UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

FAKULTA SOCIÁLNÍCH VĚD

Institut ekonomických studií

Bakalářská práce

2016 **Filip Hamáček**

UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

FAKULTA SOCIÁLNÍCH VĚD

Institut ekonomických studií

Filip Hamáček

(Ne)racionalita při sázení

Bakalářská práce

Praha 2016

Autor práce: **Filip Hamáček**

Vedoucí práce: **Prof. RNDr. Jiří Hlaváček CSc.**

Rok obhajoby: 2016

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá neracionalitou při sázení. V první části práce pojednává o různých instrumentech vyhodnocování rizika. Ve druhé části práci najdeme diskuzi ohledně Petrohradského paradoxu. Práce hledá alternativní řešení Petrohradského paradoxu dvěma metodami, první metoda je založena na odehrávání velkého množství her Petrohradského paradoxu. Druhou metodou je metoda maximalizace pravděpodobnosti ekonomického přežití, jež pojednává o rozhodování hráče petrohradské hry na základě aktuálního stavu bohatství a minimální hranici ekonomického přežití. Ve třetí části práce je srovnáváno hraní Sportky s hraním specálního turnaje pokeru, cílem této části práce je porovnat očekávanou návratnost finančních prostředků při hraní Sporky a při hraní pokeru bez jakékoliv znalosti pravidel této hry. Pro odhad očekávané hodnoty hry pokeru je využíváno zkoumání různých scénářů hry, kdy pravděpodobnost těchto scénářů je založena na chování hráčů dle Nashovy rovnováhy.

Klíčová slova: Sázení, očekávaná hodnota, Petrohradský paradox, loterie, poker, Nashova rovnováha

Abstract

The subject of this bachelors thesis is nonrationality of betting. The first part of thesis is discussing different instruments of risk evaluation. The second part is about Petersburg paradox. This thesis tries to find alternative solution to Petersburg paradox using two methods, the first method is based on repeating high amount of petersburg games. The second method is maximizing the probability of economic survival, which is based on wealth of the player and on bound of economic survival. In the third part of this thesis, Sportka (Czech lottery) is compared with special tournament of poker. The goal of this part is to compare the expected return of investment on playing Sportka and on playing poker without even basic notion about rules and the game strategy. For the estimation of the expected value of poker tournament, different game scenarios are considered, probability of scenarios are based on players behavior according to the Nash equilibrium.

Keywords: Betting, expected value, Petersburg paradox, lottery, poker, Nash equilibrium

Rozsah práce: 96 431 znaků

Prohlášení

1. Prohlašuji, že jsem předkládanou práci zpracoval samostatně a použil jen uvedené prameny a literaturu.
2. Prohlašuji, že práce nebyla využita k získání jiného titulu.
3. Souhlasím s tím, aby práce byla zpřístupněna pro studijní a výzkumné účely.

V Praze dne 26.7.2016 Filip Hamáček

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval profesoru Hlaváčkovi, především za jeho trpělivost. Dále pak za odborné rady, připomínky a nápady.

Obsah

1. Úvod

Rozhodování za rizika a sázení je nedílnou součástí současné společnosti. Jednotlivci rozhodující se za rizika se však často rozhodují neracionálně a právě neracionalita při rozhodování za rizika (zejména při sázení) je předmětem této práce. Hlavním předmětem při rozhodování za rizika bývá očekávaná hodnota hry, nicméně tento model má několik úskalí a proto je častokrát třeba využít jiný instrument. Lidé navíc často podstupují riziko, které ve smyslu očekávané hodnoty hry přináší jasné a systematické ztráty.

Práce je rozdělena na tři části. V první části se podíváme na téma obecně, na některá kritéria pro rozhodování za rizika a pro sázení. Dotkneme se také důvodů, při kterých může být sázení racionální, byť předchozí kritéria říkají něco jiného.

Ve druhé části se budeme věnovat tzv. Petrohradskému paradoxu, který jasně dokládá problémy modelu očekávané hodnoty hry. Cílem této části práce bude hledat možná řešení paradoxu s využitím jiných metod. Pokusíme se ukázat, že se v problému Petrohradského paradoxu můžeme dostat k přijatelným výsledkům a to především využitím simulace velkého množství her Petrohradského paradoxu. Odlišný pohled na věc poté budeme hledat při metodě, jež zohledňuje při rozhodování klíčové veličiny, které původní model očekávané hodnoty (stejně jako mnoho dalších modelů) zcela opomíjí.

V druhé části práce budeme srovnávat nejpopulárnější loterii v České republice, Sportku, s jednou z nejrozšířenějších karetních her o peníze, pokerem. Není žádným tajemstvím, že Sportka je z pohledu očekávané hodnoty hry extrémně nevýhodná, méně výhodná než většina hazardních her v kasínech a hernách. Ohledně pokeru se vede mnoho diskuzí a to hlavně na téma, zda má být poker považován za hazardní hru. Za hazardní hru ho považuje například nový zákon o hazardních hrách, který vejde v účinnost od 1.1.2017. Zda je poker hazardní a nebo dovednostní hrou se v této práci zabývat nebudeme, byť je tato odpověď naprosto klíčová pro všechny pokerové hráče (respektive hazardní hráče), neboť se z ní odvíjí legislativa a případně danění v různých zemích světa. Tato diskuze patří spíše do oblasti filozofie a práva. Budeme se zabývat jedním speciálním formátem pokerového turnaje, hraného výhradně na internetu. Pokusíme se zjistit, zda hráč, který vůbec nezná pravidla pokeru, bude schopen dosáhnout alespoň takové návratnosti finančních prostředků, jaké by dosáhl ve Sportce.

2. Proč lidé sázejí?

Než se budeme věnovat samotnému Petrohradskému paradoxu a souboji Sportky a Pokeru, bylo by dobré znát, co to vlastně sázka je. V České republice od vydání nového občanského zákoníku existuje právní přesná definice sázky, společně s definicí hry a losu.
§ 2873 NOZ říká:
(1) Sázkou se alespoň jedna strana zavazuje vůči druhé plnit výhru, ukáže-li se nesprávným její tvrzení o skutečnosti stranám neznámé nebo ukáže-li se tvrzení druhé strany o této události správným.
(2) Má-li strana, jejíž tvrzení se ukáže správným, jistotu o výsledku a zatají-li to druhé straně, je sázka neplatná.

Sázet proti sobě mohou hráči (například v případě pokeru) a nebo hráč proti nějaké společnosti (v případě kasín a loterijních společností). Sázka je událost, jejíž výsledek je pro všechny účastníky nejistý, žádný ze subjektů nesmí předem znát výsledek události. Subjekty, které proti sobě sází, se tedy rozhodují za nejistoty. Sázky, kdy jeden ze subjektů zná s jistotou výsledek hry jsou tedy nelegální, jako například hraní nechvalně známých skořápek, kdy zruční krupiéři záměrně určovali výsledek hry.

Ve společnosti se sázení vnímá odlišně v závislosti na kultuře společnosti a v závislosti na tom, zda se jedná obvyklé nebo nadměrné sázení (Lea, 1994, s. 256). V evropské kultuře je do značné míry sázení normální, neobvyklé není sázení na koňské dostihy, kurzové sázky u sázkových kanceláří, domácí partičky mariáše nebo pokeru. To vše za předpokladu, že hráč sází v míře, která je přiměřená k jeho bohatství, tedy v míře, která neovlivní jeho každodenní život. V opačném případě se jedná o sázení nadměrné. Někteří lidé a některé kultury však zastávají názor, že jakýkoliv zisk spojený spojený s náhodou je morálně nepřijatelný a že bychom se měli sázení zcela vyhnout.

Rozhodování jedince je tedy ovlivněno očekáváním. Racionální jedinec se snaží maximalizovat užitek, nicméně není zcela jednoznačné, co tato racionalita při sázení vlastně znamená. Existují případy, kdy je racionální vsadit i na na první pohled naprosto nesmyslnou hru.

Jedno z prvních kritérií na posuzování rizika je model očekávané hodnoty, jenž je známý minimálně od doby Daniela Bernoulliho (1700-1782)(Lea, 1994, s. 183). Tento model uvádí posuzování rizika pomocí součtu násobků bohatství při jednotlivých výsledcích situace s pravděpodobností uskutečnění tohoto výsledku. Očekávaná hodnota se poté porovnává s cenou vstupu do rizika.
$$Ew=\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i w_i$$
kde π_i vyjadřuje pravděpodobnost i-tého stavu světa a w_i bohatství při i-tém stavu světa
Příkladem je hra při které hráč získá 10Kč s pravděpodobností 50%. Hráč následující maximalizaci užitku pouze skrze očekávanou hodnotu hry je ochoten za hru zaplatit maximálně 5Kč.
S pohledu bohatství by by se mohlo zdát, že tento model je naprosto dokonalý. Nicméně i tento model přináší několik úskalí. Výpočet očekávané hodnoty je často mimořádně obtížný, jelikož výsledků dané situace může existovat velmi mnoho. Přesné pravděpodobnosti nemusí být známé, dokonce je mnohdy nemožné je získat (jako například pravděpodobnosti na určité počasí). V neposlední řadě se lidé ve většině případů podle očekávané hodnoty zjevně nechovají.
Problém modelu očekávaného užitku dokládá známý Petrohradský paradox. V tomto paradoxu se pracuje s očekávanou hodnotou překračující všechny meze, je zde doloženo, že rozhodování čistě dle očekávané hodnoty hry může být již na první pohled neracionální.

Jak vysvětlit chování jedince za rizika, který se chová jinak než dle maximalizace očekávané hodnoty, se pokusil sám Daniel Bernoulli. Ten tvrdil, že mezní užitek z bohatství je klesající, tedy že čím více korun máte, tím méně užitku přináší další dodateční koruna (Lea, 1994, s. 185). Klesající mezní užitek peněz podporuje například První Gossenův zákon. Tento zákon říká, že s postupujícím uspokojováním nějaké potřeby klesá užitek z jejího uspokojování, což je jinými slovy zákon o klesajícím mezním užitku. Podle této teorie tedy subjekt nemaximalizuje očekávanou hodnotu hry, ale očekávaný užitek.

$$Eu=\sum_{i=1}^{\infty}\pi_i u(w_i)$$

kde π_i vyjadřuje pravděpodobnost i-tého stavu světa a $u(w_i)$ užitek z bohatství při i-tém stavu světa. $\sum_{i=1}^{\infty}\pi_i=1$

Užitková funkce peněz mimo jiné vyjadřuje vztah k riziku. Mikroekonomie pro tento problém zná 3 pojmy – jednotlivec riziko milující, riziko neutrální a riziko averzní.
Riziko milující hráči jsou ti, kteří jsou ochotni do hry vstoupit i v případě očekávané hodnoty hry nižší než vstupenky do hry. Jejich chování popisuje konvexní užitková funkce peněz. Tyto jedince běžně ve společnosti najdeme, jsou to právě ti, kteří běžně sázejí Sportku nebo hrají ruletu.
Riziko neutrální jsou ti lidé, kteří se rozhodují zcela podle očekávané hodnoty hry. I tyto jedince ve společnosti najdeme, jsou to například profesionální hráči pokeru, těmi se budeme zabývat v dalších kapitolách.
Poslední skupinou jsou jedinci riziko averzní. Příkladem je jízda městskou hromadnou dopravou, kdy si mnoho cestujících kupuje jednorázové drahé lístky, byť je odhalení černého pasažéra nepravděpodobné, navíc pokuta nikterak vysoká. Averze k riziku je v běžných ekonomických modelech modelována na základě ryzí konkávností funkce očekávaného užitku z důchodu (Hlaváček, 2010, s. 149) .
Pokud bychom chtěli nějakou měřitelnou veličinu, se kterou můžeme určit averzi k riziku, pak můžeme využít například tzv. Arrowova-Prattovu míru absolutní averze k riziku (Varian, 1992, s. 178):

$$r(w)=-\frac{u''(w)}{u'(w)}$$

Tato absolutní averze k riziku napovídá o averzi k riziku při ztrátě fixních částek korun, kdy při velkém bohatství je jedinec ochoten více riskovat ztrátu jedné koruny.
Naproti tomu Arrowova-Prattova míra relativní averze k riziku ρ je více problematická, jelikož není jisté, zda při zvyšování bohatství bude jedinec více či méně ochoten riskovat ztrátu určitého podílu bohatství (Varian, 1992, s. 189).

$$\rho(w)=-\frac{u''(w)w}{u'(w)}$$

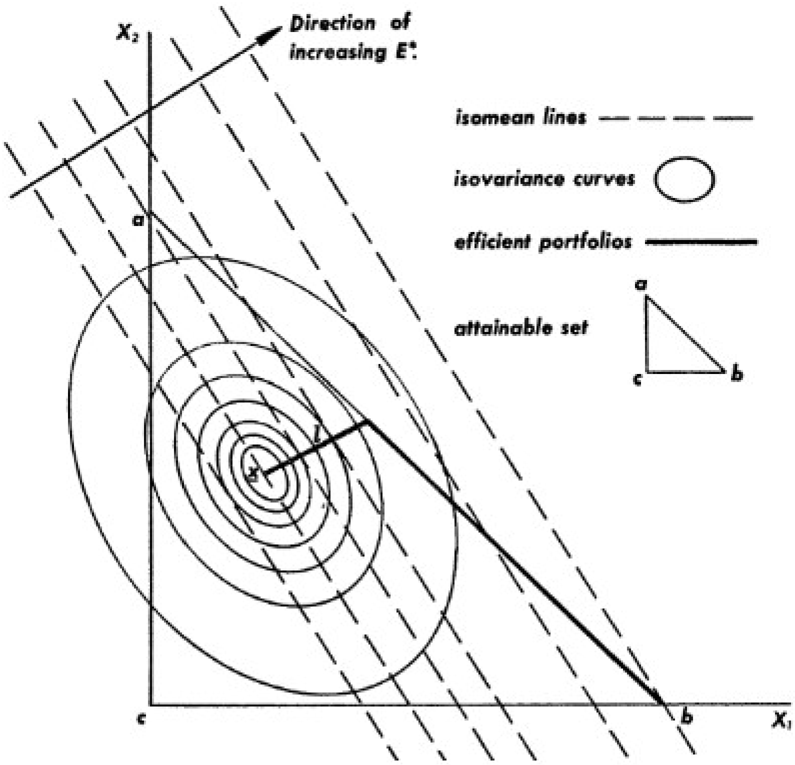
Všechny tyto 3 typy chování za nejistoty však mohou být za určitých předpokladů racionální.

Další teorií, která vysvětluje chování odlišné od maximalizace očekávané hodnoty, je teorie subjektivní pravděpodobnosti (Lea, 1994, s. 187-188). Jednotlivec si zde může myslet, že se chová dle očekávané hodnoty hry, nicméně počítá s odlišnými pravděpodobnostmi. Důvodů pro subjektivní určení pravděpodobnosti může být hned několik. V první řadě jsou to buď špatné informace a nebo jejich nedostatečné množství. S tímto problémem se běžně setkáváme v pojišťovnictví. Na jednu stranu nemá osoba uvažující o pojištění takové množství informací, jako má pojišťovna, může tedy pravděpodobnost pojištěné události odhadnout jinak. Z druhé strany také pojišťovna nemusí mít informace, které má pojistník, jako například to, že v okolí jeho bytu se v posledních dnech odehrálo několik menších vloupání. K problému pojišťovny se pojí i velmi známý pojem morální hazard . Tento pojem historicky označoval situaci, kdy pozorujeme u pojistníka

pokles odpovědnosti či opatrnosti ve vztahu k rizikům. Pojišťovny se proti morálnímu hazardu mohou omezeně bránit díky prošetřování pojistných událostí a spoluúčastní pojištěného. Později vstoupil do ekonomické teorie morální hazard jako situace či okolnost, podporující rizikové či vysoce spekulativní chování ekonomických subjektů (Bažantová, 2010, s. 7-8). Obecně se jedná o riskování na úkor jiného subjektu.
Dalším důvodem k nesprávnému určení pravděpodobnosti může být skutečná víra v to, že jednotlivec je smolný člověk nebo víra ve své šťastné dny a šťastná čísla, či v situace při neznalosti základní teorie pravděpodobnosti jako sázení na ruletě se strategií „4 krát padla červená, teď už musí padnout černá“.
Naprosto klíčovou roli v sázení hraje v souvislosti se subjektivní pravděpodobností přeceňování pravděpodobností výjimečných situací, například extrémních výher ve Sportce. Tuto mylnou představu ještě podporují moderátoři živého losování. Ti při každém losování nezapomenou zmínit, z kolika lidí v uplynulém týdnu udělalo losování Sportky milionáře a že v příštím týdnu budou desítky nových milionářů.

Teorie, která k rozhodování za rizika neodmyslitelně patří a která se týká především řízení výběru portfolia je tzv. mean-variance approach (Markowitz, 1952 s.77-85). Tento přístup se zakládá na tom, že by se investor měl rozhodovat o složení svého portfolia v závislosti na očekávané hodnotě a rozptylu. Pokud se investor řídí tímto přístupem, potom se má rozhodnout pro takový výběr portfolia, který má nejnižší rozptyl pro danou (nebo vyšší) očekávanou hodnotu a maximální očekávanou pro daný (nebo nižší) rozptyl. Je mnoho technik, které hledají efektivní kombinace očekávané hodnoty a rozptylu, tyto techniky jsou často velmi náročné. Nicméně se můžeme podívat na grafické znázornění Markowitze (1952) situace s rozhodováním pouze o třech typech cenných papírů. Investor investuje podíl svých prostředků do cenných papírů $X_{1,} X_{2,} X_3$, kde $\sum_{i=1}^{3} X_i = 1$ a
$X_i \geq 0$ pro všechna
i = 1, 2, 3
$X_3 = 1 - X_1 - X_2$
Příklad ilustrujme na Obrázku 1 (Markowitz, 1952, s.85). Trojúhelník a, b, c označuje přípustnou množinu rozdělení portfolia. Isomean lines jsou rovnoběžné přímky, každá z nich z nich označuje body se stejnou očekávanou hodnotou portfolia. Isovariance curves jsou soustředné elipsy, jež označují body se stejným rozptylem portfolia, rozptyl je tím nižší, čím blíže se ke středu křivky nachází. Na dané isomean křivce je bod s nejnižším rozptylem ten bod, který je v bodě dotyku s tečnou v podobě izovariance křivky. Efektivní dvojce očekávané hodnoty a rozptylu jsou označeny na obrázku jako tučná křivka **l**.

Obrázek 1 (Markowitz, 1952, s. 85)



Jaké jsou tedy racionální důvody , proč by měl jedinec sázet?

1. Očekávaná hodnota hodnota hry je vyšší než vstupenka do této hry
Příkladem z praxe je už zmiňovaný profesionální hráč pokeru. Tento kvalitní hráč může nastoupit do pokerového turnaje s horšími méně kvalitními konkurenty a i přes poplatek pro hernu nebo kasino může mít vysokou očekávanou hodnotu.

2. Subjekt donucený riskovat
Později se v práci budeme zabývat subjektem, který v modelu maximalizace pravděpodobnosti ekonomického přežití je pod hranicí ekonomického zániku, tento subjekt je ochoten vstoupit do jakéhokoliv rizika. Pokud do rizika nevstoupí, potom s jistotou ekonomicky zanikne. Pokud do rizika, byť jakkoliv nepříznivého, vstoupí, pak získává alespoň nějakou kladnou pravděpodobnost na ekonomické přežití.

3. Nenulová pravděpodobnost na astronomické výhry měnící život
Přestože očekávaná hodnota například ve Sportce je v porovnání se vstupenkou do hry extrémně malá (přesvědčíme se tak v pozdějších kapitolách), i zde může být racionální pro některé jedince Sportku sázet a to i s předpokladem, že zde nehraje roli subjektivní pravděpodobnost. Tito jedinci si za částky, které téměř nijak neovlivní jejich běžný život, kupují nenulovou pravděpodobnost na to, že se stanou milionáři a stanou se pohádkově bohatými.

4. Požitek ze hry

Racionální jedinec maximalizuje svůj očekávaný užitek. Parametrem jeho užitkové funkce však nemusí být pouze bohatství, ale i užitek ze samotného hraní. Sázení hlavně pro zábavu může být tedy racionálním. Příkladem je sázení na koňské dostihy, kde například společenská smetánka sází desetikoruny na své favorizované koně. Několikrát zmiňovaný poker je modelovým příkladem. S tímto chováním se setkáváme od pokerových her na pár korun po hry za statisíce a miliony. Domácí partičky pokeru jsou společenskou událostí, rekreační hráči hrají poker téměř výhradně pro užitek ze hry. Hráče, kteří kladný zisk z pokerového turnaje neočekávají, najdeme i při těch nejdražších turnajích planety. Jedním z takových turnajů je třeba turnaj Světové Série Pokeru (WSOP) The Big One For One Drop se startovným rovný $1 000 000. Tento turnaj běžně hrává pouze několik desítek hráčů. Jednu část startovního pole tvoří špičkoví pokeroví profesionálové (kteří navíc hrají tento turnaj nejčastěji s podporou investorů, sami by nebyli ochotni za tak moc peněz startovat). Druhou částí jsou bohatí manažeři a byznysmeni s „nekonečným bankrollem“, ti samozřejmě kvalitou na profesionály nemají ani zdaleka nárok.

3. Petrohradský paradox

3.1.Podstata paradoxu

Jak bylo již v předchozí části uvedeno, rozhodování se pouze na základě očekávané hodnoty hry s sebou nese několik úskalí. Jeden z problémů dokládá slavný Petrohradský paradox.

Pravidla hry Petrohradského paradoxu jsou následující: Hráč hází mincí. Padne-li hlava, hra je ukončena a hráč vyhrává 2 koruny. Padne-li orel, hra pokračuje a hází se znovu mincí. Padne-li ve 2. kole hlava, hra je ukončena a hráč získává dvojnásobek výhry předchozího kola, tedy 4 koruny. Padne-li orel, hra opět pokračuje. Obdobně ve 3. kole je hra ukončena hlavou s výhrou ve výši dvojnásobku předchozí hry, v případě orla se opět pokračuje dále.
Obecně se dá zapsat výhra jako $w=2^n$ korun, kde n je číslo kola, ve kterém hráč hodil hlavu. Otázka zní, kolik by měl racionální hráč být ochoten zaplatit za startovné do této hry. Hlavním předmětem rozhodování prozatím určeme očekávanou hodnotu hry. Pro diskrétní náhodnou proměnnou (jakou je petrohradská hra) definujme očekávanou hodnotu náhodné proměnné X (v našem případě výhry v petrohradské hře w) jako

$$E(w)=\sum_{i=1}^{\infty} w_i p_i$$

kde
w_i je výhra v i-té hře
p_i je pravděpodobnost právě takové výhry

Odpověď na předchozí otázku, kolik by hráč měl být ochoten zaplatit (na základě očekávané výhry ve hře) je již na první pohled ekonomicky nesmyslná, hráč může zaplatit za startovné jakoukoliv konečnou částku a stále bude očekávat zisk. Očekávaná hodnota hry je totiž:

$$E(w)=\frac{1}{2}2^1+\frac{1}{4}2^2+\frac{1}{8}2^3...=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}2^i=\sum_{i=1}^{\infty}1=\infty$$

3.2. Historie paradoxu

Jako první, kdo se zabýval Petrohradským paradoxem, byl Nikolaus Bernoulli, který v roce 1713 odeslal svůj problém francouzskému matematikovi De Montmortovi, společně se svými prvními řešeními. Navrhl zde, že pro dostatečně mnoho orlů v řadě je pravděpodobnost nulová a osekl tedy množinu možných řešení o nepravděpodobné výhry (Székely a Richards, 2004, s. 225).

Gabriel Cramer argumentoval klesajícím mezním užitkem a v dopise Niklausi Bernoullimu říká, že pro určité výhry (podle něj nad 2^{24}) nepřináší žádný další užitek. Cramer navrhl, aby byl užitek měřen různými užitkovými funkcemi (například odmocninou) a nebo aby měla funkce horní hranici. Z jeho závěru vyplynulo, že by hráč neměl být ochoten zaplatit za vstupné více než 20 jednotek měny (Székely a Richards, 2004, s. 226).

Nikolaus Bernoulli kontaktoval svého mladšího bratrance Daniela Bernoulliho, který v té době působil na akademii věd v ruském Petrohradu. Daniel Bernoulli publikoval svou práci o Petrohradském paradoxu v roce 1738 (Dehling, 1997, 225). Jeho závěrem bylo, že přirozený výběr užitkové funkce by měla být funkce logaritmus. Bernoulli mimo jiné argumentoval tím, že každý

přírůstek bohatství (byť by tento přírůstek byl zanedbatelný vůči současnému původnímu bohatství) přináší zvýšení užitku (Székely a Richards, 2004, s. 226-227).
Užijeme-li užitkovou funkci $u(w)=\log(w)$, potom je očekávaný užitek

$$Eu=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\log(2^k)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{k}{2^i}\log 2=2\log 2=\log 4$$

zde je očekávaný užitek stejný jako užitek ze 4 jednotek měny $u(4)=\log 4$

William Allen Whitworth v roce 1901 navrhl řešení, které se opírá teorii pravděpodobnosti ekonomického přežití, podle něj u hráče hraje zásadní roli jeho současná hodnota majetku (Székely a Richards, 2004, s. 227).

William Feller v roce 1945 navrhl řešení pomocí zákonu velkých čísel. Říká, že průměrná výhra se blíží k nekonečnu velmi pomalu. Feller navrhl, že částka, kterou je hráč ochoten platit, by měla záviset na tom, kolik her plánuje hráč odehrát, jelikož na jednu extrémně vysokou výhru může čekat velmi dlouho. Jeho závěrem bylo, že hodnota hry Petrohradského paradoxu je $\log_2 n$, kde *n* značí počet her, které hráč plánuje odehrát (Dehling, 1997, 226-227).

Někteří další vědci, jako například Durand (1957), označili paradox za řešitelný v takovém smyslu, že kasino má pro vyplácení výhry pouze omezené prostředky a proto je očekávaná hodnota konečná. Stejně tak hráč je omezen délkou svého života.
Hráč v Petrohradském kasinu může vsadit s vidinou zisku tedy i astronomické částky, například milion korun, zatímco pravděpodobnost na výhru alespoň 128 korun je pouhé 1,5%, pravděpodobnost na výhru 2048 korun je už necelých 0,1%. Na to, abychom se dostali alespoň na výhru milion korun, tak musíme hodit orla alespoň 19 krát po sobě, taková pravděpodobnost je pouze 0,000191%. Aby hráč měl 50% pravděpodobnost, že alespoň jednou hodí tento minimálně milionový jackpot, musel by odehrát 363408 her. Pokud bychom si představili, že jedna hra může trvat jednu minutu a hráč by hrál v imaginárním petrohradském kasinu pouze tuto hru 8 hodin denně, každý den v roce, pak by se k 50% pravděpodobnosti na tuto výhru dostal za více než 2 roky. V běžných hrách založených na nejistotě stačí odehrát vysoký počet her a výsledná výhra se začne blížit k očekávané hodnotě. Zde je však jasné, že se smyslem „long runu“ můžeme mít v případě Petrohradského paradoxu potíže. Pro reálné pravděpodobnosti na vyšší výhry, se kterými očekávaná hodnota také počítá, by nemusel hráči stačit ani celý život. Na to, aby náš hráč měl alespoň 50% pravděpodobnost, že minimálně jednou vyhraje částku na úrovni HDP České republiky, potřebuje přes 1,5 bilionu her, které mu budou při výše zmíněném tempu trvat přibližně 8,7 milionu let.

3.3. Paradox a velké množství pokusů

Chtěli bychom prozkoumat hru Petrohradského paradoxu z jiného pohledu, než jen z teoretické očekávané hodnoty

Statistická teorie napovídá, že pokud odehrajeme nějakou hru mnohokrát, pak by se měla průměrná výhra blížit k očekávané hodnotě hry. Necháme hru petrohradského paradoxu odehrát milionkrát. Z toho budeme moci získat konečný odhad očekávané hodnoty jako průměr výher z těchto milionu her a rozptylu jako výběrový rozptyl (sample variance). Zde narážíme trochu na spor, protože odhadujeme již známé konečné hodnoty, nicméně s ohledem na konečný čas hry a na malou pravděpodobnost vysokých Jackpotů v reálných dobách pro hru se můžeme o průměru výher a výběrovém rozptylu bavit.

Rozptyl této hry je

$$\sigma^2 = E[(w - E(w))^2] = E(w^2) - E(w)^2$$

kde

$$E(w^2) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} 2^{2i} = \sum_{i=1}^{\infty} 2^i$$

a tedy

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{\infty} 2^i - \left(\sum_{i=1}^{\infty} 1\right)^2 = \infty$$

Předstírejme tedy, že skutečnou teoretickou očekávanou hodnotu a rozptyl vůbec neznáme.

Průměrnou výhru vypočteme jako prostý aritmetický průměr výher.

$$\bar{w} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i}{n}$$

Výběrový rozptyl (sample variance) vypočteme jako

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (w_i - \bar{w})^2$$

Z jednoho milionu simulovaných her nám vyplynulo, že průměrná výhra v tomto setu her je 24,39 s nejvyšším Jackpotem 4 194 304 při hození 21 hlav v řadě, výběrový rozptyl tohoto pokusu je 19928553.

Pro veliký počet pozorování počítat intervaly spolehlivosti pro průměrnou výhru. Pro použití výběrového rozptylu místo skutečného rozptylu je interval spolehlivosti následující

$$\left(\bar{w} - t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{\sqrt{s^2}}{\sqrt{n}}, \bar{w} + t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{\sqrt{s^2}}{\sqrt{n}}\right)$$

Interval spolehlivosti říká, že pravděpodobnost, že skutečná hodnota průměrné výhry leží mimo daný interval je rovna parametru α
Interval spolehlivosti je tím širší, čím je parametr nižší, protože k větší jistotě potřebujeme pokrýt větší množství hodnot.
Pro stejný set pozorování je 10% interval spolehlivosti (17,04; 31,73), 5% interval spolehlivosti (15,64; 33,14), 1% interval spolehlivosti (12,89; 35,89) a 0,1% interval spolehlivosti (9,7; 39,08).
Tyto výsledky říkají, že z daného setu pozorování si můžeme být celkem jistí, na 99,9%, že průměrná výhra není vyšší než 39,08Kč. Tedy na základě studie intervalů spolehlivosti již dostáváme přesnější odpověď na otázku, kolik by měl být hráč ochoten dát za startovné do petrohradské hry.

To, že očekávaná hodnota je obrovská (nekonečná) je dáno především astronomickými jackpoty. To potvrzuje i pohled na různé sety pozorování s miliony pokusy. I při obrovském počtu pozorování se od sebe průměrné výhry občas liší a to pochopitelně hlavně v závislosti na nejvyšší výhře. Například při setu milionu her s nejvyšší výhrou 134 milionů při hodu 26 orlů v řadě je průměrná výhra 181,79 Kč, díky astronomické výhře naskočil i výběrové rozptyl a tak i intervaly spolehlivosti jsou velmi široké, 10% interval má horní hranici 404,7Kč, 0,1% interval dokonce 627,86. Není divu, že je průměrná výhra takto moc ovlivněna nejvyšším jackpotem, vždyť v tomto případě je podíl této jedné maximální výhry na celkových výhrách dokonce 73,8%.

Při setu her, kde maximální výhra činí 2,15 miliard Kč při 30 orlech v řadě vyšla průměrná výhra na 2169,96 Kč. Podíl maximální výhry na celkové výhře je 98,9% a 10% interval jistoty dává horní hranici skutečné průměrné výhry až na 5702,58Kč.

Měl by se však racionální jedinec chovat i v závislosti na možnosti získat takové jackpoty? Pokud by lidský život trval 100 let a hráč by od narození hrál každý den svého života 8 hodin denně v Petrohradském kasinu 60 her za hodinu, pak by pravděpodobnost, že alespoň jednou vyhraje minimálně výše zmíněný 2,15 miliardový Jackpot byla pouhých 1,61%.

Zkusme tedy jiný pokus, pojďme odehrávat opět sety milionů her, ale vždy nebudeme uvažovat jednu nejvyšší výhru. Stejný set výsledků s 2,15 miliardovým maximálním jackpotem vypadá po odmyšlení tohoto astronomického čísla již mnohem blíže výsledkům z předchozích pozorování. Průměrná výhra už je pouze 22,4Kč, intervaly spolehlivosti pro skutečné průměrné výhry již vypadají také mnohem „rozumněji".10% interval spolehlivosti je (16,926; 28,034).

Posledním pokusem s odehráváním setů her s milionem jednotlivých petrohradských her bude porovnávání průměrných výher s průměrnými výhrami vždy po odečtení nejvyššího Jackpotu. Nechali jsme zde vždy odehrát milion petrohradských her a zaznamenali průměrnou výhru a průměrnou výhru po odečtení nejvyšší výhry v daném pokusu. Milionový pokus jsme opakovali 250 krát, z toho tedy vzniklo 250 průměrů výher a 250 průměrů výher bez nejvyšších Jackpotů.

Nechť

$\bar{w}_k=\frac{\sum_{i=1}^{10^6} w_{k_i}}{10^6}$ je průměrná výhra v k-tém pokusu složeného z milionu her

$W=\frac{\sum_{k=1}^{250} \bar{w}_k}{250}=\frac{\sum_{k=1,i=1}^{k=250,i=10^6} w_{k_i}}{2{,}5\,.\,10^8}$ je průměr průměrných výher z 250 různých pokusů, což je totéž jako průměr všech 250 milionu simulovaných her.

$\bar{v}_k=\frac{\left(\sum_{i=1}^{10^6} w_{k_i}\right)-max\left(w_1,\ldots,w_{10^6}\right)}{10^6-1}$ je průměrná výhra v k-tém pokusu při ignorování jedné nejvyšší výhry

$V=\frac{\sum_{k=1}^{250} \bar{v}_k}{250}$ je průměr průměrných výher při ignorování jedné nejvyšší výhry z 250 různých pokusů

Průměrný podíl jedné nejvyšší výhry na celkové výhře je v těchto 250 pokusech 36,6%. Data tedy jasně napovídají, že nejvyšší jedna výhra má velmi důležitou roli na celkové výhře. A tedy hlavně vinou nejvyšších výher (speciálně jedné nejvyšší) se průměrné výhry z různých pokusů liší.
Pro simulaci tohoto pokusu vyšla tato čísla
$W=32{,}89$
$V=20{,}84$

Kromě toho, že se velmi podstatně liší tyto dva průměry, liší se i výběrový rozptyl a to ještě podstatněji.

$$S_W^2 = \frac{\sum_{k=1}^{250} (\bar{w}_k - W)^2}{249} = 2819{,}37$$

$$S_V^2 = \frac{\sum_{k=1}^{250} (\bar{v}_k - V)^2}{249} = 7{,}6$$

Z těchto dat můžeme sestrojit intervaly spolehlivosti pro skutečné odhady $\bar{W}$ a $\bar{V}$

$$\left(W - t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{\sqrt{S_W^2}}{\sqrt{250}}, W + t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{\sqrt{S_W^2}}{\sqrt{250}}\right) \text{ jako } \alpha \text{ interval spolehlivosti pro } \bar{W}$$

respektive

$$\left(V - t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{\sqrt{S_V^2}}{\sqrt{250}}, V + t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{\sqrt{S_V^2}}{\sqrt{250}}\right) \text{ jako } \alpha \text{ interval spolehlivosti pro } \bar{V}$$

Pro $\bar{W}$ jsou intervaly spolehlivosti vypočítány v Tabulce 2. Sloupec α značí $(1-\alpha)$ interval spolehlivosti, sloupce L a P značí levou a pravou mez.

Tabulka 2

Intervaly spolehlivosti pro $\bar{W}$		
α	L	P
10%	27,37	38,42
5%	26,31	39,47
1%	24,24	41,54
0,1%	21,84	43,94

Pro $\bar{V}$ vychází intervaly spolehlivosti v Tabulce 3.

Tabulka 3

Intervaly spolehlivosti pro $\bar{V}$		
α	L	P
10%	20,56	21,13
5%	20,50	21,19
1%	20,39	21,29
0,1%	20,27	21,42

Intervaly spolehlivosti pro $\bar{W}$ nám tedy nedávají příliš stabilní výsledky, přesto pravděpodobnost, že průměrná výhra v petrohradské hře bude vyšší než 43,94 je velmi nízká.
To intervaly spolehlivosti pro $\bar{V}$ nám dávají, že výrazně stabilnější výsledky. Průměrná výhra po takto definovaném ignorování vysokých jackpotů je tedy s velkou přesností kolem 21 korun. Výsledek tohoto pokusu nám již dává lepší představu o Petrohradském paradoxu.

Můžeme se také na závěr tohoto pokusu podívat na to, jak moc je průměrná výhra ovlivněna těmito nejvyššími Jackpoty.

Nechť

$D=\frac{\sum_{k=1}^{250}(\bar{w}_k-\bar{v}_k)}{250}$ je průměrná odchylka průměrné výhry a průměrné výhry po odečtení jedné nejvyšší výhry. U takovéto odchylky není třeba použít absolutní hodnoty nebo umocňovat, protože $\bar{w}_k > \bar{v}_k$ pro všechna k (pokud v daném pokusu není všech milion výher stejných, což je extrémně nepravděpodobné, v takovém případě by zde byla neostrá nerovnost).

Z našeho experimentu je $D=12{,}05$ a tedy i z tohoto výsledku je vidět, že nejvyšší výhra v každém milionovém pokusu má extrémně významný vliv na průměrnou výhru.
Výběrový rozptyl je

$$S_D^2=\frac{\sum_{k=1}^{250}(\bar{w}_k-\bar{v}_k-D)^2}{249}=2779{,}35$$

Tabulka 4 uvádí intervaly spolehlivosti pro $\bar{D}$ a tedy pro skutečný odhad parametru *D*, výše definované odchylky.

Tabulka 4

Intervaly spolehlivosti pro $\bar{D}$		
α	L	P
10%	6,56	17,50
5%	5,51	18,58
1%	3,46	20,63
0,1%	1,07	23,02

Tyto výsledky napovídají, že vliv vysokých výher na průměrných výhrách v různých pokusech jsou velmi nestabilní, to však není žádným překvapením vzhledem k tomu, že rozdíly jsou závislé na nejvyšších výhrách, které se v různých pokusech liší nejvíce.

Racionální hráč ve smyslu maximalizace očekávané hodnoty je tedy veden k vysokým sázkám v Petrohradském kasinu především na základě možnosti vysokých jackpotů. V minulém experimentu jsme se zabývali situacemi, kde opomíjel jednotlivec pouze přesný počet vysokých výher. Pojďme se podívat na podobný případ, co se s modelem stane, pokud budeme uvažovat pouze „reálně dosažitelné výhry“, jak už navrhovali matematici v 18. století.. Jak jsme si již řekli, některé obrovské výhry nejsou z daleka na dosah ani při sázení celý život. Pojďme se tedy podívat na sázky, které mají při odehrání milionu her alespoň 1% pravděpodobnost, že budou dosaženy. To jsou ty, které mají maximálně 26 hodů orla v řadě s výhrou asi 134 milionů korun s pravděpodobností 1,48%, že alespoň jednou padnou během milionu her.
V tuto chvíli se dostáváme do hry, která již bude mít konečnou očekávanou hodnotu a rozptyl.

$$E(w)=\frac{1}{2^1}2^1+\frac{1}{2^2}2^2+\frac{1}{2^3}2^3+...+\frac{1}{2^{27}}2^{27}=\sum_{i=1}^{27}\frac{1}{2^i}2^i=\sum_{i=1}^{27}1=27$$

Důvodem, proč je zde poslední člen s mocninou 27 je ten, že první člen reprezentuje hru s žádným úspěšným pokusem. Pokud tedy chceme hru s maximálně 26 úspěšnými hody, pak máme první člen s žádným úspěšným pokusem a potom dalších 26 členů.

$$E(w^2)=\sum_{i=1}^{27}\frac{1}{2^i}2^{2i}=\sum_{i=1}^{27}2^i=268435454$$

$$Var(w)=E(w^2)-E(w)^2=268435454-27^2=268434725$$

Subjekt maximalizující očekávanou hodnotu hry je tedy v této hře ochoten zaplatit za vstupenku do této hry maximálně 27Kč.

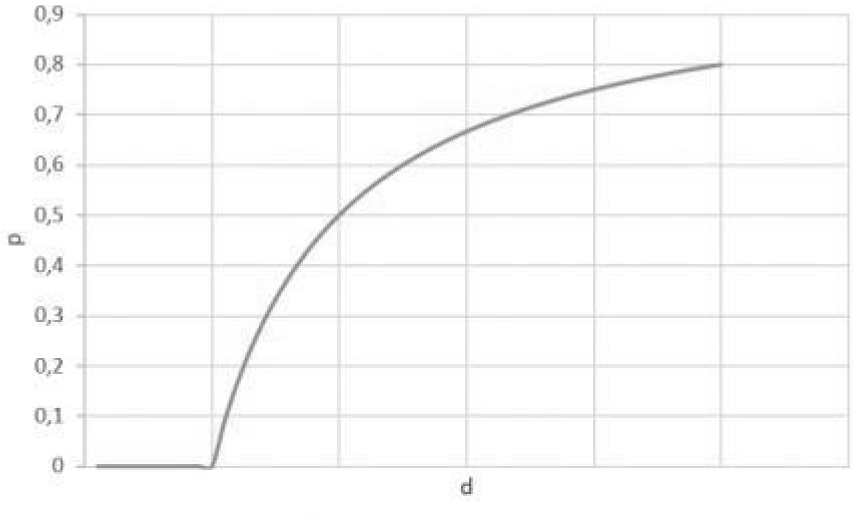
3.4. Maximalizace pravděpodobnosti ekonomického přežití

Petrohradský paradox jasně ukazuje, že maximalizace očekávané hodnoty hry není nejlepším řešením. Další možností je maximalizace pravděpodobnosti ekonomického přežití jedince v závislosti na jeho důchodu, tak jako navrhoval Whitworth v roce 1901.
Podle Hlaváčka (2002, s. 5) definujeme pravděpodobnost přežití jako

$$p(d)=\frac{d-b}{d}=1-\frac{b}{d} \text{ pro } d\geq b$$
$$p(d)=0 \text{ pro } d<b$$

kde d je důchod jednotlivce, b je existenční hranice jednotlivce. Pokud důchod jednotlivce klesne pod existenční hranici, pak je jeho pravděpodobnost rovna nule. Pravděpodobnost ekonomického přežití ilustruje Graf 5.

Graf 5



Profesor Hlaváček nejprve definuje Leningradské kasino. Definice této leningradské hry je taková, že hráč nevyhrává nic, pokud hozených orlů v radě není alespoň 31, v případě, že počet orlů v řadě je alespoň 31, potom se výhra řídí podle pravidel petrohradské hry. Je to tedy případ, kdy jsou ve hře pouze astronomické jackpoty. Přestože na první pohled je vidět, že do této hry by v realitě nevstoupil nikdo, i tato hra má nekonečnou očekávanou hodnotu.

$$E(w)=\frac{1}{2^1}0+\frac{1}{2^2}0+\ldots+\frac{1}{2^{32}}2^{32}+\frac{1}{2^{33}}2^{33}+\ldots=\sum_{i=32}^{\infty}\frac{1}{2^i}2^i=\sum_{i=32}^{\infty}1=\infty$$

Upravme si tuto hru na případ než případ s maximálně 26 úspěšnými hody v řadě. I tato hra má pochopitelně nekonečnou očekávanou hodnotu

$$E(w)=\sum_{i=28}^{\infty}1=\infty$$

Původní pravděpodobnost ekonomického přežití je $p_1=1-\frac{b}{d}$

Pravděpodobnost ekonomického přežití při nulové výhře v leningradské hře je $p_2=1-\frac{b}{d-x}$

kde x je velikost sázky a *(d-x)* je tedy nový důchod. Z výrazu p_2 je zřejmé, že při zvyšující se velikosti sázky se snižuje pravděpodobnost ekonomického přežití.

Změna pravděpodobnosti ekonomického přežití při nulové výhře je tedy

$$\Delta p=p_1-p_2=1-\frac{b}{d}-1+\frac{b}{d-x}=\frac{b}{d-x}-\frac{b}{d}=b.\left(\frac{1}{d-x}-\frac{1}{d}\right)$$

Pro jakoukoliv kladnou výhru v leningradské hře platí, že zajišťuje prakticky jisté ekonomické přežití s pravděpodobností 99,99% až do existenční hranice 25000Kč. Pravděpodobnost na minimálně kladnou výhru je zde $\frac{1}{2^{27}}$

Pro jednotlivce maximalizujícího pravděpodobnost ekonomického přežití v tomto případě musí platit, že pravděpodobnost na jisté přežití bude alespoň taková jako ztráta pravděpodobnosti při neúspěchu ve hře (Hlaváček, 2002, s. 8).

$\frac{1}{2^{27}}\geq b\left(\frac{1}{d-x}-\frac{1}{d}\right)$ kde $d>x$ => $d-x>0$ (jedinec rozhodně nevsadí vice než svůj důchod)

Po úpravě dostáváme

$$x\leq\frac{d^2}{d+b\,2^{27}}$$

Budeme-li uvažovat existenční hranici minimálně 1Kč (pro menší existenční hranice blížící se nule nemá smysl uvažovat nějaké studie o tom, kdy se bude jedinec nad hranicí pohybovat), pak je zřejmé, že se uvažovaná sázka bude blížit k nule, dokud nebude jedincův důchod v porovnání s hranicí zániku vysoký. Při existenční hranici 1Kč je pro to, aby jedinec byl ochoten zaplatit za leningradskou hru alespoň 1Kč, potřeba, aby jeho důchod byl minimálně 11586Kč. Jeho pravděpodobnost na ekonomické přežití bez hraní však sama o sobě $1-\frac{1}{11586}=0{,}999914$

Nechť je $a := \frac{d}{b}$ a tedy $d = a.b$

Potom $x \leq \frac{a^2 b^2}{b(a+2^{27})} = \frac{a^2 b}{a+2^{27}}$

Je vidět, že funkce $f(a,b) = \frac{a^2 b}{a+2^{27}}$ je rostoucí v parametru b a od $a=1$ rostoucí i v parametru a (pro $a<1$ budeme řešit později). V tuto chvíli budeme v závislosti poměru současného důchodu a existenční hranice budeme zkoumat, zda může vůbec někdo vsadit v leningradském kasinu a zlepšit si tak očekávanou pravděpodobnost na ekonomické přežití.

Uvažujme jedince, který má $a=10$ a tedy důchod desetkrát vyšší než hranici ekonomického zániku. Jeho pravděpodobnost na přežití při nevsazení je $p_1 = 1 - \frac{1}{10} = 0{,}9$ a tedy tento subjekt je sám o sobě velmi bohatý. Pro to, aby se mu s ohledem na maximalizaci pravděpodobnosti ekonomického přežití vyplatilo vsadit alespoň jeden haléř, pak musí být hranice zániku alespoň 13422Kč a jeho důchod tedy minimálně 134220Kč. Pro tento subjekt je tedy jasné, že za žádných „rozumných" okolností není ochoten v leningradském kasinu hrát.
Otázka zní, zda se vyplatí vsadit pro některé extrémně bohaté hráče.
Nechť $a=100$
Tento hráč bez hry sám ještě má reálnou pravděpodobnost na ekonomické nepřežití.
$p_1 = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$
Pro tohoto hráče už má smysl jeden haléř, je-li existenční hranice rovna 134,22Kč a jeho důchod tedy 13422Kč. Aby tento hráč vsadil alespoň jednu korunu, pak již musí být existenční minimum 13422Kč a jeho důchod 1342178Kč.

Pro extrémního boháče s $a=1000$ je pravděpodobnost na ekonomické přežití bez sázení $0{,}999$. I pro něj existuje reálná pravděpodobnost na nepřežití, byť malá, 0,1%.
Aby tento hráč vsadil 10Kč, pak musí být existenční hranice alespoň 1342Kč.
V krajních situacích, tedy pro velké boháče by mohlo mít smysl v leningradském kasinu hrát, pokud by hranice přežití byla 1000Kč, pak by se vyplatilo vsadit alespoň jednu korunu boháčům, kteří mají důchod na úrovni alespoň 367 násobku existenčního minima.

Tabulka 6 ukazuje přehled ze studie leningradského kasina pro různé úrovně „bohatství" jednotlivce.

Tabulka 6

a	d	b	x
3	44739	14913	0,001
5	26850	5370	0,001
10	134220	13422	0,01
20	67109	3355	0,01
30	44739	1491	0,01
50	26844	537	0,01
50	134218	2684	0,05
100	134218	1342	0,1
100	671089	6711	0,5
1000	134219	134	1

Existují tedy lidé, kteří budou chtít v leningradském kasinu hrát za nějaké „rozumně“ vysoké vstupné, nicméně možné výhry v leningradském kasinu, jinými slovy astronomicky vysoké výhry, jsou v rozhodování jednotlivce o výši vstupného zanedbatelné.

Pro jedince, který má $a<1$ a tedy současný důchod nižší než hranici ekonomického přežití se však vyplatí vsadit v leningradském kasinu za jakýchkoliv podmínek. Ekonomický zánik při nevsazení ho čeká každopádně, při jakékoliv kladné výhře, byť krajně nepravděpodobné má jedinec téměř jisté ekonomické přežití. Tomuto jedinci se však vyplatí vsadit do jakékoliv hry, u které možná výhra bude vyšší než hranice ekonomického přežití. Navíc si nepohorší ani při sázce, která ho nemusí (dokonce ani nemůže) dostat na hranici s nenulovou pravděpodobností na ekonomické přežití. Tedy jedinec s $a<1$ by měl vsadit na jakoukoliv, byť mimořádně nevýhodnou hru, nikdy si nepohorší.

Vraťme se zpět k modelu petrohradského kasina. Jednotlivec z předchozí studie se nenechá ovlivnit astronomicky vysokými částkami a v rozhodování na základě maximalizace pravděpodobnosti ekonomického přežití se bude nechávat ovlivnit pouze „reálně dosažitelnými“ výhrami, které jsme si definovali výše tak, že jsou to takové výhry, které mají pravděpodobnost minimálně 1%, že padnou při odehrání milionu her. Jsou to tedy hry s maximálně 26 orli v řadě a výhrou maximálně 134 milionů korun.

Při vsazení do této petrohradské hry je důchod následující
$\tilde{d}=d-x+2^i$ kde d je původní důchod, x je vsazená částka. Jednotlivec hodil hlavu (tedy hru ukončil) v i-tém pokusu.

Pravděpodobnost ekonomického přežití po vsazení je tedy
$$\tilde{p}=1-\frac{b}{\tilde{d}}=1-\frac{b}{d-x+2^i}=1-\frac{b}{a.b-x+2^i} \text{ kde } a=\frac{d}{b}$$
a z toho tedy lze odvodit očekávanou pravděpodobnost ekonomického přežití
$$E(\tilde{p})=\sum_i^{27}[(1-\frac{b}{a.b-x+2^i})\frac{1}{2^i}]$$

Očekávanou pravděpodobnost ekonomického přežití při vsazení v petrohradské hře následně porovnejme s pravděpodobností ekonomického přežití v případě nevsazení, ta je rovna
$$p=1-\frac{b}{d}=1-\frac{1}{a}$$

Maximální částkou *x*, kterou bude jednotlivec maximalizující pravděpodobnost ekonomického přežití ochoten zaplatit, bude řešení následující rovnice s parametry *a* a *b*.

$$\sum_{i=1}^{27}[(1-\frac{b}{a.b-x+2^i})\frac{1}{2^i}]=1-\frac{1}{a}$$
$$1-\frac{1}{a}-\sum_{i=1}^{27}[(1-\frac{b}{a.b-x+2^i})\frac{1}{2^i}]=0$$

Tabulka 7 obsahuje řešení *x* poslední rovnice v závislosti na parametrech *a* a *b*.

Tabulka 7

b	a=2	a=5	a=10	a=50
5	3,96	4,88	5,65	7,66
10	4,64	5,65	6,49	8,59
100	7,37	7,91	9,54	11,81
200	8,29	9,55	10,51	12,80
300	8,84	10,11	11,09	13,38
500	9,55	10,83	11,81	14,11
1000	10,51	11,81	12,80	15,10
10000	13,80	15,11	16,10	18,25

Z těchto výsledků je vidět, že sázky přibližující se výsledkům z předchozích pokusů jsou až při vysokých existenčních minimech a při vysoké úrovni bohatství. Při pokusu s ignorováním vysokých výher jsme zjistili, že průměrná výhra se pohybuje kolem 21Kč. Aby byl jedinec ochoten vsadit 21Kč při maximalizování pravděpodobnosti ekonomického přežití, je jedinou možností, aby byl sám extrémně bohatý. Při hranici ekonomického zániku $b=500$ musí pro sázku 21Kč být $a=14152$ a tedy aby jeho původní důchod byl více než 7 milionů.

Nyní můžeme shrnou výsledky z pokusů a teorie o Petrohradském paradoxu. Na otázku, kolik má racionální jedinec být ochoten zaplatit za vstupenku do jedné petrohradské hry jsme našli několik odpovědí lišících se v závislosti na použité metodě. Na základě očekávané hodnoty hry nelze na otázku odpovědět, jelikož očekávaná hodnota hry překračuje všechny meze. Na základě odehrání petrohradské hry milionkrát jsme zjistili, že průměrná výhra je 24,39, nicméně již na první pohled bylo jasné, že se průměrné výhry z milionových pokusů znatelně liší. Při odehrání 250 milionu her jsme zjistili, že průměrná výhra byla 32,89% s horní hranicí 10% intervalu spolehlivosti průměrné výhry v petrohradském 38,42. Milionové pokusy s ignorováním právě jedné nejvyšší výhry přinesly výrazně stabilnější výsledky, odpověď na naši otázku na základě průměrné výhry za daných podmínek je 20,84 s velmi úzkými intervaly spolehlivosti, 0,1% interval spolehlivosti pro průměrnou výhru za daných podmínek byl (20,27; 21,42). Při ignorování extrémně nepravděpodobných výher s minimálně 27 úspěšnými hody je očekávaná hodnota hry 27Kč, nicméně tato očekávaná hodnota se mění pouze podle toho, jak definujeme tyto extrémně nepravděpodobné výhry. Při rozhodování na základě maximalizace pravděpodobnosti ekonomického přežití dospíváme k různým výsledkům na základě hranice ekonomického zániku a na základě původního důchodu. Toto rozhodování je ovlivněno právě pouze možnými výhrami s maximálně 26 úspěšnými hody v řadě. K sázkám převyšujících 20Kč, tedy k hranicím z předchozích pokusů, se dostáváme pouze v extrémních případech, především v případech, kdy je jednotlivec extrémně bohatý. K očekávané hodnotě 27Kč při uvažované se dostat prakticky nedá. V krajním případě, kdy je jedinec s původním důchodem pod hranicí ekonomického zániku je výsledek triviální, jedinec si nepohorší, ať vsadí jakkoliv vysokou částku.

4. Sportka vs Poker

Nejen v České republice je velmi populární možností, jak si zahrát o peníze, sázet státní loterii, Sportku. Není však žádným tajemstvím, že sázení Sportky je velmi nevýhodné, dokonce méně výhodné než většina hazardních her v kasinech. Přesto denně sází v České republice Sportku tisíce lidí. Díky velkému množství sázících je také výskyt vysokých výher častý. A hlavně díky vidině těchto vysokých jackpotů (v řádech desítek až stovek milionů) se lidé nechávají k sázení Sportky zlákat. V této části práce budu porovnávat, jak si v porovnání k sázení Sportky vede další světově populární možnost hraní o peníze, poker. Často omílané kontroverzní téma se vede kolem otázky, zda je poker dovednostní hra a nebo hazard. Odpověď na tuto otázku je velice důležitá, na základě ní se odvíjí legislativa ohledně pokeru v různých zemích světa. Na tuto otázku však odpověď v této práci hledat nebudeme. Pokerem se po celém světě živí desítky tisíc lidí a je tedy jasné, že bez ohledu na to, zda je to hazard nebo dovedností hra, tak očekávaná hodnota a možnost hrát dlouhodoběji ziskově má výrazně lepší vyhlídky při hraní pokeru než při hraní Sportky. Odpověď na otázku, zda je lepší hrát poker nebo Sportku s ohledem na očekávanou výhru zde hledat také nebudeme. Už hlavně proto, že očekávaná hodnota pokeru velmi silně závisí na schopnostech jednotlivých pokerových hráčů. Kdyby všichni hráči na světě hráli stejně, tedy ve stejných situacích se rozhodovali identicky, pak by byl rozhodně poker před sázením Sportky výrazně napřed. Zajímavá je však otázka, jak by si vedl v porovnání se Sportkou v pokeru hráč, který by vůbec neznal pokerová pravidla. Speciálně, jak si bude vést hráč, který bez ohledu na situaci, bez ohledu na karty, bez ohledu na velikosti sázek, bez ohledu na soupeře bude při každém rozhodnutí sázet maximální možnou sázku, vsadí tedy vždy všechny své žetony (v pokeru all-in). Je jasné, že tento hráč nebude jeden z těch, který se pokerem může živit. Tento hráč samozřejmě bude prohrávat veliké množství peněz. Jak si však povede v porovnání se Sportkou? Budeme se věnovat především zhruba rok starému formátu turnajů v pokeru, formátu který se hraje výhradně po internetu, typu turnaje, který zaznamenal po svém uvedení na trh obrovský boom. Tyto turnaje si získaly mezi pokerovou komunitou tak vysokou popularitu, že je musely zavést všechny velké pokerové internetové herny. Nepřekvapivě se jedná o turnaj, který láká hráče na vidinu astronomických výher. Hráč může z pohodlí domova v této variantě pokerového turnaje vyhrát během pěti minut z jednotek dolarů až 1 000 000 amerických dolarů.

4.1. Sportka

Nejdříve se však budeme věnovat Sportce, jak je na tom s pravděpodobnostmi a s očekávanou hodnotou a zda je losování skutečně náhodné.

Budeme vycházet z Herního plánu společnosti Sazka. Sázející na jedné sázence najde 10 sloupců pro tipování. V každém sloupci je 49 čísel a sázející z nich vybírá 6, nezáleží na pořadí. Sázející sází 1 – 10 sloupců (10 nezávislých sázek), cena sázky na každý sloupec je 20Kč. K tomu je ještě na sázence možnost hry Šance. Ve hře Šance sázející sází na šesticiferné číslo, o tomto čísle nerozhoduje, je to koncové šestičíslí výrobního čísla této sázenky. Cena Sázky ve hře Šance je dalších 20Kč. Celkem tedy může na jedné sázence být vsazeno za 220Kč na jeden losovací den (stejná sázenka se dá vsadit i na více dnů najednou, rozdíl mezi sázkou jedné sázenky na více dnů nebo více sázenek, na každý den jednu, však nehraje roli).

V každém sázecím dnu (zpravidla středa a neděle) se losuje ve hře Sportka 6+1 čísel (6 základních a 1 dodatkové) ze 49 ve dvou různých tazích (dvou navzájem nezávislých losováních) a hra Šance. Čísla ve Sportce se v jednom tahu nemohou opakovat a nezáleží na pořadí. Ve hře Šance se losuje šesticiferné číslo, záleží tedy na pořadí a číslice se mohou opakovat.

4.1.1. Typy výher

Ve základní hře Sportky rozlišujeme 6 typů výher:

Superjackpot:
Sázející vyhrává Superjackpot (Bonus) právě tehdy, když splnil všechny tyto podmínky:
1. Vsadil všech 10 sloupců sázenky a hru Šance
2. V alespoň jednom sloupci správně tipoval všech 6 čísel ze 6 losovaných (v alespoň jednom z tahů). Na dodatkovém čísle nezáleží.
3. Získal jakoukoliv výhru ve hře Šance

1. pořadí:
Sázející vyhrává výhru v tzv. 1. pořadí právě tehdy, když správně tipoval všech 6 čísel ze 6 losovaných (alespoň v jednom z tahů). Na dodatkovém čísle nezáleží.

2. pořadí:
Sázející vyhrává výhru ve 2. pořadí právě tehdy, když správně tipoval právě 5 čísel ze 6 losovaných a zároveň zbývající jedno nevylosované číslo bylo dodatkovým číslem.

3. pořadí:
Sázející vyhrává výhru ve 3. pořadí právě tehdy, když správně tipoval právě 5 čísel ze 6 losovaných a zároveň zbývající jedno nevylosované číslo nebylo dodatkovým číslem.

4. pořadí
Sázející vyhrává výhru ve 4. pořadí právě tehdy, když správně tipoval 4 čísla ze 6 losovaných. Na dodatkovém čísle nezáleží.

5. pořadí
Sázející vyhrává výhru v 5. pořadí právě tehdy, když správně tipoval 3 čísla ze 6 losovaných. Na dodatkovém čísle nezáleží.

Při všech ostatních situacích sázející ve Sportce nic nevyhrává.

Ve hře Šance rozlišujeme 6 typů výher:

(i) Pokud vsazené číslo a vylosované číslo má shodnou poslední číslici (a předposlední rozdílnou), vyhrává sázející pevnou částku 50Kč.

(ii) Pokud vsazené číslo a vylosované číslo má shodné dvě poslední číslice (předchozí minimálně jednu číslici rozdílnou), vyhrává sázející pevnou částku 100Kč.

(iii) Pokud vsazené číslo a vylosované číslo má shodné tři poslední číslice (předchozí minimálně jednu číslici rozdílnou), vyhrává sázející pevnou částku 1000Kč.

(iv) Pokud vsazené číslo a vylosované číslo má shodné čtyři poslední číslice (předchozí minimálně jednu číslici rozdílnou), vyhrává sázející pevnou částku 10 000Kč.

(v) Pokud vsazené číslo a vylosované číslo má shodných 5 posledních číslic (a první číslo rozdílné), vyhrává sázející pevnou částku 100 000Kč.

(vi) Pokud je vsazené a vylosované číslo stejné, sázející vyhrává zbytek celkové výše na výhry v daném losování (bude uvedeno později), minimálně však 200 000Kč.

Pokud je poslední číslice vsazeného čísla a vylosovaného čísla rozdílná, pak sázející nevyhrává nic bez ohledu na ostatní číslice.

4.1.2. Výpočet pravděpodobností

Nyní se tedy můžeme podívat na pravděpodobnosti jednotlivých tipů výher.
Nejprve vypočtěme, kolika způsoby se dá vylosovat 6 různých čísel ze 49. Jedná se o kombinaci bez opakování:

$$C_k(n)=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

V našem případě

$$C_6(49)=\binom{49}{6}=13983816$$

K vypočtení pravděpodobností tažení určitého počtu správně tipovaných čísel využijeme Klasickou definici pravděpodobnosti: Je-li *n* situací se stejnou možností výskytu, ze kterých právě jedna musí nastat, a *m* z těchto situací jsou příznivé pro jev A, potom

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

V našem případě *n* je vždy $\binom{49}{6}$

Chceme-li znát pravděpodobnost, že právě *i* (*i* = 0,1, …, 6) tipovaných čísel bude vylosováno, pak musíme zjistit, kolika způsoby, může být právě *i* námi tipovaných čísel vylosováno. Tento počet způsobů je *m* z předchozí definice.
Je šest vylosovaných čísel a my chceme, aby právě *i* z nich byla naše tipovaná čísla. Počet způsobů, jak vybrat *i* z 6 je opět kombinace bez opakování, tedy $\binom{6}{i}$

Zároveň ale potřebujeme, aby nebyla vylosovaná zbylá zaškrtnutá čísla, těch je 6 – *i*. Tato čísla vybíráme ze zbylých čísel, která zbudou v osudí, těch je 43 a tedy počet možností, jak vybrat 6 – *i* čísel ze 43 je znovu kombinace bez opakování a tedy $\binom{43}{6-i}$

A tedy právě *i* tipovaných čísel může být vylosováno celkem $\binom{6}{i}.\binom{43}{6-i}$ způsoby.

A podle předchozí definice je tedy pravděpodobnost, že bude vylosováno právě *i* našich tipovaných čísel:

$$P(A_i)=\frac{\binom{6}{i}.\binom{43}{6-i}}{\binom{49}{6}}$$

kde A_i je jev, při kterém bylo vylosováno právě *i* tipovaných čísel. Tyto jevy se jsou navzájem výlučné pro různá *i*.
Přestože tato pravděpodobnost může vypočítána bez znalosti jakéhokoliv rozdělení, tyto pravděpodobnosti jsou mimo jiné pravděpodobnosti tzv. Hypergeometrického rozdělení.

Nyní můžeme jednoduše vypočítat pravděpodobnosti na výhry v jednom tahu 1. pořadí, 4. pořadí a 5. pořadí. 2. a 3. pořadí ještě závisí na dodatkovém čísle, můžeme prozatím však vypočítat pravděpodobnost na výhru 2. nebo 3. pořadí.

$P(A_0)=0{,}43965$
$P(A_1)=0{,}413019$
$P(A_2)=0{,}132378$
$P(A_3)=0{,}01765$
$P(A_4)=0{,}000969$
$P(A_5)=1{,}84.10^{-5}$
$P(A_6)=7{,}15.10^{-8}$

$\sum_{i=1}^{6} P(A_i)=1$ a jsou to tedy skutečně všechny možnosti.

Pravděpodobnost výhry v 1. pořadí je tedy $P(A_6)$
Pravděpodobnost výhry ve 2. a nebo ve 3. pořadí je $P(A_5)$
Pravděpodobnost výhry ve 4. pořadí je $P(A_4)$
Pravděpodobnost výhry v 5. pořadí je $P(A_3)$

Pravděpodobnost toho, že sázející nevyhraje nic je $P(A_2)+P(A_1)+P(A_0)=0{,}981362$, kde toto plyne z axiomatických definicí pravděpodobnosti, konkrétně z faktu, že $P(U_{n=1}^{\infty} A_n)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ pro jakoukoliv posloupnost *{Aₙ}* navzájem výlučných jevů.
A z toho také tedy okamžitě plyne pravděpodobnost na jakoukoliv kladnou výhru
$P(W)=1-(P(A_2)+P(A_1)+P(A_0))=0{,}018638$

Zbývá dopočítat pravděpodobnost na výhru ve 2. a 3. pořadí. Ty se liší pouze v tom, zda sázející správně typoval dodatkové číslo.
Pravděpodobnost na to, že sázející správně typoval dodatkové číslo (v případě, že správně typoval 5 čísel v základní hře), je 1/43 a tedy pravděpodobnost, že dodatkové dodatkové číslo bylo jiné než typované je 42/43.

Pravděpodobnost na výhru ve 2. pořadí je tedy

$$P(A_{5,1})=\frac{\binom{6}{5}.\binom{43}{6-5}}{\binom{49}{6}}.\frac{1}{43}=4{,}29067.10^{-7}$$

Pravděpodobnost na výhru ve 3. pořadí je

$$P(A_{5,0})=\frac{\binom{6}{5}.\binom{43}{6-5}}{\binom{49}{6}}.\frac{42}{43}=P(A_5)-P(A_{5,1})=1{,}80208.10^{-5}$$

Doteď jsme však počítali pravděpodobnosti na výhru v jednom tahu. Vzhledem k tomu, že se jednou sázkou sází na dva různé tahy, jsou pravděpodobnosti na výhry vyšší (ne však na „větší“ výhry, protože peníze na výhry se samozřejmě dělí mezi oba tahy, o tom později).

Nejprve vypočítáme pravděpodobnost na to, že hráč vyhraje v 1. pořadí v některém ze dvou tahů. Ta se hodí při uvažování Superjackpotu.
Pravděpodobnost, že sázející správně netipoval všech 6 čísel je
$P(U_{i=0}^{5} A_i) = 1 - P(A_6)$

Pravděpodobnost, že netipoval všech 6 čísel správně ve dvou různých tazích je
$[P(U_{i=0}^{5} A_i)]^2 = [1 - P(A_6)]^2$ kde toto plyne z faktu, že oba dva tahy jsou navzájem nezávislé.

A nakonec pravděpodobnost, že alespoň v jednom z tahů tipoval správně všech 6 čísel a současně tedy pravděpodobnost na výhru v prvním pořadí, je
$P(A_6^2) = 1 - [1 - P(A_6)]^2 = 1{,}43022.10^{-7}$

Dále můžeme obdobným způsobem počítat pravděpodobnost na jakoukoliv kladnou výhru.
Pravděpodobnost na to, že sázející nevyhraje nic, jsme již počítali, je to $P(U_{i=0}^{2} A_i)$
Tedy pravděpodobnost na to, že nevyhraje nic ve dvou tazích je
$[P(U_{i=0}^{2} A_i)]^2$

A tedy pravděpodobnost, že sázející vyhraje alespoň v jednom ze dvou tahů nějakou výhru je $P(W) = 1 - [P(U_{i=0}^{2} A_i)]^2 = 0{,}036928$

Tedy pravděpodobnost, že ve Sportce (při sázení jednoho sloupce) hráč vyhraje alespoň nějakou částku je pouze 3,69%.

Nyní prozkoumejme pravděpodobnosti ve hře Šance.

Ve hře Šance se losuje šesticiferné číslo a případná výhra závisí na tom, kolik posledních vsazených číslic měl hráč shodných s vylosovanými čísly.
Zde je výpočet pravděpodobností ještě jednodušší. Pravděpodobnost na to, že sázející správně typoval právě posledních *k* čísel je

$P(B_k) = \left(\frac{1}{10}\right)^k . \frac{9}{10}$ pro $k = 0, \ldots, 5$

$P(B_6) = \left(\frac{1}{10}\right)^6$

$\sum_{k=0}^{6} P(B_k) = 1$

4.1.3. Testy spravedlnosti losování

Společnost Sazka často uvádí poslední statistiky četnosti tažení čísel a láká hráče, aby se rozhodli na základě těchto statistik vsadit. Zároveň Sazka garantuje spravedlivé losování. Toto budeme zkoumat nyní na základě statistik tažených čísel v Testech dobré shody (Test of good fit).

Nejprve využijeme X^2 test.

K tomu využijeme X^2 statistiku $X^2 = \sum_{i=1}^{49} \frac{(X_i - n p_i)^2}{n p_i}$

Kde X_i je četnost tažení i-tého čísla během sledovaného období
n je počet pozorování
p_i je teoretická pravděpodobnost vytažení i-tého čísla
$n p_i$ je teoretická četnost tažení i-tého čísla.
Nyní budeme potřebovat definici Multinomického rozdělení, celá definice, věta a důkaz konvergence k X^2 rozdělení je uvedena například Anděl (2007, s. 267-270). Pro Multinomické rozdělení potřebujeme k náhodných proměnných (které udávají, zda bylo číslo náhodné proměnné vylosováno), kdy při losování je vždy vylosováno právě jedno číslo a toto číslo má pro všechna jednotlivá losování stejnou pravděpodobnost
Pokud $(X_{1,}\ldots,X_{49})'$ následuje multinomické rozdělení, potom následuje X^2 asymptoticky rozdělení X^2_{k-1}

Použijeme zde data ze všech losování Sportky z období 16. týden 1957 – 53. týden 2009. Ve Sportce se vylosovalo 44562 čísel a tedy $n=44562$. Naše $k=49$, jelikož se losuje ze 49 čísel. Teoretická pravděpodobnost na tažení každého čísla je 1/49, tedy $p_1=p_2=\ldots=p_{49}$
Teoretická četnost tažení *i*-tého čísla je 909,4286.

$$X^2=\sum_{i=1}^{49}\frac{(X_i-n p_i)^2}{n p_i}=39{,}56111$$

Nyní budeme toto číslo srovnávat s kritickými hodnotami X^2_{48}
H_0 :Shoda je dobrá, tažení čísel je náhodné.

Na úrovni spolehlivosti 10% je kritická hodnota pro X^2_{48} rovna 60,907.
Jelikož je 60,907 > 39,5611, nemůžeme na úrovni 10% zamítnout H_0
Nemáme dostatek důkazů, abychom tvrdili, že na 90% je losování jednotlivých čísel nespravedlivé.

Jelikož jsme nezamítli H_0 na úrovni 10%, nemůžeme hypotézu zamítnout ani na jakékoliv nižší úrovni (s jakoukoliv spolehlivostí vyšší než 90%). P-value tohoto testu je 0,801928, při zamítnutí nulové hypotézy bychom tedy udělali chybu s pravděpodobností 80,1%.

Nyní jsme se přesvědčili, že losování jednotlivých čísel je spravedlivé ve smyslu celkových statistik. Mohlo by nás však zajímat, zda se neliší četnosti, pravděpodobnosti a spravedlnost v závislosti na tom, zda losujeme 1. a nebo 2. tah. Tedy, zda je losování čísel nezávislé na tom, v kterém tahu losujeme. Mohla by totiž nastat situace, kterou minulý test neodhalí, přitom by jasně popírala náhodné losování. Představme si situaci, že by ve sledovaném období bylo každé číslo vylosované celkem v součtu z obou tahů přesně tisíckrát. Jenomže si zároveň představme, že v této situaci byla lichá čísla vylosována 1000 krát v 1. tahu a 0 krát ve 2. tahu, zatímco všechna sudá čísla by byla vylosována 0 krát v 1. tahu a 1000 krát ve druhém tahu. Ve smyslu minulého testu je toto losování „perfektně spravedlivé", zjevně se ovšem o spravedlnosti, kdy bereme v úvahu různé tahy, nedá vůbec hovořit. Chtěli bychom tedy otestovat, zda je četnost vylosovaných čísel „spravedlivá". s ohledem na různé tahy. K tomu se nám budou hodit kontingenční tabulky (contingency tables) a v souvislosti s nimi test nezávislosti.

Při testu nezávislosti v kontingenční tabulce se používá již výše zmiňovaná X^2 statistika. Hypotéza nezávislosti bude postavena na faktu, že pokud jsou jevy *A* a *B* nezávislé, pak
$P(A\cap B)=P(A).(B)$

Budeme využívat kontingenční tabulku (ilustrace v Tabulce 8) četností tažení čísel.

Tabulka 8

VarX/VarY	1	2	...	c	Σ
1	n_{11}	n_{12}		n_{1c}	$n_{1.}$
2	n_{21}	n_{22}		n_{2c}	$n_{2.}$
...					
r	n_{r1}	n_{r2}		n_{rc}	$n_{r.}$
Σ	$n_{.1}$	$n_{.2}$		$n_{.c}$	n

n_{ij} značí četnost výskytu, kdy proměnná $X=i$ a proměnná $Y=j$

$n_{i.}=\sum_{j=1}^{c} n_{ij}$ značí četnost výskytu, kdy proměnná $X=i$

$n_{.j}=\sum_{i=1}^{r} n_{ij}$ značí četnost výskytu, kdy proměnná $Y=j$

$n=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} n_{ij}$ značí celkový počet tažení.

A pravděpodobnosti

p_{ij} jsou příslušné pravděpodobnosti $P(X=i;Y=j)$

$p_{i.}=P(X=i)$

$p_{.j}=P(Y=j)$

$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} p_{ij}=1$

A za teoretickou pravděpodobnost použijeme

$$\hat{p}_{ij}=\frac{n_{ij}}{n}$$

$$\hat{p}_{i.}=\frac{n_{i.}}{n}$$

$$\hat{p}_{.j}=\frac{n_{.j}}{n}$$

Zde budeme opět využívat X^2 statistiku, tentokrát ve formátu

$$X^2=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{(n_{ij}-TF_{ij})^2}{TF_{ij}}$$

X^2 zde asymptoticky následuje X_{k-1}^2

Věta a důkaz například Anděl (2007, s. 273).

TF je teoretická četnost. A právě tato teoretická četnost vychází z hypotézy nezávislosti H_0:

$P(A\cap B)=P(A).(B)$

$\hat{p}_{ij}=\hat{p}_{i.}.\hat{p}_{.j}$

$$\frac{n_{ij}}{n}=\frac{n_{i.}}{n}\cdot\frac{n_{.j}}{n}$$
$$n_{ij}=\frac{n_{i.}n_{.j}}{n}=TF_{ij}$$

X^2 zde následuje X^2_{k-1} rozdělení. Teď už nám stačí pouze dopočítat stupně volnosti $k-1$

V předchozí tabulce musíme dopočítat všechny marginální četnosti (a pravděpodobnosti), těch je $r+c$. Jenomže vycházíme z faktu, že
$$\sum_{i=1}^{r} p_{i.}=1$$

a tedy
$$p_{r.}=1-\sum_{i=1}^{r-1} p_{i.}$$

a obdobně

$$p_{.c}=1-\sum_{i=1}^{c-1} p_{.j}$$

a tedy musím dopočítat $(r-1)+(c-1)=r+c-2$

Celkový počet stupňů volnosti je tedy $r.c-(r+c)+2-1=r.c-r-c+1$

Nyní už k samotnému testu o tazích Sportky. Používáme zde data tažení všech čísel obou tahů (včetně dodatkových) z období 16. týden 1957 až 53. týden 2009. Druhý tah Sportky se však losoval až od 14. týdne 1965. Výhodou tohoto testu kontingenční tabulky je právě fakt, že přestože jsou data z různě dlouhých období a počet pozorování je různý, tomuto testu to vůbec neuškodí.

V našem případě
$$X^2=\sum_{i=1}^{49}\sum_{j=1}^{2}\frac{(n_{ij}-TF_{ij})^2}{TF_{ij}}=40{,}54$$
Toto číslo budeme porovnávat s kritickými hodnotami X^2_{48} rozdělení.

H_0 : Losování čísel Sportky je nezávislé na tahu.

Na úrovni spolehlivosti 10% je kritická hodnota pro X^2_{48} rovna 60,907.
Jelikož je 60,907 > 40,54, nemůžeme na úrovni 10% zamítnout H_0
Nemáme dostatek důkazů, abychom tvrdili, že na 90% je losování čísel různé pro různé tahy.

Jelikož jsme nezamítli H_0 na úrovni 10%, nemůžeme hypotézu zamítnout ani na jakékoliv nižší úrovni (s jakoukoliv spolehlivostí vyšší než 90%). P-value tohoto testu je 0,769008, při zamítnutí nulové hypotézy bychom tedy udělali chybu s pravděpodobností 76,9%.

Tabulky pro s teoretickými pravděpodobnostmi jsou v Příloze 1.

4.1.4. Očekávaná hodnota hry

Přesvědčili jsme se, že Sportky je spravedlivé a můžeme se posunout k výhrám a k očekávané hodnotě.

K tomu budeme potřebovat znát několik dalších pojmů:

Herní jistina – úhrn vkladů za všechny sázky číselné loterie přijatých v příslušném sázkovém období.

Výherní jistina - úhrnná částka určená na výplatu v číselné loterii v příslušném sázkovém období.

Výherní jistina Sportky je tvořena 50% částky Herní jistiny v příslušném sázkovém období, polovina této částky (tedy 25% Herní jistiny) je určena na výhry v I. tahu, druhá polovina této částky je určena na výhry ve 2. tahu.
Výherní jistina hry Šance je tvořena 50% částky Herní jistiny v příslušném sázkovém období.

Už zde bychom mohli něco odhadnout o očekávané hodnotě výhry. Fakt, že se na výhrách vyplácí 50% všech vsazených peněz by mohl napovídat, že očekávaná hodnota hry je polovina vkladu. Takto přesně to však nefunguje.

Pravidla pro vyplácení výher:

Výherní jistina se rozděluje na Výherní kvóty pro jednotlivá pořadí. Výhry v každém pořadí se rozdělují stejným dílem mezi výherce, výhra se zaokrouhluje na celé koruny dolů.

Dělení na Výherní kvóty vypadá takto:
Výhry v 1. pořadí – 22% z Výherní jistiny příslušného tahu
Výhry ve 2. pořadí – 7% z Výherní jistiny příslušného tahu
Výhry ve 3. pořadí – 9% z Výherní jistiny příslušného tahu
Výhry ve 4. pořadí – 12% z Výherní jistiny příslušného tahu
Výhry v 5. pořadí – 40% z Výherní jistiny příslušného tahu
Zbytek z Výherní jistiny, tedy 10% z obou tahů se ukládá do tzv. Bonusu. Tento Bonus je společný pro oba tahy.

(1) Nevyčerpané Výherní kvóty třetího až pátého pořadí z obou tahů společně s nedělitelnými zbytky všech výherních pořadí se převádějí do Bonusu.
(2) V případě, že nebude dosaženo některé z výher prvního nebo druhého pořadí v některém z tahů, převádí se daná částka do Výherní kvóty stejného pořadí a stejného tahu pro příští losování.
(3) V případě, že není dosaženo Bonusu, potom se převádí nevyčerpaná částka do Bonusu pro příští losování.
(4) V případě, že není dosažena výhra v prvním nebo druhém pořadí, potom je výše výhry ve třetím pořadí minimálně 10 000Kč.
(5) V případě, že by výhra pro jednotlivé výherce ve vyšším pořadí byla menší než pro výherce v nižším pořadí, pak je výhra pro jednotlivé výherce v obou pořadích stanovena jako rovný díl ze součtu Výherních jistin pro obě pořadí.
(6) Nastane-li případ, že Výherní kvóta Bonusu přesáhne 250 milionů Kč, převede se 200 milionů

Kč to Bonusového fondu. Po následujících 20 slosování se bude vyplácet 5 výher ve výši 2 miliony Kč v každém slosování (celkem tedy 100). Tito výherci budou losováni náhodně bez ohledu na vylosovaná čísla, podmínkou však je, že musí vsadit všech 10 sloupců a hru Šance (tedy splnit podmínky pro čerpání bonusu).

Nyní už máme všechna pravidla, abychom mohli počítat očekávané hodnoty hry. Očekávaná hodnota hry však bude záviset na více aspektech, například na tom, zda hráč splnil podmínky pro výhru v Bonusu. Vzhledem k tomu, že se výhry rozdělují stejným dílem mezi výherce, kteří vyhráli ve stejném pořadí, bude tedy záviset i na tom, která čísla sázející vsadil.

Pro očekávanou hodnotu budeme potřebovat vzorec pro diskrétní náhodnou proměnnou

$$EX=\sum_{i=1}^{\infty} x_i\, p_i$$

kde x_i značí výhru v i-tém případě a p_i pravděpodobnost na tuto výhru.

4.1.4.1. Očekávaná hodnota hry Šance

Pojďme se nejprve podívat na případ, kdy by byl pouze jediný sázející.

Ve hře Šance vyhrává sázející
50Kč s pravděpodobností 9%
100Kč s pravděpodobností 0,9%
1000Kč s pravděpodobností 0,09%
10 000Kč s pravděpodobností 0,009%
100 000Kč s pravděpodobností 0,0009%
200 000Kč s pravděpodobností 0,0001%.

$$EX=50.0{,}09+100.0{,}009+1000.0{,}0009+10000.0{,}00009+100000.0{,}000009+200000.0{,}000001$$
$$EX=8{,}3\,Kč$$

Vstupné do hry Šance stojí 20Kč a tak tedy jediný hráč ve hře Šance má očekávanou ztrátu 11,7Kč.

Při více hráčích musíme brát při očekávané hodnotě v potaz jejich počet. Při hře Šance sází každý sázející zcela náhodně. Zajímat nás bude počet výherců všech pořadí v souvislosti s velikostí výhry při správném tipování všech šesti čísel.
Nechť n je počet hráčů hrající hru Šance. Herní jistina Šance je 20.n Kč, výherní jistina pak 10.n.Kč. Označme $P(S_i)$ pravděpodobnost, že hráč správně tipuje posledních i čísel ve hře Šance. Potom v průměru tipuje správně i posledních čísel $n.P(S_i)$ sázejících. Pro výhry při správném tipování jednoho až pěti čísel z losovaného šestičíslí jsou vyhrazeny fixní částky, pro výhru při správném tipování všech čísel je vyhrazen zbytek částky určené na výhry, minimálně však 200 000Kč pro výherce této výhry(výherce zde může být nejvýše jeden, jelikož se sází čísla sázenky jsou navzájem rozdílná). Na výhru v nejvyšším pořadí je tedy určeno v průměru
$$n.\left(10-\sum_{i=1}^{5} P(S_i).V_i\right)$$
kde V_i značí fixní částku pro výhru při správném tipování *i* posledních čísel hry Šance.
Pokud hráč správně tipuje všechna čísla ve hře Šance, potom na tohoto hráče tedy v průměru čeká výhra $V_6(n)=10.n-(n-1)\sum_{i=1}^{5} P(S_i).V_i$, minimálně však 200 000Kč.

Funkce V_6 přesáhne hodnotu 200 000 při n = 105259.
Očekávaná celková výhra je rovna

$$EV_c(n)=\sum_{i=1}^{6} P(S_i)V_i \text{ pro } n\geq 105259$$

$$EV_c(n)=8{,}3 \text{ pro } n<105259$$

Zde se zabýváme očekávanou hodnotou pouze pro n<1000000, jelikož je 999 999 různých šestičíslí.

$$\lim_{n\to 999999} EV_c(n)=10$$

Zde však ještě musíme počítat z pravidlem z herního plánu, které říká: „V případě, že není dosažena výhra na koncové šestičíslí, částka připadající na tuto výhru se převádí do Výherní jistiny koncového šestičíslí následujícího sázkového období.“
Pro výpočet očekávané hodnoty využijeme trochu jinou logiku. Vzhledem k tomu, že všichni hráči sází náhodná čísla, potom neexistuje strategie, ve které by jeden hráč mohl získat více peněz z výher, než ostatní hráči. Všichni hráči mají v tomto případě stejnou očekávanou hodnotu hry. Peníze, které očekáváme, že se vyplatí na výhrách jsou tedy součtem očekávaných hodnot všech hráčů a tedy očekávaná hodnota jednoho hráče je podíl na této částce. Díky výše zmíněnému pravidlu se v dlouhém období nic z peněz na výhry neztrácí, nakumulované peníze pro nejvyšší výhru jsou vyplaceny dříve nebo později. Očekávaná hodnota hráče je tedy v dlouhém období právě výše Výherní jistiny, tedy 10Kč. Očekávaná hodnota jednotlivých losování se bude lišit v závislosti na tom, kolik peněz se pro nejvyšší výhru nakumulovalo. Výše zmíněná funkce EV_c nám dává očekávanou hodnotu hry v případě, kdy v minulém losovacím období byla vyplacena nejvyšší výhra a tedy žádné peníze nejsou nakumulovány.

4.1.4.2. Očekávaná hodnota Sportky

Očekávaná hodnota ve hře Sportka j složitější než ve hře Šance.

Předpokládejme nejprve jediného sázejícího, sázka na jeden sloupec. Předpokládejme navíc, že neplatí výše zmíněná pravidla (1) až (6) pro vyplácení výher.

Cena sázky činí 20Kč. Herní jistina je v našem případě tedy 20Kč. Výherní jistina je 50% Herní jistiny, tedy 10Kč, herní jistina každého z tahů je 5Kč

Výhra v 1. pořadí nastane s pravděpodobností $7{,}15.10^{-8}$, její výše je 22% výherní jistiny tahu, tedy 1,1Kč.

Výhra ve 2. pořadí nastane s pravděpodobností $4{,}29.10^{-7}$, její výše je 7% výherní jistiny tahu, tedy 0,35Kč.

Výhra ve 3. pořadí nastane s pravděpodobností $1{,}8.10^{-5}$, její výše je 9% výherní jistiny tahu, tedy 0,45Kč.

Výhra ve 4. pořadí nastane s pravděpodobností $9{,}69.10^{-4}$, její výše je 12% výherní jistiny tahu, tedy 0,6Kč.

Výhra v 5. pořadí nastane s pravděpodobností $0{,}01765$, její výše je 40% výherní jistiny tahu, tedy 2Kč.

A tedy očekávaná výhra jednoho tahu je $EX = 0{,}0358897\,Kč$
Očekávaná výhra obou tahů je dvojnásobek očekávané hodnoty jednoho tahu, tedy 0,0717795Kč.

V tomto speciálním případě je očekávaná ztráta 19,928221Kč.

Pokud v tomto hypotetickém případě aplikujeme pravidlo (4) o vyplácení výher, pak bude výhra ve 3. pořadí 10 000Kč, ostatní pořadí zůstávají. Očekávaná výhra z obou tahů pak je 0,432179. Očekávaná ztráta 19,56782Kč.

Důvodem, proč je tato očekávaná výhra tak nízká je ten, že velká část Výherní jistiny (ve většině případů dokonce celá Výherní jistina) není vyplacena nikomu. Ztráta pro hráče z Výherní jistiny nebude žádná ve chvíli, když v každém pořadí vyhraje nějaký výherce (Při aplikaci pravidla (2) o vyplácení výher stačí při nízkém počtu hráčů, aby byl některý výherce ve 3. až 5. pořadí).

Nyní předpokládejme n sázejících a ignorujme pravidla (2), (3) a (6) o vyplácení výher, tedy předpokládejme, že žádné peníze na výhry nejsou převedeny z minulého sázkového období. Dále předpokládejme, že sázející sází svá čísla zcela náhodně (toto je velmi silný předpoklad, v praxi se ukazuje, že není platný).
Herní jistina je v tomto případě n . 20 Kč.
Výherní jistina je tedy n . 10 Kč a Výherní jistina každého z tahů je n . 5Kč.

Označme v tomto případě $P(W_i)$ jako pravděpodobnost jednotlivce na vítězství v i-tém pořadí v jednom tahu (výše $P(W_1)=P(A_6)$, $P(W_2)=P(A_{5,1})$, $P(W_3)=P(A_{5,0})$, $P(W_4)=P(A_4)$ a $P(W_5)=P(A_3)$)
$P(W_1)$ je tedy pravděpodobnost hráče na výhru v 1. pořadí (pro jeden tah). Průměrně vyhraje v 1. pořadí $n.P(W_1)$ hráčů. Jelikož se výhra pro jednotlivá pořadí dělí mezi výherce rovným dílem, bude se tedy všech $n.P(W_1)$ hráčů dělit o výhru v 1. pořadí. Budeme-li chtít znát, s kolika dalšími hráči se dělí výherce, pak je to v průměru s $(n-1).P(W_1)$ hráči. Výhru si z pohledu výherce dělí včetně něj tedy $1+(n-1).P(W_1)$. Obdobně lze postupovat i v případě nižších pořadí.

Výhra v 1. pořadí nastane s pravděpodobností $P(W_1)=7{,}15.10^{-8}$, její výše je 22% výherní jistiny tahu, tedy n . 1,1Kč. Pokud sledovaný hráč vyhraje, pak se o výhru dělí $1+(n-1).7{,}15.10^{-8}$ hráčů.
Výše výhry pro jednoho hráče je v tomto případě v průměru $\frac{n.1{,}1}{1+(n-1).7{,}15.10^{-8}}\,Kč$

Výhra ve 2. pořadí nastane s pravděpodobností $P(W_2)=4{,}29.10^{-7}$, její výše je 7% výherní jistiny tahu, tedy n . 0,35Kč. Pokud sledovaný hráč vyhraje, pak se o výhru dělí $1+(n-1).4{,}29.10^{-7}$ hráčů.
Výše výhry pro jednoho hráče je v tomto případě v průměru $\frac{n.0{,}35}{1+(n-1).4{,}29.10^{-7}}\,Kč$

Výhra ve 3. pořadí nastane s pravděpodobností $P(W_3)=1{,}8.10^{-5}$, její výše je 9% výherní jistiny tahu, tedy n . 0,45Kč. Pokud sledovaný hráč vyhraje, pak se o výhru dělí $1+(n-1).1{,}8.10^{-5}$ hráčů.
Výše výhry pro jednoho hráče je v tomto případě v průměru $\frac{n.0{,}45}{1+(n-1).1{,}8.10^{-5}}\,Kč$

Výhra ve 4. pořadí nastane s pravděpodobností $P(W_4)=9{,}69.10^{-4}$, její výše je 12% výherní jistiny tahu, tedy n . 0,6Kč. Pokud sledovaný hráč vyhraje, pak se o výhru dělí $1+(n-1).9{,}69.10^{-4}$ hráčů. Výše výhry pro jednoho hráče je v tomto případě v průměru $\frac{n.0{,}6}{1+(n-1).9{,}69.10^{-4}}Kč$

Výhra v 5. pořadí nastane s pravděpodobností $P(W_5)=0{,}01765$, její výše je 40% výherní jistiny tahu, tedy n . 2Kč. Pokud sledovaný hráč vyhraje, pak se o výhru dělí $1+(n-1).0{,}01765$ hráčů. Výše výhry pro jednoho hráče je v tomto případě v průměru $\frac{n.2}{1+(n-1).0{,}01765}Kč$

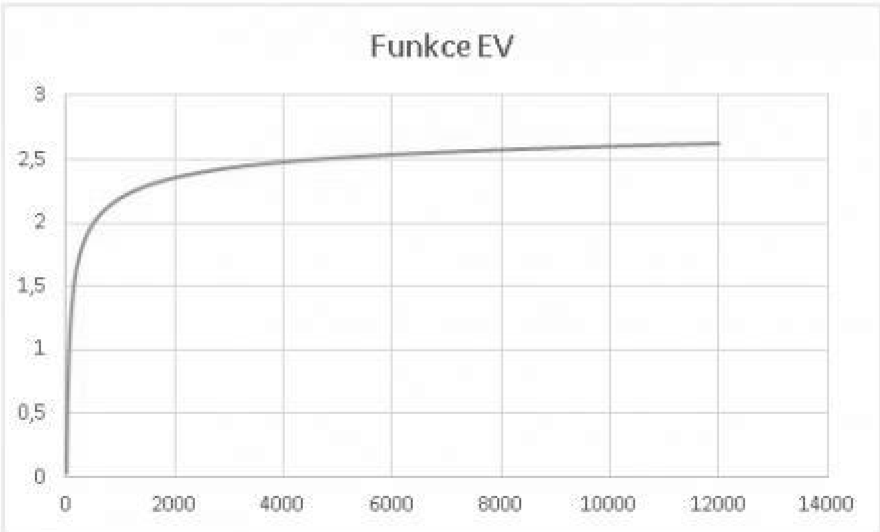
Očekávaná výhra jednotlivce v jednom tahu bude funkcí n

$$EV(n)=\sum_{i=1}^{5}\frac{P(W_i).5.n.Q_i}{1+(n-1).P(W_i)}$$

kde Q_i je podíl Výherní jistiny pro jednotlivá pořadí.

Funkce EV je rostoucí v n pro všechna $n > 0$. Graf funkce EV je ilustrován v Grafu 9.

Graf 9



$\lim_{n\to\infty} EV(n)=4{,}5$

Toto odpovídá tomu, že do Výherní jistiny jednoho tahu ze vsazených 20Kč putuje 5Kč, ze kterých ještě 10% jde do Bonusu, zbývá tedy 4,5Kč.

Znamená to tedy, že očekávaná hodnota hráče je tím vyšší, čím více lidí sází. Aby byla očekávaná hodnota jednoho tahu alespoň 4Kč, pak by muselo vsadit 19,4 milionu lidí. To je pochopitelně číslo, ke kterému se v České republice nikdy nedostaneme. V realitě bývá (vzhledem k tomu, že je běžné sázet více sloupců, tedy více sázek) toto číslo zhruba desetkrát menší. Očekávaná hodnota hry je v tomto případě jen něco přes 3,3Kč. K tomu však slouží pravidlo (2) o vyplácení výher, které říká, že pokud nebylo dosaženo výhry v 1. nebo 2. pořadí, převádí se Výherní kvóta daného tahu do Výherní kvóty stejného tahu příštího losovacího období. Jelikož se peníze na výhry z 1. a 2. pořadí při nevyčerpání vždy převedou do příštího losovacího období, nikdy se tyto peníze „neztrácí“.

Očekávaná hodnota hry potom závisí na tom, kolik peněz se převedlo na výhry z minulého období. Bylo-li v minulém losovacím období dosaženo 1. i 2. pořadí, potom je očekávaná hodnota řídí podle výše dané funkce EV.
Ignorujeme-li stále pravidlo (1) o vyplácení výher, potom jediné ztráty pro hráče z Výherní jistiny plynou z nevyčerpání výher některého z 3. až 5. pořadí.

Nyní se tedy podíváme, jak je na tom hráč s očekávanou hodnotou hry, vezmeme-li v potaz pouze výhry ve 3. až 5. pořadí.
K tomu poslouží funkce EV_2, která je určena stejnou logikou, jako funkce EV

$$EV_2(n)=\sum_{i=3}^{5}\frac{P(W_i).5.n.Q_i}{1+(n-1).P(W_i)}$$

Funkce EV_2 je také rostoucí pro všechna n > 0
$\lim_{n\to\infty} EV_2(n)=3{,}05$

Nyní budeme uvažovat průměrnou očekávanou hodnotu hry všech pořadí. Pro aplikaci pravidla (2) o vyplácení výher využijeme k výpočtu očekávané hodnoty pro výhry v 1. a 2. metodu, kterou jsme využili při počítání očekávané hodnoty hry Šance. Vzhledem k tomu, že předpokládáme, že všichni hráči sází náhodná čísla, potom neexistuje strategie, ve které by jeden hráč mohl získat více peněz z výher, než ostatní hráči. Všichni hráči mají v tomto případě stejnou očekávanou hodnotu hry. Peníze, které očekáváme, že se vyplatí na výhrách jsou tedy součtem očekávaných hodnot všech hráčů a tedy očekávaná hodnota jednoho hráče je podíl na této částce. Při aplikaci pravidla (2) jsme si výše řekli, že v dlouhém období se žádné peníze z Výherních kvót 1. a 2. pořadí neztrácejí. V průměru tedy bude vyplacena celá výherní kvóta 1. a 2. pořadí hráčům.

Očekávaná hodnota hry pro 1. a 2. pořadí tedy bude podíl na Výherních kvótách těchto pořadí. Označme tuto očekávanou hodnotu $EV_3=Q_1.5+Q_2.5=1{,}1+0{,}35=1{,}45\,Kč$
Očekávaná hodnota hry při aplikaci pravidla (2), bude součtem očekávané hodnoty z 3. až 5. pořadí a 1. a 2. pořadí. Bude to funkce v proměnné *n*, označme ji EV_4.
$EV_4(n)=EV_2(n)+EV_3$

Funkce EV_4 je rovněž rostoucí pro všechna n > 0
$\lim_{n\to\infty} EV_4(n)=4{,}5$

Funkce EV_4 roste pro nízká n výrazně rychleji než funkce EV. Výše jsme zmínili, že je třeba, aby vsadilo 19,4 milionu lidí, aby funkce EV překonala hranici 4Kč. V případě funkce EV_4 je třeba na překonání stejné hranice jen 6598 sázek. Mimo mimořádné příležitosti (jako Vánoce či Nový rok) je přijato kolem 1,8 milionů sázek.
$EV(1{,}8\,M)=3{,}314$
$EV_4(1{,}8\,M)=4{,}486$
Tyto výsledky ukazují, že očekávaná hodnota sázky (pro jeden tah) ve Sportce se skutečně blíží hranici 4,5Kč, což je částka, která ze vsazených 20Kč putuje na Výhry pro jeden tah v 1. až 5. pořadí.
Pro určité hodnoty by dokonce mohla očekávaná hodnota hry přesáhnout 4,5Kč, jelikož jsme doposud nepočítali s pravidlem (4) o vyplácení výher. To říká, že v případě, že není dosaženo výhry v 1. a 2. pořadí, pak je každému hráči ve 3. pořadí. vyplacena výhra minimálně 10 000Kč. Kalkulace s pravděpodobnostmi na to, že bude vyplacena výhra v 1. nebo 2. pořadí jsou však velmi

náročné a zdlouhavé, jsou tedy spíše předmětem pro podrobnější práci o Sportce. Při výše zmíněném číslu 1,8 milionu sázek je průměrná výhra ve 3. pořadí kolem 25 tisíc Kč a aplikace pravidla (4) o vyplácení výher tedy není ani zdaleka aktuální. Aby průměrná hodnota výhry ve 3. pořadí byla alespoň 10 000Kč, pak musí být přijato více než 37064 sázek.

4.1.4.3. Celková očekávaná hodnota

Nyní nám ještě schází počítat očekávanou hodnotu, pokud budeme brát v úvahu Bonus. K tomu se nám budou hodit pravidla (1), (3) a (6) o vyplácení výher. Zde můžeme využít stejnou úvahu, jako při aplikaci pravidla (2) o vyplácení výher na případ nevyplacení výher v 1. a 2. pořadí. Pravidlo (3) o vyplácení výher říká, že při nevyčerpání Bonusu se jeho Výherní kvóta přesunuje do příštího slosovacího období. Znamená to tedy, že se peníze z Bonusu opět nikam "neztrácejí" a že budou dříve nebo později některému hráči vyplaceny. Navíc pravidlo (6) o vyplácení výher říká, že v situaci, kdy Bonus přesáhne 250 milionů Kč bude 50 milionů přesunuto do dalšího slosovacího období a 200 milionů v příštích slosovacích obdobích vyplaceno. Nehrozí tedy, že by peníze z Bonusu zůstaly nevyčerpány nějakou mimořádně dlouhou dobu. Z každého tahu Sportky je do Výherní kvóty bonusu určeno 10% Výherní jistiny daného tahu, tedy 0,5Kč.
Hráč splňující podmínky pro čerpání Bonusu se dokonce dostává s očekávanou hodnotou jednoho tahu jednoho sloupce nad hranici 5Kč. To je způsobeno tím, že sám ze svého příspěvku do Výherní jistiny v dlouhodobém měřítku nic neztrácí, získává navíc od hráčů, kteří o Bonus nehrají.
Označme *z* celkový počet vsazených sloupců (uvažujeme oba tahy), označme *n* počet sloupců vsazených hráči, kteří nehrají o Bonus a *m* počet sloupců vsazených hráči hrající o bonus. Také platí, že $m + n = z$
Nechť jsou čísla *n* a *m* fixní pro všechna losovací období.
Očekávaná hodnota hráče nehrajícího o Bonus je určena dle funkce EV_4. Očekávaná hodnota z jednoho sloupce z obou tahů je $2.EV_4(z)$ a celkem je souhrnná očekávaná hodnota z obou tahů pro všechny hráče nehrající o Bonus $2.n.EV_4(z)$.
Hráči hrající o Bonus v dlouhém období z Výherní jistiny neztrácí nic díky pravidlům (1), (2), (3) a (6), získávají navíc nevyčerpané peníze z Výherní jistiny od hráčů nehrajících o bonus.
Očekávaná hodnota jednoho sloupce Sportky pro hráče hrající o Bonus je tedy

$$EV_B(n,m)=\frac{10.z-2.n.EV_4(z)}{m}$$

Například pro situaci, kdy 1 milion lidí vsadí samostatný sloupec a 100 000 lidí vsadí všech 10 sloupců je $EV_b(1M,1M)=11{,}02503\,Kč$

Hráč hrající o Bonus vsadil 10 sloupců a hru Šance. Těchto 10 sloupců má dohromady očekávanou hodnotu rovnu 10 násobku očekávané hodnoty jednoho sloupce.
Celkem je očekávaná hodnota tohoto hráče rovna $EV_J(n,m)=10.EV_b(n,m)+10$
Pro příklad $EV_J(1M,1M)=120{,}2503\,Kč$
Jelikož hráč za hru zaplatil 220Kč, je jeho očekávaná ztráta v tomto případě 99,75Kč. Nezapomeňme však na klíčový předpoklad, že všichni hráči vsadili svá čísla zcela náhodně.

4.2. Poker

4.2.1. Zavedení pojmů

Pojďme se nyní věnovat pokeru, konkrétně, jak si v jednom speciálním formátu pokerového turnaje bude vést v porovnání se sázením Sportky hráč, který vůbec nebude znát pravidla pokeru.
Budeme se věnovat nejpopulárnější pokerové variantě Texas Hold'em, konkrétně formátu, který byl postupně uváděn na trh menšími hernami pod různými názvy. Tento formát se dočkal obrovské popularity, proto jej adaptovaly i velké online herny. My se budeme zabývat turnajem od herny Pokerstars, v jejím podání se tento speciální formát jmenuje Spin and Go. V tomto formátu turnaje hrají vždy právě 3 hráči, každý z nich zaplatí stejné startovné (i v českém pokerovém prostředí se používá anglický výraz buy-in), které se v současnosti pohybuje od \$0,25 do \$100 v závislosti na tom, jak drahý turnaj si hráč vybere. Těsně před zahájením turnaje je pak vylosováno, o kolik peněz se bude hrát. Minimálně se může hrát o dvojnásobek startovného (turnaj s výhrou ve výši dvojnásobku startovného se značí 2X), při většině velikostí startovného se kromě 2X může hrát 4X, 6X, 10X, 25X, 120X, 240X a 12000X. V časově omezených obdobích se hrají i turnaje, kde se kromě finanční odměny losují i hry o věcné ceny, vstupenky do jiných turnajů a podobně. Někdy se také hraje při jedné úrovni startovného až o \$1 000 000.
Při většině startovných vyhrává všechny peníze na výhry (běžně se využívá pojem prizepool) vítěz, při vysokých výhrách získávají i malý stejný podíl oba poražení. Toto je velmi podstatné pro strategii hráčů v tomto turnaji. Jelikož není odlišena odměna mezi 2. a 3. hráčem v turnaji, potom se všichni hráči snaží bez ohledu na možnou výhru hrát pouze na 1. místo. Kdyby bylo odlišeno 2. a 3. místo, potom by se v určitých situacích vyplatilo čekat na vypadnutí 3. hráče, strategie hry by byla odlišná a také by byly obtížnější na výpočty.
Bez ohledu na startovné do turnaje je struktura vždy stejná. Při zahájení turnaje má každý hráč 500 žetonů (chipů). Velký blind (Big blind) je 20 chipů, malý blind (Small blind) je 10 chipů. Blindy se zvedají každé 3 minuty. Struktura zvedání blindů je následující:

1. Blindy 10/20, 3 minuty
2. Blindy 15/30, 3 minuty
3. Blindy 20/40, 3 minuty
4. Blindy 30/60, 3 minuty
5. Blindy 40/80, 3 minuty

atd.

Turnajová struktura je určena až do 22. úrovně při blindech 750/1500. Později se přesvědčíme, že nám bude stačit pouze první úroveň blindů 10/20.

Každý hráč má na každé rozhodnutí 15 sekund, pokud tento čas vyčerpá, pak může čerpat ještě rezervních 10 sekund, ze kterých čerpá po celý turnaj. Rozhodnutí hráčů se pohybuje mezi 3 a 5 sekundami, pokud některý hráč vsadí všechny žetony a je dorovnán, potom před zahájením další hry uběhne během rozdávání karet na stůl předešlé hry dalších 7 sekund. Pro zjednodušení budeme počítat, že každá hra trvá právě 15 sekund bez ohledu na to, jak probíhá. V každé úrovni blindů se tedy stihne 12 her.

4.2.2. Použitý Software

Abychom se mohli přesunout k samotnému odhadu očekávaných hodnot, musíme představit dva specializované programy, které budeme používat

Prvním programem je Odds Oracle, který počítá pravděpodobnosti na výhru v jednotlivých hrách v závislosti na tom, které karty jednotliví hráči mají. Program dokáže kromě pravděpodobností na výhry pro konkrétní rozdané karty hráčům počítat také pravděpodobnosti na vítězství při zadání jednotlivým hráčům i množinu dvojic karet, které mu mohou být rozdány. Program pracuje na principu frekvenční pravděpodobnosti. Simuluje odehrání 600000 her při každé zadané situaci.

Druhým pokerovým softwarem, který využijeme, je program Simple Nash, který již podle názvu pracuje na principu Nashovy rovnováhy.

Nashova rovnováha je takové řešení, ve kterém platí, že pokud se jeden z hráčů nebude držet své strategie, zatímco ostatní hráč(i) ano, jeho výhra se sníží nebo v nejlepším případě zůstane stejná.

Tento program počítá, jak se má chovat hráč ve specifických situacích dle Nashovy rovnováhy za předpokladu daného chování soupeřů. Výstupem programu jsou dvě množiny dvojic karet (startovních kombinací, běžně se říká range nebo). První množina jsou kombinace, se kterými má hráč vsadit vše (all-in a nebo push se říká, v případě že už některý hráč před ním vsadil alespoň tolik, kolik žetonů sledovaný hráč aktuálně má, pak se jedná o dorovnání, jinými slovy call), druhá množina je pak doplněk první množiny do množiny všech kombinací, jsou to karty, se kterými má hráč karty složit (fold). Tento program dává strom těchto „správných“ rozhodnutí. Jelikož máme pouze 3 hráče, pak říká kombinace, se kterými má 1. hráč vsadit vše, chování 2. hráče v závislosti na akci 1. hráče, obdobně pak chování 3. hráče v závislosti na akcích předchozích hráčů.

4.2.3. Očekávaná hodnota turnaje

Před samotným výpočtem očekávané hodnoty zavedeme několik předpokladů. Budeme předpokládat, že náš sledovaný hráč bude vsázet se všemi startovními kombinacemi vše (respektive dorovnávat vše od soupeřů). Oba soupeři se potom budou chovat přesně podle Nashovy rovnováhy (budou sázet vše nebo zahazovat). Soupeři během prvních několika her neví, že náš hráč sází vždy vše a předpokládají, že se chová i on (stejně jako jeho další soupeř) dle Nashovy rovnováhy. Postupem času se však strategii našeho hráče soupeři přizpůsobí. Předpokládejme, že do 3. hry budou soupeři předpokládat, že se i náš hráč chová dle Nashovy rovnováhy. Od 4. hry zjistí, že náš hráč sází vše bez ohledu na kombinace a přizpůsobí svou hru. I nadále se chovají dle Nashovy rovnováhy, avšak v reakci na odhalené chování našeho hráče. Mezi sebou dále předpokládají, že se oba chovají dle Nashovy rovnováhy v reakci mezi sebou a v reakci na odhalené chování našeho hráče. V realitě během prvních úrovní hráči znají i jiné akce než sázení všeho nebo zahození. Nicméně při úvodních nízkých blindech v poměru ke startovnímu počtu žetonů se výsledek hry příliš nemění, od 4. hry při odhalení strategie našeho hráče už soupeři nehrají nic jiného než, že sází vše nebo zahazují, ani v praxi.
Pro jednoduchost předpokládejme, že náš hráč v každém turnaji začíná na pozici dealera (buttonu).

<u>Hra 1</u>
Náš hráč sází na dealerovi všechny žetony (500)
Soupeř 1 na malém blindu očekává, že hráč z dealera sází 18,1% startovních kombinací (33+, A4s, A5s, A7s+, K8s+, Q9s+, J9s+, T9s+, 98s, ATo+, KJo+, QJo)

Poznámka
Startovní kombinace 18,1% znamená, že je v této množině 18,1% ze všech startovních kombinací, celkem je startovních kombinací 1326. Jelikož mají všechny dvojce karet stejnou pravděpodobnost rozdání, je 18,1% i pravděpodobnost, se kterou bude tato startovní kombinace 18,1% hráči rozdána. Jedná se o pravděpodobnost bez znalostí ostatních rozdaných karet, nebudeme se zabývat změnami pravděpodobností v reakci na startovní kombinace ostatních, jednalo by se o velmi složité výpočty s pouze kosmetickými výsledky.

33+ znamená jakýkoliv pár vyšší než 33. Tedy 33, 44, 55, ..., AA
A4s znamená konkrétní kombinaci karet A a 4 ve stejné barvě (suited), obdobně i A5s
A7s+ znamená kombinace jedné karty A, druhé karty 7 nebo vyšší, obě karty musí být suited
K8s+ znamená obdobně suited karty K a 8 nebo vyšší, obdobně Q9s+ atd.
ATo+ znamená kartu A s kartou 10 (značí se T jako Ten) nebo vyšší, karty musí být rozdílné barvy (offsuit), obdobně potom KJo+
Ilustrace výše zmíněných 18,1% kombinací je na Obrázku 10. Tmavě jsou vyznačeny kombinace pro vsazení všeho, ostatní pro zahození.

Obrázek 10

	A	K	Q	J	T	9	8	7	6	5	4	3	2
A	AA	AKs	AQs	AJs	ATs	A9s	A8s	A7s	A6s	A5s	A4s	A3s	A2s
K	AKo	KK	KQs	KJs	KTs	K9s	K8s	K7s	K6s	K5s	K4s	K3s	K2s
Q	AQo	KQo	QQ	QJs	QTs	Q9s	Q8s	Q7s	Q6s	Q5s	Q4s	Q3s	Q2s
J	AJo	KJo	QJo	JJ	JTs	J9s	J8s	J7s	J6s	J5s	J4s	J3s	J2s
T	ATo	KTo	QTo	JTo	TT	T9s	T8s	T7s	T6s	T5s	T4s	T3s	T2s
9	A9o	K9o	Q9o	J9o	T9o	99	98s	97s	96s	95s	94s	93s	92s
8	A8o	K8o	Q8o	J8o	T8o	98o	88	87s	86s	85s	84s	83s	82s
7	A7o	K7o	Q7o	J7o	T7o	97o	87o	77	76s	75s	74s	73s	72s
6	A6o	K6o	Q6o	J6o	T6o	96o	86o	76o	66	65s	64s	63s	62s
5	A5o	K5o	Q5o	J5o	T5o	95o	85o	75o	65o	55	54s	53s	52s
4	A4o	K4o	Q4o	J4o	T4o	94o	84o	74o	64o	54o	44	43s	42s
3	A3o	K3o	Q3o	J3o	T3o	93o	83o	73o	63o	53o	43o	33	32s
2	A2o	K2o	Q2o	J2o	T2o	92o	82o	72o	62o	52o	42o	32o	22

Důvodem, proč v kombinacích pro sázení všeho v tomto případě jsou karty A4s, A5s, A7s, ale je vynechána kombinace A6s je ten, že A4s a A5s dokáží (na rozdíl od A6s) vytvořit postupku se 3 dalšími kartami, proto tyto kombinace mohou být ve specifických případech silnější než A6s.

Jelikož Soupeř 1 na malém blindu očekává výše zmíněné startovní kombinace, jeho reakcí je dorovnání s 8,27% kombinací (66+, ATs+, KQs, AJo+)

Pokud Soupeř 1 dorovnal, Soupeř 2 na velkém blindu dorovná s 4,22% kombinací (99+, AQs+, AKo).
Pokud Soupeř 1 nedorovnal, Soupeř 2 na velkém blindu dorovná s 8,84% kombinací (66+, ATs+, KQs, ATo+)

Označme situaci A-A-A, jako situaci, kdy všichni hráči vsadili vše

Označme situace A-F-A, jako situace, kdy náš hráč vsadil vše, Soupeř 1 zahodil a Soupeř 2 dorovnal. Obdobně označme všechny kombinace A-F-F, A-A-F, A-A, A-F

Dále budeme označovat situace (xa) ty situace, kdy hra pokračuje z předchozí situace x, a značí situaci, kdy všichni hráči, kteří stále pokračují v turnaji sází vše. Situace (xb) je opět pokračování situace x, b značí situaci, kdy ve 3 hráčích vše sází náš hráč a Soupeř 1, Soupeř 2 zahazuje. V situacích při 2 hráčích značí b tu situaci, kdy náš hráč sází vše a Soupeř zahazuje. Situace (xc) je pokračování situace x, c značí situaci, kdy ve 3 hráčích sází náš hráč vše, Soupeř 1 zahazuje a Soupeř 2 dorovnává. Situace (xc) nemůže nastat ve 2 hráčích. Situace značená (xd) je pokračování situace x, d značí situaci, kdy pouze náš hráč sází vše, oba Soupeři zahodili. I situace (xd) patří pouze situaci ve 3 hráčích.
Pro první hru ve značená (xy) žádné x nefiguruje, jelikož žádná situace nepředcházela.

(a)
Situace A-A-A nastává s pravděpodobností P(A-A-A)=1 . 0,0827 . 0,0422 = 0,00348
Při pravděpodobnostech vítězství nebudeme pro jednoduchost počítat remízy (tzv. splity), místo pravděpodobnosti budeme uvažovat tzv. Equity, které je vždy o malý kousek vyšší než pravděpodobnost, Equity uvažuje k pravděpodobnosti i poměrnou část při remízách.
Náš hráč vyhrává s pravděpodobností P(H) = 0,1857, Soupeř 1 s pravděpodobností P(S1) = 0,3397, Soupeř 2 s pravděpodobností P(S2) = 0,4745
V této situaci A-A-A je pro našeho hráče vždy konec. S pravděpodobností 18,57% konec vítězný, s pravděpodobností 81,43% náš hráč turnaj prohrává.

(b)
P(A-A-F) = 1 . 0,0827 . 0,9578 = 0,07921
P(H) = 0,3045
P(S1) = 0,6955
Pokud vyhraje náš hráč, bude mít 1020 žetonů (budeme značit CH / H = 1020), Soupeř 1 bude mít 0 žetonů a bude vyřazen (CS1/H = 0) a Soupeř 2 má 480 žetonů (CS2/H=480)
Pokud náš hráč prohraje, pak má CH/S1 = 0 a končí v turnaji.

(c)
P(A-F-A) = 1 . 0,9173 . 0,0884 = 0,08108932
P(H) = 0,3112
P(S2) = 0,6888
CH/H = 1010
CS1/H = 490
CS2/H = 0
CH/S2 = 0 – konec v turnaji

(d)
P(A-F-F) = 1 . 0,9173 . 0,9116 = 0,83621
CH = 530
CS1 = 490
CS2 = 480

Nyní jsme vyčerpali všechny možnosti 1. hry. V závislosti na výsledku 1. hry následují různé scénáře 2. hry

Hra 2

Zde budeme zkoumat možné situace v návaznosti na situace z 1. hry

(d)

V turnaji jsou stále 3 hráči, posouvají se pozice, na dealerovi je hráč z malého blindu z minulé hry, tedy Soupeř 1. Na malém blind se posouvá Soupeř 2 a na velkém blindu je náš hráč. Startovní počty žetonů jednotlivých hráčů jsou: CH=530, CS1 = 490, CS2 = 480

Soupeř 1 sází s 18,9% kombinací (22+, A7s+, A5s-A3s, K8s+, Q9s+, J9s+, T9s, 98s, ATo+, KJo+, QJo)

Soupeř 2 dorovnává s 8,3% kombinací (66+, ATs+, KQs, AJo+). V Případě záhozu Soupeře 1 sází vše Soupeř 2 s 38% kombinací (22+, A2s+, K4s+, Q5s+, J7s+, T6s+, 96s+, 86s+, 76s, 65s, A2o+, KTo+, Q9o+, J9o+, T9o)

(da)

P(A-A-A) = 0,189 . 0,083 = 0,01569

P(H) = 0,2182

P(S2) = 0,3323

P(S1) = 0,4495

Pro zjednodušení situace budeme předpokládat, že hráč, který má méně než 100 žetonů (jeho pravděpodobnost na vítězství je velmi malá a na celkovou očekávanou hodnotu by měla malý dopad), je vyřazen a jeho žetony připadají hráči s aktuálně nejvíce žetony.

CH/H = 1500 – vítězství v turnaji

CH/S1 = 40 → 0 – konec v turnaji

Při vítězství hráče, který má nejméně žetonů záleží i na vzájemném souboji obou poražených. Pro jednoduchost budeme počítat, že žetony z vedlejšího banku (side potu) získává ten hráč, který má aktuálně více žetonů.

CH/S2 = 60 → 0 – konec v turnaji

(db)

P(A-A-F) = 0,189 . 0,917 = 0,173313

P(H) = 0,3645

P(S1) = 0,6355

CH/H = 1030

CS1/H = 0

CS2/H = CS2/S1 = 470

CH/S1 = 40 → 0 – konec v turnaji

(dc)

P(A-F-A) = 0,811 . 0,38 =0,30818

P(H) = 0,406

P(S2) = 0,594

CH/H = 1010

CS2/H = 0

CS1/H = CS1/S2 = 490

CH/S2 = 50 → 0 – konec v turnaji

(dd)
P(A-F-F) = 0,811 . 0,62 = 0,50282
CH = 540
CS1 = 490
CS2 = 470

(c)

Ze situace (c) se do 2. hry dostáváme v případě, že v 1. hře vyhrál náš hráč. Jeden ze soupeřů je vyřazen a turnaj se přesouvá do takzvaného heads upu. I zde budeme dále používat hru na základě Nashovy rovnováhy.
CH = 1010
CS1 = 490

Na herně Pokerstars se posouvá vždy dealer o jednu pozici vpřed i v případě, že byl vyřazen hráč (při živých hrách nebo na jiných hernách existují i speciální jiné situace). Na dealerovi tedy je Soupeř 1 (při heads upu je pozice dealera stejná s pozicí malého blindu), na velkém blindu pak náš hráč.

Soupeře 1 sází 36,7% kombinací (22+, A2s+, K4s+, Q6s+, J7s+, T6s+, 96s+, 86s+, 76s, 65s, A2o+, KTo+, QTo+, J9o+, T9o)
Náš hráč opět dorovnává se všemi kartami

(ca)
P(A-A) = 0,367
P(H) = 0,4040
P(S1) = 0,5959
CH/H = 1500 – výhra v turnaji
CH/S1 = 520
CS1/S = 980

(cb)
P(A-F) = 0,633
CH = 1020
CS1 = 480

(b)
Podobná situace jako v případě c, zbývají pouze 2 hráči, Soupeř 2 jde na dealera, náš hráč na velký blind.
CH = 1020
CS2 = 480

Dopady rozdílu situací (b) a (c) jsou pouze kosmetické, proto tyto 2 situace sloučíme a budeme uvažovat, že ze situace (b) jsou stejné důsledky jako ze situace (c). Přitom nezáleží na tom, zda se jedná o Soupeře 1 nebo 2, budeme uvažovat pouze jednoho stejného Soupeře. Podobná situace je i výstup situace (dc), i tento výsledek je téměř totožný a budeme uvažovat i ten za případ (cb). Případ (db) je však odlišný, byť počty žetonů jsou stejné jako v případě (cb). V příští hře totiž ze situace (db) vychází situace s rozdílnými pozicemi a výsledek bude výrazně odlišný.

Pro 3. hru tedy budeme zkoumat situace (ca), (cb), (db) a (dd).

Hra 3

(dd)
Ve hře zbývají stále 3 hráče. Náš hráč jde na malý blind, Soupeř 1 je na velkém blindu a Soupeř 2 je na pozici dealera.
CH = 540
CS1 = 490
CS2 = 470

Soupeř 2 sází s 19,5% kombinací (22+, A4s+, K8s+, Q8s+, J9s+, T8s+, 98s, ATo+, KJo+, QJo)
Náš hráč opět dorovnává (respektive sází) se vším.
Soupeř 1 na velkém blindu dorovnává v případě sázky Soupeře 2 a dorovnání našeho hráče 4,22% kombinací (99+, AQs+, AKo), v případě záhozu Soupeře 2 a sázky našeho hráče pak 17,6% kombinací (44+, A3s+, KTs+, QJs, A7o+, KJo+).

(dda)
P(A-A-A) = 0,195 . 0,0422 = 0,008229
P(H) = 0,1962
P(S2) = 0,2874
P(S1) = 0,5164
CH/H = 1500 – vítězství v turnaji
CH/S2 = 90 → 0 – konec v turnaji
CH/S1 = 50 → 0 – konec v turnaji

(ddb)
P(A-A-F) = 0,805 . 0,176 = 0,14168
P(H) = 0,3536
P(S1) = 0,6464
CH/H = 1030
CS2/H = 470
CH/S1 = 50 → 0 – konec v turnaji

(ddc)
P(A-F-A) = 0,195 . 0,9578 = 0,186771
P(H) = 0,3665
P(S2) = 0,6335
CH/H = 1030
CS2/H = 0
CS1/H = 470
CH/S2 = 70 → 0 – konec v turnaji
Výstup této situace je (až na soupeře) totožný, do příští hry půjde na dealera náš hráč a na velký blind Soupeř 2 (respektive Soupeř 1). Situace (ddc) a (ddb) tedy můžeme sloučit.

(ddd)
P(A-F-F) = 0,805 . 0,824 = 0,66332
CH = 560
CS1 = CS2 = 470

(ca)
V turnaji zbývají 2 hráči, na dealera / malý blind se vrací náš hráč, na velkém blindu je Soupeř
CH = 520
CS = 980

Náš hráč sází vše se vším, Soupeř dorovnává se 17% kombinací (44+, A5s+, KTs+, QJs, A7o+, KJo+)

(caa)
P(A-A) = 0,17
P(H) = 0,3502
P(S) = 0,6498
CH/H = 1040
CS/H = 460
CH/S = 0 – konec v turnaji

(cab)
P(A-F) = 0,83
CH = 540
CS = 960

(cb)
2 hráči, na dealerovi je náš hráč, velký blind je Soupeř
CH = 1020
CS = 480

Soupeř na velkém blindu dorovnává se 17,6% kombinací (44+, A3s+, KTs+, QJs, A7o+, KJo+)

(cba)
P(A-A) = 0,176
P(H) = 0,3533
P(S) = 0,6467
CH/H = 1500 – výhra v turnaji
CH/S = 540
CS/S = 960
Stejný výsledek jako výstup situace (cab). (cba) budeme tedy uvažovat za (cab)

(cbb)
P(A-F) = 0,824
CH = 1040
CS = 460
Stejný výsledek jako výstup situace (caa). (cbb) budeme tedy uvažovat za (caa)

(db)
2 hráči, avšak na dealerovi je Soupeř, na velkém blindu náš hráč
CH = 1030
CS = 470

Soupeř sází z dealera se 38,5% kombinací (22+, A2s+, K4s+, Q5s+, J7s+, T6s+, 96s+, 86s+, 75s+, 65s, 54s, A2o+, K9o+, QTo+, J9o+, T9o)

(dba)
P(A-A) = 0,385
P(H) = 0,4088
P(S) = 0,5912
CH/H = 1500 – výhra v turnaji
CH/S = 560
CS/S = 940

(dbb)
P(A-F) = 0,615
CH = 1040
CS = 460
Výstup této situace je velmi podobný jako výstup situace (ddb), situaci (dbb) tedy budeme považovat za stejnou jako (ddb)

Pro 4. hru tedy budeme uvažovat pokračování situací (ddb), (ddd), (caa), (cab) a (dba)

<u>Hra 4</u>
Po 3. hře soupeři (respektive soupeř) odhalili strategii našeho hráče a nyní už očekávají, že náš hráč hraje se vším. Sami se tomu přizpůsobí a dále budou hrát dle Nashovy rovnováhy v reakci na našeho hráče.

(ddb)
2 hráči, na dealerovi je náš hráč, na velkém blindu Soupeř.
CH = 1030
CS = 470
Soupeř přizpůsobil svou hru a možné kombinace na dorovnání výrazně rozšířil, na 56,6% (22+, A2s+, K2s+, Q2s+, J3s+, T6s+, 97s+, 87s, A2o+, K2o+, Q3o+, J7o+, T7o+, 98o)

(ddba)
P(A-A) = 0,566
P(H) = 0,4308
P(S) = 0,5692
CH/H = 1500 – výhra v turnaji
CH/S = 560
CS/S = 940

(ddbb)
P(A-F) = 0,434
CH = 1050
CS = 450

(ddd)
3 hráči, náš hráč na dealerovi, Soupeř 1 na malém blindu, Soupeř 2 na velkém blindu
CH = 560
CS1 = 470

CS2 = 470

Sázka našeho hráče přichází ve 100% případů, dorovnání Soupeře 1 se 44,2% kombinací (22+, A2s+, K2s+, Q3s+, J7s+, T7s+, 98s, A2o+, K4o+, Q8o+, J8o+, T9o)
Dorovnání Soupeře 2 je se 30% kombinací v případě dorovnání Soupeře 1 (44+, A2s+, K6s+, Q8s+, J8s+, T8s+, 98s, A3o+, K9o+, QTo+, JTo), s 58,1% kombinací v případě záhozu Soupeře 1 (22+, A2s+, K2s+, Q2s+, J2s+, T6s+, 96s+, 87s, A2o+, K2o+, Q3o+, J6o+, T7o+, 98o)

(ddda)
P(A-A-A) = 0,442 . 0,3 = 0,1266
P(H) = 0,2658
P(S1) = 0,3417
P(S2) = 0,3925
CH/H = 1500 – výhra v turnaji
CH/S1 = CH/S2 = 90 → 0 - konec v turnaji

(dddb)
P(A-A-F) = 0,442 . 0,7 = 0,3094
P(H) = 0,4102
P(S1) = 0,5898
CH/H = 1050
CS2/H = 450
CH/S1 = 90 → 0 – vyřazení z turnaje

(dddc)
P(A-F-A) = 0,558 . 0,581 = 0,324198
P(H) = 0,4333
P(S2) = 0,5667
CH/H = 1040
CS1/H = 460
CH/S2 = 90 → 0 – konec v turnaji

(dddd)
P(A-F-F) = 0,558 . 0,419 = 0,233802
CH = 590
CS1 = 460
CS2 = 450

(caa)
2 hráči, náš hráč na velkém blindu, Soupeř na dealerovi
CH = 1040
CS = 460

Soupeř zde sází s 53,2% kombinací (22+, A2s+, K2s+, Q2s+, J4s+, T6s+, 97s+, A2o+, K2o+, Q4o+, J7o+, T8o+)

(caaa)
P(A-A) = 0,532
P(H) = 0,4257
P(S) = 0,5743

CH/H = 1500 – výhra v turnaji
CH/S = 580
CS/H = 920

(caab)
P(A-F) = 0,468
CH = 1050
CS = 450

(cab)
2 hráči, náš hráč na velkém blindu, Soupeř na dealerovi
CH = 540
CS = 960

Soupeř sází s 52,6% kombinací (22+, A2s+, K2s+, Q2s+, J5s+, T7s+, 97s+, A2o+, K2o+, Q4o+, J7o+, T8o+)

(caba)
P(A-A) = 0,526
P(H) = 0,4237
P(S) = 0,5763
CH/H = 1080
CS/H = 420
CH/S = 0 – konec v turnaji

(cabb)
P(A-F) = 0,474
CH = 550
CS = 950

(dba)
2 hráči, na dealerovi náš hráč, na velkém blindu Soupeř
CH = 560
CS = 940

Soupeř dorovnává s 54,4% kombinací (22+, A2s+, K2s+, Q2s+, J3s+, T6s+, 97s+, A2o+, K2o+, Q3o+, J7o+, T8o+)

(dbaa)
P(A-A) = 0,544
P(H) = 0,4275
P(S) = 0,5726
CH/H = 1120
CS/H = 380
CH/S = 0 – konec v turnaji

(dbab)
P(A-F) = 0,456
CH = 580
CS = 920

V tuto chvíli jsou některé situace již velmi málo pravděpodobné. Pravděpodobnost, že náš hráč pokračuje v turnaji do 5. hry (tedy nevyhrál turnaj nebo nevypadl) je asi 31,5%. Pokud neuvažujeme slučování situací, pak do 5. hry existuje 32 variant. Hned 27 z nich má pravděpodobnost nižší než 2%, 24 z nich nižší než 1% a 16 z nich nižší než 0,5%. Dále už se budeme zabývat pouze těmi více pravděpodobnými s pravděpodobností vyšší než 2%. U těch ostatních pravděpodobnost na vítězství aproximujeme způsobem, že pravděpodobnost na vítězství je rovna poměru aktuálního počtu žetonů našeho hráče k celkovým žetonům (1500).

Pro 5. hru budeme tedy uvažovat situace, do kterých jsme se dostali s pravděpodobností alespoň 2%. Zároveň situace dddb a dddc jsou téměř totožné a situaci dddb budeme uvažovat za situaci dddc. Pro 5. hru tedy uvažujeme situace dcba (po sloučení caaa), dcbb (po sloučení caab), dddc, dddd.

<u>Hra 5</u>

(caaa)
2 hráči, náš hráč na dealerovi, Soupeř na velkém blindu
CH = 580
CS = 920

Náš hráč opět sází všechny kombinace, Soupeř dorovnává s 53,2% kombinací (22+, A2s+, K2s+, Q2s+, J4s+, T6s+, 97s+, A2o+, K2o+, Q4o+, J7o+, T8o+)

(caaaa)
P(A-A) = 0,532
P(H) = 0,4252
P(S) = 0,5748
CH/H = 1160
CS/H = 340
CH/S = 0 – konec v turnaji

(caaab)
P(A-F) = 0,468
CH = 600
CS = 900

(caab)
2 hráči, náš hráč na dealerovi, Soupeř na velkém blindu
CH = 1050
CS = 450

Soupeř dorovnává s 57,5% kombinací (22+, A2s+, K2s+, Q2s+, J3s+, T6s+, 97s+, 87s, A2o+, K2o+, Q3o+, J6o+, T7o+, 98o)

(caaba)
P(A-A) = 0,575
P(H) = 0,432

P(S) = 0,568
CH/H = 1500 – výhra v turnaji
CH/S = 600
CS/S = 900

(caabb)
P(A-F) = 0,425
CH = 1070
CS = 430

(dddc)
2 hráči, Soupeř na dealerovi, náš hráč na velkém blindu
CH = 1040
CS = 460

Soupeř sází s 53,2% kombinací (22+, A2s+, K2s+, Q2s+, J4s+, T6s+, 97s+, A2o+, K2o+, Q4o+, J7o+, T8o+)

(dddca)
P(A-A) = 0,532
P(H) = 0,4252
P(S) = 0,5748
CH/H = 1500 – výhra v turnaji
CH/S = 580
CS/S = 920

(dddcb)
P(A-F) = 0,468
CH = 1050
CS = 450

(dddd)
3 hráči, náš hráč na velkém blindu, Soupeř 1 na dealerovi, Soupeř 2 na malém blindu
CH = 590
CS1 = 460
CS2 = 450

Soupeř 1 sází se 39,2% kombinací (33+, A2s+, K2s+, Q5s+, J7s+, T8s+, 98s, A2o+, K6o+, Q8o+, J9o+). Soupeř 2 dorovnává v případě sázky Soupeře 1 s 26,7% kombinací (44+, A2s+, K7s+, Q9s+, J9s+, T9s, A5o+, K9o+, QTo+, JTo). V opačném případě sází s 53,2% kombinací (22+, A2s+, K2s+, Q2s+, J4s+, T6s+, 97s+, A2o+, K2o+, Q4o+, J7o+, T8o+).

(dddda)
P(A-A-A) = 0,392 . 0,267 = 0,1047
P(H) = 0,2618
P(S1) = 0,3434
P(S2) = 0,3948
CH/H = 1500 – výhra v turnaji

CH/S1 = 130
CS1/S1 = 1370
CS2/S1 = 0
CH/S2 = 150
CS1/S2 = 0
CS2/S2 = 1350

(ddddb)
P(A-A-F) = 0,392 . 0,733 = 0,2873
P(H) = 0,403
P(S1) = 0,597
CH/H = 1060
CS1/H = 0
CS2/H = CS2/S1 = 440
CH/S1 = 130
CS1/S1 = 930

(ddddc)
P(A-F-A) = 0,608 . 0,532 = 0,3235
P(H) = 0,4252
P(S2) = 0,5748
CH/H = 1040
CS2/H = 0
CS1/H = CS1/S2 = 460
CH/S2 = 140
CS2/S2 = 900

(dddd)
P (A-F-F) = 0,608 . 0,468 = 0,2845
CH = 600
CS1 = 460
CS2 = 440

Do 6. hry ze zkoumaných situací z 5. hry (před sloučením) postupuje 16 situací. U 15 z nich je jejich pravděpodobnost uskutečnění menší než 2%, nejpravděpodobnější je situace ddddc s pravděpodobností 2,1%. I tyto zbývající situace nebudeme dál rozebírat a aproximujeme pravděpodobnost na vítězství našeho hráče obdobně jako bylo specifikováno výše, tedy že pravděpodobnost vítězství je poměr aktuálního počtu žetonů na celkovém počtu žetonů.

Nyní již můžeme spočítat pravděpodobnost na vítězství hráče v turnaji.

Pro vyšší přehlednost rozdělíme pravděpodobnost na vítězství na 4 případy dle původního dělení. Podrobnosti výpočtu v *Příloze 1*.

P(WA) = 0,000646236
P(WB) = 0,013913
P(WC) = 0,014556
P(WD) = 0,220941
P(W) = P(WA) + P(WB) + P(WC) + P(WD) = 0,250057

Tedy pravděpodobnost na výhru v turnaji Spin and Go s našimi předpoklady je kolem 25%. Nyní ještě potřebujeme vypočítat očekávanou hodnotu hry, k té budeme potřebovat pravděpodobnostní rozdělení velikosti výher.
Budeme se zabývat turnajem se startovným $1. Herna Pokerstars uvádí pravděpodobnost na jednotlivé výhry jako četnost z milionu her.

Výhra:
$2 s četností 739 198 z 1 milionu
$4 s četností 180 651 z 1 milionu
$6 s četností 75 000 z 1 milionu
$10 s četností 5 000 z 1 milionu
$25 s četností 1 000 z 1 milionu
$120 s četností 100 z 1 milionu ($100 pro 1. místo, po $10 pro oba poražené)
$240 s četností 50 z 1 milionu ($200 pro 1. místo, po $20 pro oba poražené)
$12000 s četností 1 z 1 milionu ($10000 pro 1. místo, po $1000 pro oba poražené)

Očekávaná výhra je tedy

$$EW=0{,}25.2.\frac{739198}{1000000}+0{,}25.4.\frac{180651}{100000}+0{,}25.6.\frac{75000}{100000}+0{,}25.10.\frac{5000}{1000000}$$
$$+\ (0{,}25.100+0{,}75.10)\frac{100}{1000000}+(0{,}25.200+0{,}75.20).\frac{50}{1000000}$$
$$+\ (0{,}25.10000+0{,}75.1000).\frac{1}{1000000}=0{,}69075$$

Náš hráč tedy očekává výhru $0,69075 při startovném $1. Hráč tedy hraje s průměrnou návratností 69,075%. V porovnání se Sportkou je tedy na první pohled jasné, že se místo pravidelného sázení Sportky vyplatí hrát ve stejné četnosti tento turnaj bez znalosti jakýchkoliv pravidel hry. U Sportky se totiž průměrná návratnost pohybuje mezi 44% a 55% v závislosti na tom, zda hráč splňuje podmínky pro výhru Superjackpotu. Při sázení méně často sázených čísel se může návratnost ve Sportce dostat možná až k 60%, tato studie by byla vhodným tématem pro podrobnější práce.

5. Závěr

V rámci bakalářské práce jsme se pokusili proniknout do problémů neracionality při rozhodování za rizika.

V první části jsme představili vybraná kritéria pro posuzování rozhodování za rizika. Dále byly představeny některé racionální důvody, které mohou vést jednotlivce k sázení.

Ve druhé části práce jsme se věnovali Petrohradskému paradoxu. Cílem bylo najít některá řešení Petrohradského paradoxu s využitím jiné metody než metody očekávané hodnoty hry. Simulovali jsme hru Petrohradského paradoxu v mnoha pokusech. Nejprve jsme se dostali k nestabilním výsledkům na základě prostého simulování milionu her paradoxu. Došli jsme k tomu, že průměrné výhry ve hře Petrohradského paradoxu jsou ovlivněny především nejvyššími výhrami. Rozhodli jsme se tedy simulovat další miliony her a z každého milionu her ignorovat právě jednu nejvyšší výhru. Ukazuje se, že výsledky takovou metodou jsou výrazně stabilnější, že se průměrná výhra při této metodě pohybuje velmi blízko k hranici 21Kč. Hlavním zjištěním je však fakt, že výsledky pokusu jsou stabilní. Na Petrohradský paradox jsme se podívali také z pohledu maximalizace pravděpodobnosti ekonomického přežití. Tato metoda zohledňuje aktuální bohatství hráče. Mimo jiné jsme díky této metodě zkoumali Leningradský paradox, ve kterých vyhrává hráč pouze extrémně vysoké částky s téměř nulovou pravděpodobností. Přesvědčili jsme se, že při většině úrovní existenčního minima a aktuálního bohatství nebude výhodné vsadit na hru Leningradského paradoxu ani jednu korunu, byť očekávaná hodnota Leningradského paradoxu také překračuje všechny meze. Petrohradský paradox poté přinesl výsledky, které se lišily v závislosti na bohatství subjektu a na existenčním minimu. Hráč je zde ochoten vsadit v běžných příkladech maximálně kolem 18Kč, k hranici 21Kč z předchozích pokusí se blížíme pouze v případě extrémních boháčů.

Ve třetí části jsme zkoumali návratnost finančních prostředků pro hráče hrajícího Sportku a poker. V případě Sportky jsme došli k závěru, že hráč dosahuje návratnosti 44% až 55% v závislosti na tom, zda hraje o Superjackpot. V případě pokeru jsme se zabývali speciálním typem turnaje Spin and Go od herny Pokerstars. Zkoumali jsme, jak si bude vést hráč, který vůbec nezná pravidla pokeru a v každé situaci se rozhoduje identicky, vždy sází vše. Zkoumali jsme různé scénáře vývoje turnaje, podobnou metodou se navíc pravděpodobně pokerem zabývalo jen málo prací, pokud vůbec nějaké. Byť pravděpodobně neexistuje mnoho horších strategií pro hraní pokeru, dostává se tento hráč v průměru k návratnosti kolem 69%, což je o poznání více, než je návratnost při hraní Sportky. Tedy při rozhodování, zda hrát Sportku či tento formát pokeru, je jasné, že se hráč má rozhodnout pro hraní pokeru, jelikož dosáhne výrazně vyšší návratnosti bez ohledu na to, jaké jsou herní schopnosti hráče.

Cíle práce byly dle mého názoru naplněny. Téma rozhodování za rizika je pochopitelně mnohem širší než byl obsah práce a je vhodným předmětem pro podrobnější práce.

6. Seznam Literatury

ANDĚL, Jiří. *Základy matematické statistiky*. Vyd. 2. Praha: Matfyzpress, 2007. ISBN 80-7378-001-1.

BAŽANTOVÁ, Ilona (ed.). *Morální hazard - vymezení, příčiny a důsledky*. Praha: Karolinum, 2010. Acta Universitatis Carolinae. ISBN 978-80-246-1823-4.

DEHLING, Herold G. *Daniel Bernoulli and the St. Petersburg Paradox* [online]. In: . Mathematisch Instituut, 1997 [cit. 2016-07-19]. Dostupné z: http://www.math.rug.nl/bernoulli/vorigelezingen/lezing06/inleiding06.pdf

DURAND, David.*The Journal of Finance,* Vol. 12, No. 3 (Sep., 1957), pp. 348-363

HLAVÁČEK, Jiří a Michal HLAVÁČEK. *Petrohradský Paradox* [online]. 2002 [cit. 2016-07-19]. Dostupné z: ies.fsv.cuni.cz/default/file/download/id/686. IES FSV UK.

HLAVÁČEK, Jiří a Michal HLAVÁČEK. *Zobecněná mikroekonomie*. V Praze: Karolinum, 2010. ISBN 978-80-246-1685-8.

LEA, S. E. G., Roger M. TARPY a Paul WEBLEY. *Psychologie ekonomického chování*. Praha: Grada, 1994. ISBN 80-85623-93-5.

MARKOWITZ, Harry.*The Journal of Finance,* Vol. 7, No. 1. (Mar., 1952), pp. 77-91.

SZÉKELY, Gábor J. a Donald St. P. RICHARDS. *The St. Petersburg Paradox and the Crash of High-Tech Stocks in 2000* [online]. 2004 [cit. 2016-07-19]. Dostupné z: http://sites.stat.psu.edu/~richards/papers/tas-hitech.pdf

VARIAN, Hal R. *Microeconomic analysis*. 3rd ed. New York: Norton, 1992. ISBN 0-393-95735-7.

Herní plán číselných loterií a sázkových her SAZKA [online]. [cit. 2016-07-19]. Dostupné z: https://www.sazka.cz/SazkaWeb/media/content/Herni%20plany/herni-plan-loterie.pdf

Spin & Go. *Pokerstars.eu* [online]. [cit. 2016-07-24]. Dostupné z: https://www.pokerstars.eu/cz/poker/spin-and-go/

Zákon občanský zákoník. In: . 2012, 89/2012 Sb.

7. Přílohy

Příloha 1

P(WA) = 0,00348 . 0,1857 = 0,000646236

baaa = bbba = 0,532 . (0,4257 + 0,5743 . 0,3867)
baab = bbbb = 0,468 . 0,7
baba = bbaa = 0,526 . 0,4237 . 0,72
babb = bbab = 0,474 . 0,3667

baa = 0,17 . 0,3502 (baaa + baab)
bab = 0,83 . (baba + babb)
bba = 0,176 . (0,3533 + 0,6467 . (bbaa + bbab))
bbb = 0,824 . (bbba + bbbb)

ba = 0,367 . (0,4040 + 0,5959 . (baa + bab))
bb = 0,633 . (bba + bbb)

P(WB) = 0,07921 . 0,3045 (ba + bb) = 0,013913

caaa = cbba = 0,532 . (0,4257 + 0,5743 . 0,3867)
caab = cbbb = 0,468 . 0,7
caba = cbaa = 0,526 . 0,4237 . 0,72
cabb = cbab = 0,474 . 0,3667

caa = 0,17 . 0,3502 (caaa + caab)
cab = 0,83 . (caba + cabb)
cba = 0,176 . (0,3533 + 0,6467 . (cbaa + cbab))
cbb = 0,824 . (cbba + cbbb)

ca = 0,367 . (0,4040 + 0,5959 . (caa + cab))
cb = 0,633 . (cba + cbb)

P(WC) = 0,0811 . 0,3112 . (ca + cb) = 0,014556

dcbaa = caaaa = 0,532 . 0,4252 . 0,7733
dcbab = caab = 0,468 . 0,4
dcbba = caaba = 0,575 . (0,432 + 0,568 . 0,4)
dcbbb = caabb = 0,425 . 0,7133
dddba = dddca = 0,532 . (0,4252 + 0,5748 . 0,3866)
dddbb = dddcb = 0,468 . 0,7
dddca = 0,532 . (0,4252 + 0,5748 . 0,3866)
dddcb = 0,468 . 0,7
dddda = 0,1047 . (0,2618 + 0,0298 + 0,0395)
ddddb = 0,2873 . (0,2848 + 0,0517)
ddddc = 0,3235 . (0,2948 + 0,0536)
ddddd = 0,2845 . 0,4

dbaa = 0,544 .0,4275 . 0,7467

dbab = 0,456 . 0,3867
dbba = ddba = 0,566 . (0,4308 + 0,5692.0,3733)
dbbb = ddbb = 0,434 . 0,7
dcaa = cbaa = 0,526 . 0,4237 . 0,72
dcab = cbab = 0,474 . 0,3667
dcba = caaa = 0,532 . (0,4257 + 0,5743 . (dcbaa + dcbab))
dcbb = caab = 0,468 . (dcbba + dcbbb)
ddba = 0,566 . (0,4308 + 0,5692 . 0,3733)
ddbb = 0,434 . 0,7
ddca = ddba = 0,566 . (0,4308 + 0,5692.0,3733)
ddcb = ddbb = 0,434 . 0,7
ddda = 0,1266 . 0,2658
dddb = 0,3094 . 0,4102 .(dddba + dddbb)
dddc = 0,3242 . 0,4333 .(dddca + dddcb)
dddd = 0,2338 . (dddda + ddddb + ddddc + ddddd)

dba = 0,385 . (0,4088 + 0,5912 .(dbaa + dbab))
dbb = 0,615 . (dbba + dbbb)
dca = 0,176 . (0,3533 + 0,6467 . (dcaa + dcab))
dcb = 0,824 . (dcba + dcbb)
dda = 0,0082 . 0,1962
ddb = 0,1417 . 0,3536 (ddba + ddbb)
ddc = 0,1868 . 0,3665 . (ddca + ddcb)
ddd = 0,6633 . (ddda + dddb + dddc + dddd)

da = 0,01569 . 0,2182
db = 0,1733 . 0,3645 . (dba + dbb)
dc = 0,3081 . 0,406 . (dca + dcb)
dd = 0,5028 . (dda + ddb + ddc + ddd)

P(WD) = 0,83621 . (da + db + dc + dd) = 0,220941

Příloha 2

Data			
	I. Tah	II. Tah	Σ
1	489	408	897
2	494	424	918
3	471	395	866
4	474	393	867
5	477	440	917
6	502	464	966
7	485	420	905
8	506	415	921
9	489	418	907
10	444	428	872
11	465	455	920
12	479	468	947
13	498	430	928
14	465	440	905
15	511	425	936
16	448	412	860
17	487	417	904
18	501	430	931
19	484	455	939
20	506	449	955
21	474	419	893
22	482	435	917
23	477	417	894
24	492	428	920
25	478	424	902
26	493	420	913
27	478	397	875
28	475	433	908
29	459	468	927
30	489	427	916
31	494	414	908
32	493	431	924
33	452	417	869
34	490	411	901
35	477	429	906
36	502	439	941
37	468	441	909
38	467	432	899
39	488	441	929
40	487	465	952
41	443	421	864
42	461	424	885
43	496	399	895
44	475	456	931
45	421	424	845
46	471	463	934
47	519	428	947
48	503	420	923
49	435	433	868
Σ	23514	21042	44556

TF			
	I. Tah	II. Tah	Σ
1	473,38	423,62	897
2	484,47	433,53	918
3	457,02	408,98	866
4	457,55	409,45	867
5	483,94	433,06	917
6	509,80	456,20	966
7	477,61	427,39	905
8	486,05	434,95	921
9	478,66	428,34	907
10	460,19	411,81	872
11	485,52	434,48	920
12	499,77	447,23	947
13	489,74	438,26	928
14	477,61	427,39	905
14	493,96	442,04	936
15	453,86	406,14	860
16	477,08	426,92	904
17	491,33	439,67	931
18	495,55	443,45	939
19	503,99	451,01	955
20	471,27	421,73	893
21	483,94	433,06	917
22	471,80	422,20	894
23	485,52	434,48	920
24	476,02	425,98	902
25	481,83	431,17	913
26	461,77	413,23	875
27	479,19	428,81	908
28	489,22	437,78	927
29	483,41	432,59	916
30	479,19	428,81	908
31	487,63	436,37	924
32	458,61	410,39	869
33	475,49	425,51	901
35	478,13	427,87	906
36	496,60	444,40	941
37	479,72	429,28	909
38	474,44	424,56	899
39	490,27	438,73	929
40	502,41	449,59	952
41	455,97	408,03	864
42	467,05	417,95	885
43	472,33	422,67	895
44	491,33	439,67	931
45	445,94	399,06	845
46	492,91	441,09	934
47	499,77	447,23	947
48	487,10	435,90	923
49	458,08	409,92	868
Σ	23514	21042	44556

	I. Tah	II. Tah
1	0,515	0,576
2	0,188	0,210
3	0,427	0,478
4	0,591	0,661
5	0,099	0,111
6	0,119	0,133
7	0,114	0,128
8	0,819	0,915
9	0,223	0,250
10	0,570	0,636
11	0,867	0,969
12	0,863	0,965
13	0,139	0,156
14	0,333	0,372
14	0,587	0,656
15	0,076	0,084
16	0,206	0,231
17	0,190	0,213
18	0,269	0,301
19	0,008	0,009
20	0,016	0,018
21	0,008	0,009
22	0,057	0,064
23	0,086	0,097
24	0,008	0,009
25	0,259	0,290
26	0,570	0,637
27	0,037	0,041
28	1,866	2,085
29	0,065	0,072
30	0,458	0,512
31	0,059	0,066
32	0,095	0,106
33	0,443	0,495
35	0,003	0,003
36	0,059	0,066
37	0,286	0,320
38	0,117	0,130
39	0,011	0,012
40	0,473	0,528
41	0,369	0,412
42	0,078	0,088
43	1,186	1,326
44	0,543	0,606
45	1,395	1,559
46	0,974	1,088
47	0,740	0,827
48	0,519	0,580
49	1,163	1,299
Σ	40,54	