všeobecném vzdělání vynechat, zjistíme, že názory se velice liší. Zeptáme-li se, které kapitoly na gymnáziu vynechat nesmíme, zjistíme totéž. Názory na obsah učiva jsou různé (svou roli hraje také to, kterou látku má daný učitel v oblibě).

Můžeme se tedy rozhodovat mezi následujícími alternativami: vynecháme kapitoly, bez kterých se podle našeho názoru středoškolský student v dalším životě obejde (nejčastěji to bývají komplexní čísla, některá geometrická témata a diferenciální a integrální počet), a zbývající látku probereme více do hloubky. Nebo se rozhodneme, že ke všeobecnému vzdělání patří všechna témata, která se ve středoškolských učebnicích matematiky nabízejí, ale některým z nich se nebudeme věnovat příliš do hloubky. Já jsem se rozhodla pro druhou možnost.

Diferenciální počet považuji za látku, se kterou by se měli seznámit studenti všech gymnázií, bez ohledu na jejich zaměření. Podle mého názoru se totiž jedná o vrchol, ke kterému celé středoškolské studium matematiky (především funkcí) spěje. V případě, že tuto látku neprobereme a matematickou analýzu na střední škole ukončíme posloupnostmi a řadami (a někdy nedojde ani na ně), budeme jako horolezci, kteří vzdají výstup těsně pod vrcholem. V této práci bych ráda našla odpověď na otázku, jak učit diferenciální počet ve třídách s nižší hodinovou dotací matematiky. Proto jsem se rozhodla, že podrobně prostuduji naše i zahraniční učebnice, zmapuji historický vývoj základních pojmů diferenciální počtu, zjistím, co od matematiky očekávají sami studenti, a pokusím se nalézt co nejlepší metodické postupy k osvojení základních pojmů diferenciálního počtu.

2. Psychologická podstata výuky matematiky

V této kapitole bych ráda shrnula základní poznatky z psychologie, které by měl učitel znát a čerpat z nich při výuce matematiky. Jedná se především o vývoj myšlení v souvislosti s věkem a o základní teorie učení.

2.1. Základní pojmy

Definice základních pojmů psychologie (na rozdíl od matematiky) závisí na osobě autora, z jehož práce čerpáme. Protože čerpám především z výzkumů L. Košče, použiji definic, užitých v [14].

Schopnosti jsou ty psychické vlastnosti, které jsou podmínkou úspěšného vykonávání jistých druhů činností a jsou relativně všeobecnou a poměrně trvalou vlastností osoby. Schopnost se však kromě toho chápe jako předpoklad rozvoje, rychlého postupu a zdokonalování v jistém oboru.

Dovedností nazýváme to, co si člověk na základě všeobecné schopnosti osvojil pro nějakou specifickou činnost. Hovoříme o dovednosti uskutečňovat senzoricko-motorické činnosti jistého druhu (např. úkony počítací, logické apod.). Dovednost má předpoklady stále se zdokonalovat.

Vědomosti jsou poznatky vštípené do paměti, avšak nejen to. Při osvojování si vědomostí jde také o tvořivé získávání nových poznatků samostatným uvažováním a řešením úloh. *Vědomosti* proto bývají ztotožňovány s psychickými zkušenostmi.

Pojmy schopnost a dovednost úzce souvisí s pojmem *vloha*. Jde o vrozené anatomicko-fyziologické dispozice organismu, které jsou předpokladem schopností.

V poslední době se především v souvislosti s Rámcovým vzdělávacím programem stále častěji hovoří o *kompetencích. Klíčové kompetence* představují soubor předpokládaných vědomostí, dovedností, schopností, postojů a hodnot důležitých pro osobní rozvoj jedince, jeho aktivní zapojení do společnosti a budoucí uplatnění v životě. ([12], str.13) V rámci gymnaziálního studia matematiky jsou za klíčové považovány

- *kompetence k učení*
- *kompetence k řešení problémů*
- *kompetence komunikativní.*

2.2 Struktura matematických schopností

Pod matematickými schopnostmi rozumíme ty vlastnosti, které jsou podmínkou úspěšného studia a uplatňování matematiky.

Podle Canise [14] se jedná o:

1. Schopnost vidět a odhalovat vztahy, způsoby jejich spojování a činit z nich závěry.
2. Schopnost vyvozovat vztahy, vyčleňovat z daných dat podstatné skutečnosti.
3. Pohotovost při manipulaci s jistými symboly, schopnost pracovat s abstraktními kvalitami.
4. Schopnost analyzovat situaci, rozlišovat podstatné a nepodstatné.

Tyto schopnosti se uplatňují jak v algebře, tak v aritmetice i geometrii (ale samozřejmě také v mnoha dalších oborech, nejen matematických).

Představu o struktuře matematických schopností nám dávají výsledky faktorové analýzy ve výzkumu poruch matematických schopností a analýzy postupů při řešení matematických úloh. Znalost těchto faktorů nám dává odpověď na otázku, proč někteří studenti mají rozdílné výsledky např. v algebře a geometrii. Dosud zjištěné faktory matematických schopností jsou tyto:

1. *Numerický faktor*; uplatňuje se při manipulaci s čísly a aritmetickými symboly.
2. *Prostorové, vizuálně percepční faktory*; schopnost orientovat se ve zrakově vnímatelném prostoru, manipulovat se skutečným nebo znázorněným materiálem (uplatňuje se nejen v geometrii, ale např. i při počítání „pod sebe").
3. *Slovní, verbální faktor*; uplatňuje se především při řešení slovních úloh a bylo prokázáno, že existuje speciálně v rámci struktury matematických schopností (jsou známy případy číselné „hluchoty a němoty" po úrazech mozku bez analogické poruchy z oblasti jiných slov).
4. *Faktor usuzování*; projevuje se schopností manipulovat s abstraktními pojmy a symboly, faktor deduktivního a induktivního usuzování.
5. *Všeobecný (generální) faktor*; tvoří pozadí všech úkonů, jedná se o centrální složku intelektového pole.

6. *Školní faktory*; odráží i osobnostní rysy jedince, např. přístup k rutinní školní práci. ([14], str.116)

Ze všeho, co bylo dosud napsáno, je zřejmé, že matematika při správně vedené výuce rozvíjí rozsáhlejší spektrum schopností než většina ostatních školních předmětů. Známe-li strukturu matematických schopností, můžeme do výuky zařadit jak úlohy rozvíjející cíleně určitou schopnost, tak i úlohy vyžadující zapojení celého spektra schopností. Často se ukáže, že žák není „slabý v matematice", ale potíže mu činí jen určitý druh činností. (Sama jsem se ve své praxi s takovými případy setkala [36].) Úloha matematiky jako předmětu rozvíjejícího široké spektrum schopností studentů však byla doposud zastíněna nutností dodržet předepsanou látku i při nízkém počtu vyučovacích hodin. Některé partie gymnaziální matematiky bývají proto z časových důvodů pouze „vyloženy" a studenti nemají příležitost k lepšímu pochopení principů, vztahů a k samostatné práci při jejich aplikaci.

2.3 Vývoj matematických schopností od předškolního věku

Podstatou matematického myšlení, uplatňovaného při řešení matematických úloh, je věku odpovídající úroveň rozvoje matematických schopností.

Osvojování matematických pojmů a vztahů probíhá v souladu se zráním nervového systému individuálně, ale podle uspořádaného vzorce a víceméně ustáleného časového plánu. Období vývoje jsou tato [15]:

1. Poznávání předmětů, barev a tvarů.
2. Chápání početnosti (mnoho x málo).
3. Odhad množství.
4. Určení počtu konkrétních předmětů.
5. Abstrakce, uvědomování si kvantity, číslovky (vyvíjí se až do 12 let).
6. Chápání vztahů mezi čísly a vztahů matematické logiky.

Tento vývoj souvisí s celkovým vývojem myšlení. I jeho stadia by měl učitel znát, protože z jejich neznalosti mohou vyplývat didaktické chyby ve výuce matematiky.

Podle Piageta se jedná o tato stadia:

1. Senzomotorické (rozvoj smyslových a pohybových schopností), 0-2 roky.

2. Předoperační, 2-7let.
3. Stadium konkrétních operací, 7-11let; myšlení je vázáno na konkrétní zkušenosti, žáci jsou schopni:
    a) zvládnout abstraktní uvažování, je-li vázáno na předchozí reálnou zkušenost,
    b) uspořádat předměty do souborů podle společných znaků nebo podle pořadí.
4. Stadium formálních operací, od 12 let; toto stadium se projevuje schopnostmi:
    a) formulovat hypotézu bez konkrétní zkušenosti,
    b) pochopit závislost pojmů a tříd,
    c) uvažovat hypoteticko-deduktivně. ([5], str.67)

Toto je však pouze jedna z existujících teorií. Piaget patrně přecenil rychlost vývoje. Podle současných psychologů nepokročilejších úrovní formálního myšlení dosahuje dokonce i ve věku 16 let pouze menšina lidí. Žáci mohou projít některými stadii rychleji, než je norma, jinými pomaleji. Někteří žáci nikdy nedosáhnou soustavného užívání formálních operací, a dokonce i jako dospělí mohou myslet jen na úrovni konkrétních operací. Zde je zřejmě ukryt jeden z hlavních důvodů potíží v matematice ve vyšších třídách základních škol a na středních školách. Při výuce totiž předpokládáme pravý opak, totiž, že většina žáků a studentů již tohoto nejvyššího stadia myšlení dosáhla. Proto považuji za velice důležité přizpůsobit se během celé školní docházky úrovni kognitivního vývoje žáků, a to i jednotlivě v rámci třídy.

Podle amerického psychologa Brunera prochází dítě v průběhu svého vývoje třemi hlavními stadii. Jedná se o stadium *akční* (v něm je myšlení založeno na konání), *ikonické* (v něm se stále více uplatňuje představivost) a *symbolické* (v něm se uplatňuje složitá symbolizace včetně řeči). Od Piageta se výrazné odlišuje názorem, že ačkoliv těchto stadií dosahujeme postupně (symbolické stadium se objevuje jako poslední), přesto si uchováváme a uplatňujeme všechny tři typy myšlení po celý život, je-li to v dané situaci účelné. ([5], str.74)

Znalost přístupů ke kognitivnímu vývoji může učiteli pomoci při rozhodování o způsobu podání látky. Jednotlivé přístupy se shodují v tom, že žáci se dopouští mnoha chyb při řešení problémů proto, že ony problémy jsou nepřiměřené jejich úrovni myšlení. Učitel by měl být vnímavý vůči úrovni, na níž jednotliví žáci myslí a předkládat látku v odpovídající podobě. Měl by poskytnout příležitost k porozumění na vyšších úrovních, než odpovídají věku, ale nevyužití této příležitosti nepovažovat za selhání nebo znak neschopnosti. Mají-li žáci postoupit k práci na pokročilejší úrovni, musí napřed zvládnout schémata na nižších úrovních. Také je důležité neustále ověřovat, zda žák rozumí významu užívaných slov a znaků. Učitel by měl brát v úvahu způsob zpracování informace žáky, kteří někdy nemusí správně rozpoznat klíčové prvky v látce nebo úloze.

2.4 Teorie učení, činitelé ovlivňující učení

Učení je (podle většiny psychologů) poměrně trvalá změna v potenciálním chování jedince v důsledku zkušenosti. ([5], str.146) Dále se psychologové rozdělují na dva tábory s rozdílnými přístupy. Jedná se o behavioristický přístup a o kognitivní přístup.

Behavioristický přístup silně zdůrazňuje úlohu okolí. Z behavioristické školy myšlení vychází teorie učení zvaná „operativní podmiňování“ (jejím představitelem je např. B.F. Skinner, 1905-1990, americký psycholog). Podle této teorie probíhá učení ve třech stadiích:

a) podnět či situace,
b) chování,
c) zpevnění (Z).

Zpevnění vychází ze stadia b). Rozlišujeme kladné zpevnění Z_+ a nepříznivé zpevnění Z_-. Z_+ zvyšuje pravděpodobnost, že učící bude v budoucnu na stejný podnět reagovat stejným způsobem, Z_- tuto pravděpodobnost snižuje. Skinner se domnívá, že poměrná neúčinnost velké části školního učení plyne z nepochopení tohoto modelu. Model operativního podmiňování upozorňuje na potřebu pečlivě analyzovat, co ovlivňuje chování učícího se. ([5], str.147)

Kognitivní přístup klade důraz na způsob, jak si jedinec vysvětluje a jak se snaží pochopit, co se děje. Z tohoto přístupu vychází teorie učení psychologa Brunera zvaná „instrumentální konceptualismus“. Tato teorie nevidí učení jako pasivní proces, vyvolávaný podnětem a posilovaný nebo oslabovaný zpevněním, ale jako proces aktivní, jímž si učící vyvozuje principy a pravidla a ověřuje si je. (I když nepopírá důležitost podnětu a zpevnění obsaženou v předchozí teorii). Učení je složitá činnost, která spočívá v získání informace, transformaci této informace do podoby vhodné pro práci s daným úkolem a ověřování přiměřenosti této transformace. Podnět se v této teorii stává osobní záležitostí, kterou si jedinci interpretují a transformují vlastním způsobem. ([5], str.148)

Při hledání efektivního způsobu výuky je nezbytné vzít v úvahu činitele, které ovlivňují schopnost jedince učit se. Jedná se o kognitivní činitele (inteligenci, zpracování informace, tvořivost), afektivní činitele (úzkost, sebepojetí, extroverzi, introverzi), motivaci, úroveň zrání, věk, pohlaví, sociální prostředí, studijní návyky a paměť. Největší vliv učitele se zřejmě projeví v motivaci, může však také ovlivnit sebepojetí žáka i studijní návyky.

Rozlišujeme dva druhy motivace:

1. *Intrinsická motivace* (od jedince samého). Jedná se o přirozený pud zvídavosti. Odezva na projevy tohoto pudu pomáhá usměrňovat vývoj jedince. Pokud jsou žáci často odměňováni učiněnými objevy, příjemným vzrušením a souhlasem dospělého, budou ve svém zkoumání pravděpodobně pokračovat. Stupeň zájmu vzbuzovaný vlastní zkušeností s výukou je výrazným motivačním činitelem.

2. *Extrinsická motivace* (od okolí). Jedná se především o známkování, vysvědčení, testy, zkoušení atd. Tato motivace vyžaduje od učitele mnoho úsilí. Měl by žákům poskytnout příležitost k úspěchu na jakkoliv nízké úrovni. Výsledky práce by měly být ohodnoceny rychle, jinak žáci ztrácejí o úkol zájem. Důležitý je také prvek soutěže, nejlépe, soutěží-li žák sám se sebou. Tlak na výkon však nesmí být příliš silný, jinak žáci utíkají k podvádění apod. Silným motivačním prvkem je pochvala učitele.

Nejen při výuce matematiky je důležité, aby si žáci z probrané látky zapamatovali co nejvíce, protože se nabyté znalosti a dovednosti uplatňují v nově probíraných tématech. I když je úroveň paměti do jisté míry jedinci vrozená, může přesto učitel množství zapamatované látky ovlivnit. Existuje řada strategií, které vedou ke zlepšování dlouhodobé paměti. Mezi nejdůležitější bych zařadila :

1. Důležitost a zájem (nejlépe si zapamatujeme to, co má přímo vztah k našim zkušenostem).
2. Praktické užití (látka, se kterou se prakticky pracuje, bývá lépe zapamatována).
3. Porozumění (lépe si zapamatujeme to, čemu rozumíme).
4. Přeučení (dovednosti nebo znalosti, které se cvičí a ověřují i poté, co jsou dokonale osvojeny, zůstávají v paměti déle).
5. Spojování (neznámá látka se zapamatuje lépe, když je spojena s něčím známým).
6. Vizuální znázornění.

2.5 Cíle učení

Úkolem učitele je abstrahovat tu látku z předmětu, která odpovídá chápavosti třídy a která obsahuje soudržný, logický a smysluplný výběr prvků z celku. Tato látka pak určuje cíle pro každou vyučovací hodinu. Tyto cíle by měly jasně vyjádřit, co má student na konci hodiny umět.

Výsledky učení je podle [5] možno rozdělit do následujících kategorií:

1. *Znalosti*; jedná se o pouhou znalost látky, její rozpoznání a pojmenování (např. žák pozná desetinné číslo a vyjmenuje jeho řády).
2. *Porozumění* významu znalostí (např. žák ví, jaký význam má řád desetin, setin, jak spolu souvisí, má představu o jejich velikosti).
3. *Uplatnění* kategorie 1. a 2. v nových situacích, jejich praktické užití (např. práce s desetinnými čísly ve slovních úlohách, při převádění jednotek).
4. *Analýza*; žák rozpoznává vztahy mezi jednotlivými částmi učební látky, dokáže popsat, co se během jejich užití děje (např. vidí, že jedno číslo je možno zapsat zlomkem i desetinným číslem, hodnotu čísla je možno znázornit jako délku úsečky atd.).
5. *Syntéza*; žák je schopen uspořádat tyto části do nových vztahů, zužitkovat je při řešení nového problému (např. pod zlomkem si představit odpovídající desetinné číslo a naopak, sčítání desetinných čísel vnímat jako sčítání úseček atd.).

6. *Hodnocení*; žák je schopen posoudit hodnotu látky, určit míru úspěšnosti dosaženou při řešení, případně navrhnout zdokonalení (např. rozhodnout, zda je při řešení úlohy výhodnější využít zlomky nebo desetinná čísla a po vyřešení posoudit, zda se rozhodl správně).

Není vždy nutné volit cíle v jejich hierarchickém pořadí (vyložení poznatku a jeho následné užití v úlohách). Můžeme například nejprve předložit problém a pak dodávat ty znalosti a vysvětlení, jejichž potřebu žáci v průběhu řešení objevují. K úrovním 4. a 5. se podle mých zkušeností většinou dostávají jen ti nejlepší žáci a studenti, ale právě na těchto úrovních se nejvíce uplatňuje a rozvíjí to, co nazýváme matematickým myšlením. Podíváme-li se zpět na strukturu matematických schopností, je to zřejmě faktor usuzovací, který se při řešení úloh na vyšších úrovních zapojuje.

V případě, že učení nebylo úspěšné, je třeba zjistit, v které části procesu učení došlo k selhání. Proto je dobré zmínit následující řetězec událostí, ke kterým dochází při učení ([5], str.167). Obvykle probíhají v následujícím pořadí:

1. *motivace* (očekávání),
2. *rozpoznání* (jedinec vnímá látku a odlišuje ji od ostatních podnětů),
3. *vštípení* (jedinec kóduje poznatek),
4. *uchování* (jedinec uchovává poznatek v krátkodobé nebo dlouhodobé paměti),
5. *vybavení* (jedinec vybavuje látku z paměti),
6. *zobecnění* (látka je přenášena do nových situací, kde umožňuje jedinci vytvářet strategie, jak se s těmito situacemi vyrovnat),
7. *výkon* (praktické uplatnění strategií),
8. *zpětná vazba* (jedinec získává informaci o strategiích).

Záleží jen na učiteli, jakou formu pro jednotlivé články řetězce zvolí. Může látku pouze odvykládat, nebo klást studentům otázky a vést je k řešení problémů. V obou případech se bude jednat o kroky 2. a 4. Studentům bývá často látka nabízena pouze zprostředkováním poznatků v již hotové podobě jazyka daného předmětu, tedy v pojmech, vzorcích, postupech a myšlenkách vytvořených jinými lidmi. Projdou-li však studenti sami procesem objevování poznatků, budou pak mnohem lépe připraveni pochopit pojmy a vztahy v nich obsažené.

3. Obecné principy a cíle výuky matematiky na gymnáziu

3.1 Cíle výuky matematiky a úloha učitele

Základní otázka, na kterou jsem hledala odpověď, zní: co je cílem výuky matematiky na gymnáziu?

V současné době vstupuje do praxe Rámcový vzdělávací program. Zde je uvedeno: *„Výuka matematiky v gymnáziu rozvíjí a prohlubuje pochopení a využití kvantitativních a prostorových vztahů reálného světa, utváří kvantitativní a geometrickou gramotnost žáků. .... Výuka matematiky umožňuje žákům pochopit, že matematika je nezastupitelným prostředkem v modelování a předpovídání reálných jevů...“* ([12], str.24)

Abych zjistila, co od výuky matematiky očekávají sami studenti gymnázií, zadala jsem 373 studentům gymnázií dotazník. [17] Zadání a vyhodnocení dotazníku viz příloha. Při pohledu na výsledky dotazníkového šetření je zřejmé, že smysl výuky matematiky vnímají studenti odlišně podle zaměření třídy.

Z vyhodnocení dotazníku mimo jiné vyplynulo, že ve všeobecných třídách potřebuje matematiku k dalšímu studiu na VŠ 34% studentů, dalších 21% očekává od výuky matematiky, že získají všeobecný přehled. Ve třídách s nematematickým zaměřením jsou tato čísla nižší, 13% studentů od výuky matematiky požaduje získání všeobecného přehledu a stejný počet přípravu k dalšímu studiu na VŠ. V těchto třídách však studenti očekávají od matematiky především to, že je naučí logicky myslet (38%), a že jim bude užitečná v běžném životě (16%).

Z mého dotazníku i z článku [16], ve kterém autoři zkoumali subjektivní názory středoškoláků na postavení matematiky, je zřejmé, že si studenti příliš neuvědomují formativní stránku matematického vzdělávání. Autoři článku [16] proto vyzývají: *„Matematiku bychom měli učit tak, aby byla příležitostí k získávání zkušeností, k pochopení procesu poznání, ke klasifikaci jevů a jejich hodnocení, k vytváření nástrojů pro řešení problémů... Učme matematiku tak, aby student její užitečnost poznal a byl o ní přesvědčen.„* ([16], str.251)

Z výše uvedeného vyplývá, že výuka matematiky na gymnáziu by měla směřovat k:

- rozvoji schopností studentů,
- získání všeobecných znalostí,
- přípravě na další studium,
- schopnosti orientovat se v reálném světě.

Při hledání konkrétního cíle výkladu a způsobu, jak jej dosáhnout, je třeba vycházet z hodinové dotace matematiky, charakteru třídy, budoucí orientace studentů a z dosavadního stylu výkladu. Učitel by měl

1. znát úroveň myšlení jednotlivých žáků ve třídě a výuku podat tak, aby ji každý z nich mohl na své úrovni zpracovat,
2. zvolit vhodný způsob motivace žáků k dané látce,
3. využívat látku v praktických úlohách,
4. vracet se k již probrané látce v nových situacích, spojit ji s nově probíranou látkou, aby se zlepšilo zapamatování,
5. neustále poskytovat studentům zpětnou vazbu, a to nejen při písemných pracích a zkoušení, ale i v každé hodině při samostatné práci studentů,
6. dopřát pocit úspěchu i méně nadaným studentům.

Každý žák by v hodině, kdy je vykládána nová látka, měl řešit úlohy odpovídající jeho tempu chápání látky. Nejschopnější studenty je možné nechat pracovat samostatně, bez ohledu na tempo třídy. Také je vhodné nechat tyto studenty, aby ostatním řešení některé z úloh vysvětlili. Ve třídě by měla panovat taková atmosféra, ve které se studenti nestydí za to, že látku umějí, ani za to, že látce nerozumějí. Je třeba ponechat prostor na dotazy studentů, kteří se snaží látku pochopit.

3.2 Přístup studentů k výuce matematiky

Krátce pohovořím o přístupu studentů, tak jak jsem se s ním setkala ve své pedagogické praxi.

Studenti se podle přístupu ke studiu matematiky dají rozdělit do mnoha skupin. Já jsem se setkala především s těmito čtyřmi skupinami (uvedené rozdělení do skupin není výsledkem statistického šetření na větším počtu studentů, ale pouze mého pozorování ve vlastní výuce):

1) Studenti s hlubokým zájmem o matematiku, samostatně studují, hledají souvislosti, spolupracují s učitelem, řeší matematické olympiády. (Převážně budoucí studenti MFF, FJFI apod.)
2) Studenti se zájmem o matematiku, zajímají se o souvislosti a nová řešení a těší je, když látce rozumí. (Pravděpodobně budoucí studenti škol technického směru.)
3) Studenti se zájmem o slušný prospěch, nemají zájem o matematiku jako předmět, ale chtějí z ní mít „dobrou známku". Po učiteli požadují většinou „kuchařku", která jim popíše postup řešení úloh. Je však možné v nich zájem o matematiku jako předmět vzbudit. (Budoucí právníci, filozofové, lékaři, ekonomové….)
4) Studenti bez jakéhokoliv zájmu.

V této práci bych se chtěla zaměřit především práci se studenty ze skupiny 2) a 3).

3.3 Uspořádání učiva v gymnaziální matematice

V dohledné době bude posloupnost, obsahové a časové řazení látky plně v kompetenci školy. [12] Je pravděpodobné, že mnoho učitelů zachovává přibližně takové rozdělení látky do ročníků , jaké odpovídá rozčlenění látky do současných učebnic a učebním osnovám. [19] Nyní bývá látka probírána v ucelených tématech. Například téma „Funkce" se v naší škole vyučuje ve druhém ročníku. Během několika týdnů se tak studenti dostanou od lineární funkce až k funkci exponenciální. Pojem funkce si později připomenou v tématu „Goniometrie" a pak až v závěru studia v tématu „Diferenciální a integrální počet". Tento způsob výuky (po velkých celcích) má své výhody i nevýhody.

Výhody:

- soustavnost; studenti pracují po dlouhou dobu s určitými pojmy, které díky tomu dobře ovládají,
- časová úspora; nemusíme znovu vysvětlovat význam některých pojmů,
- studenti vnímají téma uceleně, ve vzájemných souvislostech.

Nevýhody:

- po opuštění tématu studenti mívají pocit, že mají látku za sebou a mohou jí zapomenout,
- upadání pozornosti; jestliže dlouho nepřichází nic výrazně nového, studenti ztrácejí zájem,
- nemusí být patrné souvislosti s ostatními partiemi matematiky.

V případě, že vyučujeme studenty bez hlubšího zájmu o matematiku, je nutné hledat způsoby, jak zajistit, aby se snažili látce porozumět a tím si ji lépe zapamatovali. Odpověď můžeme najít v kapitole o psychologii. Jestliže se k probrané látce po čase vrátíme a na jejím základě budeme studovat látku novou, studenti si dříve probrané zopakují, objeví souvislosti a uvědomí si, proč látku probírali. Jestliže studium matematiky završíme diferenciálním počtem, získáme tím možnost zopakovat, shrnout a využít vše, co se studenti o funkcích naučili v předcházejících ročnících.

3.4 „Spirálovitý“ přístup

Z výše uvedených důvodů se přikláním ke spirálovitému způsobu řazení látky. Dané téma by se neprobíralo v celku, ale po částech, jejichž náročnost by stoupala úměrně schopnostem studentů. Některé pojmy je podle mého názoru možné používat ještě před jejich precizací (např. spojitost), pouze s využitím intuitivního chápání jejich významu.

Pro ilustraci uvádím, jak je téma „Matematická analýza“ zařazeno do výuky na gymnáziích v zemi Berlín Spolkové republiky Německo [28]:

8. třída:	Funkce, funkce lineární
9. třída:	Kvadratické rovnice a kvadratická funkce
10. třída:	Trigonometrie
	Exponenciální a logaritmická funkce
11. třída:	Průběh funkce bez užití diferenciálního počtu
	Posloupnost a limita
	Derivace
	Průběh funkce s využitím diferenciálního počtu

3.5 Matematická analýza na gymnáziu

Témata gymnaziální matematiky, která je možno shrnout pod název matematická analýza, jsou „Funkce", „Posloupnosti a řady" a „Diferenciální a integrální počet".

Téma „Funkce" je podle mého názoru jedno ze stěžejních témat středoškolské matematiky. Shledala jsem k tomu následující důvody:

- téma se zrcadlí v mnoha dalších okruzích středoškolské matematiky (rovnice a nerovnice, analytická geometrie...),
- je jedním z hlavních oborů bádání matematiků v posledních staletích,
- má široké uplatnění v jiných předmětech (fyzika, biologie...),
- obsahuje jak stránku grafickou, tak početní,
- studenti zde mohou najít mnoho souvislostí a uplatnit syntetické a analytické myšlení,
- téma vyústí v diferenciálním a integrálním počtu, kde studenti využijí všechny nabyté znalosti a dovednosti.

Studium funkcí se podle [6] sestává ze tří složek poznávání:

1) poznávání jednotlivých tříd funkcí,
2) poznávání základních vlastností funkcí,
3) technika výzkumu funkcí.

Do poslední složky patří právě diferenciální počet.

Různé metodické přístupy k výkladu funkcí jsem studovala v českých učebnicích matematiky pro střední školy a gymnázia (přibližně od roku 1970) a v učebnicích rakouských a německých. Zajímal mě podíl studentů na objevování nových poznatků, využití grafického vyjádření funkcí, typy příkladů atd. (Tyto postupy zde však nebudu podrobněji rozebírat, neboť výklad funkcí není tématem této práce.) Zajímavé jsou také různé způsoby rozložení učiva matematické analýzy během studia na gymnáziu (viz kapitola 3.4).

Při výkladu diferenciálního počtu vycházíme z poznatků o funkcích, které studenti načerpali během předcházejícího studia. Proto bude zřejmě i způsob výkladu diferenciálního počtu vycházet z přístupu, na který byli studenti v předchozích letech zvyklí. Hejný uvádí: *„Právě problematika funkcí je velmi vhodná k samostatné a* *tvořivé práci studentů.“* ([6], str.241) Studenty je třeba od prvních hodin v prvním ročníku vést ke spolupráci na výkladu a k samostatnému objevování nových poznatků, aby matematiku nechápali jako pouhou manipulaci se symboly podle naučených pravidel. Zároveň by mělo být zřejmé, že v matematice velice záleží na přesnosti vyjadřování a hypotézy by neměly být zaměňovány za přesný důkaz.

4. Vznik a vývoj základních pojmů diferenciálního počtu

Pro učitele je důležité, aby znal historické souvislosti týkající se probírané látky, proto se nejprve stručně zmíním o vývoji základních pojmů diferenciálního počtu.

4.1 Historie pojmu „spojitost funkce"

Pojem spojitost se vyskytuje již v díle G.W. Leibnitze „Acta Eruditorum", kde v roce 1686 vyložil principy nového kalkulu (analýzy, diferenciálního a integrálního počtu). Tam explicitně pro funkce předpokládal spojitost, aniž přesně uvedl, co tím myslí. ([33], str. 22) Isaac Newton v knížce „Methodus fluxionum et serierum infinitorum" (napsána 1671, publikována 1736) říká, že jeho „proměnné jsou vytvořeny jako *spojité* pohyby bodů, přímek a rovin..." ([33], str. 28) V 18. století byly za „spojité" funkce považovány takové, které se „chovaly dle zákona spojitosti formy", neboli byly vyjádřeny všude pomocí jedné a téže algebraické či transcendentní rovnice. ([33], str. 47) Toto pojetí se zcela proměnilo na přelomu 18. a 19. století, kdy přichází modernější varianta tohoto pojmu týkající se „souvislosti" grafu funkce (zatím chápána spíše intuitivně).

V devatenáctém století se setkáváme s pojmem spojitá funkce u Dirichleta (1837), který jej použil v definici pojmu funkce:

„Pod a a b budeme rozumět dvě pevné hodnoty a pod x proměnnou veličinu nabývající všech hodnot mezi a a b. Jestliže nyní každému x odpovídá jedno jediné konečné y a přitom tak, že když x spojitě probíhá interval od a do b, pak se $y = f(x)$ mění rovněž spojitě, pak se y nazývá spojitou funkcí x pro tento interval" ([34], str.9). Dirichlet tímto definoval funkci, ačkoliv již v té době věděl o nespojitých funkcích a jeho definice není nijak přesná. Definice spojitosti, která odpovídá současnému pojetí se objevuje u Bolzana v roce 1817 a (přeložena z němčiny) zní takto:

„ Správným výkladem rčení, že se funkce $f(x)$ pro všechny hodnoty x, které leží uvnitř nebo vně jistých mezí, mění dle zákona spojitosti totiž rozumíme jen tolik, že když x je taková hodnota, pak lze rozdíl $f(x+\omega)-f(x)$ udělat menším, než každá daná veličina, když lze brát ω tak malé, jak jen chceme." ([34], str.9)

V jedné z nejstarších vysokoškolských učebnic, kterou jsem měla k dispozici, v „Úvodu do počtu diferenciálního“ Miloše Kösslera [13], je uvedena následující definice spojitosti funkce v bodě:

Definice 1: *„Funkce* $f(x)$ *jest spojitá v daném bodě* $x = x_0$, *jestliže* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Obšírněji řečeno: pro každé libovolně malé, kladné ε *lze nalézti* $\delta(\varepsilon)$, *takže*

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ *pokud* $0 \le |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$.

Není-li to splněno, jest $f(x)$ *v bodě* x_0 *nespojitá. Z toho jest patrno, že funkce* $f(x)$, *která není definována v bodě* x_0, *jest tam nespojitá.*“ ([13], str.60)

Obdoba této definice je dnes uváděna jako tvrzení (je tedy považováno za nutné je dokázat):

Tvrzení 2: *„Funkce f je spojitá v bodě* $x_0 \in R$, *právě když je definována v bodě* x_0 *a platí:* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.“([38], str.111)

V současné vysokoškolské učebnici, určené k výuce budoucích učitelů matematiky, je uvedena definice Bolzanova v jazyce matematických symbolů:

Definice 3: *„Říkáme, že funkce f je spojitá v bodě* $x_0 \in R$, *jestliže*

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, x \in U_\delta(x_0))(f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0)))$ “ ([38], str.104)

Spojitost funkce v intervalu je definována takto:

Definice 4: *„Řekneme, že funkce f je spojitá v intervalu* $(a,b) \in R$, *právě když je spojitá v každém bodě* $x \in (a,b)$. ([38], str.109)

4.2 Historie pojmu „limita funkce“

Pojem limity je úzce spjat s pojmem nekonečno, kterého se však matematici dlouho obávali. Proto matematika čekala na definici limity, tak jak ji známe dnes, až do 19. století.

Infinitezimální úvahy se objevují již v díle Johanna Keplera (1571-1630) „Nová stereometrie vinných sudů“ (1615), ve kterém postupoval metodou rozdělení tělesa na nekonečně mnoho nekonečně malých částí, jejichž objem lze snadno výpočtem určit.

([35], str.23) Postupně byl pojem „nekonečně malého čísla“ nahrazen „číslem libovolně malým“ . Definováním limity se zpřesnilo mnoho úvah (definice integrálu – Cauchy, Riemann atd.). Předzvěst limity lze tušit v díle Newtonově, který pracoval s veličinami, jež lze libovolně zmenšovat. Jako zřejmě první použil limitu ve svých úvahách Jean Baptiste Le Rond d`Alembert (1717-1783), který se s její pomocí pokusil definovat derivaci. V dnešním zápisu takto: $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Limitu funkce definoval d`Alembert přibližně takto: „*Jedna veličina je limitou druhé veličiny, jestliže tato druhá se může přiblížit k první více, než je libovolná daná veličina, ať je tato poslední jakkoli malá, přičemž však přibližující se veličina nikdy nemůže předstihnout veličinu, ke které se blíží.*“ ([35], str.48) Nově vznikající teorie limit však ještě neměla algoritmický aparát, který by sloužil k výpočtu limit.

Základy matematické analýzy nebylo možno vystavět bez plného pochopení a přesného popisu pojmu reálného čísla. K tomu došlo kolem roku 1872. Aritmetický způsob formulace pojmu limity pochází od Karla Weierstrasse (1815-1897). Weierstrass se oprostil od dynamického popisu k sobě se blížících veličin a pojmy definoval pomocí korektně zavedených reálných čísel a nerovností. Limitu funkce definoval takto:

Definice 5: „ $\lim_{x \to \alpha} f(x) = A$ *když k danému* $\varepsilon > 0$ *existuje číslo* $\delta > 0$ *tak, že je* $|f(x) - A| < \varepsilon$ *pokud je* $0 < |x - a| < \delta$.“ ([34], str.19)

V učebnici [13] z roku 1926 se v definici hovoří o velikosti okolí bodů x_0 a A:

Definice 6: „*Jestliže k libovolně malému, kladnému* ε *lze nalézti takové kladné číslo* $\delta(\varepsilon)$, *že* $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ *čili* $|f(x) - A| < \varepsilon$ *pro všechna x různá od* α, *náležející k intervalu* $\langle a, b \rangle$ *a splňující nerovnosti* $\alpha - \delta(\varepsilon) < x < \alpha + \delta(\varepsilon)$, *čili* $|x - \alpha| < \delta(\varepsilon)$, *pak je* $\lim_{x \to \alpha} f(x) = A$.“ ([13], str.54)

V současných vysokoškolských učebnicích je limita funkce v bodě definována tímto způsobem:

Definice 7: „*Říkáme, že funkce f má v bodě* $x_0 \in R^*$ *limitu* $A \in R^*$, *jestliže platí:*

$$(\forall U(A))(\exists P(x_0))(f(P(x_0)) \subset U(A)).$$

Píšeme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

$U(A)$ *je okolí bodu A,* $P(x_0)$ *je prstencové okolí bodu* x_0*.*" ([38], str. 110)

4.3 Historie pojmu „derivace funkce"

Termín „derivace" zavedl Louis Lagrange (1736-1813), ale počátky vývoje pojmu derivace souvisí s geometrickými a fyzikálními problémy, které řešili matematici a fyzikové již na počátku 17. století. V této době vznikaly základní představy o proměnné veličině a funkci, které se staly hlavní předmětem zkoumání matematiků. Galileo Galilei (1564-1647) ve spise „ Rozpravy a matematické důkazy, týkající se nových oblastí vědy o mechanice a lokálním pohybu" zvolil nový přístup ke zkoumání pohybu. Na rozdíl od filozofů začal experimentovat s cílem pohyb popsat. Zaměřil se na tři veličiny: rychlost, dráhu a čas a uvědomil si, že stěžejním pojmem je „okamžitá rychlost", tedy podíl „nekonečně malé dráhy", kterou těleso urazí za "nekonečně malý čas", a tohoto času. (V dnešní symbolice zapsáno $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, $\Delta t \to 0$). ([6], str.259)

Úloha měření dráhy v závislosti na čase přenesla integrální postupy do dynamických úloh a poskytla představu a metodu, jak svázat pojem derivace (tečna, rychlost) s pojmem integrál (obsah, dráha). Byla vytvořena úplná nauka o pohybu. Pohybující se objekt prochází svou drahou spojitě bod po bodu ve spojitém čase. Diferenciální operace se ukázaly při popisu pohybu jako prvotní.

Dalším řešeným problémem byl problém nalezení tečny ke křivce. Zde se stala významnou Fermatova metoda konstrukce tečen, popsaná v rukopise „Methodus ad Disquirendam et Maximam et Minimam" (Metoda nalezení maxim a minim) z roku 1637. ([35], str.32) Jeho metoda inspirovala mnoho dalších matematiků včetně Newtona.

Jedním z nejvýznamnějších vědců, kteří přispěli k rozvoji diferenciálního a integrálního počtu, je bezesporu Isaac Newton (1643-1727). Ten své úvahy opíral o teorii fluxí a fluent, kterou vypracoval v letech 1656-1666. Z našeho pohledu jsou fluenty (souřadnice) x, y pohybujícího se bodu funkcemi času a fluxe $\dot{x}$, $\dot{y}$ jejich derivacemi podle t: $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$. Jejich poměr je derivace y podle x: $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx}$. Základní úlohu analýzy formuloval Newton takto: Je-li dán vztah mezi dvěma fluentami, má se určit vztah mezi jejich fluxemi a naopak. Písmenem o značil „nekonečně malý časový úsek", $\dot{x}o$, $\dot{y}o$ jsou pak neurčitě malé přírůstky x a y, neboli „momenty x a y". Je-li např. vztah mezi fluentami x a y dán ve tvaru $y = x^n$, Newton z toho nejprve vytvořil $y + \dot{y}o = (x + \dot{x}o)^n$ a pak postupoval takto: pravou stranu rozvinul podle binomické věty, odečetl $y = x^n$, dělil o, zanedbal členy obsahující o a dostal vztah $\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x}$. V Leibnizově (dnes používané) symbolice můžeme tento vztah zapsat $\frac{dy}{dt} = nx^{n-1}\frac{dx}{dy}$ a protože $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$, zjišťuje Newton, že $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$. K tomuto výsledku dospěl již dříve jinou metodou. Později Newton vyloučil infinitezimály (nekonečně malé veličiny) a kritizoval to, jak zanedbával členy obsahující o. Nové pojetí založil na „metodě prvních a posledních poměrů", zde se již nevyskytuje dělení číslem o, k tomu však dojde slovním popisem úprav, takže podstata je stejná. [33]

Neméně významnou měrou jako Newton přispěl k rozvoji diferenciálního a integrálního počtu Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Základy svého infinitezimálního počtu zformuloval na podzim roku 1675. Předložil pravidla pro řešení úloh tečen a kvadratur, objevil vztah mezi integrováním a derivováním a zavedl novou symboliku. Zajímavé i pro dnešní studenty mohou být úvahy z jeho raného mládí. Jedná se o tabulky diferencí, ze kterých je vidět souvislost mezi diferencováním a sumací. Leibniz nejprve napsal posloupnost přirozených čísel, po ní posloupnost jejich diferencí a posloupnost diferencí diferencí :

N	0	1	2	3	4	5	6	...	
1. dif.		1	1	1	1	1	1	1	...
2. dif.			0	0	0	0	0	0	0

Totéž můžeme učinit pro posloupnost druhých mocnin přirozených čísel:

N^2	0	1	4	9	16	25	36	…		
1.dif.		1	3	5	7	9	11	13	…	
2.dif.			2	2	2	2	2	2	2	…
3.dif.				0	0	0	0	0	0	0

Podobnou tabulku můžeme sestavit pro libovolnou k-tou mocninu přirozeného čísla. Vidíme, že pro k-tou mocninu se $(k+1)$-ní diference nulují. Také vidíme, že součet n po sobě následujících prvních diferencí dá $(n+1)$-ní člen posloupnosti, z níž posloupnost diferencí vznikla. Neboli, že z posloupnosti po sobě následujících hodnot lze vytvořit posloupnost diferencí a z posloupnosti diferencí lze sčítáním získat původní posloupnost. ([34], str.22)

Leibniz zkoumal křivky a funkce, na obecnou křivku nahlížel jako na mnohoúhelník sestavený z nekonečně mnoha nekonečně malých úseček. „.... *Nalézt tečnu ke křivce, to znamená vést přímku spojující dva body křivky, jejichž vzdálenost je nekonečně malá nebo též prodloužit stranu nekonečně úhlového mnohoúhelníka, který je pro nás s křivkou totožný…*“ ([35], str.44) Pro funkce explicitně předpokládal spojitost (aniž přesně víme, co tím měl na mysli) a místo dnešních limit užíval infinitezimály.

Z doby Newtona a Leibnize je znám pojem diferenciální kvocient pro funkci $f(x)$, tedy vztah: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. Byla též jasná představa, že pokud se Δx blíží nule, blíží se diferenciální kvocient směrnici tečny ke křivce dané vztahem $y = f(x)$. Terčem kritiky se v té době stala skutečnost, že někdy byly veličiny dx, dy považovány za nenulové (a bylo možno jimi dělit), jindy byly považovány za nulové a zanedbávaly se. Další zpřesňování analýzy spočívalo v proměnách chápání toho, co znamená, že Δx se blíží nule.

První krok k vyřešení problémů s infinitezimálami učinil Jean Baptiste Le Rond d'Alembert, který se, jak již bylo řečeno, pokusil definovat derivaci jako limitu poměru přírůstků veličin (v dnešní symbolice $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$). Do té doby byla derivace chápána jako poměr diferenciálů nebo fluxí.

Osmnácté století nepřineslo sice podstatný pokrok, který by přesněji zdůvodnil Newtonův a Leibnizův postup, avšak přineslo velký nárůst poznatků o matematické analýze. Vědělo se však, že její stav není uspokojivý. Centrálním pojmem a objektem vyšetřování byly funkce a d'Alembertův příspěvek ukázal cestu zpřesňování pojmů. Ukázalo se, že je nutné uvést jejich definice.

V 19. století vysvětlil svůj přístup k nekonečně malým veličinám Bernardo Bolzano ve spise „Der binomischen Lehrsatz,....“: „*...nejenom v tomto spise, ale i všude jinde jsem si stanovil zákon, podle nějž mi místo takzvaných nekonečně malých veličin všude stejně úspěšně poslouží veličiny, které mohou být menší než každá daná veličina, nebo veličiny, které mohou být tak malé, jak právě chceme....*“ ([33], str.49)

Významným matematikem 19. století byl A.-L. Cauchy (1789-1857), který poprvé pojednal matematickou analýzu v ucelené podobě na základě vymezení pojmu limity. K pojmu derivace uvedl („Résumé des leçons deonnées a l'Ecole Royale Polytechnique“):

„*Když je funkce $f(x)$ spojitá mezi dvěma hraničními hodnotami proměnné x a když takové proměnné přisoudíme hodnotu mezi dvěma zpočátku zadanými hodnotami, potom infinitezimálně malý přírůstek pro proměnnou vytvoří nekonečně malý přírůstek ve funkci samotné. Proto, když položíme $\Delta x = i$, oba členy poměru diferencí $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ budou nekonečně malé veličiny. Přestože tyto dva členy dosahují limitu nula neurčitě a současně, jejich poměr můžeme konvergovat k jiné limitě, kladné nebo záporné. Tato limita, když existuje, má určitou hodnotu pro každou partikulární hodnotu x; ale ta se mění v závislosti na x.... Tvar nové funkce, která je limitou podílu $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$, závisí na tvaru výchozí funkce $f(x)$. Abychom tuto závislost vzali v úvahu, nazveme tuto novou funkci odvozenou (derivovanou) funkcí a označíme ji, užitím čárky, znakem y' nebo $f'(x)$. ....*“ ([33], str.53) Dnešní symbolikou zapíšeme toto poměrně komplikované tvrzení ve tvaru $f'(x) = \lim_{i \to 0} \frac{f(x+i)-f(x)}{i}$. Tím končí nejasnosti kolem definice derivace.

V 19. století vyvstal nový problém. Ještě na jeho počátku byla vžitá představa, že spojitá funkce (v představě mnohých taková funkce, kterou lze nakreslit bez zvednutí tužky z papíru) má derivaci všude, až na konečný počet bodů. (Např. v práci A. M. Ampéra z roku 1806.) Vývoj chápání pojmu spojitost však ukázal, že tato představa je nesprávná.

Řešení problému mohlo přijít až v době, kdy byl přesně kodifikován pojem spojitosti a derivace v dnešní podobě. V roce 1830 napsal B. Bolzano příklad spojité funkce, která neměla derivaci v „husté množině" bodů. (Jinak řečeno, Bolzano ukázal, že když jeho funkce nemá derivaci ve dvou různých bodech, existuje mezi nimi další bod, v němž derivaci rovněž nemá.) Zkoumání této funkce se později věnovali čeští matematikové, např. V. Jarník. Znechucen takovými funkcemi v roce 1905 E. Picard řekl, že *„kdyby Newton a Leibniz věděli, že spojité funkce nemusejí mít derivaci, diferenciální počet by nikdy nevzni*kl". ([33], str.57)

M. Kössler v učebnici [13] z roku 1926 definuje derivaci funkce v bodě *x* takto:

Definice 8: *„Jestliže eksistuje limita* $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$, *nazýváme ji derivace* $f(x)$ *v bodě x....Funkce* $f(x)$ *má v bodě x derivaci, jestliže eksistuje takové číslo* $f'(x)$, *že pro libovolně zvolené kladné* ε *jest*

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|<\varepsilon,\ \textit{když}\ 0<|h|<\delta(\varepsilon).\text{“}$$ ([13], str.70)

Ve vysokoškolské učebnici [38] je uvedena tato definice derivace funkce v bodě:

Definice 9: *„Nechť je funkce f definována v nějakém okolí* $U(x_0)$ *bodu* x_0 *z R. Potom limitu (pokud existuje)* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *nazýváme derivací funkce f v bodě* x_0 *a značíme ji* $f'(x_0)$. *Je-li* $f'(x_0)\in R$, *říkáme, že f má v bodě* x_0 *vlastní derivaci. Je-li* $f'(x_0)=\pm\infty$, *říkáme, že f má v bodě* x_0 *nevlastní derivaci. Pokud vyšetřovaná limita neexistuje, říkáme, že f nemá v bodě* x_0 *derivaci, nebo že* $f'(x_0)$ *neexistuje."* ([38], str.126)

5. Metody výuky diferenciálního počtu na gymnáziu – analýza učebnic

5.1 Základní pojmy matematické analýzy na gymnáziu

V současné době jsou pro výuku matematické analýzy na gymnáziích v České republice k dispozici učebnice „Funkce“ [22]), „Posloupnosti a řady“ [26] a „Goniometrie“ [23] autora O. Odvárka a „Diferenciální a integrální počet“ autorů D. Hrubého a J. Kubáta [10].

Studenti se zde seznamují s těmito funkcemi: lineární funkce, funkce s absolutními hodnotami, kvadratické funkce, lineární lomené funkce, mocninné funkce, exponenciální a logaritmické funkce, goniometrické funkce (dále v textu je souhrnně nazývám elementární funkce). V učebnicích jsou definovány následující pojmy:

Funkce:

- definiční obor funkce
- obor hodnot funkce, funkční hodnota
- rostoucí, klesající funkce
- prostá funkce
- sudá, lichá funkce
- omezená funkce
- maximum, minimum funkce
- inverzní funkce
- složená funkce
- periodická funkce, perioda.

Diferenciální počet:

- okolí bodu, levé, pravé okolí bodu, δ-okolí bodu
- přírůstek argumentu, přírůstek funkce
- spojitost funkce v bodě
- spojitost v bodě zleva, zprava
- spojitost v otevřeném, uzavřeném intervalu

- limita funkce ve vlastním, nevlastním bodě
- vlastní, nevlastní limita
- limita funkce v bodě zleva, zprava
- asymptota grafu funkce
- derivace funkce v bodě, v intervalu
- derivace funkce v bodě zleva, zprava
- lokální maximum, minimum funkce
- konvexnost, konkávnost funkce
- inflexní bod

(Vzhledem k tématu práce neuvádím pojmy z učebnice [26].)

Postupy, jakými mohou být nové pojmy vysvětleny, definovány, a jak je možno s nimi dále pracovat, jsem studovala v různých učebnicích. K analýze jsem využila učebnice české [22], [10], rakouské [37], [29], [4], a jednu německou [11]. Tyto učebnice se navzájem liší přístupem k výkladu i náročností úloh. Zajímaly mě motivační úlohy, hloubka, do které je pojem probírán, způsob zavádění nových pojmů (především podíl samostatné práce studentů), množství a forma definic a vět, řešené příklady a úlohy k procvičování. Cílem bylo získat přehled o metodách, kterými je u nás a v sousedních zemích diferenciální počet na gymnáziích vyučován, a o znalostech a dovednostech, které jsou po studentech požadovány.

Základními pojmy diferenciálního počtu, kterým by měli všichni studenti dobře rozumět, jsou spojitost, limita a derivace funkce.

Otázky, které bych ráda zodpověděla, jsou:

1. Kdy poprvé seznámit studenty s těmito pojmy?
2. V jakém pořadí je definovat?
3. Jak tyto pojmy definovat?

V následující analýze učebnic uvádím příklady (řešené), úlohy (určené k samostatné práci studentů), definice a věty v doslovném překladu. Případné nedostatky, např. v zadání mezí intervalů apod., proto nejsou mou chybou. Výroky, které označuji jako „Tvrzení", nejsou v učebnicích výslovně označeny ani jako definice, ani jako věty. Obrázky a grafy, které v textu následují, jsou také převzaty z analyzovaných učebnic.

5.2 Zavedení pojmu spojitost funkce v gymnaziálních učebnicích

Čeští studenti (pokud studují podle učebnice [22]) se s pojmem „spojitá funkce" setkají poprvé při studiu elementárních funkcí. Nejprve se zde hovoří o grafu kvadratické funkce jako o *„plynulé nepřerušované křivce"* ([22], str.61). V kapitole „Nepřímá úměrnost" je uvedeno: *„grafem funkce* $y=\frac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$ *je spojitá plynulá křivka..."* ([22], str.77). A v kapitole „Mocninné funkce s celým exponentem" najdeme následující vyjádření (týká se funkcí $y=x^{-2}$, $y=x^{-3}$): *„Graf každé z těchto funkcí se skládá ze dvou spojitých čar, jedna z nich zobrazuje část funkce pro* $x\in(-\infty,0)$*, druhá pro* $x\in(0,\infty)$. *(0 nepatří do definičního oboru funkcí.)"*. ([22], str.94) Pojem „spojitá čára (křivka)" není blíže upřesněn a dále se s ním nepracuje. Exaktně je spojitost definována až v učebnici [10].

Učebnice [4], [11], [37] a [10] se v prvním seznámení se spojitostí shodují. První věta v kapitole o spojitosti v české učebnici [10] zní: *„ ...lze na základě geometrické představy říci, že funkce je spojitá, jestliže její graf můžeme nakreslit jedním tahem."* ([10], str.25) Podobná vyjádření najdeme i v analyzovaných zahraničních učebnicích. Tím však podobnost končí. Dále je patrný veliký rozdíl mezi českou učebnicí na jedné straně a všemi čtyřmi zahraničními učebnicemi na straně druhé.

Pouze česká učebnice [10] používá Bolzanovu definici spojitosti (viz definice 11), založenou na okolí bodu. Kapitole „Spojitost funkce v bodě" v [10] proto předchází kapitola „Okolí bodu", kde je tato definice:

Definice 10: *„Okolím bodu a nazýváme otevřený interval* $(a-\delta, a+\delta)$*, kde* δ *je kladné reálné číslo. Číslo a nazýváme střed okolí a číslo* δ *poloměr okolí."* ([10], str.22)

Kromě tohoto pojmu se zde studenti seznamují ještě s pojmy „přírůstek argumentu" a „přírůstek funkce". Česká učebnice definuje jako jediná ještě levé a pravé okolí bodu.

A nyní již k samotné spojitosti. Motivační úloha v učebnici „Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet" v kapitole „Spojitost funkce v bodě" pracuje s exponenciální funkcí $f: y = 2^x$. ([10], str.25) Podstatou příkladu je výpočet funkčních hodnot v okolí bodu $x_0 = 2$. Studenti postupně dosazují hodnoty blížící se zprava a zleva k hodnotě $x_0 = 2$ a pozorují, co se děje s funkčními hodnotami. (V knize je nakreslen graf funkce.) Cílem příkladu je ukázat, že čím je x blíže hodnotě 2, tím je $f(x)$ blíže hodnotě 4. Studentům příklad pomáhá k pochopení definice spojitosti, která bezprostředně následuje:

Definice 11: *„Funkce f je spojitá v bodě a, jestliže k libovolně zvolenému okolí bodu $f(a)$ existuje takové okolí bodu a, že pro všechna x z tohoto okolí bodu a patří hodnoty $f(x)$ do zvoleného okolí bodu $f(a)$."* ([10], str.26) .

V poznámce následující po definici autoři rozlišují tři možnosti chování funkce v daném bodě: pokud bod patří do definičního oboru, může být funkce v tomto bodě spojitá nebo nespojitá, pokud bod nepatří do definičního oboru, nemá smysl o spojitosti v tomto bodě hovořit. (Srovnejme s definicí 1.) O „nespojitých" funkcích se však v této kapitole nehovoří, příklady nespojitých funkcí nejsou uvedeny (což považuji za nedostatek). Učebnice používá i množinově-logickou symboliku a uvádí ještě další dvě obměny zápisu definice spojitosti funkce v bodě:

Definice 12: *„Funkce f je spojitá v bodě a, jestliže $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tak, že pro všechna x, pro něž je $|x-a| < \delta$ platí $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$"* ([10], str.27)

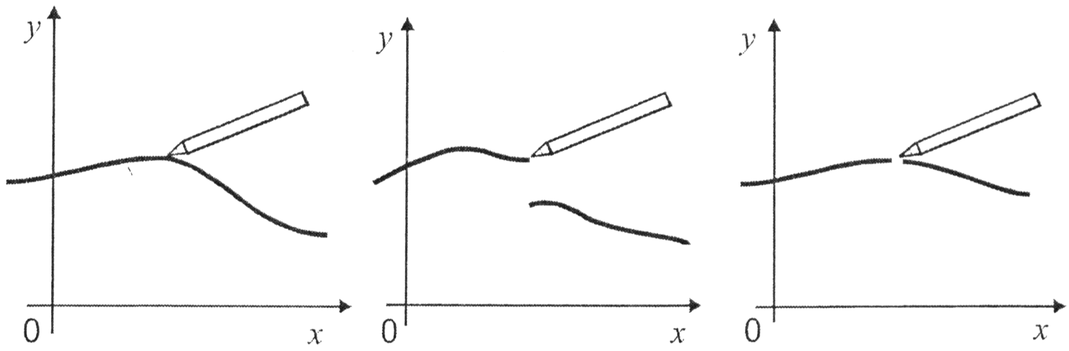
Definice 13: *„Funkce f je spojitá v bodě a*
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \left(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\right)$." ([10], str.27)

Po uvedených definicích spojitosti následují příklady několika spojitých funkcí (funkce konstantní, funkce $y = x$ a $y = \sin x$ atd.).

Otevřeme-li rakouské učebnice na stránkách o spojitosti, na první pohled si všimneme, že se výrazně liší od české učebnice množstvím grafů a obrázků, které mají studentům pomoci pochopit látku. (Naopak jsem v žádné z nich nenašla příklad podobný motivačnímu příkladu na výpočty hodnot funkce z české učebnice, který podle mého názoru pěkně ukazuje smysl pojmu spojitost.)

V učebnici „Mathematik 7" [37] je nejprve zavedena představa spojité funkce jako funkce, kterou můžeme nakreslit, aniž bychom zvedli tužku z papíru. (Viz obr.1)

U nespojitých funkcí, nebo tehdy, je-li je v definičním oboru mezera, musíme tužku z papíru zvednout:

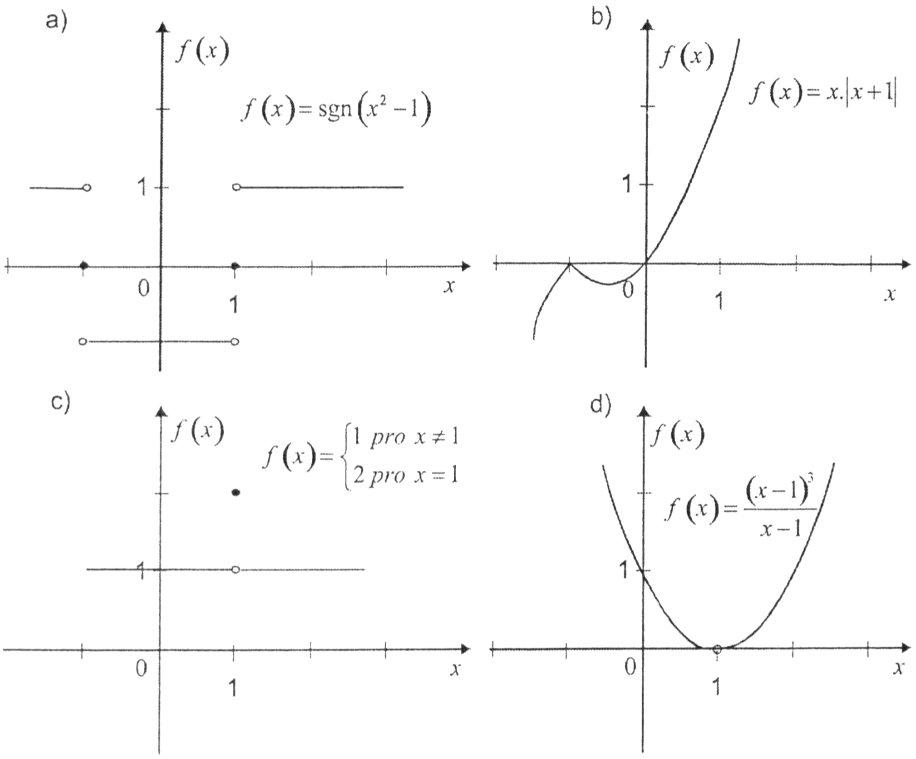


Obr.1. Motivace k představě spojité a nespojité funkce z učebnice [37]

Na obrázcích není vyznačeno, zda bod, ve kterém tužku zvedáme, patří nebo nepatří do definičního oboru funkce. Toto rozlišení následuje až v dalším textu, kde autoři rozdělují „přerušené“ funkce na ty, které *„nejsou spojité“*, a na takové, kde je *„mezera v definičním oboru“* a v tomto bodě tedy funkce *„není ani spojitá, ani nespojitá“* ([37], str.191).

Tomuto rozdělení se věnuje následující úloha:

Úloha [37],192/980: „Rozhodněte na základě grafu (obr.2), zda je daná funkce spojitá. V případě že není, určete místa nespojitosti nebo „mezery“.“



Obr.2. Grafy k úloze [37],192/980

Po této úloze následuje zpřesnění pojmů nespojitost a spojitost:

Tvrzení 14.: *„Pokud se blížíme neomezeně blízko k místu nespojitosti funkce, liší se funkční hodnota v místě nespojitosti od hodnot v jeho okolí minimálně o jistou hodnotu, závisející na dané funkci a místě nespojitosti.*

Pokud se blížíme neomezeně blízko k místu spojitosti funkce, blíží se i funkční hodnota v okolí místa spojitosti funkční hodnotě v daném místě neomezeně blízko.“ ([37], str.192)

Nevím, zda je možné tyto charakteristiky nazvat definicí, také se mi nelíbí jejich „šroubovaný“ jazyk, který rozhodně nepřispívá k pochopení přesného významu spojitosti. Co se mi však líbí, je to, že se zde hovoří o spojitosti i nespojitosti a rozdílech mezi nimi.

Nyní nahlédneme do učebnice „Mathematik Oberstufe 3“ [4]. Zde je nejprve definována limita a až po ní spojitost funkce. Zcela výjimečné je, že oba pojmy jsou v této učebnici zařazeny až po derivaci. (V kapitole o derivacích se sice pojem limita vyskytuje, ale není definován.)

Snahou autorů této učebnice je seznámit studenty především s nespojitými funkcemi. Proto (podobně jako ve výše zmiňované učebnici [37]) je v úvodu kapitoly „Spojitost“ první odstavec věnován nespojitým funkcím. Spojitost a nespojitost funkce se zde dává do souvislosti s limitou funkce, v podstatě je spojitost pomocí limity vysvětlena:

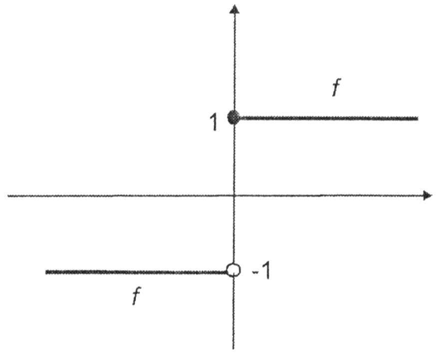
Tvrzení 15: *„Reálná funkce f se nazývá spojitá v bodě p jejího definičního oboru, pokud* $\lim_{z \to p} f(z) = f(p)$. *“* ([4] str.102)

Tvrzení 16: *„Reálná funkce f se nazývá nespojitá v bodě p, pokud* $\lim_{z \to p} f(z)$ *neexistuje nebo* $\lim_{z \to p} f(z)$ *existuje, ale* $\lim_{z \to p} f(z) \neq f(p)$. *“* ([4] str.102)

Následují příklady:

Příklad [4], 102/1: „Pozorujme funkci $f(x) = \begin{cases} 1\, pro\, x \geq 0 \\ -1\, pro\, x < 0 \end{cases}$. (Viz obr.3)

Řešení: Pro $z \neq 0$ je $f(z) = \frac{|z|}{z}$. Dříve bylo ukázáno, že $\lim_{z \to 0} \frac{|z|}{z}$ neexistuje, proto je *f* nespojitá v bodě 0.“

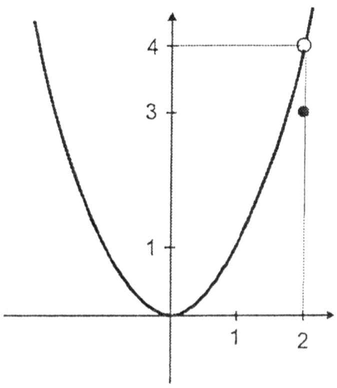


Obr.3. Graf k příkladu [4], 102/1

Příklad [4], 102/2: „Pozorujme funkci $f(x) = \begin{cases} x^2 & pro\, x \neq 2 \\ 3 & pro\, x = 2 \end{cases}$. (Viz obr.4)

Řešení: $\lim_{z \to 2} f(z) = \lim_{z \to 2} z^2 = 4$. Pro funkci f platí, že $f(2) = 3$, tedy $\lim_{z \to 2} f(z) \neq f(2)$.

Proto je *f* v bodě 2 nespojitá.“

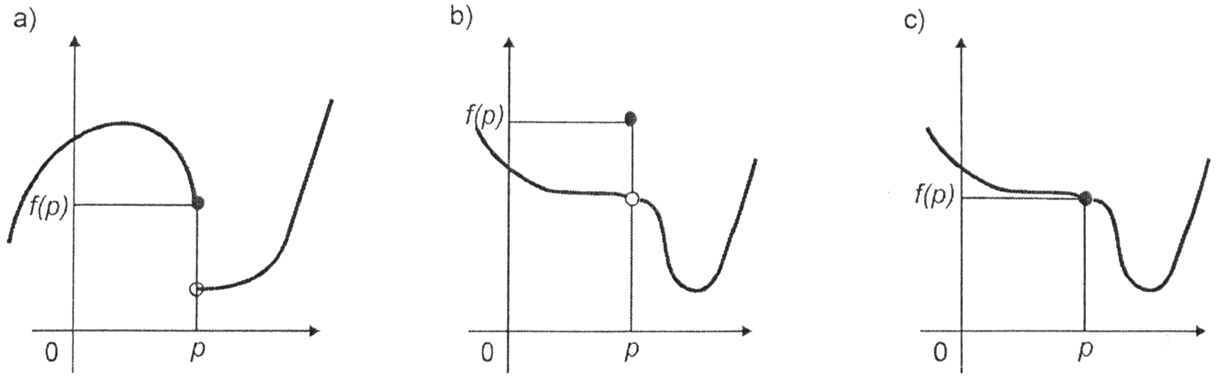


Obr.4. Graf k příkladu [4], 102/2

Definice spojitosti funkce vybudovaná na pojmu okolí bodu (tak, jak ji známe z naší učebnice), je v této učebnici uvedena v rozšiřujícím (nepovinném) textu v tomto znění:

Definice 17: *„Funkce f je spojitá v bodě p, jestliže ke každému okolí* $U(f(p);\varepsilon)$ *existuje okolí* $U(p;\delta)$ *tak, že pro každé* $z \in U(p;\delta)$ *platí* $f(z) \in U(f(p);\varepsilon)$*.“* ([4] str.103)

„Místa skoku“ – to je název kapitolky z učebnice [4], která se věnuje bodům, v nichž funkce není spojitá. Autoři se zde vracejí k řešeným příkladům [4], 102/1, 2 a ukazují obdobné situace na dalších obrázcích:



Obr.5. Ukázky nespojitých funkcí a spojité funkce z učebnice [4]

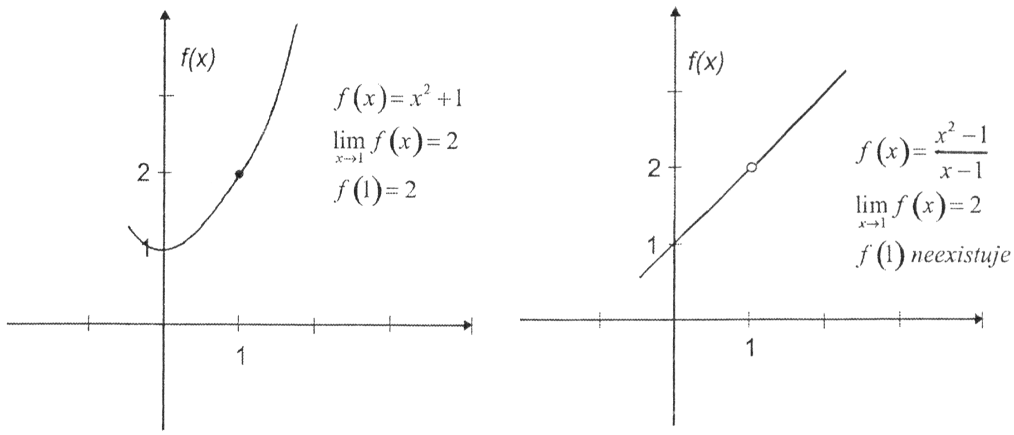
„V Příkladu 1 se vyskytuje místo skoku, ve kterém $\lim_{z \to p} f(z)$ neexistuje a graf na obr.5a) ukazuje další takový případ.

V Příkladu 2 se vyskytuje místo skoku, pro které $\lim_{z \to p} f(z)$ existuje, ale liší se od $f(p)$ (viz graf na obr. 5b)).

Pokud je nějaká funkce spojitá, tedy $\lim_{z \to p} f(z) = f(p)$, pak bod $[p, f(p)]$ patří do grafu funkce f (viz graf na obr.5c)).“ ([4], str.103)

Učebnice nesleduje situace, kdy je funkce „přerušena“ v bodě, který nepatří do definičního oboru funkce.

Nejmenší prostor je pojmu spojitost věnován v učebnici Analysis Grundkurs [11]. V této učebnici se v úvodu kapitoly o spojitosti na grafech čtyř funkcí ukazuje, jak se funkce může chovat v určitém bodě v situaci, kdy bod je i kdy není z jejího definičního oboru (viz obr.6, pro ilustraci uvádím pouze dva z grafů).



Obr.6. Motivace pojmu spojitá funkce z učebnice [11]

Po uvedených grafech a samostatně řešené úloze je uvedena následující definice spojitosti funkce v bodě:

Definice 18: *„Buď f funkce a x_0 reálné číslo. Buď f definována v okolí bodu x_0. Funkce f je spojitá v bodě x_0 právě tehdy, když*

(1) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *existuje a*

(2) $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Pokud není splněno (1) nebo (2), nazývá se funkce f v bodě x_0 nespojitá." ([11], str.92) O situaci v bodě x_0, který nepatří do definiční oboru funkce se říká, že *„funkce v tomto bodě není spojitá"*. ([11], str.92). (Srovnejme s komentářem k definicím 1 a 11.)

Tento rozbor ukazuje, že v analyzovaných zahraničních učebnicích [4] a [11] je spojitost funkce v bodě definována pomocí limity. V naší učebnici [10] se pojem limita funkce probírá po spojitosti funkce, a proto jsou zde tyto pojmy dány do souvislosti v kapitole o limitě, kde je uvedena (i s důkazem) věta:

Věta 19: *„Funkce f je spojitá v bodě a právě tehdy, když* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.*"* ([10], str.41)

V kapitole „Spojitost funkce v intervalu" v [10] se studenti seznamují s definicí spojitosti v bodě zprava a zleva:

Definice 20: *„Funkce f je v bodě a spojitá zprava, jestliže ke každému* $\varepsilon > 0$ *existuje takové* $\delta > 0$*, že nerovnost* $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ *je splněna pro všechna x z intervalu*

$\langle a, a+\delta)$. *Funkce f je v bodě a spojitá zleva, jestliže ke každému* $\varepsilon > 0$ *existuje* $\delta > 0$ *tak, že nerovnost* $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ *je splněna pro všechna x z intervalu* $(a-\delta, a\rangle$. " ([10], str. 30).

Ve vysokoškolské učebnici [38] je spojitost zleva, resp. zprava, definována následujícím způsobem:

Definice 21: *„Říkáme, že funkce f je spojitá v bodě a zprava, resp. zleva, jestliže platí* $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$, *resp.* $\lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$. " ([38], str.116).

Tuto definici zde uvádím, protože se domnívám, že by byla pro středoškolské studenty přístupnější, pokud bychom považovali za nutné na střední škole spojitost zleva a zprava zavádět. Analyzované zahraniční učebnice se spojitostí zprava a zleva nezabývají.

V [10] je také definována spojitost v otevřeném a uzavřeném intervalu:

Definice 22: *„ Funkce je spojitá v otevřeném intervalu* (a, b), *je-li spojitá v každém bodě tohoto intervalu.* " ([10], str. 30)

Definice 23: *„ Funkce je spojitá v uzavřeném intervalu* $\langle a, b\rangle$, *je-li spojitá v* (a, b) *a v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva.* " ([10], str. 30)

Následují důležité věty o spojitých funkcích: věta Bolzanova-Weierstrassova o nabývání mezihodnot a z ní vyplývající věta Bolzanova o nulové hodnotě. Tyto věty jsou doplněny obrázky a příkladem: „Ukažte, že rovnice $x^3 + 3x - 1 = 0$ má kořen z intervalu (0,1)." ([10], str.33) Dále se zde ukazuje význam těchto vět při řešení nerovnic.

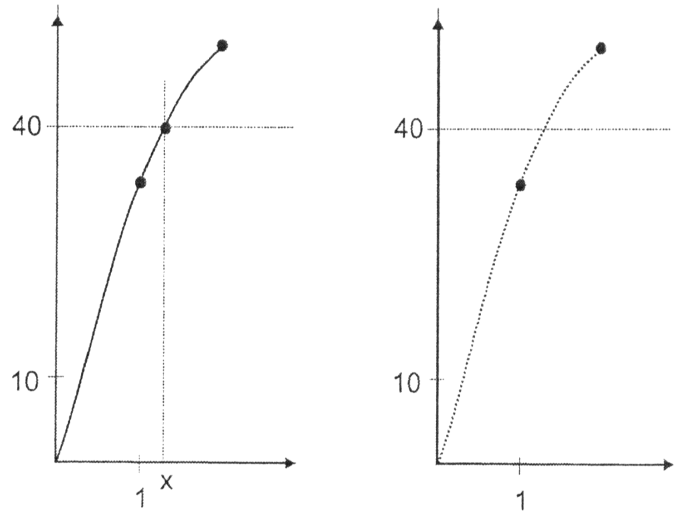
V učebnici [4] se v kapitole „Spojitost funkce v intervalu" autoři opět vracejí k příkladu [4], 102/2. Zde jsme měli funkci *f*, která byla v bodě $p = 2$ nespojitá, ve všech ostatních bodech, tj. $p \in (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$, byla spojitá. Uvádějí definici:

Definice 24: *„ Nechť je f reálnou funkcí reálné proměnné* $f : A \to R$ *a* $M \subseteq A$. *Funkce f se nazývá spojitá v množině M, pokud je spojitá ve všech bodech* $p \in M$. " ([4], str.105)

Následuje vysvětlení: „Pokud je funkce spojitá v intervalu, pak v tomto intervalu nemá žádná místa skoku a můžeme ji v tomto intervalu nakreslit jednou čarou, bez zvedání tužky. Například funkce z příkladu [4], 102/2 je spojitá v intervalech $(-\infty,2)a(2,\infty)$, ale není spojitá v intervalu $(-\infty,\infty)$. Pokud je funkce spojitá v množině M, která není intervalem, pak nemusí být funkce v této množině nakreslená jedním tahem. Příkladem je funkce $y=\frac{1}{x}$, která je spojitá v celém definičním oboru, graf může být ale nakreslen jednou čarou pouze v intervalu $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$. V bodě 0 není funkce definována, zde musí být křivka přerušena. Funkce $y=\frac{1}{x}$ není v bodě 0 ani spojitá, ani nespojitá, protože zde není definována. Podle definice spojitosti může být funkce spojitá pouze v bodě, který patří do jejího definičního oboru.“ ([4], str.105) Znění definice 21, kde se hovoří o spojitosti v množině (nikoliv v intervalu) nepovažuji za vhodné, protože studenti mohou začít pátrat po spojitost funkce, jejímž definičním oborem jsou např. celá čísla. Tím by se mnoha z nich doposud jasná záležitost spojitosti dosti zkomplikovala. O tom, že autoři této učebnice občas výklad zbytečně komplikují, svědčí i následující kapitola s názvem „Věta o nabývání mezihodnot“, která je zahájena následujícím příkladem:

Příklad [4], 105: „Existuje reálné číslo x, pro které platí $x^3-12x^2+45=40$?“

Komentář autorů k příkladu: „Můžeme se pokusit najít řešení „zkoušením“, a tak získat některé hodnoty $f(x)$. Např. $f(0)=0$, $f(1)=34$, $f(2)=50$. Tyto výpočty vedou k domněnce, že v intervalu $(1,2)$ existuje číslo x, pro které $f(x)=40$. Načrtneme graf funkce $f(x)$. Neznáme sice její přesný tvar, známe ale tři body, kterými prochází, a víme, že se jedná o nepřerušovanou čáru, protože $f(x)$ jako polynomická funkce je spojitá.



Obr.7. Grafy k příkladu [4], 105

Autoři zde ukazují, že „čára“, která funkci znázorňuje v grafu, není dokonalým obrazem funkce, protože neukazuje přesně, kterými body funkce prochází, má určitou tloušťku, zatímco body jsou bezrozměrné apod. Proto, vedeme-li z bodu o souřadnicích [0, 40] rovnoběžku s osou x, nemůžeme z obrázku vyčíst, zda má tato přímka s grafem funkce společný jeden nebo více bodů. Možná také prochází „skrz“ graf funkce a nemá s ním žádný společný bod. Můžeme si ale pomoci axiomem o úplnosti reálných čísel a definicí spojité funkce: *„Pokud je funkce f v intervalu* $\langle a,b \rangle$ *spojitá, potom je každé číslo, ležící mezi* $f(a)$ *a* $f(b)$ *hodnotou funkce f v intervalu* $\langle a,b \rangle$*.“* ([4], str.106)

Tento komentář k uvedenému příkladu se mi zdá být nadbytečný, protože uměle vytváří problém tam, kde by jej žádný student nehledal. Po příkladu následuje věta o nabývání mezihodnot (Zwischenwertsatz):

Věta 25: *„ Buď f reálná funkce a q reálné číslo. Nechť f je spojitá v intervalu* $\langle a,b \rangle$ *a* $f(a) \leq q \leq f(b)$ *nebo* $f(a) \geq q \geq f(b)$*. Potom existuje nejméně jedno číslo* $p \in \langle a,b \rangle$*, kde* $f(p) = q$*.“* ([4], str.106)

Věta o „nulové hodnotě“ je zde formulována takto:

Věta 26: (o znaménku spojité funkce) *„Pokud je funkce f v intervalu I spojitá, pak platí: pokud f v I nemá žádný nulový bod, pak buď* $f(x) > 0$ *pro všechna* $x \in I$ *nebo* $f(x) < 0$ *pro všechna* $x \in I$*.“* ([4], str.107)

Následují úlohy na využití uvedených vět.

Úlohy k procvičování ukazují, které aspekty spojitosti, respektive nespojitosti, považují autoři jednotlivých učebnic za podstatné, a i zde je vidět rozdílnost jednotlivých přístupů k látce. Česká učebnice [10] se soustřeďuje na použití definice spojitosti a využití vět o spojitých funkcích, rakouské učebnice se věnují grafům funkcí.

V [10] nalezneme tyto úlohy k procvičování:

Úloha [10], 36/2.6: „Na základě definice spojitosti funkce v bodě a dokažte:

a) lineární funkce $f: y = 5x - 1$ je spojitá v bodě 2,

b) funkce nepřímá úměrnost $f: y = \frac{1}{x}$ je spojitá v intervalu (0, 7)."

Úloha [10], 36/2.7: „Dokažte, že funkce $\cos x$ je spojitá v každém bodě."

Úloha [10], 36/2.8: „Diskutujte spojitost funkce f: $y = \operatorname{sgn} x$ v bodě 0."

Úloha [10], 36/2.9: „Dokažte, že rovnice $x + e^x = 0$ má alespoň jeden kořen v intervalu (-1, 0)."

V dalších úlohách se využívá shora uvedených vět k výpočtu kořenů rovnic.

Úlohy z učebnice [29] se týkají především funkcí, které jsou v určitém bodě nespojité. Podívejme se na ukázky:

Úloha [37], 192/981: „Ukažte pomocí náčrtku místa nespojitosti následujících funkcí a přibližnou hodnotu „skoku" v místě nespojitosti."

$a)\, f(x) = \operatorname{sgn} x^2, D = R$

$b)\, f(x) = x \cdot \operatorname{sgn}(x-2), D = R$

$c)\, f(x) = \left[\frac{1}{4}x\right] + 1, D = \{x \in R, -3 \le x \le 3\}$

$d)\, f(x) = \left[\frac{1}{2}x\right], D = \{x \in R, -3 \le x \le 3\}$

Úloha [37], 192/981: „Načrtněte dvě funkce, které mají v bodě a) $x = -2$, b) $x = 2$,….mezeru. Uvědomte si, že mohou být různé typy mezer."

Úloha [37], 193/985: „Při výpočtu daně z příjmu se nejprve od ročního příjmu odečtou určité částky (sociální pojištění, náklady na reklamu, výdaje,…). Tak získáme základ daně. Sazba daně se počítá podle následující tabulky:

Základ daně (v šilincích)	Sazba daně %
do 50 000	10
Přes 50 000 do 150 000	22
Přes 150 000 do 300 000	32
Přes 300 000 do 700 000	42
Přes 700 000	50

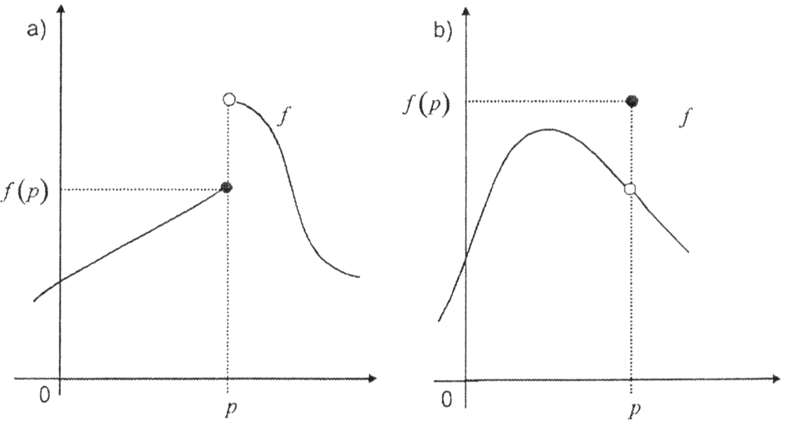
Doplňte tabulku pro daň $F(x)$ při základu daně x:

Základ daně (v šilincích)	Daň
$x \leq 50000$	$F(x) = 0{,}10x$
$50000 < x \leq 150000$	$F(x) = 50000 \cdot 0{,}10 + (x - 50000) \cdot 0{,}22 = 0{,}22x - 6000$
$150000 < x \leq 300000$	$F(x) =$

Vysvětlete uvedený vztah a udejte pro zbývající tři úrovně příjmů odpovídající vztahy. Načrtněte graf a diskutujte jej z hlediska spojitosti."

V učebnici [4] se používá definice spojitosti, ovšem ne v důkazových úlohách, ale ve spojení s grafem:

Úloha [4], 104/3.35: „Na obrázku 8 jsou sestrojeny grafy funkcí $f : A \to R$, které jsou v bodě p nespojité. Načrtněte okolí $U(f(p);\varepsilon)$ pro které platí: V každém okolí $U(p;\delta)$ existuje bod $z \in A$, pro který platí $f(z) \notin U(f(p);\varepsilon)$"



Obr.8. Grafy k úloze [4], 104/3.35

5.3 Zavedení pojmu limita funkce v gymnaziálních učebnicích

S limitou se čeští gymnaziální studenti setkají poprvé v tématu „Posloupnosti a řady“ ([26]). Je však v kompetenci učitele, zda zařadí limitu posloupnosti do svého výkladu. Pojmy konvergentní posloupnost a limita posloupnosti jsou v [26] definovány takto:

Definice 27: *„Říkáme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, právě když existuje číslo $a \in R$ takové, že platí: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in N$ tak, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ je $|a_n - a| < \varepsilon$. Číslo a se nazývá limita posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. “* ([26], str.79)

Definice 28: *„Číslo a se nazývá limita posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, právě když ke každému kladnému číslu ε existuje $n_0 \in N$ tak, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$.“* ([26], str.80)

V učebnici [10] studenti v úvodu kapitoly „Limita funkce v bodě“ zkoumají chování funkce $f: y = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$, kde $x \in \left(-\frac{1}{2}\pi, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$ v okolí bodu 0. ([10], str. 39) Studenti zde mají sestrojen graf funkce a tabulku, která ukazuje hodnoty $f(x)$ pro x blízká 0. Je zde vidět, že čím blíže k nule je x, tím blíže je $f(x)$ k číslu 1. Po této úloze je vyslovena definice limity:

Definice 29: *„Funkce f má v bodě a limitu L, jestliže k libovolně zvolenému okolí bodu L existuje okolí bodu a tak, že pro všechna $x \neq a$ z tohoto okolí náleží hodnoty $f(x)$ zvolenému okolí bodu L.“* ([10], str.39)

V porovnání s rakouskými učebnicemi, o nichž bude řeč dále, je v této učebnici velice málo grafů a úloh, na kterých by si studenti pochopení pojmu limita funkce ověřili.

Největší rozdíl mezi českou učebnicí a učebnicemi zahraničními je v exaktnosti výkladu. Naše gymnaziální učebnice výklad limity zřejmě chápe jako přípravu pro vysokoškolské studium a definuje pojmy vlastní a nevlastní limita, limita v bodě zleva a limita v bodě zprava. V žádné ze čtyř zkoumaných zahraničních učebnic jsem v kapitole o limitách tyto pojmy nenašla.

V učebnici Mathematik 7 ([37]) je limita stručně vyložena po ještě stručnějším seznámení se spojitostí (viz kapitola 5.2), avšak opět za použití velkého množství grafů. Řeší se zde pouze jednoduché příklady. Oba pojmy (limita a spojitost funkce) jsou v [37] exaktně definovány až v závěru tématu „Diferenciální počet“.

Motivační příklad ke kapitole „Limita funkce“ v učebnici [37]:

Příklad [37], 194/987: „Funkce $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ není v bodě 2 definována. Má v tomto bodě „mezeru“. Načrtněte graf této funkce stejně jako dvou funkcí vytvořených rozšířením jejího definičního oboru:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & pro\, x\neq 2\\ 4 & pro\, x=2\end{cases} \quad \text{a} \quad h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & pro\, x\neq 2\\ 3 & pro\, x=2\end{cases}.$$

Která z těchto funkcí je spojitá a která nespojitá? Proč je nespojitá?

Vysvětlení: Funkce *g* je spojitým doplněním (rozšířením) funkce *f* v bodě 2. Hodnotu 4 nazýváme limitou funkce *f* v bodě 2.“

Limita je zde definována následujícím způsobem:

Definice 30: *„Číslo a se nazývá limita funkce f v bodě p, pokud funkce f_0, pro kterou platí*

$$f_0 = \begin{cases} f(x) & pro\ x \neq p \\ a & pro\ x = p \end{cases}$$ *je spojitá v bodě p. Píšeme* $\lim_{x \to p} f(x) = a$.

(f_0 se nazývá spojité rozšíření funkce f. Můžeme ukázat, že existuje nejvýše jedna hodnota a taková, aby funkce f_0 byla v bodě p spojitá.)" ([37], str.194)

Následuje několik úloh s grafy funkcí, které jsou nespojité vždy v jednom bodě, ale mají v daném bodě limitu. Úlohy ukazují rozdíl mezi funkcí a jejím spojitým rozšířením. Je zde také uvedena věta o souvislosti limity a spojitosti funkce v bodě.

Po větách o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí následuje sedm úloh na výpočty limit.

Situaci, kdy v daném bodě neexistuje limita, zde ukazuje následující příklad:

Příklad [37], 197/1000: „Zkusíme vypočítat $\lim_{x \to 2} \frac{x^2}{x-2}$.

Řešení: $\lim_{x \to 2} \frac{x^2}{x-2} = \frac{\lim_{x \to 2} x^2}{\lim_{x \to 2}(x-2)} = \frac{4}{0}$. Zde musí být chyba! Krok

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2}{x-2} = \frac{\lim_{x \to 2} x^2}{\lim_{x \to 2}(x-2)} = \frac{4}{0}$ je nepřípustný, protože v podílu limit musí být limita ve jmenovateli různá od nuly. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2}{x-2}$ neexistuje."

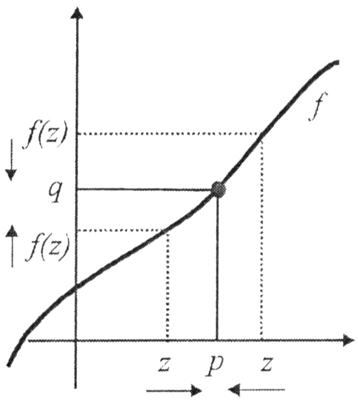
Podle mého názoru je škoda, že u této úlohy, na rozdíl od úloh z úvodu kapitoly, není zobrazen graf, a není zde ani pokyn pro studenty, aby si tento graf načrtli. Obrázek by jasně ukázal, jak se funkce v bodě 2 chová a proč zde limita neexistuje.

V závěru celého tématu „Diferenciální počet" ve [37], kde je látka vyložena exaktněji, je uvedena Cauchyho definice limity a zmíněna „podobnost" definic pojmů spojitost a limita.

V učebnici [4] (Mathematik Oberstufe 3) je na rozdíl od výše uvedené učebnice [37] výkladu limity věnováno mnoho prostoru a je velice důkladný. Půda pro definici limity je připravována v několika kapitolách. Studentům je ukázána nezbytnost definování pojmu limita, protože bez ní není možno řešit mnoho úloh z diferenciálního počtu. Zvláštností této učebnice je, že kapitoly věnované definici limity následují až po výkladu derivace, kde se však již symbol $\lim_{z \to p} f(z) = q$ používá. Důvod tohoto uspořádání mi není zřejmý a nemyslím si, že by přispěl k lepšímu pochopení látky.

Před vyslovením definice limity je na limitu nahlíženo ze dvou pohledů.

Pohled první popisuje pojem limita pomocí vzdáleností. Ukazuje se zde, jak je možno pomocí známých matematických pojmů popsat, že $f(z)$ se neomezeně blíží číslu q, tedy že $\lim_{z \to p} f(z) = q$ (viz obr.9).



Obr.9. Graf k výkladu pojmu limita z učebnice [4]

„Jedna možnost je tato: Rozdíl (vzdálenost) mezi čísly $f(z)$ a q tedy $|f(z) - q|$ bude libovolně malý, to znamená menší než libovolné číslo $\varepsilon > 0$, pokud je z dostatečně blízko p, tedy vzdálenost $|z - p|$ je dostatečně malá.

Jinak vyjádřeno: Pro každé kladné číslo ε můžeme $|z - p|$ zvolit tak malé, že $|f(z) - q| < \varepsilon$." ([4], str.89)

Pohled druhý popisuje pojem limita pomocí okolí bodu. (Pojem okolí bodu byl probrán již v dřívějších ročnících.) Vztah $\lim_{z \to p} f(z) = q$ můžeme popsat takto:

„Ke každému okolí $U(q;\varepsilon)$ existuje okolí $U(p;\delta)$ tak, že pro každé $z \in U(p;\delta)$ platí $f(z) \in U(q;\varepsilon)$." ([4], str.90) Tento výklad pojmu limita je ilustrován na několika příkladech včetně obrázků:

Příklad [4], 90/3.03: „Je dáno $f(z) = 2z - 7$.

a) Jakou hodnotu má $\lim_{z \to 5} f(z)$?

b) Ukažte výpočtem: ke každému okolí $U(3;\varepsilon)$ existuje okolí $U(5;\delta)$ takové, že pro všechna $z \in U(5;\delta)$ platí: $f(z) \in U(3;\varepsilon)$.

c) Načrtněte objasňující obrázek.

d) Jak blízko musí být z k číslu 5, aby vzdálenost mezi $f(z)$ a 3 byla menší než 0,01?"

Následují úlohy s grafy, kde k danému okolí bodu q má být doplněno odpovídající okolí bodu p.

Až po těchto dvou velice podrobných kapitolkách je uvedena exaktní definice limity. Nejprve je vysvětlen pojem „hromadný bod": „*...Bod p nemusí patřit do definičního oboru A funkce f, musíme ale při definování* $\lim_{z \to p} f(z) = q$ *předpokládat, že se k tomuto bodu můžeme hodnotami* $z \in A,\ z \neq p$ *neomezeně přiblížit. K tomu je nutné, aby v každém okolí bodu p ležely body definičního oboru A. Takový bod p nazýváme hromadným bodem množiny A...* ([4], str.92)

Definice 31: „*Buď* $f : A \to R$ *reálná funkce a p hromadný bod množiny A. Číslo q se nazývá limita funkce f v bodě p, psáno* $\lim_{z \to p} f(z) = q$, *pokud platí následující:*

Ke každému okolí $U(q;\varepsilon)$ *existuje okolí* $U(p;\delta)$ *tak, že pro všechna* $z \in U(p;\delta)$ *platí* $f(z) \in U(q;\varepsilon)$. *(Přitom se předpokládá, že* $z \in A$ *a* $z \neq p$*)"* ([4], str.92)

Definice je využita v následujícím příkladu:

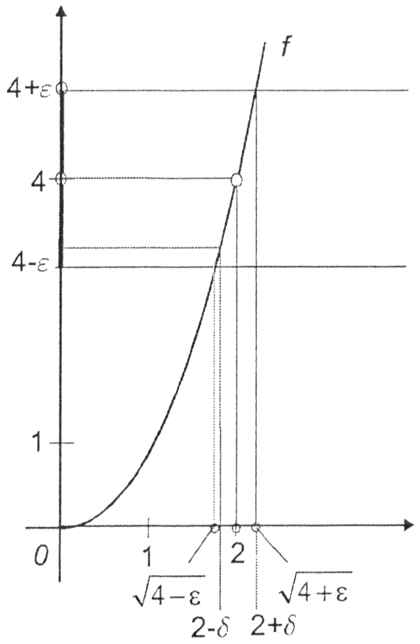
Příklad [4], 95/3.14: „Dokažte s použitím definice limity, že $\lim_{z \to 2} z^2 = 4$. Načrtněte odpovídající graf.

Řešení: Musíme ukázat, že ke každému okolí $U(4;\varepsilon)$ existuje okolí $U(2;\delta)$, tak, že pro všechna $z \in U(2;\delta)$ platí $z^2 \in U(4;\varepsilon)$.

Buď ε kladné číslo. Pak platí:

$z^2 \in U(4;\varepsilon) \Leftrightarrow 4-\varepsilon < z^2 < 4+\varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{4-\varepsilon} < z < \sqrt{4+\varepsilon}$, pokud $\varepsilon \leq 4$ *a* $z > 0$. Čísla $\sqrt{4-\varepsilon}$ a $\sqrt{4+\varepsilon}$ jsou od čísla 2 různě vzdálena, takže neohraničují žádné okolí typu $U(2;\delta)$. Protože ale $\sqrt{4-\varepsilon} < 2 < \sqrt{4+\varepsilon}$, existuje okolí $U(2;\delta)$, které leží v intervalu

$\left\langle \sqrt{4-\varepsilon}; \sqrt{4+\varepsilon} \right\rangle$. Pro všechna $z \in U(2;\delta)$ platí $\sqrt{4-\varepsilon} < z < \sqrt{4+\varepsilon}$. Proto též pro všechna $z \in U(2;\delta)$ platí: $z^2 \in U(4;\varepsilon)$."



Obr.10. Graf k příkladu [4], 95/3.14

Podle mého názoru je tento příklad ukázkou další zbytečné komplikace výkladu. (Viz příklad [4], 105 z kapitoly 5.2.)

5.4 Zavedení pojmu derivace funkce v gymnaziálních učebnicích

Opět začnu nejprve českou učebnicí [10]. Zde se v závěru kapitoly „Užití limity funkce" studenti seznamují se způsobem nalezení tečny ke grafu funkce v libovolném bodě. Hledání tečny grafu funkce v bodě vyústí v tuto větu:

Věta 32: *„Je-li křivka grafem funkce $y = f(x)$ a existuje-li v bodě x_0 vlastní limita*

$$k_T = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$ *pak tečna křivky v bodě*

$T[x_0, y_0]$ je přímka o rovnici $y - y_0 = k_T(x - x_0)$." ([10], str.79)

Tento způsob nalezení tečny ke grafu funkce je zmíněn úvodu následující kapitoly „Derivace funkce v bodě". Následuje motivační úloha na výpočet okamžité rychlosti pohybu hmotného bodu. Od průměrné rychlosti se zmenšováním časového intervalu dostanou studenti k pojmu okamžitá rychlost a jeho definici.

Definice 33: *„Okamžitou rychlost v čase t_0 budeme definovat jako limitu* $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}=\lim\limits_{t\to t_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$.“ ([10], str.83)

Studenti mají možnost si tento vztah ověřit na výpočtu okamžité rychlosti rovnoměrně zrychleného pohybu, u něhož je dráha v závislosti na čase dána vztahem $s(t)=\frac{1}{2}at^2$.

Autoři knihy pak studenty upozorní, že v obou případech se pracovalo s limitou $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}$, a proto si tato limita zaslouží svůj vlastní název. Následuje definice derivace:

Definice 34: *„Mějme funkci f definovanou v jistém okolí bodu x_0 Existuje-li* $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, *nazýváme ji derivací funkce f v bodě x_0.“* ([10],str.85)

Studenti jsou seznámeni s dalšími možnostmi zápisu této limity a se symbolem derivace funkce v bodě x_0 : $f'(x_0)$. Také je poukázáno na totožnost směrnice tečny ke grafu funkce ze závěru minulé kapitoly s právě definovanou derivací funkce v bodě a na možnost psát rovnici tečny ke grafu funkce v bodě x_0 způsobem $y-y_0=f'(x)(x-x_0)$.

V řešených příkladech je ukázán výpočet derivace funkcí $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$, $y=\sqrt[3]{x}$ pomocí definice 34. Na posledních dvou funkcích je vysvětlen pojem vlastní a nevlastní derivace (v bodě x_0=0). V závěru úvodní kapitoly jsou definovány pojmy derivace v bodě zleva, zprava a derivace funkce v intervalu (otevřeném i uzavřeném).

V následující kapitole „Derivace elementárních funkcí“ jsou na základě definice 34 vypočítány derivace elementárních funkcí. Jsou zde uvedeny věty o derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí (některé s důkazem) a výpočet derivace složené funkce.

V rakouské učebnici [4] (Mathematik Oberstufe 3) je v porovnání s výše uvedenou českou učebnicí pojem derivace vyložen po mnohem delší přípravě. Jak již bylo řečeno v kapitole 5.3, jsou v této učebnici kapitoly o derivaci zařazeny před kapitolami o limitě. Přesto se při výkladu derivace symbol limity používá. Autoři zřejmě spoléhají na to, že studenti symbol a význam limity znají z výkladu o posloupnostech a řadách.

V kapitole s názvem „Základní pojmy diferenciálního počtu“ jsou v [4] studenti nejprve seznámeni s pojmem „diferenční kvocient„ neboli „střední míra změny„ (v originále „Differenzenquotient“ a „mittlere Anderungsrate“). Motivační řešený příklad se týká změn teploty vzduchu během dne:

Příklad [4], 5/1.01: „a) V uvedené tabulce jsou různým časovým údajům přiřazeny naměřené teploty vzduchu v jednom určitém místě. Vypočítejte změnu teploty v časových intervalech $\langle 8;14\rangle$, $\langle 12;18\rangle$, $\langle 14;20\rangle$.

Co znamená kladné, co záporné znaménko změny teploty?

b) Popište, jak se vypočítá změna teploty v intervalu $\langle a,b\rangle$.“

Čas	Teplota (°C)
8	9
10	10
12	13
14	17
16	14
18	13
20	11

K tomuto příkladu se vztahuje i příklad následující:

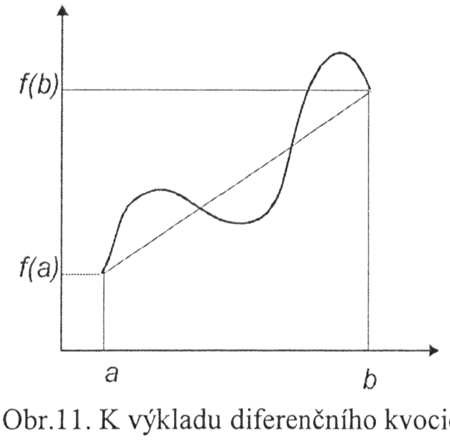
Příklad [4], 5/1.02: „a) Udejte změny teploty v intervalech $\langle 8;12\rangle$, $\langle 12;14\rangle$, $\langle 10;16\rangle$. Ve kterém z těchto intervalů roste teplota nejrychleji?

b) Udejte obecně rychlost změny teploty v intervalu $\langle a,b\rangle$.“

Po tomto úvodu následuje definice, ke které vlastně došli studenti odpovědí na otázku b) v příkladu [4], 5/1.02:

Definice 35: *„Buď $f: A \to R$ reálná funkce, $a, b \in A$, $a \neq b$. Pak se $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ nazývá diferenčním kvocientem nebo střední mírou změny funkce f v intervalu $\langle a,b\rangle$ nebo $\langle b,a\rangle$.“* ([4], str.6)

Studentům je vysvětleno a na obrázcích ukázáno, že znaménko diferenčního kvocientu určuje, jak se funkce celkově změní v daném intervalu, ovšem neznamená to, že v daném intervalu je monotónní (viz obr.11):



Obr.11. K výkladu diferenčního kvocientu z učebnice [4]

V osmi úlohách se studenti učí vypočítat diferenční kvocient různých funkcí v konkrétních intervalech i v intervalech daných obecně, např. $\langle x, x+h \rangle$, $\langle c-h, c \rangle$, $\langle t_0, t_0+t \rangle$.

V závěru kapitoly jsou studenti seznámeni s významem diferenčního kvocientu jako směrnice přímky:

Tvrzení 36: *„Pokud označíme písmenem m hodnotu diferenčního kvocientu*

$$m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \text{ pak platí: } f(b)-f(a) = m \cdot (b-a).$$

Hodnota diferenčního kvocientu tedy udává faktor, kterým násobíme změnu argumentu, abychom dostali změnu hodnoty funkce." ([4], str.8)

Následující kapitola s názvem „Rychlost" velice podrobně postupuje od průměrné rychlosti k rychlosti okamžité. Před definicí okamžité rychlosti je zde uvedeno:

Tvrzení 37: *„Rychlost v čase t je limitou (lat: limes) průměrné rychlosti* $\bar{v}(t,z)$ *pro z jdoucí k t. Píšeme* $v(t) = \lim_{z \to t} \bar{v}(t,z)$ *"* ([4], str.13)

Od této chvíle se zde symbol limity používá. Výklad je zakončen definicí okamžité rychlosti shodnou s definicí 33.

Další část výkladu se týká funkcí, které popisují rychlost změny různých veličin v závislosti na čase.

Příklad [4], 14/1.23: „Z válcového zásobníku vytéká voda. V každém okamžiku je množství vody v zásobníku dáno funkcí $V(t) = (10-t)^2$ (t v sekundách).

a) V jakém čase t bude zásobník prázdný?

b) Vypočítejte úbytek množství vody v časových intervalech $\langle 0;1\rangle$, $\langle 0;2\rangle$, $\langle 2;3\rangle$, $\langle 1;4\rangle$. Ve kterém z těchto intervalů je úbytek objemu největší?

c) Definujte pojem „střední rychlost úbytku objemu v časovém intervalu“.

d) Ve kterém z intervalů daných v b) ubývá objem nejrychleji?

Řešení c): Analogicky k pojmu průměrná rychlost označíme kvocient $\dfrac{V(t_2)-V(t_1)}{t_2-t_1}$ jako střední úbytek objemu v časovém intervalu $\langle t_1,t_2\rangle$ nebo $\langle t_2,t_1\rangle$.“

Příklad [4], 15/1.24: (pokračování příkladu 1.23)

„a) Zjistěte, zda se střední úbytek objemu v intervalu $\langle t,z\rangle$ neomezeně blíží určité limitě, pokud se z neomezeně blíží číslu t.

b) Definujte pojem „rychlost ubývání objemu v čase t“.

c) Jak rychle ubývá objem v čase 1, 2, 3, 4s?

d) V jakém čase ubývá objem nejrychleji?

Řešení: a) Budeme postupovat jako u okamžité rychlosti v čase t. Nejprve vyjádříme střední rychlost ubývání objemu v intervalu $\langle t,z\rangle$ (případně $\langle z,t\rangle$):

$$\frac{V(z)-V(t)}{z-t}=\frac{(10-z)^2-(10-t)^2}{z-t}=\frac{z^2-t^2-20z+20t}{z-t}=\frac{(z-t)(z+t)-20(z-t)}{z-t}=$$

$$=z+t-20$$

Zjišťujeme: pokud se z blíží neomezeně k číslu t, blíží se $z+t$ neomezeně číslu $t+t=2t$ a $z+t-20$ se neomezeně blíží číslu $2t-20$. Proto platí: $\lim\limits_{z\to t}(z+t-20)=2t-20$

b) Limitu z úlohy a) nazýváme rychlostí úbytku objemu v čase t a označíme ji V´(t). Definujeme tedy: $V'(t)=\lim\limits_{z\to t}\dfrac{V(z)-V(t)}{z-t}$

c) Pro $t\in\langle 0;10\rangle$ je hodnota $2t-20$ největší, pokud $t=0$. Proto objem ubývá nejrychleji v čase 0.“

Příklady [4], 15/1.23 a 1.24 uvádím v doslovném překladu proto, aby bylo vidět, jak podrobně jsou pojmy v této učebnici budovány. Studenti se zde s derivováním nejprve setkávají v praktických úlohách a až po mnoha stránkách výkladu dojdou k definici derivace a k výpočtu derivací elementárních funkcí. Nevím však, kolik vyučovacích hodin je tomuto výkladu skutečně věnováno a zda je i výklad učitele pojímán takto podrobně.

Po několika úlohách (řešených i neřešených) podobného typu, jako jsou příklady [4], 15/1.23 a 1.24, je uvedena definice, avšak ještě se nepoužívá pojem derivace (Ableitung), ale diferenciální kvocient (Differentialquotient):

Definice 38: *„Buď f reálná funkce. Limita* $f'(x) = \lim\limits_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$ *se nazývá diferenciálním kvocientem funkce f v bodě x nebo „míra změny funkce f v bodě x“.* ([4], str.17)

Následující úlohy jsou zaměřeny na výpočet f' obecně v bodě x i v konkrétních bodech.

Příklad [4], 18/1.30: „Je dána funkce $f(x) = x^2 + x - 1$. Udejte tvar diferenciálního kvocientu funkce $f'(x)$ a vypočítejte $f'(3)$ a $f'(-5)$.“

Po příkladech (zaměřených na derivaci jako míru změny) následuje kapitola, která seznamuje studenty s derivací ve smyslu směrnice tečny ke grafu. Na řešeném příkladu je zde nejprve ukázáno, že derivací lineární funkce je funkce konstantní. Potom je podrobně (včetně obrázků) vysvětlen pojem tečna funkce a přichází definice tečny:

Definice 39: *„Buď f reálná funkce a $f'(x)$ její derivace v bodě x. Přímka vedená bodem $X[x, f(x)]$ se směrnicí $f'(x)$ je označována jako tečna grafu v bodě X. Směrnice $f'(x)$ této tečny se nazývá také „směrnice funkce f v bodě x“.“* ([4], str.23)

Následuje rozbor souvislosti znaménka derivace s chováním funkce v daném bodě. Souvislost mezi chováním funkce a znaménkem derivace v daném bodě je zde studentům popsána (neobjevují ji samostatně), tato tvrzení jsou doplněna obrázky, důkazy zde uvedeny nejsou.

Ačkoliv jsem v předcházejícím odstavci pro stručnost používala pojem „derivace“, v učebnici [4] se ve skutečnosti stále hovoří o „diferenciálním kvocientu“. Až v následující kapitole „Derivování polynomických funkcí“ („Differentiation von Polynomfunktionen“) je uvedeno:

Tvrzení 40: „*Buď f reálná funkce; předpisem* $f':x \to f'(x)$ *je pak opět definována funkce; např.* $f(x)=x^2$, $f'(x)=2x$. f' *nazýváme derivací funkce f....*" ([4], str.27)

Autoři tedy rozlišují mezi derivací funkce v bodě, tehdy hovoří o diferenciálním kvocientu, a derivací jako funkcí, pak hovoří prostě o derivaci. Podle mého názoru tím ve snaze po exaktnosti a souladu s historickým vývojem (o kterém se také zmiňují) látku zbytečně komplikují.

V této učebnici se nepracuje s derivacemi exponenciálních a logaritmických funkcí.

Snad ještě podrobnější výklad pojmu derivace najdeme v učebnici [29] (Lehrbuch der Mathematik 7). Zde je téma zahájeno historickou poznámkou o Newtonovi a Leibnizovi a o dvou hlavních problémech diferenciálního počtu – problému tečen (Leibniz) a problému okamžité rychlosti (Newton). U problému tečen jde o nalezení rovnice přímky, která v daném bodě nejlépe aproximuje danou funkci. Problém okamžité rychlosti spočívá v aproximaci nerovnoměrného pohybu v daném časovém okamžiku rovnoměrným pohybem. Jsou zde uvedeny i další fyzikální problémy, např. výpočet okamžité hodnoty elektrického napětí apod. Před zavedením pojmu derivace jsou dvě kapitoly věnovány zmíněným problémům.

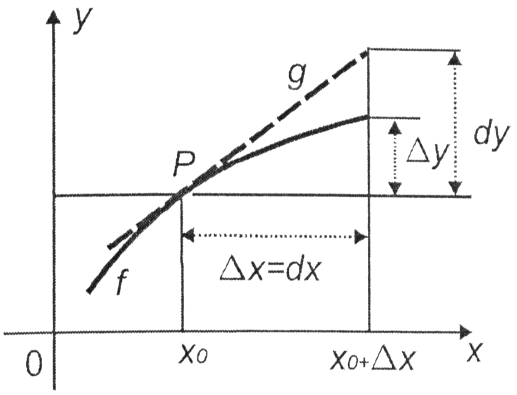
Po uvedené zmínce z historie a zopakování pojmu spojitost a limita funkce následuje kapitola „Problém tečen", ve které autoři (s využitím obrázku) určují směrnici sečny funkce a následně směrnici tečny funkce jako limitu směrnic sečen. Pomocí této limity je definována tečna:

Definice 41: „*Buď f reálná funkce. Tečnou grafu funkce f v bodě* $P(x_0, f(x_0))$ *označujeme takovou přímku procházející bodem P, pro jejíž směrnici* $k = f'(x)$ *platí*

$$k = tg\alpha = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\text{"} \quad \text{([29], str.46)}$$

Tato učebnice jako jediná z analyzovaných přímo v definici uvádí, že daná limita je rovna tangentě úhlu, který tečna svírá s osou x.

Autoři v této kapitole dále hovoří o lineární aproximaci funkce v bodě x_0 její tečnou. Proto rozlišují diferenci Δy a diferenciál dy, rozdíl mezi nimi ilustruje obrázek 12:



Obr.12. Ilustrace rozdílu mezi diferencí a diferenciálem z učebnice [29]

Definice 42: *„ Δy se nazývá diference, dy se nazývá diferenciál funkce f v bodě x_0.*

Podíl $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ *se nazývá diferenční kvocient funkce f v bodě x_0,*

podíl $\dfrac{dy}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$ *se nazývá diferenciální kvocient funkce f v x_0.“* ([29], str.47)

Následují úlohy na výpočet směrnice a určení rovnice tečny ke grafu funkce v daném bodě.

Kapitola „Problém okamžité rychlosti“ v učebnici [29] vychází z grafu závislosti dráhy na čase pro nerovnoměrný pohyb. Po krátkém výkladu se dospěje k definici okamžité rychlosti jako limity průměrné rychlosti pro $\Delta t\to 0$. Následují úlohy na výpočet průměrné a okamžité rychlosti. Například:

Úloha [29], 54/178: „Špatně zabrzděný vůz sjíždí po 10m dlouhé rampě, která je nakloněna pod úhlem 15° a míří bez brzdění k zavřeným garážovým vratům. (Na začátku byl vůz v klidu.) Má posádka počítat se zraněním, jestliže a) do 7km/h nehrozí, b) od 25 km/h jistě hrozí zranění? (Dráha pohybu po nakloněné rovině je dána vztahem $s=g/2\cdot t^2\cdot\sin\alpha$.)“

Až po těchto dvou úvodních kapitolách, ve kterých studenti vlastně derivují jednoduché funkce, aniž by používali pojem derivace, následuje kapitola „Funkce derivace“ („Die Ableitungsfunktion“). Zde je hned v úvodu uvedena definice:

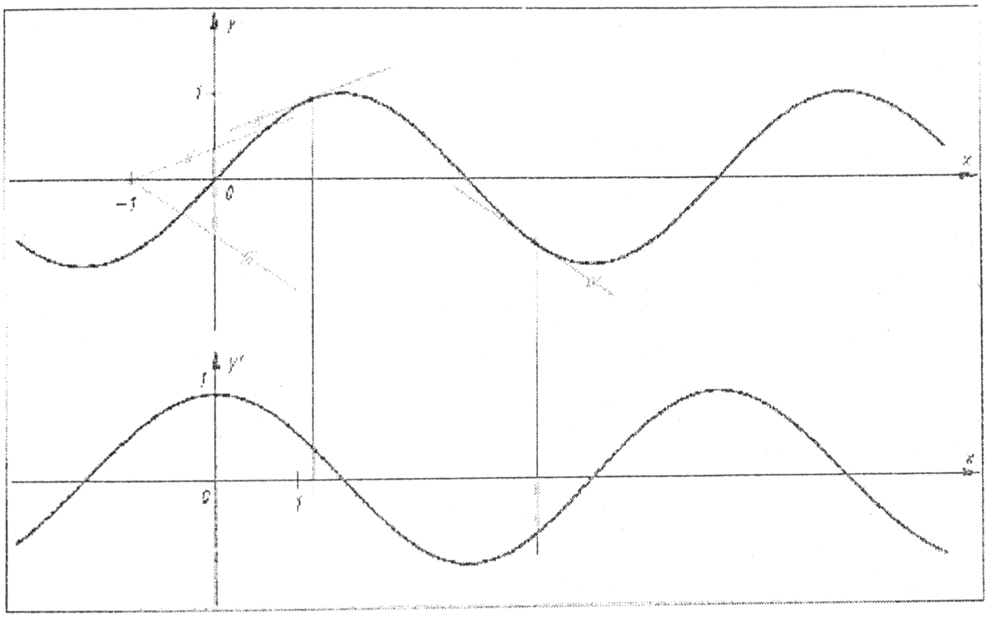
Definice 43: *„Buď dána reálná funkce f: $y=f(x)$. Pokud v každém bodě x_0 definičního oboru funkce f existuje diferenciální kvocient $\dfrac{dy}{dx}$, pak říkáme, že funkce f je* *diferencovatelná. Funkce f': $y = f'(x)$ se nazývá derivací funkce f a $f'(x_0)$ nazýváme derivací funkce f v bodě x_0.“* ([29], str.55)

Autoři vysvětlují, že přibližnou představu o funkci f' můžeme získat výpočtem hodnot diferenciálního kvocientu v mnoha bodech definičního oboru nebo grafickou cestou. Takové vyšetřování grafu f' nazývají „grafické derivování“.

Grafickému derivování je věnován odstavec, kde je uveden příklad:

Příklad [29], 55/C: „Určete derivaci funkce $y = \sin x$ grafickým derivováním. Vysvětlete postup v příkladu. Kterou funkci obdržíme jako výsledek?“

Řešení:



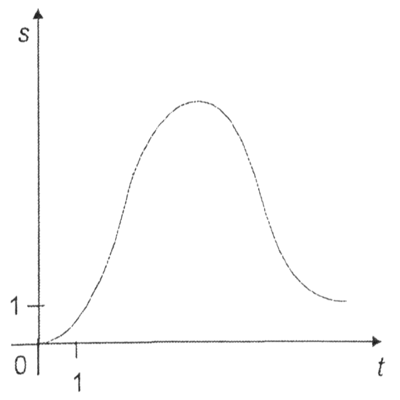
Obr.13. Grafické derivování funkce sinus v učebnici [29]

Po tomto příkladu následuje ukázka početního derivování mocninné funkce.

V úlohách k této kapitole mají studenti za úkol derivovat jak graficky, tak početně. To je podle mého názoru velice užitečné, protože si vytvoří vizuální představu derivace a budou pak mít lepší představu o tom, co počítají.

Pro ilustraci uvádím jednu z úloh:

Úloha [29], 57/190: „Urči z grafu funkce na obrázku 14 její derivaci s využitím grafického derivování. Interpretuj derivaci jako funkci závislosti rychlosti na čase a popiš pohyb ve formě příběhu.“



Obr.14. Graf k úloze [29], 57/190

Pravidla pro derivování součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí jsou zde všechna dokázána. Zaujalo mě jednoduché odvození pravidla pro derivaci podílu:

$f=\dfrac{f_1}{f_2} \Rightarrow f_1=f\cdot f_2 \Rightarrow f_1'=f'\cdot f_2+f\cdot f_2'$, odtud po dosazení za f $\left(f=\dfrac{f_1}{f_2}\right)$ vyjádříme f' a dostáváme známý vztah $f'=\dfrac{f_1'\cdot f_2-f_1\cdot f_2'}{f_2^2}$. ([29], str. 62) Toto odvození se mi líbí především proto, že studenti nemají pocit, že vztah „spadl z nebe" a jsou schopni si jej sami odvodit, jestliže jej zapomenou.

Také mě velice zaujalo zavedení pravidla pro derivování složené funkce. Nejprve je zde vyřešen následující příklad:

Příklad [29], 63/K: „Derivujte a) $y=(\sin x)^2$, b) $y=(\sin x)^3$.

Řešení: Nemůžeme použít pravidlo pro derivování mocninné funkce, protože základem mocniny zde není x, ale $\sin x$. Proto musíme použít pravidlo pro derivování součinu

a) $y'=(\sin x\cdot\sin x)'=\ldots=2\cdot\sin x\cdot\cos x$

b) $y'=(\sin x\cdot\sin x\cdot\sin x)'=\ldots=3\cdot\sin x^2\cdot\cos x$.

Zkuste samostatně derivovat funkci $y=(\sin x)^4$."

(Pozn.: v této učebnici bylo vysloveno pravidlo pro součin libovolného počtu funkcí.)

Tento příklad [29], 63/K vede k hypotéze, že pravidlo pro derivování složené funkce vypadá takto: $f(x)=f_2(f_1(x))\Rightarrow f'(x_0)=f_2'(f_1(x_0))\cdot f_1'(x_0)$ (Pokud má funkce f_1 derivaci v bodě x_0 a funkce f_2 má derivaci v bodě $f_1(x_0)$.) Po vyslovení této hypotézy je pravidlo dokázáno.

O tom, že tato kniha skutečně učí studenty přemýšlet a nespokojit se s naučeným postupem, svědčí i následující řešený příklad:

Příklad [29], 66/O: „Derivujte dvěma způsoby (aniž byste výsledek zjednodušovali):

a) $y = \dfrac{\sqrt{3x-4}}{1-x^2}$, b) $y = (3+x)\cdot\sqrt{2x-1}$, c) $y = \cos 2x$."

V řešení je ukázáno, že každý z těchto příkladů lze derivovat dvěma způsoby za použití různých pravidel pro derivování. Vždy však musíme dostat shodný výsledek.

Stejně jako bylo zahájeno, je v [29] téma „Derivace funkce" i zakončeno historickou poznámkou. Je zde zmíněn hlavní problém budování diferenciálního počtu, a to pojem nekonečně malé veličiny, který byl uspokojivě vyřešen až zavedením limity.

Nyní se podíváme na metodický postup při výkladu pojmu derivace do učebnice [37] (Mathematik 7). Výklad je zde ze všech tří rakouských učebnic opět nejstručnější a pojmy jsou zde vysvětleny na jednoduchých příkladech. Menší exaktnost učebnice se však bohužel projevuje i při formulaci zadání příkladů, jak bude v některých následujících ukázkách patrné.

Téma „Diferenciální počet" začíná kapitolou „Diferenční kvocient". Toto jsou dva z úvodních příkladů:

Příklad [37], 185/957: „Předpokládejme, že růst lidského embrya v břiše matky je možno popsat funkcí $f(t) = 3t^2$; $0 \le t \le 40$. Čas t je udáván v týdnech a $f(t)$ je hmotnost embrya v gramech. Udejte průměrný přírůstek mezi prvním a šestým týdnem a mezi 20. a 25. týdnem."

Po několika příkladech, ve kterých se počítá průměrný přírůstek, se studenti dostanou k poznatku:

Tvrzení 44: *„Střední přírůstek* $\dfrac{f(x)-f(p)}{x-p}$ *udává změnu hodnoty funkce f v závislosti na x....Tento střední přírůstek je podíl dvou diferencí a nazývá se proto diferenční kvocient."* ([37], str. 186)

Příklad [37], 186/966: „Funkci pro výpočet zisku $G(x)$ dostaneme jako rozdíl funkce příjmů $E(x)$ a nákladů $K(x)$: $G(x) = E(x) - K(x)$. Firma Schlau & Emsig produkuje krmivo pro vepře. Při $x \geq 500$ platí pro funkci nákladů $K(x) = x^2 - 300x + 20\,000$ a pro funkci příjmů $E(x) = \frac{1}{4}x^2 + 4\,500x$. Vytvořte funkci zisku $G(x)$ a zjistěte, zda můžete firmě doporučit růst produkce o 100kg při produkci a) 1 200 kg, b) 1 500 kg, c) 3 800 kg." (V příkladu není uvedeno, co udává proměnná x. Zřejmě jde o produkci v kg. Příklad by jistě získal na hodnověrnosti, kdyby bylo řečeno např. že x je produkce v kg za den, týden,….)

Po seznámení s průměrným přírůstkem funkce následuje odstavec o tečnách, ve kterém je ukázáno, jak se sečna přibližováním průsečíků s grafem funkce změní v tečnu. Dojde se ke zjištění, že funkce $k = \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$ není v bodě $x = p$ definována, a problém je odložen na později. Do třetice je v knize diferenční kvocient $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$ využit při výpočtu okamžité rychlosti. V závěru kapitoly o diferenčním kvocientu jsou shrnuty možnosti jeho využití k určení průměrné rychlosti, středního přírůstku, středního růstu nákladů a směrnice sečny křivky.

Kapitola „Derivace funkce" je v učebnici [37] uvedena dvěma motivačními příklady. První se, podobně jako v předchozích dvou učebnicích, týká výpočtu okamžité rychlosti tělesa padajícího volným pádem a druhý výpočtu tečny funkce:

Příklad [37], 199/1009: „Určete směrnici tečny v bodě $P[2, 3]$ křivky $y = -\frac{1}{4}x^3 + x^2 + 2x - 3$.

Řešení: Nejprve vyjádříme diferenční kvocient $k(x) = \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$ mezi body $P[2, 3]$ a $X[x, y]$.

Nalezneme „funkci diferenčního kvocientu“ $k(x)=\dfrac{-\frac{1}{4}x^3+x^2+2x-6}{x-2}$. Abychom nalezli směrnici tečny v bodě $P[2,3]$, vytvořme limitu pro $x\to 2$

$$\lim_{x\to 2}\frac{-\frac{1}{4}x^3+x^2+2x-6}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot\left(-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+3\right)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left(-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+3\right)=3$$

Směrnice tečny má hodnotu 3. Limitu $\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ nazýváme derivace $f'(2)$ funkce f v bodě 2 a píšeme $f'(2)=\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=3$. Abychom ji mohli vypočítat, museli jsme krátit čitatele i jmenovatele lineárním faktorem $(x-2)$.“

Na tomto příkladu se mi líbilo, že studentům je hned v úvodu kapitoly zřejmý význam pojmu derivace.

V dalších příkladech v této učebnici se studenti seznamují s „dvojím pohledem“ na derivaci (derivace jako hodnota směrnice tečny v daném bodě a derivace jako funkce). Nejprve počítají hodnoty derivací různých funkcí v konkrétních bodech výše uvedeným způsobem. Dále je řečeno: „*Pokud chceme počítat derivaci funkce ve více bodech, doporučujeme vypočítat derivaci obecně v bodě p.*“ ([37], str.200)

Příklad [37] , 200/1013: „Vypočítejme derivaci funkce $f(x)=x^2+x,\ D(f)=R$, v bodě p.“ (Řešení: $f'(p)=2p+1$)

Po příkladu je pojem derivace „definován“ obecně:

Definice 45: „*Pokud existuje limita funkce* $k(x)=\dfrac{f(x)-f(p)}{x-p}$, $D(k)=D(f)-\{p\}$, *v bodě p, nazýváme tuto limitu 1. derivací funkce f v bodě p a značíme ji f ′(p).*“ ([37], str.200)

Následuje úloha na výpočet derivací funkcí (např. $f(x)=x^2$, $f(x)=2x^2-1$) v bodě p a úloha na výpočet okamžité rychlosti tělesa při svislém vrhu vzhůru, která se mi líbí kvůli doplňující otázce:

Úloha [37], 200/1015: „ Při svislém vrhu vzhůru platí $y=-5t^2+40t$. Vypočítejte okamžitou rychlost v čase: a)1s, b)2s, c)3s, d)4s…Co značí výsledek d)?“

Uvedený výklad derivace mě zaujal tím, jak postupoval od výpočtu derivace v konkrétním bodě k derivaci v obecném bodě p.

V odstavci „Pravidla derivování“ v učebnici [37] studenti řeší úlohy na výpočet derivace součtu a rozdílu funkcí, součinu reálného čísla a funkce a mocninné funkce. Po úloze je vždy vysloveno pravidlo, které vyplyne z jejího řešení. Studenti jsou pak schopni počítat pomocí těchto pravidel derivace polynomických funkcí.

V učebnici [37] se mi velice líbí způsob, jak jsou studenti seznamováni s významem a praktickým využitím derivace. Učebnice je velice názorná a podle mých zkušeností odpovídá úrovni abstraktního myšlení většiny studentů daného věku.

Tak je tomu i v následujícím odstavci s názvem „Derivace jako míra změny“. V úvodu odstavce je řečeno: *„Diferenční kvocient* $\dfrac{f(x)-f(p)}{x-p}$ *popisuje střední míru změny hodnoty funkce mezi body p a x; derivace funkce* $\lim\limits_{x\to p}\dfrac{f(x)-f(p)}{x-p}$ *popisuje míru změny v bodě p.“* ([37], str.204)

Pro ilustraci uvádím jeden řešený příklad:

Příklad [37], 204/1035: „Oddělení rozvoje obchodu jistého výrobce lyžařské obuvi zjistilo, že při výdeji x tisíc šilinků na reklamu lze počet $n(x)$ prodaných párů obuvi vyjádřit vztahem $n(x) = -x^2 + 100x + 20\,000$ pro $x \in \langle 0;100 \rangle$.

Vyjádříme míru změny počtu prodaných párů bot, když na reklamu vydáme x tisíc šilinků.

$n'(x) = -2x + 100$

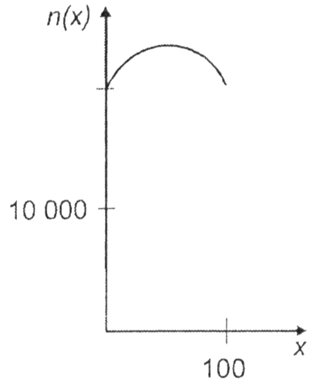
Vypočítáme $n'(10)$ a $n'(60)$:

$n'(10) = -2 \cdot 10 + 100 = 80$

$n'(60) = -2 \cdot 60 + 100 = -20$

To znamená: pokud zvýšíme výdej na reklamu z 10 000 S, bude se počet prodaných párů zvyšovat; pokud bude výdej na reklamu 60 000 S a zvýšíme jej, počet prodaných párů klesne. Přesněji: při zvýšení o 1 000S se prodej zvedne o 80 párů, resp. klesne o 20 párů. Položme si otázku: při které výši nákladů na reklamu nepřináší jejich nárůst zvýšení prodeje?

$$n'(x) = 0$$
$$-2x + 100 = 0$$
$$x = 50$$



Obr.15. Graf k příkladu [37], 204/1035

Od výdajů na reklamu ve výši 50 000S nepřináší růst těchto nákladů zvyšování prodeje."

Derivace exponenciálních a logaritmických funkcí se v této učebnici stejně jako v [4] nevyskytují.

Německá učebnice [11] („Analysis – Grundkurs") se v kapitole „Úvod do diferenciálního počtu" nejprve na mnoha úlohách zabývá středním přírůstkem funkce a směrnicí sečny funkce. Nejprve jsou tyto pojmy definovány:

Definice 46: *„Přímka, která má s grafem funkce f společné (nejméně) dva body* $P_1(x_1, f(x_1))$ *a* $P_2(x_2, f(x_2))$, *se nazývá sečna grafu. Směrnice* $m = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ *sečny se nazývá střední přírůstek funkce f v intervalu* $\langle x_1, x_2 \rangle$ *Předpokládáme* $x_1 < x_2$ *a* $\{x_1, x_2\} \in D(f)$*."* ([11], str.103)

V první úloze se k sobě přibližují průsečíky sečny s grafem funkce:

Úloha [11], 105/11: "Je dána funkce $f(x) = x^2$. Určete směrnici sečny v intervalu $\langle 2, 2+h \rangle$ pro následující hodnoty *h*: 2, 1, 1/2, 1/10, 1/100."

Po této úloze je definován přírůstek funkce *f* v bodě x_0:

Definice 47: *„Pokud existuje limita* $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$*, nazýváme ji přírůstek funkce f v bodě* x_0*.“* ([11], str.105)

Pomocí této limity je definována tečna funkce v bodě:

Definice 48: *„Přímka procházející bodem* $P_0(x_0, f(x_0))$ *se směrnicí* $m=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ *se nazývá tečna funkce f v bodě* P_0*.“* ([11], str.105)

Po úloze, ve které studenti hledají rovnice tečen různých funkcí v daných bodech, následuje definice derivace funkce v bodě:

Definice 49: *„Buď funkce f definována v jistém okolí bodu* x_0*. Pokud existuje limita* $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$*, nazývá se toto číslo 1. derivace funkce f v bodě* x_0 *nebo také diferenciální kvocient funkce f v bodě* x_0 *a značí se* $f'(x_0)$*. Funkce f se pak v bodě* x_0 *nazývá diferencovatelná.“* ([11], str.106)

V této učebnici se nejprve v mnoha úlohách počítá derivace funkce v konkrétním bodě a řeší se i situace, kdy funkce v daném bodě derivaci nemá:

Úloha [11], 109/22: "Načrtněte grafy následujících funkcí a vyšetřete jejich diferencovatelnost v bodě x_0:

a) $f(x)=\begin{cases} 2x & pro\, x\le 3 \\ \frac{3}{2}x & pro\ x>3 \end{cases};\quad x_0=3$

.....

d) $f(x)=\begin{cases} x+1 & pro\, x\le 1 \\ x^2 & pro\ x>1 \end{cases};\quad x_0=1$.„

Na této úloze studenti dále zkoumají souvislost mezi spojitostí funkce a její diferencovatelností v bodě. Ukazuje se, že spojitost funkce v daném bodě nezaručuje existenci derivace v tomto bodě. Je vyslovena věta:

Věta 50: *„Pokud má funkce f v bodě* x_0 *derivaci, je funkce f v bodě* x_0 *spojitá.“* ([11], str.109)

Tato věta je zde i dokázána, v důkazu je použita definice 17 spojitosti funkce.

Až poté, co je důkladně prozkoumána derivace funkce v bodě, přistupuje se k 1.derivaci jako k funkci. Studenti počítají derivace funkcí $f(x)=x^2$, $f(x)=2x^3-1$ atd. v libovolném bodě definičního oboru. Ukáže se, že derivaci funkce v bodě mohou nyní počítat dvěma způsoby: chtějí-li např. vypočítat derivaci funkce $f(x)=x^3$ v bodě 2, mohou ji vypočítat přes limitu: $f'(2)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(2+h)^3-2^3}{h}=12$ nebo derivací funkce získat $f'(x)=3x^2$ a dosazením hodnoty $x=2$ získat výsledek.

V jedné z úloh si studenti ověří, zda chápou nově zavedené pojmy:

Úloha [11], 111/30: „Udejte alespoň dvě funkce *f* s následujícími vlastnostmi:

a) *f* je v bodě 3 spojitá, ale nemá zde derivaci,

b) *f* nemá derivaci ve dvou bodech definičního oboru

c) *f* má derivaci v intervalu (1, 2), ale nemá derivaci v bodě 1,

d) *f* má derivaci pro všechna $x>0$ a platí $f'(x)<0$ pro všechna $x>0$."

Také další úloha podle mého názoru ukáže, zda studenti chápou existenci či neexistenci derivace funkce v bodě:

Úloha [11], 111/31: „Pro které hodnoty *a*, *b* je funkce *f* diferencovatelná?

a) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geq 4\\ ax+b, & x<4\end{cases}$, b) $f(x)=\begin{cases}ax^2+b, & x>0\\ x^3, & x\leq 0\end{cases}$."

Nebudu dále podrobně rozebírat metodické postupy z této učebnice, protože se příliš neliší od ostatních analyzovaných učebnic. Tato učebnice se odlišuje tím, že je velice podrobná, každý nový poznatek je zde procvičen na mnoha úlohách a proto se zdá být velice dobře použitelná při samostudiu. Derivace exponenciálních, logaritmických a goniometrických funkcí jsou v této učebnici zařazeny až po integrálním počtu v závěru učebnice.

5.5 Průběh funkce

Toto téma považuji za zvlášť vhodné k samostatné práci studentů. Domnívám se, že většinu vět o souvislosti vlastností funkce s její derivací jsou studenti schopni objevit sami. Proto mě zajímalo, jak tyto poznatky zavádějí zkoumané učebnice.

Zjišťovala jsem, nakolik je v nich ponechán prostor k samostatnému odvození vět (o souvislosti monotonie funkce a znaménka její derivace atd.) ještě před jejich vyslovením, zda je výklad doplněn obrázky, jaké typy úloh mají studenti řešit apod.

Česká učebnice [10] možnost samostatného objevování nevyužívá. V úvodu jsou zde vysloveny věty Rolleova a Lagrangeova (o střední hodnotě), které jsou později využity v důkazech dalších vět. Věta o souvislosti znaménka derivace a monotónnosti funkce je zde uvedena bez motivačního příkladu nebo úvahy (jako důsledek Lagrangeovy věty) a bez obrázku, který by její obsah „zviditelnil" studentům s menší schopností abstrakce.

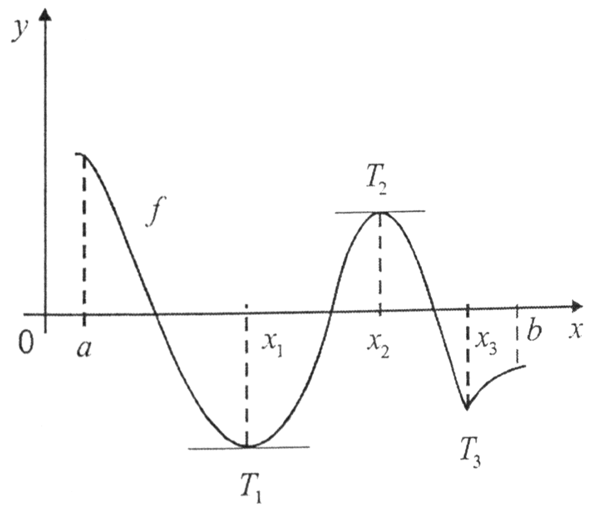
Věta je zde uvedena v tomto znění:

Věta 51: „*Má-li funkce v každém bodě intervalu (a, b) kladnou derivaci, je v tomto intervalu rostoucí. Má-li funkce f v každém bodě intervalu (a, b) zápornou derivaci, je v tomto intervalu klesající.*" ([10], str.103)

Po větě následuje její důkaz a řešený příklad tohoto znění:

Příklad [10], 103/9: „Určete intervaly monotónnosti funkce f: $y = x^3 - 3x$."

Větě o derivaci funkce v jejích extrémech obrázek předchází:



Obr.16. K definici lokálních extrémů v učebnici [10]

Na základě tohoto obrázku jsou definovány pojmy lokální maximum a lokální minimum. Následuje věta:

Věta 52: *„Má-li funkce v bodě x_0 lokální extrém a existuje-li v tomto bodě derivace $f'(x_0)$, pak platí: $f'(x_0)=0$.“* ([10], str.106)

Podobně jsou v učebnici vyloženy i ostatní vlastnosti funkcí (konvexnost, konkávnost, stacionární body). Po vyslovení věty a ukázce na příkladech vždy následují úlohy, např.:

Úloha [10], 111/4.20: „Určete intervaly monotónnosti a lokální extrémy funkcí:

a) $y=-x^2+2x+3$, b) $y=3x^2-2x^3$,

c) $y=2x^3-3x^2$, d) $y=x^3+x^2+x+1$.“

Kapitola je zakončena osmi úlohami na vyšetření průběhu funkce.

V učebnici [4] je v kapitole „Monotonie a derivace“ (po zopakování pojmů rostoucí a klesající funkce) uvedeno, že funkce je rostoucí v daném intervalu, pokud je její derivace v tomto intervalu větší než nula. Toto tvrzení je doplněno obrázkem a studenti mají sami vyslovit větu o znaménku derivace funkce klesající v daném intervalu. Způsob, jakým autoři dospěli k větě o souvislosti existence extrému funkce a hodnoty derivace funkce v daném bodě se příliš neliší od české učebnice [10], i typy úloh jsou zde shodné. Podstatný rozdíl však je v tom, že o souvislosti vlastností funkce se znaménkem její derivace v daném bodě se hovoří bezprostředně po definici derivace. Studenti tak mají od začátku představu, k čemu budou moci derivaci využít.

Učebnice [37] se od výše uvedených dvou učebnic liší tím, že příklady předcházejí větám, takže studenti nejprve řešením příkladu objeví obsah věty vyslovené po něm. (Důkazy se zde většinou neuvádějí.) Souvislostí znaménka derivace a chování funkce v daném bodě se zabývá nejprve kapitola „Derivace jako míra změny“, kde je zkoumán průběh různých závislostí (náklady na reklamu a počet prodaných výrobků, růst a vymírání populace, počet nemocných při chřipkové epidemii atd.). Následuje kapitola „Geometrický význam derivace“, kde je na úvod řečeno: *„Již jsme si objasnili derivaci jako míru změny: pokud je změna v daném bodě pozitivní, pak zde funkce monotónně roste; pokud je změna negativní, pak zde funkce monotónně klesá. Geometricky popisuje derivace směrnici tečny. Pokud má kladné znaménko, potom* *křivka v daném místě stoupá, pokud je znaménko záporné, pak křivka v daném místě klesá.“* ([37], str.210) Následuje motivační příklad:

Příklad [37], 210/1064: „Pozorujme funkci $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ a zjistěme s pomocí derivace, ve které oblasti je určitě rostoucí a ve které určitě klesající.“

Po tomto příkladu je vysloveno tvrzení:

Tvrzení 53: *„Pokud je $f'(x)$ v určitém bodě kladná, pak je zde graf funkce stoupající; pokud je $f'(x)$ v určitém bodě záporná, pak je zde graf funkce klesající. Opačné tvrzení neplatí vždy, pokud je funkce v bodě rostoucí, může platit $f'(x) > 0$ nebo $f'(x) = 0$. Stejně tak platí pro klesající funkci $f'(x) < 0$ nebo $f'(x) = 0$.* ([37], str.210)

Úlohy v této kapitole se týkají především směrnice tečny k funkci v daném bodě:

Úloha [37], 212/1070: „Udejte rovnice všech tečen funkce f rovnoběžných s danou přímkou: a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6x + 1$, $3x + y = 6$,

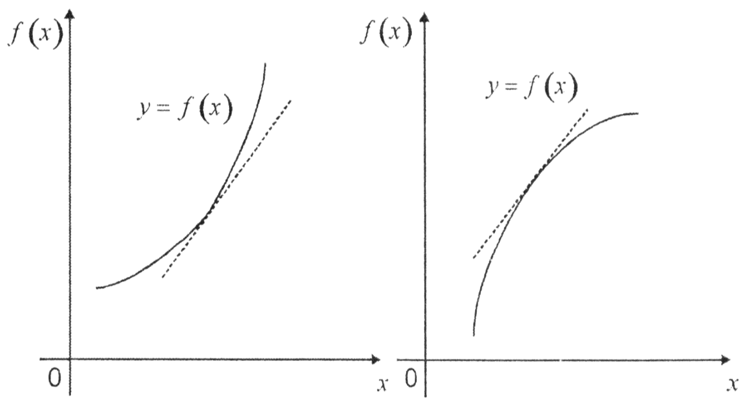
b) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$, $3x + 2y = 5$.“

Na rozdíl od většiny ostatních vět v této učebnici je věta o hodnotě derivace v lokálním maximu funkce uvedena i s důkazem, důkaz pro lokální minimum mají studenti odvodit sami.

Druhá derivace je zde zkoumána především v souvislosti s pohybem tělesa (závislostí dráhy tělesa na čase). *„Okamžité zrychlení je druhou derivací dráhy tělesa jako funkce času – tedy mírou změny 1. derivace – té se říká rychlost. Z geometrického hlediska je 2. derivace mírou změny směrnice tečny.“* ([37], str.216)

Motivační příklad zní takto:

Příklad [37], 216/1079: „Polož tužku jako tečnu ke křivce na obrázku a jeď s ní podél dané křivky. Vysvětli, proč v jednom případě musí platit $f''(x) > 0$ a ve druhém $f''(x) < 0$.“



$f''(x)>0$, $f'(x)$ roste $\qquad$ $f''(x)<0$, $f'(x)$ klesá

Graf je konvexní. $\qquad$ Graf je konkávní.

Obr.17. Grafy k příkladu [37], 216/1079

Zjištění z grafů je shrnuto takto:

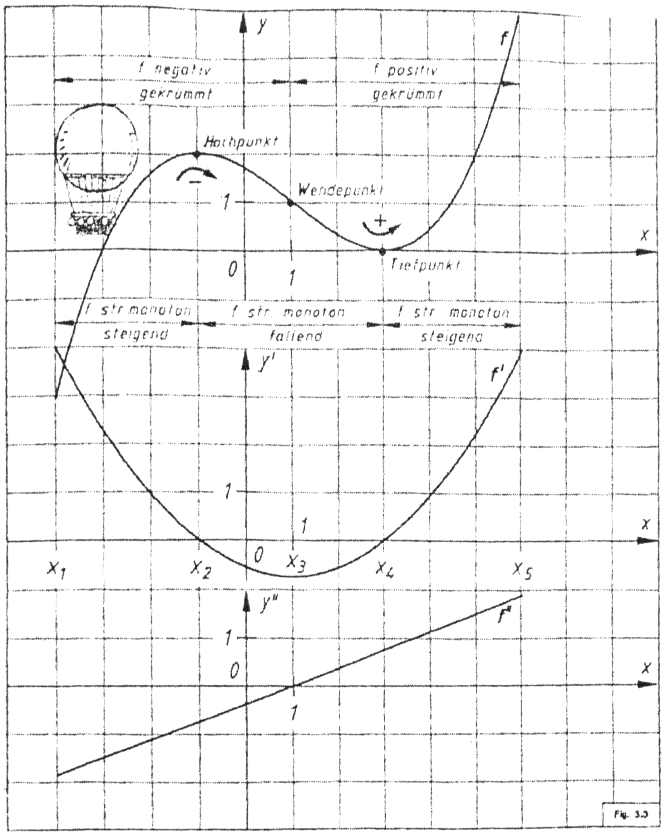
Tvrzení 54: *„Pokud je $f''(x)$ v daném bodě kladná, pak je zde graf funkce konvexní, pokud je $f''(x)$ v daném bodě záporná, pak je zde graf funkce konkávní."* ([37], str.216)

S pomocí obrázků je zaveden i inflexní bod a ukázána souvislost existence inflexního bodu s hodnotou první i druhé derivace. Všechny nové poznatky jsou v závěru kapitoly přehledně graficky zpracovány.

Zcela odlišný způsob hledání souvislosti mezi hodnotou derivace funkce a jejími vlastnostmi nalezneme v učebnici [29]. V kapitole „Průběh funkce" se zde (podobně jako v kapitole „Derivace funkce") využívá tzv. grafické derivování.

Takto vypadá motivační příklad k diskusím o polynomických funkcích:

Příklad [29], str. 90: „Prozkoumejte (ve skupinách nebo dvojicích) souvislosti mezi vlastnostmi funkcí f, f' a f'' podle obr.18. Interpretujte funkci f např. jako závislost výšky letu vzduchového balónu na čase, f' jako rychlost vzestupu (resp. sestupu) a f'' jako zrychlení při vzestupu (sestupu). Popište tyto souvislosti s pomocí pojmů uvedených v obrázku.



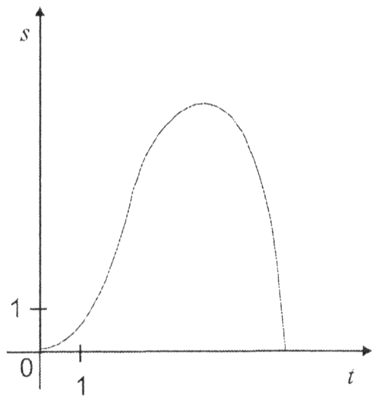
Obr.18. Ilustrace souvislostí mezi f, f' a f'' v učebnici [29]

Následuje rozbor poznatků, které lze vyčíst z grafu. (Monotonie funkce, lokální extrémy, inflexní bod.) V závěru rozboru je zdůrazněno, že tímto nejsou poznatky dokázány. Důkazy vět jsou provedeny ve „zpřesnění“ v závěru celé kapitoly. V deseti bodech jsou shrnuty vlastnosti funkcí, které zkoumáme při diskusi o křivkách:

1. Definiční obor, spojitost
2. Nulové body
3. Extrémy funkce
4. Inflexní body
5. Intervaly monotónnosti
6. Konvexnost, konkávnost
7. Asymptoty grafu
8. Graf funkce
9. Symetrie
10. Periodicita

První úloha na průběh funkce vychází z grafického derivování:

Úloha [29], 92/302: „Obrázek 19 popisuje start rakety prostřednictvím grafu závislosti výšky rakety na čase. Doplň na základě grafického derivování grafy závislosti rychlosti na čase a zrychlení na čase. Popiš co nepodrobněji na základě grafů, jak let probíhá:

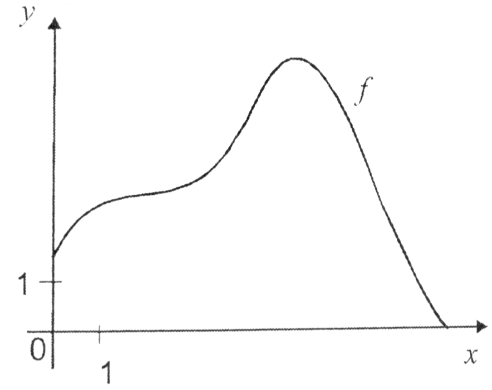


- Kdy má raketa nulovou rychlost?
- Kdy je dosažen nejvyšší bod dráhy rakety?
- Kdy a s jakou rychlostí dopadne raketa zpět?
- Kdy má raketa nejvyšší rychlost?
- Kdy se změní směr letu?

Obr.19. Graf k úloze [29], 92/302

V další úloze studenti opět graficky derivují:

Úloha [29], 93/303: „Doplň k funkci f na obrázku 20 pomocí grafického derivování grafy funkcí f' a f'' a urči vlastnosti funkcí (podle uvedených 10 bodů):



Obr.20. Graf k úloze [29], 93/303

V dalších úlohách studenti určují průběh mnoha polynomických funkcí druhého až šestého stupně obvyklým způsobem (jak jej známe z našich učebnic). Samostatný odstavec je zde však věnován takzvaným „obráceným úlohám" („Umkehraufgaben"), kde studenti naopak k daným vlastnostem hledají odpovídající funkce. Zde je několik ukázek:

Úloha [29], 101/319: „Graf funkce $f: R \to R,\ y = ax^3 + bx^2$ má extrém v bodě $E(4,\ 4)$. Určete předpis funkce."

Úloha [29], 101/326: „Graf funkce $f: R \to R,\ y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ prochází bodem $P(2, 3)$ a má v bodě $I(0, 1)$ inflexní bod. Směrnice tečny v inflexním bodě I je –3. Určete předpis funkce *f*.“

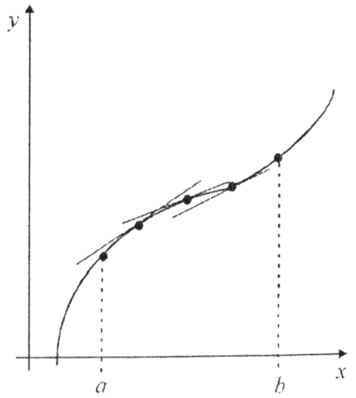
Zvláštní odstavce jsou věnovány racionálním funkcím a goniometrickým funkcím. Další typy funkcí, zde pojmenované jako „funkce se špičkami“ (tzn. že nemají všude derivaci) jsou zařazeny do nepovinného učiva.

V učebnici [11] každému novému poznatku o souvislosti mezi vlastnostmi derivace f' a původní funkce f předchází úloha (podobně jako ve [37]), ve které by měli studenti tuto souvislost sami najít.

Například souvislost mezi znaménkem derivace a monotonií funkce si studenti nejprve uvědomí v následující úloze:

Úloha [11], 136/18: „a) Jakou monotonii prokazuje funkce *f* na obrázku 21 v intervalu $\langle a,b \rangle$?

b) Co můžete říci o $f'(x_0)$ pro libovolné $x_0 \in \langle a,b \rangle$?



Obr.21. Graf k úloze [11], 136/18

V další úloze se jedná o klesající funkce:

Úloha [11], 136/18: „Ukažte: pokud je diferencovatelná funkce *f* v intervalu *I* klesající, pak platí pro všechna $x \in I: f'(x) \leq 0$.“

Po těchto úlohách následuje věta:

Věta 55: *„Nechť má funkce f derivaci v intervalu I. Pak platí:*

a) pokud $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in I$, pak je f v intervalu I rostoucí, *b) pokud $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in I$, pak je f v intervalu I klesající.*" ([11], str.136)

(Fakt, že v úloze [11], 136/18 je uvedena neostrá nerovnost, zatímco ve větě jsou nerovnosti ostré, protože je obráceno pořadí jevů, není nijak dále komentován.) V této učebnici je důkaz věty 55 ponechán na studentech jako jedna z dalších úloh (s nápovědou postupu). Podobným způsobem (vyřešení úlohy → vyslovení věty → důkaz) jsou studenti seznámeni s dalšími jevy (extrémy funkce, konvexnost a konkávnost, inflexní bod). Tato učebnice jako jediná ze všech analyzovaných používá k určení inflexního bodu i třetí derivaci.

5.6 Shrnutí analýzy učebnic

Podrobná analýza učebnic pro mě byla velice inspirativní. Zahraniční učebnice se liší od české učebnice [10] v těchto aspektech:

- častěji umožňují studentům poznatky objevit samostatně,
- k pochopení pojmů a vztahů využívají ve velké míře grafy a obrázky,
- uvádějí pouze základní definice a věty (v žádné z učebnic nebyly definovány jednostranné limity apod.),
- obsahují více úloh zaměřených na ověření pochopení pojmů a souvislostí, nikoliv jen na použití početních pravidel,
- často nejprve preferují intuitivní pojetí oproti exaktnosti, poznatky jsou precizovány až po mnoha úlohách, většinou v závěru kapitol,
- věnují se převážně polynomickým a goniometrickým funkcím, funkcemi exponenciálními a logaritmickými se většinou zabývají v nepovinném rozšiřujícím učivu.

Je samozřejmé, že k objektivnímu posouzení efektivity používaných postupů by bylo zapotřebí zjistit výsledky těchto postupů (porovnáním znalostí studentů), to však bohužel není v mých silách. Proto v následujícím návrhu využívám ty postupy, které se mi osvědčily ve vlastní výuce.

6. Projekt výuky diferenciálního počtu na gymnáziu

6.1 Principy výstavby výkladu

Jak již bylo řečeno v Úvodu a v kapitole 3.4, považuji zařazení tématu „Diferenciální počet“ na závěr gymnaziální matematiky za účelný, mimo jiné také proto, že si studenti zopakují řadu poznatků z průběhu celého studia. Oproti současnému rozsahu a pojetí této látky (dle [10]) však navrhuji pro studenty nematematických tříd následující změny:

- soustředit se pouze na základní pojmy diferenciálního počtu (viz následující kapitoly),
- výklad založit na názorně-intuitivním pojetí a na dialogu se studenty tak, aby byl přístupný většině studentů, nové pojmy zavádět ve spolupráci se studenty,
- definice pojmů zařadit až po vyložení jejich podstaty a formulovat je ve spolupráci se studenty; nepožadovat znalost přesné formulace definice, dokud studenti nepochopí její obsah; množství definic a vět přizpůsobit hloubce výkladu (a tu přizpůsobit úrovni třídy);
- ukázat nutnost důkazů vět; zařazení důkazů však zvážit s ohledem na charakter třídy a atmosféru při výuce,
- úlohy zaměřit na pochopení základních pojmů diferenciálního počtu.

K precizaci látky, hlubšímu vhledu (souvisejícímu s historickým vývojem) a řešení náročnějších úloh je vhodné využít povinně volitelné semináře, které si studenti volí pro poslední dva ročníky, resp. jeden ročník, studia. V těchto seminářích se scházejí studenti směřující na vysoké školy s výukou matematiky a k náročnějšímu studiu jsou tak více motivováni.

Výklad jednotlivých pojmů matematické analýzy založím na několika základních principech. Vycházím přitom z

- vlastních zkušeností z výuky,
- studia knihy „Teória vyučovaní matematiky II“ (autor M. Hejný a kol.),
- materiálů týkajících se psychologie ([5], [7], [8], [14], [15]),
- postupů, které mě zaujaly v analyzovaných učebnicích.

Jedná se o následující principy:

1. Studentům je třeba poskytnout konkrétní představu o novém poznatku v grafické podobě, protože nositelem představy funkce a jejích vlastností je pro studenta graf. ([6], str.246) Tento přístup by měl vést k lepšímu pochopení látky u studentů s nižší schopností abstrakce. Studenti by proto měli co nejčastěji pracovat s grafy funkcí. Považuji za užitečné, pokud studenti získají jistou rutinu v načrtávání grafů a v práci s grafickým kalkulátorem, protože tuto dovednost využijí v mnoha tématech matematiky i fyziky.
2. Grafickou stránku je vhodné doplnit numerickými výpočty, které poskytnou kvantitativní představu jevu. ([6], str.269)
3. Následující manuální a myšlenkovou manipulací si studenti postupně osvojí podstatu nových poznatků. Záměrem této manipulace je pochopit obecné principy řešením konkrétních příkladů.
4. Po tomto přechodu od konkrétního k obecnému následuje precizace poznatku, zpřesnění významu pojmu nebo uvedení vhodné definice nebo věty.

Vzhledem k současným možnostem využívání výpočetní techniky považuji za vhodné, aby studenti využívali při výuce grafické kalkulátory, případně odpovídající počítačové programy (v následujícím textu používám program TI InterActive). Po zvládnutí jejich obsluhy se zkrátí čas potřebný k řešení úloh a studenti mají okamžitou kontrolu.

Texty uvedené v rámečcích jsou návrhy částí učebního textu pro studenty. Jedná se o ty partie výkladu, ve kterých jsou zaváděny nové pojmy a jejichž pojetí se liší od učebnice [10]. Proto zde neuvádím úlohy určené k procvičení nové látky ani např. věty o limitě součtu a rozdílu funkcí, úlohy na extrémy funkcí apod. Úlohy zařazené v těchto textech jsou určeny ke společnému řešení s učitelem. Znakem ➔ jsou označeny otázky, které by měly pomoci výkladu nebo ověřit, zda studenti látku chápou. V případě, že je uvedena i odpověď na otázku nebo řešení úlohy, jsou označeny ⇨. Symbol ⓘ je použit u stručného popisu nového pojmu, matematické věty nebo jiné informace. V případě, že informace je stěžejní pro pochopení látky, je označena 💣.

6.2 Zavedení pojmu limita funkce

Výkladu pojmů diferenciálního počtu musí předcházet stručné zopakování učiva o funkcích z předcházejících ročníků. Studenti si zopakují typy elementárních funkcí a jejich vlastnosti. Učitel by měl vědět, na jak hluboké znalosti bude v následujících hodinách navazovat.

V tématu „Posloupnosti a řady“ se studenti mohli setkat s pojmem limita posloupnosti (definice 27). V případě, že učitel má v učebním plánu výklad diferenciálního počtu, považuji za vhodné limitu posloupnosti jako přípravu na limitu funkce do výkladu zařadit. V tématu „Diferenciální počet“ se v souvislosti s limitou pouze změní definiční obor zkoumaných funkcí (budeme-li považovat posloupnosti za funkce definované na množině přirozených čísel) a mění se také místa, v nichž nás limita zajímá. Zatímco u posloupností byla vyšetřována limita pouze pro $n \to \infty$, nyní nás bude zajímat limita funkce nejen v libovolném bodě definičního oboru, ale především v bodech, které v definičním oboru nejsou.

Z tohoto důvodu (a z důvodů uvedených dále v kapitole 6.3) dávám přednost následujícímu pořadí zavedení základních pojmů:

1. Limita funkce (v bodě, v intervalu)
2. Spojitost funkce (v bodě, v intervalu)
3. Derivace funkce

K pochopení definice limity funkce potřebují studenti znát význam pojmu „okolí bodu“. Studenti by měli být schopni hodnotám proměnné x ze zadaného okolí bodu přiřadit odpovídající funkční hodnoty a později v diskusích o průběhu funkce popsat přesně chování funkcí v okolí těch bodů, kde funkce např. není definována, nemá derivaci atd.

A) Okolí bodu

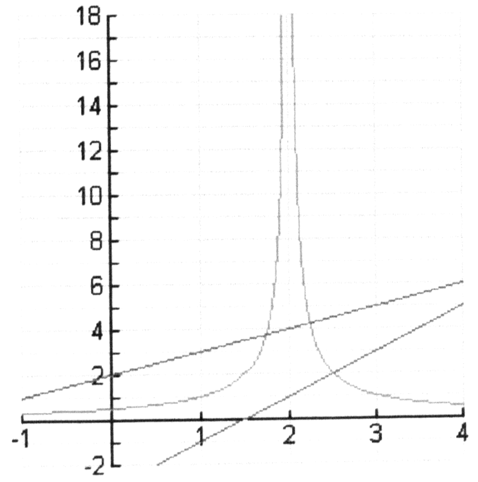
Úloha A1: Načrtněte grafy funkcí

$$f_1 : y = 2x - 3,\ f_2 : y = \frac{1}{|x-2|},\ f_3 : y = \frac{x^2 - 4}{x - 2},\ f_4 : y = \begin{cases} x - 1, & x \le 2 \\ x + 1, & x > 2 \end{cases}$$

Určete jejich definiční obor a obor hodnot. Popište jejich průběh v intervalu $I=(1; 3)$.

➔ Na obrázku 1 vidíte, jak funkce f_1, f_2, f_3 zakreslil do grafu program TI InterActive. Graf jedné z funkcí neodpovídá přesně zadání. Kde je chyba?

Obr.1

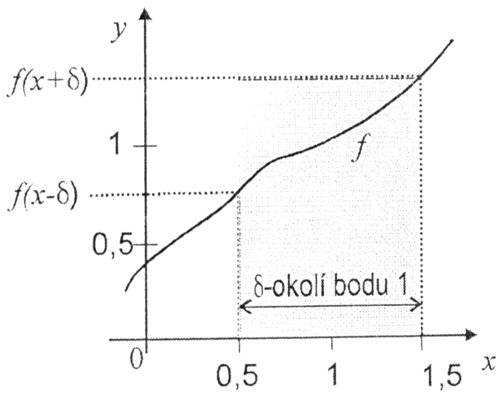


Předpokládám, že studenti odhalí, že v grafu na obr.1 není funkce $f_3 : y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ přerušena v bodě $x_0 = 2$, protože program TI InterActive dopočítává hodnoty funkce i v bodech, kde funkce nejsou definovány. V diskusi okolo úlohy mohou být studenti požádáni o nahrazení předpisu funkce f_3 předpisem funkce, která odpovídá grafu z obr.1. Tyto úvahy jsou přípravou k pochopení limity a spojitosti. Důležité je všimnout si rozdílu mezi funkcemi f_2 a f_3. Funkci f_3 můžeme rozšířit neboli doplnit funkční hodnotu v bodě $x_0 = 2$. Získáme tak funkci „nepřerušenou, bez mezery", která je s f_3 totožná ve všech bodech kromě bodu $x_0 = 2$, funkci f_2 takto nahradit nemůžeme. Studenti se mohou dozvědět, že pro „nepřerušené" funkce používáme název „spojité" a že o spojitosti se budou podrobně bavit později, protože se jedná o důležitou vlastnost funkcí. Považuji za vhodné stále hovořit o vlastnostech funkcí, protože tím studenty připravíme k pozdějším diskusím nad průběhem funkcí.

V úloze A1 jsme se zabývali chováním funkcí f_2 a f_3 v jistém okolí bodu $x_0 = 2$. Protože v následujících kapitolách nás bude zajímat právě tvar grafů funkcí v určitých bodech a v jejich těsné blízkosti, zpřesníme si, co je myšleno slovy **„okolí bodu“**:

Definice okolí bodu: <u>Okolí bodu</u> x_0 je otevřený interval $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, kde δ je kladné reálné číslo. Číslo δ nazýváme poloměr okolí bodu x_0, bod x_0 střed okolí.

Obr.2



Na obr.2 je naznačeno δ-okolí bodu x_0 pro x_0=1 a δ=0,5 a tomuto okolí odpovídající funkční hodnoty. Funkční hodnoty v tomto případě tvoří interval $(f(x-\delta), f(x+\delta))$.

Úloha A2: Je dáno $x_n = \dfrac{n+1}{n}$, $n \in N$. Rozhodněte, zda x_n leží v 0,01-okolí čísla 1, jestliže: a) $n = 20$, b) $n = 100$, c) $n = 200$, d) $n = 1000$.

Úloha A3: a) Interval $I = (1, 3)$, ve kterém jsme zkoumali chování funkcí v úloze A1, můžeme považovat za okolí bodu 2. Určete jeho poloměr.

b) Najděte množiny všech funkčních hodnot funkcí f_1, f_2, f_3, f_4 z úlohy A1, které odpovídají těmto poloměrům okolí bodu 2: $\delta_1 = 0{,}5$, $\delta_2 = 0{,}1$. (Řešte graficky i výpočtem nebo s pomocí grafického kalkulátoru).

Úloha A4: V programu TI InterActive sestrojte graf funkce $f: y = \dfrac{\sin x}{x}$. Určete definiční obor této funkce a obor hodnot. Pomocí funkce „Trace“ určete množinu funkčních hodnot této funkce v δ-okolí bodu $x \notin D(f)$ pro a) $\delta = 0{,}5$, b) $\delta = 0{,}05$.

Nyní budeme směřovat k zavedení pojmu „limita funkce v bodě“. Předpokládejme, že studenti již znají definici limity posloupnosti (definice 27). V učebnici [26] („Posloupnosti a řady“) jsou kromě definice 27 uvedeny ještě jinak formulované definice. Výhodou té následující je, že ji lze dobře graficky znázornit (viz [26], str.83, obr.3.7.).

Definice 56: *„Říkáme, že posloupnost* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je konvergentní, právě když existuje číslo* $a \in R$ *takové, že platí: Ke každému* $\varepsilon > 0$ *existuje* $n_0 \in N$ *tak, že pro všechna přirozená čísla* $n \geq n_0$ *je* $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$*.“* ([26], str.83)

Abych využila toho, že pojem limita posloupnosti je studentům známý, považuji za vhodné nejprve zavést limitu funkce v nevlastním bodě a až poté limitu funkce ve vlastním bodě.

B) Limita funkce v nevlastním bodě

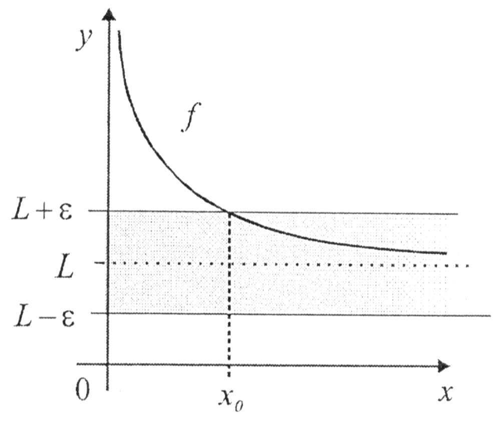
➔ Zopakujte si definici konvergentní posloupnosti.

Úloha B1: Uveďte rekurentně nebo předpisem pro n-tý člen posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, pro kterou platí: a) posloupnost je konvergentní, b) posloupnost je konvergentní a platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$, c) posloupnost je divergentní, d) posloupnost je divergentní a platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

➔ Jaký je vztah mezi pojmy funkce a posloupnost? Rozmyslete si, v čem se liší následující symboly: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n, \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

➔ Na základě definice limity posloupnosti popište, kdy platí $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ (L je reálné číslo, situace je znázorněna na obr.1).

Obr.1



Úloha B2: Načrtněte graf funkce $f: y = \dfrac{x+3}{x+1}$, $x > -1$. Určete $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$. Volte různé hodnoty ε a určete, pro která x je $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Sledujte na grafu.

Studenti si takto zopakují pojem limita nejprve v souvislosti s posloupnostmi a uvědomí si, že posloupnost je funkce, jejíž definiční obor jsou všechna přirozená čísla. Diskuse se může týkat konkrétního příkladu. Opět bude vhodné vše doplnit grafem. Učitel uvede např. posloupnost $(a_n)_1^\infty = \left(\dfrac{1}{n}\right)_{n=1}^\infty$. Studenti zakreslí např. prvních pět členů posloupnosti do grafu. Určí limitu této posloupnosti. Pak nahradí předpis posloupnosti a_n předpisem funkce $f: y = \dfrac{1}{x}$, jejímž definičním oborem budou všechna kladná reálná čísla a všechny členy posloupnosti a_n do této funkce patří. Z grafu funkce f je patrné, že platí $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$. V úloze B2 by výpočet limity neměl studentům činit problém, protože by již měli umět vypočítat limitu posloupnosti dané předpisem $\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)_{n=1}^\infty$. Na základě této diskuse se studenti pokusí formulovat definici vlastní limity funkce v nevlastním bodě. Samozřejmě, že je třeba dojít ke správnému znění definice:

Definice: Funkce f má v bodě $+\infty$ <u>limitu</u> a, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takový bod x_0, že pro všechna $x \in R$, $x > x_0$ patří všechny funkční hodnoty do intervalu $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$.

➔ Načrtněte graf nějaké funkce, která má v bodě $+\infty$ limitu $a = 3$.

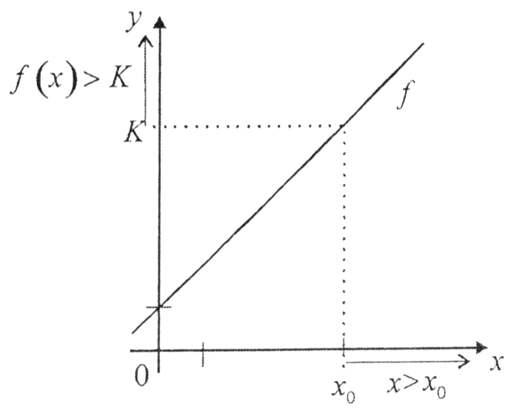
➔ Dokončete definici: Funkce f má v bodě $-\infty$ <u>limitu</u> a, jestliže…..

➔ Obměňte výše uvedenou definici tak, abyste použili pojem „okolí bodu".

ⓘ Limitám funkcí v bodech $+\infty$ a $-\infty$ říkáme limity v nevlastních bodech.

➔ Na obr.2 je znázorněna část grafu funkce $f: y = x + 1$, pro kterou platí $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.

Obr.2



➔ Rozmyslete si, pro které z následujících funkcí také platí $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$:

a) $f: y = \sqrt{x-2}$, b) $g: y = 0,5^x$, c) $h: y = |2x+1| - x$, d) $k: y = \log_{10}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Definice: Funkce f má v bodě $+\infty$ limitu $+\infty$, jestliže ke každému číslu K existuje takové číslo x_0, že pro všechna $x > x_0$ je $f(x) > K$.

➔ Načrtněte graf funkce, která má v bodě $+\infty$ limitu $-\infty$, a dokončete definici: Funkce f má v bodě $+\infty$ limitu $-\infty$, jestliže…..

➔ Načrtněte graf funkce, která má v bodě $-\infty$ limitu $+\infty$, resp. $-\infty$, vyslovte příslušné definice.

➔ Rozmyslete si, jak může vypadat graf funkce, jejíž $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ neexistuje. Načrtněte graf takové funkce, případně uveďte její předpis.

Úloha B3: Zadejte funkce f_1, f_2, f_3, jejichž definičním oborem jsou reálná čísla a pro které platí: $\lim\limits_{x\to\infty} f_1(x) = -2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_2(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_3(x)$ neexistuje. Načrtněte jejich grafy.

Pro studenty, kteří nemají v matematice potíže, mohou být kontrolní otázky velice lehké, cílem však je zapojit do diskusí celou třídu.Úloha B3 by měla ověřit, zda byla látka pochopena.

Úloha B4: Rozhodněte, jak závisí hodnota $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$)

a) na hodnotách koeficientů *a*, *b*, *c* u kvadratických funkcí $f: y = ax^2 + bx + c$,

b) na hodnotě základu u exponenciálních funkcí $f: y = a^x$.

Úloha B5: Vysvětlete, jak dojdeme k výsledku $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x+2} = 0$. Uveďte lineární lomenou funkci, pro kterou platí $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 3$. Graf této funkce načrtněte.

Úloha B6: Načrtněte graf funkce, která vyhovuje následujícím podmínkám :

a) f_1 je shora omezená, $\lim\limits_{x\to\infty} f_1(x) = 3$,

b) $H(f_2) = R$, $\lim\limits_{x\to\infty} f_2(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_2(x) = 1$,

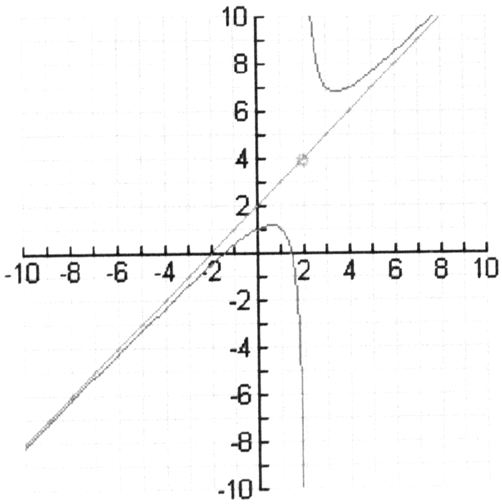
c) f_3 je zdola omezená, neklesající, $\lim\limits_{x\to\infty} f_3(x) = +\infty$.

C) Limita funkce ve vlastním bodě

Na rozdíl od posloupností budeme u funkcí zkoumat jejich limity i v jiných bodech než v nevlastních bodech $\pm\infty$. Takovým bodům říkáme vlastní. Zajímat nás budou především body, které nepatří do definičního oboru funkce, nebo do definičního oboru funkce patří, ale funkce v těchto bodech „skáče".

Úloha C1: Na obrázku 1 jsou grafy funkcí $f_1 : y = \dfrac{x^2 - 2}{x - 2}$ a $f_2 : y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Obr. 1



a) Určete definiční obory funkcí.

b) Rozhodněte, který graf přísluší ke které funkci.

c) Doplňte následující tabulku:

x	1,80	1,90	1,95	1,98	1,99	2,01	2,02	2,05	2,10	2,20
$f_1(x)$										
$f_2(x)$										

d) Určete množinu funkčních hodnot funkcí f_1, f_2 příslušejících δ-okolí bodu 2 pro

$\delta = \dfrac{1}{n}$ ($n = 10$; 100, 1 000)

Úloha C2: Načrtněte graf funkce $g : y = \mathrm{sgn}(x - 2)$. Určete její funkční hodnoty pro

$x = 2 \pm \dfrac{1}{10^n}$, $n = 1, 2, 3$.

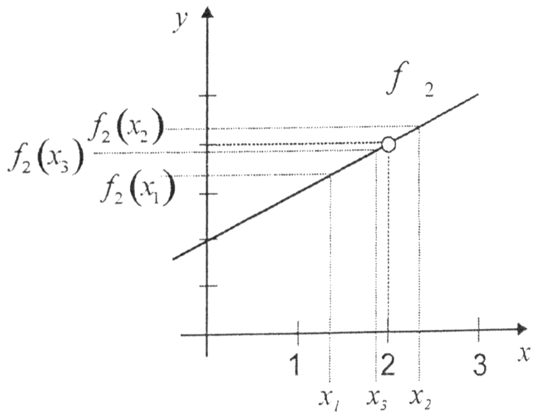
V předchozích dvou úlohách jsme zkoumali chování funkcí f_1, f_2 a g v okolí bodu 2.

➔ O které z těchto funkcí byste řekli, že má v bodě 2 limitu a proč?

Učitel by měl v rozhovoru se studenty zjistit, jak studenti vnímají podstatu limity ve vlastním bodě, nechat je popsat situace vlastními slovy. Dále by měla diskuse směřovat k zodpovězení otázky, zda může mít funkce v jednom bodě dvě limity. Studenti by si měli uvědomit požadavek jednoznačnosti, musí vědět, že má-li mít funkce v bodě limitu a, musí se funkční hodnoty blížit k a z obou stran. Řešení úloh a diskuse o nich by měly směřovat k pochopení podstaty pojmu limita funkce ve vlastním bodě.

⇨ Jedná se o funkci $f_2 : y = \dfrac{x^2-4}{x-2}$. Platí $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2} = 4$ což znamená, že funkční hodnoty se mohou přiblížit libovolně blízko k hodnotě 4, budeme-li volit na ose x body, které jsou dostatečně blízko k bodu 2. (Viz obr.2.)

Obr.2



Všimněte si, že nás zajímají funkční hodnoty v okolí bodu 2, ne však v bodě 2. Hodnota funkce v bodě 2 není pro hodnotu limity v bodě 2 důležitá.

ⓘ Jestliže hovoříme o okolí bodu x bez bodu x, používáme pojem „prstencové okolí bodu x“.

Úloha C3: Zjistěte, pro které hodnoty proměnné x se hodnoty funkce $f_2 : y = \frac{x^2-4}{x-2}$ pohybují v intervalu a) I=$\langle 3{,}999; 4{,}001 \rangle$, b) I=$\langle 3{,}9999; 4{,}0001 \rangle$.

➔ Funkci $f_2 : y = \frac{x^2-4}{x-2}$ můžeme takzvaně „rozšířit" tím, že doplníme její definiční obor o bod 2 a v tomto bodě zadáme funkční hodnotu. Funkce pak může být zadána např. takto:

$$h_1 : y = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}.$$

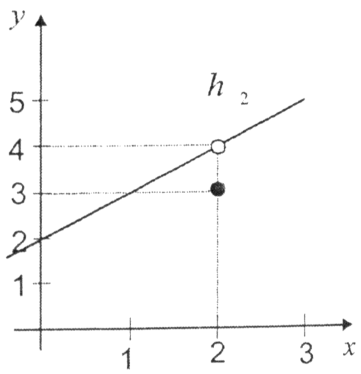
Načrtněte graf funkce h_1, uvědomte si, čím se liší od funkce f_2. Rozmyslete si, zda má funkce h_1 v bodě 2 limitu a jaká je její hodnota.

Funkci f_2 můžeme rozšířit také takto:

$$h_2 : y = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}.$$

Její graf pak vypadá následovně:

Obr.3



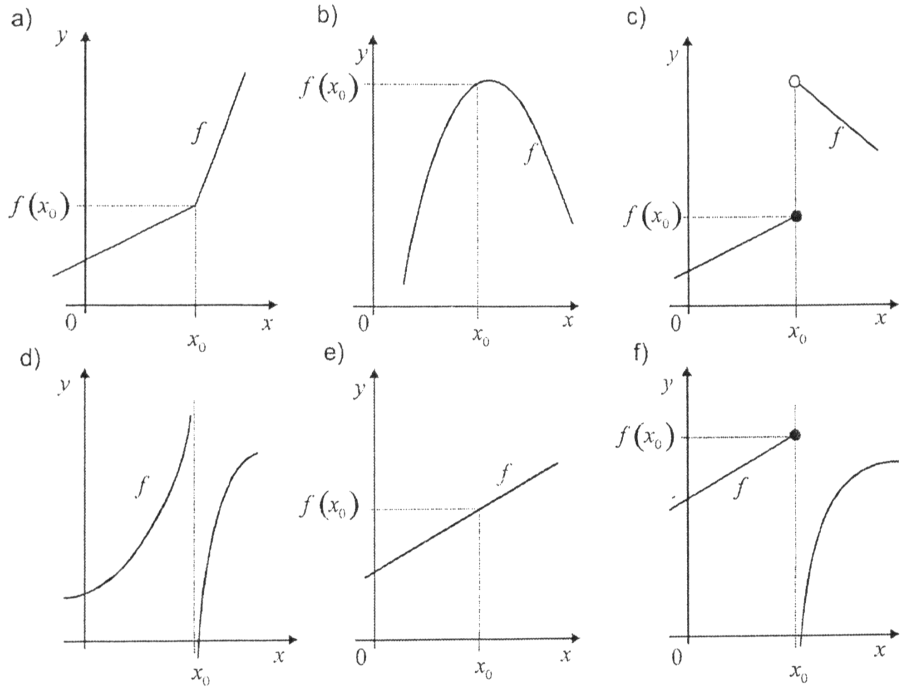
Rozmyslete si, zda má funkce h_2 v bodě 2 limitu.

⇨ Funkce f_2, h_1 i h_2 mají v bodě 2 limitu a platí $\lim_{x\to 2} f_2(x) = \lim_{x\to 2} h_1(x) = \lim_{x\to 2} h_2(x) = 4$. Tyto funkce se sice liší funkční hodnotou v bodě 2, ale v jeho prstencovém okolí se chovají všechny stejně (tak jak je znázorněno na obr.2). Pokud se proměnná x přibližuje zleva nebo zprava libovolně blízko k bodu 2, odpovídající funkční hodnota $f(x)$ se přibližuje libovolně blízko k hodnotě 4.

➔ Formulujte vlastními slovy definici pojmu „limita funkce ve vlastním bodě“.

Úloha C4: Rozhodněte, které z následujících funkcí mají a které nemají limitu v bodě x_0. Rozhodnutí zdůvodněte.

Obr.4

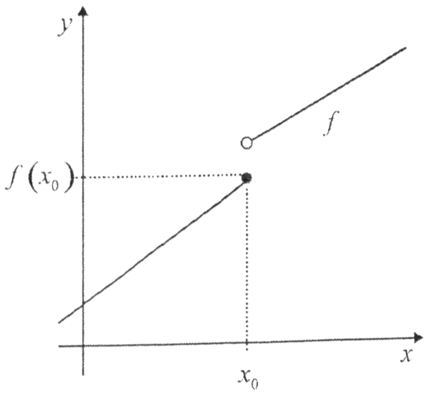


Definice: Funkce f má v bodě x_0 limitu a, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$ je $f(x) \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Píšeme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$

Úloha C5: Na obrázku 5 je graf funkce, která nemá v bodě x_0 limitu. Najděte takové ε, pro které neexistuje δ, aby platilo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a zároveň $f(x) \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Obr.5

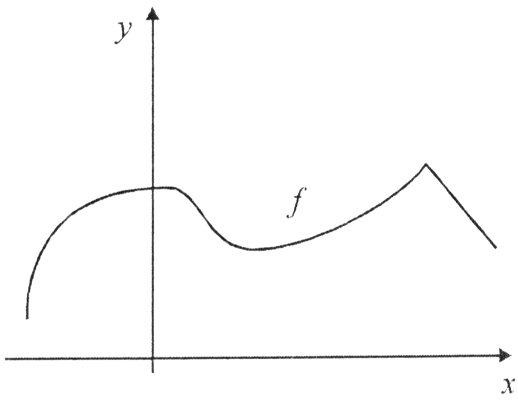


➔ Vyslovte definici limity bodě x_0 s použitím pojmu okolí bodu.

6.3 Zavedení pojmu spojitá funkce

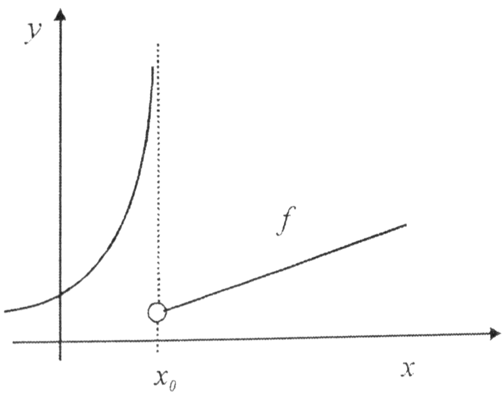
Při výuce jsem si ověřila předpoklad, že s intuitivním pochopením významu spojitosti nemají studenti problémy. Proto je možné používat termín „spojitost" již v tématu „Funkce", i když tento pojem zde ještě není exaktně definován (viz spirálovitý přístup). Pokud však seznamujeme studenty s určitou vlastností funkcí, měli bychom uvést také příklady funkcí, které tuto vlastnost nemají. (Nejprve na ukázkách grafů takových funkcí, později také předpisem funkce.) Myslím, že při výkladu tématu „Funkce" postačí, když studentům ukážeme následující „typy" grafů funkcí.

a) Graf je nepřerušen a funkce je spojitá v celém definičním oboru.



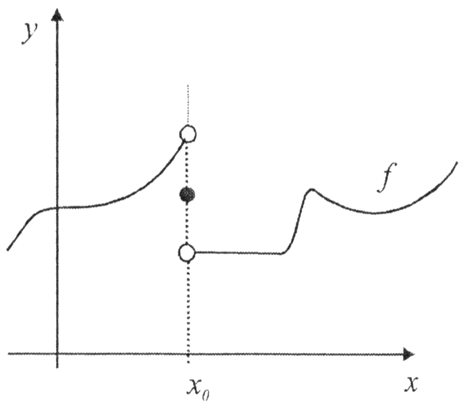
Obr.22. Ukázka grafu spojité funkce

b) Graf je přerušen v bodě, který nepatří do definičního oboru.



Obr.23. Ukázka grafu funkce, který je přerušen v bodě $x_0 \notin D(f)$

c) Graf je přerušen v bodě, který patří do definičního oboru; funkce v tomto bodě „skáče“.



Obr.24. Ukázka grafu funkce nespojité v bodě x_0

Studenti pak mohou mezi probíranými funkcemi sami hledat příklady uvedených situací. Zde je však nutné učinit dohodu o terminologii. Některé učebnice uvádějí, že v bodě, který nepatří do definičního oboru *„nemá smysl o spojitosti hovořit“* ([10], str.26), jiné, že funkce v takovém bodě *„není ani spojitá, ani nespojitá“* ([37], str.192). Přikláním se s vyjádření z [13] (viz definice 1) případně z [38]. V situaci b) a c) budeme říkat, že *„funkce v tomto bodě není spojitá“*. ([38], str.107) Při studiu elementárních funkcí se pak studenti setkávají převážně se situacemi a) a b).

Důležitější však je, jak k pojmu spojitost funkce (v bodě, v intervalu) přistoupit v tématu „Diferenciální počet“. Nejprve je nutné položit si otázku, co je cílem zavedení pojmu, jak hluboké pochopení problému spojitosti od studentů na gymnáziu očekáváme a jak se dále spojitost funkce využívá. Spojitost funkce studenti využívají, aniž by o tom věděli, v podstatě od prvního ročníku při řešení rovnic a nerovnic. Nyní můžeme ukázat, že řešení rovnic a nerovnic by nebylo možné, kdybychom o mnoha funkcích nevěděli, že jsou spojité. Výklad pojmu „spojitost“ tedy bezprostředně směřuje k vyslovení Bolzano-Weierstrassovy věty o nabývání mezihodnot a využití spojitosti při řešení rovnic. V této partii je pro studenty novinkou přibližné řešení rovnic vyšších stupňů. Více se spojitostí funkce zabýváme až u průběhu funkcí, kde nás zajímají především intervaly spojitosti a chování funkce v okolí bodů nespojitosti. Tolik k využití spojitosti v učivu.

Co se týká hloubky pochopení problému, již jsem uvedla, že spojitost funkce je jedna z vlastností funkcí, kterou studenti vnímají intuitivně. Nesetkala jsem se se studentem, který by nedokázal rozlišit grafy funkcí spojitých a nespojitých, stejně jako později rozhodnout o spojitosti či nespojitosti funkce z jejího předpisu. Z historického vývoje je zřejmé, proč je nutné definovat spojitost funkce pomocí definice 3. Studenti však mají pocit, že je příliš složitým jazykem pojmenováno cosi, co doposud dobře chápali. Za vhodný způsob definování spojitosti na gymnáziu považuji tvrzení 15 a tvrzení 16.

Předpokládejme tedy, že limita funkce již byla definována a cílem výkladu je seznámit studenty s pojmem spojitost funkce a definovat jej.

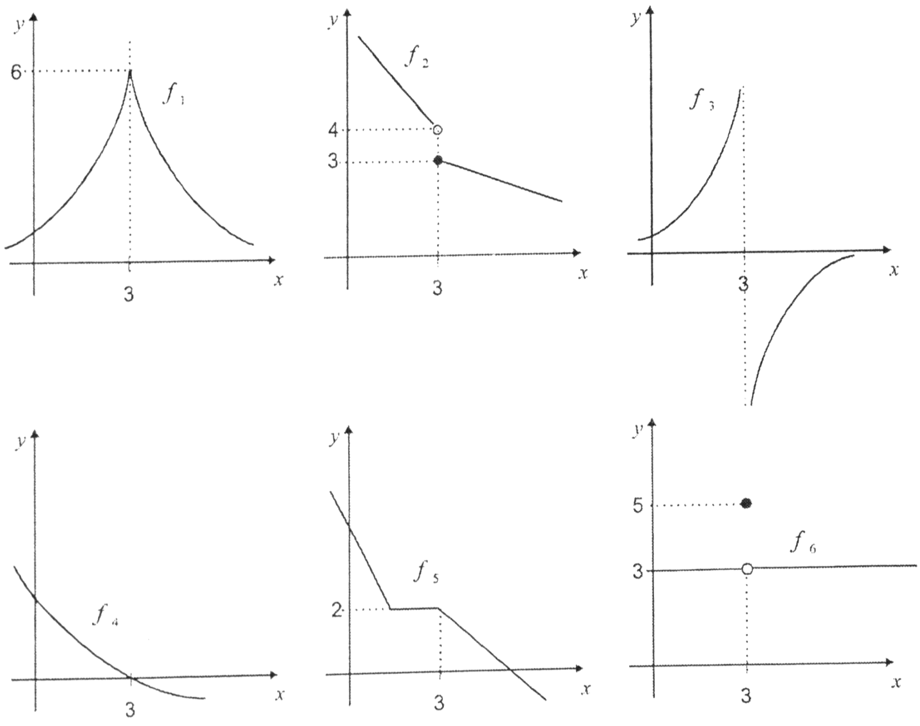
D) Spojitost funkce v bodě, spojitost funkce v intervalu

➔ Co si představíte, řekne-li se o nějaké funkci, že je spojitá, resp. nespojitá?

Úloha D1:

a) Prohlédněte si následující grafy funkcí f_1 až f_6. Které jsou podle vás spojité a které nespojité v bodě $x_0 = 3$?

Obr.1



b) Rozhodněte, pro které z funkcí f_1 až f_6 existuje limita v bodě 3. V takovém případě ji určete.

c) Zjistěte, pro které z uvedených funkcí patří číslo 3 do jejich definičního oboru. V tom případě určete funkční hodnotu v tomto bodě.

d) Rozmyslete si, jak spolu souvisí spojitost a limita funkcí v bodě $x_0 = 3$.

ⓘ Říkáme, že funkce je v určitém bodě spojitá, jestliže je v tomto bodě definována a její limita je zde rovna funkční hodnotě.

ⓘ O funkci, která v daném bodě nesplňuje aspoň jednu z těchto podmínek říkáme, že je v daném bodě nespojitá.

➔ Rozhodněte, kterou z uvedených podmínek nesplňuje každá z funkcí f_2, f_3 a f_6 z úlohy D1.

Účelem úvodní otázky je zjistit, zda se studenti již s pojmem spojitost setkali, případně zda si jej pamatují. Odpověď na otázku a) má sjednotit jejich představy.
Odpovědi na otázky b), c), d) mají směřovat k vyslovení definice spojitosti funkce v bodě.

Úloha D2: Načrtněte graf funkce, případně funkci uveďte vzorcem, aby vyhovovala následujícím požadavkům:

a) Je spojitá v bodě $x_0 = 2$.

b) Není spojitá v bodě $x_0 = 2$, $x_0 \in D(f)$, $\lim_{x\to 2} f(x)$ existuje.

c) Není spojitá v bodě $x_0 = 2$, $x_0 \in D(f)$, $\lim_{x\to 2} f(x)$ neexistuje.

d) Není spojitá v bodě $x_0 = 2$, $x_0 \notin D(f)$, $\lim_{x\to 2} f(x)$ existuje.

e) Není spojitá v bodě $x_0 = 2$, $x_0 \notin D(f)$, $\lim_{x\to 2} f(x)$ neexistuje.

f) Je spojitá v bodě $x_0 = 2$, $\lim_{x\to 2} f(x)$ neexistuje.

Během řešení těchto úloh by měl mít učitel stále přehled o práci jednotlivých studentů, aby mohl některým z nich pomoci. Studenti mohou řešit úlohy samostatně, vhodné je, pracují-li společně v malých skupinách. Při práci ve skupinách je podmínkou, aby se na řešení podíleli všichni. Po vyřešení těchto úloh by měl být obsah výrazu „funkce spojitá v bodě" studentům zřejmý a je možné vyslovit definici:

Definice: Funkce *f* je spojitá v bodě $x_0 \in R$, jestliže zároveň platí

a) $x_0 \in D(f)$,

b) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Jestliže není splněn alespoň jeden z těchto požadavků, říkáme, že funkce *f* není v bodě x_0 spojitá.

Jestliže je studentům spojitost v bodě dostatečně zřejmá (což by se mělo ukázat, pokud samostatně vyřeší úlohu podobnou úloze D2), je možno postoupit ke spojitosti funkce v intervalu, resp. v definičním oboru funkce. K tomu směřuje následující úloha.

Úloha D3: Pro každou z následujících funkcí určete definiční obor, načrtněte graf a rozhodněte, zda je funkce *f* spojitá v každém bodě definičního oboru:

a) $f: y = x^2 - x - 6$

b) $f: y = \sin x + x$

c) $f: y = \dfrac{1}{x-1} + 1$

d) $f: y = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x-3}, & x \neq 3 \\ 7, & x = 3 \end{cases}$

e) $f: y = \ln(x-2)$

Definice: Funkce je spojitá v otevřeném intervalu (a, b), je-li spojitá v každém bodě tohoto intervalu.

Úloha D4: Rozhodněte, zda jsou funkce z úlohy D3 spojité v těchto intervalech: $I_1=(0, 3)$, $I_2=(3, 7)$, $I_3=(0, 2)$.

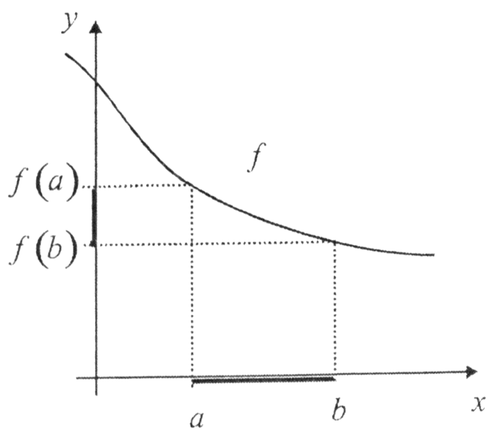
Při diskusi o úloze D3c) dojdeme k závěru, že funkce je spojitá v každém bodě intervalů $(-\infty,\ 0)$ a $(0,\ +\infty)$ (přerušena je v bodě, který do definičního oboru nepatří). Funkce z úlohy D3d) není ve svém definičním oboru spojitá, protože není spojitá v bodě $x = 3$, který patří do definičního oboru. Tím se dostáváme ke spojitosti funkce v intervalu. Definici spojitosti funkce v intervalu je možné vyslovit bez velké přípravy. Při diskusi o úloze D4 by měl učitel zjistit, zda studenti tuto definici pochopili a jsou schopni o spojitosti funkce v intervalu rozhodnout.

Úloha D5: Na obrázku 2 je graf funkce spojité v intervalu $(a,\ b)$. Na ose x je vyznačen interval $I = (a,\ b)$ a na ose y tomuto intervalu odpovídající množina funkčních hodnot, která tvoří interval $(f(a),\ f(b))$.

a) Načrtněte grafy tří funkcí spojitých v intervalu $I = (a,\ b)$. Na ose y vyznačte funkční hodnoty, které odpovídají hodnotám proměnné z intervalu I.

b) Rozmyslete si, jak může vypadat množina funkčních hodnot odpovídajících intervalu $I = (a,\ b)$ u spojitých funkcí.

Obr.2



Všimněte si, že na obr.2 můžeme mezi hodnotami $f(a)$ a $f(b)$ zvolit libovolnou hodnotu K a vždy k ní najdeme takový bod $x \in (a,\ b)$, pro který platí $f(x) = K$.

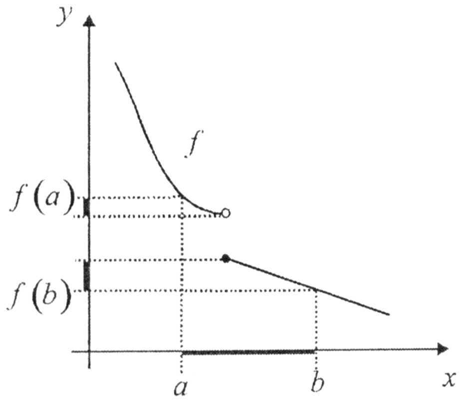
➔ Sledujte, zda spojité funkce, které jste načrtli v úloze D5, mají také tuto vlastnost.

Úloha D6: Na obrázku 3 je graf funkce *f*, která není spojitá v intervalu (*a*, *b*). Na ose *x* je vyznačen interval $I = \langle a, b \rangle$ a na ose *y* tomuto intervalu odpovídající množina funkčních hodnot.

a) Načrtněte grafy tří funkcí, které nejsou spojité v intervalu $I = \langle a, b \rangle$. Na ose *y* vyznačte funkční hodnoty, které odpovídají hodnotám proměnné z intervalu *I*.

b) Rozmyslete si, jak může vypadat množina funkčních hodnot odpovídajících intervalu $I = \langle a, b \rangle$ u nespojitých funkcí.

Obr.3



➔ Na obr.3 najděte v intervalu $\left(f(a),\ f(b)\right)$ takové *K*, kterému nelze přiřadit $x \in (a, b)$, pro které by platilo $f(x) = K$. Existují taková *K* u funkcí, které jste načrtli v úloze D6?

⇨ Zjistili jste, že u funkcí spojitých v intervalu (*a*, *b*) můžeme ke zvolenému *K* z intervalu $\left(f(a),\ f(b)\right)$ vždy najít odpovídající hodnotu *x* z intervalu (*a*, *b*), pro které platí $f(x) = K$. U nespojitých funkcí tomu tak vždy není.

Nyní se podíváme, jak je možné tuto vlastnost spojitých funkcí využít při řešení rovnic a nerovnic.

➔ Zjistěte, zda má rovnice $x^3 - 2x + 3 = 0$ alespoň jedno řešení v intervalu $\langle -3, -1 \rangle$.

ⓘ Platí věta: Je-li funkce f spojitá v (a,b) a mají-li čísla $f(a)$ a $f(b)$ různá znaménka, tj. $f(a)\cdot f(b)<0$, potom existuje alespoň jeden takový bod $x\in(a,b)$, v němž platí $f(x)=0$.

Studenti (s pomocí učitele) dospějí v úloze D5 k závěru, že v případě spojitých funkcí tvoří množina funkčních hodnot odpovídajících intervalu $I\in D(f)$ také interval nebo jednobodovou množinu (v případě, že funkce je v daném intervalu I konstantní). V úloze D6 studenti zjistí, že v případě nespojitých funkcí může tvořit množina funkčních hodnot odpovídajících intervalu $I\in D(f)$ interval, sjednocení intervalů případně jedno- i vícebodovou množinu. Touto diskusí se dostáváme k obsahu Bolzano-Weirstrassovy věty (o nabývání mezihodnot), k jejímu důsledku pro $f(a)\cdot f(b)<0$ a jeho využití při řešení rovnic a nerovnic.

Po výkladu pojmů „limita“ a „spojitost“ by studenti měli:

- vědět, co znamená, že funkce v daném bodě má, resp. nemá, vlastní či nevlastní limitu,
- vědět, co znamená, že funkce v daném bodě je, resp. není, spojitá,
- znát souvislost mezi pojmy limita funkce a spojitost funkce v bodě,
- mít představu, jak může vypadat graf v různých případech (např. funkce f je spojitá v definičním oboru, funkce g není v bodě x_0 spojitá a má v něm limitu atd.),
- umět vypočítat limity funkcí v libovolném bodě definičního oboru, v bodech nespojitosti a v nevlastních bodech (náročnost typů funkcí musí volit učitel s ohledem na zaměření a úroveň třídy),
- umět využít spojitost funkce při řešení rovnic a nerovnic,
- znát definici limity funkce a spojitosti funkce v bodě, v intervalu.

6.4 Zavedení pojmu derivace funkce

Následující výklad pojmu derivace jsem zaměřila především na to, aby studenti od začátku vnímali souvislost mezi tvarem grafu funkce a její derivací. Výuka by neměla směřovat k návodům na výpočty derivací různých funkcí, aniž by studenti měli přesnou představu o tom, co vlastně počítají.

Při výkladu pojmu derivace funkce se nabízí mnoho metodických prostředků, jejichž kombinací studenti mohou získat představu o podstatě derivování. Myslím si, že je vhodné využít především grafickou stránku v mnohem větší míře, než tomu bylo v českých učebnicích doposud. Důležité je, aby studenti pochopili význam derivace funkce v bodě jako směrnice tečny grafu funkce v tomto bodě a zároveň derivace jako funkce, která pomáhá odhalit vlastnosti funkce původní. V případě, že na výklad není mnoho času, dávám přednost úlohám vedoucím k pochopení podstaty derivace před počítáním derivací velkého počtu funkcí. Náročnější úlohy na derivování (včetně derivace exponenciální a logaritmické funkce) a důkazy většiny vět považuji za učivo vhodné do matematického semináře v maturitním ročníku.

Cíle výuky pojmu derivace bych seřadila podle úrovně získaných znalostí takto:

- znát význam derivace funkce v bodě a umět ji vypočítat,
- umět vypočítat derivace jednoduchých elementárních funkcí,
- chápat souvislost mezi funkcemi f, f', f'',
- umět využít derivaci při popisu průběhu funkce,
- umět řešit extremální úlohy s využitím derivace,
- umět derivovat náročnější funkce.

Náročnost úloh je třeba přizpůsobit úrovni třídy a hodinové dotaci matematiky. Zařazení důkazů vět do výkladu by měl učitel zvážit s ohledem na charakter třídy a čas, který může výuce věnovat. Považuji za vhodné jednodušší důkazy se studenty provést, některé je možno zadat např. jako nepovinné domácí úkoly. V návrzích učebního textu důkazy vět neuvádím.

Úlohy zařazené do následujícího výkladu by měly být řešeny společně s učitelem, nebo by alespoň měla proběhnout diskuse o výsledku. V případě, že graf funkce, který mají studenti načrtnout, není cílem úlohy, je vhodné k jeho sestrojení využít grafický kalkulátor nebo počítač.

V následujícím textu předpokládám, že studenti znají význam a definice pojmů rostoucí funkce, klesající funkce, maximum a minimum funkce, lokální maximum a lokální minimum funkce.

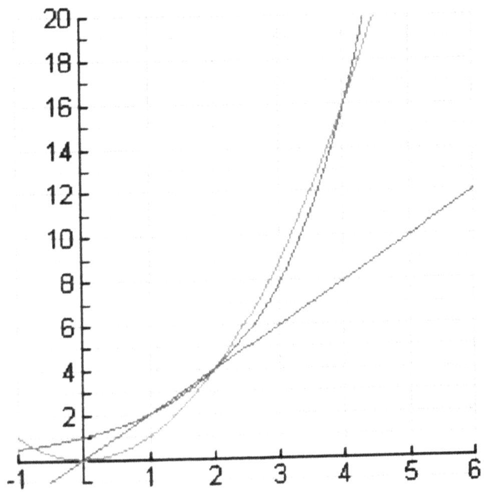
E) Derivace funkce

Úloha E1: Načrtněte grafy funkcí $f: y = 2x$, $g: y = x^2$, $h: y = 2^x$. Popište jejich vlastnosti. Ve kterých vlastnostech se shodují?

➔ Jednou ze společných vlastností funkcí *f, g, h* je, že jsou rostoucí v intervalu $\langle 0, \infty)$.

Nyní nás bude zajímat „míra růstu", můžeme také říci „strmost", těchto funkcí. Na následujícím grafu jsou funkce *f, g, h* z úlohy E1 zakresleny. Přiřaďte předpisy grafům funkcí a sledujte jejich průběh. Poznáte, ve kterých intervalech je graf funkce *g* strmější než grafy zbývajících funkcí? Navrhněte postup, kterým by bylo možno rozhodnout jednoznačně.

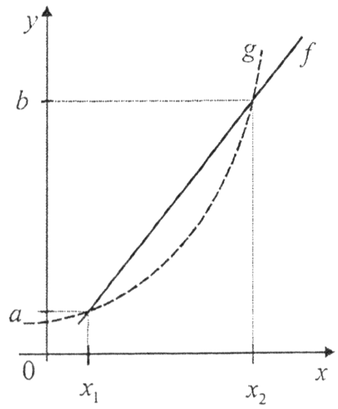
Obr. 1



Tato úloha ukazuje, že vlastnost funkce (neboli jistá její kvalita) může mít také svou kvantitu. (Slovo „strmost" jsem pro charakterizování této vlastnosti zvolila proto, že se běžně v matematice nepoužívá, avšak jeho význam je zřejmý. Pokud si graf funkce představíme jako profil terénu, pak čím je graf strmější, tím těžší by bylo jej zdolat.) Podíváme-li se na grafy např. v intervalu $(2, 3)$, je patrné, že nejstrmější je zde graf funkce g a nejméně strmý je graf funkce f. Tomuto pořadí odpovídá (v tomto intervalu) i pořadí funkčních hodnot v jednotlivých bodech. (V každém bodě tohoto intervalu má nejvyšší funkční hodnotu funkce s nejstrmějším grafem.) Je tomu tak ale vždy? Je vyšší funkční hodnota v daném bodě předpokladem větší strmosti křivky? Co vlastně vypovídá strmost o funkčních hodnotách? Tyto otázky by si měli studenti pokládat spolu s učitelem a hledáním odpovědí postupně dospět k zavedení pojmu derivace.

Podívejme se na následující obrázek:

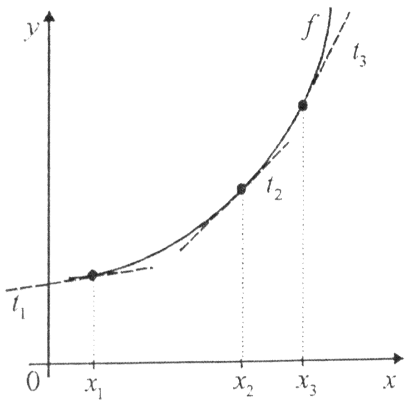
Obr.2



Funkce f i g vzrostou v intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$ z hodnoty a na hodnotu b. Jsou obě stejně strmé? V blízkosti hodnoty x_1 je viditelně strmější funkce f, v blízkosti hodnoty x_2 je strmější funkce g. Uprostřed mezi těmito hodnotami však již nelze pouhým pohledem bezpečně rozhodnout.

ⓘ Strmost křivky v daném bodě můžeme posoudit podle směru její tečny v tomto bodě:

Obr.3

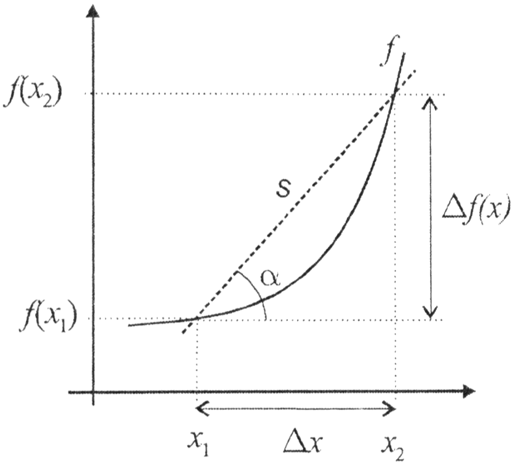


Z obrázku je patrné, že čím strmější je křivka v daném bodě, tím větší úhel svírá tečna (s bodem dotyku v daném bodě) s osou x. Zbývá nám tedy určit velikost tohoto úhlu.

➔ Z analytické geometrie známe pojem „směrnice přímky“. Zopakujte si jeho význam.

ⓘ Směrnici sečny *s* procházející dvěma známými body $[x_1,\ f(x_1)]$, $[x_2,\ f(x_2)]$ funkce *f* určíme takto:

Obr.4

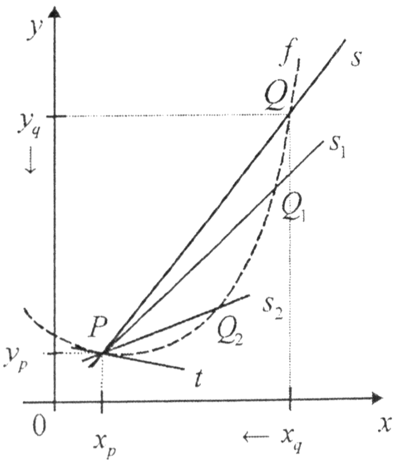


$$k = tg\alpha = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Jak určíme směrnici tečny k dané funkci v daném bodě?

⇨ Tečna je vlastně „limitou sečny“:

Obr.5



Přímka *PQ* je sečnou grafu funkce *f*. Bod $Q[x_q,\ y_q]$ budeme přibližovat k bodu $P[x_p,\ y_p]$, což je bod dotyku tečny *t* s grafem funkce *f*. Hodnota proměnné x_q se bude přibližovat k hodnotě x_p, hodnota $f(x_q) = y_q$ se bude přibližovat k hodnotě $f(x_p) = y_p$, dokud se sečna nezmění v tečnu.

ⓘ Říkáme, že tečna *t* je limitní polohou sečny s.

ⓘ Směrnici tečny grafu funkce f v bodě $P[x_p,\ y_p]$ vypočítáme takto:

$$k = \lim_{x \to x_p} \frac{f(x) - f(x_p)}{x - x_p}.$$

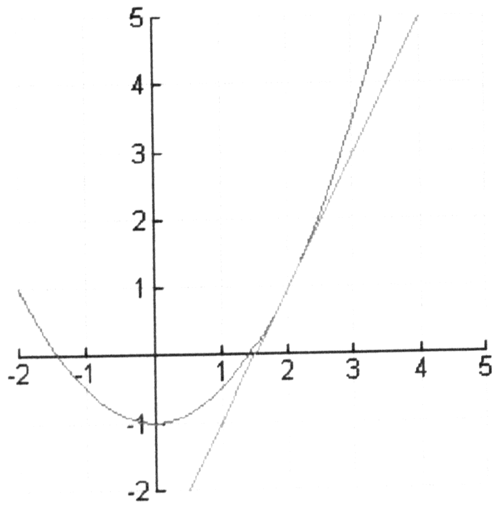
Tento výpočet můžeme zapsat i jinak, např.: $k = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_p + \Delta x) - f(x_p)}{\Delta x}$

Učitel by se měl nejprve pokusit studentům pomoci, aby k výše uvedenému vztahu došli sami. Pro ty, kterým se to nepodaří, je třeba dát výpočtu směrnice tečny konkrétní význam. Proto by bylo vhodné vrátit se ještě k obr.5 a ukázat si zde, co znamená $x \to x_p$, respektive $\Delta x \to 0$, kde vidíme $f(x)-f(x_p)$ atd.

Úloha E2: Vypočítejte směrnici tečny funkce $f: y = 0,5x^2 - 1$ v bodě $P[2, y_p]$.

➔ Na obr. 5 je zakreslen graf funkce $f: y = 0,5x^2 - 1$ i její tečna v bodě $P[2, y_p]$. Zjistili jsme, že v tomto bodě je hodnota směrnice $k = 2$. Co toto číslo znamená?

Obr.6



Výsledek $k = 2$ by měl mít pro studenty konkrétní význam. („Výsledek $k = 2$ znamená, že tečna grafu funkce f s bodem dotyku P svírá s osou x úhel přibližně 63,43°.“)

Mají-li studenti chápat souvislost mezi funkcí a její derivací, musí vědět, že funkce *tangens* je v intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ rostoucí, pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ je $tg(x) < 0$, pro $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ je $tg(x) > 0$, $tg(0) = 0$.

➔ Zopakujte si vlastnosti funkce $f: y = tg\, x$ v intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Úloha E3: Na základě grafu funkce $f: y = 0,5x^2 - 1$ z obr.6 odhadněte, zda jsou směrnice jejích tečen s body dotyku $[3, y]$ a $[1, y]$ větší nebo menší než směrnice tečny v bodě $P[2, y_p]$. Odhad zdůvodněte.

Úloha E4: Vypočítejte směrnice tečen funkce $f: y = 0,5x^2 - 1$ v bodech dotyku $T_1[-3, y_1], T_2[-2, y_2], T_3[-1, y_3], T_4[0, y_4], T_5[1, y_5], T_6[3, y_6]$ a zaneste tyto hodnoty do grafu. Pro každou z tečen vypočítejte velikost úhlu, který svírá s osou x.

Úloha E3 ověří, zda studenti pochopili, že čím strmější je funkce v daném bodě, tím větší je hodnota směrnice tečny v tomto bodě.
V úloze E4 si studenti procvičí výpočet směrnice. Není nutné, aby všichni počítali všechny hodnoty, vhodnější je pracovat po skupinách a výsledky například nanášet do grafu na tabuli. V grafu bude zakreslena funkce $f(x) = 0,5x^2 - 1$, naznačeny její tečny v daných bodech a nanášeny vypočítané hodnoty směrnic. Bude patrné, že v bodech, kde je derivace záporná, resp. kladná, je funkce *f* klesající, resp. rostoucí, a že čím strmější je funkce v určitém bodě, tím větší hodnotu má v tomto bodě směrnice její tečny.

⇨ Je snadné zjistit, že vypočítané hodnoty směrnic z předchozí úlohy leží na přímce s předpisem $y = x$.
Ověříme, zda se jedná o náhodu, nebo na této přímce leží směrnice všech tečen funkce *f*.
Vypočítáme směrnici funkce $f: y = 0,5x^2 - 1$ v „obecném" bodě $P[x_p, y_p]$:

$$k = \lim_{x \to x_p} \frac{f(x) - f(x_p)}{x - x_p} = \lim_{x \to x_p} \frac{0,5x^2 - 1 - 0,5x_p^2 + 1}{x - x_p} = \lim_{x \to x_p} \frac{0,5(x - x_p)\cdot(x + x_p)}{x - x_p} =$$

$$= \lim_{x \to x_p} 0,5(x + x_p) = x_p$$

Výpočet ukázal, že hodnoty směrnic tečen v libovolném bodě funkce $f: y = 0,5x^2 - 1$ tvoří novou funkci k s předpisem $k: y = x$.

Směrnice tečny funkce je v matematice velice důležitý a užitečný pojem. Proto má i svůj název: „derivace funkce".

Definice derivace funkce : Je dána funkce *f* a bod x_p, jehož okolí patří do definičního oboru funkce *f*. Pokud existuje

$$\lim_{x \to x_p} \frac{f(x)-f(x_p)}{x-x_p} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_p+\Delta x)-f(x_p)}{\Delta x}$$, nazýváme tuto limitu *derivací funkce f* v bodě x_p.

💣Nezapomeňte, že do okolí bodu x_p náleží i bod x_p. Derivace funkce tedy může existovat pouze v bodech, které patří do definičního oboru této funkce.

ⓘ Derivaci funkce *f* v bodě x_p obvykle značíme $f'(x_p)$.

ⓘ „*Derivace funkce f v bodě* x_p" je totéž jako „*směrnice tečny grafu funkce f s bodem dotyku* $[x_p, f(x_p)]$". ($f'(x_p) = k_p$)

Jak již bylo řečeno, pro mnoho studentů je velice náročný přechod od derivace ve významu konkrétního čísla k derivaci jako funkci a zpět. Tento přechod je možno procvičit ještě na následující úloze:

Úloha E5: Je dána funkce $f: y = 2-2x^2$.

a) Vypočítejte derivaci funkce *f* v bodech $x_1 = -2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1,\ x_5 = 2,\ x_6 = 3$.

b) Načrtněte graf funkce *f* a do stejné soustavy souřadnic naneste i vypočítané hodnoty derivace v jednotlivých bodech. Zjistěte, zda leží všechny na grafu nějaké funkce a pokud ano, určete ji.

c) Vypočítejte derivaci funkce *f* v bodě x_p a výsledek porovnejte se zjištěním z úlohy b).

Derivace funkce f v bodě x je hodnota $f'(x)$. (Příklad: derivace funkce $f: y = 0,5x^2 - 1$ v bodě $x_0 = 2$ je $f'(2) = 2$.)

Funkci, která každé hodnotě proměnné x, ve které existuje $f'(x)$, přiřadí hodnotu derivace $f'(x)$, nazýváme také „derivace funkce" a značíme ji f'. Tato funkce je dána vzorcem $y' = f'(x)$. (Příklad: derivace funkce $f: y = 0,5x^2 - 1$ je funkce $f': y' = x$.)

➔ Která funkce je derivací funkce $f: y = 2 - 2x^2$? Jakou hodnotu má derivace funkce f v bodě $x = 7$? Co tato hodnota udává?

Nyní by studenti měli chápat, že s pomocí derivace funkce můžeme určit hodnotu směrnice tečny v libovolném bodě grafu funkce.

6.5 Prohloubení poznatků o derivaci funkce

V následujícím odstavci studenti postupně odvozují derivace různých typů funkcí. V úlohách se snažím nejprve využít graf a z něj vyvozenou představu derivace. Jde mi především o to, aby studenti nevnímali derivování „mechanicky", ale aby v derivaci funkce od počátku viděli odraz vlastností funkce.

F) Derivace elementárních funkcí

Úloha F1: Je dána konstantní funkce $f: y = 3$. Načrtněte její graf, rozmyslete si, jaký směr budou mít tečny ke grafu této funkce v různých bodech dotyku a odhadněte derivaci f' této funkce. Odhad ověřte výpočtem.

➔ Uvědomte si, jak vypadají grafy konstantních funkcí a odhadněte, co z toho plyne pro jejich derivace. Odvoďte derivaci f' funkce $f: y = b$, $b \in R$.

Úloha F2: Jsou dány lineární funkce $f: y = -2x$, $g: y = 2x$, $h: y = 3x$. Načrtněte jejich grafy a odhadněte předpisy funkcí f', g', h'. Odhad ověřte výpočtem

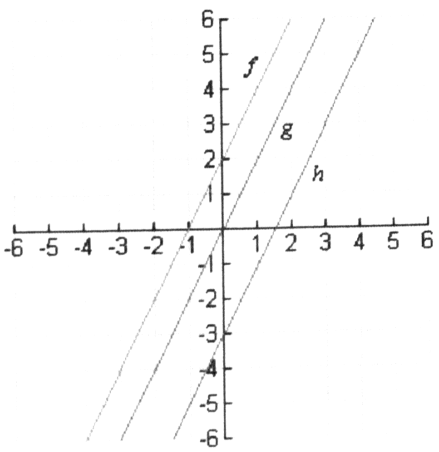
Úlohy F1 a F2 vycházejí z grafické představy derivace. Studenti načrtnou graf a představí si, jaký směr budou mít tečny v jednotlivých bodech grafu. Např. v úloze F1 mají tečny všude vodorovný směr, proto je $f'(x) = tg\alpha = 0$ ve všech bodech funkce f.

Při řešení úlohy F2 by si studenti měli uvědomit, že úhel, který svírají tečny k dané funkci s osou x, je pro danou lineární funkci ve všech bodech stejný, strmější funkci odpovídá větší úhel a tedy větší absolutní hodnota derivace, klesající funkce má derivaci zápornou atd. Při odvozeních si studenti zopakují a procvičí definici derivace.

➔ Připomeňte si, jaký význam má koeficient a v přepisu lineární funkce $f: y = ax$. Odvoďte její derivaci f'.

Úloha F3: Na obr.1 jsou grafy tří lineárních funkcí. (Grafy těchto funkcí jsou rovnoběžné přímky.) Určete předpisy funkcí. Rozhodněte, zda se budou lišit jejich derivace. Své rozhodnutí ověřte výpočtem derivací.

Obr.1



➔ Na základě řešení úlohy F3 odhadněte derivaci lineární funkce $f: y = ax + b$, $a, b \in R$. Odhad zdůvodněte a ověřte odvozením.

ⓘ Již jsme odvodili: $f: y = b,\ y' = 0,\ b \in R,$

$f: y = ax,\ y' = a,\ a \in R,$

$f: y = ax + b,\ y' = a,\ a, b \in R.$

Protože by již studenti měli chápat význam derivace i její definici, je nyní vhodné se k definici vrátit a diskutovat o situacích, kdy $k = \lim_{x \to x_p} \frac{f(x) - f(x_p)}{x - x_p}$ neexistuje.

ⓘ Funkce f má v bodě x_p derivaci, pokud je v tomto bodě definována a existuje zde $\lim_{x \to x_p} \frac{f(x) - f(x_p)}{x - x_p}$. Tato limita neexistuje v těch bodech definičního oboru, ve kterých funkce nemá tečnu.

Úloha F4: Načrtněte graf funkce $f : y = |x|$, určete její definiční obor a rozhodněte, ve kterých bodech definičního oboru nemá derivaci a proč. Jak bude vypadat derivace v ostatních bodech definičního oboru? Načrtněte ke grafu funkce f i graf funkce f'.

➔ Jak ještě mohou vypadat grafy funkcí, které nemají v nějakém bodě definičního oboru derivaci? Načrtněte tři takové grafy.

ⓘ Řekneme, že funkce má derivaci v intervalu (a, b), pokud má derivaci ve všech bodech tohoto intervalu.

Úloha F5: Na základě grafů funkcí rozhodněte, které z následujících funkcí nemají v některém bodě definičního oboru derivaci:

a) $f : y = \sqrt{x}$, b) $g : y = \operatorname{sgn} x$, c) $h : y = \frac{1}{x}$, d) $l : y = [x]$ (celá část)

Úloha F6: Rozhodněte, která z následujících vět platí.

a) Jestliže je funkce f v bodě x_p spojitá , pak má v bodě x_p derivaci.

b) Jestliže má funkce f v bodě x_p derivaci, pak je v bodě x_p spojitá

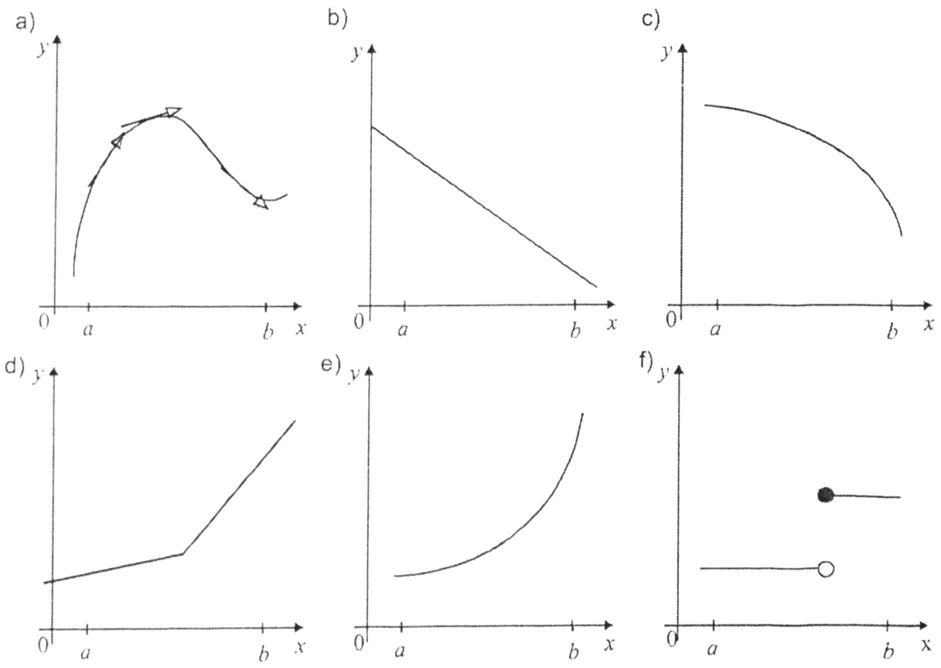
c) Funkce f je v bodě x_p spojitá právě tehdy, když má v bodě x_p derivaci .

V úloze F5a), b), d) se dostáváme k jednostranné derivaci. Nepovažuji však za nutné tento pojem na gymnáziu v běžné výuce definovat. V uvedených příkladech stačí, když studenti budou vědět, že ve zjištěných bodech (např. v bodě $x = 0$ v případě funkce f : $y = \sqrt{x}$) derivace neexistuje.

Za důležité považuji, aby studenti brzy poznali, co vše je možno z derivace funkce o původní funkci vyčíst. Většinu těchto souvislostí jsou schopni objevit sami. Pomoci k tomu může např. následující úloha F7. Zde budou zjišťovat, jak se tvar grafu funkce odrazí v její derivaci. Tato úloha je náročná na představivost studentů, proto se neobejde bez spolupráce učitele. Studenty však, podle mých zkušeností, řešení podobných úloh baví. Za vhodné považuji výsledky této úlohy utřídit, případně ukázat na dalších grafech. Podobných úloh, které pomáhají pochopit souvislosti mezi funkcemi f a f', je možno pro zpestření výuky vymyslet mnoho, např. grafům funkcí přiřazovat grafy jejich derivací apod.

Úloha F7: Na obr.2 jsou části grafů funkcí. Přikládejte ke grafům tužku jako tečnu (viz obr.2a)) a rozhodněte, zda existuje a jaké vlastnosti bude mít derivace těchto funkcí v intervalu (a, b). (Sledujte především, pro která x je $f'(x) < 0$, resp. $f'(x) > 0$, zda je derivace f' rostoucí nebo klesající.) Zkuste přibližně načrtnout grafy funkcí f'.

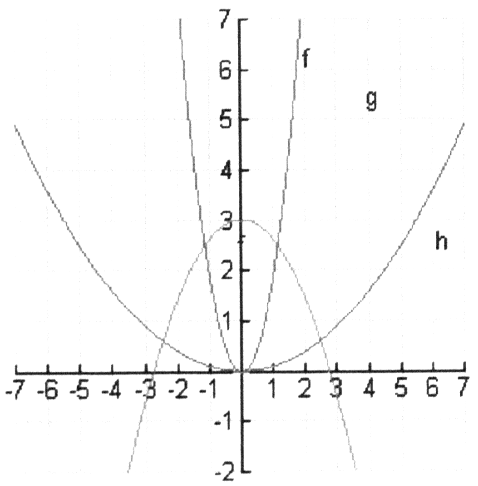
Obr.2



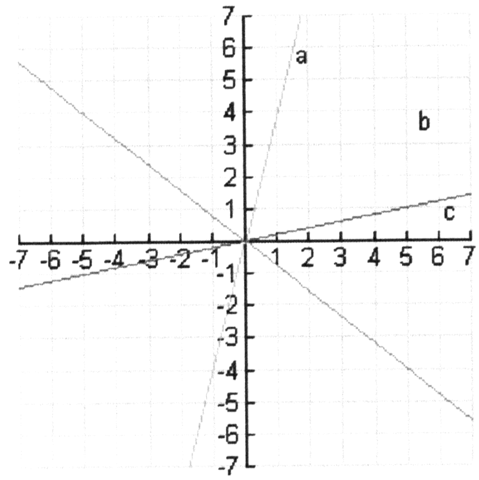
Úloha F8: Odvoďte derivaci kvadratické funkce $f : y = x^2$. Načrtněte grafy funkcí f i f' do společné soustavy souřadnic a sledujte souvislosti.

Úloha F9: Na obr.3a jsou grafy tří kvadratických funkcí a na obr. 3b grafy jejich derivací. Přiřaďte grafu funkce graf odpovídající derivace a přiřazení zdůvodněte.

Obr.3a

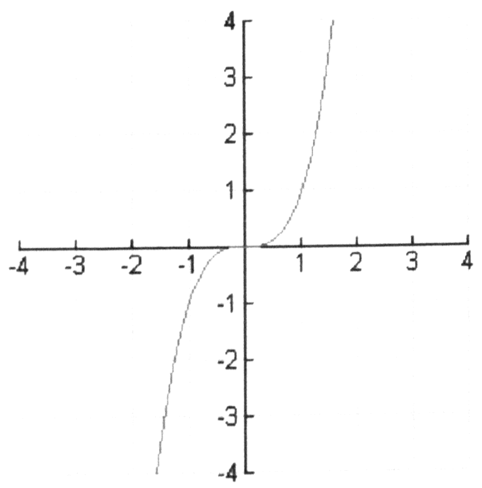


Obr.3b



Úloha F10: Na obr.4 je zobrazen graf funkce $f : y = x^3$. Na jeho základě odhadněte, jaké vlastnosti bude mít funkce f', a pak f' vypočtěte.

Obr.4



V úlohách F9 a F10 si studenti procvičí souvislost mezi vlastnostmi funkcí f a f'. V úloze F10 mohou ke grafu funkce opět přiložit tužku jako tečnu a takto jí posouvat podél křivky. Zjistí, že tečna všude kromě bodu $x = 0$ směřuje „vpravo vzhůru“, derivace proto bude nezáporná, cestou podél grafu v intervalu $(-2, 0)$ se úhel tečny zmenšuje, hodnota derivace proto klesá atd. Derivace f' bude tedy funkce, pro kterou platí $D(f') = \mathbb{R}$, $H(f') = \langle 0, \infty)$, v intervalu $(-\infty, 0)$ je funkce f' klesající, v intervalu $(0, \infty)$ rostoucí. Možná si někteří studenti uvědomí, že tyto vlastnosti má funkce $y = x^2$. Studentům je třeba zdůraznit, že tyto úvahy nejsou důkazem, pouze pomáhají lepšímu pochopení. Proto musí následovat výpočet požadované derivace. Obdobná úvaha o vlastnostech funkce f' by mohla předcházet i odvození v úloze F8.

➔ Již známe derivace funkcí $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$. Vyslovte hypotézu o tvaru derivace mocninné funkce $y = x^n$, kde n je přirozené číslo. Jaká bude podle této hypotézy derivace funkce $f: y = x^4$? Ověřte hypotézu výpočtem derivace této funkce v bodě $x_0 = 2$.

ⓘ Derivace funkce $f: y = x^n$, kde n je přirozené číslo, je $y' = n \cdot x^{n-1}$.

Úloha F11: Načrtněte graf funkce $f: y = \sin x$. Sledujte směr tečen v jednotlivých bodech grafu a uveďte vlastnosti funkce f'. Odhadněte předpis f'.

Studenti by již měli mít dostatečné znalosti, aby v úloze F11 poznali, že f' bude také periodická, v bodech, kde graf funkce $y = \sin x$ protíná osu x, budou tečny nejstrmější, f' zde tedy bude nabývat největší nebo nejmenší hodnoty, v bodech $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, kde funkce $y = \sin x$ nabývá maxima a minima, bude směr tečny vodorovný, takže f' zde bude nabývat hodnoty 0 atd. Mohou se pokusit načrtnout přibližný graf funkce f'. Po vyslovení hypotézy, že $(\sin x)' = \cos x$, považuji za vhodné derivaci funkce $y = \sin x$ odvodit. Podobným způsobem mohou studenti najít derivaci funkce $y = \cos x$.

G) Pravidla pro derivování

Úloha G1: Vypočítejte derivaci funkce $f: y = x^2 + x$.

Výpočet derivace funkce z úlohy G1 není náročný, přesto je možné podobné úlohy vypočítat snáze, budeme-li znát několik jednoduchých pravidel, která můžeme při derivování využít. Všechna následující pravidla platí pouze v těch bodech, ve kterých mají všechny uvedené funkce derivaci.

➔ Odvoďte derivaci funkce h, pro kterou platí $h(x) = f(x) + g(x)$.

ⓘ Pravidla pro derivování součtu a rozdílu funkcí

$h(x) = f(x) + g(x)$, $h'(x) = f'(x) + g'(x)$
$h(x) = f(x) - g(x)$, $h'(x) = f'(x) - g'(x)$

Tato pravidla platí v bodech x, ve kterých mají funkce f i g derivaci.

Úloha G2: Je dána funkce $f: y = 3x^3 - 2x^2 + 1$. Vypočítejte její derivaci.
(Protože ještě nemáme pravidlo pro derivování součinu funkce a reálného čísla, zapíšeme funkci $y = x^3 + x^3 + x^3 - x^2 - x^2 + 1$.)

➔ Vypočítejte derivace funkcí $y = 5x^3$, $y = 2\sin x$, $y = -3x^5$ (využijte pravidlo pro derivaci součtu a rozdílu funkcí). Na základě těchto výpočtů vyslovte hypotézu o derivaci součinu reálného čísla a a funkce f, tj. $(a \cdot f(x))'$.

ⓘ Pro derivaci součinu reálného čísla a a funkce f platí $(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$.

Můžeme se setkat také s funkcemi, které jsou součinem nebo podílem jiných funkcí, např. $y = x^2 \cdot \sin x$, $y = \dfrac{\cos x}{x^4}$ atd. Žádné z výše uvedených pravidel při jejich výpočtu využít nemůžeme. Je však možné odvodit ještě následující pravidla:

ⓘ V bodech, ve kterých mají funkce f i g derivaci platí
$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f \cdot g'}{g^2}, \; g(x) \neq 0.$$

(Místo zápisu $f(x)$, $g(x)$ jsme použili zjednodušený zápis f, g)

Úloha G3: Vypočítejte derivace funkcí:

a) $y = x \cdot \cos x$, b) $y = x^3 \cdot x^4$, c) $y = x^6 \cdot \sin\frac{\pi}{4}$, d) $y = (3x+2)^2$

Úloha G4: Vypočítejte derivace funkcí:

a) $y = \frac{x^2}{\sin x}$, b) $y = \frac{2x^6}{4x^2}$, c) $y = \frac{\cos x}{5}$, d) $y = x^{-3}$

Účelem úloh G3b) a G4b) je ukázat studentům, že není dobré používat pravidla pro výpočet derivace mechanicky. Derivace funkcí $y = x^3 \cdot x^4$ a $y = \frac{2x^6}{4x^2}$ samozřejmě mohou vypočítat pomocí pravidla pro derivaci součinu, resp. podílu funkcí, ale pokud je předem upraví ($x^3 \cdot x^4 = x^7$, $\frac{2x^6}{4x^2} = \frac{1}{2}x^4$, $x \neq 0$), výpočet derivací se zjednoduší. Při výpočtu derivace funkce $y = x^6 \cdot \sin\frac{\pi}{4}$ si pravděpodobně někteří studenti neuvědomí, že $\sin\frac{\pi}{4}$ je konstanta. Derivaci funkce $y = (3x+2)^2$ musí studenti počítat jako derivaci součinu funkcí nebo ji před výpočtem umocnit, protože pravidlo pro výpočet derivace složené funkce ještě nebylo uvedeno. Funkci $y = x^{-3}$ je třeba před výpočtem derivace zapsat $y = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ a počítat jako derivaci podílu, protože zatím bylo odvozeno pouze pravidlo pro derivaci mocninné funkce $f(x) = x^n$, $n \in N$.

Všechny derivace z úloh G3 a G4 již umíme vypočítat. Některé výpočty však můžeme ještě více zjednodušit, když budeme znát další pravidla pro výpočty derivací.
Zatím jsme zavedli pravidlo pro výpočet derivace funkce $y = x^n$, kde n bylo přirozené číslo.

➔ Vypočítejte podle pravidla pro derivaci podílu funkcí derivace funkcí $y = x^{-2}$, $y = x^{-6}$ a ověřte, zda ke stejnému výsledku dojdete při použití pravidla pro derivaci funkce $y = x^n$.

ⓘ Pravidlo $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$ platí i pro $n \in Z^-$.

➔ Vypočítejte derivaci funkce $f: y = \sqrt{x}$. (K výpočtu využijte definici derivace.)

⇨Výsledek je stejný, jako kdybychom použili pravidlo $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$. Skutečně je možné dokázat, že toto pravidlo platí i pro mocninné funkce $y = x^n$, $n \in R$

ⓘ Pro derivaci mocninné funkce s exponentem $n \in R,\ \ x \in R^+$ platí $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$

Ještě zbývá zavést poslední pravidlo, které zjednoduší výpočty složených funkcí. Jedná se o např. o funkci $y = (2x-3)^5$. Derivaci této funkce nemůžeme počítat podle pravidla pro mocninné funkce, protože základem mocniny není *x*, ale argument (2*x*-3).

ⓘ Pro derivaci složené funkce platí $\left[f\left(g(x)\right)\right]' = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$. Funkci *g* říkáme vnitřní funkce, funkci *f* vnější funkce. Toto pravidlo platí, pokud má funkce *g* derivaci v bodě *x* a funkce *f* derivaci v bodě $g(x)$.

Příklad: Ve funkci $f\!: y = (2x-3)^5$ je vnitřní funkce $g: y = 2x-3$ a vnější funkce $f: z = y^5$. Funkce *g* má derivaci pro všechna $x \in R$ a funkce *f* pro všechna $y \in R$.

Úloha G5: U následujících složených funkcí určete vnější a vnitřní funkci, jejich definiční obor, a vypočítejte jejich derivace. a) $y = \sin\left(x^2 + x\right)$, b) $y = \sqrt{\dfrac{1}{x-2}}$.

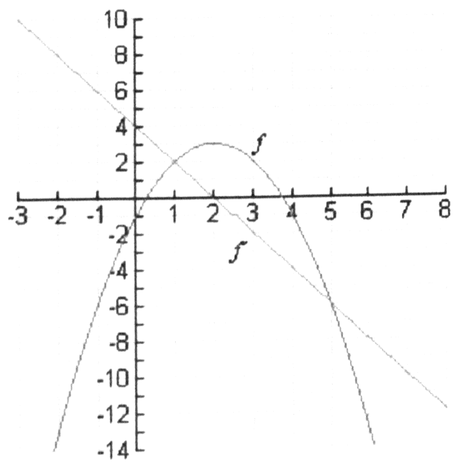
V následujícím odstavci si studenti rozšíří znalosti, které získali při zavádění pojmu derivace a při odvozování derivací jednoduchých elementárních funkcí. Tehdy však na základě znalosti grafu funkce, resp. rovnice, kterou je funkce dána, hledali její derivaci, nyní se naučí využít znalost vlastností derivace k popisu vlastností původní funkce. Protože mou snahou je zapojit studenty aktivně do výkladu nových poznatků, budou některé věty používané při popisu průběhu funkce objevovat během řešení úloh. Všechny objevené poznatky musí být v zápětí exaktně zformulovány. Vhodné je, pokud si studenti postupně sami vypracují přehled vlastností funkce a jejich „odrazu“ v první i druhé derivaci. V úlohách často využívám zobrazení grafu derivované funkce i její derivace do stejné soustavy souřadnic. Domnívám se, že pokud si studenti na základě grafu funkce budou představovat i její derivaci a naopak, rozvíjí se tím jejich představivost a prohlubuje se pochopení souvislostí mezi funkcí a její derivací. Derivace tím také nabývá konkrétní podoby a není jen novou rovnicí vypočítanou podle určitých pravidel. Někteří studenti mohou mít s tímto „grafickým“ pojetím potíže. Výbornou pomůckou, která zvýší atraktivitu i efektivitu výuky a těmto studentům pomůže, jsou opět grafické kalkulátory nebo počítače. Umožňují například zobrazit do stejné soustavy souřadnic funkci i její derivaci a ukázat tak hledané souvislosti na mnoha příkladech.

H) Využití derivace – průběh funkce

Na různých příkladech (např. F7 a F9) jste viděli, jak souvisí tvar grafu funkce a její derivace.

➔ Na obrázku 1 jsou sestrojeny grafy funkcí $f: y = -x^2 + 4x - 1$ a její derivace $y' = -2x + 4$. Pozorujte, jak se vlastnosti funkce f projeví v její derivaci. Ve kterém bodě $p \in R$ je $f'(p) = 0$? Jakou vlastnost má funkce f v tomto bodě?

Obr. 1



➔ Dokončete věty:

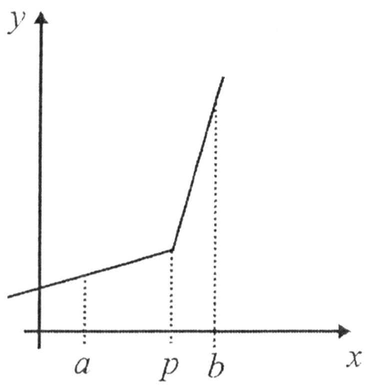
Jestliže je derivace funkce f v intervalu $(a,\ b)$ kladná, je funkce f v tomto intervalu....

Jestliže je derivace funkce f v intervalu $(a,\ b)$ záporná, je funkce f v tomto intervalu.....

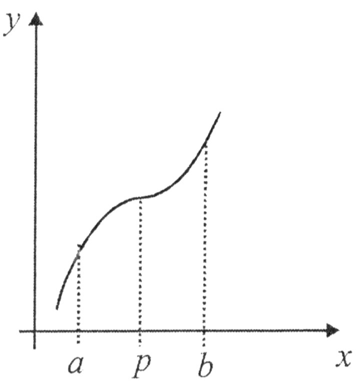
ⓘ O funkci rostoucí nebo klesající v intervalu v intervalu $(a,\ b)$ budeme říkat, že je v tomto intervalu monotónní.

➔ Na obrázcích 2a a 2b jsou grafy funkcí, které jsou v intervalu $(a,\ b)$ rostoucí a přesto není jejich derivace v bodě $p \in (a,\ b)$ kladná. Vysvětlete.

Obr.2a



Obr.2b



Uvědomte si, jak důležité je pořadí vět v matematické větě.

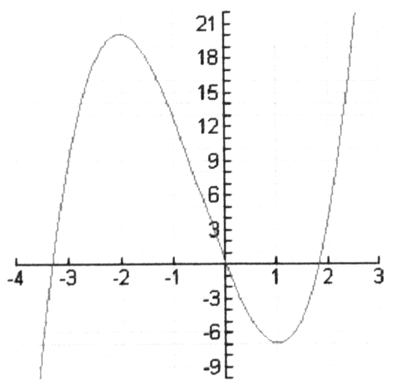
Platí věta: „Jestliže v každém bodě intervalu $(a,\ b)$ existuje $f'(x)$ a platí pro ni $f'(x) > 0$, je funkce f v tomto intervalu rostoucí."

Obráceně tato věta neplatí, funkce f může být v intervalu $(a,\ b)$ rostoucí, přesto nemusí mít ve všech bodech tohoto intervalu derivaci (obr.2a), nebo může v některých bodech p tohoto intervalu platit $f'(p) = 0$ (obr 2b).

V úvodní úloze tohoto odstavce si studenti zopakují souvislost mezi znaménkem derivace a monotónnií grafu funkce. Dále si mohou představit, jak se bude měnit směr tečen ke grafu funkce, pokud se bod dotyku bude blížit k bodu $p = 2$ zleva nebo zprava, a jak se toto projeví v hodnotách derivace („...pokud se blížíme k bodu p zprava, je funkce f rostoucí, ale tečny budou svírat stále menší úhel s osou x a proto klesá hodnota derivace..."). Při sledování grafu funkce $f: y = -x^2 + 4x - 1$ a její derivace je možné studentům např. na grafickém kalkulátoru ukázat, že derivace funkce se nezmění, pokud se ve funkci *f* změní absolutní člen.

Úloha H1: Na obrázku 3 je graf funkce $f: y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$.

Obr.3

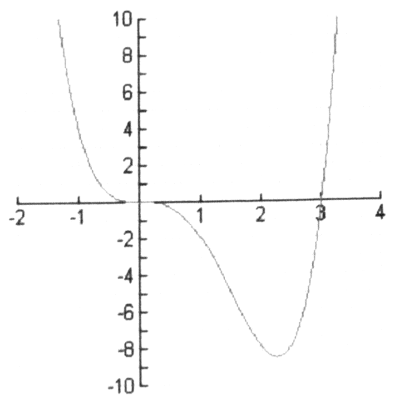


a) Určete, ve kterých intervalech bude $f'(x)$ kladná, resp. záporná, a odhadněte, ve kterých bodech bude $f'(x) = 0$. Ověřte výpočtem derivace.

b) Zobrazte graf funkce f i graf funkce f' do stejné soustavy souřadnic a sledujte souvislosti.

Úloha H2: Na obrázku 4 je graf funkce $f: y = x^4 - 3x^3$.

Obr.4

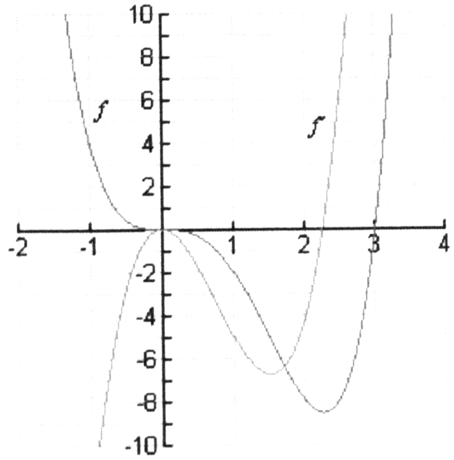


a) Vypočítejte $f'(x)$ a určete, ve kterých bodech je $f'(x) = 0$. Najděte tyto body na grafu funkce *f*.

b) Zobrazte graf funkcí f i f' na grafickém kalkulátoru a sledujte souvislosti (např. souvislost mezi strmostí grafu funkce f v určitém bodě a hodnotou $f'(x)$ v tomto bodě, monótonii f' a tvar grafu funkce f atd.).

➔ V předchozích úlohách jste mimo jiné určovali body, ve kterých platilo $f'(x)=0$. O jaké body se jednalo?

Souvislosti mezi grafy funkce $f: y=x^4-3x^3$ a její derivace v úloze H2 mohou studenti podrobně popsat. Studenti uvidí tyto grafy:



Obr.25. Graf funkce $f: y=x^4-3x^3$ a její derivace $y'=4x^3-9x^2$

Rozbor souvislostí může vypadat například takto: v intervalu (-2, 0) vidíme, že funkce f je klesající, derivace f' je tedy záporná. Pokud si představíme tečny k funkci v tomto intervalu, blíže k $x=0$ budou „vodorovnější", jejich úhel s osou x se tedy bude zmenšovat a proto se také hodnota derivace blíží k nule, v bodě $x=0$ bude tečna vodorovná, proto je zde $f'(0)=0$ atd. Studenti s dobrou představivostí se mohou pokusit nejprve načrtnout graf derivace funkce f a pak jej porovnat se skutečností.

➔ Volte sami různé předpisy kvadratických funkcí a polynomických funkcí vyšších stupňů. Vypočítejte jejich derivace a na grafických kalkulátorech zobrazte do stejné soustavy souřadnic vždy danou funkci a její derivaci. Sledujte body, ve kterých je

$f'(x)=0$. Jaký je rozdíl v „chování" derivace v okolí lokálních extrémů a v okolí bodů, kde platí $f'(x)=0$, avšak funkce f zde nemá extrém?

Pro zpestření výuky by bylo zajímavé zobrazit několik grafů funkcí a jejich derivací projekčním přístrojem a sledovat je společně. Až studenti souvislosti dostatečně „zažijí", mohou si zobrazením funkce a její derivace např. kontrolovat správnost výpočtu derivace.

Úloha H3: Najděte funkce, které potvrzují nepravdivost následujících vět.

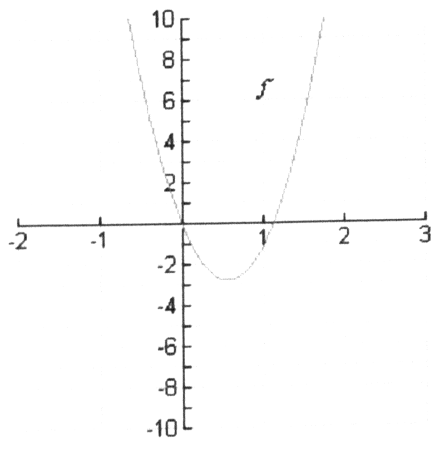
a) Jestliže v bodě x_0 platí $f'(x_0)=0$, pak má funkce f v tomto bodě lokální extrém.

b) Jestliže má funkce v bodě x_0 lokální extrém, pak zde platí $f'(x_0)=0$.

ⓘ Platí věta: Má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém a existuje-li v tomto bodě derivace $f'(x_0)$, pak platí $f'(x_0)=0$.

H4: Na obr.4 je zobrazen graf derivace f' funkce $f: y=3x^3-5x^2$. Určete na základě tohoto grafu vlastnosti funkce f a zkuste ji načrtnout.

Obr.4



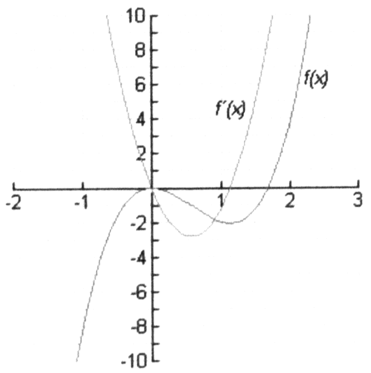
➔ Funkce $g: y=3x^3-5x^2+2$ se od funkce f z úlohy H4 liší pouze absolutním členem. Rozhodněte, jak se bude lišit graf funkce g' od grafu funkce f' z obrázku 4.

⇨ Uvědomte se, že z derivace funkce vyčteme její vlastnosti, ale nelze z ní určit umístění grafu funkce f ve „vertikálním směru". Proto je nutné vypočítat např. průsečíky grafu funkce f s osami souřadnic, abychom mohli graf funkce přesně umístit. Průběh funkce můžete nejprve zpracovat do tabulky:

x	$x<0$	$x=0$	$0<x<10/9$	$x=10/9$	$x>10/9$
$f'(x)=9x^2-10x$	>0	=0	<0	=0	>0
$f: y=3x^3-5x^2$	↗	max	↘	min	↗

Graf funkce f vypadá takto:

Obr.5



V úloze H4 si studenti nejprve musí uvědomit, které vlastnosti funkce f' jsou pro určení vlastností funkce f rozhodující, a ty z grafu vyčíst. Domnívám se, že tento způsob hledání průběhu funkce nedává studentům možnost úlohy řešit „mechanicky".

Možná se vám v úloze H4 nepodařilo vystihnout dostatečně přesně tvar grafu funkce f. K tomu potřebujete znát ještě další vlastnosti funkcí – **konvexnost a konkávnost**.

Úloha H5: Na obr.6 jsou části grafů funkcí. Přiřaďte k těmto grafům odpovídající vlastnosti derivací, pokud o derivaci zobrazené funkce v intervalu (a, b) víte, že:

a) je kladná

b) je záporná

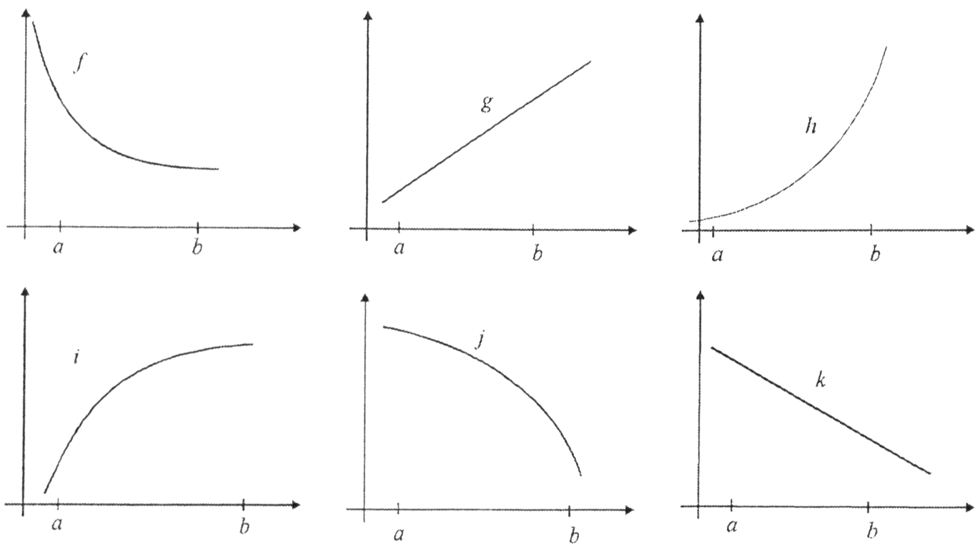
c) je kladná a rostoucí,

d) je kladná a klesající,

e) je záporná a rostoucí,

f) je záporná a klesající.

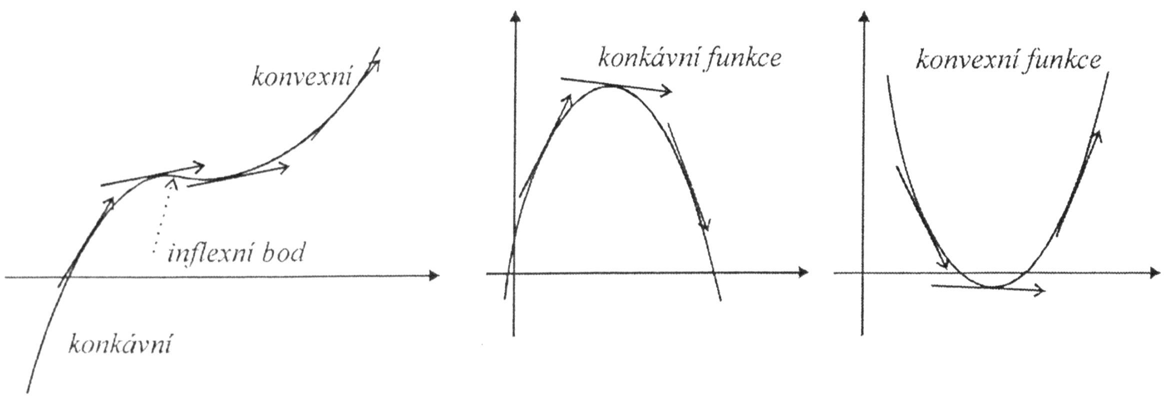
Obr.6



ⓘ Funkce *f* a *h* z úlohy H4 nazýváme konvexní, funkce *i, j* nazýváme konkávní.

Konvexnost a konkávnost funkce souvisí s polohou grafu funkce vzhledem k jeho tečnám.

Obr.7



ⓘ Funkce *f*, která má ve všech bodech intervalu (*a, b*) derivaci, je v tomto intervalu konvexní, jestliže ve všech bodech tohoto intervalu leží graf funkce *f* „nad tečnou".

Funkce *f*, která má ve všech bodech intervalu (*a, b*) derivaci, je v tomto intervalu konkávní, jestliže ve všech bodech tohoto intervalu leží graf funkce *f* „pod tečnou".

V inflexním bodě se funkce mění z konvexní v konkávní nebo naopak.

➔ Zkuste na základě řešení úlohy H5 odhadnout, jak souvisí konvexnost či konkávnost funkce s její derivací. Ověřte svůj odhad na grafech kvadratických funkcí a jejich derivací.

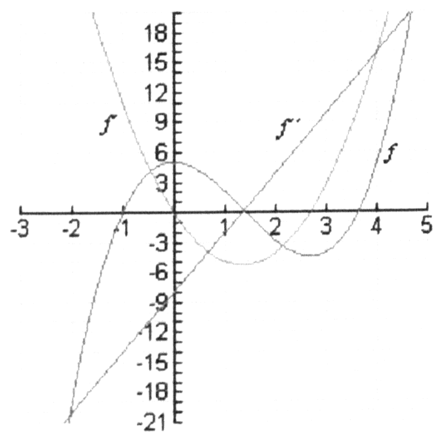
ⓘ Je-li funkce f' v (a, b) rostoucí, je funkce f v intervalu (a, b) konvexní,
je-li funkce f' v (a, b) klesající, je funkce f v intervalu (a, b) konkávní.

➔ Navrhněte způsob, kterým zjistíte, zda je f' v daném intervalu rostoucí, resp. klesající, pokud znáte rovnici, kterou je dána.

ⓘ Pokud funkci f' můžeme dále derivovat, získáme tak druhou derivaci funkce f, kterou značíme f''. Mezi funkcemi f' a f'' platí stejné souvislosti jako mezi funkcemi f a f'.

➔ Na obr.8 je zobrazen graf funkce $f: y = x^3 - 4x^2 + 5$, graf její první derivace $y' = 3x^2 - 8x$, i graf druhé derivace $y'' = \left(f'(x)\right)' = \left(3x^2 - 8x\right)' = 6x - 8$. Najděte na grafu funkce f lokální maximum, lokální minimum a inflexní bod. Jak se v těchto bodech „chová“ první, resp. druhá, derivace? Zpracujte poznatky o funkci f do podobné tabulky jako v úloze H4.

Obr.8



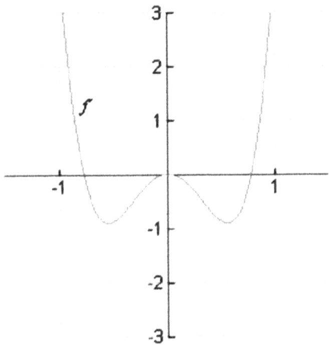
➔ Volte různé polynomické funkce třetího či čtvrtého stupně. Vypočítejte jejich první i druhé derivace a na grafických kalkulátorech zobrazte do stejné soustavy souřadnic vždy danou funkci a její derivace f' a f''. Sledujte souvislosti.

➔ Doplňte následující tabulku:

f	Konvexní v (a, b)	Konkávní v (a, b)	Maximum v bodě x_0	Minimum v bodě x_0	Inflexní bod v bodě x_0
f'	↗ v (a, b)	↘ v (a, b)			
f''					

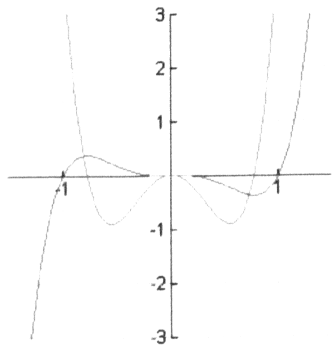
Úloha H6: Na obr.9 je sestrojen graf funkce f'. Na jeho základě určete vlastnosti funkce f. Zkuste začrtnout graf funkce f, jestliže víte, že prochází bodem $[0, 0]$.

Obr.9



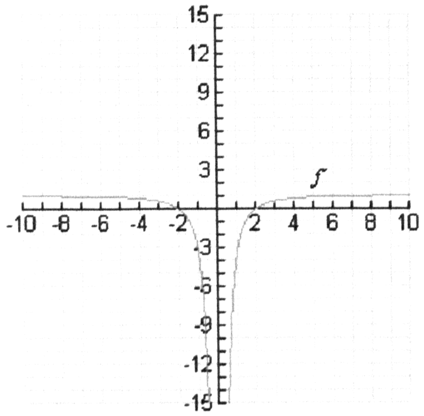
⇨ Na obr.10 je zobrazen graf hledané funkce f z úlohy H6 spolu s grafem funkce f'. Zkontrolujte si správnost svého řešení úlohy H6. (Poznámka: $f: y = 2x^5 - 2x^3$, nalezení předpisu nebylo cílem úlohy.)

Obr.10



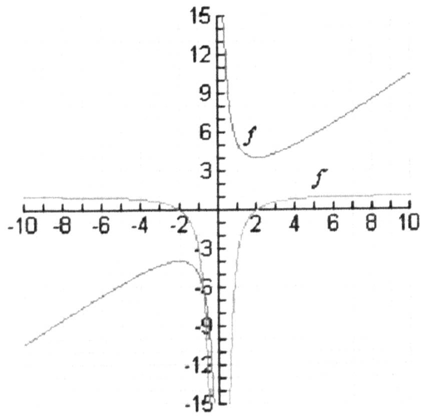
Úloha H7: Na obr.11 je graf derivace f' neznámé funkce f. Určete ty vlastnosti funkce f, které je možné z grafu vyčíst.

Obr. 11



⇨ Na obr. 12 jsou zobrazeny grafy funkce f' i f z úlohy H7. (Funkce f je dána předpisem $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x}$, jeho určení nebylo cílem úlohy.)

Obr. 12



Úlohy H6 a H7 ověří, zda studenti pochopili, které vlastnosti derivace f' a funkce f spolu souvisí. Je třeba zdůraznit, že nemůžeme nic usuzovat o vlastnostech funkce f mimo oblast zobrazenou v grafu. O funkci f z úlohy H7 studenti zjistí, ve kterých intervalech je rostoucí, resp. klesající, a konvexní, resp. konkávní. Nemohou však nic zjistit o chování funkce v bodě 0 a v jeho okolí, ve kterém není zobrazen graf funkce f'. Proto po těchto úlohách budou následovat úlohy na vyšetřování průběhu funkce na základě rovnice funkce, tak jak je tomu v [10].

Po vyšetřování průběhu funkce budou následovat úlohy týkající se nalezení extrémů a okamžitých změn některých veličin. Tuto látku jsem do svého projektu již nezařadila, protože je dostatečně zpracována v učebnici [10] a mnoha sbírkách příkladů.

7. Závěr

V současné době se diferenciální počet na gymnáziu v mnoha třídách nevyučuje. Důvodem bývá malá hodinová dotace výuky matematiky, náročnost tématu a skutečnost, že úlohy z této oblasti nebývají v přijímacích testech na vysoké školy. Domnívám se však, že absolvent gymnázia by měl mít základní znalosti i z tohoto tématu, protože se jedná o významnou součást matematiky posledních staletí. Výklad diferenciálního počtu také nabízí možnost shrnout poznatky o funkcích a zopakovat tak látku z předcházejících ročníků.

Protože jsem chtěla, aby základ, ze kterého budu vycházet při tvorbě metodických postupů, byl co nejširší, stručně jsem zmapovala historický vývoj základních pojmů diferenciálního počtu – spojitosti, limity a derivace funkce.

Velkým přínosem pro mě bylo studium učebnic různých autorů. V analýze učebnic jsem se snažila postihnout jejich vzájemné odlišnosti a popsat ty části výkladu a úlohy, které se mi zdály být zajímavé a odlišné od metodických postupů a úloh uváděných v našich učebnicích a sbírkách.

V této práci jsem se pokusila navrhnout takový způsob výkladu diferenciálního počtu na gymnáziu, ve kterém by se studenti seznamovali se základními pojmy a myšlenkami především na základě vlastních úvah. Domnívám se, že tento způsob výuky přispívá k rozvoji schopností a samostatného uvažování studentů, což je nezanedbatelný úkol středoškolské matematiky. Při volbě postupů jsem vycházela z poznatků z psychologie, studia zahraničních i českých učebnic a v neposlední řadě z vlastních zkušeností z výuky matematiky na gymnáziu.

Po studiu podkladů z psychologie jsem dospěla k závěru, že bývá přeceňována schopnost abstrakce studentů, a proto jsem se rozhodla položit důraz na grafickou stránku jevů. Nové pojmy a poznatky díky grafickému znázornění získávají konkrétní podobu. Velice důležitá je také motivace studentů. Abych umožnila zažít pocit úspěchu při řešení úloh všem studentům, jsou v návrzích učebních textů zařazeny i úlohy poměrně jednoduché. Velice důležitá je také úloha učitele. Měl by mít stále přehled o úrovni znalostí a schopností jednotlivých studentů, o jejich budoucích studijních plánech a motivaci ke studiu matematiky. Na základě těchto hledisek se musí rozhodnout, do jaké hloubky bude látku probírat, zda bude běžně do výkladu zařazovat důkazy matematických vět, jak náročné příklady bude se studenty řešit atd. Pokud studenty výuka zaujme, nebudou se ptát, jak tomu často bývá, k čemu jim probíraná látka bude, ale možná budou vnímat probíranou látku jako zajímavý hlavolam.

Tuto práci jsem psala s ohledem na její možné budoucí využití. Učitel matematiky může využít celý projekt nebo pouze zpestřit výuku některými metodickými postupy a úlohami z projektu či analyzovaných učebnic. Domnívám se, že i kapitoly o psychologii mohou být pro učitele matematiky přínosné, protože psychologická podstata výuky bývá často podceňována. Z metodického hlediska jsem projektem výuky diferenciálního počtu založeným na grafickém pojetí chtěla vytvořit alternativu k učebnici [10], která je v současné době jedinou schválenou učebnicí diferenciálního počtu pro gymnázia.

8. Literatura

[1] American Mathematical Society (1998): Názory na výuku matematiky na středních školách (v USA). *Pokroky matematiky, fyzika a astronomie* **43**, 248-260.

[2] Boček, Bočková, Charvát (1994): Matematika pro gymnázia – Rovnice a nerovnice. Prometheus, Praha.

[3] Bürger, Fischer, Malle a kol. (1989): Mathematik Oberstufe 1
Arbeistbuch für die 5. Klasse der AHS.
Verlag Hölder Pichler Tempsky, Wien.

[4] Bürger, Fischer, Malle a kol. (1991:, Mathematik Oberstufe 3
Arbeistbuch für die 7. Klasse der AHS.
Verlag Hölder Pichler Tempsky, Wien.

[5] Fontana D. (1997): Psychologie ve školní praxi. Portál, Praha.

[6] Hejný M. a kolektiv (1990): Teória vyučovaní matematiky 2. SPN, Bratislava.

[7] Holt J. (1995): Jak se děti učí. Agentura STROM, Praha.

[8] Holt J. (1994): Proč děti neprospívají. Agentura STROM, Praha.

[9] Houska J., Hrubý D.(1999): Učební osnovy matematiky na gymnáziích. *Matematika – fyzika – informatika* **9**, 199-205.

[10] Hrubý D., Kubát J. (1997): Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet. Prometheus, Praha.

[11] Koenig, Schulz a kol. (1997): Mathematik sekundarstufe II – Analysis Grundkurs. Volk und Wissen Verlag Gmbh, Berlin.

[12] Kolektiv autorů (2005): Rámcový vzdělávací program pro gymnaziální vzdělávání, pilotní verze. Výzkumný ústav pedagogický, Praha.

[13] Kössler M. (1926): Úvod do počtu diferenciálního. JČMF, Praha.

[14] Košč L. (1972): Psychológia matematických schopností. SPN, Bratislava.

[15] Kumorovitzová M., Novák J.(1994): Nauč mě počítat – metodika korekce vývojových dyskalkulií. Augusta a.s., Praha.

[16] Kuřina F., Čuhajová V. (1999): Matematika, studenti a škola. *Učitel matematiky* **4**, 248-255.

[17] Miková M. (2001): Postoje studentů nematematicky zaměřených tříd gymnázií k matematice. *Matematika – fyzika – informatika* **3**, 133-139.

[18] Miková M.: Vlastnosti funkcí. Přijato k publikaci, *Učitel matematiky.*

[19] MŠMT ČR (1991): Učební osnovy čtyřletého gymnázia, Prometheus, Praha.

[20] MŠMT ČR (1999): Učební dokumenty pro gymnázia. Fortuna, Praha.

[21] Nečasová E. (1996): Zkušenosti s použitím programovatelné kalkulačky TI-81 při výuce na gymnáziu. *Praxe učitele matematiky-fyziky-informatiky* **1**, 55-58.

[22] Odvárko O. (2000): Matematika pro gymnázia – Funkce. Prometheus, Praha.

[23] Odvárko O. (1997): Matematika pro gymnázia – Goniometrie. Prometheus, Praha.

[24] Odvárko O., Božek M., Ryšánková M., Smida J. (1985): Matematika pro 2. ročník gymnázií. SPN, n.p., Praha.

[25] Odvárko O., Fořt J., Novák B., (1978): Matematika pro Gymnázia, sešit 3. SPN, n.p., Praha.

[26] Odvárko O. (1995): Matematika pro gymnázia – Posloupnosti a řady. Prometheus, Praha.

[27] Petáková J. (2000): Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Prometheus, Praha.

[28] Rámcový plán předmětu matematika na gymnáziích země Berlín Spolkové republiky Německo, (2002).

[29] Reichel, Müller, Hanisch, Laub (1991): Lehrbuch der Mathematik 7. Verlag Hölder Pichler Tempsky Wien.

[30] Riečan B., Bero P., Smida J., Šedivý J. (1989): Matematika pro 4. ročník gymnázií. SPN, n.p., Praha.

[31] Riečan B, Vaňatová L.(1982): Matematika pro gymnázia, sešit 7. SPN, n.p., Praha.

[32] Robová J.(1999): Vyšetřování vlastností elementárních funkcí s využitím grafického kalkulátoru. *Matematika – fyzika – informatika* **9**, 233-238.

[33] Schwabik Š. (1998): Druhá krize matematiky aneb potíže růstu. Sborník Matematika v proměnách věků I, Dějiny matematiky sv. 11. Prometheus, Praha.

[34] Schwabik Š. (1996): Několik postřehů k vývoji matematické analýzy v 19. století. Sborník Matematika v 19. století, 7-37, Prometheus, Praha.

[35] Schwabik Š., Šarmanová P. (1996): Malý průvodce historií integrálu. Dějiny matematiky, svazek 6. Prometheus, Praha.

[36] Stašková M. (1993): Poruchy učení v matematice. Diplomová práce MFF UK, Praha.

[37] Szirucsek, Dinauer, Unfried, Schatzl (1991): Mathematik 7. Verlag Hölder Pichler Tempsky, Wien.

[38] Veselý J. (1997): Matematická analýza pro učitele, 1. a 2. díl. Matfyzpress, Praha.

[39] Votava M. (2002): Ilustrace definice limity funkce na grafickém kalkulátoru. *Matematika – fyzika – informatika* **12,** 9-17.

Postoje studentů nematematicky zaměřených tříd gymnázií k matematice.

Marcela Miková,
Gymnázium, Strakonice

V závěru školního roku 1999/2000 jsem v předposledním ročníku několika gymnázií zadala dotazník, zjišťující postoje studentů nematematicky zaměřených (dále jen *nematematických*) tříd gymnázií k matematice a její výuce. Dotazník měl formu volby z nabízených odpovědí.
Účelem dotazníku bylo zjistit:
- **jaká část studentů si volí školu (třídu) právě s ohledem na příslušné zaměření,**
- **co studenti očekávají od výuky matematiky,**
- **zda některé kapitoly matematiky činí při studiu výraznější potíže než jiné,**
- **na jaké typy vysokých škol se studenti hlásí,**
- **která témata studenti považují za užitečná vzhledem k následujícímu studiu.**

Pro porovnání jsem dotazník zadávala také ve všeobecně zaměřených třídách.
Respondenty byli studenti předposledních ročníků čtyřletých i víceletých gymnázií v tomto počtu:
117 studentů všeobecně zaměřených tříd,
256 studentů nematematických tříd, z toho: 156 z humanitních tříd, 29 z výtvarně zaměřené třídy,
19 ze sportovní třídy a 52 ze tříd s rozšířenou výukou jazyků.

Vyhodnocení dotazníku

U většiny bodů dotazníku byl rozdíl v rozložení odpovědí mezi nematematickými a všeobecnými třídami nepatrný, a proto uvádím pouze odpovědi studentů nematematických tříd. Ve dvou případech se směrodatnými rozdíly v odpovědích uvádím odpovědi obou skupin. Tučně jsou vyznačeny zvlášť zajímavé výsledky.
Dále uvádím jednotlivé body tak, jak byly formulovány v dotazníku (v závorce je uvedeno znění pro studenty osmiletého studia, pokud bylo odlišné), a v tabulce procentuální rozložení odpovědí mezi studenty nematematických tříd.
Nejprve mě zajímalo, kolik studentů při volbě studia zohledňuje zaměření školy nebo třídy.

Studuji zde

nabídka:	odpovědělo:
protože mě zajímá dané zaměření	65%
protože škola je blízko mého bydliště	7%
protože jsem se na jinou školu nedostala	4%
z jiných důvodů	22%

Na ZŠ (v nižších ročnících gymnázia) mi matematika činila potíže.

nabídka:	odpovědělo:
ANO	5%
SPÍŠE ANO	15%
SPÍŠE NE	39%
NE	41%

Na gymnáziu (ve vyšších ročnících gymnázia) mi matematika činí potíže.

nabídka:	odpovědělo:
ANO	**14%**
SPÍŠE ANO	**32%**
SPÍŠE NE	39%
NE	13%

Matematika mě baví.

nabídka:	odpovědělo:
ANO	16%
SPÍŠE ANO	27%
SPÍŠE NE	**38%**
NE	**18%**

Jistě jste si všimli, že matematika nebaví 56% studentů, ale potíže činí (nebo spíše činí) 46% studentů. Zajímalo mě proto, kolik studentů matematika nebaví, přestože jim nečiní potíže, a zda některé naopak baví, ačkoli jim potíže činí.
Ukázalo se že **16% studentů matematika nebaví, ačkoli jim nečiní potíže, a 7% baví, přestože jim činí potíže.**
Nejzajímavější ale bylo, že více než polovina studentů ze skupiny *baví a přitom činí potíže* byla studenty jedné školy. To podle mého názoru ukazuje na úlohu učitele – jejich učitel zřejmě vyučuje tak, že matematika baví i méně „matematicky nadané“ studenty.

A nyní k dalším otázkám.

Uvítal(a) bych, kdyby se ve výuce matematiky postupovalo pomaleji .

nabídka:	odpovědělo:
ANO	24%
SPÍŠE ANO	32%
SPÍŠE NE	29%
NE	14%

Látku bych lépe pochopil(a), kdybychom spočítali více příkladů.

nabídka:	odpovědělo:
ANO	**41%**
SPÍŠE ANO	**37%**
SPÍŠE NE	16%
NE	6%

Z těchto výsledků je zřejmé, že téměř polovině (44%) studentů vyhovuje tempo výuky, ale většina (78%) cítí potřebu probranou látku důkladně procvičit na větším počtu příkladů.

V další tabulce jsou uvedeny odpovědi na následující tři body dotazníku. (U každého bodu byla vypsána témata uvedená v tabulce, studenti mohli označit libovolný počet témat.)

- *Z matematiky mě nejvíce **zaujala** tato témata.*
- *Největší **potíže mi činila** tato témata.*
- *Pokud budu matematiku pro další studium potřebovat, domnívám se, že **uplatním** tato témata.* (K tomuto bodu uváděli odpověď všichni dotazovaní studenti, tedy i ti, kteří se chystají studovat humanitní obory.)

téma	zaujalo	činí potíže	uplatním při dalším studiu
rovnice a nerovnice	**53%**	10%	**27%**
funkce	21%	**36%**	21%
kombinatorika a pravděp. *)	22%	**29%**	**27%**
statistika *)	6%	10%	**27%**
goniometrie	16%	24%	12%
planimetrie	**25%**	21%	13%
stereometrie	**33%**	**27%**	15%
analytická geometrie *)	12%	17%	9%
komplexní čísla *)	11%	15%	6%
posloupnosti a řady	3%	7%	5%

Témata označená *) nebyla ještě v některých dotazovaných třídách probrána. Tučnějším písmem jsou v každém sloupci vyznačeny tři odpovědi s největší četností.

Určitě stojí za povšimnutí, že např. ***stereometrii*** uvedli někteří studenti v obou případech – zaujala je a zároveň jim činila potíže. Neplatí tedy, že náročná látka přestává být pro studenty atraktivní.

Zajímavé jsou také rozdíly četností odpovědí mezi prvním a třetím sloupcem u tématu ***statistika***. Studenty zjevně příliš nezaujala, ale uvědomují si její důležitost např. v psychologii, sociologii a dalších společenských vědách. Proto by podle mého názoru bylo vhodné, zařadit do výuky statistiky zmínku o jejím využití v uvedených oblastech. Studenti by mohli například provést vlastní psychologický průzkum a spočítat korelace mezi zkoumanými jevy.

Studenty nezaujalo ani téma ***posloupnosti a řady*** a neočekávají jeho další uplatnění. Domnívám se, že zařazením finanční matematiky jistě atraktivita tohoto tématu stoupne, protože si studenti ověří jeho využití v běžném životě.

Na otázku
„Který obor byste chtěl(a) studovat po maturitě?“
odpověděli studenti nematematických tříd takto:
VŠ **humanitního směru 64%,**
VŠ **technického nebo přírodovědného směru 29%.**
Ve všeobecně zaměřených třídách je zcela jiná situace: o studium humanitních oborů má zájem 38%, o technické a přírodovědné školy 54% studentů.

Výrazné rozdíly v odpovědích mezi třídami nematematickými a všeobecně zaměřenými byly i u otázky následující, kde studenti odpovídali sami (nebyly jim předloženy žádné varianty odpovědí):

Co vám podle Vašich představ má dát výuka matematiky na gymnáziu?
V **nematematických** třídách bylo rozložení odpovědí takovéto:

logické myšlení	38%
užitek do života	16%
základní znalosti	16%
všeobecný přehled	13%
příprava ke studiu na VŠ	13%

Ve **všeobecně zaměřených** třídách bylo pořadí zcela jiné:

příprava ke studiu na VŠ	34%
všeobecný přehled	21%
logické myšlení	20%
užitek do života	9%
základní znalosti	8%

Výsledky dotazníku je možno shrnout takto:
1. Do nematematicky zaměřených tříd se většina studentů hlásí právě s ohledem na jejich zaměření, což se projevuje i v orientaci na odpovídající typy vysokých škol.
2. Matematika těmto studentům nečiní výraznější potíže, nebaví však 56% z nich.
3. Polovina studentů by uvítala pomalejší postup ve výuce a **77%** studentů by k lepšímu pochopení látky potřebovalo **spočítat více příkladů**. Tento požadavek je však při hodinové dotaci matematiky v nematematických třídách

(obvykle 3-3-3-3 v posledních čtyřech rocích studia) těžko možné splnit.

4. Přípravu ke studiu na VŠ očekává od matematiky jen malá část studentů nematematických tříd. Ostatní požadují především pěstování **logického myšlení, všeobecný přehled a znalosti užitečné pro běžný život.**

Opravy:

s. 20[5]	Místo „Leibnitze“ má být uvedeno „Leibnize“.
s. 53[19]	Místo „směrnice tečny funkce“ má být uvedeno „směrnice tečny grafu funkce“ (Stejně tak na s. 62[3], s.99[1])
s. 56	Uvedené odvození derivace podílu funkcí je pouze pomůckou pro studenty k zapamatování. Nelze jej považovat za korektní, protože zde chybí důkaz existence derivace podílu funkcí.
s. 61[11]	$x_1, x_2 \in D(f)$
s. 61	K příkladu [37], 204/1035 je třeba doplnit, že komentář autorů učebnice [37] k jeho řešení obsahuje chybu. Tvrzení, že při zvýšení nákladů o 1 000S se prodej zvedne o 80 párů, resp. klesne o 20 párů, není pravdivé. V příkladu se nepočítá změna počtu prodaných párů při zvýšení nákladů o 1 000S, ale tzv. „okamžitá změna“.
s. 66[15]	Místo „v lokálním maximu“ má být uvedeno „v bodě lokálního maxima“.
s. 90[2]	$(-\infty, 1)$ *a* $(1, \infty)$
s. 92	Věta v rámečku má být uvedena v tomto znění: Nechť je funkce *f* spojitá v intervalu (α, β), $a, b \in (\alpha, \beta)$, $f(a) > 0,\ f(b) < 0$. Potom existuje takové $c \in (a, b)$, že $f(c) = 0$.
s. 92[5, 8]	$I \subset D(f)$
s. 95	Popis u obrázku 3 má být uveden v tomto znění: Z obrázku je patrné, že čím strmější je křivka v daném bodě, tím větší úhel svírá tečna (s bodem dotyku v daném bodě) s kladným směrem osy x.
s. 115[5]	Místo „z úlohy H4“ má být uvedeno „z úlohy H5“.

Marcela Miková