Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Výukový materiál k základům teorie elementárních funkcí
Teaching material for theory of elementary functions

Lukáš Botek

Vedoucí práce: Mgr. Derek Pilous, Ph.D.
Studijní program: Specializace v pedagogice
Studijní obor: Matematika – tělesná výchova a sport

2016

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma Výukový materiál k základům teorie elementárních funkcí vypracoval pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V .... dne ....

....

podpis

Mé poděkování věnuji Mgr. Derkovi Pilousovi, Ph.D. za vstřícnost, trpělivost a cenné rady při vedení a zpracovávání mé bakalářské práce.

Speciální poděkování pak patří mojí mamince, která je mi nesmírnou podporou během zdánlivě nekonečných studií.

Anotace:

Bakalářská práce je výukovým materiálem k základům teorie elementárních funkcí bez využití diferenciálního a integrálního počtu. Obsahuje teoretickou část v podobě potřebných definic, vět a důkazů, spolu s praktickou částí zaměřenou na algoritmy řešení standardních typů úloh (hledání definičních oborů funkcí, hledání inverzních funkcí a lineární transformace grafů funkcí), řešené vzorové úlohy a příklady k procvičení s výsledky.

Klíčová slova:

Výukový materiál, funkce, elementární funkce, úlohy.

Annotation:

This bachelor's thesis is the teaching material for the basic of the theory of elementary functions without the use of differential and integral calculus. It contains a theoretical part in the form of definitions, theorems and proofs, together with the practical part focused on algorithms for solutions of standard tasks (finding domains of functions, finding inverse functions and linear transformations of graphs of a functions), model problems with the procedure and examples to practice with the results.

Keywords:

Teaching material, functions, elementary functions, problem solving.

Obsah

Seznam použitého značení

$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{R}^+$	množina kladných reálných čísel
$\mathbb{R}_0^+$	množina nezáporných reálných čísel
$\mathbb{R}^-$	množina záporných reálných čísel
$\mathbb{R}_0^-$	množina nekladných reálných čísel
$\mathbb{Q}$	množina racionálních čísel
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel
$\mathbb{N}$	množina přirozených (kladných celých) čísel
$\mathbb{N}_0$	množina nezáporných celých čísel (přirozená čísla a nula)
$\mathbb{C}$	množina komplexních čísel
$\mathbb{R}^*$	rozšířená reálná osa
$\wedge$	logická spojka konjukce
$\vee$	logická spojka disjunce
$\Rightarrow$	logická spojka implikace
$\Leftrightarrow$	logická spojka ekvivalence
$\emptyset$	prázdná množina
$A \subseteq B$	množina A je podmnožina množiny B
$A \subset B$	množina A je vlastní podmnožina množiny B
$A \cup B$	sjednocení množin A a B
$A \cap B$	průnik množin A a B
$A \smallsetminus B$	rozdíl množin A a B
$A \triangle B$	symetrický rozdíl množin A a B
$A \times B$	kartézský součin množin A a B
$\inf M$	infimum množiny M
$\sup M$	supremum množiny M
$\min M$	miminum množiny M
$\max M$	maximum množiny M
$A \to B$	zobrazení množiny A do množiny B
$\mathcal{D}(f)$	definiční obor zobrazení f
$\mathcal{H}(f)$	obor hodnot zobrazení f
$f\|_I$	restrikce zobrazení f na množinu I
$f \circ g$	složení vnitřního zobrazení g a vnějšího zobrazení g
f^{-1}	inverzní zobrazení k zobrazení f
$\inf\,(f)$	infimum funkce f
$\sup\,(f)$	supremum funkce f
$\min\,(f)$	miminum funkce f
$\max\,(f)$	maximum funkce f
/S:	úprava rovnice pomocí substituce

Úvod

Jako téma své bakalářské práce jsem si zvolil výukový materiál k základům teorie elementárních funkcí. S elementárními funkcemi se hojně pracuje již na středních školách, ale často neuceleně a ne vždy v korektně zavedených pojmech. Naopak na vysoké škole se od začínajících studentů obvykle mnohé znalosti a ucelený vhled do této teorie předpokládají. Svoji práci jsem se z toho důvodu rozhodl pojmout jako most překlenující tento mnohdy náročný přechod od výuky na střední škole k výuce na škole vysoké. Tomu jsem podřídil i výklad teorie a vysvětlování řešení úloh, které jsou spíše praktického charakteru a zaměřené na porozumění a praktické dovednosti než na formalizaci, byť jsou všechny vyslovené definice a věty korektní.

V prvních kapitolách opakuji a uceluji obecné poznatky z oblasti výrokové logiky a teorie množin, které jsou nezbytné pro budování další látky. Na ně plynule navazuji zavedením reálných funkcí a jejich vlastností. Hlavní kapitolou z hlediska teorie jsou elementární funkce, jejich definice, speciální vlastnosti a konkrétní příklady. Závěrečná praktická kapitola je věnována obvyklým úlohám spojeným s elementárními funkcemi (kupříkladu určování definičních oborů či inverzních funkcí), s jejichž lehčími případy se studenti zpravidla setkávají již na střední škole.

Většina použitých definic je standardních (v tom smyslu, že jsou běžně užívány v základních kurzech teorie funkcí), a zavádí se, byť třeba v méně obecné podobě, i na středních školách. Proto jsem je nepřevzal z žádného konkrétního zdroje (až na uvedené výjimky), ale formuloval jsem je tak, aby poskytly co největší vhled do problematiky samotnému čtenáři. Se stejnou motivací, aby student v prvé řadě pochopil vykládanou látku, jsem sepsal a dokázal jednotlivé věty. V textu jsou zařazeny především věty, jejichž důkaz je jednoduchý (často až zřejmý), a proto se ve vysokoškolských textech neobjevují; jsou však vhodným cvičením například v rozšiřujících seminářích na střední škole.

Většina zavedených pojmů je demonstrována a procvičena vzorovými řešenými úlohami a neřešenými cvičeními s výsledky na konci textu. Úlohy jsou konstruovány tak, aby postihly většinu jevů, které se objevují v typových úlohách z poslední kapitoly. Některé úlohy jsou upravené nebo převzaté ze stránek `http://www.cynyc.net/`. Těžší cvičení jsou označena hvězdičkou, probraná teorie a vzorové úlohy jsou však k jejich vyřešení vždy postačující.

Při rozsahu, jaký tento text má, často i přes sebevětší snahu proklouzne nějaká chyba. Chtěl bych tímto laskavého čtenáře poprosit, aby mě o nich uvědomil na emailu `botek.lukas@gmail.com`.

Kapitola 1

Výroky

V této kapitole se pokusím především připomenout některé poznatky týkající se výroků, které pro nás budou důležité při budování teorie obsažené v této práci. Budu proto předpokládat, že čtenář již má osvojené tyto základy teorie výrokové logiky a predikátového počtu:

- chápe, co je to výrok, negace výroku a jaký je mezi nimi vztah,
- umí pracovat se složenými výroky obsahujícími logické spojky (konjunkce, disjunkce, implikace a ekvivalence) a negacemi těchto výroků,
- je seznámen se základy predikátového počtu a umí aktivně používat kvantifikátory,
- zná pojmy tautologie, kontradikce a splnitelná formule.

Pro připomenutí základních vztahů složených výroků přikládám tabulku pravdivostních hodnot logických spojek. 0 a 1 používám ve standardním významu nepravda a pravda.

α	β	$\neg\,\alpha$	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \Rightarrow \beta$	$\alpha \Leftrightarrow \beta$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Má-li čtenář postačující znalosti z oblasti logiky, si může ověřit v následujících cvičeních.

Cvičení

1.1. Sestrojte tabulku pravdivostních hodnot pro formuli výrokového počtu

$$\neg\,(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \neg\alpha$$

a rozhodněte, se kterou logickou spojkou pro α, β je ekvivalentní.

1.2. Jakou logickou spojku je nutno doplnit do výrokové formule

$$(\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha) \Leftrightarrow (\alpha \ \dots \ \beta)$$

na místo teček, aby se jednalo o tautologii?

*1.3. Ve škole byl na záchodech cítit kouř z cigaret a byli u toho přítomni žáci Albert, Bedřich a Cyril. Rozhodněte, kteří žáci mohli kouřit, když víme, že kouřil alespoň jeden ze žáků Albert a Bedřich, dále víme, že jestliže kouřil Cyril, pak se přidal i Bedřich, a že kouřil nejvýše jeden ze žáků Bedřich a Cyril. Označme A situaci, kdy kouřil Albert, B, kdy kouřil Bedřich, a C, kdy kouřil Cyril. Řešení vyjádřete pomocí A, B, C formulí výrokového počtu s nejvýše jednou logickou spojkou.

1.4. Znegujte výroky.

(a) Každý pravoúhlý trojúhelník je zároveň rovnoramenný.

(b) Alespoň osm lidí ze třídy má jedničku z matematiky.

1.5. Znegujte výroky a pokud možno maximálně zjednodušte.

(a) $\varepsilon \equiv \forall x \in \mathbb{R} \colon x > 2$

(b) $\varphi \equiv \forall x \in \mathbb{R} \ \exists n \in \mathbb{N} \colon n < x < n + 1$

(c) $\chi \equiv \forall x_1, x_2 \in M \colon (x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) < f(x_2))$

*1.6. Znegujte výrok η a rozhodněte, který z výroků $\eta, \neg\eta$ je pravdivý.

$$\eta \equiv \forall x \in \mathbb{R} \ \exists n \in \mathbb{N} \colon x < n$$

1.1 Implikace

Jedinou látkou, na kterou se v této kapitole trochu podrobněji zaměřím, je problematika implikace, protože se často setkává u studentů s ne úplně jasným pochopením.

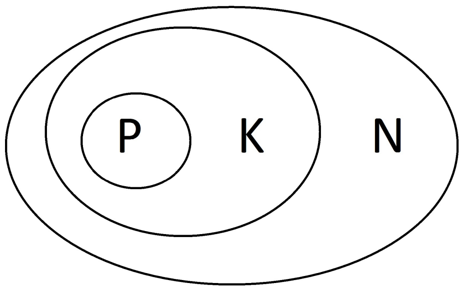
Nejzákladnější chybou bývá snaha obracet implikaci, zejména pak u vět, ve kterých jednoznačně nevyplývá z kontextu, jestli platí i druhým směrem. Nesprávnost obracení implikací si můžeme ukázat třeba na známém příkladu: „Kočka má čtyři nohy, můj pes má čtyři nohy, můj pes je kočka.“[(1)]

Poznámka. Korektním způsobem, jak můžeme směr implikace zdánlivě obrátit, aniž bychom změnili její pravdivost, je její obměna: $(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha)$.

[(1)] Schopnost rozpoznat implikaci předpokládám již v úvodu této kapitoly, a tak pro názornost absurdity ponechávám větu v tomto tvaru, kde nejsou implikace jasně zdůrazněny slovy „Jestliže …, pak …“.

Dalším častým problémem bývá pochopit, jak může být implikace pravdivá, když je předpoklad (či dokonce i závěr) nepravdivý, neboli jak z nepravdy může vyplynout pravda. Ukážeme si to na příkladu Pythagorovy věty, která ve formě implikace říká: „Je-li trojúhelník pravoúhlý, potom pro jeho odvěsny a, b a přeponu c platí vztah $a^2 + b^2 = c^2$“. Jenomže existují i jiné útvary, než pouze pravoúhlé trojúhelníky, ve kterých takovýto vztah může (např. čtyřúhelník o stranách $a = 4\,\mathrm{cm}, b = 3\,\mathrm{cm}, c = 5\,\mathrm{cm}, d = 10\,\mathrm{cm}$) nebo i nemusí platit, a přesto nijak nenarušují naše tvrzení. Závěr tedy může platit v různých kontextech, ale hlavní je, aby platil v kontextu daném předpoklady. V podstatě by se dalo říct, že nezáleží na závěru, pokud není splněný předpoklad, protože pak nikterak neovlivňuje pravdivost věty.

Implikace je základem pro pojmy „nutná podmínka“ a „postačující podmínka“ užívané v souvislosti s matematickými větami. Za názvy pojmů není třeba hledat nic složitého, protože jde přímo o jejich mluvnický význam, ale nejsnáze si to ukážeme na příkladu s množinami. Množinou P označme opice, množinou K savce a množinou N živočichy. Pokud o objektu víme, že je to opice, pak je to postačující podmínka, abychom mohli jednoznačně tvrdit, že je to savec, protože každá opice je savcem. Naopak to, že je něco živočich, je jen nutnou podmínkou k tomu, aby to mohl být savec, protože je-li něco savcem, už je to nutně živočichem.



Jak vidíme z Vennova diagramu, jedná se o podmnožiny $P \subseteq K \subseteq N$, kde množina K je množina našeho konceptu, její podmnožina P je množina postačující podmínky a její nadmnožina N je množina podmínky nutné. Ve výrokové logice můžeme totéž vyjádřit jako $(x \in P \Rightarrow x \in K) \wedge \wedge (x \in K \Rightarrow x \in N)$. Nyní již je patrné, že levá část implikace tvoří podmínku postačující a pravá část podmínku nutnou.

V praxi poznatky o postačující podmínce využíváme především, když chceme dokázat, že se jedná o hledaný objekt, zatímco o nutné podmínce pokud dokazujeme, že jí to nesplňuje, a tím pádem se o hledaný objekt nejedná.

Poznámka. Pokud je jedna a ta samá podmínka nutnou i postačující, platí mezi ní a daným konceptem ekvivalence. Např. podmínka „objekt je rovnostranným pravoúhlým čtyřúhelníkem“ je nutnou podmínkou pro to, aby byl objekt čtvercem, protože každý čtverec je rovnostranným pravoúhlým čtyřúhelníkem, i podmínkou postačující, protože každý rovnostranný pravoúhlý čtyřúhelník je čtvercem. Jinými slovy, objekt je čtvercem právě tehdy, když je pravoúhlým rovnostranným čtyřúhelníkem. Proto se ekvivalentní podmínka často nazývá nutnou a postačující.

Užití nutné podmínky si v matematické praxi ukážeme na následující úloze.

Úloha 1. Rozhodněte, zda-li lze sestrojit $\triangle ABC$ se stranami o velikosti $a = 2\,\text{cm}, b = 4\,\text{cm}, c = 8\,\text{cm}$.

Řešení. Nutnou podmínkou sestrojitelnosti trojúhelníku je splnění trojúhelníkové nerovnosti.[2] Jinými slovy, jestliže lze trojúhelník ABC sestrojit, potom pro jeho strany a, b, c platí trojúhelníková nerovnost.
Jak vidíme, trojůhelníková nerovnost je porušena v případě $a + b > c$, protože $2 + 4 = 6 \not> 8$.
Jelikož je porušena nutná podmínka, můžeme rozhodnout, že trojúhelník nelze sestrojit.

Cvičení

1.7. K následujícím výrokům nalezněte nutnou a postačující podmínku.[3]

(a) Jsem nábytkem.

(b) Žiji v České republice.

(c) V peněžence mám alespoň 300 korun.

(d) $15|n$.[4]

[2] Ve skutečnosti je trojúhelníková nerovnost nutnou i postačují podmínkou sestrojitelnosti trojúhelníku, ale pro názornost této úlohy hovoříme o podmínce bez újmy na obecnosti pouze jako o podmínce nutné.

[3] Výsledky z tohoto cvičení jsou pouze jedny z mnoha správných řešení.

[4] Znak | znamená, že číslo n je beze zbytku dělitelné číslem 15 (čteme „číslo 15 dělí číslo n“).

Kapitola 2

Množiny

V této kapitole si připomeneme základní poznatky z oblasti množin, které se především pokusím dále rozšířit. Budu proto předpokládat, že čtenář má již osvojené tyto znalosti:

- chápe, co je to množina, prvek množiny a s tím spojené pojmy prázdná a neprázdná množina,
- umí pracovat s konečnými a nekonečnými množinami, množinami danými výčtem prvků a danými vlastností,
- ví, co je to podmnožina, doplněk množiny a kdy jsou si množiny rovny.

Měl by také chápat vztah mezi kvantifikátory a prázdnou množinou, ale protože se s tímto vztahem budeme i nadále setkávat, tak si ho raději oživíme na následující úloze.

Úloha 1. Rozhodněte o pravdivosti výroku $\psi \equiv \forall x \in \emptyset \colon x > 0 \wedge x < 0$.

Řešení. Na první pohled ψ vypadá jako nepravdivý výrok, protože x přeci nemůže být zároveň větší a menší než 0. Podívejme se ale na problematiku trochu z jiné strany. Z výrokového počtu víme, že je vždy pravdivý buďto výrok, nebo jeho negace. Platí tedy ψ nebo $\neg\psi \equiv \exists x \in \emptyset \colon x \leq 0 \vee x \geq 0$. Jelikož v $\emptyset$ není žádné x, tak $\neg\psi$ nemůže být pravdivé, tedy pravdivé je ψ.

Poznatek z úlohy můžeme zobecnit tak, že kvantifikujeme-li přes všechny prvky prázdné množiny, je tvrzení vždy pravdivé.

Má-li čtenář postačující znalosti z oblasti množin, si může ověřit v následujících cvičeních.

Cvičení

2.1. Upravte a co nejjednodušeji korektně zapište následující množiny.

(a) $A = \{4, 3, 4, 3, 2, 4, 3, 2, 1\}$

(b) $B = \{1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

(c) $C = \left\{-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}, \ldots\right\}$

(d) $D = \{\{3, 3\}, \{3\}\}$

2.2. Mějme množinu $E = \{10, \{10^2, 10^3\}, 10^4, 10^5\}$. Rozhodněte a zdůvodněte, zda-li je 10^2 prvkem množiny E.

2.3. Zapište množinu všech podmnožin (tzv. potenční množinu) množiny $F = \{\pi, \mathrm{e}, 0\}$.

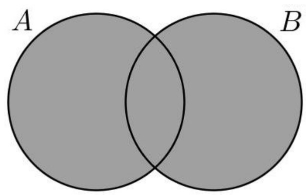
2.4. Výčtem popište množinu $G = \{\{i, j\}; G_i = G_j \wedge i \neq j\}$ je-li

$$\begin{array}{ll} G_1 = \{x; x \in \mathbb{R} \wedge x = \sqrt[4]{x}\}, & G_4 = \{x; x \in \mathbb{N}_0 \wedge x < 2\}, \\ G_2 = \left\{x; x \in \mathbb{R}_0^+ \wedge x^2 + 4x + 4 = 0\right\}, & G_5 = \{0, 1\}, \\ G_3 = \{x; x \in \mathbb{Z} \wedge |x - 1| \leq 1\}, & G_6 = \emptyset. \end{array}$$

2.1 Operace s množinami

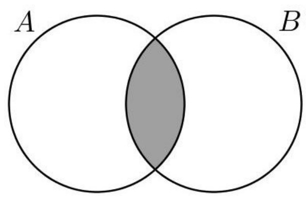
Abychom se dostali s teorií o krok dál, potřebujeme zajisté ovládat operace s množinami. Ze střední školy by měly být známé operace sjednocení, průniku a rozdílu množin, ke kterým přidáme symetrický rozdíl množin. Pro lepší představu, co jednotlivé operace znamenají, si je nyní všechny zadefinujeme a znázorníme na Vennových diagramech.

Definice 1 (Sjednocení množin)**.** $x \in A \cup B \overset{\text{def}}{\iff} x \in A \vee x \in B.$



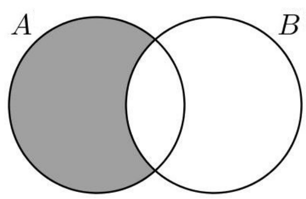
Výsledná množina obsahuje prvky, které se vyskytují alespoň v jedné z množin.

Definice 2 (Průnik množin)**.** $x \in A \cap B \overset{\text{def}}{\iff} x \in A \wedge x \in B.$



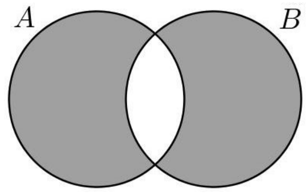
Výsledná množina obsahuje prvky, které se vyskytují zároveň v obou množinách.

Definice 3 (Rozdíl množin)**.** $x \in A \setminus B \overset{\text{def}}{\iff} x \in A \wedge x \notin B.$



Výsledná množina obsahuje prvky, které se vyskytují v A, ale nevyskytují se v B.

Definice 4 (Symetrický rozdíl množin)**.** $x \in A \triangle B \overset{\text{def}}{\iff} x \in A \setminus B \vee x \in B \setminus A.$



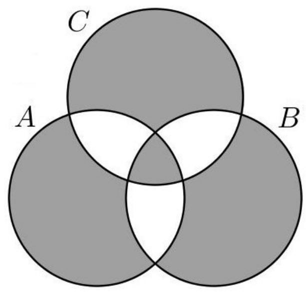
Výsledná množina symetrického rozdílu dvou množin obsahuje prvky, které se vyskytují v právě jedné z nich.[1]

Bez důkazu nyní sepíšeme tvrzení shrnující základní vlastnosti uvedených operací.

Věta 1. Pro operace $\cup$, $\cap$, $\setminus$ a $\triangle$ platí následující vlastnosti:

1. $A \cap B$ a $A \triangle B$ tvoří disjunktní rozklad $A \cup B$,
2. $\cup$ a $\cap$ množiny samé se sebou je ta samá množina (tzv. idempotentní vlastnost), zatímco $\setminus$ a $\triangle$ množiny se sebou je $\emptyset$,
3. pro operace s prázdnou množinou platí následující:
$$A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset, A \setminus \emptyset = A, A \triangle \emptyset = A,$$
4. $\cup$, $\cap$ a $\triangle$ jsou komutativní a asociativní, zatímco $\setminus$ není ani jedno,
5. $\cup$ a $\cap$ jsou navzájem distributivní, navíc $\cap$ je distributivní vůči $\triangle$:
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C).$$

Z asociativity symetrického rozdílu plyne zajímavý poznatek, že pokud provádíme symetrický rozdíl více množin za sebou, tak do něj patří právě ty prvky, které se vyskytují v průniku lichého počtu těchto množin.



Zavedené operace sjednocení a průniku lze pomocí výše uvedené definice a uzávorkování provést vždy pouze konečněkrát, ale může nastat situace, kdy budeme chtít např. sjednotit nekonečně mnoho množin, a proto se zavádí i obecné operátory.

(1) Z hlediska logiky se jedná o tzv. exkluzivní disjunkci prvků.

Definice 5 (Obecné sjednocení a obecný průnik množin)**.** Mějme množiny $A_\alpha; \alpha \in I$. Jejich sjednocením nazýváme množinu

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha := \{x; \exists \alpha \in I : x \in A_\alpha\},$$

jejich průnikem nazýváme množinu

$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha := \{x; \forall \alpha \in I : x \in A_\alpha\}.$$

Úloha 2. Označme $A = \{x; x \in \mathbb{R} \wedge |x+1| < 3\}$. Určete $M = A \cap (\mathbb{Z} \triangle \mathbb{N})$.

Řešení. Začneme závorkou $(\mathbb{Z} \triangle \mathbb{N})$: $x \in \mathbb{Z} \triangle \mathbb{N} \Leftrightarrow (x \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \ \vee x \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{Z}) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x \in \{0, -1, -2, \ldots\} \vee x \in \emptyset) \Leftrightarrow x \in \{0, -1, -2, \ldots\} = \mathbb{Z}_0^-$.
Prvky množiny A: reálná čísla na intervalu $(-4, 2)$.(2)
$\mathbb{Z}_0^- \cap A$: Konečná množina $M = \{-3, -2, -1, 0\}$.

Při studiu funkcí pro nás bude klíčové přiřazování objektu k jinému objektu, které matematicky formalizujeme pomocí uspořádané dvojice. Uspořádanou dvojicí $[a, b]$ se myslí dvouprvková množina obsahující prvky a a b, ve které záleží na pořadí prvků. Jinými slovy, u uspořádané dvojice rozlišujeme, který prvek je první, a který je druhý. Z toho plyne, že $[a, b] = [c, d]$ pouze v případě, že $a = c$ a $b = d$.(3)

Začneme definicí množiny všech uspořádaných dvojic prvků z daných množin, tzv. kartézského součinu.

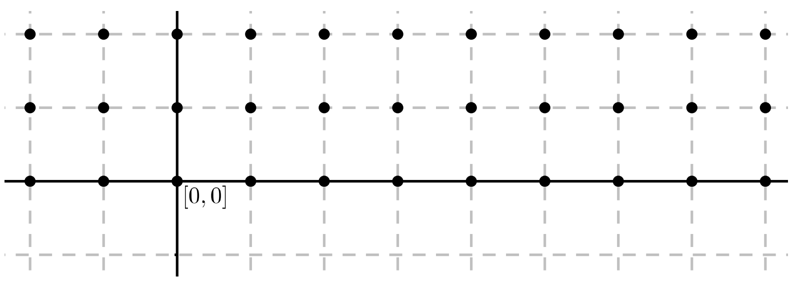
Definice 6 (Kartézský součin množin)**.** $A \times B \equiv \{[a, b]; a \in A \wedge b \in B\}$.

Výsledná množina je tedy tvořena všemi uspořádanými dvojicemi, jejichž první složkou jsou prvky z množiny A a druhou složkou jsou prvky z množiny B.(4)

Poznámka. n-tou kartézskou mocninou množiny A rozumíme A^n definované induktivně jako $A^1 := A$; $A^{n+1} := A \times A^n$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Úloha 3. V kartézské soustavě souřadnic znázorněte kartézský součin množin $X \times Y$, pro které platí $X = \mathbb{Z}$ a $Y = \mathbb{N}_0$.

Řešení. Z definice vyjdou jako řešení všechny uspořádané dvojice $[x, y]$, ve kterých $x \in \mathbb{Z}$ a $y \in \mathbb{N}_0$, tedy $X \times Y = \{[x, y]; x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{N}_0\}$. Ne vždy bude na první pohled jasné, co řešení reprezentuje, proto doporučuji pokaždé provést náčrtek. V tomto případě množina X a Y vlastně reprezentují přímky a polopřímky, jejichž průsečíky jsou řešením.



(2) Předpokládám elementární představu, co je to interval. Korektně jej zavedu v následující kapitole 2.2 Relace na množinách.

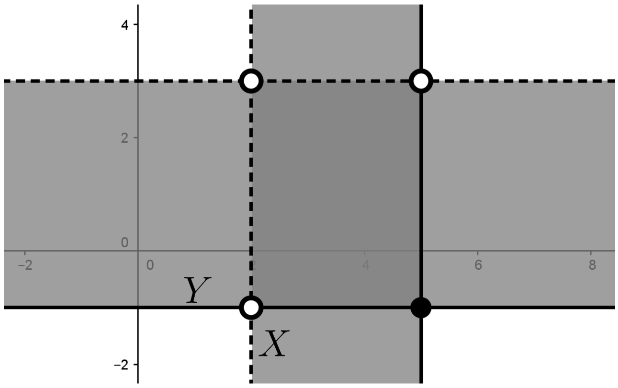
(3) Zavedením uspořádané dvojice a její formalizací se nebudeme detailněji zaobírat. Nejčastěji se definuje pomocí množin jako $[a, b] := \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

(4) V případě násobení n množin se jedná o uspořádané n-tice.

Z obrázku je již patrné, že řešením jsou všechny celočíselné body roviny s nezápornou druhou souřadnicí.

Úloha 4. V kartézské soustavě souřadnic znázorněte množinu $X \times Y$, kde $X = \{x; x \in \mathbb{R} \wedge 2 < x \leq 5\}$ a $Y = \{y; y \in \mathbb{R} \wedge -1 \leq y < 3\}$.

Řešení. Jedná se o uspořádané dvojice v $\mathbb{R}^2$, pro jejichž x-ovou a y-ovou souřadnici platí, že $2 < x \leq 5$ a $-1 \leq y < 3$. V podstatě se jedná o dva pásy bodů, jejichž průnik (existuje-li) splňuje podmínky pro x i y. Nesmíme opomenout ostré nerovnosti, kvůli kterým příslušné hranice do řešení nespadají.



Z obrázku je zřejmé, že řešením jsou všechny body uvnitř obdélníku, a spolu s nimi i vrchol v $[5, -1]$ a jeho přilehlé strany.

Cvičení

2.5. Mějme množiny $H_1 = \{1, 2, 3\}$, $H_2 = \{3, 4, 5\}$ a $H_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Určete výsledné množiny.

(a) $H_1 \cup H_2$

(b) $H_1 \cap H_2$

(c) $H_1 \bigtriangleup H_2$

(d) $H_1 \setminus (H_2 \setminus H_3)$

(e) $H_1 \times H_2$

*2.6. Mějme množinu všech dětí a v ní množinu všech dívek D, množinu všech chlapců C, množinu B žáků 3.B a množinu všech alergických dětí A. Určete množinu $M = D \cap [B \setminus (D \cap C)] \cap [(D \cup C) \bigtriangleup B \bigtriangleup A]$.

2.7. V kartézské soustavě souřadnic znázorněte a popište kartézský součin množin $I_1 \times I_2$.

(a) $I_1 = \{x; x \in \mathbb{R}^+\}, I_2 = \{y; y \in \mathbb{R}^+\}$

(b) $I_1 = \{x; x \in \mathbb{R}\}, I_2 = \{y; y \in \mathbb{Z}\}$

*2.8. V kartézské soustavě souřadnic znázorněte množinu

$$K = \big\{[x, y]; [x, y] \in \mathbb{R}^2 \wedge 2 \leq x \leq 6 \wedge 1 \leq y < x\big\}.$$

2.2 Relace na množinách

Z minulé podkapitoly již víme, co je to kartézský součin dvou množin. Ten je ale hodně obecný a hodilo by se nám z množiny všech uspořádaných dvojic vybrat jen některé. Libovolnou podmnožinou kartézského součinu dvou množin pak nazveme binární relací množin.

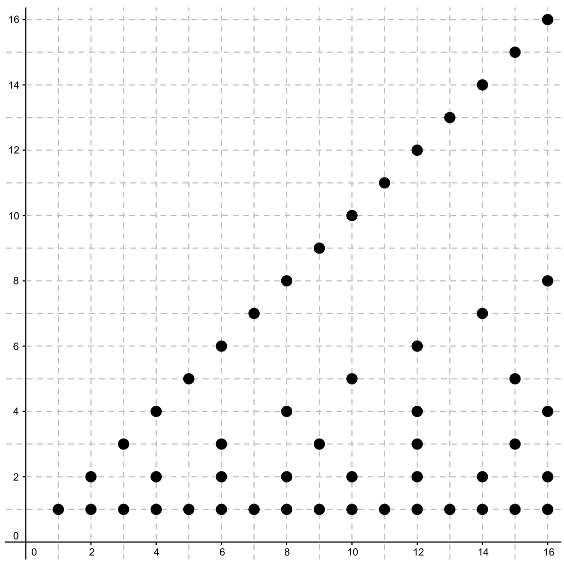
Definice 7 (Binární relace množin)**.** R je binární relace množin $M_1, M_2 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} R \subseteq M_1 \times M_2$.

Stejně jako u kartézského součinu se ani u relací nemusíme omezovat na dvě množiny. Můžeme tvořit libovolné n-ární relace, ale pro naše účely si vystačíme pouze s binárními relacemi.

Poznámka. Binární relace R na množině M je podmnožina kartézské mocniny $R \subseteq M^2$. Výraz $[x, y] \in R$ pro lepší orientaci v textu zapisujeme také xRy.

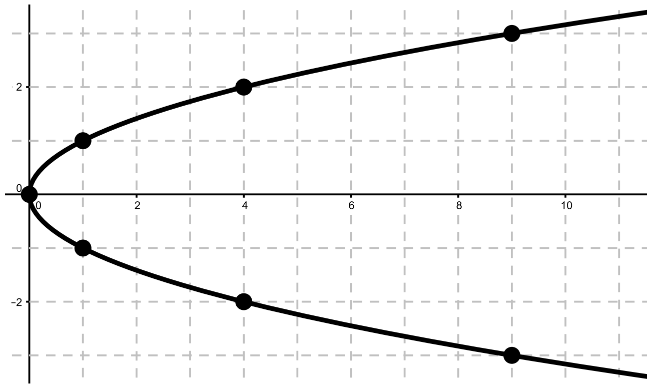
Úloha 5. V kartézské soustavě souřadnic znázorněte binární relaci $R \subseteq \mathbb{N}^2$, pro kterou platí $xRy \Leftrightarrow y|x$.

Řešení. Binární relace R tvoří množinu uspořádaných dvojic $[x, y]$ v $\mathbb{N}^2$, kde y dělí beze zbytku x, neboli $R = \{[x, y]; [x, y] \in \mathbb{N}^2 \wedge y|x\}$. Jednotlivé dvojice zaneseme do grafu a budeme postupovat následovně: $y = 1$ dělí všechna x, $y = 2$ dělí všechna sudá x, atd.



Úloha 6. V kartézské soustavě souřadnic znázorněte binární relaci $R \subseteq \mathbb{R}^2$, pro kterou platí $xRy \Leftrightarrow x = y^2$.

Řešení. Stejně jako v předchozí úloze si prvně napíšeme množinu uspořádaných dvojic $R = \{[x, y]; [x, y] \in \mathbb{R}^2 \wedge x = y^2\}$.Ze střední školy víme, že tato množina bodů je parabola, její průběh pro účely náčrtu upřesníme dosazením bodů $0, \pm1, \pm2\ \pm 3$ za y. Dostáváme uspořádané dvojice $[0, 0]$, $[\pm1, 1]$, $[\pm2, 4]$ a $[\pm3, 9]$, které zaneseme do kartézských souřadnic a proložíme parabolou.



V rámci relací pro nás bude důležitý především speciální podtyp, kterým je uspořádaní.[5]

Definice 8 (Neostré uspořádání)**.** Říkáme, že relace $\trianglelefteq$ na množině M je neostré uspořádání, pokud má následující vlastnosti:

- reflexivitu: $\forall x \in M: x \trianglelefteq x$,
- antisymetrii: $\forall x, y \in M: (x \trianglelefteq y \wedge y \trianglelefteq x) \Rightarrow x = y$,
- tranzitivitu: $\forall x, y, z \in M: (x \trianglelefteq y \wedge y \trianglelefteq z) \Rightarrow x \trianglelefteq z$.

Poznámka. Zavádí se i pojem ostré uspořádání. Oproti neostrému se liší nahrazením reflexivity v definici antireflexivitou ($\forall x \in M: \neg (x \trianglelefteq x)$), z čehož vyplývá, že prvek již nemůže být v relaci sám se sebou.

Nejlépe si předchozí definici uvědomíme na konkrétních příkladech. Na množině reálných čísel je uspořádáním relace známá již ze základní školy „býti menší nebo rovno než“. Jiným uspořádáním, tentokrát na množině množin (např. potenční množině, viz cvičení 2.3.), je relace „býti podmnožinou“.

Na těchto dvou příkladech si můžeme demonstrovat důležitou vlastnost uspořádání, úplnost. Uspořádání R na množině M je úplné (též lineární), pokud jím lze porovnat každé dva prvky M. Formálně tuto vlastnost zapíšeme takto: $\forall x, y \in M: xRy \vee yRx \vee x = y$.

Zatímco „býti menší nebo rovno“ na množině $\mathbb{R}$ je úplným uspořádáním, inkluze na potenční množině úplným uspořádáním není (kupříkladu na potenční množině množiny $\{a, b\}$ lze porovnat prvky $\emptyset$ a $\{a\}$, ale nikoli prvky $\{a\}$ a $\{b\}$).

Množiny, kde uspořádání nezavádíme, jsou např. $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{C}$ apod.[6]

Poznámka. Různých uspořádání na $\mathbb{R}$ můžeme zavést mnoho. Většinou se setkáváme především s klasickými uspořádáními „býti menší nebo rovno než“ a „býti menší než“, která značíme $\leq$ a $<$. Příkladem zavedení jiného uspořádání pak může být např. relace $xRy \Leftrightarrow f(x) < f(y)$, ve které $f(x) = -x$. Dosazením $f(x)$ do nerovnosti dostaneme $x > y$, neboli opačné uspořádání k „býti menší než“, tedy „býti větší než“.

[5] Jiným významným typem relace je ekvivalence, v analýze však budeme systematicky pracovat pouze s jednou ekvivalencí, a to rovností, jejíž vlastnosti jsou čtenáři dobře známy.

[6] Z axiomu výběru plyne, že každou množinu lze uspořádat, $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{C}$ však nelze uspořádat tzv. okruhově, tedy tak, aby s tímto uspořádáním tvořily „smysluplný“ číselný obor.

Z hlediska vymezení okrajů množin se zavádějí pojmy omezenost a ohraničenost, které se v $\mathbb{R}$ zpravidla neodlišují, ale protože se v teorii funkcí setkáváme i s případy, kdy ekvivalentní nejsou, tak si zde oba dva zavedeme a následně ukážeme jejich rozdíly.

Definice 9 (Omezenost)**.** (Pilous, 2016) Nechť je na množině P pro každé dva prvky $x, y \in P$ definována jejich vzdálenost $\rho(x, y)$ (přesněji, nechť (P, ρ) tvoří tzv. metrický prostor). Pak řekneme, že množina $M \subseteq P$ je omezená, pokud existuje reálné číslo r takové, že každé dva prvky množiny M jsou vzdáleny méně než r, neboli $\exists r \in \mathbb{R}\ \forall x, y \in M \colon \rho(x, y) < r$.

Definice 10 (Ohraničenost)**.** (Pilous, 2016) Nechť je množina P lineárně ostře uspořádaná relací $\lhd$ a $M \subseteq P$. Řekneme, že je množina M ohraničená zdola v P podle $\lhd$, pokud $\exists K_1 \in P\ \forall x \in M \colon K_1 \lhd x$, a že je ohraničená shora v P podle $\lhd$, pokud $\exists K_2 \in P\ \forall x \in M \colon x \lhd K_2$ (případně přesněji říkáme, že M je zdola ohraničená (hodnotou) K_1 a shora K_2). Řekneme, že je množina M ohraničená v P, je-li ohraničená shora i zdola.

Omezenost vyjadřuje myšlenku, že se množina „netáhne do nekonečna“, protože vezmeme-li si libovolný bod omezené množiny, všechny ostatní od něj musí mít vzdálenost menší než r (a tedy celá množina leží v kouli s poloměrem r). Oproti tomu ohraničenost je „vlastnost podmnožiny nějaké lineárně uspořádané množiny vzhledem k celé této množině, …že se podmnožina netáhne „až ke krajům“ celé množiny“ (Pilous, 2016).

Rozdíl mezi těmito vlastnostmi, které se často směšují, je v tom, že nezbytným předpokladem zavedení omezenosti je vzdálenost (a uspořádání není třeba, proto můžeme definovat omezenost např. v $\mathbb{R}^2$ nebo $\mathbb{C}$), zatímco ohraničenost vyžaduje uspořádání dané množiny (a naopak nemusí být definována vzdálenost).

Věta 2. Omezenost a ohraničenost v $\mathbb{R}$ jsou ekvivalentní, neboli podmnožina reálných čísel je omezená právě tehdy, když je ohraničená v $\mathbb{R}$.

Důkaz. $\Leftarrow$: Pokud je množina M ohraničená v $\mathbb{R}$, potom platí $\exists K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ $\forall x \in M \colon K_1 < x \wedge x < K_2$, neboli všechny prvky M jsou mezi K_1 a K_2. Vyplývá, že vzdálenost dvou prvků v M je menší než $r := |K_1 - K_2| \in \mathbb{R}$, a tím pádem je M omezená.

$\Rightarrow$: Z omezenosti víme, že žádné dva prvky od sebe nejsou vzdáleny více než $r \in \mathbb{R}$. Vezmeme-li libovolný prvek $x_0 \in M$, pak všechny ostatní prvky M jsou od něj vzdáleny méně než r. Přiřadíme-li $K_1 := x_0 - r$ a $K_2 := x_0 + r$, tak K_1 i K_2 budou z $\mathbb{R}$, protože $x_0 \in \mathbb{R}$ i $r \in \mathbb{R}$, a přitom bude platit, že $\forall x \in M \colon K_1 < x \wedge x < K_2$, z čehož plyne ohraničenost M v $\mathbb{R}$.

Tento hladce vypadající důkaz má jeden drobný zádrhel – předpokládáme existenci $x_0 \in M$. Pro prázdnou množinu tedy musíme provést důkaz zvlášť. To je však triviální, protože v obou definicích kvantifikujeme přes všechny prvky prázdné množiny, takže tvrzení je vždy platné. Prázdná množina je tedy omezená (s libovolným r) i ohraničená (libovolným K_1, K_2, dokonce i tehdy, když $K_1 > K_2$). cbd

Prostor, ve kterém uvedené vlastnosti vyhodnocujeme, je důležitější v případě ohraničenosti. Je-li množina omezená v prostoru P, je omezená i v každé jeho podmnožině. To u ohraničenosti není pravda, protože např. množina $H = \left\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\}$ je ohraničená v $\mathbb{R}$, ale není (zdola) ohraničená v $\mathbb{R}^+$. Z toho vidíme, že ani ekvivalence z minulé věty již nemusí platit na podmnožinách $\mathbb{R}$.

Co se týká ohraničenosti, někdo by mohl podotknout nejasnost u minulé věty, protože zatímco na $\mathbb{R}$ je definováno i neostré uspořádání, definice ohraničenosti předpokládá ostré. Toto objasňuje následující věta.

Věta 3. (Pilous, 2016) Nechť $\lhd$ je ostré lineární uspořádání na množině P a $\unlhd$ je jemu odpovídající uspořádání neostré (tedy $a \unlhd b \Leftrightarrow (a \lhd b \vee a = b)$). Pokud množina P nemá minimum podle $\lhd$, je ohraničenost zdola v P podle $\lhd$ a $\unlhd$ ekvivalentní. Analogicky nemá-li P podle $\lhd$ maximum, je ohraničenost shora podle $\lhd$ a $\unlhd$ ekvivalentní.

Důkaz. (Pilous, 2016) $\Rightarrow$: Triviální, platí-li ostrá nerovnost, platí samozřejmě i neostrá.

$\Leftarrow$: Je-li M v P zdola ohraničená podle $\unlhd$, existuje $a \in P$, které je menší nebo rovno[(7)] všem prvkům v M (formálně: $\exists a \in P\ \forall x \in M\colon a \unlhd x$). Pokud však P nemá minimum, existuje v něm ke každému prvku prvek menší, takže i k a existuje $a' \in P$, pro které platí $a \lhd a'$. Pak je ovšem a' ostře menší než všechny prvky M, takže M je v P zdola ohraničena i podle $\lhd$. cbd

Jestliže máme lineárně uspořádanou množinu, můžeme na ní zavést speciální typ podmnožin, které obsahují všechny prvky ve vymezené oblasti.

Definice 11 (Interval)**.** Nechť je množina U lineárně uspořádaná uspořádáním $\unlhd$. Pak řekneme, že množina $I \subseteq U$ je intervalem U, pokud

$$\forall x, y, z \in U\colon\ (x, y \in I \wedge x \unlhd z \unlhd y) \Rightarrow z \in I.$$

Jinými slovy, interval je podmnožina, která s každými dvěma prvky obsahuje i všechny mezi nimi. Jak je patrné, bez uspořádání by takováto definice neměla smysl.

Cvičení

2.9. V kartézské soustavě souřadnic znázorněte binární relaci $R \subseteq \mathbb{R}^2$, pro kterou platí $xRy \Leftrightarrow x < 2y$.

2.10. Mějme tři množiny, pro které platí $Z_1 = \left\{x; x \in \mathbb{R} \wedge \frac{x-1}{x-2} \geq 0\right\}$, $Z_2 = \{x; x \in \mathbb{R} \wedge |x-5| < 1\}$ a $Z_3 = \{x; x \in \mathbb{R} \wedge x^2 - 5x + 9 \geq 3\}$. Určete v $\mathbb{R}$ interval následujících množin.

(a) $Z_1 \cap Z_2 \cap Z_3$

(b) $Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3$

(c) $Z_1 \cap (Z_2 \cup Z_3)$

2.11. Rozhodněte a zdůvodněte, zda platí

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\langle -\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right\rangle.$$

(7) Pro jednoduchost přejímáme terminologii běžného uspořádání reálných čísel, výraz $x \unlhd y$ tedy čteme „x je menší nebo rovno y“.

2.3 Závory

Z hlediska omezení a hranic množin se zavádí hned několik pojmů, které později využijeme i u funkcí. Prvním z nich je závora, kterou rozlišujeme z hlediska uspořádání na horní a dolní.

Definice 12 (Závory množiny)**.** Nechť je množina P uspořádaná relací $\trianglelefteq$ a A je podmnožina P. Prvek $z \in P$ nazýváme horní (dolní) závorou A v P, pokud

$$\forall a \in A\colon\, a \trianglelefteq z \,(z \trianglelefteq a)\,.$$

Definice říká, že horní (dolní) závorou je hodnota, která je větší (menší) nebo rovná všem prvkům množiny. Jak vidíme, závora nemusí být z množiny, a dokonce jí ani nemusí být „blízká“. Jedná se čistě jen o hranici, která nám říká, že vně se již žádný prvek množiny nenachází. Pomocí závor se zavádějí supremum a infimum.

Definice 13 (Supremum)**.** Nechť je množina P uspořádaná relací $\trianglelefteq$ a A je podmnožina P. Označme H množinu horních závor množiny A (neboli $H = \{h; h \in P \wedge (\forall a \in A\colon\, a \trianglelefteq h)\}$. Supremem množiny A (značíme $\sup A$) nazýváme nejmenší prvek množiny H, neboli takové $s \in H$, pro které platí

$$\forall s' \in H\colon\, s \trianglelefteq s'.$$

Definice 14 (Infimum)**.** Nechť je množina P uspořádaná relací $\trianglelefteq$ a A je podmnožina P. Označme D množinu horních závor množiny A (neboli $D = \{d; d \in P \wedge (\forall a \in A\colon\, d \trianglelefteq a)\}$. Infimem množiny A (značíme $\inf A$) nazýváme největší prvek množiny D, neboli takové $i \in D$, pro které platí

$$\forall i' \in D\colon\, i' \trianglelefteq i.$$

Jinými slovy, supremum je nejmenší horní závora, resp. infimum největší dolní závora. Díky tomu můžeme pozorovat již zmiňovanou tzv. „namáčknutost“ na množinu, protože pokud by např. u suprema existovala menší horní závora, existoval by už prvek množiny, který by byl větší než ona menší horní závora, tím pádem by se o horní závoru nejednalo.

Neomezené množiny a prázdná množina v $\mathbb{R}$ supremum nebo infimum nemají (kupříkladu $\mathbb{R}$ vůbec nemá závory, $\emptyset$ zase má za horní i dolní závory celé $\mathbb{R}$, které nemá maximum ani minimum). To, že se množina na reálné ose například „táhne“ neohraničeně doprava, intuitivně popisujeme pojmem nekonečno. Tento koncept formalizujeme v následující podkapitole zavedením tzv. rozšířené reálné osy $\mathbb{R}^*$, která bude obsahovat $+\infty$ a $-\infty$. Supremem a infimem podmnožiny reálných čísel pak budeme rozumět jejich supremum a infimum v $\mathbb{R}^*$, kde už má každá podmnožina obojí.

Pokud by závora byla z množiny, potom mluvíme o maximu, resp. minimu množiny.

Definice 15 (Maximum a minimum)**.** Nechť je množina A uspořádaná relací $\trianglelefteq$. Prvek $m \in A$ nazýváme maximum (minimum) množiny A, pokud

$$\forall a \in A\colon\, a \trianglelefteq m \,(m \trianglelefteq a)\,.$$

U maxima a minima se tedy jedná o největší a nejmenší prvek množiny. S tím je nutně spojený fakt, že nemusí vůbec existovat, a to ani tehdy, když existuje supremum (což bude v $\mathbb{R}^*$ vždy, v $\mathbb{Q}$ ale nemusí mít množina ani supremum). Vezměme si již zmiňovaný příklad omezené množiny $H = \left\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\}$. Tato množina minimum nemá, protože ke každému prvku existuje v množině vždy ještě menší, ale $\inf H = 0$.

Cvičení

2.12. Rozhodněte a zdůvodněte, zda-li pro $M = (0,1)$ a $M' = \langle 0,1\rangle$ platí

$$\sup M = \sup M' \text{ a } \inf M = \inf M'.$$

2.13. Mějme množinu $M_1 \subseteq \mathbb{R}$ u které známe supremum a infimum. Určete supremum a infimum množiny M_2, pro kterou platí:

(a) $M_2 = \{2 + x; x \in M_1\}$.

(b) $M_2 = \{2 - x; x \in M_1\}$.

(c) $M_2 = \left\{-\frac{x}{2}; x \in M_1\right\}$.

2.4 Číselné obory

Předpokládám, že základní znalosti o číselných oborech má již čtenář osvojené, a ví tedy, čím se vyznačují a jaká čísla do nich patří. Pro připomenutí alespoň uvádím množinový zápis jednotlivých oborů:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\},\ \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\},$$

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\},\ \mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right\}.$$

Reálná čísla můžeme zjednodušeně popsat pomocí desetinných rozvojů. Zatímco racionální čísla mají desetinný rozvoj buď ukončený, nebo od nějaké pozice periodický, reálná čísla jsou představována všemi možnými desetinnými rozvoji.

Doplněk racionálních čísel v číslech reálných je množina tzv. iracionálních čísel. Tato množina, někdy značená $\mathbb{I}$, není uzavřená na součet ani na součin, a nepovažujeme ji tedy za číselný obor. Příkladem iracionálních čísel jsou $\sqrt{2}$, π, e.

Zaměřím se na množinové vztahy mezi jednotlivými číselnými obory. Všechny obory jsou uzavřené na některé operace, ale na některé již potřebujeme jejich nadmnožinu, např. množina přirozených čísel je uzavřená na sčítání, ale není na odčítání. Díky tomuto vztahu pak mohu právě jejich nadmnožiny popsat.

- Nejmenší nadmnožinou $\mathbb{N}$ uzavřenou na odčítání jsou $\mathbb{Z}$.
- Nejmenší nadmnožinou $\mathbb{Z}$ uzavřenou na dělení (mimo 0) jsou $\mathbb{Q}$.

- Nejmenší nadmnožinou $\mathbb{Q}$ uzavřenou na supremum a infimum omezených množin kromě prázdné množiny jsou $\mathbb{R}$.

- Nejmenší nadmnožinou $\mathbb{R}$ uzavřenou na řešení kvadratických rovnic jsou $\mathbb{C}$.

Poznámka. Supremum a infimum zajišťují kontinuum čísel na reálné ose, protože osa tvořená pouze racionálními čísly by nebyla úplná. Můžeme si to ukázat např. na funkci $\sin x$ v $\mathbb{Q}$, kde by měla jediný kořen (průsečík s osou x) pro $x = 0$.

Komplexními čísly ale všechny obory nekončí. Nadmnožinou komplexních čísel $\mathbb{C}$, která mají dvě jednotky, jsou kvaterniony $\mathbb{H}$ se čtyřmi jednotkami, jejich nadmnožinou oktoniony $\mathbb{O}$ s osmi jednotkami. Uplatnění těchto číselných oborů je pak především v moderní teoretické fyzice a aplikované matematice, ale např. i při hledání platónských těles ve vícerozměrných prostorech.

Pokud bychom chtěli uvést všechny číselné obory pomocí nějaké množinové operace v jednom zápisu, vypadalo by to asi nějak takto:

$$\underrightarrow{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset} \mathbb{R} \underleftarrow{\subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H} \subset \mathbb{O}}$$

Takto naznačená posloupnost číselných oborů vede k zamyšlení, co se s vlastnostmi jednotlivých oborů děje. Směrem od přirozených čísel k reálným se zlepšují a přibývají vlastnosti (pomineme-li, že v racionálních číslech zmizí nástupci), ale od reálných čísel dál se začínají vlastnosti zase zhoršovat. Postupně mizí uspořádání v komplexních číslech, komutativnost násobení v kvaternionech a asociativita násobení v oktonionech. Z těchto důvodů jsou reálná čísla pohodlným oborem pro vybudování základů matematické analýzy.

V tuto chvíli známe reálnou osu, víme jaká čísla na ní hledat a tušíme, že její konce vedou někam do nekonečna, ale neumíme s ním pracovat. Pro upřesnění se v matematické analýze zavádí rozšířená reálná osa.

Definice 16 (Rozšířená reálná osa)**.** (Pilous, 2016) Rozšířenou reálnou osou rozumíme množinu $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, do které přenášíme uspořádání a operace z $\mathbb{R}$ a dodefinováváme:

- uspořádání: $\forall a \in \mathbb{R} : -\infty < a < \infty \wedge -\infty < \infty$,

- intervaly: přirozeně rozšíříme intervaly známé z $\mathbb{R}$ o ty, které jsou uzavřené u nekonečné meze,

- opačný prvek: $-(+\infty) = \infty, -(-\infty) = +\infty$,

- binární operace následujícími tabulkami (ve sloupci je první operand, v řádku druhý; „ND“ – není definováno, „z $\mathbb{R}$“ – operace se přenáší z R):

$+$	$-\infty$	$b\in\mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	ND
$+\infty$	ND	$+\infty$	$+\infty$

a je komutativní,

$\cdot$	$\langle-\infty,0)$	0	$(0,\infty\rangle$
$-\infty$	$+\infty$	ND	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	ND	$+\infty$

a je komutativní,

$-$	$-\infty$	$b\in\mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	ND	$-\infty$	$-\infty$
$a\in\mathbb{R}$	$+\infty$	z $\mathbb{R}$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	ND

,

$\div$	$-\infty$	$b\in\mathbb{R}^-$	0	$b\in\mathbb{R}^+$	$+\infty$
$-\infty$	ND	$+\infty$	ND	$-\infty$	ND
$a\in\mathbb{R}$	0	z $\mathbb{R}$	z $\mathbb{R}$	z $\mathbb{R}$	0
$+\infty$	ND	$-\infty$	ND	$+\infty$	ND

.

Poznámka. Pokud v $\mathbb{R}^*$ hovoříme o číslech z $\mathbb{R}$, nazýváme je vlastní, $\pm\infty$ pak nazýváme nevlastní.

Věta 4 (Aritmetika v $\mathbb{R}^*$)**.** (Pilous, 2016) Sčítání a násobení v $\mathbb{R}^*$ je asociativní a platí distributivní zákon, a dále pro každé $a, b\in\mathbb{R}^*$ platí: $-a = -1\cdot a$, $a - b = a + (-b)$, $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$ a $\frac{1}{ab} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}$, vždy, má-li alespoň jedna strana smysl.

Důkaz. Důkaz přenechávám bádavému čtenáři. cbd

Poznámka. $\sup\mathbb{R} = \inf\emptyset = \infty$ a $\inf\mathbb{R} = \sup\emptyset = -\infty$. Je zřejmé, proč tomu tak je u reálných čísel, a u prázdné množiny si to můžeme také jednoduše zdůvodnit. Jelikož v definici závory kvantifikujeme přes všechny prvky množiny, je definice pro prázdnou množinu splněna s jakýmkoliv $z\in\mathbb{R}$, a každý prvek $\mathbb{R}$, resp. $\mathbb{R}^*$ je tak dolní i horní závorou prázdné množiny. Pokud pak hledáme např. supremum, hledáme nejmenší horní závoru, kterou je nejmenší hodnota z $\mathbb{R}^*$, tedy $-\infty$. Analogická myšlenka se provede pro infimum.

2.5 Zobrazení

Abychom se přiblížili k zavedení funkce, definujeme si její nadřazený pojem, kterým je zobrazení, jako speciální typ relace.

Definice 17 (Zobrazení)**.** Binární relace $f \subset A \times B$ se nazývá zobrazení z A do B a píšeme $f\colon A \to B$ jestliže platí:

$$\big([x, y_1]\in f \wedge [x, y_2]\in f\big) \Rightarrow y_1 = y_2.$$

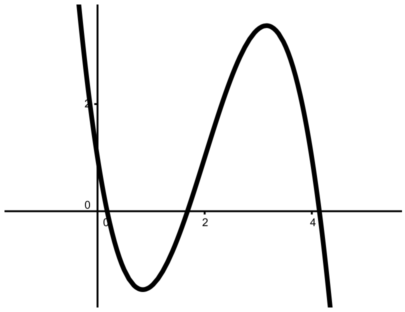
Rozeberme si podmínku v definici zobrazení. Ta nám říká, že pokud je jednomu x připsáno více y, pak se musejí rovnat. Definice se dá tedy formulovat slovy tak, že „zobrazení z množiny do množiny B je binární relace, ve které je každému x z množiny A připsáno nejvýše jedno y z množiny B“.

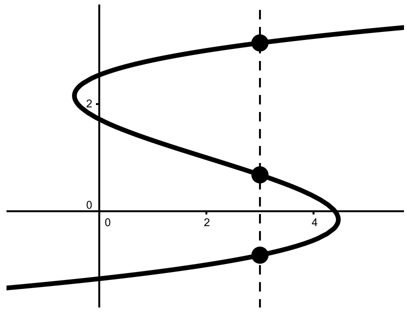
Poznámka. Pro zápis $[x, y]\in f$ budeme z praktických i historických důvodů používat také $f\colon y = f(x)$, a čteme zobrazení f se v x rovná y.

Jelikož je zobrazení speciálním případem kartézského součinu, budeme ho tedy chtít stejně jako kartézský součin nějakým způsobem zanést do grafu.

Definice 18 (Graf zobrazení)**.** Nechť f je zobrazení z A do B. Potom množinou bodů grafu zobrazení je množina $G(f) = \{[x, y]; x\in A \wedge y = f(x)\}$.

Graf zobrazení pak může vypadat například jako na obrázku vlevo (viz níže), ale už ne jako na obrázku vpravo, protože jak vidíme, na něm je jednomu x připsáno více y.





K zobrazení patří neoddělitelně definiční obor a s ním i obor hodnot. Bez definičního oboru bychom nevěděli, ke kterým prvkům z množiny A máme přiřazovat prvky z množiny B.

Definice 19 (Definiční obor a obor hodnot)**.** (Vitásek, 2012) Je-li f zobrazení z množiny A do množiny B, potom
definiční obor f je množina $\mathcal{D}(f) \coloneqq \{x; x \in A \wedge \exists y \in B\colon\ [x,y] \in f\}$,
obor hodnot$f$ je množina $\mathcal{H}(f) \coloneqq \{y; y \in B \wedge \exists x \in A\colon\ [x,y] \in f\}$.

Příkladem toho, jak podstatnou částí zobrazení je definiční obor, může být například nerovnost zobrazení $f\colon y = x^2; x \in (0,1)$ se zobrazením $g\colon y = x^2; x \in (1,2)$. Tato zobrazení nenabývají shodných hodnot, resp. nejedná se o množiny stejných uspořádaných dvojic, ačkoliv jsou obě dané stejným předpisem.

S definičním oborem a oborem hodnot souvisí i vlastnosti. Pokud budeme hovořit o tom, že zobrazení má nějakou vlastnost, budeme tím myslet hodnoty a obor hodnot daného zobrazení.

Definice 20 (Vzory a obrazy zobrazení)**.** (Vitásek, 2012) Nechť $f\colon A \to B$. Je-li $[x,y] \in f$, nazýváme x vzorem y a y obrazem x při zobrazení f.
Obrazem množiny $C \subset A$ při zobrazení f rozumíme množinu

$$f\,(C) \coloneqq \{y; \exists x \in C : [x,y] \in f\}.$$

Vzorem množiny $D \subset B$ při zobrazení f rozumíme množinu

$$f_{-1}\,(D) \coloneqq \{x; \exists y \in D : [x,y] \in f\}.$$

Definice 21 (Prosté zobrazení)**.** (Vitásek, 2012) Řekneme, že f je prosté zobrazení množiny A do množiny B, jestliže

$$(1)\ \ f\colon A \to B,$$

$$(2)\ \ \forall x_1 \in A \forall x_2 \in A\colon\ ([x_1,y] \in f \wedge [x_2,y] \in f) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Všimněme si podobnosti s podmínkou v definici zobrazení. Rozdíl je pouze v tom, že zatímco definice zobrazení říká, že jeden vzor nesmí mít více obrazů, tak podmínka prostého zobrazení přidává, že ani jeden obraz nesmí mít více vzorů. Tím se dostáváme k postačující podmínce, abychom mohli vytvořit inverzní zobrazení, protože pokud nyní prohodíme vzory a obrazy, pořád se bude jednat o zobrazení.

Definice 22 (Inveětarzní zobrazení)**.** (Vitásek, 2012) Nechť f je prosté zobrazení z množiny A na množinu B. Řekneme, že f^{-1} je inverzní zobrazení k f, jestliže $f^{-1} = \{[x, y]; [y, x] \in f\}$.

Poznámka. Pro definiční obor a obor hodnot inverzního zobrazení platí, že $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{H}(f)$ a $\mathcal{H}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f)$.

Nyní již víme, že pokud chceme vytvořit inverzní zobrazení, musí být nejprve původní zobrazení prosté. Jak ale budeme postupovat v případě, když chceme zjistit inverzní zobrazení k zobrazení, které prosté není? Můžeme si ho tzv. zúžit na definiční obor, na kterém prosté je, a k tomu nám slouží restrikce zobrazení.

Definice 23 (Restrikce zobrazení)**.** (Vitásek, 2012) Řekneme, že g je restrikce zobrazení f na množinu M, jestliže $g \subset f$ a $\mathcal{D}(g) = M \cap \mathcal{D}(f)$. Budeme ji značit $g = f|_M$.

Příkladem restrikce zobrazení může být inverzní zobrazení k $f\colon y = x^2$. f není prosté, a tak se zpravidla bere jeho prostá část na nezáporném definičním oboru. Inverzí f pak dostáváme $f^{-1}\colon y = \sqrt{x}; x \in \mathbb{R}_0^+$.

První operací, a tím i první možností, jak získávat nová zobrazení z nám již známých zobrazení, bude skládání zobrazení. Je to také jediná operace, která má v obecné rovině zobrazení smysl. Pro další operace si již zavedeme v další kapitole pojem funkce.

Definice 24 (Složené zobrazení)**.** (Vitásek, 2012) Nechť f a g jsou zobrazení. Potom složené zobrazení $f \circ g$ je zobrazení h definované předpisem

$$h = \{[x, z]; \exists y\colon\ [x, y] \in g \wedge [y, z] \in f\}\,.$$

Poznámka. Složené zobrazení $(f \circ g)(x)$ značíme též $f(g(x))$. Skládání zobrazení je asociativní, ale není komutativní. Obecně tedy neplatí $f \circ g = g \circ f$.

Věta 5. $(f \circ g)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Důkaz. $[z, x] \in (f \circ g)^{-1} \Leftrightarrow [x, z] \in f \circ g \Leftrightarrow (\exists y\colon [x, y] \in g \wedge [y, z] \in f)$,
$[z, x] \in f^{-1} \circ g^{-1} \Leftrightarrow (\exists y\colon [z, y] \in f^{-1} \wedge [y, x] \in g^{-1}) \Leftrightarrow (\exists y\colon [y, z] \in f \wedge [x, y] \in g)$.
cbd

Věta 6. Mějme prosté zobrazení f a k němu inverzní f^{-1}. Potom

$$(1)\ \forall x \in \mathcal{D}(f)\colon f^{-1}(f(x)) = x,$$
$$(2)\ \forall x \in \mathcal{D}\big(f^{-1}\big)\colon f\big(f^{-1}(x)\big) = x.$$

Důkaz. $f^{-1}(f(x)) = x$ pro $x \in \mathcal{D}(f)$: Z definice složeného zobrazení víme, že množina $f^{-1} \circ f = \{[x, z]; \exists y\colon\ [x, y] \in f \wedge [y, z] \in f^{-1}\}$. Dále víme, že f^{-1} je množina všech $[y, x]$, pro která platí, že $[x, y] \in f$. Můžeme tedy v množině $f^{-1} \circ f$ nahradit z za x, a dostáváme

$$f^{-1} \circ f = \big\{[x, x]; \exists y\colon\ [x, y] \in f \wedge [y, x] \in f^{-1}\big\} = \{[x, x]; x \in \mathcal{D}(f)\}.$$

Můžeme také psát $f^{-1}(f(x)) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$.

$f(f^{-1}(x)) = x$ pro $x \in \mathcal{D}(f^{-1})$: Důkaz provedeme analogicky předchozímu.
cbd

Cvičení

2.14. Mějme množiny $N = \{\triangle, \square\}$, $O = \{3, 4\}$. Rozhodněte, zda-li je $N \times O$ zobrazení a své tvrzení zdůvodněte.

2.15. U následujících množin rozhodněte, zdali jde o zobrazení, případně jestli se jedná zobrazení prosté.

(a) $P_1 = \{[x, y]; [x, y] \in \mathbb{R}^2 \wedge y = 3\}$

(b) $P_2 = \{[x, y]; [x, y] \in \mathbb{R}^2 \wedge x = 1\}$

(c) $P_3 = \{[x, y]; [x, y] \in \mathbb{R}^2 \wedge x = y\}$

2.16. Mějme dvě zobrazení $f = \{[0, 6], [1, 3], [2, 5], [3, 3], [4, 6], [6, 6], [7, 5]\}$ a $g = \{[1, 2], [2, 3], [3, 4], [4, 5], [5, 6]\}$. Určete množiny složených zobrazení $f \circ g$ a $g \circ f$.

Kapitola 3

Reálné funkce jedné reálné proměnné

Zobrazení je širokým pojmem, který se uplatňuje nejen v matematické analýze, ale i v dalších matematických oborech, a dokonce se dá aplikovat i mimo matematiku. Zobrazením může být např. zobrazení množiny synů na množinu otců. Pro takovéto zobrazení platí námi nadefinované vztahy a operace z minulé kapitoly. Pokud bychom chtěli, můžeme např. složit zobrazení synů na otce samo se sebou. Výsledné zobrazení by pak mělo také smysl a lze ho nazvat například „dědové“. Pro naše účely se ovšem potřebujeme dobrat zobrazení, které bude konkrétnější, a pomůže nám rozšířit repertoár operací a vlastností, které u něj budeme moci používat. Zaměříme se proto na speciální případ zobrazení, která zobrazují do číselných oborů, a tím jsou funkce.

Definice 25 (Funkce)**.** (Vitásek, 2012) Zobrazení libovolné množiny A do nějakého číselného oboru budeme obecně nazývat funkce. Podrobněji reálnou funkcí budeme rozumět zobrazení do $\mathbb{R}$, komplexní funkcí zobrazení do $\mathbb{C}$. Je-li navíc $A \subseteq \mathbb{R}$, budeme takovou funkci nazývat podrobněji reálnou funkcí reálné proměnné.

Poznámka. V následujícím textu se budeme bavit převážně o reálných funkcích jedné reálné proměnné, které pro zjednodušení budu nazývat zkráceně funkce. Pokud bychom mluvili o jiných funkcích, bude vždy explicitně řečeno, o které se jedná.

Protože jsou funkce speciálním případem zobrazení, platí pro ně vše, co jsme si uvedli u zobrazení. Z toho důvodu nemusíme znovu definovat, co je to např. definiční obor, obor hodnot, graf funkce atd., ale pouze si to pro ujasnění zopakujeme.

Nechť funkce $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, potom definičním oborem je množina $\mathcal{D}(f) = \{x; x \in \mathbb{R} \wedge f(x) \in \mathbb{R}\}$ a oborem hodnot $\mathcal{H}(f) = \{f(x); x \in \mathcal{D}(f)\}$.

Grafem funkce rozumíme její znázornění v kartézské soustavě souřadnic.

Cvičení

3.1. U následujících binárních relací rozhodněte, zda-li se jedná o funkce (v tomto případně nemusí jít o funkce reálné proměnné).

(a) Každé třídě na škole přiřadíme jejího třídního učitele.

(b) Každé třídě na škole přiřadíme počet žáků této třídy.

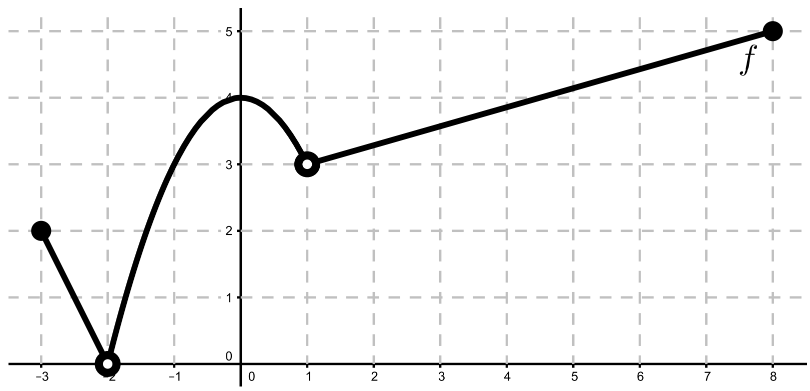
(c) Číslům ve třídní knize přiřadíme postupně podle abecedy jména žáků.

(d) Každému žákovi ve třídě 3.D přiřadíme průměr jeho známek na pololetním vysvědčení.

(e) Každému žákovi ve třídě 3.E přiřadíme jeho výšku a váhu.

3.2. Rozhodněte, zdali předpis $f\colon |y| = x$, který každému $x \in \mathbb{R}_0^+$ přiřazuje $y \in \mathbb{R}$, je předpisem funkce. Své tvrzení zdůvodněte.

3.3. Určete $\mathcal{D}(f)$ a $\mathcal{H}(f)$ funkce f dané následujícím grafem.



3.1 Operace s funkcemi

Operací zavedenou již u zobrazení je skládání zobrazení, není jí tedy nutno definovat u funkcí. Složením funkcí f a g značené $f \circ g$ rozumíme funkci $(f \circ g)(x) = f\left(g\left(x\right)\right)$, kde g je funkcí vnitřní a f je funkcí vnější.

Úloha 1. Mějme funkce $f(x) = x^2$ a $g(x) = 3x + 1$. Určete složené zobrazení $f \circ g$.

Řešení. Pro názornost si nejprve funkce přepíšeme do tvaru se dvěma proměnnými $f\colon y = x^2$ a $g\colon y = 3x + 1$. Jelikož víme, že g se bude zobrazovat do f, tak si podle toho vytvoříme pomocnou proměnnou z. Potom $f\colon y = z^2$ a $g\colon z = 3x + 1$. Nyní už jen stačí dosadit za z ve funkci f, tedy $f \circ g\colon y = (3x + 1)^2 = 9x^2 + 6x + 1$.

Pokud do problematiky vidíme, dá se úloha samozřejmě řešit i jednodušeji. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x + 1) = (3x + 1)^2 = 9x^2 + 6x + 1$.

Jelikož jsou funkce definované na reálných číslech, dovoluje nám to zavést operace, které z operací s reálnými čísly vycházejí.

Definice 26. (Vitásek, 2012) Nechť f a g jsou funkce. Pak nazýváme

(a) součtem funkcí f a g funkci

$$(f+g)(x) \coloneqq f(x)+g(x), x \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g),$$

(b) rozdílem funkcí f a g funkci

$$(f-g)(x) \coloneqq f(x)-g(x), x \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g),$$

(c) součinem funkcí f a g funkci

$$(fg)(x) \coloneqq f(x)\, g(x), x \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g),$$

(d) podílem funkcí f a g funkci

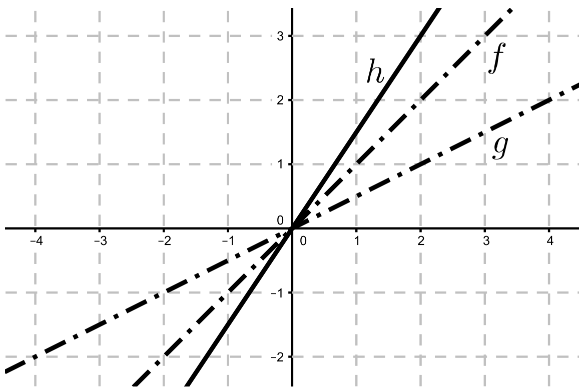
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) \coloneqq \frac{f(x)}{g(x)}, x \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g) \setminus \{x; g(x)=0\}.$$

Souhrnně tyto operace nazveme funkčními operacemi.

Funkční operace jsou konstrukčními prvky, kterými se z konstantních a identické funkce vytvářejí další, tzv. racionální funkce (viz Definice elementárních funkcí, podkapitola 4.2).

Úloha 2. Mějme funkce $f(x)=x$ a $g(x)=\frac{1}{2}x$. Graficky znázorněte funkci $h=f+g$ a určete její hodnotu v ± 1 a 0.

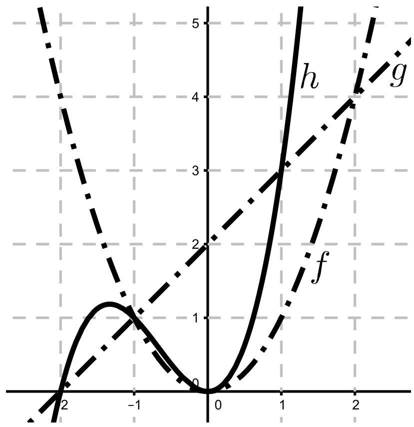
Řešení. Úloha se dá řešit početně tak, že $h(x)=f(x)+g(x)=x+\frac{1}{2}x=\frac{3}{2}x$. Nesmíme zapomenout na definiční obory, ale v tomto případě jsou f i g (a tím pádem i h) definovány na celém $\mathbb{R}$. Nyní už jen nakreslíme graf výsledné funkce $h(x)=\frac{3}{2}x$ a dopočítáme hodnotu v zadaných bodech. Tedy $h(-1)=-\frac{3}{2}$, $h(0)=0$ a $h(1)=\frac{3}{2}$. Pro názornost si ukážeme grafické řešení.



Funkce h v daném bodě vzniká součtem hodnot funkcí f a g. Např. pro $x=2$ vidíme, že $f(x)=2$ a $g(x)=1$, tedy $h(2)=2+1=3$.

Úloha 3. Mějme funkce $f(x) = x^2$ a $g(x) = x + 2$. Graficky znázorněte funkci $h = fg$ a určete její hodnotu v ± 2, ± 1 a 0.

Řešení. Tato úloha je o něco těžší než předchozí, a proto nejvhodnějším postupem je prvně si spočítat výslednou funkci, a následně zakreslit graf. Pro funkci $h(x)$ platí, že $h(x) = f(x)\,g(x) = x^2\,(x+2) = x^3 + 2x^2$. Spočteme si hodnoty v zadaných bodech a proložíme jimi funkci: $h(-2) = 0$, $h(-1) = 1$, $h(0) = 0$, $h(1) = 3$, $h(2) = 16$.



Z grafu vidíme, že tam, kde je alespoň jedna funkce nulová, je nulový i jejich součin, když má jedna funkce hodnotu 1, tak se zachovává hodnota druhé, a stejně tak jsou splněny i ostatní vlastnosti násobení.

Cvičení

3.4. Mějme funkce $f(x) = -2x + 1$ a $g(x) = x^2 - 2x + 2$. Určete složená zobrazení $f \circ g$ a $g \circ f$.

3.5. U funkcí f a g rozhodněte o jejich rovnosti na $\mathbb{R}$.

   (a) $f(x) = x$, $g(x) = (\sqrt{x})^2$

   (b) $f(x) = x^3 + x^2$, $g(x) = x\,(x^2 + x)$

   (c) $f(x) = \frac{x^3}{x^2}$, $g(x) = x$

3.6. Mějme funkce $f(x) = x$ a $g(x) = -3x$. Uveďte předpis funkce $h = f + g$, načrtněte její graf a určete její hodnotu v ± 1 a 0.

3.2 Vlastnosti funkcí

Z vlastností reálných čísel vyplývá mnoho vlastností i pro funkce. Jednotlivé vlastnosti např. hodnotí, zda funkce zachovává nebo převrací uspořádání, jaké největší a nejmenší hodnoty funkce nabývá, jaký je vztah mezi hodnotami v bodech symetrických podle nuly, nebo jak se graf funkce „prohýbá“. Protože s vlastnostmi, které často popisujeme algebraicky, souvisí i jejich vztah ke grafickému znázornění funkce, tak ke každé definované vlastnosti přikládám i obrázek funkce, která danou vlastnost má.

3.2.1 Monotonie funkce

Nejzřejmějším případem toho, co se může dít s funkční hodnotou je, že se postupně zleva doprava zvětšuje nebo zmenšuje. Toto zvětšování a zmenšování funkční hodnoty v závislosti na x popisuje následující vlastnost.

Definice 27 (Monotonie funkce)**.** Funkce f je na množině $M \subseteq \mathcal{D}(f)$ rostoucí (klesající, neklesající, nerostoucí), pokud

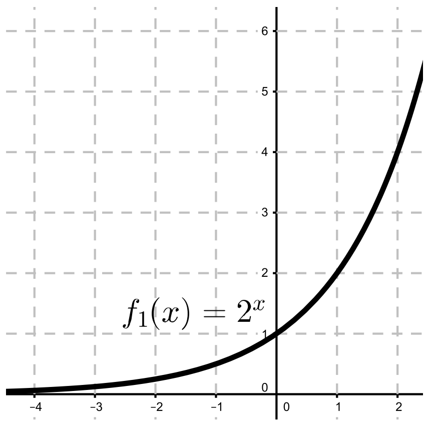
$$\forall x_1, x_2 \in M\colon x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < (>, \leq, \geq)\, f(x_2)\,.$$

Funkce f je na M monotonní, splňuje-li alespoň jednu z uvedených vlastností. Funkce f je na M ryze monotonní, pokud je rostoucí nebo klesající.

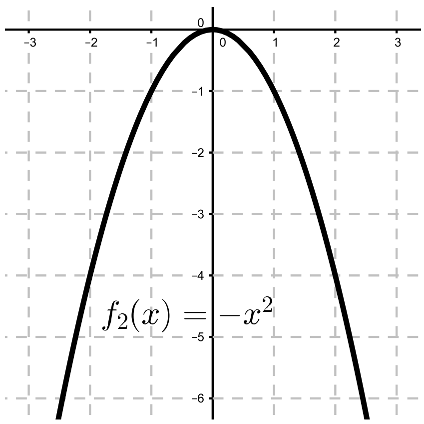
Jinými slovy, definice rostoucí funkce říká, že pokud se zvětší x, tak se zvětší i funkční hodnota. Analogicky pro ostatní monotonie.

Upozornění. Nerostoucí funkce není opakem rostoucí a neklesající není opakem klesající. Jedná se o odlišné vlastnosti. Funkce, která není rostoucí, vůbec nemusí být monotonní.

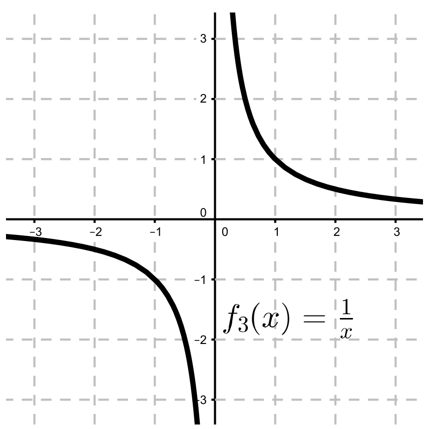
Pro názornost si ukážeme příklady monotonií některých funkcí.



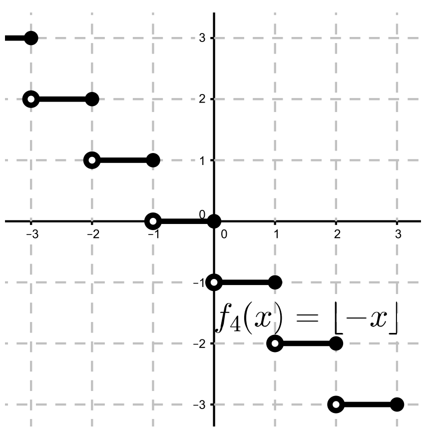
Rostoucí (i neklesající) na $\mathbb{R}$.



Rostoucí (i neklesající) na $(-\infty, 0\rangle$ a klesající (i nerostoucí) na $\langle 0, \infty)$.



Klesající (i nerostoucí) na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$.



Nerostoucí na $\mathbb{R}$.

Upozornění. Funkce f_3 je nerostoucí na disjunktních intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$, ale nikoliv na jejich sjednocení, tudíž na rozdíl od f_4 není nerostoucí na svém definičním oboru.

Z příkladů by čtenář mohl nabýt dojmu, že každá funkce se dá zúžit na intervaly, na kterých je monotonní, ale tomu tak být nemusí (viz Dirichletova funkce, kapitola 4.1.7).

Označení. Řekneme, že funkce je monotonní, jestliže splňuje alespoň jednu z uvedených vlastností monotonie na celém definičním oboru.

Speciálním případem funkce, která je zároveň neklesající i nerostoucí na celém definičním oboru, je konstantní funkce $f(x) = c; c \in \mathbb{R}$.

Z obrázků s příklady monotonií vidíme to, že je silnější podmínkou, když je funkce rostoucí, než když je neklesající. Na tomto poznatku je založena následující věta.

Věta 7. Jestliže je funkce f na množině $M \subseteq \mathcal{D}(f)$ rostoucí (klesající), potom je také funkce f na množině M neklesající (nerostoucí).

Důkaz. Důkaz plyne triviálně z definice. Jestliže $f(x_1) < f(x_2)$, potom zajisté $f(x_1) \leq f(x_2)$. Analogicky postupujeme pro klesající a nerostoucí funkce. cbd

Důsledkem této věty je, že nutnou podmínkou ryzí monotonie funkce je monotonie funkce.

Cvičení

3.7. Určete intervaly monotonie u funkce f ze cvičení 3.3.

3.2.2 Parita funkce

Parita je vlastnost funkce, kterou posuzujeme na celém definičním oboru. Vyjadřuje vztah mezi $f(x)$ a $f(-x)$. Z tohoto hlediska rozlišujeme dva typy parity funkce.

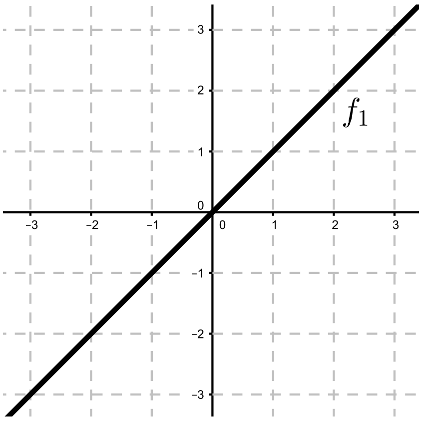
Definice 28 (Sudá funkce)**.** Funkce f je sudá, pokud

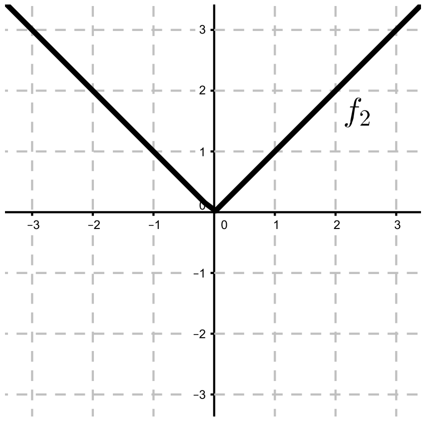
$$\forall x \in \mathcal{D}(f):\ -x \in \mathcal{D}(f) \wedge f(x) = f(-x)\,.$$

Definice 29 (Lichá funkce)**.** Funkce f je lichá, pokud

$$\forall x \in \mathcal{D}(f):\ -x \in \mathcal{D}(f) \wedge f(x) = -f(-x)\,.$$

Znamená to, že je funkce sudá, pokud je její graf osově souměrný podle osy y, a lichá, pokud je její graf středově souměrný podle počátku soustavy souřadnic.





$f_1(x) = x$ je funkce lichá. $\quad$ $f_2(x) = |x|$ je funkce sudá.

Upozornění. Při rozhodování o paritě nesmíme opomenout definiční obor, který také musí být souměrný, a to podle 0. Např. funkce $f(x) = x; x \in \mathbb{R}^+$ již není lichá. To by bylo patrné i z grafu, který by již nebyl středově souměrný podle počátku soustavy souřadnic.

Úloha 4. Určete paritu funkce $f(x) = x^3$.

Řešení. Ze střední školy víme, jak vypadá graf funkce x^3, a že je středově souměrný podle počátku. Obrázek však není důkaz, proto tuto hypotézu rozhodnete výpočtem podle definice. Vyjdeme od $f(-x)$, a pokud se algebraickými úpravami dostaneme k $f(x)$, je funkce sudá, a pokud se dostaneme k $-f(x)$, je funkce lichá.

$$f(-x) = (-x)^3 = (-1)^3 (x)^3 = -1x^3 = -x^3 = -f(x)$$

Vynásobením -1 dostáváme $-f(-x) = f(x)$, a jelikož je $f(x)$ definovaná na celém $\mathbb{R}$, tak můžeme tvrdit, že se jedná o funkci lichou.

Úloha 5. Vyšetřete paritu funkce fg v závislosti na paritě funkcí f a g.

Řešení. Označíme funkci $h = fg$ a úlohu rozdělíme na čtyři nezávislé případy, pro které ji vyřešíme.

1. f sudá, g sudá:
$$h(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)g(x) = h(x)$$
$$h(-x) = h(x) \text{ ... funkce sudá.}$$

2. f sudá, g lichá:
$$h(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)(-g(x)) = -h(x)$$
$$-h(-x) = h(x) \text{ ... funkce lichá.}$$

3. f lichá, g sudá:
$$h(-x) = f(-x)g(-x) = -f(x)g(x) = -h(x)$$
$$-h(-x) = h(x) \text{ ... funkce lichá.}$$

4. f lichá, g lichá:

$$h(-x) = f(-x)g(-x) = -f(x)(-g(x)) = h(x)$$

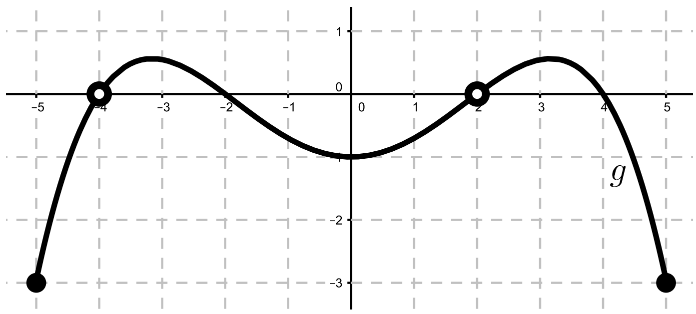
$$h(-x) = h(x) \ \ldots \text{ funkce sudá.}$$

Cvičení

3.8. Početně určete paritu následujících funkcí.

(a) $f(x) = 0$
(b) $f(x) = 1$
(c) $f(x) = \frac{2}{x}$
(d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$
(e) $f(x) = x^3 - 4x - 4$
(f) $f(x) = x^3 - 4x$
(g) $f(x) = x^2 - 4$

3.9. Určete paritu funkce g dané následujícím grafem.



3.10. Vyšetřete paritu funkce $(f - g)(x)$ v závislosti na paritě funkcí f a g.

3.2.3 Omezenost funkce

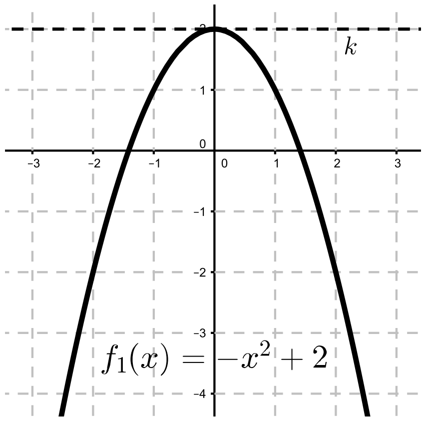
Jelikož uvažujeme pouze reálné funkce (zobrazení do $\mathbb{R}$), dovoluje nám to u oboru hodnot, jakožto podmnožině reálných čísel, zavést jeho omezenost i ohraničenost. Nadále však hovoříme pouze o omezenosti funkce, protože omezenost a ohraničenost jsou na $\mathbb{R}$ ekvivalentní, tudíž je není nutno rozlišovat.[1]

Definice 30 (Omezenost funkce shora a zdola)**.** Funkce f je na množině $M \subseteq \mathcal{D}(f)$ omezená shora (zdola), pokud

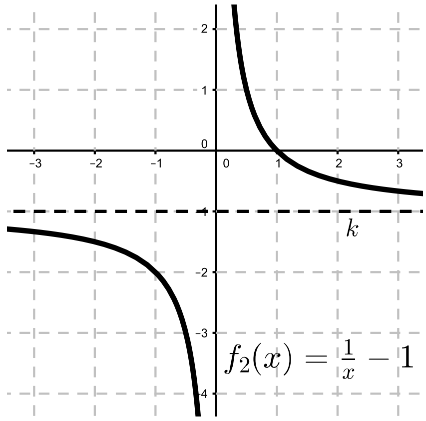
$$\exists k \in \mathbb{R}\ \forall x \in M\colon\ f(x) \leq (\geq)\, k.$$

[1] Pro lepší názornost u definic omezenosti nevyužívám definice omezené množiny, ale všímavý čtenář zajisté vidí, že např. pokud je funkce omezená hodnotou k, pak vzdálenost každých dvou hodnot z oboru hodnot je menší nebo rovna než $r = 2k$.

Jinými slovy, definice říká, že funkce je na množině omezená shora (zdola), pokud „nepřeleze“ („nepodleze“) již nějakou pevně danou hodnotu, neboli „neuteče“ do nekonečna.



Omezená shora na $\mathbb{R}$.

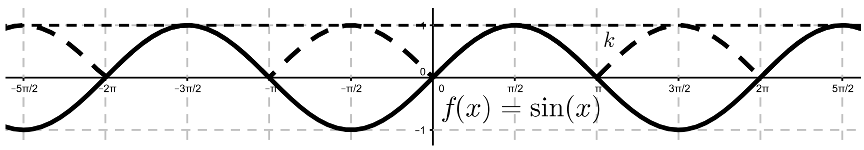


Omezená shora na $\mathbb{R}^-$ a omezená zdola na $\mathbb{R}^+$.[2]

Definice 31 (Omezená funkce)**.** Funkce f je na množině $M \subseteq \mathcal{D}(f)$ omezená, pokud

$$\exists k \in \mathbb{R}\ \forall x \in M\colon\ |f(x)| \leq k.$$

Funkce, o které víme již ze střední školy, že je omezená, může být např. funkce $\sin(x)$.



Omezená na $\mathbb{R}$.

Věta 8. Funkce je na množině $M \subseteq \mathcal{D}(f)$ omezená právě tehdy, když je na ní omezená zároveň shora i zdola.

Důkaz. $\Rightarrow$: Z definice omezené funkce f víme, že $|f(x)| \leq k$. Triviálně pak zbavením se absolutní hodnoty dostáváme $f(x) \leq k$ (omezená shora) a $f(x) \geq -k$ (omezená zdola).

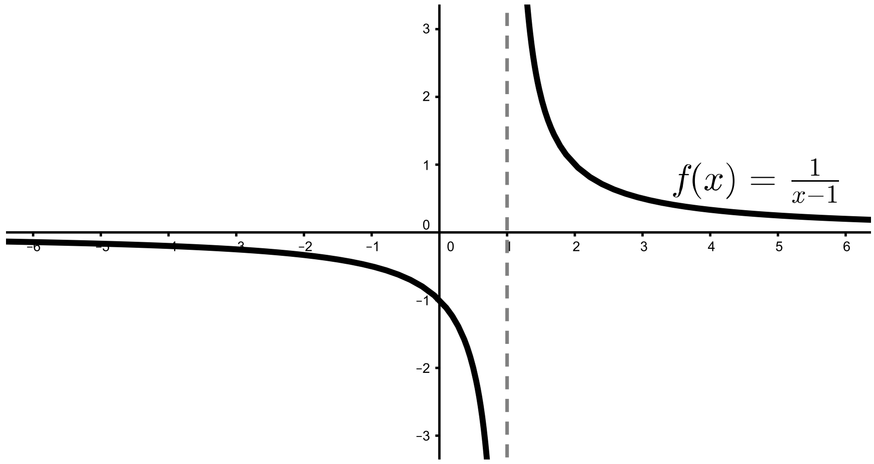
$\Leftarrow$: Mějme funkci f, pro kterou platí $f(x) \leq k_1$ (omezená shora) a $f(x) \geq k_2$ (omezená zdola). Triviálně pak pro $k := \max\{|k_1|, |k_2|\}$ platí $|f(x)| \leq k$. cbd

Označení. Řekneme, že funkce je omezená, jestliže je omezená na celém definičním oboru. Analogicky používáme u omezenosti funkce shora a zdola.

[2] Funkce je samozřejmě omezená shora např. i na intervalu $(1, 2)$ apod., ale jako příklad uvádím rozdělení na maximálních disjunktních intervalech definičního oboru.

Úloha 6. Určete omezenost funkce f dané předpisem $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

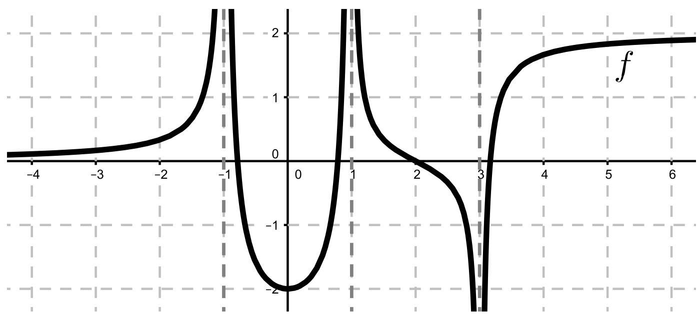
Řešení. Nejprve si načrtneme graf funkce.



Z něj vidíme, že se funkce přibližuje libovolně blízko k přímce $x = 1$, kterou ale nikdy neprotne, protože pro $x = 1$ není f definována. Společně s tím, jak se přibližujeme k přímce zprava, tak funkční hodnoty funkce f jdou nade všechny meze až do nekonečna, z čehož plyne, že není omezená shora. Stejně tak pokud jdeme k přímce zleva, tak funkční hodnoty funkce f jdou pode všechny meze až do mínus nekonečna, takže není omezená ani zdola. Takovouto přímku nazýváme asymptota funkce a v grafech ji značíme přerušovanou čarou.

Cvičení

3.11. U funkce f dané grafem



určete omezenost na následujících množinách.

(a) $\mathcal{D}(f) \cap (-4, 1\rangle$

(b) $\mathcal{D}(f) \cap \langle 2, \infty)$

(c) $\mathcal{D}(f) \cap \big((-4, 1\rangle \cup \langle 2, \infty) \big)$

(d) $\mathcal{D}(f) \cap \big((-\infty, -2\rangle \cup \langle 4, \infty) \big)$

3.2.4 Extrémy funkce

Z hlediska oboru hodnot jakožto množině můžeme hovořit i o jejím supremu, infimu, maximu a minimu.

Definice 32 (Supremum a infimum funkce)**.** Supremem a infimem funkce f na množině $M \subseteq \mathcal{D}(f)$ jsou supremum a infimum funkčních hodnot na této množině, tedy

$$\sup_{x\in M}(f) = \sup\{f(x); x\in M\},$$

$$\inf_{x\in M}(f) = \inf\{f(x); x\in M\}.$$

Označení. Pokud hovoříme o supremu a infimu funkce, aniž bychom upřesnili, na jaké množině definičního oboru, myslíme tím na celém definičním oboru. Potom platí, že $\sup(f) = \sup\mathcal{H}(f)$ a $\inf(f) = \inf\mathcal{H}(f)$.

Definice 33 (Maximum a minimum funkce)**.** Funkce f má na množině $M \subseteq \mathcal{D}(f)$ v bodě c maximum (minimum), pokud

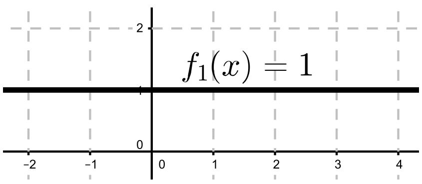
$$\exists c\in M\ \forall x\in M\colon f(x) \leq (\geq) f(c)\,.$$

Jinými slovy, pokud maximum, resp. minimum existuje, pak je tou největší, resp. nejmenší funkční hodnotou na dané podmnožině definičního oboru.

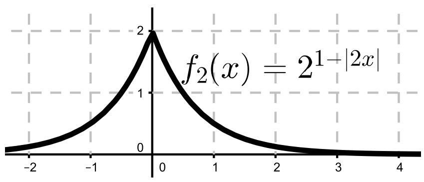
Označení. V případě že $M = \mathcal{D}(f)$, tak se jedná o globální maximum (minimum). Říkáme, že funkce má v x_0 lokální maximum (minimum), pokud $\exists\varepsilon\in\mathbb{R}^+\ \forall x\in\langle x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon\rangle : f(x) \leq (\geq) f(x_0)$.

Jak již víme z kapitoly 2.3, na rozdíl od maxima supremum existuje vždy. Dalo by se dokonce říct, že maximum je speciálním případem suprema, pokud funkce nabývá jeho hodnoty. Z tohoto pohledu jsou supremum významnějším prvkem, protože pro něj vždy už jen můžeme rozhodnout, jestli se nejedná i o maximum. Analogická úvaha platí pro infimum a minimum.

Pro lepší představu si na několika příkladech funkcí ukážeme jejich supremum, infimum, maximum a minimum.[3]

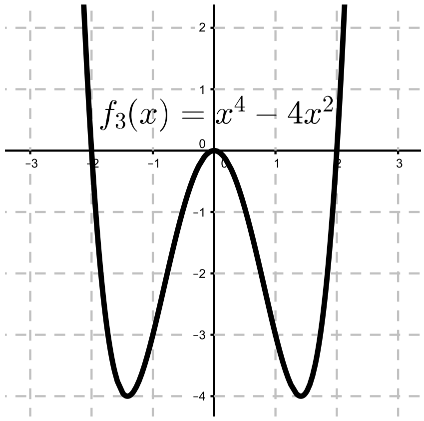


$\max(f_1) = \min(f_1) = 1.$

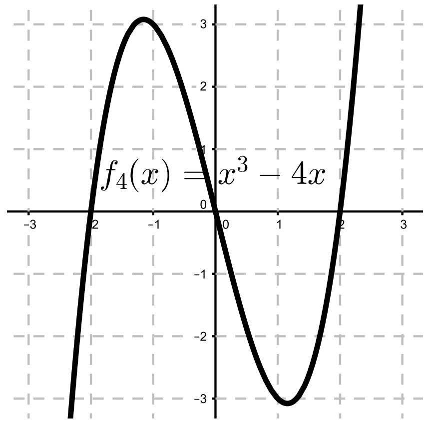


$\max(f_2) = 2$ a $\inf(f_2) = 0$,
$\min(f_2)$ neexistuje.

[3] Pro zjednodušení pracujeme vždy na celém definičním oboru, protože by existovalo nekonečně podmnožin definičních oborů, na kterých by mělo smysl extrémy určovat. Pokud bude mít funkce maximum (minimum), budu psát rovnou $\max(f)$ $(\min(f))$ a předpokládat, že je již čtenáři jasné, že hodnota je i supremem (infimem) funkce.



$\sup(f_3) = \infty$ a $\min(f_3) = -4$, $\max(f_3)$ neexistuje.



$\sup(f_4) = \infty$ a $\inf(f_4) = -\infty$, $\min(f_4)$ a $\max(f_4)$ neexistují.

Je patrné, že mezi omezeností a extrémy funkce existuje nějaký vztah. Tento vztah popisuje následující věta.

Věta 9. Funkce f s neprázdným $\mathcal{H}(f)$ je shora omezená právě tehdy, když $\sup(f) \in \mathbb{R}$. Pro zdola omezené funkce platí analogicky $\inf(f) \in \mathbb{R}$.

Důkaz. $\Rightarrow$: Funkce f je shora omezená, tedy $\exists k \in \mathbb{R}\ \forall h \in \mathcal{H}(f) : h \leq k$, neboli je k i horní závorou funkčních hodnot. Mohou nastat dvě možnosti, tato horní závora je zároveň supremem a tím pádem máme dokázáno, nebo existuje menší horní závora, která ale bude také reálná, protože máme neprázdný obor hodnot.

$\Leftarrow$: $\sup(f)$ je horní závorou $\mathcal{H}(f)$, tedy $\forall h \in \mathcal{H}(f) : h \leq \sup(f)$.

Analogicky se provede důkaz pro omezenost zdola a infimum funkce.

cbd

Cvičení

3.12. Určete extrémy u funkce f ze cvičení 3.3.

3.2.5 Periodická funkce

Pokud se funkční hodnoty v závislosti na x pravidelně opakují, pak hovoříme o speciálním případu funkce, kterým je funkce periodická.

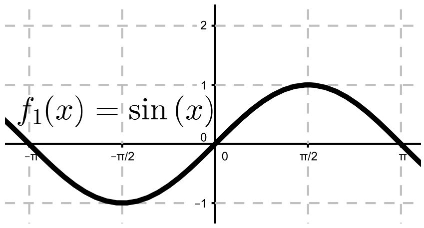
Definice 34 (Periodická funkce)**.** Funkce f je periodická, pokud

$$\exists p > 0\ \forall x \in \mathcal{D}(f) : x \pm p \in \mathcal{D}(f) \wedge f(x+p) = f(x).$$

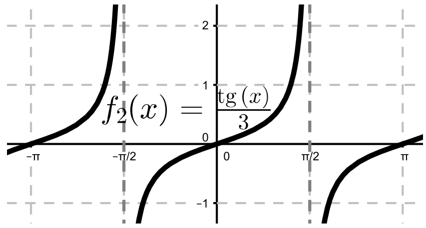
Číslo p nazýváme periodou funkce f.

Je-li p periodou funkce f, je její periodou každé $kp; k \in \mathbb{N}$.

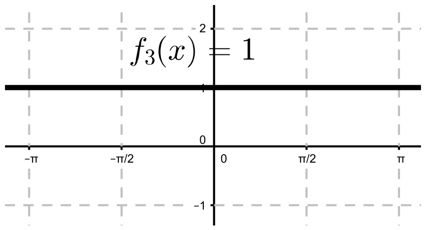
Upozornění. U periodické funkce nikdy nesmíme zapomínat na podmínku pro periodický definiční obor. Je neoddělitelnou součástí definice, a proto zúžíme-li např. funkci f_1 z následujících grafů na interval $\langle -3\pi, \infty)$, tak se již nejedná o periodickou funkci.



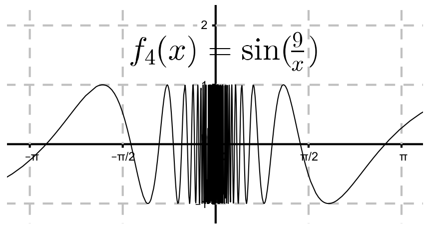
f_1 je periodická funkce
s $p_1 = 2k\pi; k \in \mathbb{N}$.



f_2 je periodická funkce
s $p_2 = k\pi; k \in \mathbb{N}$.



f_3 je periodická funkce
s libovolným $p_3 \in \mathbb{R}^+$.



f_4 není periodická funkce.(4)

Výhodou periodických funkcí je, že jejich vlastnosti stačí vyšetřovat na jedné vhodně zvolené periodě. Tyto vlastnosti jsou pak stejné v ostatních periodách.

Z praktických důvodu často hledáme nejmenší, tzv. základní periodu. Protože však podmnožina reálných čísel nemusí mít minimum, nemusí základní perioda existovat. Např. u funkce f_3 můžeme vždy najít ještě menší p, pro které je funkce také periodickou.

3.2.6 Prostá a inverzní funkce

Prostou a inverzní funkci nemusíme nově definovat, protože již máme definované prosté a inverzní zobrazení, přičemž prostá a inverzní funkce jsou jejich speciálním případem, kdy je zobrazení funkcí.

Pro připomenutí jen bez nároků na přesnost shrnuji podstatu těchto pojmů. Prostá funkce je taková funkce, ve které má každý obraz nejvýše jeden vzor. K takovéto prosté funkci můžeme vždy najít inverzní, která „zobrazuje opačným směrem“ než funkce původní. Tedy pokud $f\colon a \to b$, potom $f^{-1}\colon b \to a$.

Užitečným pojmem, který jsme také definovali u obecných zobrazení, je v tomto kontextu restrikce, která umožňuje zúžit neprostou funkci na prostou. Pokud tedy mám neprostou funkci jako v případě x^2, mohu k ní vytvořit inverzní např. jen nezáporné části jejího definičního oboru, kde prostá je.

(4)U této funkce je graf výjimečně znázorněn tenkou linkou, aby bylo lépe vidět, jak se „vlní“.

Nyní si ukážeme příklad na nalezení inverzní funkce. Více se problematikou a hledáním inverzních funkcí k funkcím elementárním budeme zabývat v kapitole 5.3.

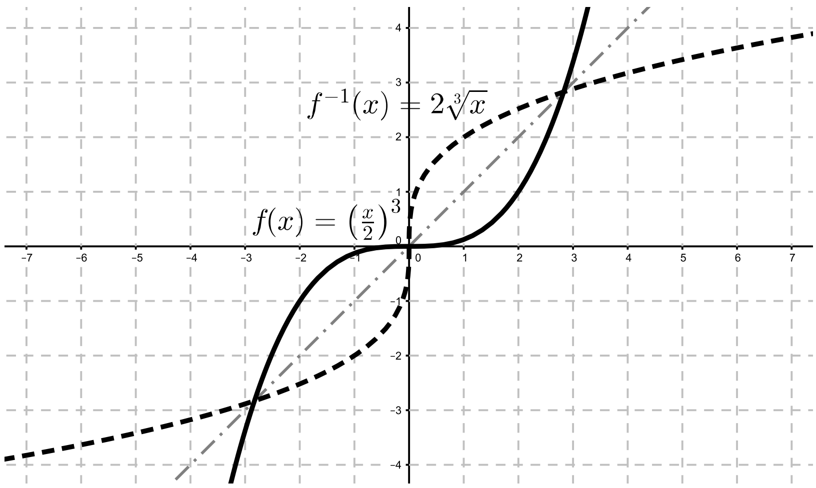
Úloha 7. Nalezněte inverzní funkci k $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^3$.

Řešení. Přepíšeme si $f(x)$ jako $f\colon y = \left(\frac{x}{2}\right)^3$ a vyjádříme x v závislosti na y.

$$\sqrt[3]{y} = \frac{x}{2}$$
$$2\sqrt[3]{y} = x$$

Toto vyjádření vzniklo ekvivalentními úpravami původního předpisu a stále tedy vyjadřuje vztah mezi x a y pro funkci f. Pokud nyní proměnné x a y vyměníme (což je podstata inverze zobrazení), dostaneme vztah pro funkci f^{-1}, tedy $f^{-1}\colon y = 2\sqrt[3]{x}$.

Poznámka. Minulou úlohu bychom mohli také řešit graficky sestrojením grafu, který je s grafem funkce f osově souměrný podle osy 1. a 3. kvadrantu, protože jak víme už ze střední školy, tuto vlastnost má graf funkce a funkce k ní inverzní vždy.



Na závěr této podkapitoly si sepíšeme větu shrnující některé zajímavé poznatky o inverzních funkcí.

Věta 10. Pro inverzní funkce platí následující vztahy.

1. Inverzní funkce je vždy prostá.
2. Jestliže je funkce f rostoucí (klesající), pak je i funkce f^{-1} rostoucí (klesající).

Důkaz. 1. Jelikož je funkce vždy zobrazením, tak ke každému $x \in \mathcal{D}(f)$ existuje právě jedno $y \in \mathcal{H}(f)$. Po inverzi (prohození x a y) ke každému $x \in \mathcal{H}(f)$ existuje právě jedno $y \in \mathcal{D}(f)$, což je definice prosté funkce.
2. Vyjdeme z definice rostoucí funkce $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Stačí dokázat, že implikaci v definici rostoucí funkce můžeme nahradit ekvivalencí, abychom mohli v definici libovolně zaměňovat x a $f(x)$. Z definice rostoucí funkce přímo plyne $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ a z definice zobrazení

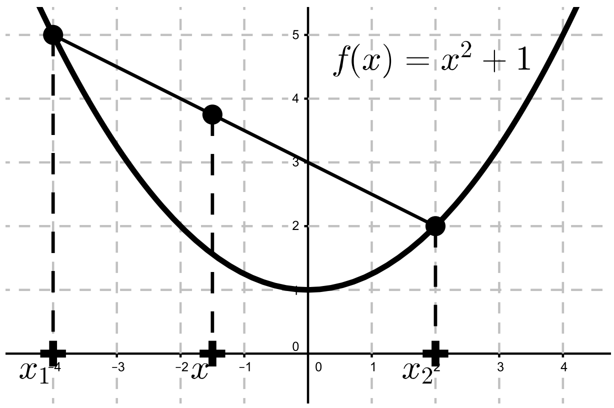
plyne $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$. Z těchto tvrzení dostáváme $x_1 \geq x_2 \Rightarrow \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, neboli obměnou $\neg (f(x_1) \geq f(x_2)) \Rightarrow \neg (x_1 \geq x_2)$, což je to samé jako $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$, čímž je druhý směr ekvivalence dokázaný. Tvrzení pro klesající funkce se dokáže analogicky. cbd

3.2.7 Vypouklost funkce

Pro následující vlastnosti neexistuje žádný všeobecně užívaný souhrnný český název, proto pro ně budu užívat pojem „vypouklost", který pochází z latinského překladu slova konvexní (lat. *convexus* – vypouklý).

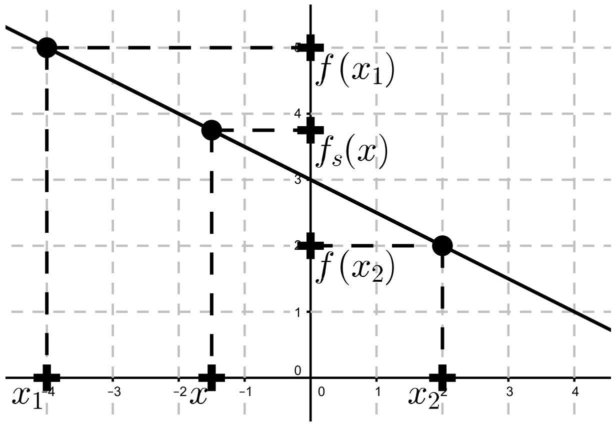
Název vypouklost nám napovídá, jaký je grafický význam následujících vlastností. Ty popisují, jak se funkce „ohýbá", neboli jestli je vypouklá „nahoru nebo dolů".

Konkrétně funkcí konvexní rozumíme funkci vypouklou „dolů". Na příkladu takové funkce $f(x) = x^2 + 1$ si ukážeme odvození formální definice konvexní funkce z geometrické představy, ke které analogicky zavedeme ostatní vypouklosti.



Jak vidíme, je-li funkce na intervalu konvexní, pak pro každé dva body intervalu x_1, x_2 platí, že graf funkce je pod jejich spojnicí. Vyjádříme si libovolný bod mezi x_1, x_2 jako $x = x_1 + \lambda (x_2 - x_1); \lambda \in (0, 1)$. Lambda vyjadřuje poměr, ve kterém x dělí interval $\langle x_1, x_2 \rangle$, a proto pro $\lambda = 0$ by bylo $x = x_1$ a pro $\lambda = 1$ by bylo $x = x_2$. Úpravou dostáváme rovnost $x = (1 - \lambda) x_1 + \lambda x_2$.

Proložíme-li body $[x_1, f(x_1)]$, $[x_2, f(x_2)]$ lineární funkci, bude její funkční hodnota v bodě x rovna $f_s(x) = (1 - \lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2)$, protože v poměru jakým dělí x interval $\langle x_1, x_2 \rangle$, dělí $f_s(x)$ interval $\langle f(x_1), f(x_2) \rangle$.



Nyní už jen stačí rozhodnout, kdy je funkční hodnota $f_s(x)$ menší nebo větší než funkční hodnota v x (tedy $f(x) = f\left((1-\lambda)\,x_1 + \lambda x_2\right)$). Z těchto poznatků dostáváme následující definici.

Definice 35 (Vypouklost funkce)**.** Funkce f je na intervalu $I \subseteq \mathcal{D}(f)$ konvexní (konkávní, ryze konvexní, ryze konkávní), pokud

$$\forall x_1, x_2 \in I\ \forall \lambda \in (0,1) : f((1-\lambda)\,x_1 + \lambda x_2) \leq (\geq, <, >)\,(1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2).$$

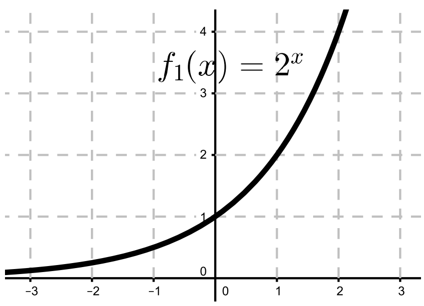
Věta 11. Jestliže je funkce f na intervalu $I \subseteq \mathcal{D}(f)$ ryze konvexní (ryze konkávní), potom je také funkce f na intervalu I konvexní (konkávní).

Důkaz. Důkaz přenechávám čtenáři, protože je analogický důkazu věty 7 v kapitole 3.2.1. cbd

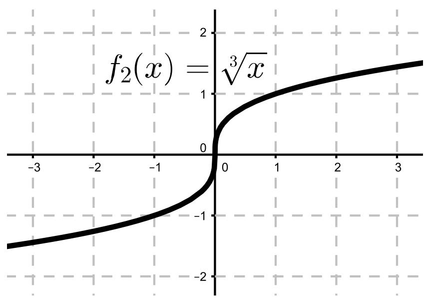
Jak vidíme, jediným rozdílem mezi ryzí vypouklostí a vypouklostí je ten, že ryzí vypouklost nepřipouští lineární úseky funkce.

Označení. Řekneme, že je funkce konvexní, jestliže je konvexní na celém definičním oboru. Analogicky popisujeme ostatní vypouklosti.

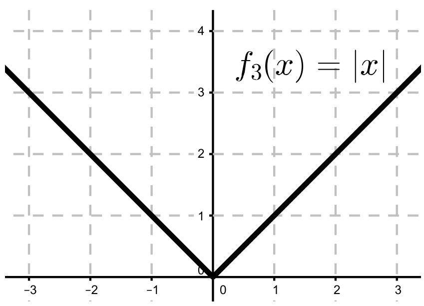
Vlastnosti si nyní ukážeme na pár příkladech, u kterých budeme vždy uvažovat maximální intervaly vypouklosti.



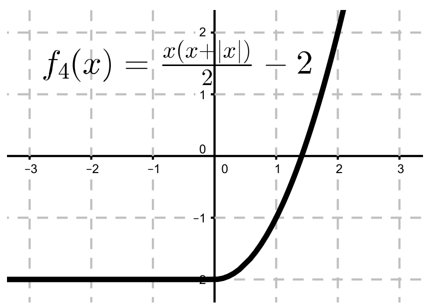
f_1 je ryze konvexní na $\mathbb{R}$.



f_2 je ryze konvexní na $\mathbb{R}_0^-$ a ryze konkávní na $\mathbb{R}_0^+$.



f_3 je konvexní na $\mathbb{R}$ a konkávní na $\mathbb{R}_0^-$ a $\mathbb{R}_0^+$.[5]

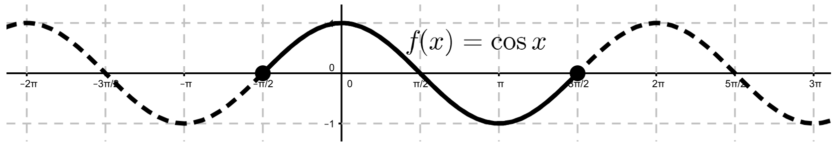


f_4 je konvexní na $\mathbb{R}$ a ryze konvexní na $\mathbb{R}_0^+$.

[5] Jak vidíme, lineární funkce jsou speciálním případem, ve kterých je funkce zároveň konvexní i konkávní.

Úloha 8. Určete vypouklost funkce $f(x) = \cos x$.

Řešení. Jak již víme z předminulé podkapitoly, jelikož je $\cos x$ periodickou funkcí, stačí vlastnosti určovat na intervalu délky periody (nejlépe základní, existuje-li).



Jak již vidíme z grafu, $\cos x$ je konkávní na $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ a konvexní na $\left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \right\rangle$. Jelikož periodou je 2π, tak jejím přičtením dostáváme řešení, že $\cos x$ je konkávní na každém intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle; k \in \mathbb{Z}$ a konvexní na každém intervalu $\left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \right\rangle$; $k \in \mathbb{Z}$.

Pro další studium funkcí (nad rámec zde probírané teorie) bude pro čtenáře zajímavá jiná definice vypouklosti funkce, která sleduje, jak se zvětšuje nebo zmenšuje směrnice sečny funkce. S touto definicí nebudeme více pracovat, pouze si ukážeme, že je ekvivalentní s naší původní.

Definice 36 (Ekvivalentní def. vypouklosti funkce)**.** Funkce f je na intervalu $I \subseteq \mathcal{D}(f)$ konvexní (konkávní, ryze konvexní, ryze konkávní), pokud

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in I\colon x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq (\geq, <, >)\, \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Důkaz. (Ekvivalence definic vypouklosti). Důkaz je čistě algebraický a provedeme ho pouze pro konvexnost, ostatní vypouklosti se dokáží analogicky pouhou změnou nerovnosti. Bod x_2 zapíšeme jako libovolný bod mezi x_1 a x_3 (viz první definice) a ze vztahu vyjádříme λ.

$$x_2 = (1 - \lambda)\, x_1 + \lambda x_3 \Rightarrow \lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$$

Z definice konvexnosti víme, že pro x_2 musí platit vztah,

$$f(x_2) \leq (1 - \lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

do kterého můžeme dosadit lambda a provedeme algebraické úpravy.

$$\begin{aligned}
f(x_2) &\leq \left(1 - \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}\right) f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_2) \\
f(x_2) &\leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_2) \\
(x_3 - x_1) f(x_2) &\leq (x_3 - x_2) f(x_1) + (x_2 - x_1) f(x_3) \\
(x_3 - x_2) f(x_2) + (x_2 - x_1) f(x_2) &\leq (x_3 - x_2) f(x_1) + (x_2 - x_1) f(x_3) \\
(x_3 - x_2)(f(x_2) - f(x_1)) &\leq (x_2 - x_1)(f(x_3) - f(x_2)) \\
\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &\leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}
\end{aligned}$$

cbd

Kapitola 4

Elementární funkce

V této kapitole zavedeme základní třídy reálných funkcí a zadefinujeme pomocí nich tzv. elementární funkce. Formulujeme též základní vlastnosti elementárních funkcí a ukážeme si důležité příklady funkcí, které elementární nejsou.

4.1 Zavedení základních funkcí

V následující podkapitole zavedeme základní reálné funkce jedné reálné proměnné bez ohledu na to, jestli jsou elementární. Na zcela korektní zavedení některých z nich (např. goniometrických) jsou potřeba nástroje diferenciálního počtu. Jiné (např. exponenciální) sice zavést můžeme, nemůžeme však dokázat všechny jejich běžně používané vlastnosti. Protože znalost těchto vlastností je k řešení úloh z následující kapitoly nezbytná, uvádíme některé formou výčtu a dokážeme si pouze ty z nich vyplývající.

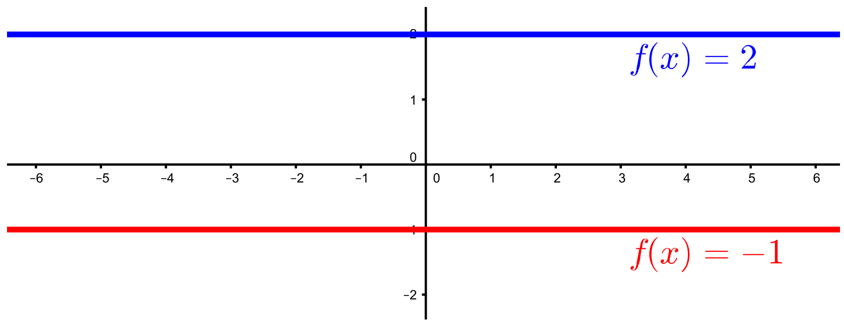
4.1.1 Lineární funkce

Nejtriviálnějšími funkcemi, které známe již ze základní školy, jsou lineární funkce. Podívejme se nejprve na jejich dva speciální případy.[1]

Definice 37 (Konstantní funkce)**.** Konstantní funkce je funkce daná předpisem

$$f(x) = c; c \in \mathbb{R}.$$

Jinými slovy, funkce přiřadí všem x z definičního oboru stejnou hodnotu.



[1] Jak si bystrý čtenář může povšimnout, tyto dva speciální případy funkcí se jako jedny z mála dají zavést již u obecného zobrazení. V rámci přehlednosti a možnosti zavedení rovnou i s jejich vlastnostmi je raději uvádíme až nyní.

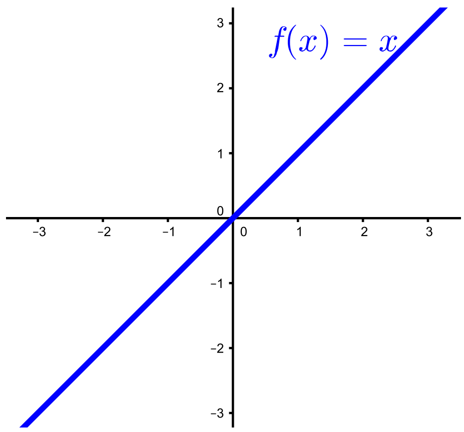
Vlastnosti (Konstantní funkce)**.** Nechť $f(x) = c$ je konstantní funkce.[2] Pak pro f platí:

- $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ a $\mathcal{H}(f) = \{c\}$,
- $\min(f) = \max(f) = c$,
- je nerostoucí a neklesající zároveň na celém $\mathcal{D}(f)$,
- je konvexní a konkávní zároveň na celém $\mathcal{D}(f)$,
- vždy je sudá a je lichá navíc pro $c = 0$, je periodická pro každé $p > 0$ (neexistuje základní perioda) a není prostá.

Definice 38 (Identická funkce)**.** Identická funkce je funkce daná předpisem

$$f(x) = x.$$

V tomto případě se tedy jedná o funkci, která každému $x \in \mathcal{D}(f)$ přiřadí hodnotu sebe sama. Grafem této funkce je proto osa I. a III. kvadrantu.



Vlastnosti (Identická funkce)**.** Nechť $f(x) = x; x \in \mathbb{R}$. Pak pro f platí:

- $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ a $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$,
- $\inf(f) = -\infty$ a $\sup(f) = \infty$,
- je rostoucí na celém $\mathcal{D}(f)$,
- je konvexní a konkávní zároveň na celém $\mathcal{D}(f)$,
- je lichá, prostá a dokonce i inverzní sama k sobě.

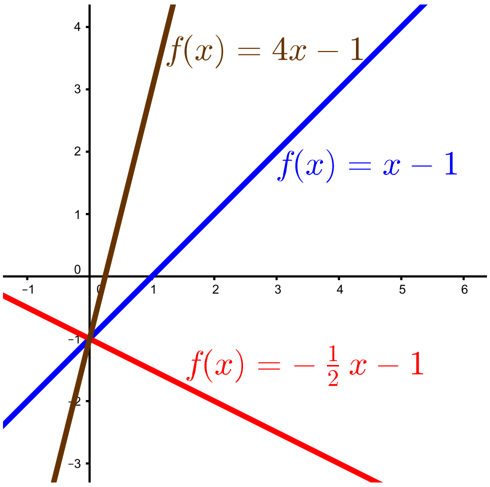
Sčítáním a násobením konstantní a identické funkce můžeme dostat libovolnou lineární funkci.

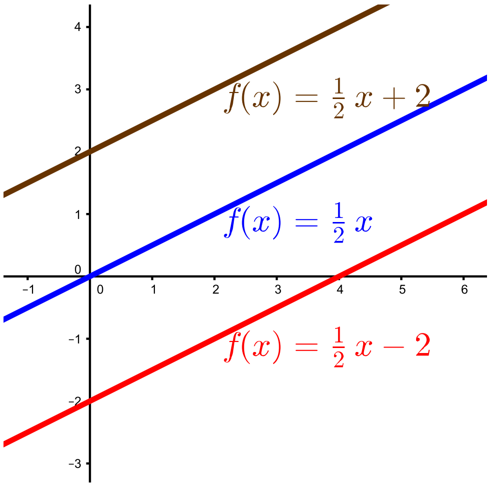
Definice 39 (Lineární funkce)**.** Lineární funkce je funkce daná předpisem

$$f(x) = ax + b; a, b \in \mathbb{R}.$$

[2] Všude by se dal psát název funkce, ale pro přehlednost budeme u výpisu vlastností funkcí přeznačovat na f.

V podstatě se jedná o zobecnění předchozích dvou funkcí, které různě „natáčíme" (mimo přímku rovnoběžnou s osou y). Je známo z analytické geometrie, že $ax - y + b = 0$ je rovnice přímky. Číslo a, tzv. směrnice přímky, určuje její sklon a číslo b posun po ose y (viz transformace grafů funkcí, podkapitola 5.4).





Jejich vlastnosti triviálně vyplývají z vlastností identické a konstantní funkce, případně si je čtenář může odvodit sám pomocí znalostí, které získá v podkapitole 5.4.

Inverzními funkcemi k nekonstantním lineárním funkcím jsou funkce lineární.

Cvičení

4.1. Nalezněte předpis lineárních funkcí, jejichž graf prochází následujícími body.

(a) $f\colon A = [2, 1]\,, B = [4, 2]$

(b) $g\colon A = [3, 3]\,, B = [-5, 1]$

(c) $h\colon A = \left[\sqrt{2}, 2\right]\,, B = \left[2\sqrt{2}, 3\right]$

4.2. Rozhodněte, zdali je lineární funkce $ax + b$ rostoucí nebo klesající, pokud pro ni platí, že $b = 10$ a její graf prochází bodem $[10, -10]$.

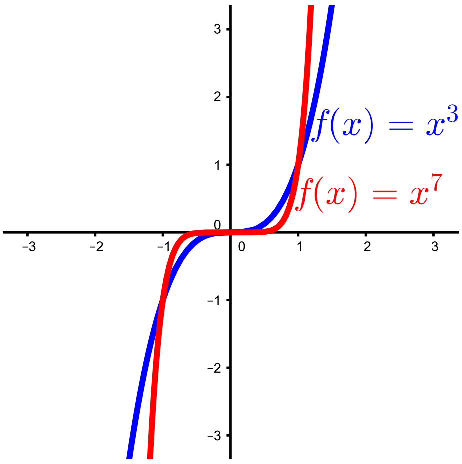
4.1.2 Mocninné funkce

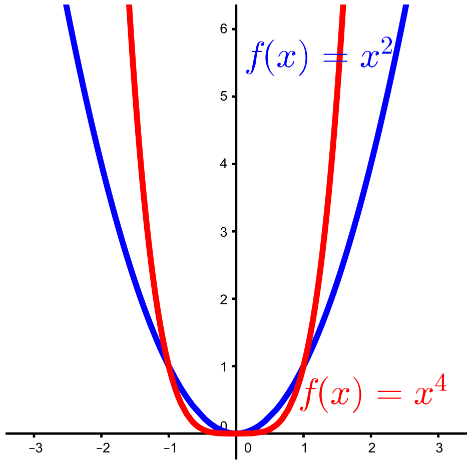
Identická funkce není speciálním případem pouze lineárních funkcí, ale také funkcí mocninných, protože jak ze střední školy víme, $x = x^1$. Nyní si induktivně zadefinujeme i ostatní mocninné funkce.

Definice 40 (Funkce n-tá mocnina)**.** Funkce n-tá mocnina je funkce, která je definována následovně:

$$f(x) = x^n := \begin{cases} 0 & \text{pro } n \in \mathbb{N} \text{ a } x = 0, \\ 1 & \text{pro } n = 0 \text{ a } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ x \cdot x^{n-1} & \text{pro } n \in \mathbb{N} \text{ a } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \frac{1}{x^{-n}} & \text{pro } n \in \mathbb{Z}^- \text{ a } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Pro $n = 0$, resp. 1 se jedná o konstantní ($f(x) = 1$), resp. identickou ($f(x) = x$) funkci, které jsme již probrali. Ve zbylých případech mají mocninné funkce výrazně jiné vlastnosti a grafy pro $n > 0$ a $n < 0$, proto se jimi budeme zaobírat zvlášť. Začneme s $n > 0$.

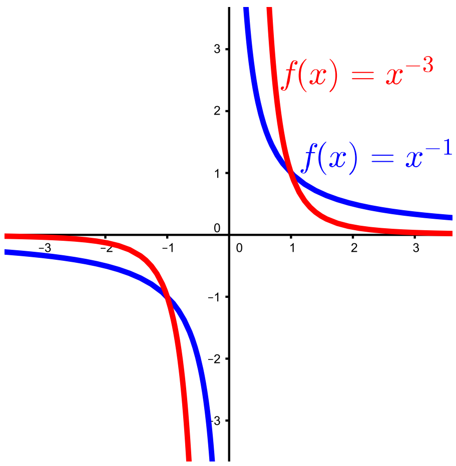


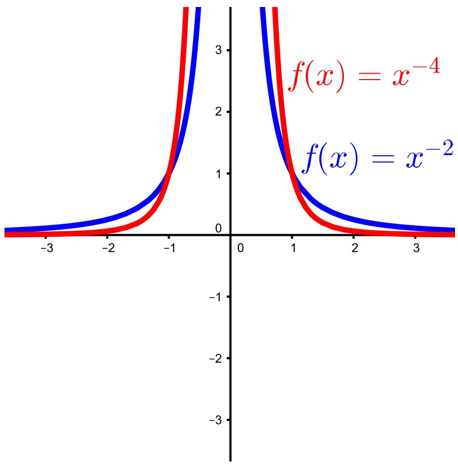


Vlastnosti (Funkce n-tá mocnina pro $n > 1$)**.** Nechť $f(x) = x^n; n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ a $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pak pro f platí:

- $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ pro každé n, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$ pro n liché a $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}_0^+$ pro n sudé,
- $\sup(f) = \infty$ pro každé n, $\inf(f) = -\infty$ pro n liché a $\inf(f) = \min(f) = 0$ pro n sudé,
- je rostoucí na celém $\mathcal{D}(f)$ pro n liché, pro n sudé je klesající na $\mathbb{R}_0^-$ a rostoucí na $\mathbb{R}_0^+$,
- je ryze konvexní na celém $\mathcal{D}(f)$ pro n sudé, pro n liché je ryze konkávní na $\mathbb{R}_0^-$ a ryze konvexní na $\mathbb{R}_0^+$,
- je lichá pro n liché a sudá pro n sudé, je prostá podle ryzí monotonie, takže na celém $\mathcal{D}(f)$ pouze pro n liché.

Pro záporné n vypadají grafy mocninné funkce následovně.





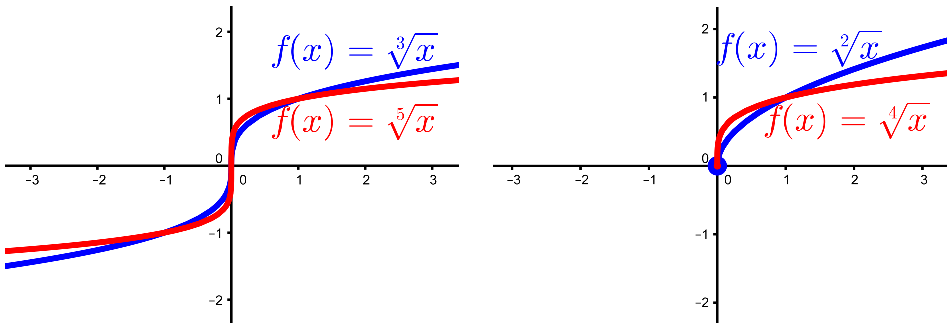
Vlastnosti (Funkce n-tá mocnina pro $n < 0$)**.** Nechť $f(x) = x^n; \mathbb{N} \in \mathbb{Z}^-$ a $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pak pro f platí:

- $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pro každé n, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pro n liché a $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}^+$ pro n sudé,
- nemá minimum ani maximum, $\sup(f) = \infty$ pro každé n, $\inf(f) = -\infty$ pro n liché a $\inf(f) = 0$ pro n sudé,
- je klesající na $\mathbb{R}^+$ pro každé n, na $\mathbb{R}^-$ je klesající pro n liché a rostoucí pro n sudé,
- je ryze konvexní na $\mathbb{R}^+$ pro každé n, na $\mathbb{R}^-$ je ryze konkávní pro n liché a ryze konvexní pro n sudé,
- je lichá pro n liché a sudá pro n sudé, je prostá pouze pro n liché.

Definice 41 (Funkce n-tá odmocnina)**.** Nechť $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Funkce n-tá odmocnina je definována následovně:

$$f(x) = \sqrt[n]{x} := \begin{cases} (x^n)^{-1} & \text{pro lichá } n, \\ \left(x^n|_{\langle 0,\infty)}\right)^{-1} & \text{pro sudá } n. \end{cases}$$

Poznámka. Jelikož pro sudá n není funkce x^n prostá, zavádí se její inverze pro restrikci na nezáporná čísla, kde prostá je.



Vlastnosti (Funkce n-tá odmocnina)**.** Nechť $f(x) = \sqrt[n]{x}; n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ a pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která má pravá strana smysl. Pak pro f platí:

- $\mathcal{D}(f) = \mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$ pro n liché a $\mathcal{D}(f) = \mathcal{H}(f) = \mathbb{R}_0^+$ pro n sudé,
- $\sup(f) = \infty$, $\inf(f) = -\infty$ pro n liché a $\inf(f) = \min(f) = 0$ pro n sudé,
- je rostoucí na celém $\mathcal{D}(f)$,
- je ryze konkávní na $\mathbb{R}_0^+$ pro každé n a je ryze konvexní na $\mathbb{R}_0^-$ pro n liché,
- je lichá pro n liché, prostá je vždy.

Z vlastností si můžeme povšimnout, že pro lichá i sudá n se chová funkce podobně. Jediným rozdílem je, že pro lichá n je funkce definována i na záporných číslech a je lichá, z čehož pak zde vyplývají i její vlastnosti.

Poznámka. Na středních školách jsou často pro jednoduchost i liché mocniny zaváděny pouze pro nezáporné argumenty. To však komplikuje např. řešení rovnic typu $x^3 = -8$. Z toho důvodu budeme všechny funkce zaváděné jako inverzní k jiným definovat na maximálních definičních oborech, na kterých to bude možné.

Zatím jsme si zavedli umocňování pouze na celá čísla, ale zkusme si s našimi znalostmi trochu pohrát. Pro zavedené mocniny platí některé vzorce jako $\left(a^b\right)^c = a^{b\cdot c}$ (všechny vzorce shrnujeme níže v tabulce). Zkusíme-li si dosadit např. za $b = 2$ a $c = \frac{1}{2}$, vyjde nám

$$\left(a^2\right)^{\frac{1}{2}} = a^{2\cdot\frac{1}{2}} = a^1 = a.$$

Z toho můžeme vytušit, že mocnění na n a $\frac{1}{n}$ jsou k sobě nějakým způsobem inverzní. Jako inverzní funkci k mocnění jsme si již zavedli odmocňování, a podle toho také mocnění na racionální hodnoty bude vypadat. Mocnění na racionální čísla shrnuje následující definice a přidává k nim i mocnění na čísla iracionální.

Definice 42 (Mocniny s neceločíselným exponentem)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}_0^+$. Pro $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ nesoudělná definujeme

$$a^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{a^p}.$$

Nechť $w \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Pak

1. pro $a \geq 1$ definujeme $a^w := \sup\{a^r; r \in \mathbb{Q} \wedge r < w\}$,
2. pro $a \in (0,1)$ definujeme $a^w := \dfrac{1}{a^{-w}}$,
3. pro $w > 0$ definujeme $0^w := 0$.

Předpokládáme, že čtenářovi jsou již známy vzorce pro práci s mocninami a odmocninami a umí je používat. Proto je nebudeme odvozovat a vysvětlovat, ale přikládáme pouze jejich zhuštěný soupis.

vzorce pro mocniny	vzorce pro odmocniny
$a^0 = 1$	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$	$\sqrt[kn]{a^k} = \sqrt[n]{a}$
$(a^r)^s = a^{r\cdot s}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$	$\sqrt{a^2} = \lvert a\rvert$

Vzorce platí pro všechna a, b, m, n, r, s pro která mají výrazy vpravo i vlevo smysl dle předchozích definic.

4.1.3 Exponenciální funkce

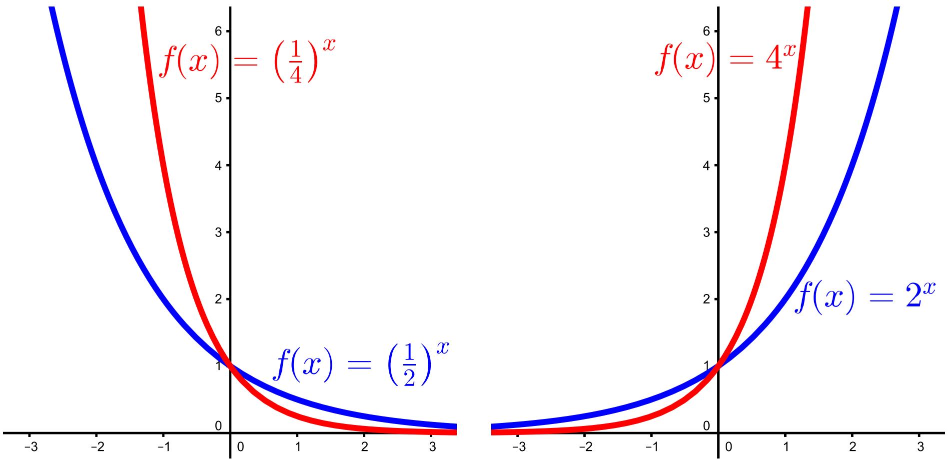
Přirozenou motivací je vztah z minulé kapitoly obrátit, neboli si zvolit konstantu a tu umocňovat hodnotou proměnné. Takovou reálnou funkci již můžeme díky předchozí definici zavést, protože máme definované umocňování reálných čísel na jakákoliv racionální i iracionální čísla.

Definice 43 (Obecná exponenciální funkce)**.** Obecná exponenciální funkce o základu $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$ je funkce daná předpisem

$$f(x) = a^x; x \in \mathbb{R}.$$

Poznámka. V definici obecné exponenciální funkce neuvažujeme $a = 1$, protože by se jednalo pouze o konstantní funkci $f(x) = 1$, který má jiné vlastnosti nežli funkce exponenciální (především není prostá a neexistuje k ní funkce inverzní).

Pro $a \in (1,\infty)$ a $\frac{1}{a}$, které je tím pádem z $(0,1)$, jsou grafy převrácené podle osy y.



Vlastnosti (Exponenciální funkce)**.** Nechť $f(x) = a^x; a \in (0,1) \cup (1,\infty)$ a $x \in \mathbb{R}$. Pak pro f platí:

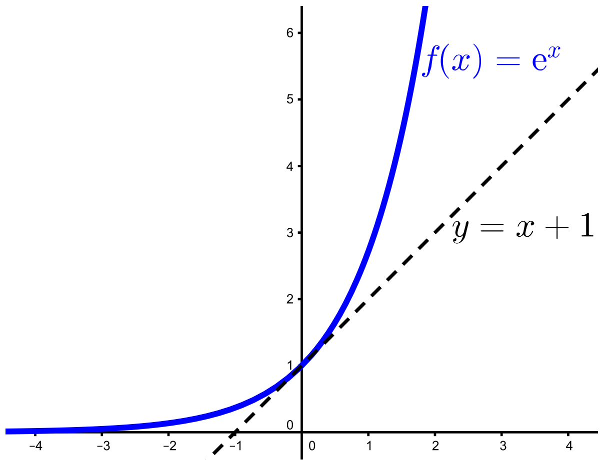
- $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ a $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}^+$,
- $\sup(f) = \infty$ a $\inf(f) = 0$,
- je klesající (rostoucí) na celém $\mathcal{D}(f)$ pro $a \in (0,1)$ $(a \in (1,\infty))$,
- je ryze konvexní na celém $\mathcal{D}(f)$,
- nemá paritu a je prostá.

Jak také vidíme, průsečík exponenciální funkce s osou y je vždy v 1, protože $a^0 = 1$ pro jakékoliv a.

Vzorce, které platí pro exponenciální funkce, jsou analogické těm, které platí u funkcí mocninných.

$$\begin{array}{rl||rl}
\forall x \in \mathbb{R}\ \forall a \in \mathbb{R}^+: & a^x > 0 & \forall x,y \in \mathbb{R}\ \forall a \in \mathbb{R}^+: & (a^x)^y = a^{x\cdot y} \\
\forall x \in \mathbb{R}\ \forall a,b \in \mathbb{R}^+: & a^x \cdot b^x = (a\cdot b)^x & \forall x,y \in \mathbb{R}\ \forall a \in \mathbb{R}^+: & a^x \cdot a^y = a^{x+y} \\
\forall x \in \mathbb{R}\ \forall a,b \in \mathbb{R}^+: & \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x & \forall x,y \in \mathbb{R}\ \forall a \in \mathbb{R}^+: & \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}
\end{array}$$

Významnou představitelkou exponenciálních funkcí je funkce o iracionálním základu e. Číslo e je definováno mimo jiné rozvojem $\mathrm{e} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + {} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$, ale nám v tuto chvíli stačí jeho přibližná hodnota $\mathrm{e} \doteq 2,718$. Funkce e^x je tedy exponenciální funkce se základem z $(1, \infty)$, z čehož vyplývají i její vlastnosti, které jsme si uvedli u obecné exponenciální funkce. Speciální vlastností pak je to, že v $x = 0$ má jako jediná exponenciální funkce tečnu rovnoběžnou s osou I. a III. kvadrantu, a to konkrétně tečnu $y = x + 1$.



Bere se jako výchozí pro ostatní exponenciální funkce a má řadu speciálních vlastností, se kterými se čtenář může seznámit např. v publikacích o diferenciálním počtu.

4.1.4 Logaritmické funkce

Nejprve si musíme říct, co za operaci je samotný logaritmus nějakého kladného čísla. Při zavádění hodnoty logaritmu vyjdeme z toho, že logaritmické funkce jsou inverzní k funkcím exponenciálním.

Definice 44 (Logaritmus)**.** Logaritmus o základu a z čísla x je definován následujícím vztahem

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \ \forall a \in (0,1) \cup (1, \infty): \ \log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y.$$

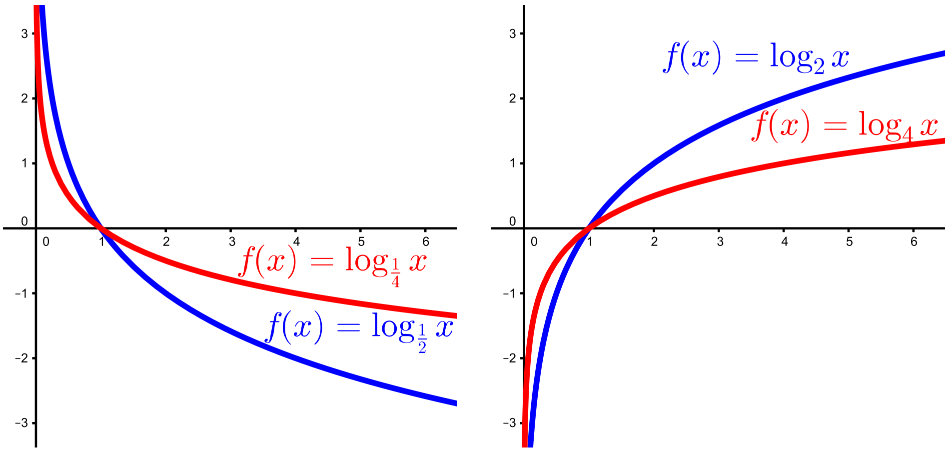
Nyní již můžeme za využití předchozího vzorce bez problému zavést logaritmickou funkci.

Definice 45 (Obecná logaritmická funkce)**.** Obecná logaritmická funkce o základu $a \in (0,1) \cup (1, \infty)$ je funkce daná předpisem

$$f(x) = \log_a x; x \in \mathbb{R}.$$

Označení. Pro logaritmické funkce o dekadickém základu $a = 10$ používáme zkrácený zápis $f(x) = \log x$.

Stejně jako u exponenciálních funkcí se tvar grafu funkce liší především podle toho, jestli $a \in (0,1)$ nebo $a \in (1, \infty)$.



Vlastnosti (Obecná logaritmická funkce)**.** Nechť $f(x) = \log_a x; a \in (0,1) \cup \cup (1, \infty)$ a $x \in \mathbb{R}^+$. Pak pro f platí:

- $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^+$ a $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$,
- $\inf(f) = -\infty$ a $\sup(f) = \infty$,
- je klesající na celém $\mathcal{D}(f)$ pro $a \in (0,1)$ a je rostoucí na celém $\mathcal{D}(f)$ pro $a \in (1, \infty)$,
- je ryze konvexní na celém $\mathcal{D}(f)$ pro $a \in (0,1)$ a je ryze konkávní na celém $\mathcal{D}(f)$ pro $a \in (1, \infty)$,
- nemá paritu a je prostá.

Pro logaritmické funkce jsou ze střední školy známé mnohé vzorce, které si nyní připomeneme a dokážeme.

Věta 12. Pro logaritmické funkce platí následující vzorce:

1. $\forall x \in \mathbb{R}^+ \, \forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} : a^{\log_a x} = x$,
2. $\forall x \in \mathbb{R} \, \forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} : \log_a a^x = x$,
3. $\forall x \in \mathbb{R}^+ \, \forall p \in \mathbb{R} \, \forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} : \log_a x^p = p \log_a x$,
4. $\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \, \forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} : \log_a (r \cdot s) = \log_a r + \log_a s$,
5. $\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \, \forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} : \log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s$,
6. $\forall x \in \mathbb{R}^+ \, \forall a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} : \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

Důkaz.

1. Z definice logaritmu platí $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$. Dosazením y z levé strany do pravé dostáváme $a^{\log_a x} = x$.
2. Z definice logaritmu platí $\log_a a^x = x \Leftrightarrow a^x = a^x$.
3. Z definice logaritmu platí $\log_a x^p = y \Leftrightarrow x^p = a^y$. Provedeme ekvivalentní úpravy $x^p = a^y \Leftrightarrow x = (a^y)^{\frac{1}{p}} = a^{\frac{y}{p}} \Leftrightarrow \log_a x = \frac{y}{p}$, neboli $p \log_a x = y$.

4. Podle 1. bodu této věty máme dokázáno, že $x = a^{\log_a x}$, $y = a^{\log_a y}$, $(x\,y) = a^{\log_a (x\,y)}$. Použitím vzorce pro mocnění $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$ na x, y dostáváme $x \cdot y = a^{\log_a x + \log_a y}$. Výrazy s $x \cdot y$ položíme do rovnosti

$$a^{\log_a (x\,y)} = (x\,y) = x \cdot y = a^{\log_a x + \log_a y},$$

z čehož úpravou dostaneme $\log_a (x\,y) = \log_a x + \log_a y$.

5. Důkaz provedeme analogicky bodu 4.

6. Vyjdeme z 1. bodu, že $a^{\log_a x} = x$. „Zlogaritmováním“ (složením s vnější funkcí $\log_b$) dostáváme $\log_b a^{\log_a x} = \log_b x$. Následným užitím vzorce $\log_a x^p = p \log_a x$ na levou stranu vyjde, že $\log_a x \, \log_b a = = \log_b x$.

cbd

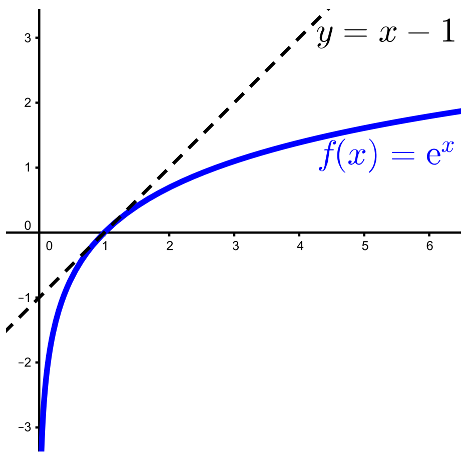
Upozornění. Musíme si dát pozor na případy, jako je např. $f(x) = \log x^2$. Ačkoliv se f na $\mathbb{R}^+$ rovná funkci $g(x) = 2 \log x$, f je na rozdíl od g definovaná i na $\mathbb{R}^-$. Ekvivalentní úprava na celém definičním oboru je $\log x^2 = = \log |x|^2 = 2 \log |x|$.
Také $\log_a r^s$ není totéž, co $\log_a^s r$. Ukážeme si to pro přirozené s. Zatímco $\log_a r^s = s \log_a r$ je součet s členů $\log_a r$, tak $\log_a^s r$ je součin s členů $\log_a r$.

Významnou logaritmickou funkcí je inverzní funkce k funkci e^x. Tuto funkci nazýváme přirozená logaritmická funkce.

Definice 46 (Funkce přirozený logaritmus)**.** Přirozený logaritmus je funkce, která je definovaná následovně:

$$\ln x \coloneqq \log_{\mathrm{e}} x.$$

Přirozená logaritmická funkce má stejné vlastnosti jako obecná logaritmická funkce s $a \in (1, \infty)$. Navíc je její tečnou v $x = 0$ přímka $y = x - 1$.



Platí pro ní stejné vzorce, jako pro obecné logaritmické funkce. Z toho také vyplývá následující vzorec, který vyjadřuje hojně užívaný vztah mezi exponenciální funkcí a přirozeným logaritmem.

Věta 13. $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall a \in \mathbb{R}^+ \colon a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$.

Důkaz. Ze vzorců pro logaritmické funkce víme, že $\forall a \in \mathbb{R}^+ \colon a = \mathrm{e}^{\ln a}$. Uplatněním tohoto vztahu dostáváme $a^x = \left(\mathrm{e}^{\ln a}\right)^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$. cbd

Důsledkem této věty je v případě splnění předpokladů často užívaný vztah

$$f^g = \mathrm{e}^{g \ln f}.$$

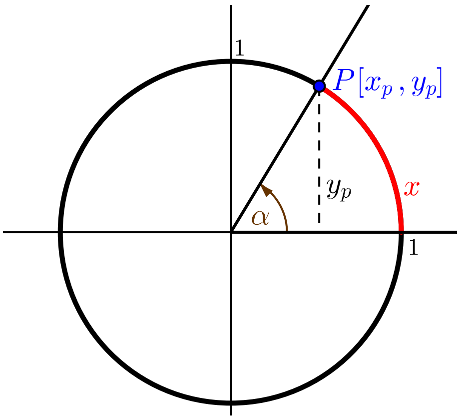
Cvičení

4.3. Určete hodnoty následujících logaritmů: $\log 100$, $\log_2 256$, $\log_3 \frac{1}{27}$.

4.1.5 Goniometrické funkce

Goniometrické funkce sinus, kosinus, tangens a kotangens nám jsou známé již ze střední školy. Bohužel stejně jako na střední škole stále nemáme nástroj, který by nám je dovolil korektně zavést. Z toho důvodu si musíme alespoň jednu (např. sinus) přibližně odvodit z jednotkové kružnice pomocí obloukové míry, a následně ostatní pomocí ní vyjádřit.

Odvození funkce sinus a obloukové míry budeme provádět bez nároků na přesnost. Mějme kružnici o poloměru 1 se středem v počátku souřadnic.



Nechť kladná poloosa x je počátečním ramenem orientovaného úhlu α a průsečíkem koncového ramene a jednotkové kružnice je bod P. Potom obloukovou mírou náležící úhlu α je vzdálenost na kružnici, kterou „jdeme“ z bodu $[1, 0]$ do bodu P. Jednotkou obloukové míry jsou radiány, jeden radián znamená délku oblouku 1. Vzdáleností, která odpovídá úhlu 180°, je π rad. Z této rovnosti můžeme odvodit obecný vztah mezi stupni a radiány.

$$x^\circ = \frac{\pi}{180} x \,\mathrm{rad}$$

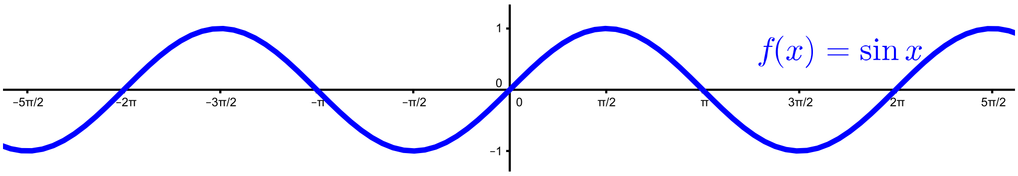
Pro úhly, se kterými se nejčastěji setkáváme, sestavíme pomocí zadaného vztahu převodní tabulku. Jednotku rad pak již nadále pro přehlednost psát nebudeme.

stupně	0	30	45	60	90	180	270	360
radiány	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

Na obrázku již byla naznačena vzdálenost y_p. Ze střední školy víme, že to je právě hodnota $\sin x$ odpovídající obloukové míře x, a podle toho ji také zadefinujeme.

Definice 47 (Funkce sinus)**.** Funkce sinus je funkce, která každému $x \in \mathbb{R}$ přiřadí y_p, kde y_p je ypsilonová souřadnice průsečíku jednotkové kružnice a koncového ramene orientovaného úhlu odpovídajícímu obloukové míře x. Funkci značíme $\sin x$.

Nežli se podíváme na ostatní goniometrické funkce, ukážeme si graf funkce sinus a shrneme si její základní vlastnosti.



Vlastnosti (Funkce sinus)**.** Nechť $f = \sin$. Pak pro f platí:

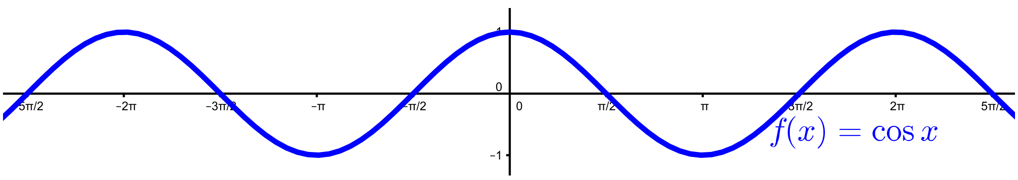
- $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ a $\mathcal{H}(f) = \langle -1, 1 \rangle$,
- $\min(f) = -1$ v bodech $\left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$ a $\max(f) = 1$ v bodech $\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$,
- je rostoucí na intervalech $\left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle; k \in \mathbb{Z}$ a je klesající na intervalech $\left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \right\rangle; k \in \mathbb{Z}$,
- je ryze konvexní na intervalech $\langle 2(k-1)\pi, 2k\pi \rangle; k \in \mathbb{Z}$ a je ryze konkávní na intervalech $\langle 2k\pi, 2(k+1)\pi \rangle; k \in \mathbb{Z}$,
- je lichá a je periodická se základní periodou 2π.

Ze střední školy víme, že x-ovou souřadnicí x_p bodu P z obrázku o obloukové míře by byla funkce kosinus s proměnnou x (jinými slovy, bod $P = [\cos x, \sin x]$). Souřadnice x_p se mění se stejnou pravidelností jako y_p a liší se pouze posunem x o $\frac{\pi}{2}$ (pro $x = 0$ je $x_p = 1$). Proto funkci kosinus můžeme zavést také pomocí souřadnice y_p, neboli pomocí funkce sinus.

Definice 48 (Funkce kosinus)**.** Funkce kosinus (cos) je funkce, která je definována následovně:

$$\cos x := \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Vzhledem k definici je graf funkce kosinus posunutým grafem funkce sinus o $-\frac{\pi}{2}$ (viz transformace grafů funkcí, podkapitola 5.4).



Vlastnosti (Funkce kosinus)**.** Nechť $f = \cos$. Pak pro f platí:

- $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ a $\mathcal{H}(f) = \langle -1, 1\rangle$,
- $\min(f) = -1$ v bodech $\{2(k+1)\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ a $\max(f) = 1$ v bodech $\{2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$,
- je rostoucí na intervalech $\langle 2(k-1)\pi, 2k\pi\rangle; k \in \mathbb{Z}$ a je klesající na intervalech $\langle 2k\pi, 2(k+1)\pi\rangle; k \in \mathbb{Z}$,
- je ryze konvexní na intervalech $\left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\rangle; k \in \mathbb{Z}$ a je ryze konkávní na intervalech $\left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right\rangle; k \in \mathbb{Z}$,
- je sudá a je periodická se základní periodou 2π.

Pro goniometrické funkce sinus a kosinus platí následující dva vzorce, za jejichž pomoci a vlastností těchto funkcí odvodíme další.

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \sin(x+y) &= \sin x\, \cos y + \sin y\, \cos x \\ \cos(x+y) &= \cos x\, \cos y - \sin x\, \sin y \end{aligned}$$

Věta 14. Pro goniometrické funkce sinus a kosinus platí následující vzorce:

1. $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sin(-x) = -\sin x = \sin(x+\pi)$,
2. $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$,
3. $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1$,[3]
4. $\forall x \in \mathbb{R}$:
   (a) $\sin 2x = 2 \sin x\, \cos x$,
   (b) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$,
5. $\forall x, y \in \mathbb{R}$:
   (a) $\sin(x-y) = \sin x\, \cos y - \sin y\, \cos x$,
   (b) $\cos(x-y) = \cos x\, \cos y + \sin x\, \sin y$,
6. $\forall x \in \mathbb{R}$:
   (a) $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, resp. $\left|\sin \frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$,
   (b) $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, resp. $\left|\cos \frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$,
7. $\forall x, y \in \mathbb{R}$:
   (a) $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2}\, \cos \frac{x-y}{2}$,
   (b) $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2}\, \sin \frac{x-y}{2}$,
   (c) $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2}\, \cos \frac{x-y}{2}$,
   (d) $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2}\, \sin \frac{x-y}{2}$.

---

(3) Pro přehlednost píšeme jen $\sin^2 x$ na místo $(\sin x)^2$.

Důkaz. Důkaz provedeme vždy jen pro případ (a), ostatní by se dokázaly analogicky.

1. První rovnost platí triviálně z definice liché funkce. U druhé rovnosti vyjdeme z pravé strany. Aplikací součtového vzorce

   $$\sin(x+\pi) = \sin x \cdot \cos\pi + \sin\pi \cdot \cos x = -1\sin x + 0\cos x = -\sin x.$$

2. Z definice $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Uplatněním rovnosti z 1. bodu této věty

   $$\begin{aligned} \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left(-\left(-x-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \\ &= \sin\left(\left(-x-\frac{\pi}{2}\right)+\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right). \end{aligned}$$

3. Ve vzorci $\cos(x+y)$ přiřazením $y := -x$ dostáváme rovnici $\cos(0) = \cos x\ \cos(-x) - \sin x\ \sin(-x)$. Víme, že $\cos(0) = 1$, a dále z parity sinu a kosinu vyplývá, že $1 = \cos x\ \cos x - \sin x\ (-\sin x) = \cos^2 x + \sin^2 x$.

4. Triviálně, ve vzorci $\sin(x+y)$ přiřadíme $y := x$.

5. Triviálně, ve vzorci $\sin(x+y)$ přiřadíme $y := -y$.

6. Kalkulací

   $$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \left(1-\sin^2 x\right) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x.$$

   Dále algebraickými úpravami dostáváme $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$. Pro upravenou část vzorce stačí odmocnit a přiřadit $x := \frac{x}{2}$.

7. Sečtením vzorců $\sin(x \pm y) = \sin x\ \cos y \pm \sin y\ \cos x$ dostáváme, že $\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x\ \cos y$. Substitucí $\alpha := x+y$ a $\beta := x-y$ pak vychází $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\ \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

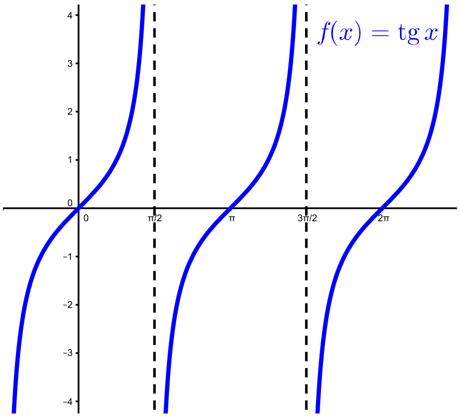
cbd

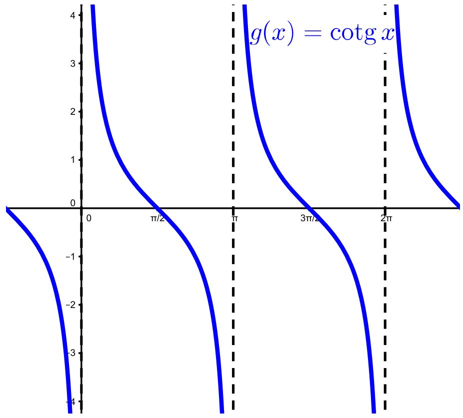
Pomocí funkcí sinus a kosinus se definují zbylé dvě goniometrické funkce.

Definice 49 (Funkce tangens a kotangens)**.** Funkce tangens (tg) a funkce kotangens (cotg) jsou funkce, která jsou definovány následovně:

$$\operatorname{tg} x := \frac{\sin x}{\cos x}; \cos x \neq 0, \qquad \operatorname{cotg} x := \frac{\cos x}{\sin x}; \sin x \neq 0.$$

Grafy funkcí $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ jsou podobné a často se pletou, proto je pro srovnání uvádíme nyní vedle sebe.





Vlastnosti (Funkce tangens)**.** Nechť $f = \mathrm{tg}$. Pak pro f platí:

- $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$ a $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$,
- $\inf(f) = -\infty$ a $\sup(f) = \infty$,
- je rostoucí na intervalech $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right); k \in \mathbb{Z}$,
- je ryze konkávní na intervalech $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi\right\rangle; k \in \mathbb{Z}$ a je ryze konvexní na intervalech $\left\langle k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right); k \in \mathbb{Z}$,
- je lichá a je periodická se základní periodou π.

Vlastnosti (Funkce kotangens)**.** Nechť $f = \mathrm{cotg}$. Pak pro f platí:

- $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ a $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$,
- $\inf(f) = -\infty$ a $\sup(f) = \infty$,
- je klesající na intervalech $(k\pi, (k+1)\pi); k \in \mathbb{Z}$,
- je ryze konkávní na intervalech $\left\langle -\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi\right); k \in \mathbb{Z}$ a je ryze konvexní na intervalech $\left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right\rangle; k \in \mathbb{Z}$,
- nemá paritu a je periodická se základní periodou π.

Věta 15. Pro goniometrické funkce tangens a kotangens platí následující vzorce:

1. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}\colon\ \mathrm{cotg}\, x = -\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,
2. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k}{2}\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}\colon\ \mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{cotg}\, x = 1$,
3. $\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2k+1}{2}\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}\colon\ \cos(x+y) \neq 0 \Rightarrow \mathrm{tg}(x+y) = \frac{\mathrm{tg}\, x + \mathrm{tg}\, y}{1 - \mathrm{tg}\, x\, \mathrm{tg}\, y}$.

Důkaz.

1. Pouhou kalkulací spočteme

$$\mathrm{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin\left(\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right)} =$$
$$= \frac{\cos x}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} =$$
$$= \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{0 - \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = -\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

2. Triviální, $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1$.

3. Prvně upravíme $\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}$. Čitatel i jmenovatel vydělíme výrazem $\cos x \cos y$.

cbd

Je dobré si pamatovat funkční hodnoty goniometrických funkcí pro základní velikosti obloukové míry. Proto je nyní shrneme v přehledné tabulce.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–
$\operatorname{cotg} x$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0

4.1.6 Cyklometrické funkce

Goniometrické funkce nemohou být z principu periodičnosti prosté. Z toho důvodu inverzní funkce zavádíme pouze k jejich restrikcím na intervalech, kde prosté jsou. Tyto inverzní funkce nazýváme souhrnně funkce cyklometrické.

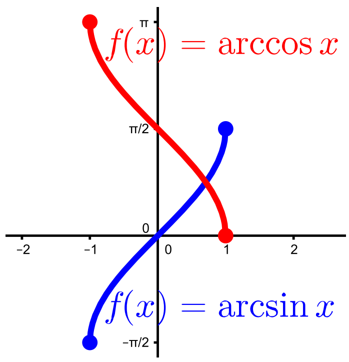
Definice 50 (Cyklometrické funkce)**.** Cyklometrické funkce jsou funkce arkussinus (arcsin), arkuskosinus (arccos), arkustangens (arctg) a arkuskotangens (arccotg), které jsou definovány následovně:

$$\arcsin x := \left(\sin x|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle}\right)^{-1}, \quad \arccos x := \left(\cos x|_{\langle 0, \pi\rangle}\right)^{-1},$$
$$\operatorname{arctg} x := \left(\operatorname{tg} x|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}\right)^{-1}, \quad \operatorname{arccotg} x := \left(\operatorname{cotg} x|_{(0, \pi)}\right)^{-1}.$$

Z principu inverzní funkce platí mezi goniometrickými funkcemi a jejich cyklometrickými inverzemi následující vztahy:

$$\forall x \in \langle -1, 1\rangle \ \forall y \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle : y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y,$$
$$\forall x \in \langle -1, 1\rangle \ \forall y \in \langle 0, \pi\rangle : y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y,$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \ \forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) : y = \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} y,$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \ \forall y \in (0, \pi) : y = \operatorname{arccotg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{cotg} y.$$

Nejprve se podíváme na cyklometrické funkce arkussinus a arkuskosinus, jejich grafy, vlastnosti a vztahy.



Vlastnosti (Funkce arkussinus)**.** Nechť f je arcsin. Pak pro f platí:

- $\mathcal{D}(f) = \langle -1, 1\rangle$ a $\mathcal{H}(f) = \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$,
- $\min(f) = -\frac{\pi}{2}$ v $x = -1$ a $\max(f) = \frac{\pi}{2}$ v $x = 1$,
- je rostoucí na celém $\mathcal{D}(f)$,
- je ryze konkávní na $\langle -1, 0\rangle$ a je ryze konvexní na $\langle 0, 1\rangle$,
- je lichá a je prostá.

Vlastnosti (Funkce arkuskosinus)**.** Nechť f je arccos. Pak pro f platí:

- $\mathcal{D}(f) = \langle -1, 1\rangle$ a $\mathcal{H}(f) = \langle 0, \pi\rangle$
- $\min(f) = 0$ v $x = 1$ a $\max(f) = \pi$ v $x = -1$,
- je klesající na celém $\mathcal{D}(f)$,
- je ryze konvexní na $\langle -1, 0\rangle$ a je ryze konkávní na $\langle 0, 1\rangle$,
- nemá paritu a je prostá.

Věta 16. Pro cyklometrické funkce arkussinus a arkuskosinus platí následující vztahy:

1. $\forall x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle :\ \arcsin(\sin x) = x$,
2. $\forall x \in \langle -1, 1\rangle :\ \sin(\arcsin x) = x$,
3. $\forall x \in \langle 0, \pi\rangle :\ \arccos(\cos x) = x$,
4. $\forall x \in \langle -1, 1\rangle :\ \cos(\arccos x) = x$,
5. $\forall x \in \langle -1, 1\rangle :\ \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Důkaz.

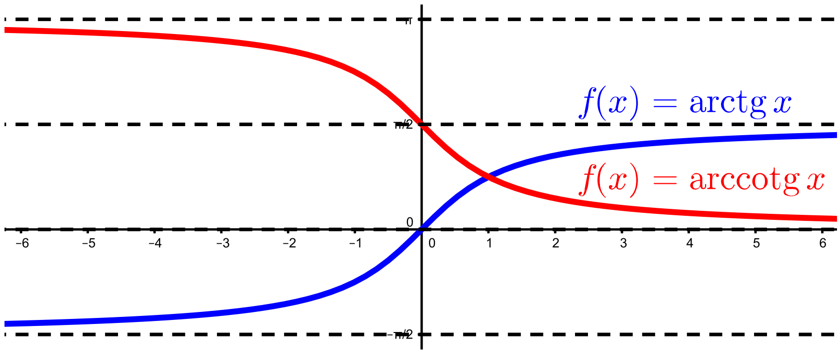
1.–4. Triviální, z principu inverzní funkce.

5. Vztah mezi sinem a kosinem, který jsme si odvodili ve 2. bodu věty 14, je zvláště důležitý pro cyklometrické funkce, protože na rozdíl od jiných vztahů převádí zúžení kosinu, pro které je jako inverze definován arkuskosinus, na zúžení sinu, pro které je jako inverze definován arkussinus (neboť $\frac{\pi}{2} - x$ převádí interval $\langle 0, \pi\rangle$ na $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$). Při inverzi tohoto vztahu na $\langle 0, \pi\rangle$ tedy můžeme přímo přejít k cyklometrickým funkcím (používáme vztah $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ odvozený v podkapitole 2.5):

$$
\begin{aligned}
\cos x &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \qquad /^{-1} \\
\arccos x &= \frac{\pi}{2} - \arcsin x \\
\arcsin x + \arccos x &= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

cbd

Zbývá nám se podívat na grafy, vlastnosti a vztahy funkcí arkustangens a arkuskotangens.



Vlastnosti (Funce arkustangens)**.** Nechť f je arctg. Pak pro f platí:

- $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ a $\mathcal{H}(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,
- nemá maximum a minimum, $\inf(f) = -\frac{\pi}{2}$ a $\sup(f) = \frac{\pi}{2}$,
- je rostoucí na celém $\mathcal{D}(f)$,
- je ryze konvexní na $(-\infty, 0\rangle$ a je ryze konkávní na $\langle 0, \infty)$,
- je lichá a je prostá.

Vlastnosti (Funce arkuskotangens)**.** Nechť f je arccotg. Pak pro f platí:

- $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ a $\mathcal{H}(f) = (0, \pi)$,
- nemá maximum a minimum, $\inf(f) = 0$ a $\sup(f) = \pi$,
- je klesající na celém $\mathcal{D}(f)$,
- je ryze konkávní na $(-\infty, 0\rangle$ a je ryze konvexní na $\langle 0, \infty)$,
- nemá paritu a je prostá.

Věta 17. Pro cyklometrické funkce arkustangens a arkugkotangens platí následující vztahy:

1. $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$,
2. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k}{2}\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}:\ \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$,
3. $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg} x) = x$,
4. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}:\ \operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg} x) = x$,
5. $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$,
6. $\forall x \in \mathbb{R}^+\colon\ \operatorname{arccotg} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$,
7. $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \cdot y < 1$,
8. $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ x \cdot y < 1 \Rightarrow \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-x\,y}$.

Důkaz.

1.–4. Triviální, z principu inverzní funkce.

5. Dokáže se analogicky 5. bodu ve větě 16.

6. Vyjdeme z rovnosti $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}; x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, kterou si nejprve přepíšeme jako $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} \circ \operatorname{tg} x$. Nyní provedeme na obou stranách inverzi s tím, že víme, že $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$. Dostáváme $\operatorname{arccotg} x = \operatorname{arctg} x \circ \frac{1}{x} = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

7. Mají-li x, y různá znaménka, platí zjevně. Nechť $x, y > 0$. Pak je první rovnost triviálně splněna a

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y &< \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{arctg} x &< \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arccotg} y = \operatorname{arctg} \frac{1}{y} \end{aligned}$$

arctg je rostoucí funkce, tedy $x < \frac{1}{y}$, neboli $x \cdot y < 1$. Pro $x, y < 0$ je druhá nerovnost splněna triviálně a

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} &< \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y \\ \frac{\pi}{2} &> -\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} -x + \operatorname{arctg} -y, \end{aligned}$$

čímž je nerovnost převedena na předchozí případ, tedy

$$(-x) \cdot (-y) = x \cdot y < 1.$$

8. Předpokládejme, že $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} z$ a postupujme následovně.

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y &= \operatorname{arctg} z \qquad / \operatorname{tg} \circ \\ \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y) &= \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} z) \\ \frac{\operatorname{tg} \operatorname{arctg} x + \operatorname{tg} \operatorname{arctg} y}{1 - \operatorname{tg} \operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{tg} \operatorname{arctg} y} &= z \\ \frac{x + y}{1 - x \cdot y} &= z \end{aligned}$$

z pouze dosadíme zpět do $\operatorname{arctg} z$ a dostáváme výsledek. Aby však součet vůbec mohl být nějaký arctg, musí být splněno

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y < \frac{\pi}{2},$$

což jak víme z bodu 7 této věty, je právě tehdy, když $x \cdot y < 1$.

cbd

Abychom mohli plnohodnotně počítat s cyklometrickými funkcemi, potřebujeme mít vztah mezi arcsin a arctg.

Věta 18. Mezi funkcemi $\arcsin x$ a $\operatorname{arctg} x$ platí následující vztahy.

$$\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$
$$\forall x \in (-1,1)\colon\ \arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Důkaz. První tvrzení si dokážeme později v rámci důkazu u věty o elementárních funkcích. Druhé tvrzení z něj triviálně vyplývá pouhou úpravou vnitřních funkcí v první rovnosti $\arcsin y = \operatorname{arctg} x$.

$$\begin{aligned}
\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} &= y \qquad /^2\\
\frac{x^2}{1+x^2} &= y^2\\
x^2 &= y^2\left(1+x^2\right) = y^2 + x^2 y^2\\
x^2 - x^2 y^2 = x^2\left(1-y^2\right) &= y^2\\
x^2 &= \frac{y^2}{1-y^2} \qquad /\sqrt{x}\\
|x| &= \frac{|y|}{\sqrt{1-y^2}}
\end{aligned}$$

Jak vidíme z původní rovnosti, x a y musejí mít stejná znaménka, proto můžeme absolutní hodnoty odstranit a dostáváme

$$x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Nyní pouze dosadíme x do rovnice $\arcsin y = \operatorname{arctg} x$. cbd

Úloha 1. Vyjádřete hodnotu $\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}-1\right)$ bez použití cyklometrických funkcí.

Řešení. Prve si pomůžeme tím, že výraz chytře rozšíříme 2.

$$\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}-1\right) = \frac{2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}-1\right)}{2} = \frac{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}-1\right) + \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}$$

Rozšíření nám umožňuje použít vzorec na součet $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y$. Poté se jedná již jen o algebraické úpravy.

$$\frac{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}-1\right) + \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}-1\right)}{2} = \frac{\operatorname{arctg} \frac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{1-\left(\sqrt{2}-1\right)^2}}{2} =$$
$$= \frac{\operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{2}-2}{1-\left(2-2\sqrt{2}+1\right)}}{2} = \frac{\operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}-2}}{2} = \frac{\operatorname{arctg} 1}{2} = \frac{\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{8}$$

Hodnotu $\operatorname{arctg} 1$ jsme odvodili z hodnoty inverzní funkce $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$. Závěrem tedy $\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}-1\right) = \frac{\pi}{8}$.

Cvičení

4.4. Určete hodnoty $\arcsin x$ a $\arccos x$ pro $x = \pm\frac{1}{2}$.

4.5. Určete hodnoty $\operatorname{arctg} x$ a $\operatorname{arccotg} x$ pro $x = \pm 1$.

4.6. Vyjádřete hodnotu $\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$ bez použití cyklometrických funkcí.

4.1.7 Další funkce

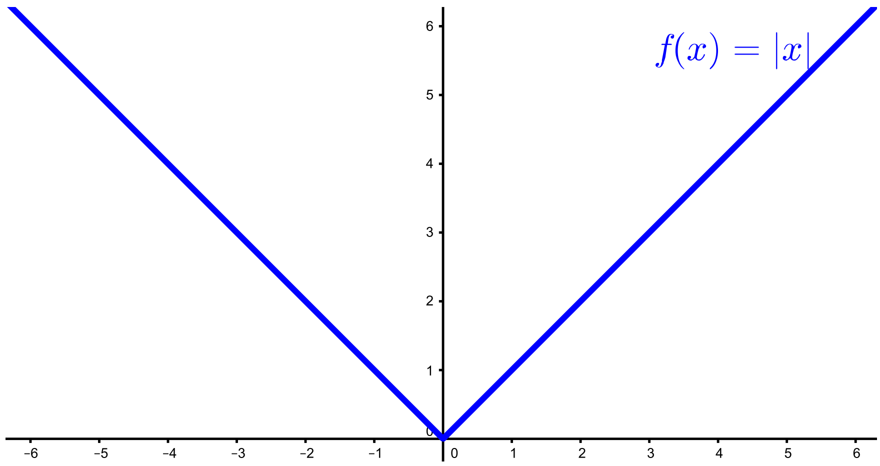
Jako analogie ke goniometrickým a cyklometrickým funkcím existují funkce hyperbolické a k nim inverzní funkce hyperbolometrické. Nejedná se o speciální kategorii funkcí, ale jsou definované pomocí exponenciální funkce. Jelikož se však na většině školách nevyučují, a s jejich užitím se setkáme nejdříve až v diferenciálním počtu, tak se jimi ani my nebudeme nadále zabývat.

Podívejme se nyní na pár dalších nezařazených funkcí, se kterými se budeme setkávat podstatně častěji.

Definice 51. (Absolutní hodnota) Absolutní hodnota je funkce, která je definována následovně:

$$|x| := \begin{cases} -x & \text{pro } x < 0, \\ x & \text{pro } x \geq 0. \end{cases}$$

Absolutní hodnota se dá zavést i jinými způsoby. Dalším často užívaným způsobem zavedení je $f(x) = |x| := \sqrt{x^2}$.[4]



[4] Zcela univerzálně zavádíme $|x| = \sqrt{x \cdot \overline{x}}$, kde x jsou (obecně) komplexní čísla nebo vektory (pak tečka značí skalární součin), ale jelikož pracujeme pouze v reálných číslech, kde se $x = \overline{x}$, tak se jedná o totožný zápis.

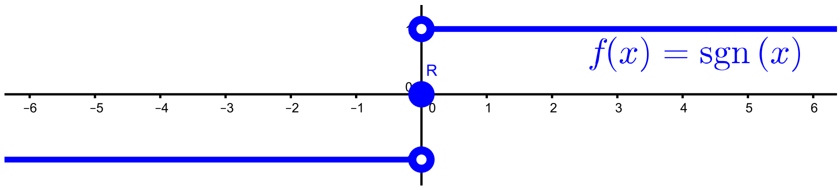
Vlastnosti (Absolutní hodnota)**.** Nechť $f(x) = |x|; x \in \mathbb{R}$. Pak pro f platí:

- $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ a $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}_0^+$,
- v 0 má $\min(f) = 0$, ale nemá maximum, $\sup(f) = \infty$,
- je klesající na $(-\infty, 0\rangle$ a je rostoucí na $\langle 0, \infty)$,
- je konvexní na $\mathbb{R}$ a je konkávní na $\mathbb{R}_0^+$ a na $\mathbb{R}_0^-$,
- je sudá.

Definice 52. (Signum) Absolutní hodnota je funkce, která je definována následovně:

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} -1 & \text{pro } x < 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ 1 & \text{pro } x > 0. \end{cases}$$

Funkce signum má nespojitý graf. Tzn., že vezmeme-li maximální intervaly definičního oboru funkce (v tomto případě celé $\mathbb{R}$), tak na nich nemůžeme funkci načrtnout jednou čarou. Funkce signum se takto „trhá“ v bodě $x = 0$.



Vlastnosti (Signum)**.** Nechť $f(x) = \operatorname{sgn}(x); x \in \mathbb{R}$. Pak pro f platí:

- $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ a $\mathcal{H}(f) = \{-1, 0, 1\}$,
- $\min(f) = -1$ a $\max(f) = 1$,
- je neklesající na celém $\mathcal{D}(f)$,
- je konvexní na $(-\infty, 0\rangle$ a na $(0, \infty)$ a je konkávní na $(-\infty, 0)$ a na $\langle 0, \infty)$,
- je lichá.

Mezi definicí absolutní hodnoty a signum je patrná podobnost. Tento vztah popisuje následující věta.

Věta 19. Pro funkce signum a absolutní hodnota platí

$$x \operatorname{sgn}(x) = |x|.$$

Důkaz. Triviální. $x = 0$: $\operatorname{sgn}(0) = 0$ a $|0| = 0$, tedy $0x = 0$.
$x < 0$: $\operatorname{sgn}(x) = -1$ a $|x| = -x$, tedy $-1x = -x$.
$x > 0$: $\operatorname{sgn}(x) = 1$ a $|x| = x$, tedy $1x = x$. cbd

Dalšími funkcemi, jejichž graf nelze na definičním oboru nakreslit jednou čarou, jsou funkce následující.

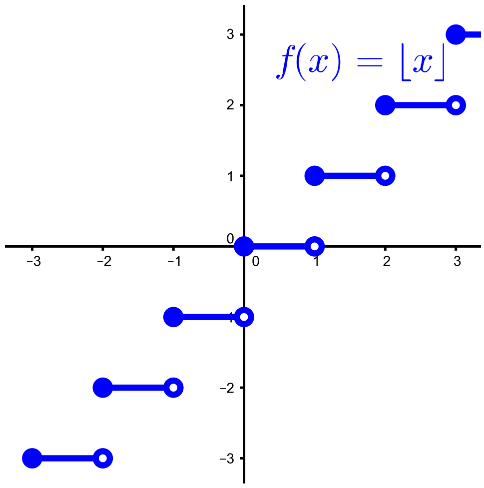
Definice 53 (Funkce dolní celá část a necelá část)**.** Funkci dolní celá část definujeme následovně:

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{Z}\colon\ \lfloor x \rfloor = n \overset{\text{def}}{\iff} x \in \langle n, n+1) \,.$$

K funkci dolní celá část dodefinováváme funkci necelá část následovně:

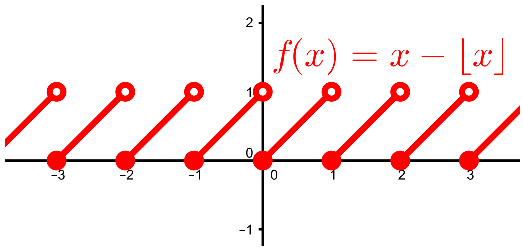
$$g(x) = x - \lfloor x \rfloor .$$

Alespoň částečně se nyní na vlastnosti obou nově zadefinovaných funkcí zaměříme.



Vlastnosti (Funkce dolní celá část)**.** Nechť $f(x) = \lfloor x \rfloor; x \in \mathbb{R}$. Pak pro f platí:

- $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ a $\mathcal{H}(f) = \mathbb{Z}$,
- $\inf(f) = -\infty$ a $\sup(f) = \infty$,
- je neklesající na celém $\mathcal{D}(f)$,
- je konvexní na intervalech $\langle k, k+1\rangle; k \in \mathbb{Z}$ a konkávní na intervalech $\langle k, k+1); k \in \mathbb{Z}$,
- nemá paritu a není prostá.



Vlastnosti (Funkce necelá část)**.** Nechť $f = x - \lfloor x \rfloor; x \in \mathbb{R}$. Pak pro f platí:

- $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ a $\mathcal{H}(f) = \langle 0, 1)$,
- $\min(f) = 0$, ale maximum neexistuje, $\sup(f) = 1$,
- je rostoucí na intervalech $\langle k, k+1); k \in \mathbb{Z}$,
- je konvexní na intervalech $\langle k, k+1); k \in \mathbb{Z}$ a konkávní na intervalech $\langle k, k+1\rangle; k \in \mathbb{Z}$,
- nemá paritu a není prostá, je periodická se základní periodou $p = 1$.

Věta 20. Součtem funkcí dolní celá část a necelá část je funkce identická.

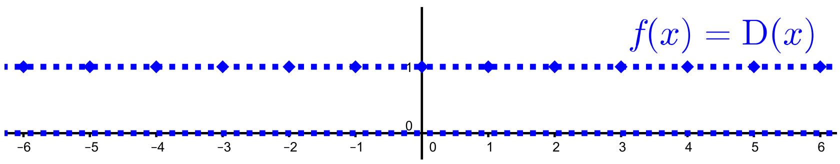
Důkaz. Triviální, $f(x) + g(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor) = \lfloor x \rfloor + x - \lfloor x \rfloor = x$. cbd

Z funkcí, které si v této kapitole zavádíme, je z hlediska grafu nejvíce „rozpadlá“ tzv. Dirichletova funkce.

Definice 54. (Dirichletova funkce) Dirichletova funkce je funkce, která je definovaná následovně:

$$\mathrm{D}(x) := \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Graf Dirichletovy funkce se zpravidla nekreslí. Důvod je vidět z následujícího obrázku, který je sám z principu věci jen aproximací či spíše náznakem skutečného grafu.



Vlastnosti (Dirichletova funkce)**.** Nechť $f(x) = \mathrm{D}; x \in \mathbb{R}$. Pak pro f platí:

- $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ a $\mathcal{H}(f) = \{0, 1\}$,
- $\min(f) = 0$ a $\max(f) = 1$,
- není monotonní na žádném intervalu,
- není vypouklá na žádném intervalu,
- je sudá a je periodická pro libovolné $p \in \mathbb{Q}^+$ (takže nemá základní periodu).

4.2 Definice elementárních funkcí

Abychom mohli pohodlně zavádět (nekonečné) množiny funkcí, zadefinujeme si prvně jak vypadá generátor takové množiny.

Definice 55 (Generátor množiny funkcí)**.** (Vitásek, 2012) Množinu funkcí generovaných množinou funkcí F (tzv. množina generátorů) a množinou binárních operací O (značíme $\langle F; O\rangle$) definujeme takto:

1. $F \subseteq \langle F; O\rangle$
2. $f, g \in \langle F; O\rangle \wedge \otimes \in O \Rightarrow f \otimes g \in \langle F; O\rangle$
3. Každou funkci z $\langle F; O\rangle$ lze z F zkonstruovat konečným počtem kroků 2.

V rámci toho, co budeme posléze nazývat elementárními funkcemi, tradičně rozlišujeme několik speciálních podkategorií. První z nich jsou již ze střední školy známé polynomy.

Definice 56 (Polynomické funkce)**.** Množinu $\langle F_P; O_P\rangle$, kde

1. $F_P = \{c, x\}$,
2. $O_P = \{+, -, \cdot\}$,

nazýváme množinou polynomických funkcí.

Pro představu, netriviálním typem polynomu jsou například již zmiňované lineární a mocninné funkce nebo ze střední školy notoricky známé funkce kvadratické.

Definice 57 (Racionální funkce)**.** Množinu $\langle F_Q; O_Q\rangle$, kde

1. $F_Q = \{c, x\}$,
2. $O_Q = \{+, -, \cdot, \div\}$,

nazýváme množinou racionálních funkcí.

Tyto funkce se od polynomických funkcí liší tím, že v množině binárních operací přidáváme navíc operaci děleno. Z toho vyplývá, že polynomické funkce jsou speciálním typem funkcí racionálních, které můžeme zapsat bez použití této operace.

Poznámka. Každou racionální funkci můžeme zapsat jako podíl dvou funkcí polynomických.

Definice 58 (Iracionální funkce)**.** Množinu $\langle F_I; O_I\rangle \setminus \langle F_Q; O_Q\rangle$, kde

1. $F_I = \{c, x, \sqrt[n]{x}\}$,
2. $O_I = \{+, -, \cdot, \div, \circ\}$,

nazýváme množinou iracionálních funkcí.

Jinými slovy, iracionální funkce jsou všechny funkce generované množinou $\langle F_I; O_I \rangle$, které nejsou racionální. Z toho vyplývá, že iracionální funkce musí obsahovat funkci n-tá odmocnina.

Veškeré funkce, které nepostihuje žádná z předchozích tři definic, nazýváme transcendentní. Jsou jimi např. funkce exponenciální, goniometrické, apod., ale i funkce, které ani nemusí být elementární.

Tím se dostáváme k velké skupině funkcí, se kterou se žáci nejčastěji setkávají v rámci výuky matematiky. Jsou jí již zmiňované elementární funkce a patří mezi ně většina ze základních funkcí, které jsme si zavedli v minulé podkapitole. Nyní si ukážeme, které to jsou.

Definice 59 (Elementární funkce)**.** (Vitásek, 2012) Množinu $\langle F_E; O_E \rangle$, kde

1. $F_E = \{c, x, \sqrt[n]{x}, \mathrm{e}^x, \ln x, \sin x, \arcsin x\}$,
2. $O_E = \{+, -, \cdot, \div, \circ\}$,

nazýváme množinou elementárních funkcí.

Jinými slovy, elementární funkce jsou funkce v F_E spolu s funkcemi, které z funkcí v F_E vzniknou konečným počtem operací z O_E. Aby nedošlo k mýlce, tak si nyní ukážeme, které další funkce z námi zavedených funkcí jsou také elementární.

Věta 21. Funkce $ax+b$, x^n, a^x, $\log_a x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$ a $|x|$ jsou elementární funkce.

Důkaz. Lineární funkce $ax + b$ lze triviálně vyjádřit jako $c_1 \cdot x + c_2$.
x^n: Pro $n = 0$ se jedná o $c = 1$, pro $n \in \mathbb{N}$ lze x^n vyjádřit jako funkci $x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$ s n činiteli, pro $n \in \mathbb{Z}^-$ lze x^n vyjádřit jako $1 \div x^{-n}$.
Funkce a^x a $\log_a x$ můžeme podle vzorců přepsat jako $\mathrm{e}^{x \ln a}$ a $\frac{\ln x}{\ln a}$, tedy $\mathrm{e}^x \circ (x \cdot \ln a)$ a $\ln x \div \ln a$.
Kosinus můžeme dle definice přepsat jako $\cos x = \sin x \circ \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, čímž je dokázané, že i $\cos x$ je elementární funkcí. Potom $\operatorname{tg} x = \sin x \div \cos x$ a $\operatorname{cotg} x = \cos x \div \sin x$, neboli pomocí O_E je $\operatorname{tg} x = \sin x \div \left(\sin x \circ \left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$ a $\operatorname{cotg} x = \left(\sin x \circ \left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) \div \sin x$.
$|x|$ se dokáže triviálně. Jak bylo řečeno, $|x| = \sqrt{x^2}$, tedy $|x| = \sqrt{x} \circ (x \cdot x)$.
Cyklometrické funkce: Vyjádřit $\arccos x$ pomocí $\arcsin x$ není problém ze vzorce $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, tedy $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$. Analogicky platí, že $\operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$. Zaměříme se tedy na to, jak pomocí $\arcsin x$ dostat $\operatorname{arctg} x$. Nejprve z rovnosti $\arcsin y = \operatorname{arctg} x$ vyjádříme y.

$$\begin{aligned} \arcsin y &= \operatorname{arctg} x \qquad / \sin x|_{\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} \circ \\ \sin(\arcsin y) &= \sin(\operatorname{arctg} x) \\ y &= \sin(\operatorname{arctg} x) \end{aligned}$$

Nyní vyjádříme $\sin x$ pomocí $\operatorname{tg} x$ pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, kde je $\cos x > 0$.

$$\sin x = \frac{\frac{\sin x}{|\cos x|}}{\frac{1}{|\cos x|}} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}}} = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1}} = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 1}}$$

Dosazením $\sin x$ do $y = \sin(\operatorname{arctg} x)$ dostáváme

$$\begin{aligned} y &= \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{\sqrt{\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x) + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \text{ neboli} \\ \arcsin y &= \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arctg} x. \end{aligned}$$

Pouhým přepisem pak $\operatorname{arctg} x = \arcsin x \circ (x \div (\sqrt{x} \circ (x \cdot x + 1)))$. cbd

Vrátíme-li se trochu zpět, tak vidíme, že na rozdíl od racionálních funkcí a polynomů jsou již množiny racionálních, iracionálních a transcendentních funkcí navzájem disjunktní. Můžeme tedy říct, že elementární funkce lze rozdělit na funkce racionální, iracionální a transcendentní.

Poznámka. K operacím u polynomů a racionálních funkcí bychom mohli, stejně jako je tomu u definice iracionálních a elementárních funkcí, přidat i operaci skládání. Jelikož by však tato operace nepřinesla v daných kategoriích nic nového, neboť složením polynomů vzniká vždy polynom a složením racionálních funkcí opět racionální funkce, do definice jsme ji kvůli jednoduchosti nezařadili. Podobně jsme v definici elementárních funkcí uvedli jen jednu goniometrickou a jednu cyklometrickou funkci, neboť, jak jsme viděli, jsou z nich ostatní odvoditelné.

Nyní uvedeme důležitou větu o elementárních funkcích, kterou předbíháme, protože nemáme k dispozici ani korektní definici jednoho použitého pojmu, natož nástroje k jejímu důkazu. Intuitivní význam je však zřejmý.

Věta 22. Každá elementární funkce je spojitá na svém definičním oboru.

Spojitost funkce znamená, že vezmeme-li maximální intervaly definičního oboru funkce, dá se na nich její graf načrtnout jednou čarou. Z této věty mimo jiné také vyplývá, že spojitost je nutnou podmínkou, aby funkce byla elementární.

Název spojitost již zazněla u funkce signum. Zde jsme tvrdili, že sgn očividně není v 0 spojitá. Z toho vyplývá, že funkce signum nemůže být elementární funkcí.

Příkladem dalších funkcí, které nejsou spojité, a tím pádem ani elementární, jsou funkce dolní celá část a necelá část. Jak můžeme vidět z grafů, funkce dolní celá část (resp. necelá část) jsou nespojité v mnohem více bodech nežli funkce signum, i tak však můžeme nalézt intervaly, na kterých spojité jsou. To se již nedá říct o Dirichletově funkci, která není spojitá na žádném intervalu, dokonce ani v žádném bodě.

Poznámka. Pokud přidáme funkci signum do množiny generátorů elementárních funkcí, budou do vygenerované množiny patřit i funkce dolní celá část, necelá část a další funkce po částech elementární (tedy všechny funkce definované podobně jako signum „vidličkou“ na konečně mnoha intervalech). Více o tomto tématu píše D. Janda ve svém bakalářské práci Funkce v příkladech a protipříkladech z roku 2011.

Tyto nespojité funkce jsou významné především z hlediska dokazování vlastností, které se probírají ve složitější teorii funkcí, ale je dobré s nimi být obeznámen již dříve.

Čtenář by z předcházejících příkladů mohl nabýt dojmu, že všechny neelementární funkce nejsou spojité. Tomu tak ale není, protože ve větě o spojitosti elementárních funkcí je pouze implikace, nikoliv ekvivalence. Jinými slovy, existuji i funkce neelementární, které jsou spojitá. Takovou funkcí je například $f(x) = (x + \ln x)^{-1}$. Jelikož funkce $x + \ln x$ je spojitá, ryze monotonní a tedy i prostá, tak i její inverzní funkce bude spojitá a ryze monotonní, ale protože z rovnice $y = x + \ln x$ nemůžeme pomocí základních pěti operací vyjádřit x, tak se nejedná o funkci elementární. Z tohoto poznatku plyne následující poznámka.

Poznámka. Elementární funkce nejsou uzavřené na inverzi, ale pouze na operace $+$, $-$, $\cdot$, $\div$, $\circ$.

Cvičení

4.7. U následujících funkcí rozhodněte, zdali se jedná o funkce elementární. V kladném případě rozhodněte, jestli je funkce racionální (resp. polynomická), iracionální nebo transcendentní.

(a) $f_1\colon y = \frac{x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)}{x^2}$

(b) $f_2\colon y = (\cos x - \sin x)^2$

(c) $f_3\colon y = \frac{x\cdot\operatorname{sgn} x}{\operatorname{arccotg} x}$

(d) $f_4\colon y = x^2 \cdot \operatorname{sgn} x$

(e) $f_5\colon y = \sin\left(\ln^2 x\right)$

(f) $f_6\colon y = x \cdot (2 - x) \cdot \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \cdot \mathrm{e}^{\left(1-\sqrt{x}\right)}$

(g) Inverzní k $f_7\colon y = x + \sin x$

(h) Inverzní k $f_8\colon y = \frac{\pi}{\log \mathrm{e}^x}$

Kapitola 5

Obvyklé úlohy s elementárními funkcemi

5.1 Řešení rovnic a nerovnic v $\mathbb{R}$

Už ze střední školy známe metodu řešení nerovnic pomocí ekvivalentních úprav. Je pro ní obvyklé skládání s inverzními funkcemi. Např. pokud z nerovnice $e^x > 3$ chceme získat x, tak se musíme zbavit vnějších funkcí (v tomto případě funkce exponenciální). Takže

$$\begin{aligned} e^x &> 3 \qquad / \ln \circ \\ \ln e^x &> \ln 3 \\ x &> \ln 3 \end{aligned}$$

Tento postup zásadně závisí na znalosti monotonie funkce, kterou používáme, protože rostoucí funkce zachovává nerovnost, ale klesající ji převrací. Například

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^x &> 3 \qquad / \log_{\frac{1}{2}} \circ \\ \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^x &< \log_{\frac{1}{2}} 3 \\ x &< \log_{\frac{1}{2}} 3 \end{aligned}$$

Řekněme, že máme nerovnici $\mathrm{L} < \mathrm{P}$. Pokud na ní použijeme „úpravovou“ funkci u a dostaneme $u(\mathrm{L}) < u(\mathrm{P})$, pak znázorněním úpravy jako implikace dostáváme přímo definici rostoucí funkce, tedy $\mathrm{L} < \mathrm{P} \Rightarrow u(\mathrm{L}) < u(\mathrm{P})$. Převrácením znaménka bychom dostali definici funkce klesající.

Úprava známá již ze základní školy je převracení nerovnosti při násobení záporným číslem. To je jen speciálním případem předchozího. Vezměme si např. nerovnici $-3x < 6$. Dělení -3 je ve skutečnosti totéž, co skládání s funkcí $u(x) := -\frac{x}{3}$. Protože $-\frac{x}{3}$ je lineární klesající funkcí, musíme při řešení převracet rovnost.

Toto řešení má také tu nevýhodu, že se postup často musí dělit na více případů. Např. pokud chci nerovnici $\frac{1}{x} < 3$ vynásobit x, musím rozdělit na dva příklady, kdy $x > 0$ a $x < 0$.

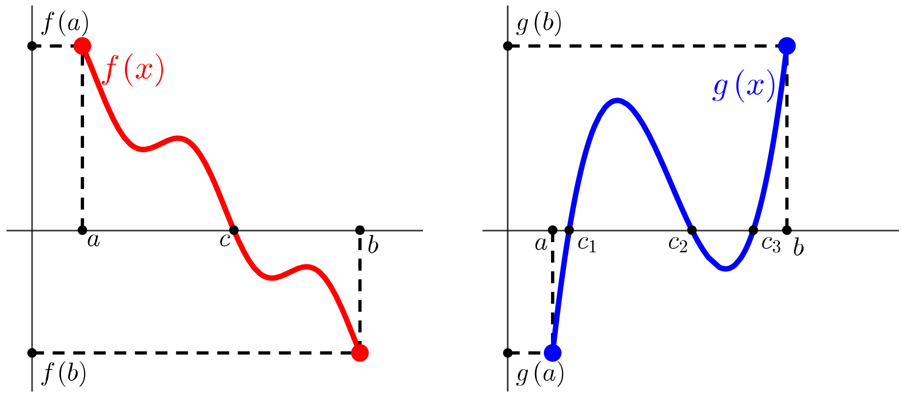
Jelikož toto u rovnic nemusíme řešit, je řešení rovnic obecně jednodušší než řešení příslušných nerovnic. Ukážeme si metodu, která převádí řešení nerovnice na řešení rovnice. Nejprve si musíme nerovnici upravit do tvaru s nulou na pravé straně. Máme-li například nerovnici L $>$ P, můžeme P vždy převést na levou stranu, takže i každou nerovnici můžeme převést do tvaru $f(x) > (\geq, \leq, <)\, 0$. Tím problém řešení nerovnice převádíme na problém hledání množiny, na které je funkce (v běžných úlohách vždy elementární) kladná (nezáporná, nekladná, záporná).

Díky spojitosti elementárních funkcí nám toto hledání množin výrazně usnadní následující věta, kterou si bez důkazu sepíšeme.

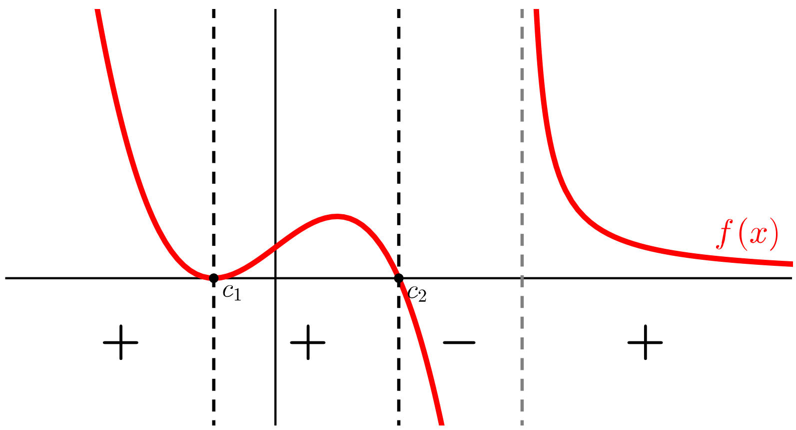
Věta 23 (Bolzanova věta)**.** Mějme funkci f spojitou na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak platí

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists\, c \in (a, b) : f(c) = 0.$$

Podmínka $f(a) \cdot f(b) < 0$ znamená, že má funkční hodnota funkce f na koncích intervalu opačná znaménka. Z toho pak za předpokladu spojitosti plyne, že na intervalu (a, b) existuje nejméně jeden bod c, ve kterém je funkční hodnota rovna nule. Takovýto bod nazýváme nulovým bodem funkce.



Důsledkem předchozí věty je, že elementární funkce (protože všechny elementární funkce jsou spojité) nemění na definičním oboru mezi svými nulovými body znaménko.



Postup řešení nerovnic je následovný. Nejprve převedeme vše na jednu stranu rovnice. Dále si určíme definiční obor, a nulové body vzniklé funkce.

Podle nulových bodů si rozdělíme intervaly definičního oboru na podintervaly. Poté (dosazením nebo ze známých vlastností dané funkce) rozhodneme o znaménku funkční hodnoty na jednotlivých podintervalech, a tím zjistíme, ve kterých je původní nerovnost splněna.

Poznámka. Studenti často nabývají ze střední školy dojmu, že umí početním algoritmem vyřešit jakoukoliv rovnici obsahující elementární funkce. Tomu tak je především proto, že učitelé nezadávají úlohy, které by se vyřešit nedaly. Abychom demonstrovali, že je tento dojem nesprávný, uvažujme např. rovnici $x+\ln x = 0$. U takovéto rovnice jsme sice schopni z vlastností obou funkcí určit, že kořen bude jediný a že se bude nacházet v intervalu $(0,1)$, ale tím to pro nás končí – z rovnice nelze vyjádřit x, protože inverze k funkci na levé straně není elementární.

Úloha 1. Nalezněte množinu všech $x\in\mathbb{R}$, pro která platí

$$\frac{(x-1)\,(x^2-9)}{x+1} < 0.$$

Řešení. Na levé straně již máme přepsanou funkci f. Začneme tím, že si určíme její definiční obor. Jedinou podmínkou v tomto případě je, abychom nedělili nulou, tedy aby $x+1\neq 0$. Z toho vyplývá, že

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\smallsetminus\{-1\} = (-\infty,-1)\cup(-1,\infty)\,.$$

Dále rozdělíme definiční obor podle nulových bodů funkce:

$$\begin{aligned} x-1=0 \ &\Rightarrow\ x_1 = 1,\\ x^2-9=0 \ &\Rightarrow\ x_{2,3} = \pm 3. \end{aligned}$$

Máme určit, kde je funkce záporná. Protože je podílem resp. součinem jednodušších funkcí, budeme pracovat pouze se znaménky – funkce bude záporná právě tehdy, když bude záporný lichý počet součinitelů. Sestavíme tedy tabulku znamének na intervalech, které vzniknou rozdělením intervalů definičního oboru nulovými body:

x	$(-\infty,-3)$	$(-3,-1)$	$(-1,1)$	$(1,3)$	$(3,\infty)$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
x^2-9	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Posledním řádkem tabulky je „součin“ znamének ve sloupcích nad ním. Řešením nerovnice $f(x)<0$ jsou všechna $x\in(-3,-1)\cup(1,3)$.

Úloha 2. Nalezněte množinu všech $x\in\mathbb{R}$, pro která platí

$$\frac{x+3}{x^2-1} \le \frac{2x+3}{x^2+3x+2}.$$

Řešení. Na rozdíl od předchozího případu musíme prvně převést výraz z pravé strany na levou a upravit.

$$\frac{x+3}{x^2-1} - \frac{2x+3}{x^2+3x+2} = \frac{x+3}{(x-1)\,(x+1)} - \frac{2x+3}{(x+1)\,(x+2)} =$$
$$= \frac{(x+3)\,(x+2)-(2x+3)\,(x-1)}{(x-1)\,(x+1)\,(x+2)} = \frac{-x^2+4x+9}{(x-1)\,(x+1)\,(x+2)} = f(x)$$

Stejně jako v předchozí úloze si určíme intervaly definičního oboru a nulové body funkce f. Ty budou součástí řešení, neboť nerovnost v naší nerovnici je neostrá.

$$\mathcal{D}(f) = (-\infty,-2) \cup (-2,-1) \cup (-1,1) \cup (1,\infty)\,,$$
$$-x^2+4x+9=0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{13}$$

Sestavíme tabulku znamének, přičemž $x_1 \doteq 5{,}6$ a $x_2 \doteq -1{,}6$.

x	$(-\infty,-2)$	$(-2,x_2)$	$(x_2,-1)$	$(-1,1)$	$(1,x_1)$	(x_1,∞)
$-x^2+4x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$

Z tabulky vidíme, že řešením $f(x) \le 0$ jsou všechna $x \in \left(-2, 2-\sqrt{13}\right\rangle \cup$ $\cup\,(-1,1) \cup \left\langle 2+\sqrt{13}, \infty\right)$.

Úloha 3. Nalezněte množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která platí

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x+1) - \log_{\frac{1}{2}}(x+2) > \log_{\frac{1}{2}} \frac{2-x}{3-x}.$$

Řešení. Nejprve si určíme definiční obor, protože budeme provádět neekvivalentní úpravy, které ho mohou změnit. Argument logaritmu musí být z $\mathbb{R}^+$, z čehož dostáváme podmínky $2x+1>0$, $x+2>0$ a $\frac{2-x}{3-x}>0$. Z nerovnic podmínek dostáváme

$$\mathcal{D}(f) = \left(-\frac{1}{2}, 2\right) \cup (3,\infty)\,.$$

Provedeme úpravy zadání, ke kterému přistoupíme jako k rovnici, abychom zjistili nulové body.

$$\begin{aligned}
\log_{\frac{1}{2}}(2x+1) - \log_{\frac{1}{2}}(x+2) - \log_{\frac{1}{2}}\frac{2-x}{3-x} &= 0\\
\log_{\frac{1}{2}}\frac{2x+1}{x+2} - \log_{\frac{1}{2}}\frac{2-x}{3-x} &= 0\\
\log_{\frac{1}{2}}\frac{\frac{2x+1}{x+2}}{\frac{2-x}{3-x}} &= 0\\
\frac{\frac{2x+1}{x+2}}{\frac{2-x}{3-x}} &= 1\\
x^2-5x+1=0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} &= \frac{5\pm\sqrt{21}}{2}
\end{aligned}$$

Nyní jen opět sestavíme tabulku, kterou uvádíme již ve zkrácené formě.

x	$(-\frac{1}{2},x_2)$	$(x_2,2)$	$(3,x_1)$	(x_1,∞)
$f(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$

Řešením $f(x)>0$ jsou všechna $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{5-\sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(3, \frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)$.

Úloha 4. Nalezněte množinu všech $x\in\mathbb{R}$, prro cyo která platí

$$\sin x < \cos 2x.$$

Řešení. Jelikož jsou funkce $\sin x$ i $\cos 2x$ definovány na celém $\mathbb{R}$, nemusíme se více zabývat definičním oborem. Funkce $\sin x$ je 2π-periodická a funkce $\cos 2x$ je π-periodická, takže výsledná funkce bude 2π-periodická. Na této periodě také budeme vyšetřovat nerovnosti, protože na ostatních periodách budou stejné. Nejprve upravíme funkci

$$\begin{aligned} f(x) = \sin x - \cos 2x &= \sin x - \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = \\ = \sin x + \sin^2 x - \left(1 - \sin^2 x\right) &= 2\sin^2 x + \sin x - 1, \end{aligned}$$

a následně určíme její nulové body na intervalu $\langle 0, 2\pi)$.

$$\begin{aligned} 2\sin^2 x + \sin x - 1 &= 0 \qquad /\mathrm{S}\colon t = \sin x \\ 2t^2 + t - 1 &= 0 \\ t_{1,2} &= \frac{-1 \pm 3}{4} \\ \sin x = -1 \quad &\vee \quad \sin x = \frac{1}{2} \\ x_1 = \frac{3}{2}\pi \quad &\vee \quad x_2 = \frac{\pi}{6} \quad \vee \quad x_3 = \frac{5}{6}\pi \end{aligned}$$

Pomocí nulových bodů sestavíme tabulku pro $f(x) = (\sin x + 1)\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)$.

x	$\langle 0, \frac{\pi}{6})$	$(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi)$	$(\frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi)$	$(\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$
$\sin x + 1$	$-$	$+$	$-$	$-$
$\sin x - \frac{1}{2}$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$-$

Jelikož nás zajímá ostrá nerovnost $f(x) < 0$, nepočítáme do řešení $\frac{3}{2}\pi$. Řešením na intervalu $\langle 0, 2\pi)$ je tak množina $\langle 0, \frac{\pi}{6}) \cup (\frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi) \cup (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$. Tento výsledek můžeme zjednodušit, pokud posuneme interval, na kterém řešíme funkci, na $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$. Zde se nám 1. a 3. interval řešení sjednotí v jeden, a rozšířením periody na $\mathbb{R}$ dostáváme, že řešením jsou všechna $x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left((-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi) \cup (\frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi)\right)$.

Cvičení

5.1. Nalezněte množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která platí následující nerovnice.

(a) $\left(x - \frac{1}{2}\right)\arcsin x \geq 0$

(b) $\log_7 2 + \log_{49} x < \log_7 \sqrt{3}$

(c) $\frac{2x+5}{x^2-x-6} \geq \frac{2x+7}{x^2+x-6}$

(d) $\sin x \sin 2x \geq 0$

*(e) $\frac{\cos x}{4x^2-\pi^2} \leq 0$

5.2. Dokažte, že funkce $f(x) = x^3 - 4x - 1$ má na intervalu $\langle -1, 0\rangle$ alespoň jeden kořen.

5.2 Hledání definičního oboru

Nejprve jednu teoretickou poznámku. Tak, jak jsme zavedli zobrazení, je pro zobrazení daná předpisem jejich definiční obor nutnou součástí zadání a jeho hledání tudíž nemá smysl. Konkrétně, předpis $f(x) = x^2$ říká jen to, že ve všech uspořádaných dvojicích, které zobrazení tvoří, je druhá složka druhou mocninou první, nikoli už, co všechno prvními složkami může být; teprve např. $f(x) = x^2; x \in \mathbb{R}$ je skutečnou definicí zobrazení. Běžné zadání „Nalezněte definiční obor funkce dané předpisem" je tedy jen konvencí, jejíž skutečný význam je „Nalezněte obor smysluplnosti výrazu", neboli množinu všech x (zpravidla z $\mathbb{R}$), která lze do výrazu smysluplně dosadit. Pokud matoucí konvence používat nechceme, lze zadání zkorektnit pomocí jediného slova: „Nalezněte maximální definiční obor funkce dané předpisem".

Pomocí znalostí o definičních oborech funkcí z minulé kapitoly můžeme algoritmicky nalézat definiční obory složitějších elementárních funkcí. Postupujeme tak, že zjišťujeme, pro jaká x se vnitřní funkce zobrazí do definičního oboru funkce vnější, a toto provádíme pro všechny dvojice vnitřních a vnějších funkcí, které zadaná funkce obsahuje. Výsledným definičním oborem je průnik intervalů, které nám z jednotlivých dvojic vzešly. Algoritmus si pro názornost ukážeme na sérii gradovaných úloh. [(1)]

Poznámka. Stejně jako v předchozí podkapitole, nemusíme být vždy schopni výpočty dojít k cíli. Jestliže neumíme např. určit kořen rovnice $x + \ln x = 0$, pak nemůžeme určit ani spodní hranici definičního oboru funkce $f(x) = \sqrt{x + \ln x}$. Existují i speciální případy funkcí, u kterých lze dojít k exaktnímu řešení, ale nikoliv úpravou rovnic, nýbrž vlastním vhledem. Takovou funkcí je např. funkce $g(x) = \sqrt{x - 1 + \ln x}$, u níž víme, že funkce $x - 1$ a $\ln x$ jsou funkce rostoucí, které mají jediný kořen $x = 1$, takže i funkce $x - 1 + \ln x$ je rostoucí a má jediný kořen $x = 1$. Z toho pak triviálně plyne, že $\mathcal{D}(g) = \langle 1, \infty)$. Řešení tedy v tomto případě nejsme schopni vypočítat, ale pokud jej uhodneme, můžeme jej ověřit.

Upozornění. Musíme si dát pozor na úpravy zadaných funkcí. Např. ačkoliv se funkce $f(x) = \ln x^2$ a $g(x) = 2 \ln x$ na průniku svých definičních oborů rovnají, jejich definiční obory jsou různé: $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \neq \mathcal{D}(g) = \mathbb{R}^+$. Úprava prvního na druhý tedy definiční obor obecně zúží a opačná rozšíří.

Úloha 5. Nalezněte maximální definiční obor funkce

$$f(x) = \ln(1 - \mathrm{e}^x)$$

v $\mathbb{R}$ a zapište jej jako sjednocení intervalů a izolovaných bodů.

Řešení. Podívejme se na jednotlivé funkce, které zadaná funkce f obsahuje. Konstantní funkce $y = 1$ i exponenciální funkce $y = \mathrm{e}^x$ jsou definovány na celém $\mathbb{R}$, takže nás nijak neomezují. Omezující funkcí pro definiční obor je funkce $y = \ln z$, protože logaritmus je definovaný pouze pro $z \in \mathbb{R}^+$. Z toho

[(1)] Pro čtenáře s nejasnostmi v algoritmu hledání definičních oborů doporučuji ke studiu bakalářskou práci T. Vitáska Elementární funkce a definiční obor.

plyne pro definiční obor podmínka $1 - \mathrm{e}^x > 0$, ze které vyjádříme x.

$$\begin{aligned} 1 - \mathrm{e}^x &> 0 \\ 1 &> \mathrm{e}^x \qquad / \ln \circ \\ \ln 1 &> \ln \mathrm{e}^x \\ 0 &> x \end{aligned}$$

Z jediné podmínky, že $x < 0$, dostáváme $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^-$.

Úloha 6. Nalezněte maximální definiční obor funkce

$$f(x) = \arcsin(\ln x)$$

v $\mathbb{R}$ a zapište jej jako sjednocení intervalů a izolovaných bodů.

Řešení. V této úloze máme z hlediska definičního oboru dvě omezující funkce. První je $\ln x$, ze které triviálně vidíme, že $x > 0$. Druhou je samotný $\arcsin z$, jehož argument musí nabývat hodnot z intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Z toho plyne podmínka, že $-1 \leq \ln x \leq 1$.

$$\begin{aligned} -1 &\leq \ln x & \qquad \ln x &\leq 1 \\ \mathrm{e}^{-1} &\leq \mathrm{e}^{\ln x} & \mathrm{e}^{\ln x} &\leq \mathrm{e}^1 \\ \mathrm{e}^{-1} &\leq x & x &\leq \mathrm{e} \end{aligned}$$

Z podmínek tedy dostáváme tři intervaly $(0, \infty)$, $\langle \mathrm{e}^{-1}, \infty)$ a $(-\infty, \mathrm{e}\rangle$, jejichž průnikem je $\mathcal{D}(f) = \langle \mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}\rangle$.

Úloha 7. Nalezněte maximální definiční obor funkce

$$f(x) = \sqrt[6]{\frac{x-3}{x+4}}$$

v $\mathbb{R}$ a zapište jej jako sjednocení intervalů a izolovaných bodů.

Řešení. V první řadě nesmíme dělit nulou, proto platí, že $x + 4 \neq 0$, neboli $x \neq -4$. Dále definičním oborem sudých odmocnin je $\mathbb{R}_0^+$, z čehož pro argument odmocniny plyne podmínka $\frac{x-3}{x+4} \geq 0$, kterou vyřešíme metodou z minulé podkapitoly.

x	$(-\infty, -4)$	$(-4, 3\rangle$	$\langle 3, \infty)$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

Z podmínek triviálně dostáváme $\mathcal{D}(f) = (-\infty, -4) \cup \langle 3, \infty)$.

Úloha 8. Nalezněte maximální definiční obor funkce

$$f(x) = \left(\frac{3-x}{x-5}\right)^{x^2-1}$$

v $\mathbb{R}$ a zapište jej jako sjednocení intervalů a izolovaných bodů.

Řešení. Jelikož z tohoto zápisu funkce nemusí být podmínky na první pohled jasné, pomůžeme si úpravou

$$f(x) = \left(\frac{3-x}{x-5}\right)^{x^2-1} = \mathrm{e}^{\left(x^2-1\right)\ln\frac{3-x}{x-5}}.$$

Exponenciální funkce je definována pro všechna $x \in \mathbb{R}$, takže jediné místo, kde může nastat problém, je výraz $\ln\frac{3-x}{x-5}$. Na první pohled je jasné, že $x \neq 5$. Z logaritmu též dostáváme podmínku, že $\frac{3-x}{x-5} > 0$, kterou triviálně vyřešíme.

x	$(-\infty, 3)$	$(3, 5)$	$(5, \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$

Nyní již vidíme, že $\mathcal{D}(f) = (3, 5)$.

Úloha 9. Nalezněte maximální definiční obor funkce

$$f(x) = \frac{\sqrt{4^x - 5 \cdot 2^x + 4}}{\operatorname{arccotg}\sqrt{\ln(x+1)}}$$

v $\mathbb{R}$ a zapište jej jako sjednocení intervalů a izolovaných bodů.

Řešení. Začneme čitatelem, ve kterém výraz pod odmocninou musí být nezáporný, neboli $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 \geq 0$. Vyřešíme metodou z minulé podkapitoly.

$$\begin{aligned}
4^x - 5 \cdot 2^x + 4 &= 0 \\
2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 &= 0 \qquad /\mathrm{S}\colon t = 2^x \\
t^2 - 5t + 4 &= 0 \\
t_1 = 4 \quad &\vee \quad t_2 = 1 \\
2^x = 4 \quad &\vee \quad 2^x = 1 \\
x = 2 \quad &\vee \quad x = 0
\end{aligned}$$

x	$(-\infty, 0\rangle$	$\langle 0, 2\rangle$	$\langle 2, \infty)$
$4^x - 5 \cdot 2^x + 4$	$+$	$-$	$+$

Z první podmínky dostáváme interval $I_1 = (-\infty, 0\rangle \cup \langle 2, \infty)$. Druhý interval dostaneme triviálně z podmínky pro $\ln(x+1)$, tedy $I_2 = (-1, \infty)$. Dále kvůli odmocnině musí platit, že $\ln(x+1)$ nabývá nezáporných hodnot.

$$\begin{aligned}
\ln(x+1) &\geq 0 \qquad /\mathrm{e}^x \circ \\
\mathrm{e}^{\ln(x+1)} &\geq \mathrm{e}^0 \\
x + 1 &\geq 1 \\
x &\geq 0
\end{aligned}$$

Z toho pak $I_3 = \langle 0, \infty)$. Nakonec zbývá projít vnější funkci $\operatorname{arccotg} z$. Jelikož je funkce arkuskotangens definována na celém $\mathbb{R}$, tak její vnitřní funkce neovlivní definiční obor, ba dokonce nemusíme ani řešit dělení nulou ve jmenovateli, protože její obor hodnot je $(0, \pi)$.
Zbývá určit definiční obor f, kterým je $I_1 \cap I_2 \cap I_3$, tedy $\mathcal{D}(f) = \langle 2, \infty)$.

Úloha 10. Nalezněte maximální definiční obor funkce

$$f(x) = \frac{\arcsin\left(x^2 - 2x\right)}{\ln\left(\ln^2 x\right)}$$

v $\mathbb{R}$ a zapište jej jako sjednocení intervalů a izolovaných bodů.

Řešení. V čitateli funkce f je funkce $\arcsin z$, která je definována pouze pro $z \in \langle -1, 1\rangle$. Dostáváme tedy podmínku, že $-1 \leq x^2 - 2x \leq 1$.

$$\begin{aligned} -1 &\leq x^2 - 2x & x^2 - 2x &\leq 1 \\ 0 &\leq x^2 - 2x + 1 & x^2 - 2x - 1 &\leq 0 \\ 0 &\leq (x-1)^2 & x_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{2} \\ x &\in \mathbb{R} & x &\in \left\langle 1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\right\rangle \end{aligned}$$

Průnikem obou podmínek dostáváme interval $I_1 = \left\langle 1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\right\rangle$. Dále z funkce $\ln x$ triviálně $I_2 = (0, \infty)$. Druhá mocnina je definována na $\mathbb{R}$, proto se $\ln^2 x$ nemusíme nyní více zabývat. Z funkce $\ln\left(\ln^2 x\right)$ musíme řešit podmínku $\ln^2 x > 0$. Druhá mocnina je vždy nezáporná a kladná je právě tehdy, když je její základ nenulový, v našem případě tedy když $\ln x \neq 0$, neboli $x \neq 1$. Zbývá určit, jaké případy vyloučí dělení, tedy vyřešit rovnici $\ln\left(\ln^2 x\right) = 0$.

$$\begin{aligned} \ln\left(\ln^2 x\right) &= 0 \qquad /\mathrm{e}^x \circ \\ \mathrm{e}^{\ln\left(\ln^2 x\right)} &= \mathrm{e}^0 \\ \ln^2 x &= 1 \\ \ln x &= \pm 1 \qquad /\mathrm{e}^x \circ \\ \mathrm{e}^{\ln x} &= \mathrm{e}^{\pm 1} \\ x &= \mathrm{e}^{\pm 1} \end{aligned}$$

Z toho plyne podmínka $x \neq \mathrm{e}^{\pm 1}$.

Zbývá jen definiční obor f, kterým je množina $I_1 \cap I_2 \setminus \{1, \mathrm{e}^{\pm 1}\}$, zapsat pouze pomocí sjednocení: $\mathcal{D}(f) = (0, \mathrm{e}^{-1}) \cup (\mathrm{e}^{-1}, 1) \cup \left(1, 1 + \sqrt{2}\right\rangle$ (protože $\mathrm{e} > 1 + \sqrt{2}$).

Cvičení

5.3. Nalezněte maximální definiční obor následujících funkcí v $\mathbb{R}$ a zapište jej jako sjednocení intervalů a izolovaných bodů.

(a) $f(x) = x^x$

(b) $f(x) = \arcsin \frac{1}{x}$

(c) $f(x) = \frac{\pi}{\sqrt{|2x-1| - |x+1| - 3}}$

(d) $f(x) = \sqrt{1 + \ln(1-x)} + \ln\left(\operatorname{arccotg} \frac{x^2-1}{2}\right)$

(e) $f(x) = \frac{\ln\left(\arccos\left(1 - x^2\right)\right)}{\sqrt{2 + 2^x - 4^x}}$

(f) $f(x) = \ln\left(\operatorname{tg} x - \frac{3}{\operatorname{tg} x}\right) + \sqrt[3]{x - \cos x}$

5.3 Hledání inverzní funkce

Hledání inverzní funkce je stejně jako řešení nerovnic a určování definičních oborů značně algoritmickou záležitostí. V podstatě nám stačí na prostých intervalech funkce f z předpisu $y = f(x)$ vyjádřit x, a následně, abychom podle konvencí zobrazovali z x do y, prohodit proměnné x a y.

Pro určování definičního oboru a oboru hodnot inverzní funkce připomínáme vztahy $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{H}(f)$ a $\mathcal{H}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f)$.

Poznámka. Jak již víme z minulé kapitoly, elementární funkce nejsou uzavřené na inverzi. Z toho důvodu tento algoritmus také nepůjde vždy provést (viz $x + \ln x = 0$). To, co zesložiťuje nalezení inverzní funkce, není skládání funkcí, ale aritmetické operace mezi jednotlivými funkcemi.

Úloha 11. Nalezněte maximální podintervaly $\mathbb{R}$, na nichž je prostá funkce

$$f(x) = 2 + 3 \arccos(2x - 1),$$

určete inverzní funkce k restrikcím f na tyto množiny a jejich definiční obory a obory hodnot.

Řešení. Ukážeme si základní algoritmus hledání inverzní funkce.

$$\begin{aligned}
y &= 2 + 3 \arccos(2x - 1) \qquad / - 2 \\
y - 2 &= 3 \arccos(2x - 1) \qquad / \div 3 \\
\frac{y-2}{3} &= \arccos(2x - 1) \qquad / \cos|_{\langle 0,\pi\rangle} \circ \\
\cos\frac{y-2}{3} &= \cos(\arccos(2x - 1)) \\
\cos\frac{y-2}{3} &= 2x - 1 \qquad / + 1 \\
\cos\frac{y-2}{3} + 1 &= 2x \qquad / \div 2 \\
\frac{\cos\frac{y-2}{3} + 1}{2} &= x, \text{ neboli pak } f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{x-2}{3} + 1\right)
\end{aligned}$$

Výpočtem jsme mimo předpisu inverzní funkce zjistili také to, že funkce f je na celém definičním oboru prostá, protože jsme ekvivalentními úpravami vyjádřili jednoznačně x pomocí y a dokázali tak, že je každému y přiřazeno jenom jedno x.

Zbývá určit definiční obor a obor hodnot. Obor hodnot je jednoduchý, u prosté funkce je definičním oborem původní funkce, takže $\mathcal{H}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f) = \langle 0, 1\rangle$. Prvním co nás napadne pro zjištění definičního oboru inverze, je algoritmus z podkapitoly 5.2. To je však ošidné – aplikujeme-li algoritmus na náš výsledný předpis, vyjde nám chybně, že definičním oborem je celé $\mathbb{R}$. Abychom se takovým chybám vyhnuli, rozebereme si předchozí postup hlouběji.

To, co ve skutečnosti děláme, když se snažíme vyjádřit x, je to, že „oloupáváme" jeho vnější funkce pomocí funkcí inverzních. Zadaná funkce f je totiž složením

$$f = (2 + x) \circ (3x) \circ \arccos(x) \circ (x - 1) \circ (2x)$$

(zkuste si, že dosazováním vnitřních funkcí zprava do vnějších za x dostáváme zadanou funkci). Úpravy, které jsme prováděli v předchozím postupu, jsou právě aplikací inverzních funkcí zvnějšku: první úpravou bylo odečtení dvojky, což je aplikace inverze k $2+x$, funkce $x-2$, na obě strany rovnice; další úprava, vydělení trojkou, je aplikace inverze k $3x$, funkce $\frac{x}{3}$. Třetí úpravou se zbavujeme funkce arccos, proto aplikujeme funkci k ní inverzní, což není celá funkce cos, ale pouze její restrikce $\cos|_{\langle 0,\pi\rangle}$. Následují dvě lineární úpravy analogické prvním dvěma.

Nyní pozor: aplikujeme-li na obě strany rovnice nějakou funkci, musíme uvážit, zda je to možné, tedy zda jsou strany rovnice v definičním oboru aplikované funkce. V našem případě tomu tak na pravé straně jistě možné je, protože aplikovanou funkci volíme právě jako inverzní k vnější funkci pravé strany. Na levé straně tomu tak ovšem být nemusí a požadavek, aby tomu tak bylo, nám stanovuje podmínku pro y. Co to konkrétně znamená: první dvě a poslední dvě úpravové (inverzní) funkce jsou definované na celém $\mathbb{R}$ a neplyne z nich tedy žádná podmínka. Třetí úpravová funkce je ovšem definována jen na $\langle 0,\pi\rangle$ a v tomto intervalu musí být levá strana, aby funkci bylo možno aplikovat. Dostáváme podmínku $0 \le \frac{y-2}{3} \le \pi$, která nám omezuje y a tím obor hodnot původní funkce. Provedeme-li tedy konjunkci všech podmínek vzniklých aplikací inverzních funkcí, které nejsou definované na celém $\mathbb{R}$ (neboť nemusí být jen jedna, jako v tomto případě), dostaneme obor hodnot původní funkce, a tím definiční obor funkce inverzní. V našem případě máme

$$\begin{aligned} 0 \le \frac{y-2}{3} &\le \pi \\ 0 \le y-2 &\le 3\pi \\ 2 \le y &\le 3\pi+2, \end{aligned}$$

takže $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{H}(f) = \langle 2, 3\pi+2\rangle$.

Úloha 12. Nalezněte maximální podintervaly $\mathbb{R}$, na nichž je prostá funkce

$$f(x) = x^2 + 2x + 5,$$

určete inverzní funkce k restrikcím f na tyto množiny a jejich definiční obory a obory hodnot.

Řešení. Tato funkce zajisté prostá není, ale k otázce, jak rozdělit restrikce, se dostaneme později. Postupujme tedy jako v minulé úloze.

$$\begin{aligned} y &= x^2+2x+5 && / \text{ doplnění na čtverec} \\ y &= x^2+2x+1-1+5 \\ y &= (x+1)^2-1+5 && /-4 \\ y-4 &= (x+1)^2 \end{aligned}$$

Dostáváme se do části, kdy budeme muset pracovat na dvou intervalech, protože vnější funkce není prostá. Definiční obor funkce f tedy rozdělíme podmínkami $x+1 \ge 0$ a $x+1 < 0$ na intervaly $\langle -1,\infty)$ a $(-\infty,-1\rangle$, na kterých je funkce $(x+1)^2$ prostá. Tím tedy dostáváme $f_1 := f|_{(-\infty,-1\rangle}$ a $f_2 := f|_{\langle -1,\infty)}$, ke kterým budeme hledat inverzní funkce.

$\underline{x \in (-\infty, 1\rangle}$:

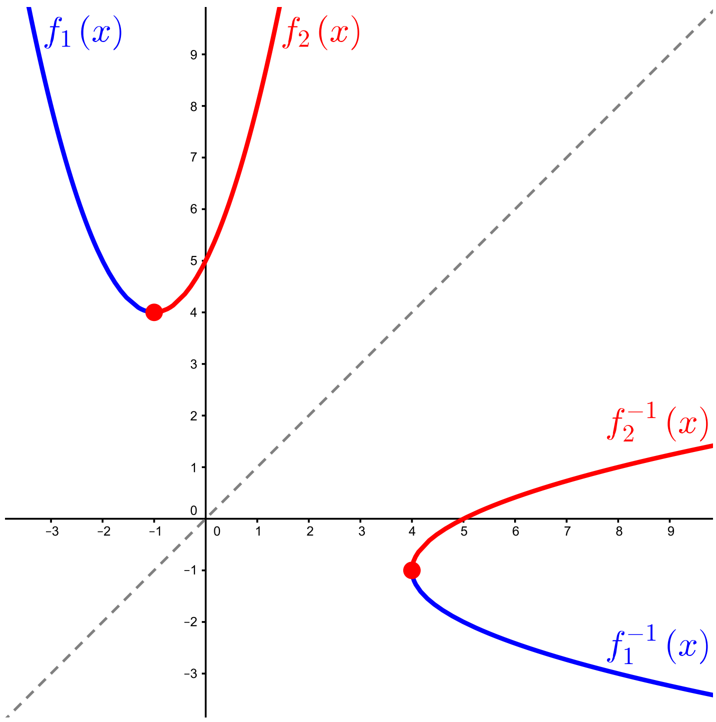
$$\begin{aligned} (x+1)^2 &= y-4 \\ x+1 &= -\sqrt{y-4} \\ x &= -\sqrt{y-4}-1 \\ f_1^{-1}(x) &= -\sqrt{x-4}-1 \end{aligned}$$

$\underline{x \in \langle -1, \infty)}$:

$$\begin{aligned} (x+1)^2 &= y-4 \\ x+1 &= \sqrt{y-4} \\ x &= \sqrt{y-4}-1 \\ f_2^{-1}(x) &= \sqrt{x-4}-1 \end{aligned}$$

Všimněte si, že ač jsme vlevo aplikovali funkci $-\sqrt{x}$ a vpravo $\sqrt{x}$, vyšlo v obou případech na levé straně $x+1$. To je v pořádku, protože na příslušných intervalech jde skutečně o inverzní funkce k x^2.

Nyní potřebujeme určit definiční obory a obory hodnot funkcí f_1^{-1} a f_2^{-1}. Obory hodnot určíme triviálně, jsou jimi definiční obory restrikcí f_1 a f_2, neboli $\mathcal{H}\big(f_1^{-1}\big) = (-\infty, 1\rangle$ a $\mathcal{H}\big(f_2^{-1}\big) = \langle -1, \infty)$. Definiční obory určíme postupem z minulé podkapitoly. Jediná podmínka pro y, společná pro obě restrikce, vychází z použití odmocninných funkcí se společným definičním oborem $\langle 0, \infty) : y - 4 \geq 0$. Vyjde nám $\mathcal{D}\big(f_1^{-1}\big) = \mathcal{D}\big(f_2^{-1}\big) = \langle 4, \infty)$. Pro představu, co jsme tímto postupem spočetli, přikládám tentokrát graf.



Úloha 13. Nalezněte maximální podintervaly $\mathbb{R}$, na nichž je prostá funkce

$$f(x) = \ln^2 x - \ln x + 1,$$

určete inverzní funkce k restrikcím f na tyto množiny a jejich definiční obory a obory hodnot.

Řešení. Budeme postupovat stejným způsobem jako v minulé úloze.

$$\begin{aligned}
y &= \ln^2 x - \ln x + 1 \\
y &= \ln^2 x - \ln x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 \\
y &= \left(\ln x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 \qquad \Big/ -\frac{3}{4} \\
y - \frac{3}{4} &= \left(\ln x - \frac{1}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

Stejně jako v předchozí úloze musíme rozhodnout, kdy je argument druhé mocniny větší nebo menší než nula, neboli řešíme nerovnici $\ln x - \frac{1}{2} \geq 0$.

$$\begin{aligned}
\ln x - \frac{1}{2} &\geq 0 \qquad \Big/ +\frac{1}{2} \\
\ln x &\geq \frac{1}{2} \qquad /\mathrm{e}^x \circ \\
\mathrm{e}^{\ln x} &\geq \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \\
x &\geq \sqrt{\mathrm{e}}
\end{aligned}$$

Dostáváme tedy restrikce funkce f, a to $f_1 := f|_{(-\infty, \sqrt{\mathrm{e}}\rangle}$ a $f_2 := f|_{\langle\sqrt{\mathrm{e}}, \infty)}$, na kterých pokračujeme v řešení.

$\underline{x \in \left(-\infty, \sqrt{\mathrm{e}}\right\rangle}$:

$$\begin{aligned}
\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)^2 &= y - \frac{3}{4} \\
\ln x - \frac{1}{2} &= -\sqrt{y - \frac{3}{4}} \\
\ln x &= \frac{1}{2} - \sqrt{y - \frac{3}{4}} \\
\mathrm{e}^{\ln x} &= \mathrm{e}^{\frac{1}{2} - \sqrt{y - \frac{3}{4}}} \\
x &= \mathrm{e}^{\frac{1}{2} - \sqrt{y - \frac{3}{4}}} \\
f_1^{-1}(x) &= \mathrm{e}^{\frac{1}{2} - \sqrt{x - \frac{3}{4}}}
\end{aligned}$$

$\underline{x \in \left\langle\sqrt{\mathrm{e}}, \infty\right)}$:

$$\begin{aligned}
\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)^2 &= y - \frac{3}{4} \\
\ln x - \frac{1}{2} &= \sqrt{y - \frac{3}{4}} \\
\ln x &= \frac{1}{2} + \sqrt{y - \frac{3}{4}} \\
\mathrm{e}^{\ln x} &= \mathrm{e}^{\frac{1}{2} + \sqrt{y - \frac{3}{4}}} \\
x &= \mathrm{e}^{\frac{1}{2} + \sqrt{y - \frac{3}{4}}} \\
f_2^{-1}(x) &= \mathrm{e}^{\frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}}}
\end{aligned}$$

Zbývá oběma restrikcím určit definiční obor a obor hodnot. Stejně jako v minulé úloze jsou obory hodnot inverzních funkcí pouze intervaly definičních oborů náležející příslušným restrikcím, tedy $\mathcal{H}\left(f_1^{-1}\right) = (-\infty, \sqrt{\mathrm{e}}\rangle$ a $\mathcal{H}\left(f_2^{-1}\right) = \langle\sqrt{\mathrm{e}}, \infty)$. Definiční obory určíme stejně jako v předchozí úloze. Po výpočtech pro definiční obory dostáváme $\mathcal{D}\left(f_1^{-1}\right) = \mathcal{D}\left(f_2^{-1}\right) = \left\langle\frac{3}{4}, \infty\right)$.

Úloha 14. Nalezněte maximální podintervaly $\mathbb{R}$, na nichž je prostá funkce

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x},$$

určete inverzní funkce k restrikcím f na tyto množiny a jejich definiční obory a obory hodnot.

Řešení. Prvně si určíme, že $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$. Dále budeme postupovat podobně jako v předchozí úloze – s tím, že tentokrát v úpravě na čtverec bude kromě x figurovat i y.

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^2+1}{x} && / \cdot x \\ 0 &= x^2 - xy + 1 && / \text{ doplnění na čtverec} \\ 0 &= \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{4} + 1 && \Big/ + \left(\frac{y^2}{4} - 1\right) \\ \frac{y^2}{4} - 1 &= \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Opět potřebujeme rozhodnout, kdy je argument druhé mocniny větší (menší) než nula. Pomůžeme si tím, že y máme vyjádřené v zadání.

$$\begin{aligned} x - \frac{y}{2} &= 0 \\ x - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+1}{x}\right) &= 0 \\ -\frac{x^2 - 2x^2 + 1}{2x} &= 0 \\ \frac{x^2-1}{2x} &= 0 \\ \frac{(x-1)(x+1)}{2x} &= 0 \end{aligned}$$

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$x - \frac{y}{2}$	$-$	$+$	$-$	$+$

Funkci opět rozdělíme na „kladné a záporné“ restrikce jako v minulých úlohách. $f_1 \coloneqq f|_{(-\infty,-1\rangle \cup (0,1\rangle}$ a $f_2 \coloneqq f|_{\langle -1,0) \cup \langle 1,\infty)}$.

$\underline{x \in (-\infty,-1\rangle \cup (0,1\rangle}$:

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{4} - 1 &= \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 \\ -\sqrt{\frac{1}{4}\left(y^2-4\right)} &= x - \frac{y}{2} \\ \frac{y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{y^2-4} &= x \\ \frac{x - \sqrt{x^2-4}}{2} &= f_1^{-1}(x) \end{aligned}$$

$\underline{x \in \langle -1,0) \cup \langle 1,\infty)}$:

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{4} - 1 &= \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 \\ \sqrt{\frac{1}{4}\left(y^2-4\right)} &= x - \frac{y}{2} \\ \frac{y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{y^2-4} &= x \\ \frac{x + \sqrt{x^2-4}}{2} &= f_2^{-1}(x) \end{aligned}$$

Když máme určené inverze k restrikcím, zbývá nám opět určit definiční obor a obor hodnot. Ty určíme stejně jako v předchozích úlohách, v případě definičního oboru řešením podmínky $\frac{y^2}{4} - 1 \geq 0$.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\left(f_1^{-1}\right) &= (-\infty,-2\rangle \cup \langle 2,\infty)\,, & \mathcal{D}\left(f_2^{-1}\right) &= (-\infty,-2\rangle \cup \langle 2,\infty)\,, \\ \mathcal{H}\left(f_1^{-1}\right) &= (-\infty,-1\rangle \cup (0,1\rangle\,, & \mathcal{H}\left(f_2^{-1}\right) &= \langle -1,0) \cup \langle 1,\infty)\,. \end{aligned}$$

Úloha 15. Nalezněte maximální podintervaly $\mathbb{R}$, na nichž je prostá funkce

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2},$$

určete inverzní funkce k restrikcím f na tyto množiny a jejich definiční obory a obory hodnot.

Řešení. Jelikož tato funkce vypadá odlišně od těch, které jsme doposud řešili, převedeme funkci na takovou, kterou již řešit umíme.

$$\begin{aligned}
y &= \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \\
2y &= \mathrm{e}^x + \frac{1}{\mathrm{e}^x} \qquad / \cdot \mathrm{e}^x \\
2y\mathrm{e}^x &= \left(\mathrm{e}^x\right)^2 + 1 \\
0 &= \left(\mathrm{e}^x\right)^2 - 2y\left(\mathrm{e}^x\right) + 1
\end{aligned}$$

Můžeme si všimnout podobnosti funkce s kvadratickými funkcemi, které jsme již řešili. Nadále budeme postupovat analogicky jako u těchto úloh.

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{e}^x\right)^2 - 2y\mathrm{e}^x + 1 &= 0 \qquad / \text{ doplnění na čtverec} \\
\left(\mathrm{e}^x\right)^2 - 2y\mathrm{e}^x + y^2 - y^2 + 1 &= 0 \\
\left(\mathrm{e}^x - y\right)^2 - y^2 + 1 &= 0 \qquad / + \left(y^2 - 1\right) \\
\left(\mathrm{e}^x - y\right)^2 &= y^2 - 1
\end{aligned}$$

Opět musíme rozhodnout, kdy je argument druhé mocniny nezáporný. Musíme tedy řešit nerovnici $\mathrm{e}^x - y \geq 0$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x - y &= 0 \qquad \Big/ y = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \\
\mathrm{e}^x - \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} &= 0 \\
\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} &= 0 \qquad \Big/ + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2} \\
\frac{\mathrm{e}^x}{2} &= \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad / \cdot 2 \\
\mathrm{e}^x &= \frac{1}{\mathrm{e}^x} \qquad / \cdot \mathrm{e}^x \\
\left(\mathrm{e}^x\right)^2 &= 1 \\
\mathrm{e}^{2x} &= \mathrm{e}^0 \\
2x &= 0 \\
x &= 0
\end{aligned}$$

x	$\mathbb{R}^-$	$\mathbb{R}^+$
$\mathrm{e}^x - y$	$-$	$+$

Dostáváme restrikce f, a to $f_1 \coloneqq f|_{(-\infty,0\rangle}$ a $f_2 \coloneqq f|_{\langle 0,\infty)}$.

$$\begin{aligned}
&\underline{x \in \mathbb{R}_0^-:} \\
(\mathrm{e}^x - y)^2 &= y^2 - 1 \\
\mathrm{e}^x - y &= -\sqrt{y^2-1} \\
\mathrm{e}^x &= y - \sqrt{y^2-1} \\
\ln \mathrm{e}^x &= \ln\left(y - \sqrt{y^2-1}\right) \\
x &= \ln\left(y - \sqrt{y^2-1}\right) \\
f_1^{-1}(x) &= \ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&\underline{x \in \mathbb{R}_0^+:} \\
(\mathrm{e}^x - y)^2 &= y^2 - 1 \\
\mathrm{e}^x - y &= \sqrt{y^2-1} \\
\mathrm{e}^x &= y + \sqrt{y^2-1} \\
\ln \mathrm{e}^x &= \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right) \\
x &= \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right) \\
f_2^{-1}(x) &= \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)
\end{aligned}$$

Definiční obor a obor hodnot určíme analogicky předchozím úlohám. U definičního oboru tentokrát budeme mít kromě společné podmínky $y^2 - 1 \geq 0$ ještě různé podmínky plynoucí z aplikace logaritmu, u f_1: $y - \sqrt{y^2-1} > 0$ a u f_2: $y + \sqrt{y^2-1} > 0$. Ty v obou případech vyloučí záporná y, dospět z nerovnic k tomuto výsledku je však dobrým testem znalosti ekvivalentních úprav (nápověda: nelze jen mechanicky převést jeden člen na druhou stranu a umocnit, je třeba kontrolovat znaménka).

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}\left(f_1^{-1}\right) &= \langle 1, \infty), \\
\mathcal{H}\left(f_1^{-1}\right) &= \mathbb{R}_0^-,
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\mathcal{D}\left(f_2^{-1}\right) &= \langle 1, \infty), \\
\mathcal{H}\left(f_2^{-1}\right) &= \mathbb{R}_0^+.
\end{aligned}$$

Poznámka. Funkce $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ z předchozí úlohy je již zmiňovanou funkcí ze 4. kapitoly, a to konkrétně hyperbolickým kosinem (zn. $\cosh x$). Její inverze $f^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ na $\langle 1, \infty)$ je hyperbolometrická funkce, tzv. argument hyperbolického kosinu (zn. $\operatorname{arg\,cosh} x$).

Úloha 16. Nalezněte maximální podintervaly $\mathbb{R}$, na nichž je prostá funkce

$$f(x) = x^2\left(x^2 - 2\right),$$

určete inverzní funkce k restrikcím f na tyto množiny a jejich definiční obory a obory hodnot.

Řešení. Jak záhy zjistíme, jelikož má tento polynom 4. stupně pro některé obrazy y až čtyři vzory, budeme muset postupně sestrojit čtyři restrikce.

$$\begin{aligned}
y &= x^2\left(x^2 - 1\right) \\
y &= x^4 - 2x^2 \qquad / \text{ doplnění na čtverec} \\
y &= x^4 - 2x^2 + 1 - 1 \\
y + 1 &= \left(x^2 - 1\right)^2
\end{aligned}$$

Nyní musíme opět rozhodnout, pro která x je $x^2 - 1 \geq 0$.

$$\begin{aligned}
x^2 - 1 &\geq 0 \\
(x-1)(x+1) &\geq 0
\end{aligned}$$

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$x^2 - 1$	$+$	$-$	$+$

Nadále budeme pracovat na intervalech $(-1,1)$ a $(-\infty,-1\rangle \cup \langle 1,\infty)$.

$$\begin{array}{ll}
\underline{x \in \langle -1,1\rangle}: & \underline{x \in (-\infty,-1\rangle \cup \langle 1,\infty)}: \\
\qquad \big(x^2-1\big) = y+1 & \qquad \big(x^2-1\big) = y+1 \\
\qquad x^2-1 = -\sqrt{y+1} & \qquad x^2-1 = \sqrt{y+1} \\
\qquad x^2 = 1-\sqrt{y+1} & \qquad x^2 = 1+\sqrt{y+1}
\end{array}$$

Další postup je nám již notoricky známý a jeho dokončení necháváme na čtenáři; upozorníme pouze, že definiční obor zde vznikne z konjukce dvou podmínek vzniklých při dvojí aplikaci odmocninné funkce. Pro kontrolu nyní sepíšeme výsledky.

$$\begin{array}{lll}
f_1^{-1}(x) = -\sqrt{1-\sqrt{x+1}}, & \mathcal{D}\big(f_1^{-1}\big) = \langle -1,0\rangle, & \mathcal{H}\big(f_1^{-1}\big) = \langle -1,0\rangle, \\
f_2^{-1}(x) = \sqrt{1-\sqrt{x+1}}, & \mathcal{D}\big(f_2^{-1}\big) = \langle -1,0\rangle, & \mathcal{H}\big(f_2^{-1}\big) = \langle 0,1\rangle, \\
f_3^{-1}(x) = -\sqrt{1+\sqrt{x+1}}, & \mathcal{D}\big(f_3^{-1}\big) = \langle -1,\infty), & \mathcal{H}\big(f_3^{-1}\big) = (-\infty,-1\rangle, \\
f_4^{-1}(x) = \sqrt{1+\sqrt{x+1}}, & \mathcal{D}\big(f_4^{-1}\big) = \langle -1,\infty), & \mathcal{H}\big(f_4^{-1}\big) = \langle 1,\infty).
\end{array}$$

Cvičení

5.4. Nalezněte maximální podintervaly $\mathbb{R}$, na nichž jsou prosté následující funkce, určete inverzní funkce k restrikcím funkcí na tyto množiny a jejich definiční obory a obory hodnot.

(a) $f(x) = 2 - 3\mathrm{e}^{4x-1}$

(b) $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$

(c) $f(x) = x - 3 + \frac{4}{x+3}$

(d) $f(x) = \log_2(4x) \cdot \log_2 x$

(e) $f(x) = \ln^2 x^2$

5.4 Transformace grafů funkcí

Transformace grafů funkcí nám umožňují nalézat grafy funkcí, které vznikají složením funkcí, jejichž grafy známe (viz podkapitola 4.1), s jednoduchými, především lineárními funkcemi, a určovat jejich vlastnosti. Budeme vždy vycházet z nějaké nám známé funkce f, u které budeme provádět lineární transformace, nahrazovat argument či funkční hodnotu absolutní hodnotou, nebo převracet funkční hodnotu. Můžeme si tyto jednoduché transformace také představit jako skládání naší funkce f s lineární funkcí (v libovolném pořadí), funkcí absolutní hodnota (v libovolném pořadí), nebo lineárně lomenou funkcí (jako funkcí vnější).

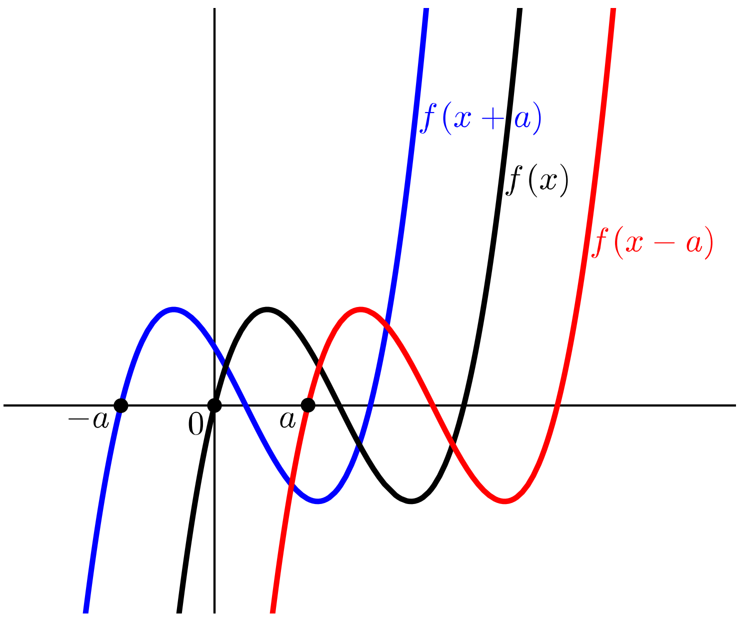
5.4.1 Posunutí

Nejjednodušší transformací grafu je jeho posunutí. Posunutím se graf nijak nedeformuje, pouze mění svojí polohu.

Definice 60 (Posunutí ve směru osy x)**.** Posunutí funkce $f\colon y = f(x)$ o $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve směru osy x je složením funkcí $f \circ g$, kde $g(x) = x - a$. Neboli

$$f\colon y = f(x - a).$$

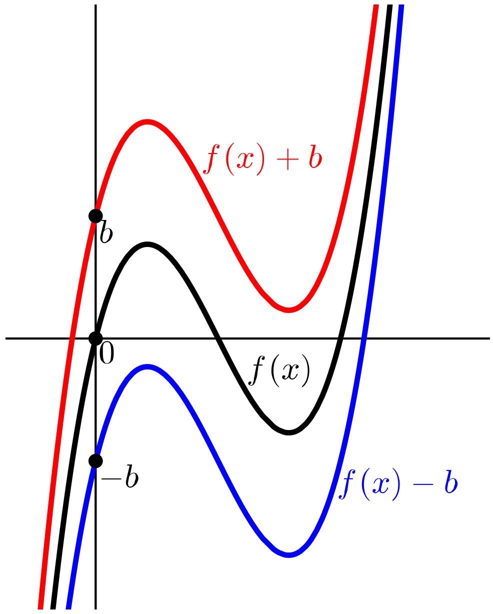
Je-li a kladné, graf se posouvá o a doprava, je-li záporné, pak o $|a|$ doleva. Posunutím grafu v kladném směru dostáváme $y = f(x - a)$. Při dosazení je patrné, že posunutý graf se pro $x = a$ chová jako původní graf pro $x = 0$, pro $x = a + 1$ se chová jako původní pro $x = 1$ apod. Jinými slovy, posunutý graf se chová jako původní teprve, až když je o a dál, protože se a a $-a$ odečtou. Analogické zdůvodnění bychom provedli pro posunutí v záporném směru.



Definice 61 (Posunutí ve směru osy y)**.** Posunutí funkce $f\colon y = f(x)$ o $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve směru osy y je složením funkcí $g \circ f$, kde $g(x) = x + b$. Neboli

$$f\colon y = f(x) + b.$$

Pro posunutí ve směru osy y je zdůvodnění jasnější než v předchozím případě. Dá se totiž říct, že k funkční hodnotě ve všech x z definičního oboru pouze přičítáme hodnotu b.



Bývá nejasné, proč se při posunutí v kladném směru osy x počítá se zápornou hodnotou, zatímco při posunutí v kladném směru osy y s kladnou. Analogii mezi oběma posunutími můžeme najít početně. Stačí k výrazu $y = f(x) + b$ přičíst $-b$. Tím se nám hodnota posunutí přesune k proměnné y, v jejímž směru se posouváme. Dostáváme výraz $y - b = f(x)$, který je již analogický vzorci pro posunutí ve směru osy x. Analogická úvaha se dá provést pro posunutí v záporném směru.

Oba typy posunutí můžeme v rámci jedné funkce libovolně kombinovat, a tím funkci posunout na jakékoliv místo. Pokud chceme např. graf funkce f posunout o vektor $(2, 4)$, pak provedeme transformaci $f\colon y = f(x - 2) + 4$.

5.4.2 Kontrakce a dilatace

Ať již budeme provádět kontrakci či dilataci ve směru osy x nebo y, vždy se bude jednat o jakési stlačení nebo roztáhnutí. Graf se deformuje, a můžeme si to představit tak, že tlačíme nebo taháme za „konec" některé z os, díky čemuž se graf rovnoměrně smršťuje či natahuje jako nějaká pružina.

Definice 62 (Kontrakce a dilatace ve směru osy x)**.** Kontrakce či dilatace funkce $f\colon y = f(x)$ ve směru osy x je složením funkcí $f \circ g$, kde $g(x) = cx$; $c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.[(2)]Neboli

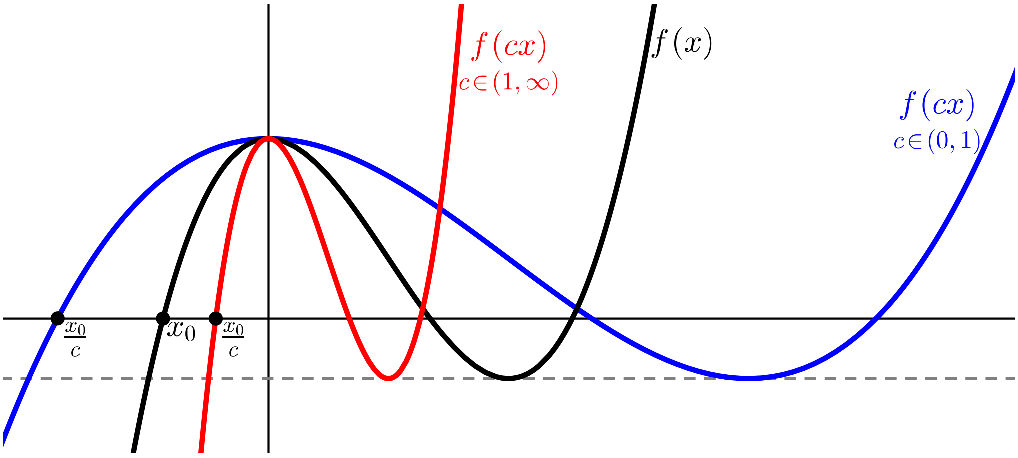
$$f\colon y = f(cx); c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}.$$

Pokud $c \in (1, \infty)$, pak hovoříme o kontrakci, naopak pokud $c \in (0, 1)$, pak hovoříme o dilataci.

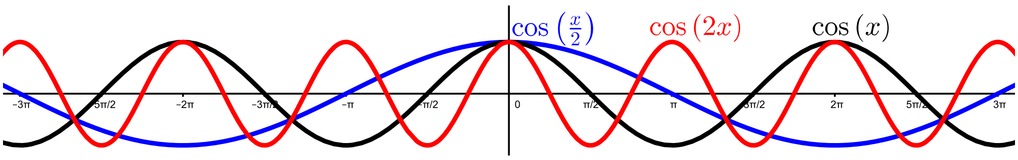
[(2)]Abych nemusel trojitě rozlišovat o jaký případ se jedná, vypouštím z definice $c = 1$. Pokud bychom jedničku připustili, nejednalo by se o kontrakci ani dilataci funkce, ale jednalo by se o funkci původní, protože $f(1x) = f(x)$. Stejně tak v následující definici.

Jinými slovy, deformovaná funkce nabývá v $\frac{1}{c}$-násobku x funkční hodnoty, kterou původní funkce nabývala pro x (jinak řečeno, každý bod $[x, y]$ původního grafu se zobrazí na bod $\left[\frac{x}{c}, y\right]$, neboli se posune c-krát blíž ose y). Proto se také pro $c \in (0, 1)$ prodlužuje a naopak pro $c \in (1, \infty)$ stlačuje.

Zároveň z předchozího poznatku dosazením $x = 0$ vyplývá, že celý graf „pruží“ vzhledem k „pevné“ ose y, na které se případný průsečík s grafem funkce nemění.



Kontrakce a dilatace ve směru osy x nemění extrémy funkce, pouze se změní bod, ve kterém funkce nabývá maxima a minima. Pokud je funkce periodická, pak se její (základní) perioda p změní na $\frac{p}{c}$.

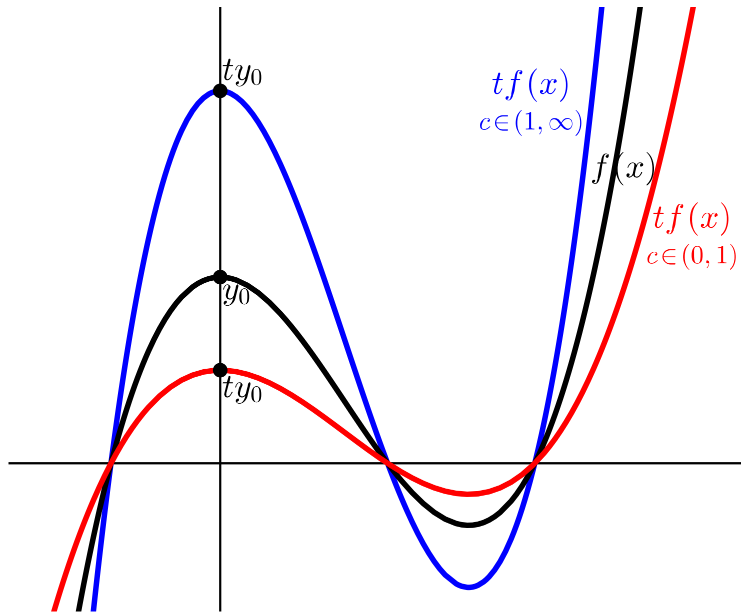


Definice 63 (Kontrakce a dilatace ve směru osy y)**.** Kontrakce či dilatace funkce $f\colon y = f(x)$ ve směru osy y je složením funkcí $g \circ f$, kde $g(x) = tx$; $t \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Neboli

$$f\colon y = tf(x); t \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}.$$

Pokud $t \in (0, 1)$, pak hovoříme o kontrakci, naopak pokud $t \in (1, \infty)$, pak hovoříme o dilataci.

Kontrakce a dilatace ve směru osy y je jasnější než předchozí případ ve směru osy x, protože se jedná o pouhé vynásobení všech funkčních hodnot hodnotou t. Z toho důvodu také zůstávají průsečíky s osou x na svém místě (jelikož $0t = 0$), zatímco ostatní body se k ose x stlačují nebo naopak od ní prodlužují.



Tyto transformace mění extrémy funkce na jejich d-násobek, ale nemění se body, ve kterých jich nabývá. Díky tomu se také nemění intervaly monotonie a vypouklosti. Periodické funkce nemění svojí periodu, jak tomu bylo v předchozím případě, ale naopak se mění jejich amplituda (nejvyšší hodnota, kterou funkce v rámci periody nabývá).

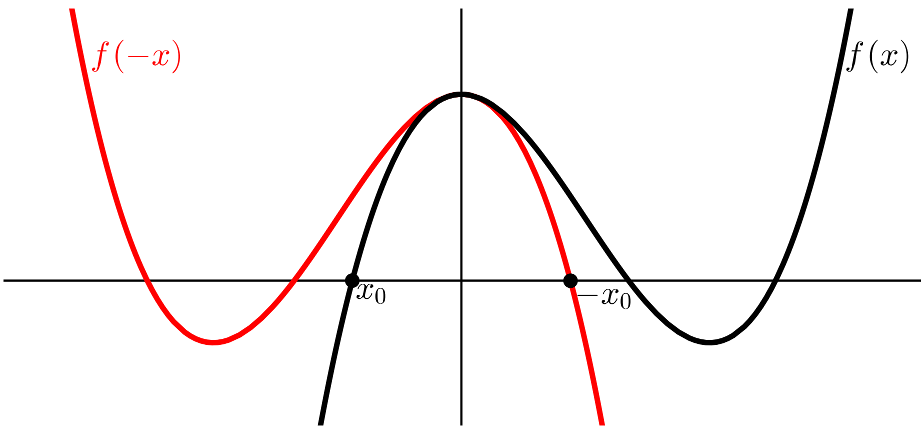
Kontrakce a dilatace ve směru osy x i y neovlivňují paritu a prostotu funkce. Proto budeme-li je libovolně kombinovat, a tím funkce různě stlačovat a prodlužovat ve všech směrech, bude např. prostá funkce stále prostou.

5.4.3 Překlopení

Definice 64 (Překlopení podle osy y)**.** Překlopení funkce $f\colon y = f(x)$ podle osy y je složením funkcí $f \circ g$, kde $g(x) = -x$. Neboli

$$f\colon y = f(-x).$$

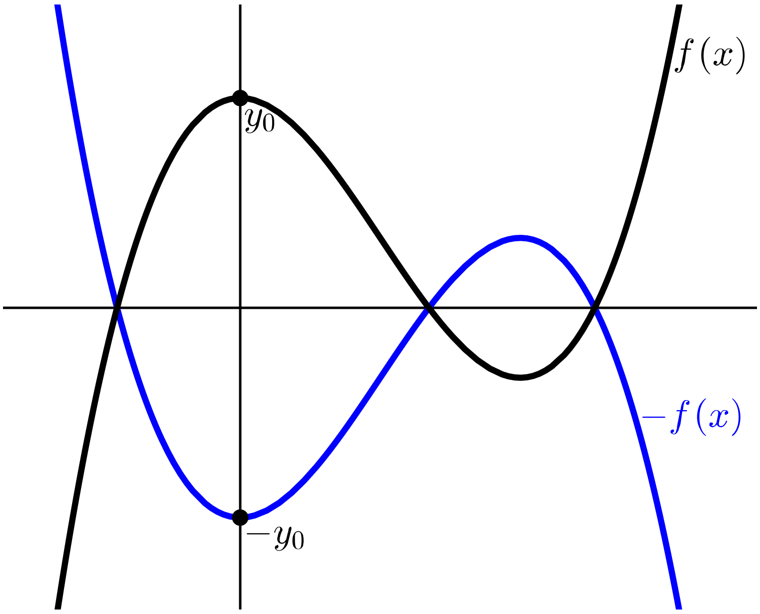
Na této transformaci není nutné hledat nic světoborného. Funkce si v každém bodě x bere hodnotu v $-x$ (jestliže existuje). Proto jsou funkce $f(x)$ a $f(-x)$ osově souměrné podle osy y.



Definice 65 (Překlopení podle osy x)**.** Překlopení funkce $f\colon y = f(x)$ podle osy x je složením funkcí $g \circ f$, kde $g(x) = -x$. Neboli

$$f\colon y = -f(x).$$

Funkce $f(x)$ a $-f(x)$ jsou osově souměrné podle osy x.

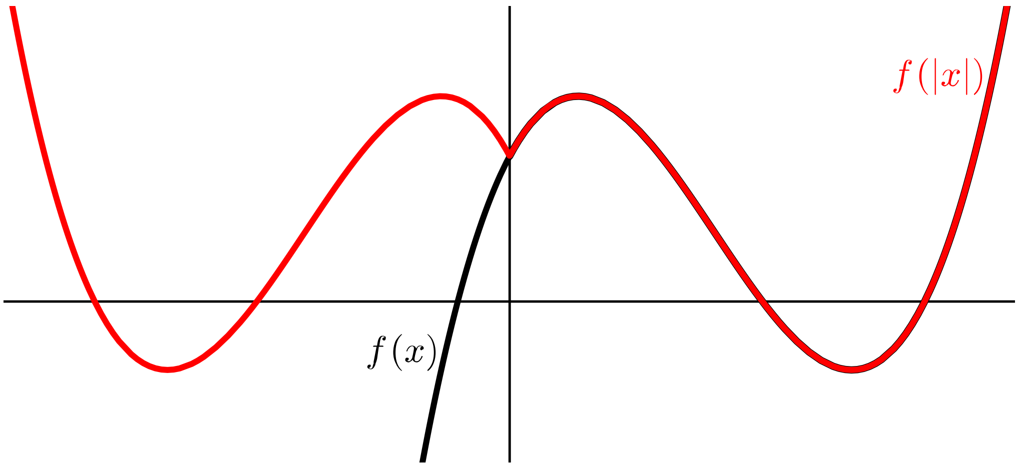


5.4.4 Absolutní hodnota

Definice 66 (Absolutní hodnota argumentu)**.** Absolutní hodnota argumentu funkce $f\colon y = f(x)$ je složením funkcí $f \circ g$, kde $g(x) = |x|$. Neboli

$$f\colon y = f(|x|).$$

Pokud je $x \geq 0$, nic se pro naší funkci nemění, jelikož absolutní hodnota z nezáporného čísla je to číslo samé. Změna nastává pro $x < 0$, protože zde $|x| = -x$, tedy číslo opačné. Z toho vyplývá, že zatímco graf funkce náležející nezáporné poloose x zůstává na svém místě, tak graf funkce náležející záporné poloose x vznikne jeho zrcadlovým překlopením přes osu y. Důsledkem těchto poznatků je věta následující pod grafem.



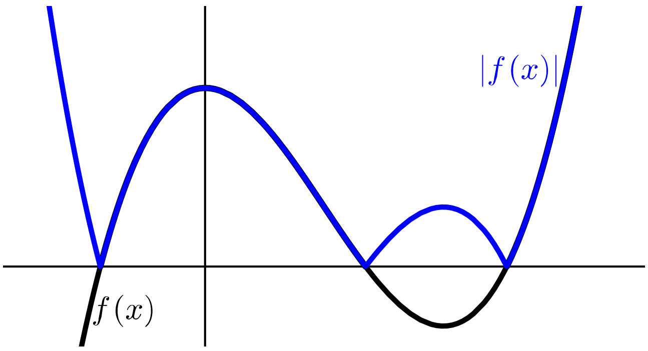
Věta 24. Funkce $f(|x|)$ je sudá funkce.

Důkaz. Triviálně. Protože $|-x| = |x|$, pak i $f(|-x|) = f(|x|)$. cbd

Definice 67 (Absolutní hodnota funkční hodnoty)**.** Absolutní hodnota funkční hodnoty funkce $f\colon y = f(x)$ je složením funkcí $g \circ f$, kde $g(x) = |x|$. Neboli

$$f\colon y = |f(x)|.$$

Jelikož se jedná o absolutní hodnotu funkční hodnoty, tak pro nulové body a kladné hodnoty funkce se nic nemění, a zůstávají na svém místě. Jedinou změnou je, pokud $f(x) < 0$, potom $|f(x)| := -f(x)$. Jinými slovy, absolutní hodnota funkční hodnoty „překlopí“ vše, co je pod osou, nad osu.



Věta 25. Jestliže je funkce $f(x)$ funkce lichá, potom je $|f(x)|$ funkce sudá.

Důkaz. Pokud je f lichá, pak pro ni platí, že $-f(x) = f(-x)$. Pouhou aplikací absolutní hodnoty na obě strany rovnosti dostáváme $|f(x)| = |f(-x)|$, neboli definici funkce sudé. cbd

5.4.5 Převrácená hodnota funkční hodnoty

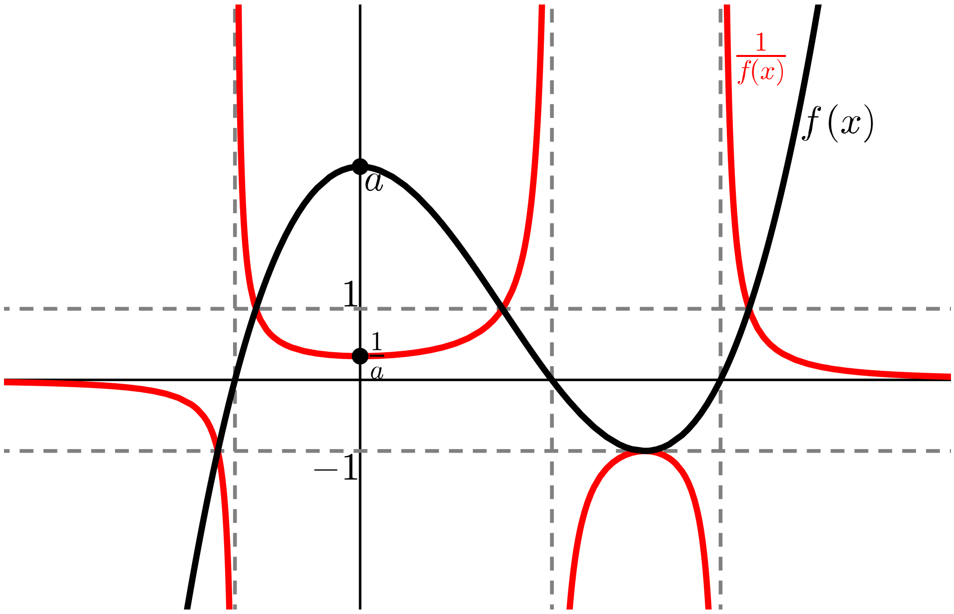
Definice 68 (Převrácená hodnota funkční hodnoty)**.** Převrácená hodnota funkční hodnoty funkce $f\colon y = f(x)$ je složením funkcí $g \circ f$, kde $g(x) = \frac{1}{x}$. Neboli

$$f\colon y = \frac{1}{f(x)}.$$

Určit hodnotu v jednom bodu funkce s převrácenou funkční hodnotou není nic těžkého. Pouze z hodnoty a uděláme $\frac{1}{a}$. Větším problémem je odvodit celý graf této transformace, protože to již není tak triviální jako u ostatních případů. Z tohoto důvodu si shrneme pár bodů, podle kterých při vytváření grafu postupujeme:

1. pro společné body grafů $f(x)$ a $\frac{1}{f(x)}$: $f(x) = \pm 1 \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = \pm 1$,
2. pro funkční hodnoty $f(x)$ nad osou x: $f(x) > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{f(x)} < 1$, $0 < f(x) < 1 \Rightarrow \frac{1}{f(x)} > 1$,
3. pro funkční hodnoty $f(x)$ pod osou x: $f(x) < -1 \Rightarrow -1 < \frac{1}{f(x)} < 0$, $-1 < f(x) < 0 \Rightarrow \frac{1}{f(x)} < -1$,

4. pro funkční hodnoty $f(x)$ kolem nuly a hodnoty jdoucí do nekonečna: $f(x) = 0^{\pm} \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = \pm\infty$, $f(x) = \pm\infty \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = 0^{\pm}$.[3]



Nesmíme v tomto případě opomenout definiční obor funkce. Zatímco lineární funkce a funkce absolutní hodnota jsou definované na celém $\mathbb{R}$, tak funkce $g(x) = \frac{1}{x}$ je definovaná pouze pro $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Z toho vyplývá, že

$$\mathcal{D}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \mathcal{D}(f) \setminus \{x; f(x) = 0\}.$$

Na rozdíl od již zmiňovaných transformací se v tomto případě netransformují jednoznačně i vlastnosti funkce. To, že je původní funkce např. konvexní, ještě neznamená, že její převrácená hodnota funkční hodnoty bude konkávní. Jelikož tedy nemůžeme z transformace vyvodit všechny vlastnosti, jedná se pouze o přibližné znázornění transformované funkce.

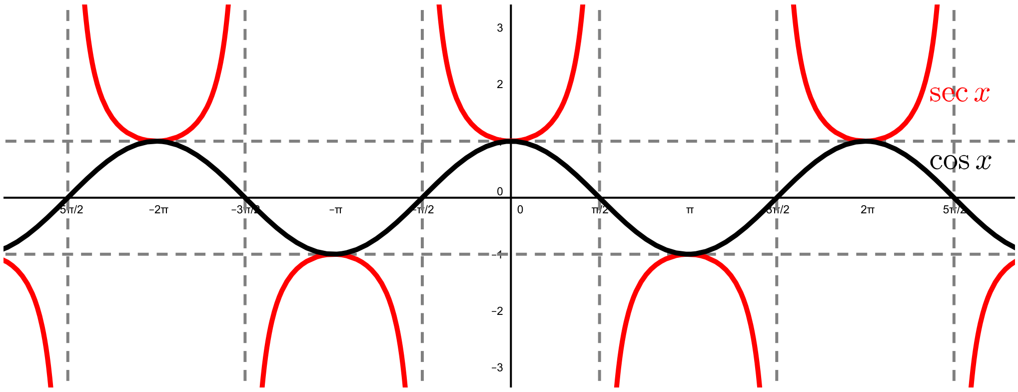
Převrácená hodnota funkční hodnoty funkce zachovává prostotu, periodicitu a paritu funkce, ale přehazuje monotonii (ovšem pouze bodově, např. identická funkce je rostoucí na celém definičním oboru, $\frac{1}{x}$ je klesající v každém bodě definičního oboru, ale ne na definičním oboru). Pokud je funkce na intervalu neklesající (nerostoucí) a nemění na něm znaménko, pak je na něm funkce převrácená hodnota funkční hodnoty nerostoucí (neklesající).

Úloha 17. Načrtněte graf funkce sekans, která je dána předpisem

$$f(x) = \sec x := \frac{1}{\cos x}.$$

Řešení. Jedná se pouze o převrácenou hodnotu funkční hodnoty funkce $\cos x$, která je navíc omezená a periodická. Budeme postupovat podle kroků z podkapitoly 5.5 na periodě $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\rangle$. Funkce mají společné body pro $x = 0$ a $x = \pi$. Jelikož je jinak mimo nulové body $\cos x$ vždy mezi $(0, 1)$ nebo $(-1, 0)$, tak je sekans na intervalu $(1, \infty)$ nebo $(-\infty, 1)$. V nulových bodech $\cos x$ není sekans definovaný, a v jejich okolích jde sekans do $\infty \cdot \operatorname{sgn}(\cos x)$.

[3] Značením $0^{\pm}$ se myslí hodnoty, které se blíží z kladné $(+)$ nebo záporné $(-)$ strany libovolně blízko k 0, ale nenabývají ji.



Cvičení

5.5. Načrtněte graf funkce kosekans, která je dána předpisem
$$f(x) = \frac{1}{\sin x}.$$

5.4.6 Úlohy

Jak jsme si již mohli všimnout např. u posunutí funkce, jednotlivé transformace můžeme libovolně kombinovat. Tímto způsobem lze tvořit různé funkce, u kterých chceme, aby splňovaly nějaké požadavky.

My se však většinou setkáme s úlohami, ve kterých naopak dostaneme transformovanou nám známou funkci, a budeme chtít určit její vlastnosti. V takových případech půjdeme krok po kroku z nám známé funkce, jíž umíme nakreslit graf a určit vlastnosti, a budeme si všímat, jak se její graf a vlastnosti transformacemi mění.

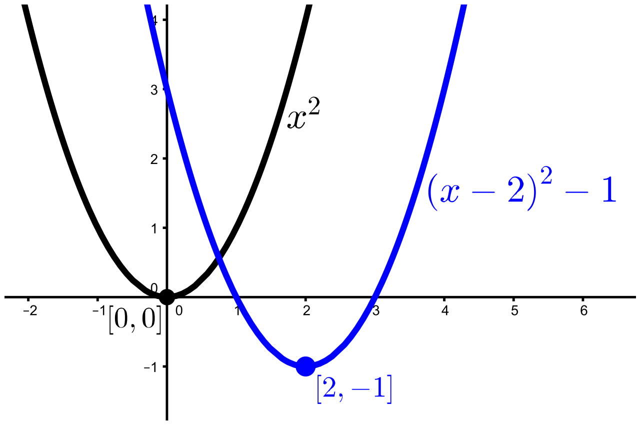
Poznámka. V následujících úlohách a cvičeních bude často řečeno „určete vlastnosti funkce“. Bude tím myšleno určit $\mathcal{D}(f)$, $\mathcal{H}(f)$, $\sup f$, $\inf f$, $\max f$, $\min f$, maximální intervaly monotonie a vypouklosti a rozhodnout, zda je funkce sudá, lichá nebo periodická a jestli je prostá.

Úloha 18. Načrtněte graf funkce f dané předpisem
$$f(x) = \frac{1}{-x^2 + 4x - 3}.$$

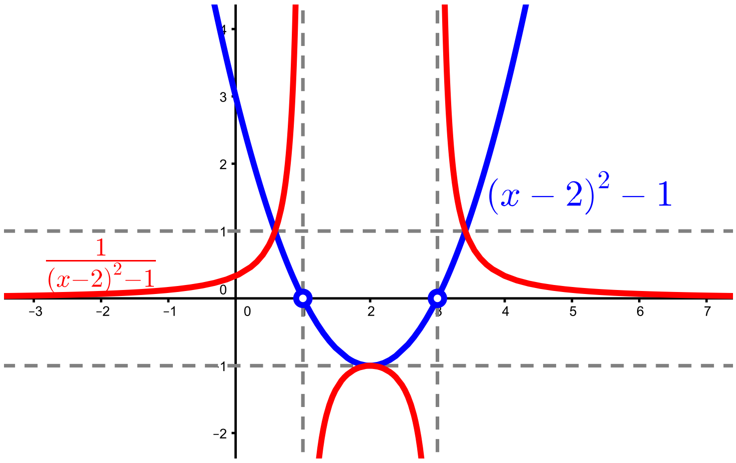
Řešení. V první řadě si výraz ve jmenovateli upravíme tak, abychom u největší mocniny měli $+1$, tedy
$$f(x) = \frac{1}{-x^2 + 4x - 3} = \frac{1}{-1\left(x^2 - 4x + 3\right)} = -\frac{1}{x^2 - 4x + 3}.$$

Je patrné, že se bude jednat o nějakou převrácenou hodnotu funkční hodnoty funkce $g(x) = x^2 - 4x + 3$. Ze střední školy víme, že se bude jednat o graf paraboly. Abychom určili její tvar a významné body, převedeme předpis funkce g do těchto dalších tvarů:
$$g_1(x) = (x-1)(x-3), \qquad g_2(x) = (x-2)^2 - 1.$$

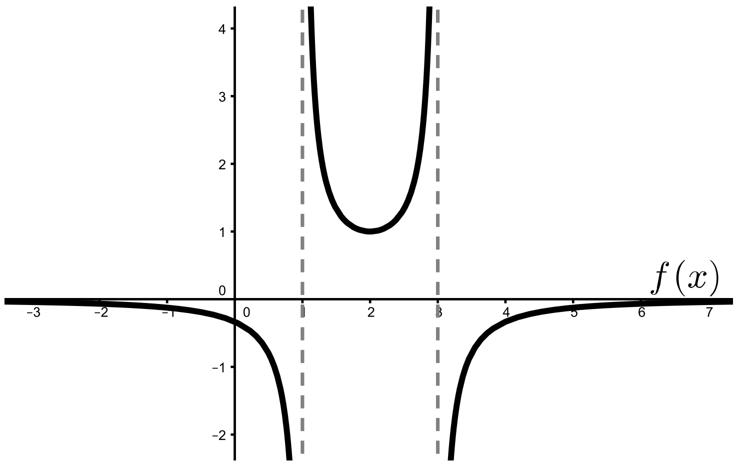
Z g je na první pohled patrný průsečík s osou y, $P_y = [0, 3]$ a z g_1 vidíme $P_{x_1} = [1, 0]$ a $P_{x_2} = [3, 0]$. Transformacemi určíme z g_2 vrchol paraboly. Vyjdeme z nám známé funkce x^2, kterou posuneme o vektor $(2, -1)$.



I z grafu můžeme vidět, že $P_y = [0,3]$, $P_{x_1} = [1,0]$ a $P_{x_2} = [3,0]$. Když máme graf funkce g, můžeme načrtnout funkci $\frac{1}{g(x)}$.



Jelikož funkce $f(x) = -\frac{1}{g(x)}$, stačí pouze graf funkce $\frac{1}{g(x)}$ převrátit podle osy x.



Úloha 19. Funkce f je dána předpisem

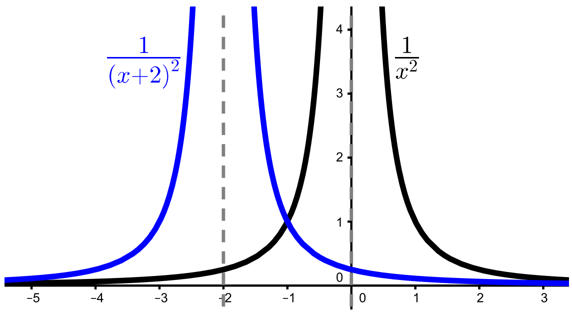
$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 4}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která má výraz vpravo smysl. Načrtněte graf funkce f a určete její vlastnosti.

Řešení. Jelikož v této úloze máme určit vlastnosti, nemůžeme postupovat jako v minulé úloze pomocí převrácené hodnoty funkční hodnoty, ale budeme postupovat pouze pomocí lineárních transformací. Pomůžeme si úpravou výrazu $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$. Dostáváme

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 4} = \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x-(-2))^2}.$$

Vyjdeme z grafu funkce $g(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$, jejíž graf a vlastnosti známe. Abychom dostali funkci f, bude stačit funkci g posunout o -2 ve směru osy x.



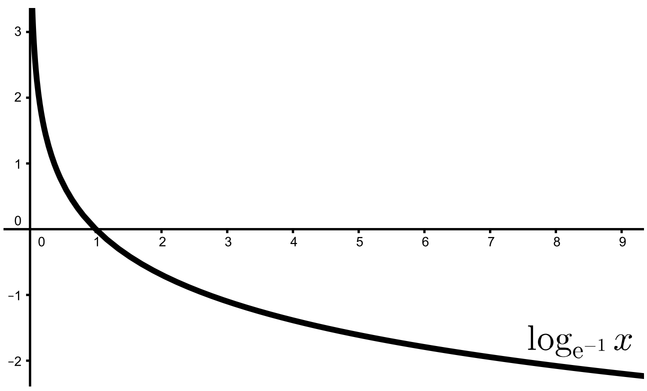
Stačí jen shrnout vlastnosti funkce f vycházející z transformací a vlastností původní funkce. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}^+$, $\inf(f) = 0$, $\sup(f) = \infty$, $\max(f)$ a $\min(f)$ neexistují, f je rostoucí na $(-\infty, -2)$ a klesající na $(-2, \infty)$, f je ryze konvexní na $(-\infty, -2)$ a na $(-2, \infty)$, není lichá, sudá, periodická ani prostá.

Úloha 20. Funkce f je dána předpisem

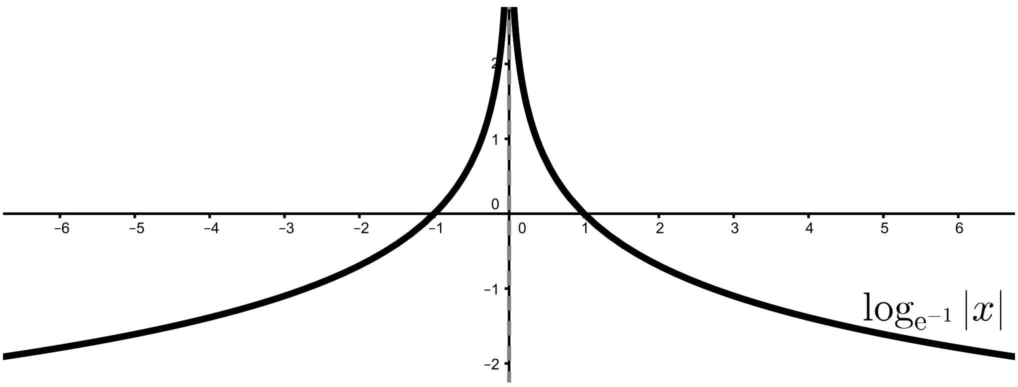
$$f(x) = |\log_{e^{-1}} |x - e||$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která má výraz vpravo smysl. Načrtněte graf funkce f a určete její vlastnosti.

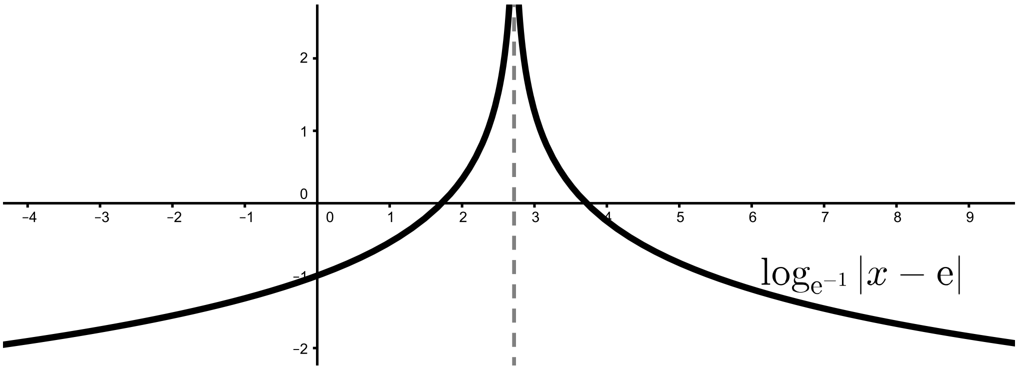
Řešení. Vyjdeme z grafu funkce $\log_{e^{-1}} x$. Jedná se o graf klesající funkce, protože $e^{-1} \in (0, 1)$. Přesnější náčrt nám umožní to, že je tato funkce shodná s funkcí $-\ln x$, o které víme, že má v $x = 1$ tečnu $y = 1 - x$, protože $\ln x$ má tečnu $y = x + 1$.



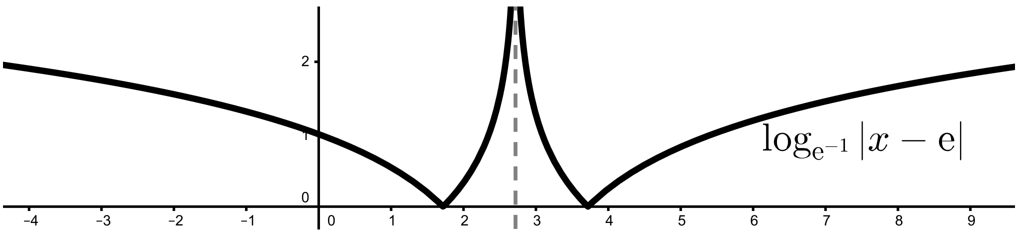
Nejprve provedeme vnitřní transformace, a to od výchozí funkce, neboli od vnějších funkcí argumentu k vnitřním. V prvním kroku tedy přejdeme od x k $|x|$.



Ve druhé kroku funkci posuneme ve směru osy x tak, že $x \mapsto x - \mathrm{e}$.



Tím jsou vnitřní transformace hotový a přejdeme k transformacím vnějším. Zde je jen jedna (absolutní hodnota), jinak opět postupujeme od původní funkce, neboli od vnitřních k vnějším.



Nyní jen dáme dohromady vlastnosti funkce f. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\mathrm{e}\}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}_0^+$, $\min(f) = \inf(f) = 0$, $\sup(f) = \infty$, $\max(f)$ neexistuje, f je klesající na $(-\infty, \mathrm{e}-1\rangle$ a na $(\mathrm{e}, \mathrm{e}+1\rangle$ a rostoucí na $\langle \mathrm{e}-1, \mathrm{e})$ a na $\langle \mathrm{e}+1, \infty)$, f je ryze konvexní na $\langle \mathrm{e}-1, \mathrm{e})$ a na $(\mathrm{e}, \mathrm{e}+1\rangle$ a ryze konkávní na $(-\infty, \mathrm{e}-1\rangle$ a na $\langle \mathrm{e}+1, \infty)$, není lichá, sudá, periodická ani prostá.

Úloha 21. Funkce f je dána předpisem

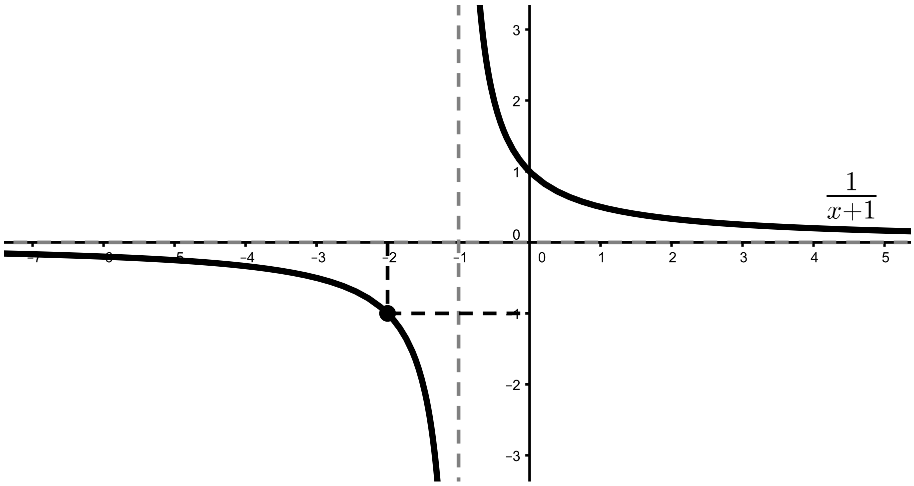
$$f(x) = \left| \frac{|x| - 1}{|x| + 1} \right|$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která má výraz vpravo smysl. Načrtněte graf funkce f a určete její vlastnosti.

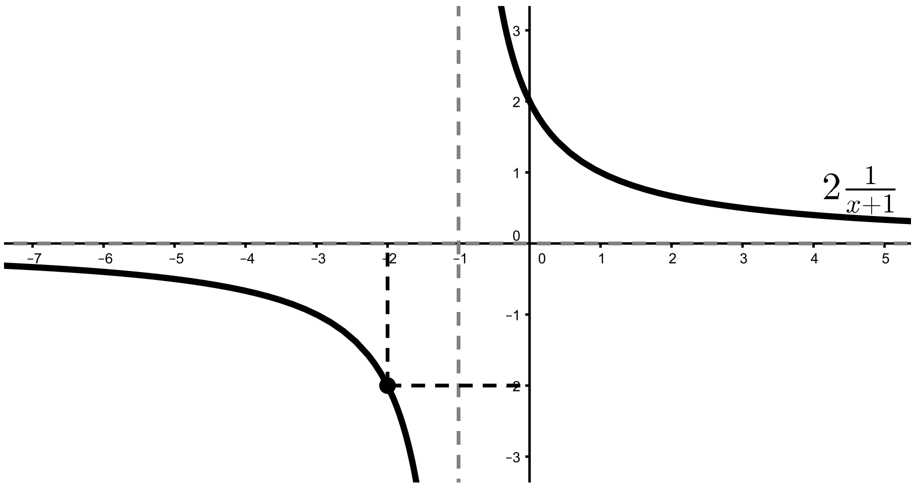
Řešení. Předpis funkce musíme v každém případě upravit tak, aby obsahoval pouze jedno x, jinak její graf nemůžeme zkonstruovat transformacemi ze známých funkcí.

$$\left| \frac{|x| - 1}{|x| + 1} \right| = \left| \frac{|x| + 1 - 2}{|x| + 1} \right| = \left| 1 + \frac{-2}{|x| + 1} \right| = \left| -2 \frac{1}{|x| + 1} + 1 \right|$$

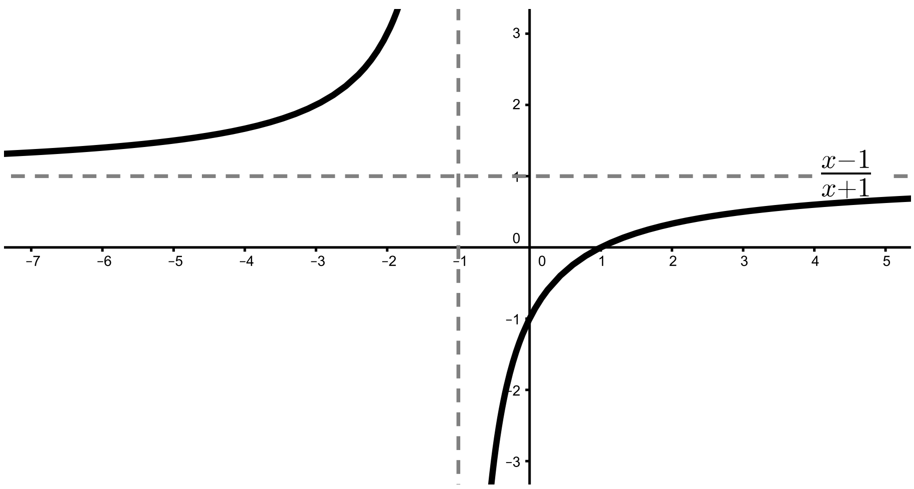
Vyjdeme z grafu funkce $\frac{1}{x+1}$, což je graf funkce $\frac{1}{x}$ posunutý o -1 ve směru osy x.



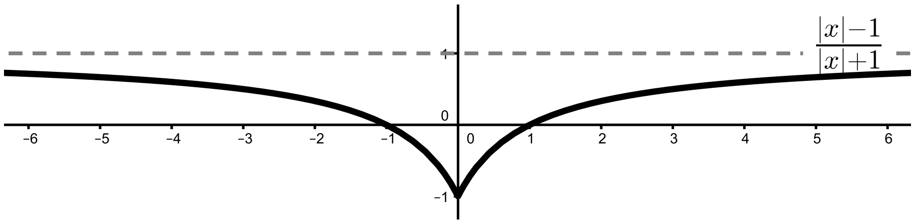
Násobení konstantou -2 rozložíme na dva kroky: násobení dvojkou a převrácení kolem osy x. Nejprve tedy vynásobíme funkční hodnotu dvojkou, čímž se funkce „natáhne“ na dvojnásobek ve směru osy y.



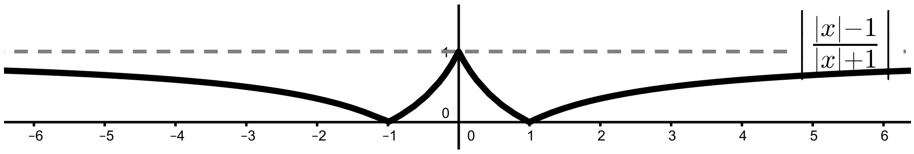
Nyní funkci převrátíme přes osu x a posuneme o 1 ve směru osy y. Dostáváme funkci $-2\frac{1}{x+1} + 1 = \frac{x-1}{x+1}$.



V pátém kroku substituujeme v argumentu funkce $x \mapsto |x|$.



V posledním kroku provedeme absolutní hodnotu celé funkční hodnoty, takže dostaneme zadanou funkci f.



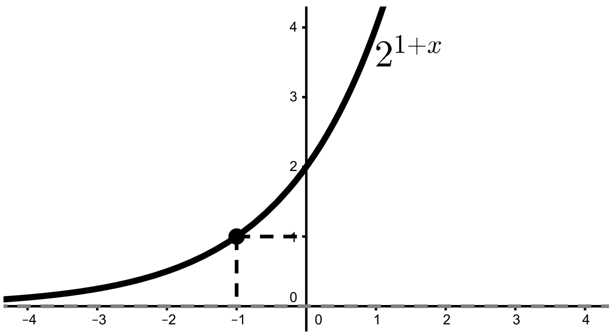
$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \langle 0, 1\rangle$, $\min(f) = \inf(f) = 0$ a $\max(f) = \sup(f) = 1$, f je rostoucí na $\langle -1, 0\rangle$ a na $\langle 1, \infty)$ a klesající na $(-\infty, -1\rangle$ a na $\langle 0, 1\rangle$, f je ryze konkávní na $(-\infty, -1\rangle$ a na $\langle 1, \infty)$ a ryze konvexní na $\langle -1, 0\rangle$ a na $\langle 0, 1\rangle$ (pozor, ne na $\langle -1, 1\rangle$), je sudá a není periodická ani prostá.

Úloha 22. Funkce f je dána předpisem

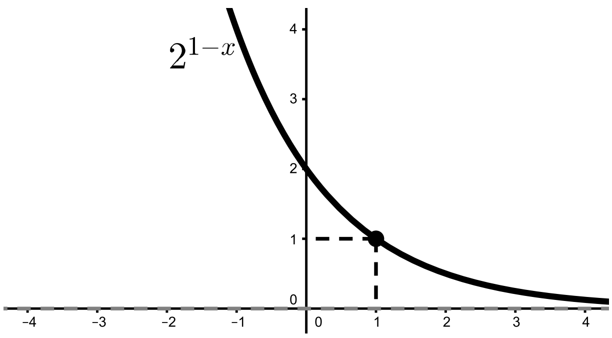
$$f(x) = 1 - 2^{1-|x|}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která má výraz vpravo smysl. Načrtněte graf funkce f a určete její vlastnosti.

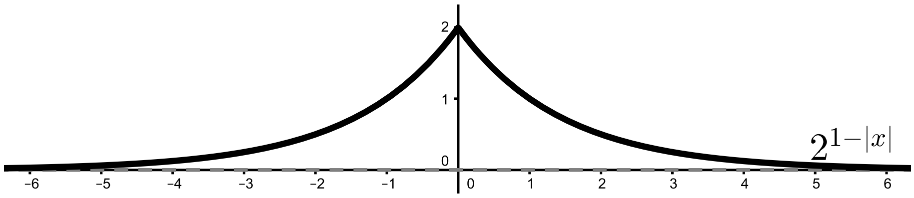
Řešení. Začneme u funkce 2^x, jejíž graf známe. Posunutím o -1 ve směru osy x vznikne funkce 2^{1+x}. Tento krok bychom také mohli provést jako vynásobení funkční hodnoty dvěma, protože $2^{1+x} = 2 \cdot 2^x$, obecně se však posunutí provádějí lépe než kontrakce a dilatace.



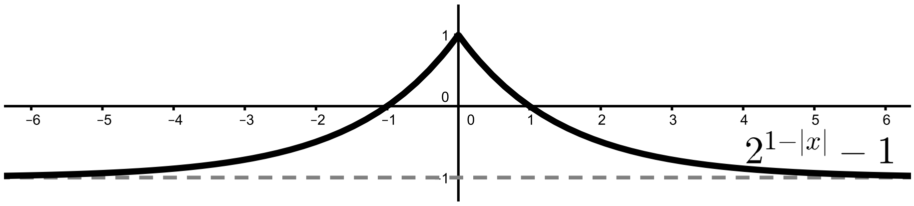
Ve druhém kroku převrátíme graf funkce podle osy y přiřazením $x \mapsto -x$.



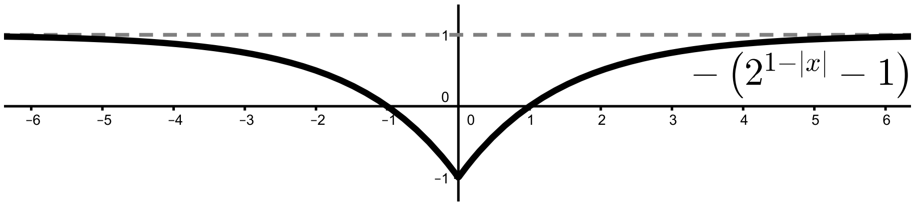
Následuje další krok, ve kterém potřebujeme dostat do argumentu absolutní hodnotu, tedy $x \mapsto |x|$.



Jelikož funkci f můžeme zapsat také jako $f(x) = -\left(2^{1-|x|} - 1\right)$, tak v dalším kroku posuneme funkci o -1 ve směru osy y.



Zbývá poslední krok, a to celou funkci převrátit přes osu x, čímž dostáváme graf funkce f.



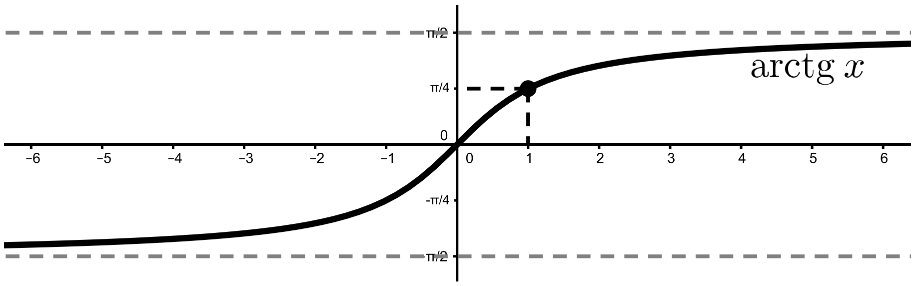
$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \langle -1, 1)$, $\min(f) = \inf(f) = -1$, $\sup f = 1$, $\max(f)$ neexistuje, f je klesající na $\mathbb{R}_0^-$ a rostoucí na $\mathbb{R}_0^+$, f je ryze konkávní na $\mathbb{R}_0^-$ a na $\mathbb{R}_0^+$, je sudá a není periodická ani prostá.

Úloha 23. Funkce f je dána předpisem

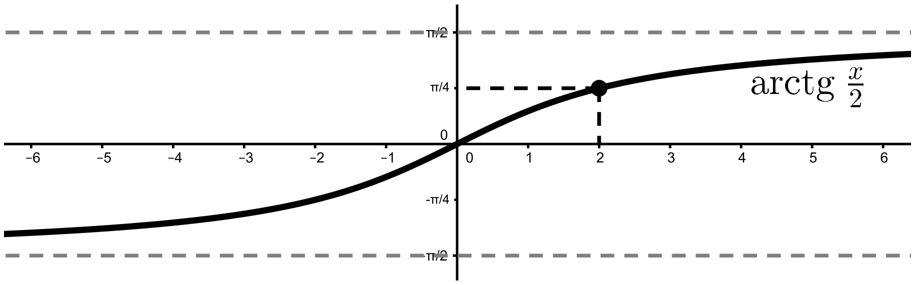
$$f(x) = \left| \frac{\pi}{4} - \left| \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right| \right|$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která má výraz vpravo smysl. Načrtněte graf funkce f a určete její vlastnosti.

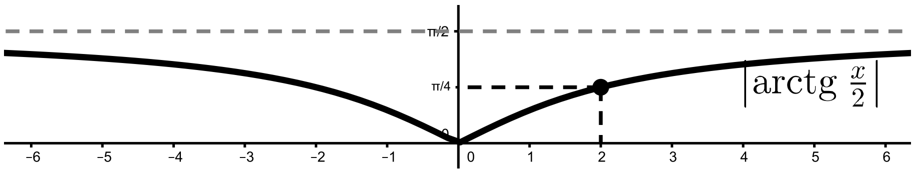
Řešení. Pro připomenutí, jak vypadá funkce arkustangens, si nejprve načrtneme její graf. Zároveň vyznačíme významný bod, ve kterém $\operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{4}$, jehož transformaci budeme sledovat z důvodů, které vyplynou během řešení úlohy.



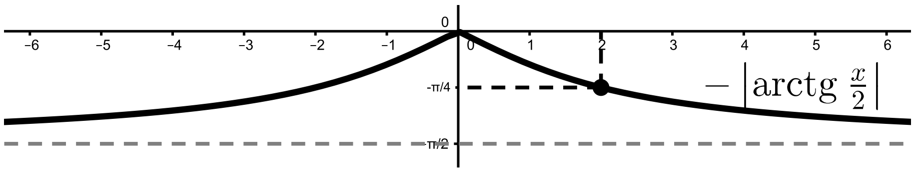
V prvním kroku dilatujeme na dvojnásobek graf funkce ve směru osy x, tedy $x \mapsto \frac{x}{2}$.



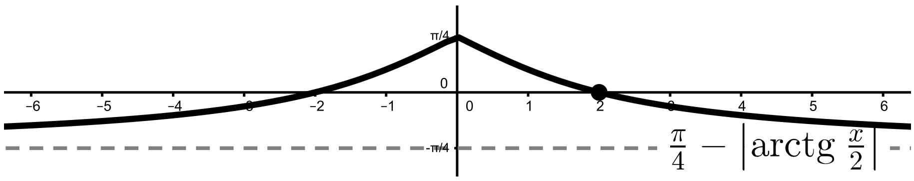
Ve druhém kroku provedeme absolutní hodnotu funkční hodnoty, čímž se z liché funkce stane funkce sudá.



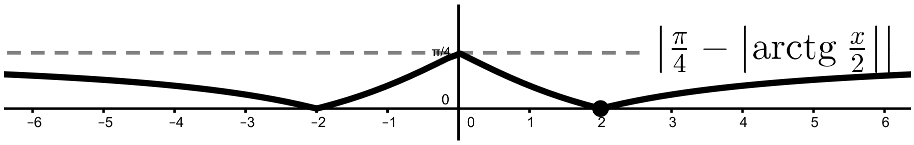
V dalším kroku převrátíme graf funkce podle osy x. Jak jsme si již mohli všimnout v dřívějších úlohách, na intervalech, kde je funkce rostoucí (klesající) nebo konvexní (konkávní), je funkce převrácená podle osy x klesající (rostoucí) nebo konkávní (konvexní).



V předposledním kroku přičteme k funkční hodnotě $\frac{\pi}{4}$. Díky tomu se bod, který jsme si zpočátku vyznačili, stává kořenem funkce. Jelikož je funkce sudá, kořeny funkce jsou $x_{1,2} = \pm 2$.



V posledním kroku stačí pouze provést absolutní hodnotu z celé funkce, tedy všechny funkční hodnoty, které jsou záporné, „překlopit nad" osu x.



$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \langle 0, 1\rangle$, $\min(f) = \inf(f) = 0$, $\max(f) = \sup(f) = 1$, f je klesající na $(-\infty, -2\rangle$ a na $\langle 0, 2\rangle$ a rostoucí na $\langle -2, 0\rangle$ a na $\langle 2, \infty)$, f je ryze konkávní na $(-\infty, -2\rangle$ a na $\langle 2, \infty)$ a ryze konvexní na $\langle -2, 0\rangle$ a na $\langle 0, 2\rangle$, je sudá a není periodická ani prostá.

Cvičení

5.6. U následujících funkcí načrtněte jejich grafy a určete jejich vlastnosti pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která má výraz vpravo smysl.[4]

(a) $f(x) = \left|2 - \sqrt{|x| + 1}\right|$

(b) $f(x) = \left|\log_2 (1 - x)^2\right|$

(c) $f(x) = |2 - 4 \cdot 2^x|$

(d) $f(x) = -\left|\frac{2}{3}\pi - \arccos(x + 1)\right|$

(e) $f(x) = \left|\frac{\pi}{3} - \operatorname{arctg}(2|x|)\right|$

[4] Ve výsledcích tohoto cvičení nejsou ze zřejmých rozsahových důvodů grafy funkcí. Předpokládám, že čtenáři bude jako kontrola stačit seznam vlastností jednotlivých funkcí, graf si může vykreslit pomocí softwarových nástrojů jako GeoGebra, MAW nebo WolframAlpha.

Výsledky cvičení

Kapitola 1

1.1.	Jako implikace $\alpha \Rightarrow \beta$
1.2.	Implikaci $\Rightarrow$
1.3.	$A \vee B$
1.4.a	Alespoň jeden pravoúhlý trojúhelník není rovnoramenný.
1.4.b	Nejvýše sedm lidí ze třídy má jedničku z matematiky.
1.5.a	$\neg\varepsilon = \exists x \in \mathbb{R}\colon x \leq 2$
1.5.b	$\neg\varphi = \exists x \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N}\colon\ (n \geq x) \vee (x \geq n+1)$
1.5.c	$\neg\chi = \exists x_1, x_2 \in M\colon\ (x_1 < x_2)) \wedge (f(x_1) \geq f(x_2))$
1.6.	Nepravdivá negace $\neg\eta = \exists n \in \mathbb{N}\, \forall x \in \mathbb{R}\colon x \geq n$
1.7.a	Např. N: Jsem věcí. P: Jsem stolem.
1.7.b	Např. N: Žiji v Evropě. P: Žiji v Praze.
1.7.c	Např. N: V peněžence mám alespoň 299 korun. P: V peněžence mám 1000 korun.
1.7.d	Např. N: $\forall n \in \mathbb{N} : 3 \mid n$. P: $\forall n \in \mathbb{N} : 30 \mid n$.

Kapitola 2

2.1.a	$A = \{1, 2, 3, 4\}$
2.1.b	$B = \mathbb{N}$
2.1.c	$C = \left\{\frac{k-1}{2}\pi; k \in \mathbb{N}_0\right\}$
2.1.d	$D = \{\{3\}\}$
2.2.	Není, prvky množiny E jsou tři čísla, z nichž žádné není 10^2, a dvouprvková množina.
2.3.	$P_F = \{\emptyset, \{\pi\}, \{\mathrm{e}\}, \{0\}, \{\pi, \mathrm{e}\}, \{\pi, 0\}, \{\mathrm{e}, 0\}, \{\pi, \mathrm{e}, 0\}\}$
2.4.	$G = \{\{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 6\}, \{4, 5\}\}$
2.5.a	$H_1 \cup H_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\} = H_3$
2.5.b	$H_1 \cap H_2 = \{3\}$
2.5.c	$H_1 \triangle H_2 = \{1, 2, 4, 5\}$
2.5.d	$H_1 \setminus (H_2 \setminus H_3) = \{1, 2, 3\} = H_1$
2.5.e	$H_1 \times H_2 = \{[1, 3], [1, 4], [1, 5], [2, 3], [2, 4], [2, 5], [3, 3], [3, 4], [3, 5]\}$
2.6.	Alergické dívky ze 3.B.
2.7.a	Všechny body 1. kvadrantu.
2.7.b	Přímky dané předpisem $p\colon y = k; k \in \mathbb{Z}$.
2.8.	Lichoběžník o vrcholech $[2, 1], [6, 1], [6, 6], [2, 2]$ vyjma úsečky s krajními body $[2, 2]$ a $[6, 6]$.
2.9.	Všechny body $\mathbb{R}^2$, které v grafu leží nad přímkou $y = \frac{x}{2}$.
2.10.a	$Z_1 \cap Z_2 \cap Z_3 = (4, 6)$
2.10.b	$Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3 = \mathbb{R}$

2.10.c	$Z_1 \cap (Z_2 \cup Z_3) = (-\infty, -1\rangle \cup \langle 3, \infty)$
2.11.	Rovnost platí, protože výraz nalevo i napravo se rovná $\{0\}$.
2.12.	V obou případech rovnost platí, neboť množiny horních a dolních závor jsou v obou případech stejné.
2.13.a	$\sup M_2 = \sup M_1 + 2$, $\inf M_2 = \inf M_1 + 2$
2.13.b	$\sup M_2 = 2 - \inf M_1$, $\inf M_2 = 2 - \sup M_2$
2.13.c	$\sup M_2 = -\frac{\inf M_2}{2}$, $\inf M_2 = -\frac{\sup M_1}{2}$
2.14.	Nejedná, např. pro $\triangle$: $[\triangle, 3]$ a $[\triangle, 4]$.
2.15.a	P_1 je zobrazení.
2.15.b	P_2 není zobrazení.
2.15.c	P_3 je zobrazení prosté.
2.16.	$f \circ g = \{[1,5],[2,3],[3,6],[5,6]\}$ a $g \circ f = \{[1,4],[2,6],[3,4],[7,6]\}$.

Kapitola 3

3.1.a	Je zobrazení, není funkce.
3.1.b	Je funkce.
3.1.c	Je zobrazení, není funkce.
3.1.d	Je funkce.
3.1.e	Není zobrazení, proto nemůže jít o funkci.
3.2.	Nejedná se o předpis funkce, protože např. pro $x = 1$ existují dvě $y_1 = 1$ a $y_2 = -1$, které předpis splňují.
3.3.	$\mathcal{D}(f) = \langle -3, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, 8\rangle$, $\mathcal{H}(f) = (0, 5\rangle$.
3.4.	$(f \circ g)(x) = -2x^2 + 4x - 3$; $(g \circ f)(x) = 4x^2 + 1$
3.5.a	Nerovnají se, g je definována pouze na $\mathbb{R}_0^+$, zatímco f na $\mathbb{R}$.
3.5.b	Rovnají se.
3.5.c	Nerovnají se, f není definována v 0, zatímco g ano.
3.6.	$h(-1) = 2$, $h(0) = 0$, $h(1) = -2$.
3.7.	Klesající na $\langle -3, 2)$ a $\langle 0, 1)$, rostoucí na $(-2, 0\rangle$ a $(1, 8\rangle$.
3.8.	(a) sudá i lichá; (b) sudá; (c) lichá; (d) lichá; (e) není sudá ani lichá; (f) lichá; (g) sudá.
3.9.	Funkce není sudá ani lichá, ale lze ji zúžit na funkci sudou $g\|_{\langle -5,5\rangle \setminus \{-2,4\}}$, případně rozšířit $g \cup \{[-4, 0], [2, 0]\}$.
3.10.	Pokud jsou obě sudé, tak sudá, pokud jsou obě liché, tak lichá, jinak obecně paritu nemá, není-li alespoň jedna z funkcí f, g sudá i lichá.
3.11.	(a) omezená zdola; (b) omezená shora; (c) není omezená shora ani zdola; (d) omezená.
3.12.	$\inf(f) = 0$, $\min(f)$ neexistuje a $\sup(f) = \max(f) = 5$.

Kapitola 4

4.1.a	$f(x) = \frac{1}{2}x$
4.1.b	$g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$
4.1.c	$h(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x + 1$
4.2.	Funkce je klesající.
4.3.	2, 8, -3.
4.4.	$\arcsin\left(\pm\frac{1}{2}\right) = \pm\frac{\pi}{6}$, $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi$ a $\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$.
4.5.	$\operatorname{arctg}(\pm 1) = \pm\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arccotg}(-1) = \frac{3}{4}\pi$ a $\operatorname{arccotg}(1) = \frac{\pi}{4}$.
4.6.	$\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$

4.7.a	f_1 je racionální funkce.
4.7.b	f_2 je transcendentní elementární funkce.
4.7.c	f_3 je transcendentní elementární funkce.
4.7.d	f_4 je iracionální funkce.
4.7.e	f_5 je transcendentní elementární funkce.
4.7.f	f_6 je racionální (polynomická) funkce.
4.7.g	f_7^{-1} není elementární funkce.
4.7.h	f_8^{-1} je transcendentní elementární funkce.

Kapitola 5

5.1.a	$x \in \langle -1, 0\rangle \cup \left\langle \frac{1}{2}, 1\right\rangle$
5.1.b	$x \in \left(0, \frac{3}{4}\right)$
5.1.c	$x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}-3\right\rangle \cup (-3,-2) \cup \left\langle \sqrt{3}-3, 2\right) \cup (3,\infty)$
5.1.d	$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left\langle -\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right) \cup \{\pi+2k\pi\}\right)$
5.1.e	$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle \frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3}{2}\pi+2k\pi\right\rangle\right) \smallsetminus \left\{\pm\frac{\pi}{2}\right\}$
5.2.	Má, jelikož $f(-1)\cdot f(0) = -2 < 0$.
5.3.a	$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^+$
5.3.b	$\mathcal{D}(f) = (-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty)$
5.3.c	$\mathcal{D}(f) = (-\infty, -1) \cup (5, \infty)$
5.3.d	$\mathcal{D}(f) = (-\infty, 1-\mathrm{e}^{-1}\rangle$
5.3.e	$\mathcal{D}(f) = \left\langle -\sqrt{2}, 0\right) \cup (0,1)$
5.3.f	$\mathcal{D}(f) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left(-\frac{\pi}{3}+k\pi, k\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)\right)$
5.4.a	$f^{-1}(x) = \frac{1}{4}\left(\ln\frac{2-x}{3}+1\right)$, $\mathcal{D}(f^{-1}) = (-\infty, 2)$ a $\mathcal{H}(f^{-1}) = \mathbb{R}$.
5.4.b	$f^{-1}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$, $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathbb{R}$ a $\mathcal{H}(f^{-1}) = \mathbb{R}$.
5.4.c	$f_{1,2}^{-1}(x) = \frac{1}{2}\left(x \mp \sqrt{x^2-12x+20}\right)$, $\mathcal{D}\left(f_1^{-1}\right) = \mathcal{D}\left(f_2^{-1}\right) = (-\infty, -10\rangle \cup \langle -2, \infty)$, $\mathcal{H}\left(f_1^{-1}\right) = (-\infty, -5\rangle \cup (-3, -1\rangle$ a $\mathcal{H}\left(f_2^{-1}\right) = \langle -5, -3) \cup$ $\cup \langle 1, \infty)$.
5.4.d	$f_{1,2}^{-1}(x) = 2^{-1\mp\sqrt{x+1}}$, $\mathcal{D}\left(f_1^{-1}\right) = \mathcal{D}\left(f_2^{-1}\right) = \langle -1, \infty)$, $\mathcal{H}\left(f_1^{-1}\right) = \left(0, \frac{1}{2}\right\rangle$ a $\mathcal{H}\left(f_2^{-1}\right) = \left\langle \frac{1}{2}, \infty\right)$.
5.4.e	$f_1^{-1} = -\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\sqrt{x}}$, $f_2^{-1} = -\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}$, $f_3^{-1} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}$, $f_4^{-1} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\sqrt{x}}$, $\mathcal{D}\left(f_1^{-1}\right) = \mathcal{D}\left(f_2^{-1}\right) = \mathcal{D}\left(f_3^{-1}\right) = \mathcal{D}\left(f_4^{-1}\right) = \mathbb{R}_0^+$, $\mathcal{H}\left(f_1^{-1}\right) = (-\infty, -1\rangle$, $\mathcal{H}\left(f_2^{-1}\right) = \langle -1, 0)$, $\mathcal{H}\left(f_3^{-1}\right) = (0, 1\rangle$ a $\mathcal{H}\left(f_4^{-1}\right) = \langle 1, \infty)$.
5.5.	Graf sekans posunutý o $\frac{\pi}{2}$ ve směru osy x.
5.6.a	$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}_0^+$, $\min(f) = \inf(f) = 0$, $\sup(f) = \infty$, globální maximum neexistuje, klesající na $(-\infty, -3\rangle$ a na $\langle 0, 3\rangle$ a rostoucí na $\langle -3, 0\rangle$ a na $\langle 3, \infty)$, ryze konkávní na $(-\infty, -2\rangle$ a na $\langle 2, \infty)$ a ryze konvexní na $\langle -2, 0\rangle$ a na $\langle 0, 2\rangle$, je sudá a není periodická ani prostá.
5.6.b	$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \smallsetminus \{1\}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}_0^+$, $\min(f) = \inf(f) = 0$, $\sup(f) = \infty$, globální maximum neexistuje, klesající na $(-\infty, 0\rangle$ a na $(1, 2\rangle$ a rostoucí na $\langle 0, 1)$ a na $\langle 2, \infty)$, ryze konkávní na $(-\infty, 0\rangle$ a na $\langle 2, \infty)$ a ryze konvexní na $\langle 0, 1)$ a na $(1, 2\rangle$, není lichá, sudá, periodická ani prostá.

5.6.c $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}_0^+$, $\min(f) = \inf(f) = 0$, $\sup(f) = \infty$, globální maximum neexistuje, klesající na $(-\infty, -1\rangle$ a rostoucí na $\langle -1, \infty)$, ryze konkávní na $(-\infty, -1\rangle$ a ryze konvexní na $\langle -1, \infty)$, není lichá, sudá, periodická ani prostá.

5.6.d $\mathcal{D}(f) = \langle -2, 0\rangle$, $\mathcal{H}(f) = \left\langle -\frac{2}{3}\pi, 0\right\rangle$, $\min(f) = \inf(f) = -\frac{2}{3}\pi$, $\max(f) = \sup(f) = 0$, rostoucí na $\left\langle -2, -\frac{3}{2}\right\rangle$ a klesající na $\left\langle -\frac{3}{2}, 0\right\rangle$, ryze konkávní na $\left\langle -2, -\frac{3}{2}\right\rangle$ a na $\langle -1, 0\rangle$ a ryze konvexní na $\left\langle -\frac{3}{2}, -1\right\rangle$, není lichá, sudá, periodická ani prostá.

5.6.e $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \left\langle 0, \frac{\pi}{3}\right\rangle$, $\min(f) = \inf(f) = 0$, $\max(f) = \sup(f) = \frac{\pi}{3}$, klesající na $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\rangle$ a na $\left\langle 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\rangle$ a rostoucí na $\left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right\rangle$ a na $\left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \infty\right)$, ryze konkávní na $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\rangle$ a na $\left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \infty\right)$ a ryze konvexní na $\left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right\rangle$ a na $\left\langle 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\rangle$, je sudá a není periodická ani prostá.

Závěr

Cílem práce bylo vytvořit ucelený učební text zabývající se problematikou elementárních funkcí na pomezí střední a vysoké školy s potřebnou látkou a cvičeními.

Postupoval jsem dle známé teorie a hotových vzorců. Záměrem bylo poskládat text tak, aby byl přístupný schopnostem začínajících vysokoškolských studentů. Můj přínos k tomuto tématu byl především v řešených úlohách a vlastních důkazech, které spojují přechod mezi probíranou matematikou na střední a vysoké škole.

Vzorové úlohy a cvičení jsou často nad úroveň střední školy, ale nezabíhají do vysokoškolské matematické analýzy. Snaha byla zejména rozšířit okruh znalostí a připravit prostor pro pochopení složitějších matematických pojmů a struktur.

Věty, na které jsem se zaměřil, bývají ve vysokoškolských textech ve velké míře považovány za elementární, a většinou se nedokazují, i když jejich důkazy existují. Pokusil jsem se sepsat důkazy tak, jak by z mého pohledu studenta měly být pochopitelné pro nové vysokoškoláky, a obohatily jejich vhled do dané problematiky.

Cíl jsem dle zadaných kritérií splnil. Dalším krokem bude otestování materiálu v reálné výuce; již v letošním roce bude použit jako elektronická opora studia v předmětech Úvod do matematické analýzy a Elementární funkce na PedF UK. Podle reakcí studentů bude dále modifikován tak, aby byl zvláště při samostudiu co nejpřínosnější.

Seznam použité literatury

[1] Bušek, Ivan a Emil Calda. *Matematika pro gymnázia: základní poznatky z matematiky.* Dotisk 4. vydání. Praha: Prometheus, 2008, 195 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-366-0.

[2] Janda, David. *Funkce v příkladech a protipříkladech* Praha, 2011, 47 s. Bakalářská práce. Univerzita Karlova v Praze. Vedoucí práce Mgr. Derek Pilous.

[3] Jarník, Vojtěch. *Diferenciální počet (I).* 6. vydání. Praha: Academia, 1974. 391 s.

[4] Melnikov, Yu. *Green's functions and infinite products: bridging the divide.* New York: Birkhäuser, 2011, x, 165 p. ISBN 0817682805.

[5] Odvárko, Oldřich. *Matematika pro gymnázia: funkce.* 3., upravené vydání. Praha: Prometheus, 2001, 168 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-164-7.

[6] Pilous, Derek. *Skripta* [online]. 2016 [cit. 2016-02-20]. Dostupné z: http://www.cynyc.net/PedF/MA%20I/Prednasky.pdf

[7] Říhová, Helena. *Transformace grafů funkcí* [online]. 2006 [cit. 2016-02-11]. Dostupné z: http://dagles.klenot.cz/rihova/elfunkce.pdf

[8] Škrášek, Josef a Zdeněk Tichý. *Základy aplikované matematiky [Sv.] 1 : Matematická logika, množiny, základy algebry, analytická geometrie, diferenciální počet, numerické a grafické metody.* 1. vydání. Praha: SNTL, 1983, 876 s.

[9] Vitásek, Tomáš. *Elementární funkce a definiční obor.* Praha, 2012, 62 s. Bakalářská práce. Univerzita Karlova v Praze. Vedoucí práce Mgr. Derek Pilous.