



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Libuše Haubeltová

Oceňování finančních derivátů

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2016

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Oceňování finančních derivátů

Autor: Libuše Haubeltová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jan Hurt, CSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V této práci se věnujeme oceňování finančních derivátů. Začneme stručným úvodem do historie a klasifikací základních skupin finančních derivátů. Navážeme zavedením pojmosloví a jednoduchými metodami oceňování derivátů. V této kapitole pro opce pouze vymezíme prostor pro opční prémii. Pokračovat budeme hlavní částí práce, která se týká matematických modelů pro oceňování právě opcí. Teorii postavíme na binomickém modelu, ze kterého odvodíme Cox-Ross-Rubinstein a Jarrow-Rudd model. Dále odvodíme Black-Scholesův model z předpokladů logaritmicko-normálního rozdělení cen bazického instrumentu a doplníme jej kapitolou o odhadech parametrů - především implikované volatility. V poslední části rozebereme několik praktických příkladů a investiční strategie opcí pomocí softwaru Wolfram Mathematica.

Klíčová slova: Finanční deriváty, binomický model oceňování opcí, Jarrow-Rudd, Cox-Ross-Rubinstein, Black-Scholes, implikovaná volatilita

Title: Pricing of Financial Derivatives

Author: Libuše Haubeltová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Jan Hurt, CSc., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: This bachelor thesis deals with pricing of financial derivatives. In the beginning we present a brief historical overview and classification of financial derivatives according to different criteria. Then we establish terminology, simple methods of pricing and space, where option premium is located. The main part of this work is devoted to option pricing models. We describe binomial pricing model, from which we derive Cox-Ross-Rubinstein and Jarrow-Rudd model by suitable choice of parameters. In the next step we deduce Black-Scholes formula from assumption of lognormal distributed spot price of underlying asset and we add chapter about implied volatility. In the numerical part we describe some investment strategies for options and introduce some practical examples for pricing European and American options using software Wolfram Mathematica.

Keywords: Financial Derivatives, Binomial options pricing model, Jarrow-Rudd, Cox-Ross-Rubinstein, Black-Scholes, implied volatility

Na tomto místě bych ráda vyjádřila díky svému vedoucímu bakalářské práce, doc. RNDr. Janu Hurtovi, CSc., za odborné vedení, cenné připomínky a ochotu poskytnout mi konzultace dokonce i v průběhu letních prázdnin.

Obsah

Úvod	2
1 Charakteristika finančních derivátů	3
1.1 Vznik finančních derivátů	3
1.2 Vymezení finančních derivátů	4
1.3 Klasifikace finančních derivátů	5
1.3.1 Forwardy	6
1.3.2 Futures	6
1.3.3 Swapy	6
1.3.4 Opce	7
2 Jednoduché metody oceňování finančních derivátů	8
2.1 Oceňování forwardů	8
2.2 Oceňování opcí	9
2.2.1 Meze opční prémie	11
3 Matematické modely pro oceňování opcí	15
3.1 Binomický model	15
3.1.1 Volba parametrů v binomickém modelu	20
3.2 Black-Scholesův model	23
3.2.1 Volatilita	24
4 Praktická část	27
4.1 Opční strategie	27
4.2 Příklady oceňování opcí	31
Závěr	34
Seznam použité literatury	35
Seznam obrázků	36
Seznam tabulek	37

Úvod

V první kapitole se budeme stručně věnovat historii vzniku finančních derivátů. Vzhledem k různorodosti finančních derivátů provedeme jejich vymezení z hlediska vlastností a znaků, které by měly splňovat. Dále provedeme klasifikaci dle různých kritérií, např. dle typu podkladového aktiva, kde a za jakým účelem jsou obchodovány nebo z hlediska postavení účastníků.

Dále uvedeme značení a základní techniky oceňování finančních derivátů. Protože problematika oceňování opcí vyžaduje složitější matematický aparát, v této kapitole pouze vymežíme prostor, ve kterém se může opční prémie nacházet.

Oceňování opcí věnujeme třetí kapitolu, kde představíme některé modely pro oceňování opcí, a to binomický model, Cox-Ross-Rubinstein model, Jarrow-Rudd model a v neposlední řadě Black-Scholesův model. Důležitou součástí bude podkapitola věnovaná odhadům parametrů, které do modelu vstupují (implikovaná volatilita).

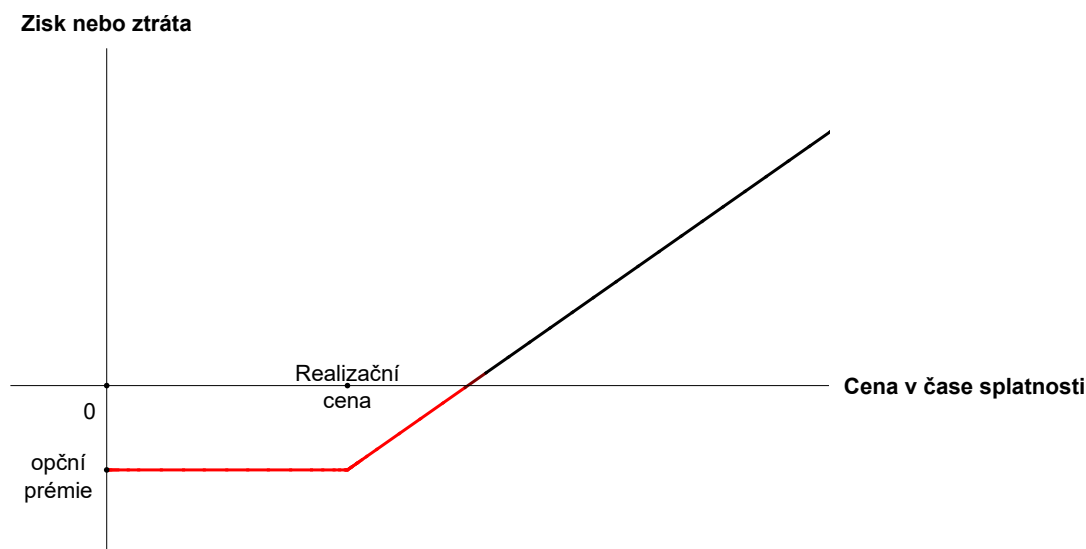
V poslední kapitole se podíváme na některé praktické příklady a na investiční strategie opcí, jako straddle, strangle, bullish, bearish a butterfly spread.

V celé práci používáme pro výpočty, grafy a implementaci oceňovacích modelů výpočetní software Wolfram Mathematica Student edition verze 10.3.0.0. Vybrali jsme tento software, protože poskytuje širokou škálu zabudovaných funkcí a je velmi dobře použitelný jak pro výpočty, tak pro tvorbu grafů.

1. Charakteristika finančních derivátů

1.1 Vznik finančních derivátů

Finanční deriváty mají v obecném povědomí punc novosti a složitosti. Potřeba zajistit se proti nepřízní počasí, zajistit si odbyt pro úrodu, atd. však provází lidstvo od nepaměti. O prvních finančních derivátech se mluví v souvislosti s Chammurapiho zákoníkem (Chammurapi), kde § 48 říká, že pokud Adad (babylonský bůh bouře a deště) zaplaví pole a odnese úrodu, nebo se neurodí kvůli suchu, nemusí pak zemědělec tento rok splácet zapůjčitelu úroky v naturáliích. Tento příklad splňuje některé charakteristiky opce, nevíme však, jak přesně byl tento vztah upraven a především postrádá soukromoprávní charakter. Nesporný doklad první opce nalezneme v Aristotelově díle Politika (Aristotelés, s. d., část XI. – Pokyny pro výdělečnou činnost v domácnosti a obci). Aristoteles zde dává za vzor příběh Thaléta z Miletu (6. stol. př. n.l), který byl lidmi vysmíván pro nevýnosnost filozofie. Podle svého hvězdářského pozorování předpovídal velkou sklizeň oliv a ještě v zimě si za nízkou cenu zaplatil přednostní právo použití většiny lisů na olivy v Miletu a Chiu za stanovenou cenu. V čase lisování pak pronajímal lisy, čímž vydělal velkou sumu peněz. Dokázal tím, že pro filozofa je snadné zbohatnout, když o to usiluje. U tohoto příkladu jsou již popsány všechny náležitosti opčního kontraktu. Jednalo se o kupní (call) opci na podkladové aktivum použití lisu na olivy. Thalés na začátku zaplatil majitelům lisů opční prémii, byl tedy v dlouhé (long) pozici a spekoval na vzestup ceny podkladového aktiva. V okamžiku vypršení měl právo koupit podkladové aktivum za předem sjednanou (realizační) cenu. Skutečná (poptávková) cena v čase splatnosti byla vyšší než realizační (díky vysoce nadprůměrné úrodě oliv). Thalés tedy opci uplatnil a rozdíl mezi realizační cenou a aktuální cenou vyinkasoval.



Obrázek 1.1: Zisk nebo ztráta majitele kupní opce.

V období antiky, v návaznosti na rozvoj obchodování (a transportování zboží) na velké vzdálenosti — římský panovníci např. opatřovali obilí v Egyptě — přišla potřeba zajistit odbyt zboží v místě dodání, čehož bylo dosahováno pomocí forwardových kontraktů. Z forwardů vycházejí futures, jejichž vznik je nedílně spjat s rozvojem obchodování na burzách. Swapy jsou nejnovějším z finančních derivátů. K hlavnímu rozvoji finančních derivátů došlo v 70. a 80. letech minulého století, a to především díky boomu nákupu finančních derivátů za účelem spekulace.

1.2 Vymezení finančních derivátů

Definice finančních derivátů obvykle staví na sémantickém vysvětlení, tedy že finanční deriváty jsou nástroje, jejichž hodnota je odvozena od hodnoty podkladového aktiva. Podkladové aktivum je však velmi široký pojem, protože se může jednat o komoditu, měnu, úrokovou míru, . . . , ale také jiný derivát. Proto je vhodnější používat pojem bazický instrument. V českém prostředí neexistuje jednotná definice finančních derivátů. Vymezení můžeme hledat hned ve třech zdrojích:

- v zákoně č.256/2004 Sb., o podnikání na kapitálových trzích,
- v zákoně č. 219/1995 Sb., devizový zákon,
- a nejpodrobněji v Českých účetních standardech pro podnikatele č.009, v nichž se dle Jílkovy knihy (Jílek, 2010) definice příliš neliší od IFRS (International Financial Reporting Standards, Mezinárodní standardy účetního výkaznictví).

Uhman (Uhman, 2013) ve svém článku říká, že dle IFRS je finanční derivát nástroj nebo jiná úmluva v rozsahu působnosti IAS 39, který splňuje všechny tři následující charakteristiky:

- jeho hodnota se mění reagováním na změnu specifické úrokové sazby, ceny finančního nástroje, ceny komodity, kurzu cizích měn, indexu cen nebo sazeb, úvěrové bonity nebo úvěrového indexu nebo jiné veličiny za předpokladu, že - v případě nefinanční proměnlivé veličiny - tato veličina není specifická pro smluvní stranu,
- nevyžaduje žádnou úvodní čistou investici, nebo úvodní čistou investici, jejíž hodnota je nižší než požadovaná hodnota při jiných typech smluv, které by reagovali podobně na změny tržních faktorů,
- jeho vypořádání nastane v budoucnosti.

Tato definice je již komplexnější a vyzdvihuje smysl derivátů, kterým je obchod s rizikem, tj. přenesení rizika ze subjektů, které riziko nést nechtějí (za účelem zajištění) na subjekty, které jsou ochotny riziko převzít (za účelem spekulace). Důležitý je rovněž termínovaný charakter ve smyslu časového nesouladu mezi uzavřením a plněním obchodu. Narozdíl od promptního trhu, v době sjednání kontraktu nemusí mít žádná ze stran dostatek finančních prostředků ani podkladového aktiva.

Poplatek za sjednání derivátu je v poměru k hodnotě bazického instrumentu velmi malý. Investor tedy za použití nízkého vlastního kapitálu kontroluje větší množství aktiv a tím maximalizuje svůj zisk, nebo také ztrátu. Tento jev se nazývá finanční pákový efekt (financial leverage).

Příklad (Finanční pákový efekt). Modelujme finanční pákový efekt na příkladu investora, který má dne 1.1. 2016 k dispozici 1 000 USD. Nabízí se mu možnost investovat do šestiměsíčních evropských call opcí (právo koupit) na akcii společnosti Apple s realizační cenou 102 USD za 5 USD. Cena za akcii společnosti Apple činí k 1.1.2016 100 USD. Investor se tedy rozhoduje mezi portfoliem složeným z 10 ks akcií a portfoliem složeným z 200 ks call opcí na akcie. Dne 1.7.2016 činí spotová cena 99 USD, resp. 105 USD.

Provedeme vyčíslení zisku a ztráty při změně spotové ceny na 99 USD, resp. 105 USD, a to jak absolutně, tak relativně vůči vstupní investici (viz tabulka 1.1).

	99 USD		105 USD	
zisk/ztráta	absolutně	relativně	absolutně	relativně
akcie	-10 USD	-1 %	50 USD	5 %
opce	-1000 USD	-100 %	600 USD	60 %

Tabulka 1.1: Finanční pákový efekt.

Z tabulky 1.1. je zřejmé, že změna spotové ceny akcií má větší vliv na opční portfolio. Vzhledem k tomu, že opce má velmi malou pořizovací cenu, mohl investor převzít zisk, resp. ztrátu ze změny spotové ceny řádově většího množství akcií a tím maximalizovat zisk či ztrátu. Pokud spotová cena klesne pod realizační cenu, přichází investor o celý vklad.

1.3 Klasifikace finančních derivátů

Členění finančních derivátů je relevantní z vícero kritérií. Vybereme některá dle Jílkovy knihy (Jílek, 2010). Podle postavení účastníků dělíme deriváty na **podmíněné** a **nepodmíněné**. Podmíněné kontrakty se vyznačují nerovným postavením subjektů, kdy účastník v dlouhé pozici rozhoduje o realizaci kontaktu. Zástupcem finančních derivátů s touto vlastností jsou **opce**. Naopak nepodmíněné kontrakty zavazují obě strany k uskutečnění obchodu v době splatnosti. Mluvíme také o pevných termínovaných operacích. Můžeme jmenovat **forwardy**, **futures**, **swapy** a **warranty**. Tyto skupiny popíšeme ve zvláštních podkapitolách.

Dle typu bazického instrumentu rozlišujeme deriváty **finanční**, které dělíme na úrokové, měnové, akciové, úvěrové, dále **komoditní** a **ostatní**. Finanční deriváty se původně týkaly především komodit, dnes většinu bazických instrumentů tvoří měny, akcie, úrokové míry a indexy.

Finanční deriváty mohou být obchodovány nejen na **burzách**, ale i na **mimo-burzovních trzích**, tzv. OTC (over the counter, neboli obchody přes přepážku). Na burzách je obchodováno s vysoce standardizovanými kontrakty co do objemu obchodu, data splatnosti, apod., čímž je dosahováno vyšší likvidity. Jedná se především o futures a burzovní opce. Mezi další přednosti obchodování na burzách

patří transparentnost obchodů, kdy podmínky jsou veřejnosti známé. Nutným předpokladem obchodování na burze je pro každého účastníka otevření maržového účtu a jeho doplňování na požadovanou hladinu. Tímto společně s garancí burzy resp. clearingového domu je minimalizováno kreditní riziko (tedy nebezpečí, že protistrana nedostojí svým závazkům). Naopak výhodou OTC trhů je „ušití“ derivátů na míru přímo dle potřeb klienta a nižší poplatky než u derivátových burz. Na OTC trzích jsou obchodovány především forwardy, swapy a mimoburzovní opce.

Do derivátového kontraktu vstupují vždy dvě strany. O kupujícím říkáme, že je v **dlouhé (long) pozici** a má v době splatnosti derivátu povinnost koupit, resp. u opcí právo koupit či prodat bazický instrument. Partner, říkáme mu také upisovatel, je pak v **krátké (short) pozici** a má povinnost prodat, resp. v případě opcí povinnost koupit či prodat bazický instrument v případě, že se účastník v long pozici rozhodne opci uplatnit.

V neposlední řadě můžeme deriváty dělit i podle účelu. Slouží především k **zajištění** (uzavřená pozice), tedy k imunizaci vůči budoucímu vývoji a **spekulaci** (otevřená pozice).

1.3.1 Forwardy

Forwardy jsou pevné termínované kontrakty sjednávané na OTC trzích. Kupující (v dlouhé pozice) se v okamžiku sjednání zavazuje, že k datu splatnosti koupí od prodávajícího bazický instrument, může se však také jednat o výměnu.

1.3.2 Futures

Futures jsou standardizované forwardy obchodované na burzovních trzích. Výhodou futures kontraktů je především minimalizace rizika, dále pak vyšší likvidita, kdy je snazší kontrakt prodat, nebo na trhu zaujmout opačnou pozici a tím jej vynulovat. Naopak negativem je menší možnost úpravy derivátu dle potřeb účastníka. Řečená standardizace tkví především ve stanovení objemu podkladového aktiva, data splatnosti a stanovení minimální možné denní změny futures (kotování ceny).

1.3.3 Swapy

Název swapy, znamená výměnu (původně však dle Cipra (2000) přepřahat). Jedná se tedy o budoucí obvykle periodickou směnu finančních toků nebo jiných bazických instrumentů. Jedna strana může např. poskytovat plnění plynoucí ze swapu čtvrtletně, druhá ročně. Nejsou však výjimečné ani swapy prosté. Jak již bylo řečeno, swapy jsou se svým vznikem až v 80. letech minulého století nejmladším z derivátů. Nejčastějšími typy swapů jsou úrokové a měnové.

1.3.4 Opce

Opce je derivát, který dává kupujícímu opce právo na uskutečnění předem dohodnuté směny v přesně daném budoucím okamžiku (**evropská opce**), nebo v průběhu nějakého období (**americká opce**). V případě, že se kupující rozhodne opci uplatnit, druhý partner (upisovatel) je povinen se tomu podřídit. Za to obdrží obvykle již při sjednání opce opční prémii. Opce rozlišujeme kupní (call) a prodejní (put).

2. Jednoduché metody oceňování finančních derivátů

V této kapitole uvedeme základní oceňovací techniky a vzorce.

2.1 Oceňování forwardů

Forwardové kontrakty jsou bezplatné, tedy zisk (nebo ztráta) je dán rozdílem mezi termínovou a spotovou cenou v čase splatnosti. V Ciprově knize (Cipra, 2000) musí mít forwardový kontrakt přesně definované tyto parametry:

- datum splatnosti T (maturita),
- předmět a objem bazického instrumentu,
- termínovou cenu K .

Hodnota dlouhé pozice f_t je v čase sjednání nulová, tedy zřejmě hodnota krátké pozice ($-f_t$) je rovněž nulová, jinak by kontrakt nemohl být bezplatný, protože by byl pro jednu stranu nevýhodný. Nulové hodnoty v čase t je dosahováno vhodným stanovením termínové ceny K . Cena forwardu F_t není cenou, kterou by platil kupující za forward, ale termínová cena, která by byla vypočtena v čase t . Speciálně tedy v čase sjednání $F_t = K$.

Nyní zavedme značení:

T	datum splatnosti,
K	termínová cena podkladového aktiva,
f_t	hodnota dlouhé pozice forwardu v čase t ,
F_t	cena forwardu v čase t ,
S_t	spotová (okamžitá) cena bazického instrumentu v čase t ,
V_t	hodnota výplat z cenného papíru diskontovaná do času t ,
r	bezriziková úroková míra.

Forward na cenný papír

Uvažujme forward na cenný papír bez výplat, např. na bezkuponový dluhopis. Mějme portfolio složené z forwardu (dlouhá pozice) a částky ve výši $Ke^{-r(T-t)}$. Částku investujeme za bezrizikovou úrokovou míru. Budoucí hodnota této částky v čase T činí K . Dlouhá pozice ve forwardu zavazuje k nákupu akcie v hodnotě S_T za termínovou cenu K . Celková hodnota portfolio v čase $T = S_T$. Pokud přidáme předpoklad neexistence arbitráže na trhu, musí být cena portfolio v čase $t \leq T$ shodná s cenou akcie v čase $t \leq T$, tedy platí:

$$S_t = f_t + Ke^{-r(T-t)}.$$

V čase sjednání pak z podmínky $f_t = 0$ plyne:

$$K = S_t e^{r(T-t)}.$$

V současné době jsou nejvíce obchodovaným typem forwardových kontraktů tzv. „FRA“ (forward rate agreement). V Jílkově knize (Jílek, 2010) se uvádí, že vznikly ve Švýcarsku roku 1984 z forwardových termínovaných vkladů, úvěrů či půjček hotovosti. Jedná se o úrokový derivát, kdy v budoucnu dojde k výměně pevné částky za dosud neznámou částku, která je dána přesným výpočtem, a to v téže měně. Výpočet neznámé částky může záviset například na sazbách LIBOR (London InterBank Offered Rate) či PRIBOR (PRague InterBank Offered Rate).

Futures jsou vysoce standardizované forwardy. Oceňování futures tedy probíhá analogicky.

2.2 Oceňování opcí

Opce musí mít v době sjednání přesně definované parametry, které zcela určují daný obchod, a to:

- datum splatnosti (maturity date),
- předmět a objem bazického instrumentu,
- realizační cenu.

Nyní zaveďme značení:

c_t (resp. C_t)	...	cena evropské (resp. americké) call opce v čase t ,
p_t (resp. P_t)	...	cena evropské (resp. americké) put opce v čase t ,
T	...	datum expirace (také datum splatnosti či maturita),
τ	...	datum realizace opce (u evropské $\tau = T$),
K	...	realizační cena bazického instrumentu,
S_t	...	spotová (okamžitá) cena bazického instrumentu v čase t ,
r	...	bezriziková úroková míra,
σ	...	volatilita bazického instrumentu,
D_t	...	hodnota dividend v čase t vyplacených do maturity opce.

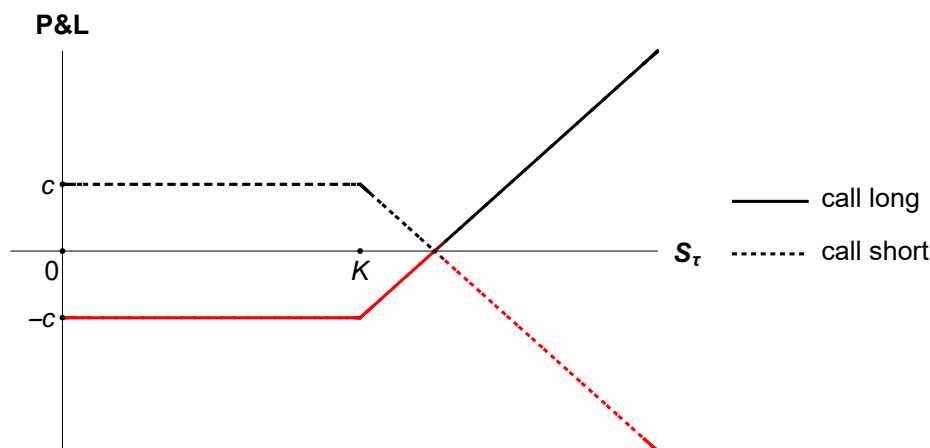
Poznámka. Pokud nebude řečeno jinak, budeme mít na mysli běžné evropské opce (tzv. vanilla) a budeme předpokládat, že bazickým instrumentem je akcie, ze které držitelé neplynou dividendy.

Call (resp. put) opce dává kupujícímu (v long pozici) právo koupit bazický instrument za realizační cenu, upisovatel je pak povinen podkladové aktivum za tuto cenu prodat (resp. koupit). Cipra ve své knize (Cipra, 2000) používá terminologii, že opce je:

		pro call opci:		pro put opci:
v penězích,	když	$(S_t - K) > 0,$	nebo	$(K - S_t) > 0,$
na penězích,	když	$(S_t - K) = 0,$	nebo	$(K - S_t) = 0,$
mimo peníze,	když	$(S_t - K) < 0,$	nebo	$(K - S_t) < 0.$

Kupující se rozhodne opci uplatnit v případě, že je v čase splatnosti „v peně-
zích“. Označme výplatní funkci z call opce $V(S_\tau) = \max(S_\tau - K, 0) := (S_\tau - K)^+$.
Zisk (popřípadě ztráta) v závislosti na S_τ z **call** opce poté vypadá následovně:

$$\text{zisk} = \begin{cases} -c + (S_\tau - K)^+ & \text{z pozice kupujícího,} \\ +c - (S_\tau - K)^+ & \text{z pozice upisovatele.} \end{cases}$$

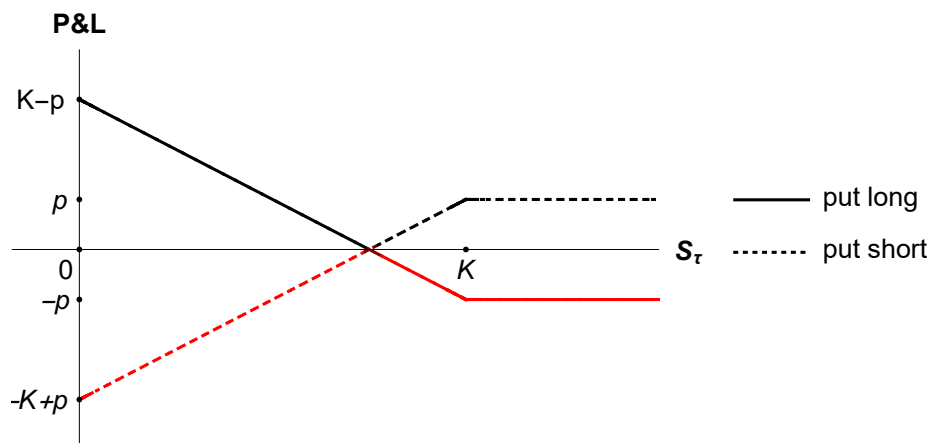


Obrázek 2.1: Zisk kupujícího a upisovatele call opce v závislosti na S_τ .

Zřejmě platí, že zisk kupujícího je ztráta upisovatele a naopak. Rovnovážný bod, kde je ztráta kupujícího i upisovatele nulová je v bodě $S_\tau = K + c$.

Analogicky označme výplatní funkci z put opce $V(S_\tau) = \max(K - S_\tau, 0) := (K - S_\tau)^+$. Zisk (popřípadě ztráta) v závislosti na S_τ z **put** opce poté vypadá následovně:

$$\text{zisk} = \begin{cases} -p + (K - S_\tau)^+ & \text{z pozice kupujícího,} \\ +p - (K - S_\tau)^+ & \text{z pozice upisovatele.} \end{cases}$$



Obrázek 2.2: Zisk kupujícího a upisovatele put opce v závislosti na S_τ .

Zřejmě platí, že zisk kupujícího je ztráta upisovatele a naopak. Rovnovážný bod, kde je ztráta kupujícího i upisovatele nulová je v bodě $S_T = K - c$.

Maximální zisk a ztráta z jednotlivých pozic jsou uvedeny v tabulce níže. Povšimněme si, že ztráta z call opce v krátké pozici není shora omezena. Tento typ opcí je často kombinován s opcemi jiných parametrů pro sestavení portfolia, které vyhovuje investorovým požadavkům a jeho averzi vůči riziku.

druh opce	CALL		PUT	
pozice	long	short	long	short
maximální zisk	∞	c	$K - p$	p
maximální ztráta	$-c$	$-\infty$	$-p$	$-K + p$

Tabulka 2.1: Maximální zisk a ztráta z opce dle typu a pozice

2.2.1 Meze opční prémie

Oceňování opcí je obtížnější především z důvodu práva, nikoliv povinnosti opci uplatnit. V této kapitole ukážeme přirozené meze pro opční prémii, v další kapitole pak modely a postupy, jak cenu opce stanovit přesněji.

Zřejmě platí, že:

$$c_t \geq 0.$$

Opce dává právo, nikoliv povinnost vypořádat bazický instrument za předem danou cenu. Upisovatel tedy musí být za poskytnutí tohoto práva kompenzován.

$$c_t \leq S_t.$$

Pokud by byla okamžitá cena akcie na trhu nižší, než cena opce, bylo by výhodnější koupit přímo akcii.

Tvrzení 1. *Pro opční prémii platí vztah:*

$$c_t \geq S_t - Ke^{-r(T-t)} \quad \text{pro } t \leq T.$$

Důkaz. Uvedu zde obměněný důkaz odvozením založený na práci Koláře a Křivánkové (Kolář a Křivánková) a na knize Garretta (Garrett, 2013).

Nechť investor v čase t uskuteční prodej akcie A nakrátko a ze získaných prostředků ve výši S_t vytvoří investiční portfolio následujícím způsobem:

- koupě evropské call opce na akcii A s časem splatnosti T v realizační ceně K za cenu c_t ,

- investice zbylých prostředků ve výši Z za bezrizikovou míru r , což je jistě možné, protože $S_t > c_t$, a tedy $\exists Z > 0 : S_t - c_t - Z = 0$.

V čase T má portfolio hodnotu:

$$\underbrace{-S_T}_{\text{vrácení akcie}} + \underbrace{Ze^{r(T-t)}}_{\text{hodnota investice } Z \text{ v čase } T} + \underbrace{(S_T - K)^+}_{\text{zisk z opce}}$$

Hodnota portfolia v čase $T = -S_T + (S_t - c_t)e^{r(T-t)} + (S_T - K)^+$. Využijme nyní slabšího předpokladu neexistence arbitráže na trhu, tedy že nulová investice negeneruje jistý nenulový zisk. Snadno nahlédneme, že pokud je hodnota portfolia nekladná v případě $S_T > K$, bude tomu tak i v případě $S_T \leq K$ a naopak.

$$\begin{aligned} S_T > K \quad & -S_T + S_t e^{r(T-t)} - c_t e^{r(T-t)} + S_T - K \leq 0 \\ & c_t e^{r(T-t)} \geq S_t e^{r(T-t)} - K \\ & c_t \geq S_t - K e^{-r(T-t)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_T \leq K \quad & -S_T + S_t e^{r(T-t)} - c_t e^{r(T-t)} + 0 \leq 0 \\ & c_t e^{r(T-t)} \geq S_t e^{r(T-t)} - S_T \\ & c_t \geq S_t - S_T e^{r(T-t)} \\ & c_t \geq S_t - K e^{-r(T-t)}. \end{aligned}$$

Stanovili jsme tedy dolní mez pro cenu opce v čase t .

□

Poznámka. Pokud by však držení podkladového aktiva generovalo držiteli zisk, situace by vyžadovala drobnou modifikaci. Jako příklad takového aktiva uveďme akcii, která vyplácí dividendy. Hodnota portfolia by v čase t byla vyšší právě o dividendy. V čase t je tedy hodnota vyšší o diskontovanou hodnotu dividend vyplácených do času splatnosti opce. Tedy:

$$c_t \geq S_t - K e^{-r(T-t)} - D_t \quad \text{pro } t \leq T.$$

Omezení ceny evropské put opce lze odvodit analogicky:

$$p_t \geq K e^{-r(T-t)} - S_t \quad \text{pro } t \leq T.$$

A pro evropskou put opci na akcii vyplácející dividendy:

$$p_t \geq K e^{-r(T-t)} - S_t + D_t \quad \text{pro } t \leq T.$$

Tvrzení 2. *Cena evropské a americké call opce je v čase $t \leq T$ shodná.*

$$C_t = c_t \quad \text{pro } t \leq T.$$

Důkaz. Zřejmě platí, že $C_t \geq c_t$, protože americká opce oproti evropské nabízí navíc možnost předčasného uplatnění. Z tvrzení 1 víme, že v čase $t \leq T$ platí $c_t \geq S_t - K e^{-r(T-t)}$. V případě uplatnění opce v čase t získáme vnitřní hodnotu opce, tedy $S_t - K$. Faktor $e^{-r(T-t)} \leq 1$, tedy platí $S_t - K e^{-r(T-t)} \geq S_t - K$,

příčemž rovnost nastává pouze v čase $t = T$. Uplatněním opce před časem splatnosti tedy přicházíme o její časovou hodnotu, což je dle Cipra (2000) cena, kterou jsou investoři ochotni zaplatit za potenciální možnost, že se cena bazického instrumentu změní v jejich prospěch. Pro uzavření pozice je tedy výhodnější opci prodat, než uplatnit.

□

Poznámka. Zdůrazněme však, že stejný vztah neplatí analogicky i pro americkou a evropskou put opci, a to z důvodu, že prostředky získané předčasným uplatněním put opce je možné dále reinvestovat za bezrizikovou úrokovou míru. V čase splatnosti opce pak mají prostředky hodnotu $(S_T - K)e^{r(T-t)}$, která může být ostře větší než $S_T - K$.

Tvrzení 3 (Put-call parita). *Opční prémie z put a call opce jsou ve vzájemně jednoznačném vztahu:*

$$S_t + p_t = Ke^{r(T-t)} + c_t \quad \text{pro } t \leq T.$$

Důkaz. Uvedeme důkaz podle Dupačová a kol. (2002)

Uvažujme portfolio složené z akcie, krátké pozice v put opci a dlouhé pozice v call opci. Označme π_t hodnotu portfolia v čase t a vyčíslíme:

$$\pi_t = S_t + p_t - c_t.$$

Hodnotu portfolia v čase $T - 1$ rozlišíme na dva případy dle polohy S_T vůči K :

$$\begin{aligned} \pi_T &= S_T - (K - S_T)^+ + (S_T - K)^+ \\ S_T > K & \quad \pi_T = S_T + 0 - S_T - K = -K \\ S_T \leq K & \quad \pi_T = S_T + K - S_T - 0 = K \end{aligned}$$

Portfolio má tedy v čase T hodnotu právě K . Přidáním předpokladu absence arbitrážních příležitostí na trhu plyne, že hodnota portfolia v čase t je rovna diskontované hodnotě bezrizikovým úrokovým faktorem, tedy:

$$p_t = c_t - S_t + Ke^{-r(T-t)} \quad \text{pro } t \leq T.$$

Z hodnoty call opce, ceny akcie, bezrizikové úrokové míry a doby do splatnosti je možné určit výši opční prémie evropské put opce.

□

Poznámka. Drobnou modifikací postupu bychom získali vztah pro opce na akcie s výplatou dividend:

$$p_t = c_t - S_t + Ke^{-r(T-t)} + D_t \quad \text{pro } t \leq T.$$

Uvedené vztahy však platí pouze pro evropské opce. Z tvrzení 3 víme, že cena evropské a americké call opce je shodná, pro put opci to však již neplatí. Cena

americké put opce je vyšší o hodnotu možnosti předčasného uplatnění, které může být u put opce výhodné. Pro americkou put opci tedy platí:

$$P_t \geq C_t - S_t + Ke^{-r(T-t)} \quad \text{pro } t \leq T.$$

A analogicky pro americkou put opci vyplácející dividendy:

$$P_t \geq C_t - S_t + Ke^{-r(T-t)} + D_t \quad \text{pro } t \leq T.$$

Stanovili jsme prostor, ve kterém se může opční prémie nacházet. Ten je však stále ještě poměrně široký. Podíváme se tedy na složitější aproximační metody, jakými lze blíže určit cenu opce a tedy výši opční prémie.

3. Matematické modely pro oceňování opcí

Ačkoliv počátek obchodování s opcemi není záležitostí posledního století, s prvními standardizovanými opčními kontrakty se začalo obchodovat až roku 1973, v návaznosti na vznik Chicago Board of Option Exchange (CBOE). Tím vyvstala potřeba modelů, které by přesně stanovovaly cenu opcí. Prvním modelem byl Black-Scholesův, publikovaný v roce 1973. Binomický model, kterým začneme, byl svými autory Coxem, Rossem a Rubinsteinem představen o něco později (v roce 1979), poskytuje však přehlednější úvod do problematiky oceňování opcí. Black-Scholesův model, který je díky své výpočetní jednoduchosti více rozšířen, odvodíme vzápětí.

3.1 Binomický model

Pro zjednodušení uvažujme opce na akcie. Nejprve se seznámíme se základními předpoklady modelu. Dupačová, Hurt a Štěpán (Dupačová a kol., 2002) je uvádějí takto:

1. cena akcie S_t se může měnit pouze v ekvidistantních časových okamžicích $t, t + 1, \dots$
2. cena akcie $S_{t+1} = X_{t+1}S_t$, kde X_{t+1} je náhodná veličina taková, že:

$$X_{t+1} = \begin{cases} u, & \text{s pravděpodobností } p, \\ d, & \text{s pravděpodobností } 1 - p. \end{cases}$$

3. X_t jsou nezávislé stejně rozdělené,
4. $0 < d < u$,
5. absence arbitrážních příležitostí,
6. investoři se chovají racionálně,
7. rizikově neutrální prostředí.

Poznámka. Z předpokladů plyne, že cena akcie S_{t+1} při dané S_t může nabývat pouze dvou hodnot, přičemž:

$$P(S_{t+1} = uS_t \mid S_t) = p \text{ a } P(S_{t+1} = dS_t \mid S_t) = 1 - p.$$

Obvykle také předpokládáme, že $d < 1 < u$, tedy cena bazického instrumentu může v čase narůstat i klesat.

Rizikově neutrální prostředí lze chápat jako trh, kde se u investorů neprojevuje averze vůči riziku. V běžném světě jsou rizikové investice úročeny vyšší úrokovou mírou než je bezriziková, právě jako přírážka za riziko. Vysvětlení pro

lepší pochopení lze nalézt v knize Dupačové a kol. (Dupačová a kol., 2002): Výnos z každé investice sice reálně neodpovídá bezrizikové úrokové míře, využijeme ji však pro vyjádření současné hodnoty střední hodnoty budoucích finančních toků plynoucích z rizikových investic. V praxi se však ukazuje, že model rizikově neutrálního prostředí je pro oceňování finančních derivátů vhodný. Rizikovost investice se totiž promítne již do ceny např. akcie, či jiného bazického instrumentu. Pokud bychom přizpůsobili úrokovou míru rizikovosti investice, byla by riziková přírážka vlastně započítána duplicitně.

Tvrzení 4. *Bezriziková míra výnosnosti je vyšší než d , zároveň menší než u .*

$$d < e^r < u.$$

Důkaz. Důkaz provedeme podobně, jako v knize Dupačové a kol. (Dupačová a kol., 2002). Dokážeme sporem nejdříve první nerovnost. Předpokládejme, že $d < u < e^r$. V čase t prodáme akcii A nakrátko a částku ve výši S_t investujeme za bezrizikovou úrokovou míru. V čase $t + 1$ má toto portfolio hodnotu:

$$\pi_{t+1} = \begin{cases} -uS_t + e^r S_t = S_t(e^r - u) & \text{s pravděpodobností } p, \\ -dS_t + e^r S_t = S_t(e^r - d) & \text{s pravděpodobností } 1 - p. \end{cases}$$

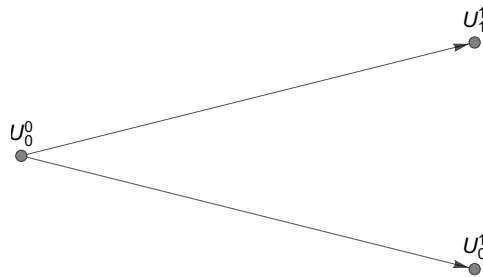
Toto portfolio tedy generuje v čase $t + 1$ jistý zisk, což je spor s neexistencí arbitráže.

Pro dokázání druhé nerovnosti sporem předpokládejme $e^r < d < u$. V čase t si půjčíme částku S_t za bezrizikovou úrokovou míru, za níž nakoupíme akcii A. V čase $t + 1$ má dané portfolio hodnotu:

$$\pi_{t+1} = \begin{cases} -S_t + e^r + uS_t = S_t(u - e^r) & \text{s pravděpodobností } p, \\ -S_t + e^r + dS_t = S_t(d - e^r) & \text{s pravděpodobností } 1 - p. \end{cases}$$

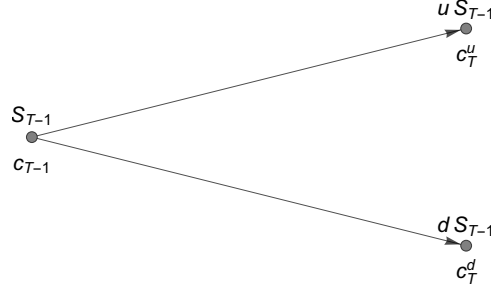
Toto portfolio rovněž generuje v čase $t + 1$ jistý zisk, což je spor s neexistencí arbitráže. □

Označme uzlem stromu U_i^j takový průběh ceny podkladového aktiva, kdy vzdálenost od kořene (hloubka stromu) je rovna i a počet zvýšení ceny o u je roven j . Uvažujme nyní jednokrokový binomický model. Cena akcie se tedy může v průběhu platnosti měnit pouze jedenkrát a obecné značení vypadá následovně:



Obrázek 3.1: Značení uzlů v jednokrokovém binomickém modelu.

Výši opční prémie odvodíme rekurzivně. Cena call opce v čase splatnosti T má nulovou časovou hodnotu a vnitřní hodnotu lze snadno vyjádřit výplatní funkcí. Zafixujeme-li cenu bazického instrumentu v čase $T - 1$ (v čase oceňování je známá), vývoj ceny je dán předpokladem 2. Na obrázku 3.2 je schéma vývoje ceny bazického instrumentu a obecné značení cen opce příslušné k jednotlivým scénářům vývoje cen bazického instrumentu v jedнокrokovém binomickém modelu.



Obrázek 3.2: Vývoj ceny podkladového aktiva.

Odvození cen opcí v binomickém modelu je provedeno v knize Dupačové a kol. (Dupačová a kol., 2002) a také v knize Hulla (Hull, 2009). My jej však provedeme podrobněji. Pro rekurzivní odvození ceny opce vytvoříme portfolio následujícím způsobem:

- půjčka ve výši Y za bezrizikovou úrokovou míru,
- nákup X kusů akcie A v ceně S_{T-1} ,
- upsání call opce na A .

$$Y = XS_{T-1} + c_{T-1}. \quad (3.1)$$

Označme c_T^u cenu opce v čase T při vývoji ceny podkladového aktiva od S_{T-1} do $S_T = uS_{T-1}$ a analogicky c_T^d , pokud cena bazického instrumentu naopak poklesla. Chceme, aby bylo portfolio bezrizikové, tedy najdeme X tak, aby cena portfolia byla stejná při obou scénářích. Stanovené množství X nazveme zajišťovacím poměrem.

$$\begin{aligned} XuS_{T-1} - c_T^u &= XdS_{T-1} - c_T^d, \\ X &= \frac{c_T^u - c_T^d}{(u - d)S_{T-1}}. \end{aligned}$$

Pro stanovení ceny opce v čase $T - 1$ vyjděme z předpokladu 5, tedy že míra zisku z bezrizikového portfolia nemůže být vyšší, než je dána bezrizikovou úrokovou mírou.

$$\text{s pravděpodobností } p : \quad Ye^{r((T)-(T-1))} = XuS_{T-1} - c_T^u, \quad (3.2)$$

$$\text{s pravděpodobností } 1 - p : \quad Ye^{r((T)-(T-1))} = XdS_{T-1} - c_T^d. \quad (3.3)$$

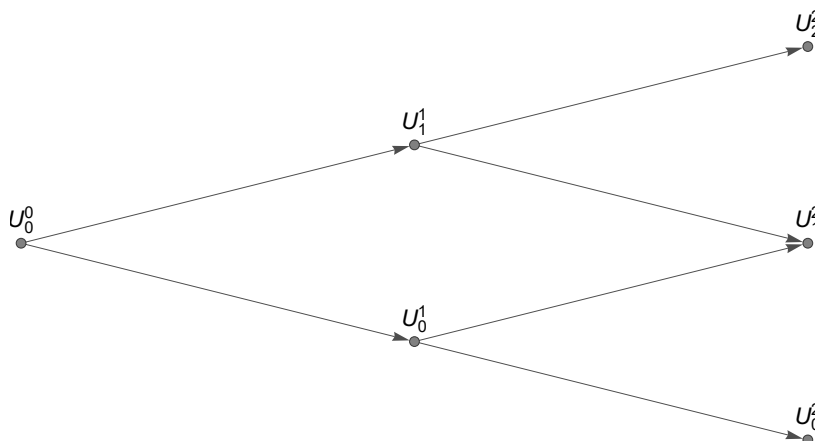
Nyní z rovnic 3.1 a 3.2 nebo ekvivalentně z rovnic 3.1 a 3.3 určíme cenu opce v čase $T - 1$:

$$c_{T-1} = e^{-r} \left(\underbrace{\frac{e^r - d}{u - d} c_T^u}_p + \underbrace{\frac{u - e^r}{u - d} c_T^d}_{1-p} \right). \quad (3.4)$$

Součet faktorů $p = \frac{e^r - d}{u - d}$ a $1 - p = \frac{u - e^r}{u - d}$ je roven 1, navíc z tvrzení 4 jsou oba kladné. Celý výraz je poté interpretovatelný jako střední hodnota opce v rizikově neutrálním prostředí v čase T diskontovaná do času $T - 1$.

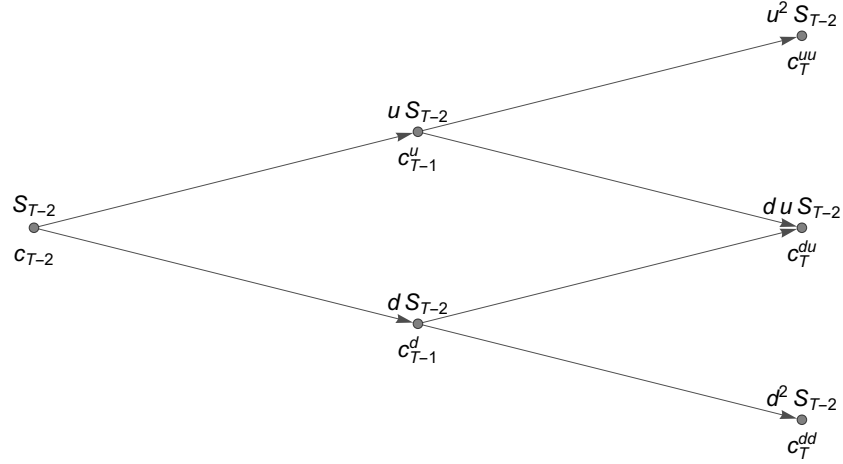
Cena opce se skládá z časové a vnitřní hodnoty (viz tvrzení 2). Vnitřní hodnota je dána výplatní funkcí, avšak dle Ciprovy knihy (Cipra, 2000) je časová hodnota ovlivňována mnoha faktory, z nichž některé jsou obtížně kvantifikovatelné. V čase splatnosti je časová hodnota opce již nulová, závisí na realizační ceně, která je předem dána, a na ceně bazického instrumentu. Vývoj ceny bazického instrumentu je dán binomickým modelem, tudíž máme způsob, jak odhadovat cenu opce v čase. Cena opce v čase T při zvýšení ceny bazického instrumentu je $(uS_T - K)^+$ a při poklesu ceny $(dS_T - K)^+$. Máme tedy postup, jakým stanovit cenu opce v čase $T - 1$.

Nyní přidejme další krok binomického modelu. Čas mezi datem prodeje a datem splatnosti rozdělíme na dva ekvidistantní časové okamžiky, mezi nimiž se cena akcie může měnit. Jednotlivým uzlům přísluší toto značení:



Obrázek 3.3: Značení uzlů v dvoukrokovém binomickém modelu.

Vývoj ceny bazického instrumentu z času $T - 2$ do času T a obecné značení cen opcí příslušných k jednotlivým scénářům vypadá následovně:



Obrázek 3.4: Značení vývoje ceny opce v závislosti na změně ceny podkladového aktiva v dvoukrokovém binomickém modelu.

Využijme nyní vzorec 3.4 pro vyjádření ceny opce v čase $T - 1$ závislosti na vývoji ceny podkladového aktiva:

$$c_{T-1}^u = e^{-r}(pc_T^{uu} + (1-p)c_T^{ud}), \quad (3.5)$$

$$c_{T-1}^d = e^{-r}(pc_T^{ud} + (1-p)c_T^{dd}). \quad (3.6)$$

Použitím těchto rovnic, druhým použitím 3.4 a dosazením hodnoty opce v čase T získáme rovnici pro c_{T-2} :

$$c_{T-2} = e^{-2r}(p^2c_T^{uu} + p(1-p)c_T^{du} + (1-p)^2c_T^{dd}),$$

$$c_{T-2} = e^{-2r}(p^2(u^2S_T - K)^+ + p(1-p)(duS_T - K)^+ + (1-p)^2(d^2S_T - K)^+).$$

Logický význam je již zřejmý. Opět se jedná o očekávanou střední hodnotu ceny opce v čase T diskontovanou do času $T - 2$. Jde o konvexní lineární kombinaci s koeficienty p^2 , $p(1-p)$ a $(1-p)^2$.

Poznámka (Bezriziková úroková míra). V předchozích výpočtech jsme uvažovali konstantní bezrizikovou úrokovou míru, jejíž referenční období se vztahuje k času jednoho kroku modelu. Pokud by se vztahovala k celé platnosti opce, bylo by třeba vzít úrokovací faktor $e^{\frac{r}{k}}$, kde $k \in \mathbb{N}$ je počet kroků modelu.

Trend je již patrný, zbývá jen zobecnění pro vícekrokové binomické modely. Za použití distribuční funkce binomického rozdělení $\mathbf{P}[X = j] = \binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}$ dostáváme:

$$c_{T-k} = e^{-rk} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} p^j (1-p)^{k-j} (u^j d^{k-j} S_{T-k} - K)^+.$$

Pro $t := T - k$, kde $k \in \mathbb{N}$,

$$c_t = e^{-r(T-t)} \sum_{j=0}^{T-t} \binom{T-t}{j} p^j (1-p)^{T-t-j} (u^j d^{T-t-j} S_t - K)^+.$$

Zajímavé je, že činitel výplatní funkce call opce je seřazen od nejmenší po největší, tedy prvních a členů je nulových, další jsou již nenulové. Hledáme tedy nejmenší možné fixní j , označme jej a , takové, že platí:

$$\begin{aligned} u^a d^{T-t-a} S_t - K &> 0, \\ u^a d^{T-t-a} S_t &> K. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Obě strany nerovnice 3.7 zlogaritmujeme, což je možné, protože logaritmus je prostá rostoucí funkce a vyjádříme nejmenší možné $a \in \mathbb{N}$:

$$a \geq \frac{\ln(K/S_t d^{T-t})}{\ln(u/d)}. \quad (3.8)$$

Celkovou cenu call opce v čase $t \leq T$ spočteme jako střední hodnotu $(S_T - K)$ „useknutého“ binomického rozdělení, kde a je dáno rovnicí 3.8 a substituce p je zavedena v rovnici 3.4.

$$c_t = e^{-r(T-t)} \sum_{j=a}^{T-t} \binom{T-t}{j} p^j (1-p)^{T-t-j} (u^j d^{T-t-j} S_t - K).$$

Cenu put opce v čase $t \leq T$ bychom spočítali analogicky. Snazší je však užít tvrzení 3 o put-call paritě a vyjádřit výši opční prémie z put opce přímo:

$$p_t = e^{-r(T-t)} \sum_{j=a}^{T-t} \binom{T-t}{j} p^j (1-p)^{T-t-j} (u^j d^{T-t-j} S_t - K) + K e^{-r(T-t)} - S_t.$$

Veškeré výpočty jsme zatím prováděli pouze pro evropské opce. Cena americké call opce se dle tvrzení 2 vypočítá stejným způsobem, protože jejím předčasným uplatněním by kupující přišel o její časovou hodnotu. Výpočet ceny put opce by vyžadoval úpravu. V každém uzlu U_i^j bychom museli posuzovat, zdali vnitřní hodnota opce nepřevyšuje diskontovanou rekurzivně spočítanou hodnotu a opci v tomto uzlu ocenit maximem těchto hodnot. Tedy v uzlu U_i^j je cena americké put opce:

$$c_t = \max\left(\underbrace{u \dots u}_j \underbrace{d \dots d}_{j-i} S_t + (1-p) u^j u^{j-i+1} S_t\right) e^{-rt/k}, u^j d^{i-j} S_t - K$$

Příkladem pro oceňování jak evropských, tak amerických opcí v binomickém modelu, bude věnována část čtvrté kapitoly.

3.1.1 Volba parametrů v binomickém modelu

Ukazuje se, že pro dostatečný počet kroků binomický model při vhodné volbě parametrů dobře aproximuje vývoj cen opcí. Do binomického modelu vstupují parametry jako maturita, cena podkladového aktiva v čase t , realizační cena nebo bezriziková úroková míra. Tyto parametry považujeme za známé. Zbývající parametry jako u, d a p je nutné položit tak, abychom dobře modelovali volatilitu bazického instrumentu.

Chceme, aby střední hodnota ceny aktiva daná modelem v dalším kroku byla rovna budoucí hodnotě ceny podkladového aktiva v rizikově neutrální prostředí. Vezměme úrokovou míru r , která se vztahuje k jednotce času a $e^{(T-t)/k}$ je tedy bezriziková úroková míra připadající na jeden krok modelu. Potom

$$\begin{aligned} puS_t + (1-p)dS_t &= S_t \exp\left(r\frac{T-t}{k}\right), \text{ tedy} \\ pu + (1-p)d &= \exp\left(r\frac{T-t}{k}\right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Stejným způsobem napíšeme rovnici pro rozptyl, teoretický podklad je podrobně zpracován v knize Dupačové a kol. (Dupačová a kol., 2002):

$$pu^2 + (1-p)d^2 = \exp\left((2r + \sigma^2)\frac{T-t}{k}\right) \quad (3.10)$$

Rovnici pro rozptyl lze psát pomocí Maclaurinova rozvoje pro $e^{\sigma^2(T-t)/k}$ do prvního řádu i v aproximativním tvaru. Důležitým předpokladem použití Maclaurinova rozvoje je velký počet kroků, tedy velmi malé $(T-t)/k$, aby byla zachována konvergence. Potom můžeme psát:

$$pu^2 + (1-p)d^2 - \exp\left(2r\frac{T-t}{k}\right) = 1 + \sigma^2\frac{T-t}{k} \quad (3.11)$$

Chceme tedy stanovit tři parametry – u, d a p a máme k dispozici rovnice 3.9 a 3.10, popřípadě 3.9 a 3.11 pro aproximativní verzi. Pro výpočet odhadu parametrů tedy potřebujeme další podmínku. Podle toho, jak ji formulujeme dostáváme následující modely.

Cox-Ross-Rubinstein model

Model, který se dle svých autorů nazývá Cox–Ross–Rubinstein model, přidává podmínku $u = 1/d$. Všimněme si, že pokud cena bazického instrumentu klesne o u a stoupne o d , vrátí se na původní hodnotu. Asymetrie ve stromu vývoje cen bazického instrumentu tedy spočívá pouze v pravděpodobnosti, s jakou se cena akcie dostane do jednotlivých větví, průběh cen je však symetrický.

Nyní vyřešíme soustavu rovnic 3.9 a 3.10 s dodatečnou podmínkou $u = 1/d$ pomocí softwaru Mathematica. Ten poskytne dvě řešení, která jsou shodná až na přiřazení hodnot u a d . Vybereme tedy řešení, pro které v souladu s předpoklady platí, že $d < u$.

$$\begin{aligned} u_{CRR} &= \frac{e^{-r\frac{T-t}{k}}}{2} \left(\sqrt{\left(e^{\frac{T-t}{k}(2r+\sigma^2)} + 1\right)^2 - 4e^{2r\frac{T-t}{k}} + e^{\frac{T-t}{k}(2r+\sigma^2)} + 1} \right), \\ d_{CRR} &= \frac{e^{-r\frac{T-t}{k}}}{2} \left(-\sqrt{\left(e^{\frac{T-t}{k}(2r+\sigma^2)} + 1\right)^2 - 4e^{2r\frac{T-t}{k}} + e^{\frac{T-t}{k}(2r+\sigma^2)} + 1} \right), \\ p_{CRR} &= \frac{\sqrt{2e^{(2r+\sigma^2)\frac{T-t}{k}} + e^{2(2r+\sigma^2)\frac{T-t}{k}} - 4e^{2r\frac{T-t}{k}} + 1} - e^{(2r+\sigma^2)\frac{T-t}{k}} + 2e^{2r\frac{T-t}{k}} - 1}{2\sqrt{2e^{(2r+\sigma^2)\frac{T-t}{k}} + e^{2(2r+\sigma^2)\frac{T-t}{k}} - 4e^{2r\frac{T-t}{k}} + 1}}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Pro aproximativní verzi Cox-Ross-Rubinstein modelu vyřešíme rovnice 3.9 a 3.11 s dodatečnou podmínkou $u = 1/d$. Dále jako v Hullově textu (Hull, 2009), opět využijeme Maclaurinův rozvoj podle proměnné $(T - t)/k$.

$$\begin{aligned}\widehat{u} &= \frac{e^{-r\frac{T-t}{k}}}{2} \left(\sqrt{\left(e^{2r\frac{T-t}{k}} + \frac{T-t}{k}\sigma^2 + 1 \right)^2 - 4e^{2r\frac{T-t}{k}} + e^{2r\frac{T-t}{k}} + \frac{T-t}{k}\sigma^2 + 1} \right) \\ &= 1 + \sigma\sqrt{t} + \sigma^2\frac{T-t}{2k} + O\left(\frac{T-t}{k}\right)^{3/2}, \\ \widehat{d} &= \frac{e^{-r\frac{T-t}{k}}}{2} \left(-\sqrt{\left(e^{2r\frac{T-t}{k}} + \frac{T-t}{k}\sigma^2 + 1 \right)^2 - 4e^{2r\frac{T-t}{k}} + e^{2r\frac{T-t}{k}} + \frac{T-t}{k}\sigma^2 + 1} \right) \\ &= 1 - \sigma\sqrt{t} + \sigma^2\frac{T-t}{2k} + O\left(\frac{T-t}{k}\right)^{3/2}, \\ \widehat{p} &= \frac{\sqrt{\left(e^{2r\frac{T-t}{k}} + \frac{T-t}{k}\sigma^2 + 1 \right)^2 - 4e^{2r\frac{T-t}{k}} + e^{2r\frac{T-t}{k}} - \frac{T-t}{k}\sigma^2 - 1}}{2\sqrt{\left(e^{2r\frac{T-t}{k}} + \frac{T-t}{k}\sigma^2 + 1 \right)^2 - 4e^{2r\frac{T-t}{k}}}}.\end{aligned}$$

Všimněme si, že u a d má po úpravě stejný rozvoj jako následující řady:

$$u_{CRR}^{approx.} = e^{\sqrt{\frac{T-t}{k}}\sigma}, \quad d_{CRR}^{approx.} = e^{-\sqrt{\frac{T-t}{k}}\sigma}. \quad (3.13)$$

Parametr p již jednoduše dopočítáme dosazením do rovnice 3.10:

$$p_{CRR}^{approx.} = \frac{e^{r\frac{T-t}{k}} - e^{-\sqrt{\frac{T-t}{k}}\sigma}}{e^{\sqrt{\frac{T-t}{k}}\sigma} - e^{-\sqrt{\frac{T-t}{k}}\sigma}}. \quad (3.14)$$

Binomickému modelu s použitím těchto odhadů parametrů u , d a p budeme říkat aproximativní Cox-Ross-Rubinstein model.

Jarrow-Rudd model

Existují ovšem i jiné vhodné volby dodatečné podmínky. V modelu Jarrow-Rudd, který je rovněž pojmenován po svých autorech, je jí $p = 1/2$. Opět vyřešíme soustavu rovnic 3.9 a 3.10, tentokrát s dodatečnou podmínkou $p = 1/2$. Pomocí softwaru Mathematica najdeme přesné řešení.

$$u_{JR} = e^{r\frac{T-t}{k}} + \left(1 + \sqrt{e^{\frac{T-t}{k}\sigma^2} - 1} \right), \quad d_{JR} = e^{r\frac{T-t}{k}} + \left(1 - \sqrt{e^{\frac{T-t}{k}\sigma^2} - 1} \right). \quad (3.15)$$

Opět za užití Maclaurinova rozvoje upravíme exponenciály:

$$\begin{aligned}\widehat{u} &= \left(\frac{T-t}{k}r + \sqrt{\frac{T-t}{k}\sigma^2} + 1 \right) + o\left(\frac{T-t}{k}\right)^{3/2}, \\ \widehat{d} &= \left(\frac{T-t}{k}r - \sqrt{\frac{T-t}{k}\sigma^2} + 1 \right) + o\left(\frac{T-t}{k}\right)^{3/2}.\end{aligned}$$

Všimněme si, že tyto řady mají stejné rozvoje jako:

$$u_{JR}^{approx.} = e^{r\frac{T-t}{k}} + \sqrt{\frac{T-t}{k}}\sigma, \quad d_{JR}^{approx.} = e^{r\frac{T-t}{k}} - \sqrt{\frac{T-t}{k}}\sigma. \quad (3.16)$$

Binomický model s parametry $u_{JR}^{approx.}$, $d_{JR}^{approx.}$ a $p = 1/2$ budeme nazývat aproximativní Jarrow-Rudd model.

3.2 Black-Scholesův model

Odvození Black-Scholesova modelu pro oceňování evropských opcí provedeme pomocí Dupačová a kol. (2002). Nejprve uveďme předpoklady.

1. rizikově neutrální prostředí,
2. rozdělení S_T při známém S_t má logaritmicke-normální rozdělení s následujícími parametry:

$$\mathcal{L}^*(S_T | S_t) = LN \left(\underbrace{\ln S_t + (r - 1/2v^2)(T-t)}_{\mu}, \underbrace{v^2(T-t)}_{\sigma^2} \right),$$

3. absence arbitrážních příležitostí,
4. racionální chování investorů.

Pro vyjádření odhadu ceny opce v čase $T - t$ vyjdeme ze střední hodnoty výplat opce v čase T a diskontujeme o t časových obdobích. Chtěli bychom tedy znát $E[(S_T - K)^+]$. Pro jednoduchost nyní zaznačme $S_T = X$. Hustota náhodné veličiny X je:

$$f_X(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right).$$

Ve výpočtu budeme transformovat náhodnou veličinu X na normované normální rozdělení tímto způsobem: $\frac{\ln X - \mu}{\sigma} := Y \sim N(0, 1)$. Hustotu náhodné veličiny Y budeme značit $f_Y(y)$. Nyní můžeme přejít k výpočtu $E[(X - K)^+]$:

$$\begin{aligned} E[(X - K)^+] &= \int_{\mathbb{R}} (x - K)^+ f_X(x, \mu, \sigma^2) dx = \int_K^{\infty} (x - K) f_X(x, \mu, \sigma^2) dx = \\ &= \int_K^{\infty} (x - K) \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma} \right)^2} dx. \end{aligned}$$

Využijme substituce $\frac{\ln x - \mu}{\sigma} = y$ a po úpravě dostaneme:

$$\begin{aligned} E[(X - K)^+] &= e^{\mu + \sigma^2/2} \int_{\frac{\ln K - \mu}{\sigma} - \sigma}^{\infty} f_Y(y) dy + K \int_{\frac{\ln K - \mu}{\sigma}}^{\infty} f_Y(y) dy = \\ &= e^{\mu + \sigma^2/2} \left(1 - \Phi \left(\frac{\ln K - \mu}{\sigma} - \sigma \right) \right) + K \left(1 - \Phi \left(\frac{\ln K - \mu}{\sigma} \right) \right), \end{aligned}$$

kde Φ značí distribuční funkci normovaného normálního rozdělení. S využitím vlastnosti symetrie hustoty kolem nuly, tedy $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ dostáváme:

$$\mathbb{E}[(X - K)^+] = e^{\mu + \sigma^2/2} \Phi\left(\frac{\mu + \sigma^2 - \ln K}{\sigma}\right) - K \Phi\left(\frac{\mu - \ln K}{\sigma}\right).$$

Po dosazení za μ a σ^2 , které jsme označili v předpokladu 2, dostáváme slavnou Black-Scholesovu rovnici, která se obvykle uvádí v tomto tvaru:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^*[(S_T - K)^+ | S_t] &= S_t e^{r(T-t)} \Phi(d_1) - K \Phi(d_2), \\ d_1 &= \frac{\ln(S_t/K) + (r + 1/2\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ d_2 &= \frac{\ln(S_t/K) + (r - 1/2\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Po diskontování bezrizikovou úrokovou mírou o období $T-t$ dostáváme cenu call opce v čase t :

$$c_t = S_t \Phi(d_1) - e^{-r(T-t)} K \Phi(d_2). \tag{3.18}$$

Poznámka. Pro ocenění put opce bychom mohli provést odvození analogicky, mnohem jednodušší je však využít put-call paritu (viz tvrzení 3). Potom cenu put opce v čase t můžeme vyjádřit jako:

$$p_t = S_t \Phi(d_1) - e^{-r(T-t)} K \Phi(d_2) + K e^{r(T-t)} - S_t. \tag{3.19}$$

Je zřejmé, že Black-Scholesův model je výpočetně výrazně jednodušší než binomický model, snad i z tohoto důvodu je používán v praxi. Všechny hodnoty v Black-Scholesově modelu považujeme za známé, kromě volatility σ , která je obtížně pozorovatelná. V následující podkapitole si ukážeme metody, jakými způsoby lze volatilitu aproximovat.

3.2.1 Volatilita

V práci Koláře a Křivánkové (Kolář a Křivánková) se uvádí, že běžná volatilita se pohybuje v rozmezí 0,15 až 0,6. Nejjednodušším přístupem k volatilitě je odhad z historických dat přes nějaké časové období.

Historická volatilita

Nestranným a zároveň konzistentním odhadem historické volatility je výběrová směrodatná odchylka z konkrétních realizací náhodné veličiny y_i v časech $i = t-k+1, \dots, t-1, t$, kde k udává vhodnou délku sledovaného období. Dle Cipra (2008) takto:

$$\hat{\sigma}_t = \sqrt{\frac{\sum_{i=t-k+1}^t \left(y_i - \frac{1}{k} \sum_{j=t-k+1}^t y_j \right)^2}{k-1}}$$

Historická volatilita může sloužit v krátkém časovém rámci i jako odhad budoucí volatility. Pro přepočtení relativní změny na čas T použijeme $\sigma\sqrt{T}$.

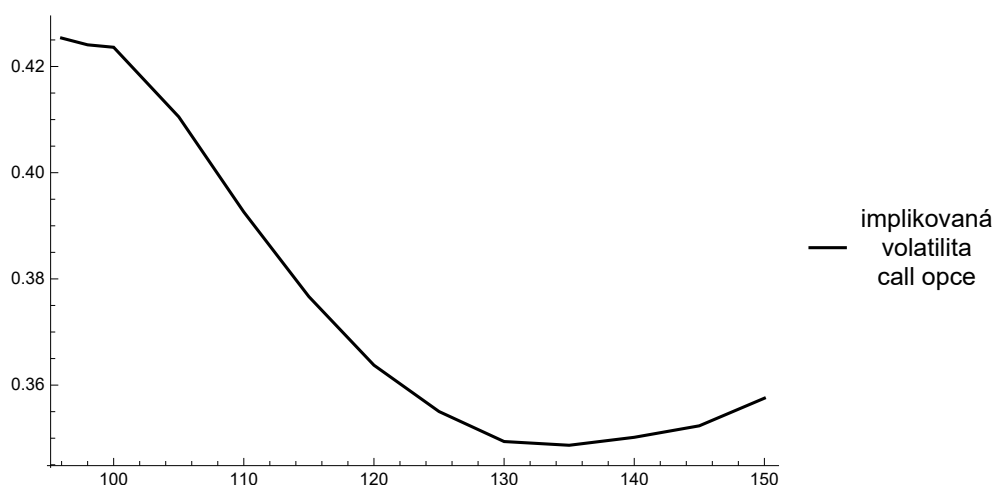
Implikovaná volatilita

V souvislosti s oceňováním finančních derivátů je však lepších výsledků dosaženo prostřednictvím implikované volatility. Black-Scholesův model je funkcí pěti parametrů, a to spotové ceny bazického instrumentu, realizační ceny, doby do splatnosti a bezrizikové úrokové míry. Všechny tyto parametry považujeme za známé. Zbývá volatilita, která je jediným parametrem, který je obtížné pozorovat a je nutné jej odhadnout.

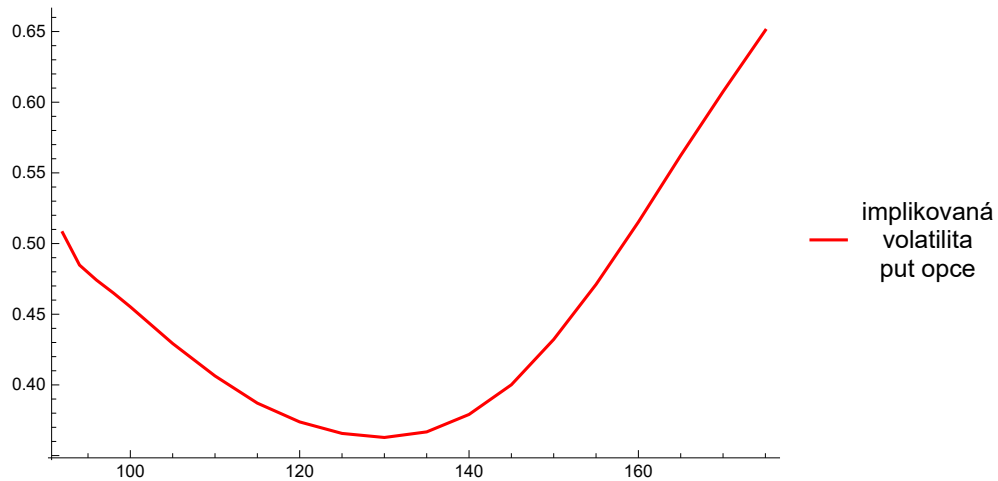
Black-Scholesův model předpokládá konstantní volatilitu, tedy by mělo platit, že pro opce se stejnými parametry, které se liší pouze v realizační ceně, by měla být volatilita shodná. Black-Scholesův model však podhodnocuje opce, které jsou hluboko mimo peníze. Důvody jsou jak matematické, tak i psychologické. Aproximace vývoje ceny podkladového aktiva logaritmicko-normálním rozdělením z předpokladů Black-Scholesova modelu je více leptokurtická (má těžší „chvosty“) než skutečné rozdělení S_t , a tím dochází k podhodnocování opcí s realizační cenou více vzdálenou od spotové ceny. Dalším důvodem může být vzrůstající nejistota na trhu, kdy investoři očekávají nárůst volatility a nadhodnocují opce, které jsou mimo peníze.

Zavádíme tedy implikovanou volatilitu (dopočítanou pomocí Black-Scholesova modelu), která závisí především na realizační ceně a čase do splatnosti. V praxi jsou běžné dvě poruchy volatility, které podle tvaru grafu závislosti implikované volatility na realizační ceně, nazýváme volatility smile (úsměv) a volatility skew (škleb). Tedy pro opce, které mají realizační cenu vzdálenější od spotové ceny bazického instrumentu, odhadneme volatilitu zpravidla větší.

Nyní určíme implikovanou volatilitu z dat o cenách opcí, které jsme získali na www.saxotrader.com/sim/. Data o put a call opcích na akcie společnosti Volkswagen AG obsahují údaj o realizační ceně akcie, ceně samotné opce a čase do splatnosti, který mají všechny shodný, a to 26 dní. Bezrizikovou úrokovou míru jsme získali z údajů ČNB. Data a výpočet jsou uvedeny v kódu na příloženém médiu.



Obrázek 3.5: Volatilita implikovaná cenou call opcí na akcie Volkswagen AG.



Obrázek 3.6: Volatilita implikovaná cenou put opcí na akcie Volkswagen AG.

Dle Hulla (Hull, 2009), by mělo platit, že implikovaná volatilita put a call opce je shodná. Z tvrzení 3 o put-call paritě známe vztah mezi cenou put a call opce se stejnými parametry. Označme c_t^{BS} , resp. p_t^{BS} ceny call, resp. put opce vypočtené pomocí Black-Scholesova modelu. Dále analogicky c_t^{trh} a p_t^{trh} tržní ceny opcí. Put-call parita platí nezávisle na předpokladech Black-Scholesova modelu, stačí neexistence arbitráže, tedy musí platit jak pro ceny opcí vypočtené Black-Scholesovým modelem, tak pro tržní ceny.

$$\begin{aligned} S_t + p_t^{BS} &= Ke^{r(T-t)} + c_t^{BS} & \text{pro } t \leq T, \\ S_t + p_t^{trh} &= Ke^{r(T-t)} + c_t^{trh} & \text{pro } t \leq T. \end{aligned}$$

Odečtením obou rovnic získáváme:

$$p_t^{BS} - p_t^{trh} = c_t^{BS} - c_t^{trh} \quad \text{pro } t \leq T.$$

Zvolme volatilitu pro Black-Scholesův model takovou, že platí $p_t^{BS} = p_t^{trh}$. Potom i pravá strana musí být nulová, což nastane právě pro zvolenou volatilitu. Implikovaná volatilita call a put opce musí být tedy shodná.

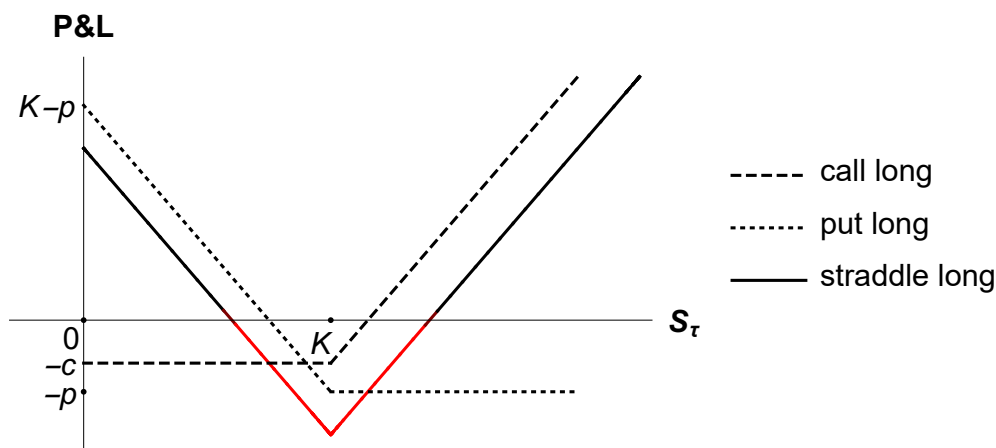
Z výše uvedeného tvrzení plyne, že grafy implikované volatility na obrázcích 3.5 a 3.6 by měly být shodné. Data implikované volatility vykazují stejný trend pro put i call opce na intervalu $K \in (105, 125)$, přičemž pro vyšší hodnoty parametru K vyazuje implikovaná volatilita put opce rychlejší nárůst. Nepřesnost může být způsobena transakčními náklady, neracionálním chováním investorů, apod. Oba grafy pak ukazují poruchu volatility smile.

4. Praktická část

4.1 Opční strategie

V této kapitole popíšeme investiční strategie opčních derivátů. Kombinacemi různých opčních pozic je dosahováno optimalizace portfolia vzhledem k investorově averzi vůči riziku. Značení bylo zavedeno již v kapitole 2.2. Kombinace opcí budou vždy na stejný bazický instrument a rovněž doba do splatnosti bude shodná.

Kombinaci dlouhé pozice v call opci a dlouhé pozice v put opci nazýváme straddle long. Jedná se o spekulaci na vysokou volatilitu podkladového aktiva. Z obrázku 4.1 je zřejmé, že pokud by realizační cena v čase splatnosti byla shodná se spotovou, investor realizuje omezenou ztrátu ve výši $-(p + c)$. Čím větší je rozdíl mezi realizační a spotovou cenou bazického instrumentu, tím lepšího výnosu portfolio dosahuje.

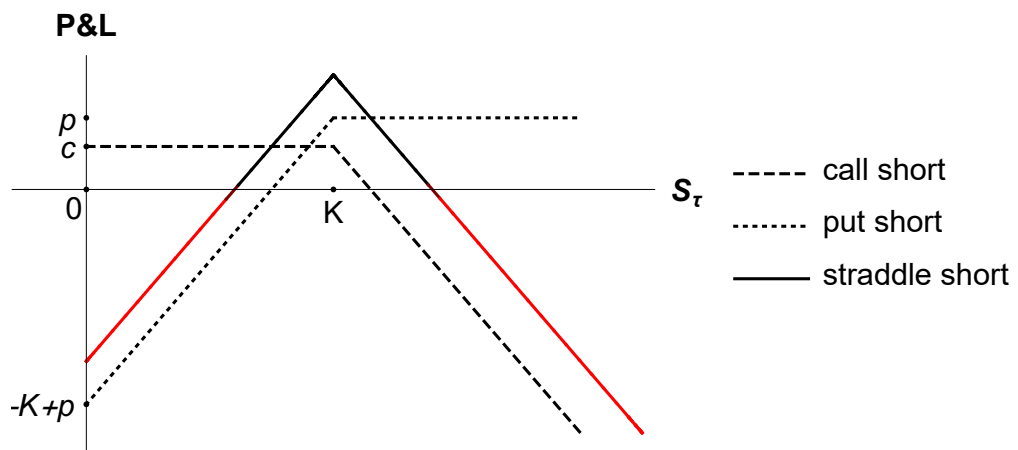


Obrázek 4.1: Straddle long.

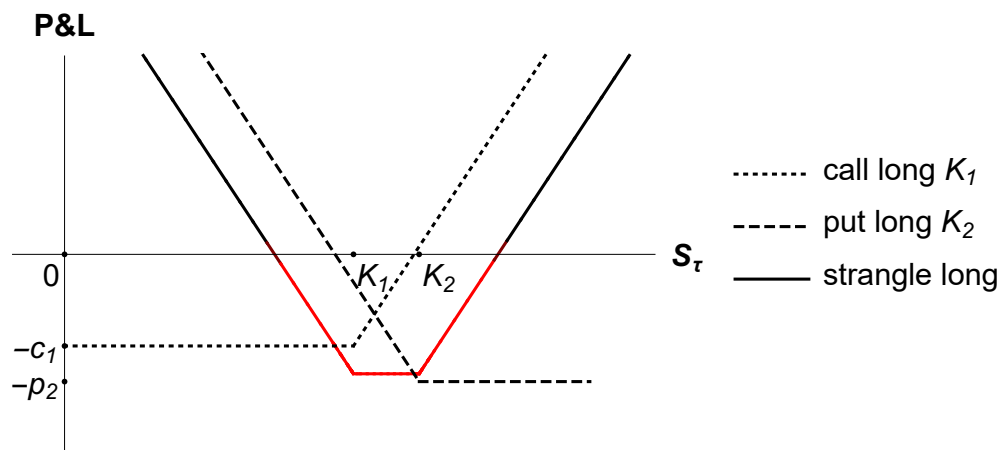
Situace v straddle short je opačná, viz obrázek 4.2. Jedná se o kombinaci krátké pozice v call opci a krátké pozice v put opci. V případě, že realizační cena v čase splatnosti bude rovna spotové, realizuje majitel zisk ve výši $(c + p)$. Spekuluje tedy na nízkou volatilitu.

Investiční strategie straddle jsou velmi podobné strategiím strangle - obrázek 4.3 a 4.4. Liší se v rozdílné realizační ceně obou opcí, kdy prováděcí cena call opce je nižší, stále však souhlasí bazický instrument a okamžik vypršení. Výsledkem je rozšíření prostoru, ve kterém realizují ztrátu u long, resp. zisk u short, ale zároveň snížení maximální hodnoty této ztráty, resp. zisku.

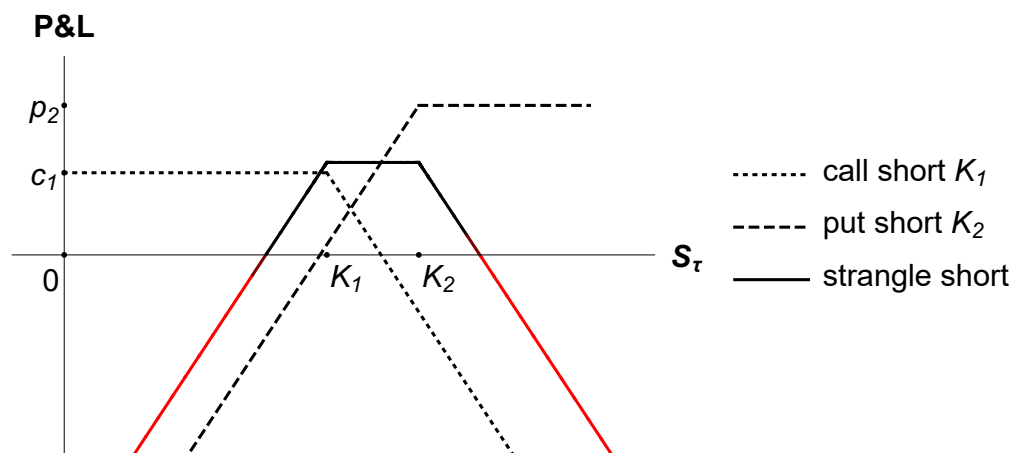
Strangle short je analogicky kombinace krátké pozice v call opci a krátké pozice v put opci. Prováděcí cena call opce je nižší.



Obrázek 4.2: Straddle short.

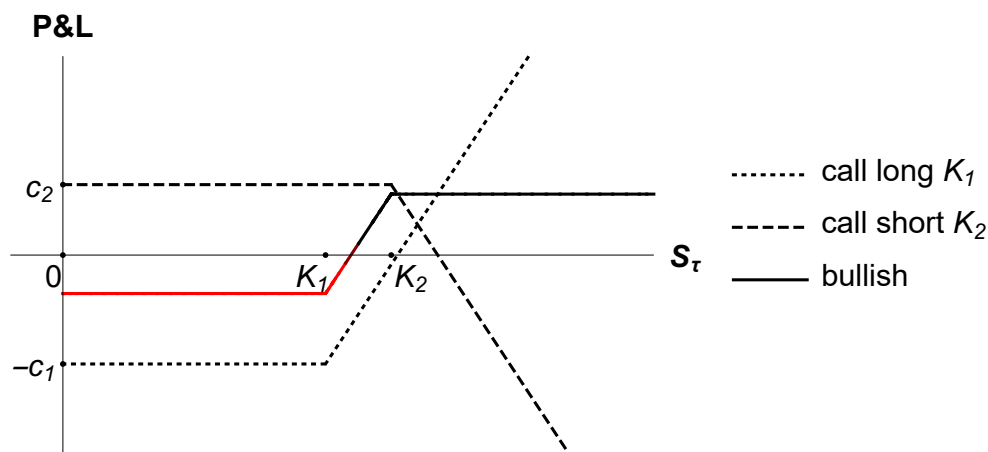


Obrázek 4.3: Strangle long.



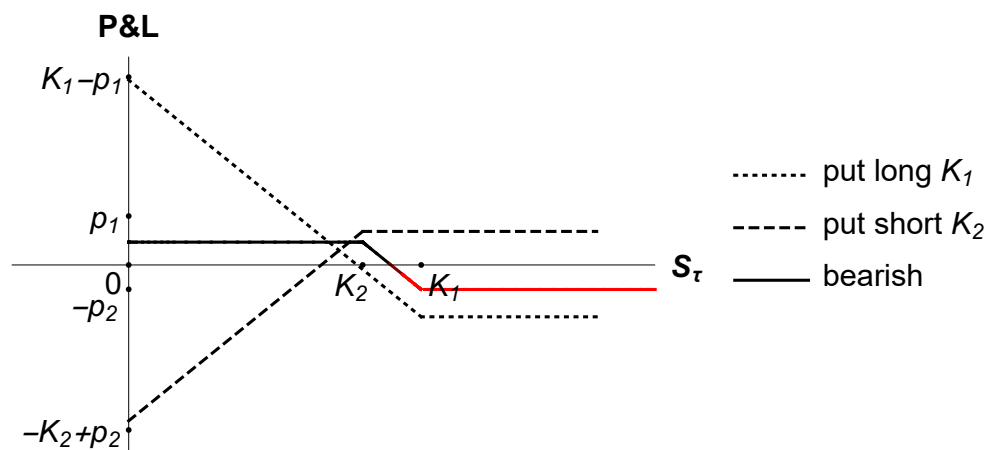
Obrázek 4.4: Strangle short.

Opční strategie bullish (viz obrázek 4.5) je typická spekulace na růst ceny podkladového aktiva. Jedná se o kombinaci dlouhé a krátké pozice v call opcích, kde realizační cena call opce v dlouhé pozici je nižší. Investorům, kteří mají optimistická očekávání ohledně růstu trhů se říká „býci“, z čehož název „bullish“.



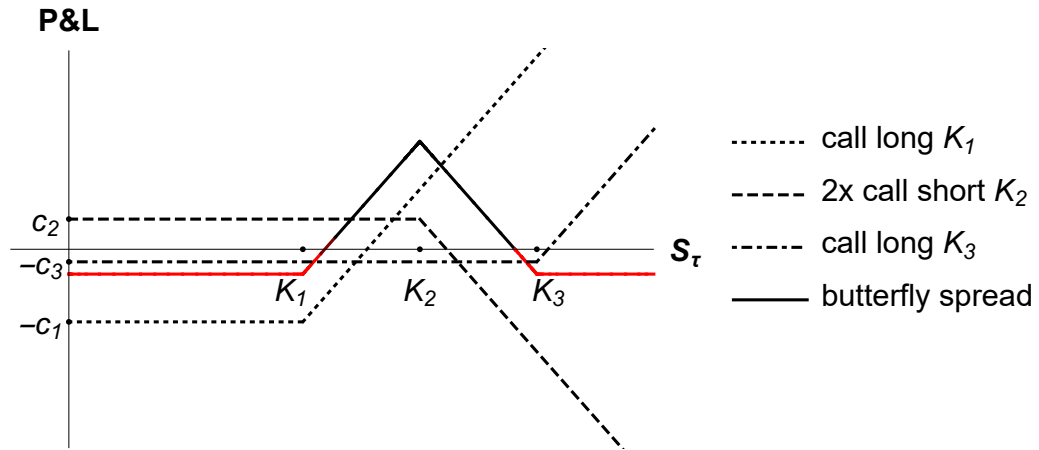
Obrázek 4.5: Bullish.

Opční strategie bearish (obrázek 4.6) je typická spekulace na pokles ceny podkladového aktiva. Jedná se o kombinaci dlouhé a krátké pozice v put opcích, kde realizační cena put opce v krátké pozici je nižší. Investorům, kteří mají pesimistická očekávání ohledně růstu trhů se říká „medvědi“, z čehož název „bearish“.



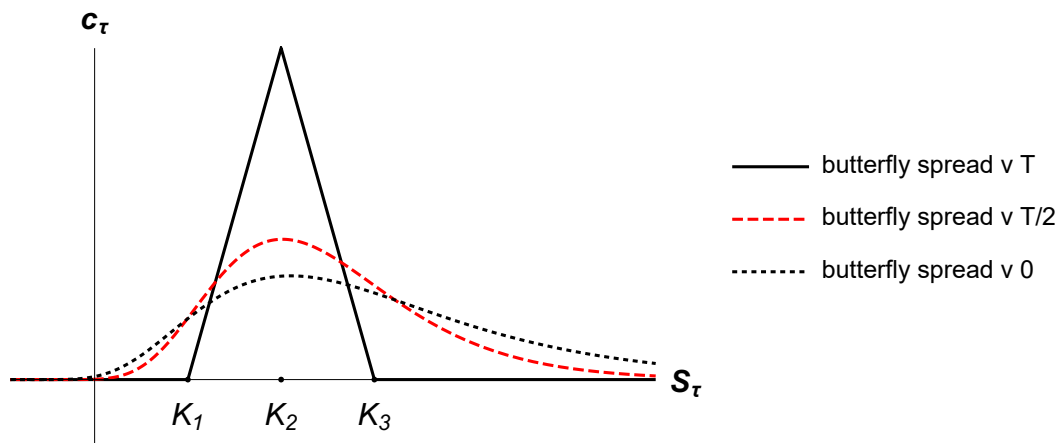
Obrázek 4.6: Bearish.

Velmi zajímavou opční strategií je butterfly spread. Jedná se o kombinaci call long opce s realizační cenou K_1 , call long s realizační cenou K_3 a dvou kusů call short s realizační cenou K_2 , pro které platí $K_1 < K_2 < K_3$. Z obrázku 4.7 je zřejmé, že investor realizuje omezený zisk v okolí K_2 . Pro spotovou cenu v čase splatnosti menší než K_1 realizuje omezenou ztrátu ve výši $2c_2 - c_1 - c_3$. Pro spotovou cenu vyšší než K_3 realizuje omezenou ztrátu ve výši $-K_1 + 2K_2 - K_3$.



Obrázek 4.7: Butterfly spread.

Zajímavé je rovněž srovnání hodnoty tohoto portfolia s hodnotou před časem splatnosti. Pomocí zabudované funkce `FinancialDerivative` softwaru `Mathematica` jsme vykreslili hodnotu takto sestaveného portfolia v čase 0 , $T/2$ a T , pro přehlednost již bez počátečních opčních prémie. Před časem vypršení opcí je v intervalech, kde je opční portfolio „mimo peníze“, patrná časová hodnota opce. Ta je dle (Cipra, 2008) interpretovatelná jako hodnota, kterou jsou investoři ochotni zaplatit za eventualitu, že se cena podkladového aktiva vyvine v jejich prospěch. Časová hodnota opce se se zkracujícím časem do vypršení snižuje.



Obrázek 4.8: Butterfly spread v časech 0 , $T/2$ a T .

4.2 Příklady oceňování opcí

Příklad - oceňování evropské call opce v binomickém modelu

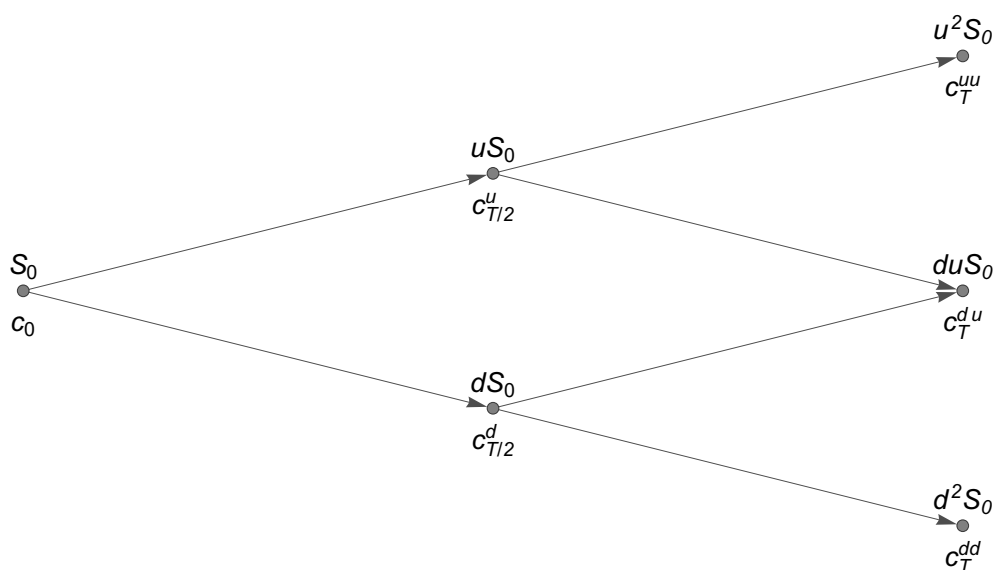
Mějme evropskou call opci se vstupními parametry:

$$S_0 = 50, K = 48, \sigma = 0.4, r = 0,02, T = 1.$$

Vybereme si přesnou dvoukrokovou ($k = 2$) Cox-Ross-Rubinstein metodu. Pomocí vzorců 3.12 vypočteme parametry u , d a p .

$$u = 1,33537, d = 0,748859, p = 0,445334.$$

Sestrojíme graf s obecnými hodnotami podkladového aktiva a s cenami opcí, které přísluší jednotlivým průběhům vývoje ceny bazického instrumentu.



Obrázek 4.9: Evropská call opce v dvoukrokovém binomickém modelu - značení

Pro výpočet ceny podkladového aktiva vezmeme hodnoty ze zadání a parametry u , d a p z přesného Cox-Ross-Rubinstein modelu. V koncových uzlech binomického stromu má call opce hodnotu $(S_T - K)^+$. Tedy:

$$\begin{aligned} c_T^{uu} &= 89,16 - 48 = 41,16, \\ c_T^{du} &= 50 - 48 = 2, \\ c_T^{dd} &= 28,03 - 48 < 0 \rightarrow \text{opce by nebyla uplatněna} = 0, \end{aligned}$$

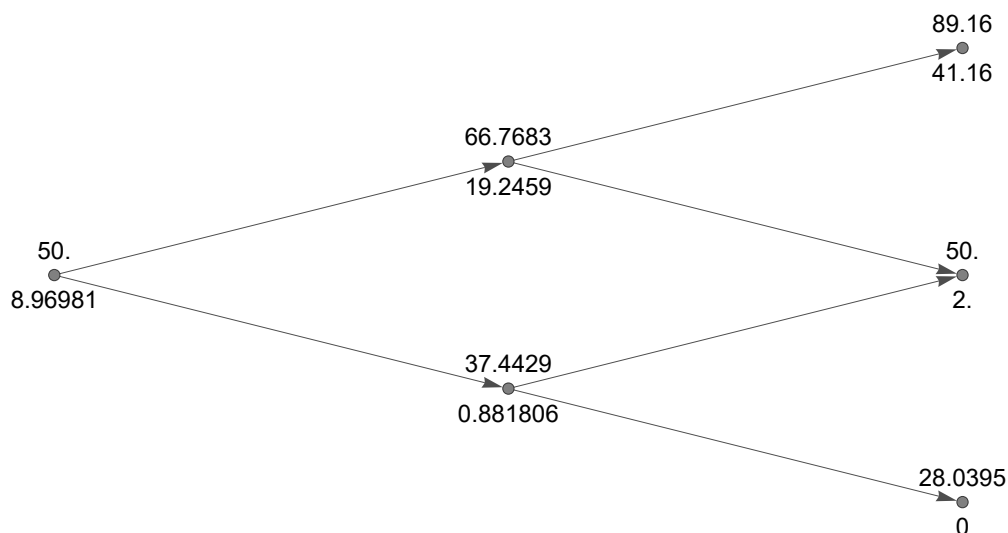
Další patro cen opcí vypočteme rekurzivně diskontováním střední hodnoty možného dalšího vývoje o $e^{-r/2}$.

$$\begin{aligned} c_{T/2}^u &= ((p * 41,16) + (1 - p) * 2) * e^{-r/2} &= 19,2459, \\ c_{T/2}^d &= (p * 2 + (1 - p) * 0) * e^{-r/2} &= 0,8818. \end{aligned}$$

První hodnotu v čase t vypočítáme analogicky:

$$c_0 = ((p * 19,24) + (1 - p) * 0,8818) * e^{-r/2} = 8,97.$$

Cena evropské call opce v čase 0 je tedy 8,96.



Obrázek 4.10: Evropská call opce v dvoukrokovém binomickém modelu - hodnoty

Poznámka. Pro evropskou a americkou call opci by vypadal výpočet stejně. Z tvrzení 2 víme, že hodnota evropské a americké call opce jsou totožné. Pro evropskou put opci bychom mohli provést výpočet analogicky, nebo pouze za pomoci tvrzení 3 o put-call paritě dopočítat cenu put opce z vzájemně jednoznačného vztahu. Pro americkou put opci by se postup mírně lišil. Jak si ukážeme na dalším příkladu.

Příklad - oceňování americké put opce v binomickém modelu

Mějme americkou put opci se vstupními parametry:

$$S_0 = 50, K = 60, \sigma = 0.2, r = 0,02, T = 1.$$

Vybereme si přesnou tříkrokovou ($k = 3$) Cox-Ross-Rubinstein metodu. Pomocí vzorců 3.12 vypočteme parametry u , d a p .

$$u = 1,12341, d = 0,890147, p = 0,499616.$$

Pro výpočet ceny podkladového aktiva vezmeme hodnoty ze zadání a parametry u , d a p z přesného Cox-Ross-Rubinstein modelu. V koncových uzlech binomického stromu má put opce hodnotu $(K - S_T)^+$. Tedy:

$$\begin{aligned} c_T^{uuu} &= 60 - 70,89 < 0 \rightarrow \text{opce by nebyla uplatněna} = 0, \\ c_T^{duu} &= 60 - 56,17 = 3,83, \\ c_T^{ddu} &= 60 - 44,51 = 15,49, \\ c_T^{ddd} &= 60 - 35,27 = 24,73, \end{aligned}$$

Další patro cen opcí vypočteme rekurzivně diskontováním střední hodnoty možného dalšího vývoje o $e^{-r/3}$. Průběžně kontrolujeme, zdali by nebyla vyšší vnitřní cena opce a nebylo by výhodné opci uplatnit předčasně.

$$c_{2/3T}^{uu} = (p * 0 + (1 - p) * 3,82) * e^{-r/3} = 1,9$$

$$c_{2/3T}^{du} = (p * 3,82 + (1 - p) * 15,49) * e^{-r/3} = 9,6 \rightarrow \text{uplatníme předčasně} = 10,$$

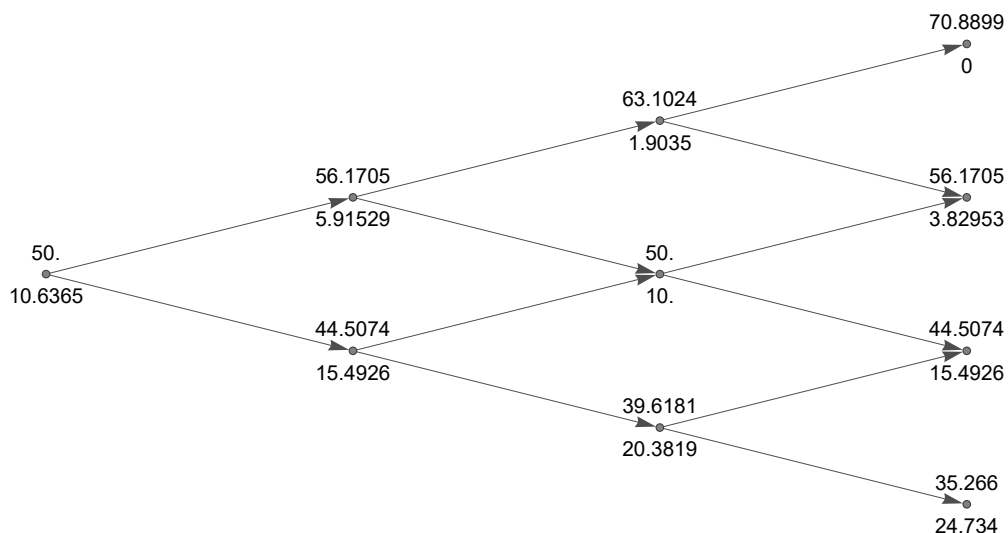
$$c_{2/3T}^{dd} = 60 - 44,51 = 15,49.$$

Další patra dopočítáme analogicky:

$$c_{1/3T}^u = 5,92,$$

$$c_{1/3T}^d = 15,49,$$

$$c_0 = 10,63.$$



Obrázek 4.11: Americká put opce v tříkrokovém binomickém modelu - hodnoty

Cena americké put opce v čase 0 je tedy zaokrouhleně 10,64.

Závěr

V teoretické části jsme uvedli stručný přehled historie a vzniku finančních derivátů a klasifikovali je dle různých hledisek. Zaměřili jsme se na problematiku opcí, kdy po vymezení prostoru, kde se může opční prémie nacházet, jsme představili matematické modely pro oceňování opcí. Seznámili jsme se s binomickým modelem, z něhož jsme vhodnou volbou parametrů odvodili Cox-Ross-Rubinstein a Jarrow- Rudd model a rovněž jejich aproximativní verze pomocí Maclaurinových rozvoje řad.

Neopominuli jsme ani Black-Scholesův model, který je snad i díky své výpočetní jednoduchosti používán v praxi. V souvislosti s Black-Scholesovým modelem jsme zkoumali metody stanovení odhadu parametrů, tedy implikované volatility.

V praktické části jsme pomocí softwaru Wolfram Mathematica stanovili implikovanou volatilitu z tržních dat, které jsme získali na www.saxotrader.com/sim/ a ověřili tzv. volatility smile. Představili jsme několik investičních strategií opcí a uvedli několik příkladů týkajících se oceňování opcí v binomickém modelu. Na příloženém médiu je dostupný kód s výpočty parametrů jednotlivých metod, dále jsme implementovali automaticky generované grafy binomických stromů včetně hodnot pro oceňování jak evropských, tak amerických opcí, Black-Scholesův model pro oceňování evropských opcí a v neposlední řadě jsme přidali pomocí funkce Manipulate grafy s volitelnými parametry pro vytvoření představy o vlivu jednotlivých parametrů.

Seznam použité literatury

- ARISTOTELÉS (s. d.). *Politika*. Druhé vydání. Rezek, Praha. ISBN 80-86027-10-4.
- CHAMMURAPI. Zákoník. URL <http://oll.libertyfund.org/titles/hammurabi-the-code-of-hammurabi>. [Online, cit. 18.6.2016].
- CIPRA, T. (2000). *Matematika cenných papírů*. První vydání. HZ Praha, Praha. ISBN 80-86009-35-1.
- CIPRA, T. (2008). *Finanční ekonometrie*. První vydání. Ekopress, Praha. ISBN 978-80-86929-43-9.
- DUPAČOVÁ, J., HURT, J. a ŠTĚPÁN, J. (2002). *Stochastic Modeling in Economics and Finance*, volume 75. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. ISBN 1-4020-0840-6.
- GARRETT, S. J. (2013). *An Introduction to the Mathematics of Science*. Second Edition. Butterworth-Heinemann, Oxford. ISBN 978-0-08-098240-3.
- HULL, J. C. (2009). *Options, Futures, and Other Derivatives*. Seventh Edition. Prentice-Hall, Englewood Cliffs. ISBN 0-13-500994-4.
- JÍLEK, J. (2010). *Finanční o komoditní deriváty v praxi*. Druhé vydání. GRADA Publishing, Praha. ISBN 978-80-247-3696-9.
- KOLÁŘ, M. a KŘIVÁNKOVÁ, L. Oceňování finančních derivátů. URL <https://www.math.muni.cz/~vondra/uvn/vystupy/KA2/MF003/MF003.pdf>. [Online, cit. 2.7.2016].
- UHMAN, J. (2013). Stručná exkurze do definice finančních derivátů. URL http://www.derivat.sk/files/2013%20casopis/2013_sept_Uhman.pdf. [Online, cit. 25.6. 2016].

Seznam obrázků

1.1	Zisk nebo ztráta majitele kupní opce.	3
2.1	Zisk kupujícího a upisovatele call opce v závislosti na S_T	10
2.2	Zisk kupujícího a upisovatele put opce v závislosti na S_T	10
3.1	Značení uzlů v jednokrokovém binomickém modelu.	16
3.2	Vývoj ceny podkladového aktiva.	17
3.3	Značení uzlů v dvoukrokovém binomickém modelu.	18
3.4	Značení vývoje ceny opce v závislosti na změně ceny podkladového aktiva v dvoukrokovém binomickém modelu.	19
3.5	Volatilita implikovaná cenou call opcí na akcie Volkswagen AG.	25
3.6	Volatilita implikovaná cenou put opcí na akcie Volkswagen AG.	26
4.1	Straddle long.	27
4.2	Straddle short.	28
4.3	Strangle long.	28
4.4	Strangle short.	28
4.5	Bullish.	29
4.6	Bearish.	29
4.7	Butterfly spread.	30
4.8	Butterfly spread v časech 0 , $T/2$ a T	30
4.9	Evropská call opce v dvoukrokovém binomickém modelu - značení	31
4.10	Evropská call opce v dvoukrokovém binomickém modelu - hodnoty	32
4.11	Americká put opce v tříkrokovém binomickém modelu - hodnoty .	33

Seznam tabulek

1.1	Finanční pákový efekt.	5
2.1	Maximální zisk a ztráta z opce dle typu a pozice	11