Univerzita Karlova v Praze
Filozofická fakulta
Katedra logiky

Fuzzifikace jednoduchých systémů deontické logiky

Nelly Vostrá

Diplomová práce na oboru Logika

Vedoucí práce: Mgr. Libor Běhounek 2006

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracovala samostatně a použila výhradně citovaných pramenů.

Abstrakt

Deontické logiky bývají formalizovány jako druh modálních logik. V této práci aplikuji fuzzy modální logiku na dvojí systémy monadických deontických logik – systémy deontické logiky v užším smyslu a systémy alethické logiky s výrokovou konstantou Q. Pro tyto nové fuzzy deontické logiky dokazuji lokální větu o dedukci, korektnost vůči příslušným fuzzy rámcům a definovatelnost deontických systémů v alethických.

Obsah

Úvod

Vztahy vyplývání mezi imperativy zajímají člověka od starověku. Za první deontický paradox se uvádí spor Protágora s jeho žákem Euatlem, který mu měl zaplatit, až vyhraje svou první soudní při – Euatlus se ovšem právní praxi nevěnoval a jeho první pří byl tedy právě tento spor.

První pokusy o formalizaci deontických výpovědí učinil Ernst Mally ve 20. letech minulého století, opíral se přitom o výrokový kalkulus. V 50. letech pak přišel G. H. von Wright s deontickými logikami vystavěnými na základě alethické modální logiky. Objevené paradoxní důsledky ho později přiměly rozvinout také dyadické systémy (s podmíněnými příkazy). A. R. Anderson rozpracoval deontické logiky jakožto teorii sankcí – přikázané je to, čehož nesplnění vede k trestu. (Vše citace dle [Åqvist 1984]). W. D. Ross se soustředil na jakousi osobnostní etiku – nezajímají ho normy z pohledu celé společnosti, ale z pohledu jednotlivce, který se rozhoduje na základě tzv. *prima facie duties*, které se snaží plnit (citace dle [Monagin 2006]).

Modální přístup k deontickým i jiným logikám není neproblematický. [Duc 1995] ukazuje nevhodnost modálního pojetí deontické logiky a rozvíjí namísto toho cestu dynamické logiky, [Duc 2001] ukazuje totéž pro epistemickou logiku. U deontické logiky to má významné opodstatnění: etické nebo právní normy jsou typu *ought-to-do* (udělej to a to), což dynamická logika reflektuje, zatímco modální logika a kripkovská sémantika zkoumá spíše příkazy typu *ought-to-be* (zařiď, aby to a to nastalo).

I u vícehodnotových logik lze najít první zájem v antice, ale průkopnická je až práce Jana Łukasiewicze ve 20. letech minulého století, který učinil pokusy rozšířit dvouhodnotovou logiku na třetí hodnotu někde mezi pravdou a nepravdou. Zavedl také pětici axiomů, z nichž čtyři budeme užívat i my; dokazatelnost 5. axiomu (prelinearity) z ostatních axiomů ukázal C. C. Chang v roce 1958. V 50. letech se také začínají uvažovat nekonečné množiny pravdivostních hodnot – R. McNaughton pro ně zobecňuje Łukasiewiczovu logiku, M. Dummett Gödelovu. V 60. letech se poprvé objevuje pojem fuzzy, když L. A. Zadeh definuje fuzzy množiny. J. A. Goguen již mluví o fuzzy logice a jako její model zavádí reziduované svazy. Z inženýrsky motivovaného konceptu fuzzy logik se stává logika v pravém smyslu slova od 70. let, zejména zásluhou Jana Pavelky a od 90. let Petra Hájka. (Vše citace dle [Hájek 1998].)

Zájem o fuzzy modální logiky přišel záhy, například [Ying 1988] definuje obecné modální logiky na základě zadehovské syntaxe (z dnešního pohledu dost nekompaktní – používá gödelovskou min-konjunkci a max-konjunkci a łukasiewiczovskou negaci). Nejdůkladněji je ale prozkoumaná logika S5, kterou lze založit na predikátové logice a odhlédnout od podoby relace dosažitelnosti (podrobně v [Hájek 1998, kap. 8]). Fuzzy alternativy pro slabší modální logiky ale rozpracovávají například [Nakamura–Gao 1992] nebo [Mironov 2005]. Postupně se také obrací zájem fuzzy logiky na konkrétní aplikace modální logiky, například [Běhounek 2004] fuzzifikuje erotetickou logiku. Podobně přítomná práce má za cíl – jak již její název napovídá – fuzzifikovat deontické logiky.

Fuzzy deontické logiky nevzbuzují mnoho zájmu. Za pozornost stojí v podstatě jen dvě práce. První je článek [Gounder–Esterline 1998], zabývající se vedle deontických i epistemickými logikami a v ohledu k použité medodě velmi podobný přítomné práci. Takto stručný článek (6 stran) ani nemůže jít do hloubky a jeho výsledky jsou omezené. Používá zadehovskou syntax a modální operátory definuje pomocí maxima a minima, přičemž neuvažuje, že množina možných světů může být nekonečná. Tyto nedostatky lze omluvit tím, že článek vznikl ve stejném roce, jako bylo vydáno [Hájek 1998], a neměl tedy k dispozici důkladně propracovaný aparát.

Zajímavější je velmi čerstvý článek [Monagin 2006] (text zřejmě kopíruje její přednášku proslovenou na Oakland University v únoru tohoto roku). Autorka využívá Rossův koncept *prima facie duties*, v němž agent jedná podle svých osobních preferencí, co do závaznosti příkazů, a pokud nemůže splnit všechny, vybírá si ty, které považuje za závaznější. Tento přístup se narozdíl od klasického přístupu dovede vyrovnat s tím, že některé příkazy nejsou splněny a je třeba splnit alespoň povinnost, která vyplývá z nesplnění té původní (*contrary-to-duty obligation*). Ohodnocení povinností co do závaznosti pak otevírá pole pro fuzzy logiku (použitá logika je opět zadehovská syntax) a bližší zkoumání axiomů pak některé vylučuje – například modální axiom D (v podobě $OA \rightarrow \neg O \neg A$), protože povinnosti mohou být v konfliktu.

Přítomná práce má následující strukturu: V úvodních dvou kapitolách představím objekt a metodu, a to v jejich nejdostupnější podobě: v 1. kapitole budou popsány deontické logiky tak, jak je představuje Lennart Åqvist v *Handbook of Philosophical Logic* [Åqvist 1984], a v 2. kapitole fuzzy logiky v podobě podle [Hájek 1998]. Další dvě kapitoly se budou věnovat samotné fuzzifikaci: 3. kapitola bude věnována jazyku – podobě modálních operátorů – a 4. kapitola se zaměří na konkrétní logické systémy. Nakonec se v 5. kapitole pokusím v představeném fuzzy provedení zrekonstruovat jeden výsledek známý z dvouhodnotové logiky, totiž překlad mezi alethickými a deontickými systémy.

1 Deontické logiky

Jak bylo řečeno, tato práce se bude zabývat deontickými logikami a bude je zkoumat z pohledu modální logiky. Lennart Åqvist v [Åqvist 1984] používá dvojí dělení: Nejprve rozlišuje monadické a dyadické systémy – tedy systémy, kde jsou základní příkazy nepodmíněné, a systémy, kde jsou naopak podmíněny platností určitého výroku. Tyto dva přístupy jsou ovšem vzájemně definovatelné (zjednodušeně řečeno, zleva doprava pomocí implikace, zprava doleva tautologickou podmínkou).

Druhé dělení se týká podoby modálního operátoru a má vliv na to, jaké modální logiky budou použity. Pak dostaneme buď deontické logiky v užším smyslu slova – ty používají operátory $O\varphi$ („je přikázáno φ“), $P\varphi$ („je dovoleno φ“) – nebo alethické logiky s klasickými operátory nutnosti $\Box$ a možnosti $\Diamond$ a výrokovou konstantou Q. Také odpovídající si logiky z těchto dvou tříd jsou navzájem definovatelné.

My se v této práci budeme zabývat pouze monadickými logikami, v jejich rámci ale jak deontickými, tak alethickými.

1.1 Deset deontických systémů

Následujících deset logik s deontickými operátory nazývá Åqvist Smiley-Hansonovy logiky. T. J. Smiley a W. H. Hanson vytvořili nezávisle na sobě některé z nich (ne však všechny) v 60. letech minulého století (citace dle [Åqvist 1984]).

Jazyk tvoří množina Prop výrokových proměnných, logické spojky $\top, \bot, O, P, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ a závorky. Operátory O, P jsou tedy oba primitivními pojmy, operátor F („je zakázáno“) je definován:

$$F\varphi =_{df} \neg P\varphi \text{ nebo } F\varphi =_{df} O\neg\varphi$$

Axiomy logik patří mezi následujících sedm schémat:

(A0) všechny výrokové tautologie
(A1) $P\varphi \leftrightarrow \neg O \neg \varphi$
(A2) $O(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (O\varphi \rightarrow O\psi)$
(A3) $O\varphi \rightarrow P\varphi$
(A4) $O\varphi \rightarrow OO\varphi$
(A5) $PO\varphi \rightarrow O\varphi$
(A6) $O(O\varphi \rightarrow \varphi)$
(A7) $O(PO\varphi \rightarrow \varphi)$

Odvozovací pravidla všech logik jsou modus ponens a O-necesitace.

Ve značení axiomů kopírujeme [Åqvist 1984], ale jde z velké části o obvyklé axiomy modálních logik: A2 je axiom K, A3 je D, A4 je 4 a A5 je ekvivalentní axiomu 5.

Z předchozích axiomů vytvoříme deset logik:

OK	=	A0–A2
OM	=	A0–A2, A6
OS4	=	A0–A2, A4, A6
OB	=	A0–A2, A6, A7
OS5	=	A0–A2, A4, A5 (A6 a A7 jsou odvoditelné)

Pro $\mathcal{L} \in \{$**OK, OM, OS4, OB, OS5**$\}$ definujme

$$\mathcal{L}^+ = \mathcal{L}, \mathrm{A3}$$

Pro sémantiku použijeme obvyklé kripkovské modely $M = \langle W, R, V \rangle$, kde W je neprázdná množina, $R \subseteq W \times W$ a V je ohodnocení, které přiřadí dvojici výrokové proměnné a světu z W pravdivostní hodnotu 0 nebo 1. Složené formule ohodnotíme obvyklým způsobem.

Relace dosažitelnosti R má v deontické logice přirozenou interpretaci: xRy platí jen tehdy, když všechny příkazy „vyslovené“ v x ($x \Vdash O\varphi$) jsou v y splněny ($y \Vdash \varphi$). R může mít následující vlastnosti, které odpovídají axiomům A3–A7 v tom smyslu, že daný axiom charakterizuje třídu rámců, v nichž má R odpovídající vlastnost (podmínky sice vyjádříme formalizovaně, ale pohybujeme se nyní v metajazyce):

R je sériová (také zvaná totální)	$(\forall x \exists y)\ xRy$	A3
R je tranzitivní	$(\forall x, y, z)\ (xRy\ \&\ yRz \rightarrow xRz)$	A4
R je euklidovská	$(\forall x, y, z)\ (xRy\ \&\ xRz \rightarrow yRz)$	A5
R je téměř reflexivní	$(\forall x, y)\ (xRy \rightarrow yRy)$	A6
R je téměř symetrická	$(\forall x, y, z)\ (xRy\ \&\ yRz \rightarrow zRy)$	A7

Takže logika **OK** charakterizuje všechny modely a silnější logiky charakterizují modely, v nichž má R vlastnosti odpovídající axiomům. Logika **OS5**$^+$ tak odpovídá modální logice KD45 a její relace $R = W \times W_0$, kde $W_0 \subseteq W$. [Åqvist 1984] dále dokazuje korektnost a úplnost deseti deontických systémů.

S úplností můžeme jednoduše dokázat odvoditelnost axiomů A6, A7 v logice **OS5** (i v logice **OS5**$^+$):

A6 (rámec je téměř reflexivní): $xRy\ \&\ xRy \rightarrow yRy$, protože rámec je euklidovský
A7 (rámec je téměř symetrický): $xRy\ \&\ yRz \rightarrow xRz$, protože rámec je tranzitivní
$xRz\ \&\ xRy \rightarrow zRy$, protože rámec je euklidovský

Zastavme se ještě u axiomu A3. Ten říká, že co je přikázáno, je také dovoleno, tedy že je možné příkazy vůbec plnit. Na sémantické rovině pak vylučuje modely, v nichž existují světy bez následovníka – světy, které „vidí“ alespoň samy na sebe, už v modelu mohou být. V dvouhodnotové deontické logice, která má vypovídat o reálných a splnitelných systémech příkazů a zákazů, je přijetí takového axiomu považováno za vhodné.

Na druhou stranu, ekvivalentní podoba téhož axiomu, totiž $OA \rightarrow \neg O \neg A$, přeložena do neformálního jazyka vylučuje konflikt povinností. Ten ale v realitě může nastat, například když neprozřetelně slíbíme účast na dvou událostech ve stejný čas. Přijetím axiomu A3 se tedy může logický systém dostat do konfliktu s realitou, z čehož vzcházejí paradoxy. Jak uvidíme dále, fuzzy logika má možnosti, jak se vyhnout nevýhodám obou krajních možností: axiom odmítneme jako příliš striktní, ale krajní případy, kdy svět „neuvidí“ na žádný jiný (ani na sebe) budou spíše vzácností (protože 0 již není jednou ze dvou hodnot, ale jednou z nespočetna).

1.2 Deset alethických systémů

Dále zadefinujeme deset alethických systémů s prohairetickou výrokovou konstantou Q (tzn. převzatou z teorie preferencí). Jazyk tedy tvoří stejná množina Prop výrokových proměnných, logické spojky $\top, \bot, Q, \Box, \Diamond, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ a závorky.

Operátory O, P jsou v tomto jazyce definované:

$$\begin{aligned} O\varphi &=_{df} \Box(Q \rightarrow \varphi) \\ P\varphi &=_{df} \Diamond(Q \wedge \varphi) \end{aligned}$$

A axiomatika je následující:

(B0) všechny výrokové tautologie
(B1) $\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$
(B2) $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$
(B3) $\Diamond Q$
(B4) $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$
(B5) $\Diamond\Box\varphi \rightarrow \Box\varphi$
(B6) $\Box\varphi \rightarrow \varphi$
(B7) $\Diamond\Box\varphi \rightarrow \varphi$

Odvozovací pravidla jsou modus ponens a $\Box$-necesitace.

Opět jde i přes schematické značení o obvyklé modální axiomy: B2 je axiom K, B4 je 4, B5 je ekvivalentní axiomu 5, B6 je axiom T a B7 je ekvivalentní B.

Deset logik pak vytvoříme následovně:

$\mathbf{K}_Q$ = B0–B2
$\mathbf{M}_Q$ = B0–B2, B6
$\mathbf{S4}_Q$ = B0–B2, B4, B6
$\mathbf{B}_Q$ = B0–B2, B6, B7
$\mathbf{S5}_Q$ = B0–B2, B5, B6 (B4 a B7 jsou odvoditelné)

Pro $\mathcal{K} \in \{\mathbf{K}_Q, \mathbf{M}_Q, \mathbf{S4}_Q, \mathbf{B}_Q, \mathbf{S5}_Q\}$ definujme

$$\mathcal{K}^+ = \mathcal{K}, \text{B3}$$

Odvoditelnost axiomů B4 a B7 v systému $\mathbf{S5}_Q$ (a ovšem i v $\mathbf{S5}_Q^+$) dokážeme:

Axiom B7 je dokazatelný triviálně z axiomů B5 a B6.

Dokázat axiom B4 bude pracnější, použijeme poněkud přepracovaný důkaz z [Peregrin 2004]. Buď $B = \Box A$.

1.	$\Box\neg B \to \neg B$	B6
2.	$B \to \neg\Box\neg B$	1, výr. taut.
3.	$B \to \Diamond B$	2, B1
4.	$\Diamond\Box\neg B \to \Box\neg B$	B5
5.	$\neg\Box\neg\Box\neg B \to \Box\neg B$	4, B1
6.	$\neg\Box\Diamond B \to \neg\Diamond B$	5, B1
7.	$\Diamond B \to \Box\Diamond B$	6, výr. taut.
8.	$B \to \Box\Diamond B$	3, 7
9.	$\Box A \to \Box\Diamond\Box A$	8
10.	$\Diamond\Box A \to \Box A$	B5
11.	$\Box(\Diamond\Box A \to \Box A)$	10, Nec
12.	$\Box\Diamond\Box A \to \Box\Box A$	11, B2
13.	$\Box A \to \Box\Box A$	9, 12

Sémantika bude reflektovat existenci nové konstanty, a model bude tedy uspořádaná čtveřice

$$M = \langle W, R, \mathrm{opt}, V \rangle$$

kde W je neprázdná množina, $R \subseteq W \times W$ relace dosažitelnosti, opt $\subseteq W$ množina ,,optimálních" prvků W podle blíže neurčených preferencí, V ohodnocení atomických výroků v prvcích W.

Složené spojky ohodnotíme induktivně – všechny známé spojky obvyklým způsobem, Q takto:

$$M, x \Vdash Q \quad \text{iff} \quad x \in \mathrm{opt}$$

Relace R může mít následující vlastnosti, které opět odpovídají axiomům B3–B7 (opět se i přes formální zápis pohybujeme v metajazyce):

R je opt-sériová	$(\forall x)(\exists y)$ $(xRy$ & $y \in \mathrm{opt})$	B3
R je tranzitivní	jako výše	B4
R je euklidovská	jako výše	B5
R je reflexivní	$(\forall x)$ xRx	B6
R je symetrická	$(\forall x, y)$ $(xRy \to yRz)$	B7

Zastavíme se ještě u axiomu B3. Jestliže jsme dříve řekli, že množina opt je dána blíže neurčenými preferencemi, nyní tyto preference určíme – prvky množiny opt budou deonticky dokonalé světy. Tedy světy, kde jsou všechny příkazy splněny a žádný zákaz není porušen. Přijmeme-li tedy axiom B3, pak je každý svět z W v relaci s některým deonticky dokonalým světem, což zajistí, že ve všech světech je přikázáno jen to, co je splnitelné.

2 Fuzzy logiky

Druhým logickým systémem, který nás bude zajímat, budou fuzzy logiky. Jak známo, fuzzy logika zobecňuje klasickou logiku tím, že zavádí více pravdivostních hodnot – tradičně se uvádí interval [0, 1], ale mohou to být i jiné množiny pravdivostních hodnot. Tato práce bude převážně vycházet z knihy prof. Petra Hájka [Hájek 1998], zejména všechny definice a lemmata v této kapitole jsou převzaty od něj. Pro naše zkoumání využijeme Łukasiewiczovu výrokovou logiku, jiné systémy jen zmíníme.

2.1 Sémantická definice logických spojek

Začneme sémantickou definicí logických spojek na intervalu [0, 1]. Budeme po nich požadovat, aby byly extenzionální vůči pravdivostním hodnotám (*truth-functional*) a aby se na hodnotách 0 a 1 chovaly obvyklým způsobem. Začněme konjunkcí & a jí odpovídající operací $*$ na intervalu [0, 1] zvanou *t-norma*. Vysoká hodnota $\varphi\&\psi$ má vyjadřovat vysokou hodnotu obou konjunktů a splňovat některé další přirozené požadavky.

Definice. *T-norma* je binární operace $*$ na intervalu [0, 1] taková, že:

(i) $*$ je komutativní a asociativní,
(ii) $*$ je neklesající v obou argumentech,
(iii) $1 * x = x$ a $0 * x = 0$ pro všechna $x \in [0, 1]$.

Ze speciálních případů t-normy využijeme jen Łukasiewiczovu:

$$x * y = \max(0, x + y - 1)$$

Nyní se podívejme na implikaci. Chceme od ní, aby umožňovala internalizovat usuzování. To znamená, že chceme mít korektní fuzzy modus ponens: z hodnoty formule φ a hodnoty formule $(\varphi \to \psi)$ odvodit dolní hranici pro hodnotu formule ψ; navíc chceme, aby to byla maximální dolní hranice. $(\varphi \to \psi)$ má být tedy největší prvek takový, že ještě platí $(\varphi\&(\varphi \to \psi)) \to \psi$. Vysoká hodnota $(\varphi \to \psi)$ pak bude znamenat, že hodnota φ není o mnoho větší než hodnota ψ.

Lemma. Mějme spojitou t-normu $*$. Pak existuje právě jeden prvek $x \Rightarrow y$ takový, že pro každé $x, y, z \in [0, 1]$ platí: $(x * z) \leq y$ iff $z \leq (x \Rightarrow y)$, tedy $(x \Rightarrow y) = \max\{z \mid x * z \leq y\}$.

Prvek $x \Rightarrow y$ nazveme *reziduum* t-normy. Reziduum Łukasiewiczovy t-normy vypadá následovně:

$$\begin{array}{ll} \text{pro } x \leq y, & x \Rightarrow y = 1 \\ \text{pro } x > y, & x \Rightarrow y = 1 - x + y \end{array}$$

Lemma. Pro každou spojitou t-normu $*$ platí v libovolné algebře $(L, \cap, \cup, *, \Rightarrow, 0, 1)$ (symboly $\cap, \cup$ značí minimum a maximum) následující identity:

(i) $x \cap y = x * (x \Rightarrow y)$
(ii) $x \cup y = ((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) \cap ((y \Rightarrow x) \Rightarrow x)$

Definice. Reziduum $\Rightarrow$ definuje odpovídající unární operaci *prekomplementu*:

$$(-)x = (x \Rightarrow 0)$$

Tyto tři pojmy z posledního lemmatu a definice nám budou po řadě popisovat slabou konjunkci, slabou disjunkci a negaci. Pokud jde o prekomplement, opět ukážeme jeho hodnotu odpovídající Łukasiewiczově t-normě:

$$(-)x = 1 - x$$

2.2 Basic Logic (BL)

Nyní již můžeme zadefinovat první fuzzy logiku. Výrokový kalkulus $PC(*)$ tvoří výrokové proměnné $p_1, p_2, \ldots$, logické spojky $\&, \rightarrow$ a logická konstanta $\overline{0}$. Další spojky jsou definovány:

$$\begin{aligned}
\varphi \wedge \psi &=_{df} \varphi \& (\varphi \rightarrow \psi) \\
\varphi \vee \psi &=_{df} ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi) \wedge ((\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi) \\
\neg \varphi &=_{df} \varphi \rightarrow \overline{0} \\
\varphi \equiv \psi &=_{df} (\varphi \rightarrow \psi) \& (\psi \rightarrow \varphi)
\end{aligned}$$

Ohodnocení e přiřadí výrokové proměnné p její pravdivostní hodnotu $e(p) \in [0,1]$ a formulím hodnotu podle nasledujících pravidel:

$e(\overline{0}) = 0$
$e(\varphi \& \psi) = e(\varphi) * e(\psi)$
$e(\varphi \rightarrow \psi) = e(\varphi) \Rightarrow e(\psi)$

Zavedeme již na tomto místě následující konvenci:

$$\varphi^n = \varphi \& \ldots \& \varphi, n\text{-krát}$$

Lemma. Pro každou dvojici formulí φ, ψ platí:

$e(\varphi \wedge \psi) = e(\varphi) \cap e(\psi)$
$e(\varphi \vee \psi) = e(\varphi) \cup e(\psi)$

Definice. Formuli φ nazveme 1-tautologií kalkulu $PC(*)$, když platí $e(\varphi) = 1$ pro každé ohodnocení e.

Následující formule jsou axiomy logiky BL (*basic logic*):

(BL1)	$(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$
(BL2)	$(\varphi \& \psi) \to \varphi$
(BL3)	$(\varphi \& \psi) \to (\psi \& \varphi)$
(BL4)	$(\varphi \& (\varphi \to \psi)) \to (\psi \& (\psi \to \varphi))$
(BL5a)	$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \& \psi) \to \chi)$
(BL5b)	$((\varphi \& \psi) \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi))$
(BL6)	$((\varphi \to \psi) \to \chi) \to (((\psi \to \varphi) \to \chi) \to \chi)$
(BL7)	$\overline{0} \to \varphi$

[Hájek 1998] následně dokazuje, že všechny tyto formule jsou 1-tautologie a odvozuje také teorémy logiky BL. Seznam teorémů uvádíme v Příloze 1. V posledních letech se ukázalo, že tato množina axiomů není nezávislá: [Cintula 2005] ukázal odvoditelnost axiomu BL3 a [Lehmke 2005] dokázal nadbytečnost axiomu BL2 (ovšem jen za přítomnosti BL3).

Modelem logiky BL jsou algebry s určitými vlastnostmi. Nazývají se *BL-algebry* a jejich vlastnosti nyní uvedeme.

Definice. *Reziduovaný svaz* je algebra $(L, \cap, \cup, *, \Rightarrow, 0, 1)$ se čtyřmi binárními operátory a dvěma konstantami taková, že

(i) $(L, \cup, \cap, 0, 1)$ je svaz s největším prvkem 1 a nejmenším prvkem 0 (vzhledem ke svazovému uspořádání $\leq$),

(ii) $(L, *, 1)$ je komutativní monoid, tzn. $*$ je komutativní, asociativní a pro každé x platí $1 * x = x$,

(iii) $*$ a $\Rightarrow$ tvoří adjungovaný pár, tzn. $z \leq (x \Rightarrow y)$ iff $(x * z \leq y)$.

Definice. Reziduovaný svaz $(L, \cap, \cup, *, \Rightarrow, 0, 1)$ je *BL-algebra*, když následující dvě identity platí pro všechna $x, y \in L$

(i) $x \cap y = x * (x \Rightarrow y)$

(ii) $(x \Rightarrow y) \cup (y \Rightarrow x) = 1$

Definice. Reziduovaný svaz $(L, \cap, \cup, *, \Rightarrow, 0, 1)$ je *lineárně uspořádaný*, pokud pro každé $x, y \in L$ platí $x \cap y = x$ nebo $x \cap y = y$ (ekvivalentně $x \cup y = x$ nebo $x \cup y = y$).

Lineárně uspořádaný svaz je (lineární) BL-algebrou, právě když v něm platí první identita z předposlední definice. Druhá identita v něm platí automaticky. Podmnožinou lineárně uspořádaných BL-algeber jsou standardní algebry, jejichž nosičem je interval [0, 1].

[Hájek 1998] dokazuje korektnost a úplnost logiky BL vůči BL-algebrám a vůči lineárním BL-algebrám.

2.3 Łukasiewiczova výroková logika (Ł)

Łukasiewiczova výroková logika vznikne z BL přidáním axiomu dvojité negace:

$$\neg\neg\varphi \to \varphi$$

Původní Łukasiewiczova idea staví logiku na následujících 4 Łukasiewiczových axiomech:

(Ł1) $\varphi \to ((\varphi \to \psi) \to \psi)$
(Ł2) $(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$
(Ł3) $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$
(Ł4) $((\varphi \to \psi) \to \psi) \to ((\psi \to \varphi) \to \varphi)$

Lze dokázat, že Ł1, Ł2, Ł3, Ł4 je ekvivalentní s BL + axiom dvojité negace.

V Ł je jediná primitivní logická spojka $\to$ a konstanta $\overline{0}$. Ostatní spojky jsou definovány:

$$\begin{aligned} \neg\varphi &=_{df} \varphi \to \overline{0} \\ \varphi\&\psi &=_{df} \neg(\varphi \to \neg\psi) \\ \varphi \wedge \psi &=_{df} \varphi\&(\varphi \to \psi) \\ \varphi \vee \psi &=_{df} (\varphi \to \psi) \to \psi \\ \varphi \veebar \psi &=_{df} \neg\varphi \to \psi \end{aligned}$$

Z axiomu Ł4 je takto zadefinovaná spojka $\vee$ ekvivalentní s její definicí v BL. Nová spojka $\veebar$ je duální k &, a je tedy silnou disjunkcí. V takto vzniklé logice Ł jsou kromě všech teorémů logiky BL dokazatelné i další teorémy, ty nejdůležitější uvádíme opět v Příloze 1.

Modelem Łukasiewiczovy fuzzy logiky jsou *MV-algebry*. Zkratka MV pochází z *many-valued* (vícehodnotové). Stejně jako Ł rozšiřuje BL o axiom dvojité negace, budou také MV-algebry speciálním případem BL-algeber.

Definice. *MV-algebra* je BL-algebra, v níž platí identita $x = ((x \Rightarrow 0) \Rightarrow 0)$.

I zde můžeme definovat lineární a standardní MV-algebry. Množinu standardních MV--algeber tvoří jediný prvek – MV-algebra s nosičem [0, 1] a Łukasiewiczovou t-normou a reziduem, nazveme ji $[0, 1]_{Ł}$.

Stejně jako jsme Łukasiewiczovu logiku definovali jinými axiomy než BL + axiom dvojité negace, původní je i jiná idea jejího modelu:

Definice. *Wajsbergova algebra* je algebra $\mathbf{A} = \langle A, \Rightarrow, 0\rangle$, v níž platí následující identity (položme $(-)x = (x \Rightarrow 0), 1 = (0 \Rightarrow 0)$)

(i) $(1 \Rightarrow y) = y$
(ii) $((x \Rightarrow y) \Rightarrow ((y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z))) = 1$
(iii) $(((-)x \Rightarrow (-)y) \Rightarrow (y \Rightarrow x)) = 1$
(iv) $((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) = ((y \Rightarrow x) \Rightarrow x)$

Tyto dva modely Łukasiewiczovy logiky jsou ekvivalentní. Tzn. v MV-algebře platí identity Wajsbergovy algebry a Wajsbergova algebra jde známým dodefinováním $*, \cap, \cup, 1$ rozšířit na MV-algebru.

Umíme tedy dokázat platnost axiomů Ł v MV-algebrách (axiom Ł1 je teorémem logiky BL) a [Hájek 1998] dále dokazuje úplnost logiky Ł vůči MV-algebrám, lineárním MV--algebrám i standardní MV-algebře.

2.4 Další fuzzy logiky

Ve zkratce si nyní představíme ještě několik dalších fuzzy logik, na které se později můžeme odvolat. První budou dvě logiky slabší než BL, o kterých podrobně mluví článek [Esteva–Godo 2001].

Logiky MTL a IMTL jsou založeny na monoidální logice U. Höhleho (citováno podle [Esteva–Godo 2001]). Hlavní odlišnost od BL spočívá v tom, že t-normy MTL nejsou spojité, jsou spojité jen zleva. Tím pádem je v MTL definovatelná implikace, ale nikoliv už spojky $\wedge, \vee$ (ty jsou definovatelné navzájem a rovnost $x * (x \Rightarrow y) = \min(x, y)$ platí jen pro spojitou t-normu).

Logiku MTL (*monoidal t-norm based logic*) tvoří axiomy BL s výjimkou axiomu BL4. Ten je nahrazen trojicí axiomů

$$(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$$
$$(\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi)$$
$$(\varphi \& (\varphi \to \psi)) \to (\varphi \wedge \psi)$$

Odvozovací pravidlo je modus ponens. Spojka $\wedge$ je v MTL primitivní, opačná implikace k třetímu z nových axiomů totiž neplatí.

Logika IMTL rozšiřuje logiku MTL o axiom dvojité negace (involuce – odtud IMTL), stejně jako Ł rozšiřuje BL. Odlišnosti IMTL a Ł jsou pak obdobné jako u MTL a BL.

Následující dvě logiky jsou představeny v [Hájek 1998] a rozšiřují logiku BL. Jako první uvedeme Gödelovu logiku G. Ta rozšiřuje BL o axiom

$$\varphi \to (\varphi \& \varphi)$$

díky kterému jsou silná a slabá konjunkce ekvivalentní. V G je také dokazatelná formule, na kterou v našem výkladu několikrát narazíme:

$$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)) \tag{2.1}$$

zatímco v BL je dokazatelná (z teorémů (BL7) a (BL4)) jen její slabší varianta

$$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to ((\varphi \& \varphi) \to \chi)) \tag{2.2}$$

Pokud G oslabíme o axiom BL6, dostaneme intuicionistickou logiku s obvyklými vlastnostmi, například v ní není definovatelná spojka $\vee$.

Poslední fuzzy logikou, o které se zmíníme, bude racionální Pavelkova logika RPL, která rozšiřuje logiku Ł. Jazyk RPL přidává k Ł spočetné množství pravdivostních konstant – jednu pro každé racionální číslo v intervalu [0, 1]; ve standardní MV-algebře jsou ohodnoceny přirozeně, $e(\overline{r}) = r$. Axiomatika je pak rozšířena o dva „účetní“ axiomy

$$(\overline{r} \to \overline{s}) \equiv \overline{r \Rightarrow s}$$
$$\neg \overline{r} \equiv \overline{1 - r}$$

a o odvozovací pravidlo: z $(\overline{r} \to \varphi)$ a $(\overline{s} \to (\varphi \to \psi))$ odvoď $(\overline{r * s} \to \psi)$.

Výsledky tohoto rozšíření zmíníme dále v textu.

2.5 Predikátová fuzzy logika

Ještě v krátkosti představíme predikátovou logiku s fuzzy pravdivostními hodnotami. Jazyk zde bude tvořen objektovými proměnnými a konstantami, predikáty, logickými spojkami, pravdivostními konstantami a kvantifikátory. Modelem bude algebře L odpovídající L-struktura $S = \langle M, (r_P)_P, (m_c)_c \rangle$ s nosnou množinou M, relací r_P pro každý predikát P a prvkem $m_c \in M$ pro každou objektovou konstantu c.

Ohodnocení v přiřadí každé objektové proměnné prvek $v(x) \in M$. Hodnota termů je dána strukturou S a ohodnocením v tak, že $\|x\|_{S,v} = v(x), \|c\|_{M,v} = m_c$. Pravdivostní hodnotu formulí definujeme taktéž induktivně, implikaci a konjunkci odpovídají jako obvykle reziduum a t-norma algebry L:

$$\begin{aligned} \|P(t_1, \dots, t_n)\|^L_{S,v} &= r_P(\|t_1\|_{S,v}, \dots, \|t_n\|_{S,v}) \\ \|(\forall x)\varphi\|^L_{S,v} &= \inf\{\|\varphi\|^L_{S,v'}; v \equiv_x v'\} \\ \|(\exists x)\varphi\|^L_{S,v} &= \sup\{\|\varphi\|^L_{S,v'}; v \equiv_x v'\} \end{aligned}$$

kde $v \equiv_x v'$ značí, že v a v' ohodnotí všechny proměnné s výjimkou x stejně.

Definice. Strukturu S nazveme L-bezpečnou, pokud existují všechna potřebná infima a suprema, tj. pokud je pro každé φ, v definováno $\|\varphi\|^L_{S,v}$.

Z výrokové fuzzy logiky vytvoříme predikátovou přidáním následujících pěti axiomů a odvozovacího pravidla $\forall$-generalizace.

- ($\forall$1) $(\forall x)\varphi(x) \to \varphi(t)$ (t substituovatelná za x ve φ)
- ($\exists$1) $\varphi(t) \to (\exists x)\varphi(x)$ (t substituovatelná za x ve φ)
- ($\forall$2) $(\forall x)(\chi \to \varphi) \to (\chi \to (\forall x)\varphi)$ (x není volná v χ)
- ($\exists$2) $(\forall x)(\varphi \to \chi) \to ((\exists x)\varphi \to \chi)$ (x není volná v χ)
- ($\forall$3) $(\forall x)(\varphi \vee \chi) \to ((\forall x)\varphi \vee \chi)$ (x není volná v χ)

V takto utvořené logice BL$\forall$ jsou dokazatelné teorémy, které uvádíme v Příloze 1. Pokud jde o silnější logiky, zmiňme se jen o Ł$\forall$, v níž je na rozdíl od ostatních logik dokazatelné

$$(\exists x)\varphi \equiv \neg(\forall x)\neg\varphi$$

(tedy i opačná implikace k teorému (BL$\forall$11)). Predikátová logika BL$\forall$ je úplná vůči každé lineárně uspořádané BL-algebře L a každému L-bezpečnému modelu, stejně tak i predikátové verze silnějších fuzzy logik jsou úplné vůči svým lineárně uspořádaným algebrám a bezpečným modelům nad nimi.

3 Fuzzy modality a jejich vlastnosti

Nyní oba logické systémy spojíme a pokusíme se interpretovat deontické logiky v Łukasiewiczově fuzzy logice. V této kapitole se především podíváme na to, zda má takový přístup smysl, zadefinujeme fuzzy operátory $O, P, \Box$ a $\Diamond$ a ověříme některá tvrzení potřebná pro další práci. V následujících dvou kapitolách pak ukážeme, jak se námi zavedený systém bude chovat na deontických logikách představených v první kapitole.

3.1 Motivace

Hned na začátku je třeba položit si otázku, zda má vůbec smysl zabývat se fuzzy deontickými logikami. Vždyť z pohledu trestního zákona je vše jednoznačné: „Kdo jiného úmyslně usmrtí, bude potrestán odnětím svobody na deset až patnáct let." Dopustil se obžalovaný trestného činu vraždy, jak je definován? Pokud ano, bude mu vyměřen trest. Ale už zde nastupuje vágnost – podle čeho soudce rozhodne, jak vysoký trest vyměří? Vražda je přece vražda.

Nemusíme ani chodit až do sféry trestných činů, stačí se podívat na obyčejné každodenní rozhodování. Všichni víme, že bychom měli pouštět staré lidi sednout, ale co přesně je „starý člověk"? Pokud uznáme, že v konkrétní situaci je vágní pojem naplněn (nastoupí opravdu starý člověk), pustíme jej sednout (jednání samo už je dvouhodnotové). Stejně tak víme, že k rodičům se má člověk chovat uctivě. Každý ví, kdo jsou jeho rodiče (Oidipa protentokrát ze svých úvah vynecháme), ale pojem uctivého chování se liší od rodiny k rodině a od generace ke generaci – před sto lety by bylo například nemyslitelné, aby děti rodičům tykaly. Máme tedy dvouhodnotovou podmínku a vágní příkaz. A v případě příkazu „Ve zúžených místech choďte rychle" je vágní podmínka i příkaz.

V konkrétní situaci vždy posuzujeme, zda byla podmínka naplněna nebo zda byla naplněna přes nějakou mez, a podle toho se rozhodujeme, zda příkaz splníme nebo ne. Jsme-li ale v roli zákonodárce, nemůžeme každou situaci předvídat a legislativně upravit. A tím spíše to platí o etických normách, daných zvykově.

Fuzzy logika může nastoupit všude tam, kde se vyskytne vágnost, která je škálovatelná. Musíme mít alespoň nějaká měřítka, kterými můžeme porovnávat jednotlivé výroky. Toto měřítko nemusí být jen jedno pro danou skutečnost – typickým příkladem je měření inteligence: v testech se měří jednotlivé složky inteligence, ze kterých vhodným výpočtem odvodí jedno číslo, známý inteligenční kvocient. V příkladech, které jsme výše uvedli, lze škálovatelnost najít (ať už je to výše trestu, věk, nebo porovnání chování dvou lidí ve stejné situaci) a je tedy smysluplné fuzzy logiku použít.

3.2 Fuzzy sémantika možných světů

Jak bude vypadat kripkovský model $M = \langle W, R, V \rangle$ ve fuzzy logice? Možností je několik.

Předně můžeme fuzzifikovat ohodnocení V. Takže každý možný svět modelu bude sám o sobě modelem nemodální fuzzy logiky, konkrétně lineární MV-algebrou (pohybujeme se totiž v Ł) a výrokové proměnné v něm tedy budou ohodnoceny prvky této algebry, nazveme ji L. Na lineární MV-algebry se omezíme z praktických důvodů, v samotné výrokové logice to nehraje roli; jak jsme již uvedli, Ł je korektní a úplná vůči všem MV--algebrám, i vůči lineárním. Ohodnocení V tedy nově bude zobrazením $W \times \text{Prop} \mapsto L$. Také odpovědí na otázku ,,které světy splňují výrok φ?" bude fuzzy množina, neboť některé světy budou φ splňovat ve stupni 1, jiné méně a některé vůbec – tedy s pravdivostní hodnotou 0 – a podle toho budou patřit do množiny zcela, částečně nebo vůbec.

Za druhé se nabízí možnost mít fuzzy relaci R. V takovém modelu budou světy mezi sebou dosažitelné jen do určité míry. Jestliže v dvouhodnotové logice vyjadřuje xRy, že příkazy vyslovené v x jsou v y splněny (a pokud ne, pak mezi x a y relace nevede), pak hodnota fuzzy relace mezi x a y říká, nakolik jsou příkazy z x splněny v y (například příkaz ,,zavři dveře" splním částečně, pokud je jen přivřu).

Pokud jde o samotnou množinu možných světů W, ta se pro fuzzifikaci nezdá být vhodná. Takové zobecnění by vyžadovalo podrobnější diskuzi definic a přineslo by mnoho technických problémů. Teoreticky si lze fuzzy množinu W představit. Rozpracovávají se např. koncepce tzv. nemožných možných světů (reference v [Duc 2001]), ale nemusíme chodit tak daleko. Pokud bychom například chtěli porovnávat, nakolik je v naší kultuře platné určité etické pravidlo, budeme se rozhlížet po evropských zemích, zda je v nich dodržováno, méně už nás bude zajímat Asie nebo rovníková Afrika a skoro vůbec mimozemské civilizace. Na druhou stranu pokud bychom pro toto zkoumání využívali výpočetní techniku, pak musíme udělat přesnou hranici, které společnosti a jejich etické normy budou zahrnuty v databázi a které již ne. I proto můžeme toto zobecnění s klidným svědomím pominout.

Naopak množinu opt, která u alethických logik s výrokovou konstantou Q obsahuje deonticky dokonalé světy, převedeme na fuzzy množinu. Budeme tak mít i světy deonticky méně dokonalé (některé příkazy jsou v nich splněny jen částečně) a konstanta Q bude nabývat v různých světech různých hodnot podle toho, v jaké míře budou do opt patřit.

Z předchozích úvah nám tedy vyplynou fuzzy rámce s ostře ohraničenou množinou možných světů W, fuzzy relací dosažitelnosti r, u alethických logik navíc s fuzzy množinou opt, a v nich pak modely s fuzzy ohodnocením e.

V dvouhodnotových logikách jsme formálně popsali některé vlastnosti rámců. Teď je formalizujeme i pro fuzzy rámce. Podmínky tranzitivity, symetrie a reflexivity definujeme podle [Zadeh 1971], ostatní analogicky. Jde o přirozený překlad metajazykových formalizací do fuzzy sémantiky.

sériové rámce	$(\forall x)(\exists y)\ r(x,y) = 1$
opt-sériové rámce	$(\forall x)(\exists y)\ r(x,y) * \text{opt}(y) = 1$
tranzitivní rámce	$(\forall x,y,z)\ r(x,y) * r(y,z) \leq r(x,z)$
euklidovské rámce	$(\forall x,y,z)\ r(x,y) * r(x,z) \leq r(y,z)$
reflexivní rámce	$(\forall x)\ r(x,x) = 1$
téměř reflexivní rámce	$(\forall x,y)\ r(x,y) \leq r(y,y)$
symetrické rámce	$(\forall x,y)\ r(x,y) = r(y,x)$
téměř symetrické rámce	$(\forall x,y,z)\ r(x,y) * r(y,z) \leq r(z,y)$

3.3 Definice modálních operátorů

V návaznosti na to, co bylo řečeno výše, nyní zadefinujeme modální operátory. Začneme s operátorem nutnosti $\Box$. V dvouhodnotové modální logice lze jeho sémantický význam vyjádřit v metajazyce takto:

$$w \Vdash \Box\varphi \quad \text{iff} \quad (\forall v \in W)(wRv \to v \Vdash \varphi)$$

Nyní učiníme najednou několik kroků: Přesuneme se k fuzzy logice, takže výroky na obou stranách ekvivalence budou ohodnoceny prvkem z L a stejně tak je fuzzy i relace R. Posuneme se k sémantickému významu ekvivalence, takže i kvantifikátor nahradíme jeho sémantickým významem z druhé kapitoly. Dostaneme tedy tento vztah:

$$e_w(\Box\varphi) = \inf_{v \in W}(r(w,v) \Rightarrow e_v(\varphi))$$

Stejně odvodíme i operátor možnosti, operátory O, P se budou chovat stejně:

$$\begin{array}{rcl} w \Vdash \Diamond\varphi & \text{iff} & (\exists v \in W)(wRv \ \& \ v \Vdash \varphi) \\ e_w(\Diamond\varphi) & = & \sup\limits_{v \in W}(r(w,v) * e_v(\varphi)) \end{array}$$

Ve všech rámcích v dvouhodnotové logice platí deontické axiomy A0–A2/B0–B2 a odvozovací pravidla modus ponens a necesitace (až na použitý jazyk jsou stejné v deontických i alethických systémech). Rádi bychom je zachovali i pro fuzzy logiku. Vezmeme tedy fuzzy obdobu známé modální logiky K a pokusíme se dokázat její korektnost vůči všem fuzzy rámcům, jak jsme je definovali výše – tedy rámcům s fuzzy relací dosažitelnosti.

A1/B1:

$$\begin{array}{rcl} \Diamond A & \leftrightarrow & \neg\Box\neg A \\ \sup\limits_v(r(w,v) * e_v(A)) & = & (-)\inf\limits_v(r(w,v) \Rightarrow e_v(\neg A)) \end{array}$$

Tato rovnost platí v logice Ł, protože v ní platí následující rovnosti

$$\begin{array}{rcl} (-)\inf\limits_v(r(w,v) \Rightarrow e_v(\neg A)) & = & \inf\limits_v(r(w,v) \Rightarrow (e_v(A) \Rightarrow 0) \Rightarrow 0 \\ & = & \inf\limits_v((r(w,v) * e_v(A)) \Rightarrow 0) \Rightarrow 0 \\ (r(w,v) * e_v(A)) \Rightarrow 0) \Rightarrow 0 & = & r(w,v) * e_v(A) \end{array}$$

Využili jsme podobu prekomplementu v Ł, ohodnocení negace, sémantickou interpretaci axiomu BL5a a identitu platnou ve všech MV-algebrách. Stojí za povšimnutí, že poslední vztah platí v Ł, zatímco v BL platit nemusí.

Je-li hodnota $r(w,v) * e_v(A)$ ve v supremem, pak hodnota $(r(w,v) * e_v(A)) \Rightarrow 0$ je infimem a hodnota $((r(w,v) * e_v(A)) \Rightarrow 0) \Rightarrow 0$ opět supremem. Rovnost tedy platí. $\Box$

A2/B2:

$$\begin{array}{rcl} \Box(A \to B) & \to & (\Box A \to \Box B) \\ \inf\limits_v(r(w,v) \Rightarrow e_v(A \to B)) & \leq & (\inf\limits_{u_1}(r(w,u_1) \Rightarrow e_{u_1}(A)) \Rightarrow \inf\limits_{u_2}(r(w,u_2) \Rightarrow e_{u_2}(B))) \\ \inf\limits_v(r(w,v) \Rightarrow (e_v(A) \Rightarrow e_v(B))) & \leq & (\inf\limits_{u_1}(r(w,u_1) \Rightarrow e_{u_1}(A)) \Rightarrow \inf\limits_{u_2}(r(w,u_2) \Rightarrow e_{u_2}(B))) \end{array}$$

Tento vztah, tedy sémantická interpretace A2/B2, platí z dvojího použití sémantické interpretace teorému (BL∀5), pokud platí pro každé v

$$r(w,v) \Rightarrow (e_v(A) \Rightarrow e_v(B)) \leq (r(w,v) \Rightarrow e_v(A)) \Rightarrow (r(w,v) \Rightarrow e_v(B))$$

Toto je ale instance formule (2.1) dokazatelné v G, zatímco v BL platí pouze slabší formule (2.2), jak jsme o nich mluvili v podkapitole 2.4.

Bez dalších informací je tedy axiom A2/B2 v této podobě nedokazatelný. Co by se muselo změnit, aby platil? Zjevně za to může nekontraktivnost konjunkce na hodnotě $r(w,v)$, která nemusí být rovna jedné. Řešením tedy může být a) mít kontraktivní konjunkci, to znamená přesunout se k logice G, ovšem s axiomem dvojité negace, s kterým můžeme dokázat A1/B1. My se ale nechceme omezit na logiky s nekontraktivní konjunkcí, protože se snažíme zachovat co největší míru obecnosti. Zároveň pokud bychom zavedli jak dvojitou negaci, tak kontraktivitu konjunkce, dostali bychom klasickou logiku a tato práce by neměla žádný smysl.

Nebo b) bude A2/B2 dokazatelné, pokud bude $r(w,v)$ nabývat hodnot 1, 0. To nastane tehdy, pokud opustíme vícehodnotovost relace, což jsme výše připustili jako možnost, ale rozhodli se, že ji zde neaplikujeme. Nebo pokud se budeme pohybovat jen v Hájkově modální logice S5, v níž je relace dosažitelnosti rovna $W \times W$, tj. $(\forall w,v)\ r(w,v) = 1$. Logikou S5 je ovšem jen náš alethický systém $\mathbf{S5}_Q$, ostatní jsou slabší. Pokud se tedy chceme stále pohybovat v našich 20 systémech, zavrhněme i tuto možnost.

Pro slabší modální logiky navrhuje [Hájek 1998, 8.3.40] použít namísto $\Box, \Diamond$ nekonečně operátorů $\Box_n, \Diamond_n$:

Definice. Mějme jazyk fuzzy logiky Ł a nekonečně mnoho modálních operátorů $\Box_n, \Diamond_n$, $n \geq 0$. Mějme kripkovské modely $M = \langle W, r, e \rangle$ jako výše. Pak je sémantika modálních operátorů následující:

$$\begin{aligned} e_w(\Box_n \varphi) &= \inf_{v \in W} (r^n(w,v) \Rightarrow e_v(\varphi)) \\ e_w(\Diamond_n \varphi) &= \sup_{v \in W} (r^n(w,v) * e_v(\varphi)) \end{aligned}$$

kde r^n značí $r * \ldots * r$ n-krát.

Pro $n = 0$ dodefinujme:

$$\begin{aligned} e_w(\Box_0 \varphi) &= \inf_{v \in W} (1 \Rightarrow e_v(\varphi)) &= \inf_{v \in W} e_v(\varphi) \\ e_w(\Diamond_0 \varphi) &= \sup_{v \in W} (1 * e_v(\varphi)) &= \sup_{v \in W} e_v(\varphi) \end{aligned}$$

Poznámka: Operátory $\Box_0, \Diamond_0$ odpovídají operátorům $\Box, \Diamond$ z Hájkovy fuzzy logiky S5, kde platí $(\forall w,v)\ r(w,v) = 1$. Je přirozené definovat t-normu mezi 0 argumenty jako 1, protože platí $r^{n+1} = r^n * r$ a pro $n = 1$ je $r^1 = 1 * r$.

Samozřejmě se touto změnou modalit změní i naše axiomy. Pokud jde o první dva, kterým se věnujeme v této kapitole, A1/B1 bude znít

$$\Diamond_n A \leftrightarrow \neg \Box_n \neg A$$

a na důkazu se nic nezmění, jen všechna $r(w,v)$ nahradíme $r^n(w,v)$ se stejným n.

Pokud jde o A2/B2, jeho podobu převezmeme z [Hájek 1998]:

$$\Box_n(A \to B) \to (\Box_m A \to \Box_{m+n} B)$$

a důkaz povedeme tak, že se stejným sledem úvah jako výše dostaneme k potřebě dokázat následující nerovnost pro každé v:

$$r^n(w,v) \Rightarrow (e_v(A) \Rightarrow e_v(B)) \leq (r^m(w,v) \Rightarrow e_v(A)) \Rightarrow (r^{m+n}(w,v) \Rightarrow e_v(B))$$

Vezměme $k = \min(m,n), l = |m-n|$. Pak platí pro každý svět v:

$$\begin{array}{rcl}
r^k(w,v) \Rightarrow (e_v(A) \Rightarrow e_v(B)) & \leq & (r^k(w,v) \Rightarrow e_v(A)) \Rightarrow (r^{2k}(w,v) \Rightarrow e_v(B)) \\
r^k(w,v) \Rightarrow (e_v(A) \Rightarrow e_v(B)) & \leq & ((r^k(w,v) \Rightarrow e_v(A)) * r^{2k}(w,v)) \Rightarrow e_v(B) \\
r^l(w,v) \Rightarrow (r^k(w,v) \Rightarrow (e_v(A) \Rightarrow e_v(B))) & \leq & r^l(w,v) \Rightarrow \\
& & \Rightarrow (((r^k(w,v) \Rightarrow e_v(A)) * r^{2k}(w,v)) \Rightarrow e_v(B)) \\
(r^l(w,v) * r^k(w,v)) \Rightarrow (e_v(A) \Rightarrow e_v(B)) & \leq & (r^l(w,v) * (r^k(w,v) \Rightarrow e_v(A)) * r^{2k}(w,v)) \Rightarrow \\
& & \Rightarrow e_v(B) \\
r^{k+l}(w,v) \Rightarrow (e_v(A) \Rightarrow e_v(B)) & \leq & ((r^k(w,v) \Rightarrow e_v(A)) * r^{2k+l}(w,v)) \Rightarrow e_v(B) \\
r^{k+l}(w,v) \Rightarrow (e_v(A) \Rightarrow e_v(B)) & \leq & (r^k(w,v) \Rightarrow e_v(A)) \Rightarrow (r^{2k+l}(w,v) \Rightarrow e_v(B))
\end{array}$$

Použili jsme postupně sémantické interpretace formule (2.2), axiomu BL5a, axiomu BL1, opět axiomu BL5a (dvakrát v jednom kroku), asociativitu t-normy a opět sémantickou interpretaci axiomu BL5a.

Platnost našeho axiomu dokážeme z poslední nerovnosti dvojím použitím sémantické interpretace teorému (BL∀5) v L. Tato metoda důkazu zaslouží krátké vysvětlení: Obecný kvantifikátor je v predikátové fuzzy logice definován jako infimum přes prvky nosiče algebry. Jelikož je pro lineární algebry a jejich bezpečné struktury dokázána korektnost, můžeme tato tvrzení využít i na sémantické rovině, jde-li ovšem o lineární algebru (což L splňuje).

Toto bylo dokázáno pro $n \geq m$, pro opačnou nerovnost dokážeme stejným postupem ekvivalentní (z teorému (BL2)) formuli:

$$\Box_m A \to (\Box_n(A \to B) \to \Box_{m+n} B)$$

□

Ještě zbývá ověřit, zda odvozovací pravidla zachovávají tautologičnost.

MP: z A a $(A \to B)$ odvoď B

$$\begin{array}{l}
(\forall w)\ e_w(A) = 1 \\
(\forall w)\ e_w(A \to B) = 1 \\
(\forall w)\ e_w(A) \leq e_w(B) \\
(\forall w)\ e_w(B) = 1
\end{array}$$

Použité vztahy platí ve všech MV-algebrách. □

$\Box_n$**-Nec**: z A odvoď $\Box_n A$

$$\begin{array}{ll} (\forall v) & e_v(A) = 1 \\ (\forall v) & x \Rightarrow e_v(A) = 1 \\ & \inf_v (x \Rightarrow e_v(A)) = 1 \\ (\forall w) & \inf_v (r^n(w,v) \Rightarrow e_v(A)) = 1 \\ (\forall w) & e_w(\Box_n A) = 1 \end{array}$$

Také toto pravidlo bylo odvozeno ze vztahů platných ve všech MV-algebrách. $\Box$

Předvedeme ještě platnost jednoho druhotného odvozovacího pravidla, a to pravidla $(\Box_n \to \Box_n)$-necesitace: z $(A \to B)$ odvoď $(\Box_n A \to \Box_n B)$. V dvouhodnotových modálních logikách i ve fuzzy logice S5 plyne automaticky z $\Box$-necesitace a z axiomu K (náš axiom A2/B2). Zde vyplývá z týchž předpokladů, ale méně zřetelně:

$$\begin{array}{l} \vdash A \to B \\ \vdash \Box_0(A \to B) \\ \vdash \Box_0(A \to B) \to (\Box_n A \to \Box_{0+n} B) \\ \vdash (\Box_n A \to \Box_n B) \end{array}$$

Zavedli jsme tedy základní modální logiku K s axiomy

(0)	všechny 1-tautologie logiky Ł
(1)	$\Diamond_n A \leftrightarrow \neg\Box_n\neg A$
(2)	$\Box_n(A \to B) \to (\Box_m A \to \Box_{m+n} B)$

a základními odvozovacími pravidly

(MP)	z A a $(A \to B)$ odvoď B
($\Box_n$-Nec)	z A odvoď $\Box_n A$

a dokázali její korektnost vůči třídě všech fuzzy rámců.

3.4 Vlastnosti modálních operátorů

Ukážeme některé vlastnosti právě zavedených modálních operátorů. Jak bylo řečeno, [Hájek 1998] používá operátory v logice S5, které jsou definovány jako

$$e(\Box A) = \inf_{w \in W} e_w(A), \quad e(\Diamond A) = \sup_{w \in W} e_w(A)$$

tedy stejně jako kvantifikátory $\forall, \exists$ v predikátové logice, a ukazuje, že pro ně platí také všechny axiomy a teorémy predikátové fuzzy logiky uvedené v Příloze 1, až na teorém (BL$\forall$10) (v jeho důkazu v predikátové logice je nutno kvantifikovat přes dvě různé proměnné, což v modální logice nelze použít) – modální obdobu tohoto teorému proto zavádí jako další axiom.

Jelikož u predikátových axiomů a teorémů jsme požadovali, aby některé formule neobsahovaly kvantifikovanou proměnnou (a jejich hodnota tedy byla stejná, ať jsou v dosahu kvantifikátoru, nebo ne), je zde nutné podobně ošetřit formule na jejich místech: ve fuzzy S5 to lze zařídit, pokud příslušné formule budou ve tvaru $\Box\chi$ nebo $\Diamond\chi$. Ve slabších modálních logikách toto není možné a další možnost – požadovat, aby χ mělo ve všech světech W stejnou hodnotu – je nepraktická.

Když se tedy takto vzdáme části axiomů a teorémů, zbydou nám takové, které v další práci nevyužijeme. Nebudeme je tedy dokazovat, namísto toho dokážeme větu o dedukci pro slabé modální fuzzy logiky.

Lemma. Buď T teorie nad Ł, $T \vdash \varphi, T \vdash \psi$. Pak $T \vdash \varphi \& \psi$.

Důkaz. V T je dokazatelný teorém (BL5) $\varphi \to (\psi \to (\varphi \& \psi))$. Dvojím použitím MP dostaneme požadovaný výsledek. □

Věta (lokální o dedukci). Buď T některý z našich dvaceti deontických systémů a φ, ψ formule jeho jazyka. Pak platí $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ právě tehdy, když existují $k_{(1,1)} \dots k_{(1,t_1)}$, $k_{(2,1)} \dots k_{(2,t_2)}, \ \dots \ , k_{(n,1)} \dots k_{(n,t_n)}, m_1 \dots m_n$ takové, že

$$T \vdash (\Box_{k_{(1,1)}} \dots \Box_{k_{(1,t_1)}} \varphi^{m_1} \& \dots \& \Box_{k_{(n,1)}} \dots \Box_{k_{(n,t_n)}} \varphi^{m_n}) \to \psi \tag{3.1}$$

Důkaz. Nejprve nechť platí (3.1). Pak postupně platí:

$T \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$	z korektnosti Ł vůči lineárním MV-algebrám
$T \cup \{\varphi\} \vdash \varphi^{m_i}$	pro každé m_i z lemmatu
$T \cup \{\varphi\} \vdash \Box_{k_{(i,1)}} \dots \Box_{k_{(i,t_i)}} \varphi^{m_i}$	pro každé m_i, t_i-násobným použitím $\Box_n$-Nec
$T \cup \{\varphi\} \vdash \Box_{k_{(1,1)}} \dots \Box_{k_{(1,t_1)}} \varphi^{m_1} \& \dots \& \Box_{k_{(n,1)}} \dots \Box_{k_{(n,t_n)}} \varphi^{m_n}$	
	opět z lemmatu
$T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$	z předpokladu použitím MP

Opačně, nechť $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ a nechť $\gamma_1 \dots \gamma_r$ je důkaz ψ v teorii $T \cup \{\varphi\}$. Chceme dokázat indukcí podle složitosti důkazu, že pro každé γ_i existují $k^i_{(1,1)} \dots k^i_{(1,t_1)}, \ \dots \ , k^i_{(n,1)} \dots k^i_{(n,t_n)}$, $m^i_1 \dots m^i_n$ takové, že

$$T \vdash (\Box_{k^i_{(1,1)}} \dots \Box_{k^i_{(1,t_1)}} \varphi^{m^i_1} \& \dots \& \Box_{k^i_{(n,1)}} \dots \Box_{k^i_{(n,t_n)}} \varphi^{m^i_n}) \to \gamma_i$$

1. γ_i je axiom Ł nebo $T \cup \varphi$, tedy 1-tautologie v $T \cup \varphi$.
   Pak z axiomů BL7 a Ł3 platí $\chi \to \gamma_i$ pro každé χ.

2. γ_i je odvozeno pomocí modus ponens z γ_j a $\gamma_j \to \gamma_i$.
   Pak z indukčního předpokladu platí

   $$T \vdash (\Box_{k^j_{(1,1)}} \dots \Box_{k^j_{(1,t_1)}} \varphi^{m^j_1} \& \dots \& \Box_{k^j_{(n,1)}} \dots \Box_{k^j_{(n,t_n)}} \varphi^{m^j_n}) \to \gamma_j$$
   $$T \vdash (\Box_{k^{ji}_{(1,1)}} \dots \Box_{k^{ji}_{(1,t_1)}} \varphi^{m^{ji}_1} \& \dots \& \Box_{k^{ji}_{(n,1)}} \dots \Box_{k^{ji}_{(n,t_n)}} \varphi^{m^{ji}_n}) \to (\gamma_j \to \gamma_i)$$

   a pak je z teorémů (BL7) a (BL4) dokazatelné

   $$\begin{aligned} T \vdash (&\Box_{k^j_{(1,1)}} \dots \Box_{k^j_{(1,t_1)}} \varphi^{m^j_1} \& \dots \& \Box_{k^j_{(n,1)}} \dots \Box_{k^j_{(n,t_n)}} \varphi^{m^j_n} \,\& \\ &\& \Box_{k^{ji}_{(1,1)}} \dots \Box_{k^{ji}_{(1,t_1)}} \varphi^{m^{ji}_1} \& \dots \& \Box_{k^{ji}_{(n,1)}} \dots \Box_{k^{ji}_{(n,t_n)}} \varphi^{m^{ji}_n}) \to \gamma_i. \end{aligned}$$

3. γ_i je odvozeno z nějakého γ_j $\Box_n$-necesitací, je tedy tvaru $\Box_n\gamma_j$.
Pak z indukčního předpokladu platí dvě navzájem ekvivalentní formule

$$T \vdash (\Box_{k^j_{(1,1)}} \dots \Box_{k^j_{(1,t_1)}} \varphi^{m^j_1} \;\&\dots\&\; \Box_{k^j_{(n,1)}} \dots \Box_{k^j_{(n,t_n)}} \varphi^{m^j_n}) \to \gamma_j$$

$$T \vdash \Box_{k^j_{(1,1)}} \dots \Box_{k^j_{(1,t_1)}} \varphi^{m^j_1} \to (\Box_{k^j_{(2,1)}} \dots \Box_{k^j_{(2,t_2)}} \varphi^{m^j_2} \to \dots$$
$$\dots (\Box_{k^j_{(n,1)}} \dots \Box_{k^j_{(n,t_n)}} \varphi^{m^j_n} \to \gamma_j)) \dots)$$

díky dokázané $(\Box_n \to \Box_n)$-necesitaci platí

$$T \vdash \Box_n \Box_{k^j_{(1,1)}} \dots \Box_{k^j_{(1,t_1)}} \varphi^{m^j_1} \to$$
$$\to \Box_n(\Box_{k^j_{(2,1)}} \dots \Box_{k^j_{(2,t_2)}} \varphi^{m^j_2} \to \dots\ (\Box_{k^j_{(n,1)}} \dots \Box_{k^j_{(n,t_n)}} \varphi^{m^j_n} \to \gamma_j)) \dots)$$

a z $(n-1)$-násobného užití axiomu A2/B2 dostaneme postupně

$$T \vdash \Box_n \Box_{k^j_{(1,1)}} \dots \Box_{k^j_{(1,t_1)}} \varphi^{m^j_1} \to (\Box_0 \Box_{k^j_{(2,1)}} \dots \Box_{k^j_{(2,t_2)}} \varphi^{m^j_2} \to$$
$$\to \Box_n(\Box_{k^j_{(3,1)}} \dots \Box_{k^j_{(3,t_3)}} \varphi^{m^j_3} \to \dots\ (\Box_{k^j_{(n,1)}} \dots \Box_{k^j_{(n,t_n)}} \varphi^{m^j_n} \to \gamma_j)) \dots)$$

$\dots$

$$T \vdash \Box_n \Box_{k^j_{(1,1)}} \dots \Box_{k^j_{(1,t_1)}} \varphi^{m^j_1} \to$$
$$\to (\Box_0 \Box_{k^j_{(2,1)}} \dots \Box_{k^j_{(2,t_2)}} \varphi^{m^j_2} \to \dots\ (\Box_0 \Box_{k^j_{(n,1)}} \dots \Box_{k^j_{(n,t_n)}} \varphi^{m^j_n} \to \Box_n\gamma_j)) \dots) \quad \Box$$

4 Fuzzifikace systémů deontických logik

Teď, když máme zadefinované modální operátory, se můžeme podívat, jak se bude našich dvacet deontických systémů chovat ve fuzzy logice. Cílem bude ověřit, které axiomy odpovídají kterým vlastnostem fuzzy rámců, a nakonec dokázat větu o korektnosti dvaceti fuzzy deontických systémů vůči odpovídajícím fuzzy modelům. V pracích tohoto typu obvykle následuje věta o úplnosti vůči těmto systémům. [Hájek 1998] ukazuje, že existuje axiomatizace využívající logiku RPL, která je korektní a úplná vůči S5($[0, 1]_{Ł}$), tedy vůči modální logice nad standardní MV-algebrou. My ale pracujeme s lineárními MV-algebrami a vůči nim není RPL korektní (protipříkladem může být Changova algebra definovaná v [Chang 1958]). Úplnost logiky S5(Ł) vůči lineárním MV-algebrám ještě dokázána nebyla a případná obtížnost takového důkazu patrně přesahuje možnosti této práce.

Důkaz korektnosti začneme tentokrát u alethických systémů, protože v případě dvojic axiomů A6/B6 a A7/B7 jsou ty alethické jednodušší a při zkoumání deontických verzí se můžeme na jejich výsledky odvolat.

4.1 Fuzzifikace alethických systémů

Vyslovme nejprve podobu axiomů alethických systémů, jak zní při překladu do fuzzy modálních logik:

(B0) všechny 1-tautologie logiky Ł
(B1) $\Diamond_n A \leftrightarrow \neg\Box_n\neg A$
(B2) $\Box_n(A \to B) \to (\Box_m A \to \Box_{m+n} B)$
(B3) $\Diamond_n Q$
(B4) $\Box_n A \to \Box_m\Box_n A$
(B5) $\Diamond_m\Box_n A \to \Box_n A$
(B6) $\Box_n A \to A$
(B7) $\Diamond_m\Box_n A \to A$

Věta. Axiomy alethických systémů jsou bezesporné.

Důkaz. Předpokládejme opak, tedy že z axiomů je dokazatelný spor, tzn. je z nich dokazatelné $\overline{0}$. Vezměme tento důkaz $\overline{0}$ (nazveme jej D) a všechny formule v něm obsažené přeložme následujícím překladem δ:

$\delta(Q) = \overline{1}$
$\delta(p) = p$ pro $p \neq Q$
δ s výrokovými spojkami komutuje
$\delta(\Box_n A) = \delta(A)$
$\delta(\Diamond_n A) = \delta(A)$

Jednotlivé formule v důkazu D jsou buď axiomy alethických systémů nebo jsou odvozeny z předchozích formulí pravidly MP a $\Box_n$-Nec. Axiomy budou přeloženy na následujících osm schemat:

δ(B0)	všechny 1-tautologie logiky Ł
δ(B1)	$A \leftrightarrow \neg\neg A$
δ(B2)	$(A \to B) \to (A \to B)$
δ(B3)	$\overline{1}$
δ(B4)	$A \to A$
δ(B5)	$A \to A$
δ(B6)	$A \to A$
δ(B7)	$A \to A$

přičemž formule δ(B1) je dokazatelná v Ł (teorémy (BL17) a (Ł1)), formule δ(B3) je teorém (BL19) a zbylé formule jsou instance teorému (BL3). Všechny jsou tedy dokazatelné v logice Ł.

Pokud jde o odvozovací pravidla, MP zůstane nezměněn (je odvozovacím pravidlem Ł) a z $\Box_n$-Nec dostaneme triviální pravidlo „z A odvoď A".

Pokud D dokazuje $\overline{0}$, pak $\delta(D)$ dokazuje $\delta(\overline{0}) = \overline{0}$. Ale všechny formule v $\delta(D)$ jsou z logiky Ł, která je bezesporná, neboť má model. V alethických systémech tedy nelze odvodit spor. □

Poznámka: I přesto, že bude hned následovat důkaz korektnosti našich alethických axiomů vůči určitým fuzzy rámcům, z nějž jejich bezespornost triviálně vyplývá, má tento důkaz smysl. Především proto, že dokazuje bezespornost čistě syntakticky.

Budeme chtít ukázat, v jakých fuzzy rámcích které axiomy alethických systémů platí, jak se výsledky liší od dvouhodnotové verze, a nakonec budeme moci dokázat korektnost systémů vůči třídám fuzzy rámců. V několika případech se nám podaří ukázat platnost axiomů v daných fuzzy rámcích jen za omezených podmínek. Pak bude třeba ukázat, že bez těchto podmínek nejsou axiomy platné, budeme tedy muset sestrojit protipříklad. Zadefinujme již nyní fuzzy rámec, který bude mít všechny požadované vlastnosti a který bude při vhodném ohodnocení protipříkladem:

$F = \langle W, r, \mathrm{opt} \rangle$
$W = \{a, b\}$,
$r(a,a) = r(b,b) = 1$,
$r(a,b) = r(b,a) = 0.75$,
$\mathrm{opt}(a) = 1$, $\mathrm{opt}(b) = 0$

Zaměřme se tedy na jednotlivé axiomy B3–B7:

B3 má následující tvar a sémantickou interpretaci:

$$\Diamond_n Q$$
$$\sup_v (r^n(w,v) * \mathrm{opt}(v)) = 1$$

Chceme vyšetřit, zda tato rovnost platí v třídě opt-sériových fuzzy rámců. V nich platí podmínka $(\forall w)(\exists v)\ (r(w,v) * \mathrm{opt}(v)) = 1$, to znamená $r(w,v) = 1$ (tedy i $r^n(w,v) = 1$) a $\mathrm{opt}(v) = 1$. Shora uvedená rovnost tedy v opt-sériových fuzzy rámcích platí.

Jak jsme již řekli u dvouhodnotových systémů, v opt-sériových rámcích vede z každého světa relace do nějakého deonticky dokonalého světa, kde jsou splněny všechny příkazy. Taková podmínka je ve fuzzy logikách příliš striktní, což ji diskvalifikuje narozdíl od dvouhodnotové logiky, kde je žádoucí.

B4 zní v modální fuzzy logice a v její sémantické interpretaci takto:

$$\begin{array}{rcl} \Box_n A & \to & \Box_m \Box_n A \\ \inf\limits_u [r^n(w,u) \Rightarrow e_u(A)] & \leq & \inf\limits_v [r^m(w,v) \Rightarrow \inf\limits_u (r^n(v,u) \Rightarrow e_u(A))] \end{array}$$

Chceme ověřit, že axiom platí v třídě tranzitivních fuzzy rámců.

$$\begin{array}{rcl} r(w,v) * r(v,u) & \leq & r(w,u) \\ r^n(w,v) * r^n(v,u) & \leq & r^n(w,u) \\ r^m(w,v) & \leq & r^n(w,v) \\ r^m(w,v) * r^n(v,u) & \leq & r^n(w,u) \\ r^n(w,u) \Rightarrow e_u(A) & \leq & (r^m(w,v) * r^n(v,u)) \Rightarrow e_u(A) \\ \inf\limits_{u'} (r^n(w,u') \Rightarrow e_{u'}(A)) & \leq & r^n(w,u) \Rightarrow e_u(A) \\ \inf\limits_{u'} (r^n(w,u') \Rightarrow e_{u'}(A)) & \leq & (r^m(w,v) * r^n(v,u)) \Rightarrow e_u(A) \\ \inf\limits_{u'} (r^n(w,u') \Rightarrow e_{u'}(A)) & \leq & r^m(w,v) \Rightarrow (r^n(v,u) \Rightarrow e_u(A)) \end{array}$$

První nerovnost je podmínka tranzitivní relace, druhá z ní plyne díky sémantické interpretaci teorému (BL7), třetí nerovnost platí pro $m \geq n$. Pátá nerovnost plyne z předchozího pomocí sémantické interpretace axiomu BL1. Poslední nerovnost je odvozena z předchozí pomocí sémantické interpretace axiomu BL5b a platí (za podmínky $m \geq n$) pro všechny světy v, u, platí tedy i pro jejich infima.

Pro případ $m < n$ ukažme protipříklad. Ve fuzzy rámci F, který je tranzitivní, ohodnotíme atomickou formuli A tak, že $e_a(A) = 1,\ e_b(A) = 0.5$. Pak pro $m = 1, n = 2$ není „axiom" ve světě a splněn:

pravá strana: $\min\ (r^2(a,a) \Rightarrow e_a(A), r^2(a,b) \Rightarrow e_b(A)) = 1$
levá strana: $\min\ (r(a,a) \Rightarrow \min(r^2(a,a) \Rightarrow e_a(A), r^2(a,b) \Rightarrow e_b(A)),$
$r(a,b) \Rightarrow \min(r^2(b,a) \Rightarrow e_a(A), r^2(b,b) \Rightarrow e_b(A))) =$
$= \min\ (1 \Rightarrow \min(1,1), 0.75 \Rightarrow \min(1, 0.5)) = 0.75$

zatímco pro $m \geq 2$ by již pravá strana byla rovna 1.

B5 má v modální fuzzy logice a ve fuzzy sémantice následující podobu:

$$\begin{array}{rcl} \Diamond_m \Box_n A & \to & \Box_n A \\ \sup\limits_v (r^m(w,v) * \inf\limits_{v'} (r^n(v,v') \Rightarrow e_{v'}(A))) & \leq & \inf\limits_u (r^n(w,u) \Rightarrow e_u(A)) \end{array}$$

Chceme vyšetřit, zda je axiom korektní vůči třídě euklidovských fuzzy rámců.

$$
\begin{array}{rcl}
r(w,v) * r(w,u) & \leq & r(v,u) \\
r^n(w,v) * r^n(w,u) & \leq & r^n(v,u) \\
r^m(w,v) & \leq & r^n(w,v) \\
r^m(w,v) * r^n(w,u) & \leq & r^n(v,u) \\
r^n(v,u) \Rightarrow e_u(A) & \leq & (r^m(w,v) * r^n(w,u)) \Rightarrow e_u(A) \\
\inf_{u'}(r^n(v,u') \Rightarrow e_{u'}(A)) & \leq & r^n(v,u) \Rightarrow e_u(A) \\
\inf_{u'}(r^n(v,u') \Rightarrow e_{u'}(A)) & \leq & (r^m(w,v) * r^n(w,u)) \Rightarrow e_u(A) \\
\inf_{u'}(r^n(v,u') \Rightarrow e_{u'}(A)) & \leq & r^m(w,v) \Rightarrow (r^n(w,u) \Rightarrow e_u(A)) \\
r^m(w,v) * \inf_{u'}(r^n(v,u') \Rightarrow e_{u'}(A)) & \leq & r^n(w,u) \Rightarrow e_u(A)
\end{array}
$$

První nerovnost je podmínka pro euklidovské relace, třetí platí jen pro $m \geq n$. Poslední vyplývá z předchozí z definice rezidua (případně též ze sémantické interpretace axiomu BL5a) a platí (za podmínky $m \geq n$) pro všechny v, u. Proto platí i pro supremum přes v a infimum přes u.

Pro případ $m < n$ ukažme protipříklad. Ve fuzzy rámci F ohodnotíme atomickou formuli A přesně opačně než u B4: $e_a(A) = 0.5, e_b(A) = 1$. Rámec je euklidovský, přesto pro $m = 1, n = 2$ není „axiom“ ve světě a splněn:

$$
\begin{array}{ll}
\text{pravá strana:} & \max\ (r(a,a) * \min(r^2(a,a) \Rightarrow e_a(A), r^2(a,b) \Rightarrow e_b(A)), \\
& \qquad r(a,b) * \min(r^2(b,a) \Rightarrow e_a(A), r^2(b,b) \Rightarrow e_b(A))) = \\
& = \max\ (1 * \min(0.5, 1), 0.75 * \min(1,1)) = 0.75 \\
\text{levá strana:} & \min\ (r^2(a,a) \Rightarrow e_a(A), r^2(a,b) \Rightarrow e_b(A)) = 0.5
\end{array}
$$

zatímco pro $m \geq 2$ by již levá strana byla rovna 0.5.

B6 zní ve fuzzy logice a její sémantice takto:

$$
\begin{array}{rcl}
\Box_n A & \rightarrow & A \\
\inf_{v}(r^n(w,v) \Rightarrow e_v(A)) & \leq & e_w(A)
\end{array}
$$

Chceme ověřit, zda axiom platí v reflexivních fuzzy rámcích.

$$
\begin{array}{rcl}
r(w,w) & = & 1 \\
1^n \Rightarrow e_w(A) & \leq & e_w(A) \\
r^n(w,w) \Rightarrow e_w(A) & \leq & e_w(A) \\
\inf_{v}(r^n(w,v) \Rightarrow e_v(A)) & \leq & r^n(w,w) \Rightarrow e_w(A) \\
\inf_{v}(r^n(w,v) \Rightarrow e_v(A)) & \leq & e_w(A)
\end{array}
$$

První vztah je podmínka reflexivity, druhý je sémantická interpretace teorému (BL20).

B7 má následující tvar a sémantickou interpretaci:

$$\begin{array}{rcl} \Diamond_m \Box_n A & \rightarrow & A \\ \sup_v (r^m(w,v) * \inf_u (r^n(v,u) \Rightarrow e_u(A))) & \leq & e_w(A) \end{array}$$

Vyšetříme, zda je axiom korektní vůči třídě symetrických fuzzy rámců.

$$\begin{array}{rcl} r^n(w,v) * (r^n(w,v) \Rightarrow e_w(A)) & \leq & e_w(A) \\ r(w,v) & = & r(v,w) \\ r^n(w,v) * (r^n(v,w) \Rightarrow e_w(A)) & = & r^n(w,v) * (r^n(w,v) \Rightarrow e_w(A)) \\ r^m(w,v) & \leq & r^n(w,v) \\ r^m(w,v) * (r^n(v,w) \Rightarrow e_w(A)) & \leq & r^n(w,v) * (r^n(v,w) \Rightarrow e_w(A)) \\ r^m(w,v) * (r^n(v,w) \Rightarrow e_w(A)) & \leq & e_w(A) \\ r^m(w,v) * \inf_u (r^n(v,u) \Rightarrow e_u(A)) & \leq & e_w(A) \end{array}$$

První nerovnost je sémantickou interpretací teorému (BL4), druhá je podmínka symetričnosti fuzzy relace, čtvrtá nerovnost platí jen pro $m \geq n$. Poslední nerovnost platí (za podmínky $m \geq n$) pro všechny světy v, platí tedy i pro jejich supremum.

Pro případ $m < n$ sestrojíme protipříklad ve fuzzy rámci F s ohodnocením $e_a(A) = 0$, $e_b(A) = 1$. Rámec je symetrický, ale pro $m = 1, n = 2$ není ,,axiom" ve světě a splněn:

pravá strana: $\max\ (r(a,a) * \min(r^2(a,a) \Rightarrow e_a(A), r^2(a,b) \Rightarrow e_b(A)),$
$r(a,b) * \min(r^2(b,a) \Rightarrow e_a(A), r^2(b,b) \Rightarrow e_b(A))) =$
$= \max\ (1 * \min(0,1), 0.75 * \min(0.5,1)) = 0.25$

levá strana: $e_a(A) = 0$

zatímco pro $m \geq 2$ by pravá strana byla rovna 0.

Shrňme si tedy, jak vypadají axiomy fuzzy alethických logik a ve kterých fuzzy rámcích platí:

(B0)	všechny 1-tautologie logiky Ł	všechny fuzzy rámce
(B1)	$\Diamond_n A \leftrightarrow \neg\Box_n \neg A$	všechny fuzzy rámce
(B2)	$\Box_n(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box_m A \rightarrow \Box_{m+n} B)$	všechny fuzzy rámce
(B3)	$\Diamond_n Q$	opt-sériové fuzzy rámce $(\forall w)(\exists v)\ r(w,v) * \mathrm{opt}(v) = 1$
(B4)	$\Box_n A \rightarrow \Box_m \Box_n A, m \geq n$	tranzitivní fuzzy rámce $(\forall w,v,v')\ r(w,v) * r(v,v') \leq r(w,v')$
(B5)	$\Diamond_m \Box_n A \rightarrow \Box_n A, m \geq n$	euklidovské fuzzy rámce $(\forall w,v,v')\ r(w,v) * r(w,v') \leq r(v,v')$
(B6)	$\Box_n A \rightarrow A$	reflexivní fuzzy rámce $(\forall w)\ r(w,w) = 1$
(B7)	$\Diamond_m \Box_n A \rightarrow A, m \geq n$	symetrické fuzzy rámce $(\forall w,v)\ r(w,v) = r(v,w)$

Odvozovací pravidla jsou MP a $\Box_n$-Nec.

Věta. Axiomy B4 a B7 jsou odvoditelné z axiomů B5 a B6.

Důkaz.

Axiom B7 je přímo odvoditelný z B5 a B6 pomocí axiomu BL1 a dvojího použití MP.

Pro axiom B4 rekonstruujeme důkaz z první kapitoly v logice Ł. Buď $B = \Box_n A$.

1.	$\Box_n \neg B \to \neg B$	B6
2.	$B \to \neg \Box_n \neg B$	1, (BL18)
3.	$B \to \Diamond_n B$	2, B1
4.	$\Diamond_m \Box_n \neg B \to \Box_n \neg B$	B5, $m \geq n$
5.	$\neg \Box_m \neg \Box_n \neg B \to \Box_n \neg B$	4, B1
6.	$\neg \Box_m \Diamond_n B \to \Box_n \neg B$	5, B1
7.	$\neg \Box_m \Diamond_n B \to \neg\neg \Box_n \neg B$	6, (BL17)
8.	$\neg \Box_m \Diamond_n B \to \neg \Diamond_n B$	7, B1
9.	$\Diamond_n B \to \Box_m \Diamond_n B$	8, Ł3
10.	$B \to \Box_m \Diamond_n B$	3, 9, BL1
11.	$\Box_n A \to \Box_m \Diamond_n \Box_n A$	10
12.	$\Diamond_n \Box_n A \to \Box_n A$	B5
13.	$\Box_0(\Diamond_n \Box_n A \to \Box_n A)$	12, $\Box_0$-Nec
14.	$\Box_m \Diamond_n \Box_n A \to \Box_m \Box_n A$	13, B2
15.	$\Box_n A \to \Box_m \Box_n A$	11, 14, BL1

Důsledek (Věta o korektnosti). Alethické systémy jsou korektní vůči následujícím třídám fuzzy rámců:

$\mathbf{K}_Q$**(Ł)**	B0–B2	všechny fuzzy rámce
$\mathbf{K}_Q^+$**(Ł)**	B0–B2, B3	opt-sériové fuzzy rámce
$\mathbf{M}_Q$**(Ł)**	B0–B2, B6	reflexivní fuzzy rámce
$\mathbf{M}_Q^+$**(Ł)**	B0–B2, B3, B6	reflexivní a opt-sériové fuzzy rámce
$\mathbf{S4}_Q$**(Ł)**	B0–B2, B4, B6	reflexivní a tranzitivní fuzzy rámce
$\mathbf{S4}_Q^+$**(Ł)**	B0–B2, B3, B4, B6	reflexivní, tranzitivní a opt-sériové fuzzy rámce
$\mathbf{B}_Q$**(Ł)**	B0–B2, B6, B7	reflexivní a symetrické fuzzy rámce
$\mathbf{B}_Q^+$**(Ł)**	B0–B2, B3, B6, B7	reflexivní, symetrické a opt-sériové fuzzy rámce
$\mathbf{S5}_Q$**(Ł)**	B0–B2, B5, B6	reflexivní, euklidovské (a tedy i tranzitivní a symetrické) fuzzy rámce
$\mathbf{S5}_Q^+$**(Ł)**	B0–B2, B3, B5, B6	reflexivní, euklidovské (a tedy i tranzitivní a symetrické) a opt-sériové fuzzy rámce

Na první pohled tu není příliš mnoho rozdílností od dvouhodnotové logiky, v podstatě jen ono omezení $m \geq n$ u některých axiomů. Je třeba si ale uvědomit, že systém $\mathbf{S5}_Q$ se již nerovná modální logice S5, jejíž rámce mají relaci dosažitelnosti rovnu $W \times W$. Systém $\mathbf{S5}_Q$ totiž charakterizuje třídu rámců, které jsou tranzitivní, reflexivní, euklidovské a symetrické, ale ve smyslu fuzzy logiky. Nejsou tedy vyloučeny rámce, v nichž $r(w, v)$ pro nějaké světy w, v není rovna jedné, ale je menší – pokud jsou ovšem splněny podmínky tranzitivity, reflexivity atd.

4.2 Fuzzifikace deontických systémů

Teď se přesuneme k deontickým systémům a jejich axiomům. Jejich podoba ve fuzzy modální logice je následující:

(A0) všechny 1-tautologie logiky Ł
(A1) $P_n A \leftrightarrow \neg O_n \neg A$
(A2) $O_n(A \to B) \to (O_m A \to O_{m+n} B)$
(A3) $O_n A \to P_n A$
(A4) $O_n A \to O_m O_n A$
(A5) $P_m O_n A \to O_n A$
(A6) $O_m(O_n A \to A)$
(A7) $O_k(P_m O_n A \to A)$

Věta. Axiomy deontických systémů jsou bezesporné.

Důkaz. Provedeme stejnou úvahu jako u alethických systémů. Překlad nechá všechny atomické formule nezměněné a ,,vymaže“ modality O a P. Axiomy i odvozovací pravidla budou přeloženy na stejné formule resp. pravidla jako u alethických systémů, jen z axiomu A3 se stane další formule $A \to A$. □

Při zkoumání korektnosti budeme mít část práce ušetřenu, protože axiomy A4, A5 jsou stejné jako jejich alethické protějšky – a i operátory jsou definovány stejně, takže bychom jen zopakovali, co jsme dokázali v předchozí kapitole.

I zde máme u některých axiomů více různých indexů u modalit, takže opět budeme potřebovat omezit platnost axiomu na určitý vztah mezi indexy. Pro ostatní případy bude třeba ukázat protipříklad. Sestrojíme tedy opět fuzzy rámec, který bude mít požadované vlastnosti, tedy bude téměř reflexivní a téměř symetrický, a ve kterém vhodným ohodnocením dojdeme k protipříkladu:

$G = \langle W, r \rangle$
$W = \{a, b\}$,
$r(a,a) = r(b,b) = r(a,b) = 0.75$,
$r(b,a) = 0.5$,

A3 má následující podobu ve fuzzy modální logice a ve fuzzy sémantice. Chceme zjistit, zda je korektní vůči třídě sériových fuzzy rámců.

$$\begin{array}{rcl} O_n A & \to & P_n A \\ \inf_v (r^n(w,v) \Rightarrow e_v(A)) & \leq & \sup_u (r^n(w,u) * e_u(A)) \end{array}$$

Pro každý svět v platí ze sémantické interpretace axiomu BL2 a teorému (BL1) tato nerovnost

$$r^n(w,v) \Rightarrow e_v(A) \;\geq\; e_v(A) \;\geq\; r(w,v) * e_v(A)$$

Pro v^* takové, že $r(w,v^*) = 1$, ovšem platí rovnost:

$$\begin{array}{rcl} r^n(w,v^*) \Rightarrow e_{v^*}(A) & = & e_{v^*}(A) \;=\; r^n(w,v^*) * e_{v^*}(A) \\ \inf_v (r^n(w,v) \Rightarrow e_v(A)) & \leq & r^n(w,v^*) \Rightarrow e_{v^*}(A) \\ r^n(w,v^*) * e_{v^*}(A) & \leq & \sup_v (r^n(w,v) * e_v(A)) \end{array}$$

Z podmínky sériovosti, tedy v každém sériovém fuzzy rámci, takové v^* existuje pro každé w. Axiom tedy platí.

Také u axiomu A3 jsme v dvouhodnotových deontických logikách argumentovali, že je spíše žádoucí, aby existoval pro každý svět nějaký „reflexní svět“ (svět, s nímž je spojen relací). Ve fuzzy deontických logikách je tato podmínka, tak jak je formalizována, příliš striktní, protože my jen nestojíme o světy, z nichž nevedou žádné relace (ve stupni větším než 0). Tento axiom a podmínku sériovosti tedy spíše odmítneme.

A6 zní ve fuzzy modální logice a v její sémantice následovně:

$$O_m(O_nA \to A)$$
$$\inf_u(r^m(w,u) \Rightarrow [\inf_v(r^n(u,v) \Rightarrow e_v(A)) \Rightarrow e_u(A)]) = 1$$

Ověříme, zda tento axiom platí ve třídě téměř reflexivních fuzzy rámců.

$$\begin{array}{rcl} r^m(w,u) & \leq & r^n(w,u) \\ r(w,u) & \leq & r(u,u) \\ r^n(w,u) & \leq & r^n(u,u) \\ r^n(u,u) & \leq & (r^n(u,u) \Rightarrow e_u(A)) \Rightarrow e_u(A) \\ (r^n(u,u) \Rightarrow e_u(A)) \Rightarrow e_u(A) & \leq & \inf\limits_v((r^n(u,v) \Rightarrow e_v(A)) \Rightarrow e_u(A) \\ r^m(w,u) & \leq & \inf\limits_v((r^n(u,v) \Rightarrow e_v(A)) \Rightarrow e_u(A) \end{array}$$

První nerovnost platí pro $m \geq n$, druhá plyne z naší podmínky téměř reflexivní relace a čtvrtá je sémantická interpretace teorému (BL4). Poslední nerovnost platí (za podmínky $m \geq n$) pro všechna u, tedy i pro jejich infimum.

Pro případ $m < n$ ukážeme protipříklad na modelu fuzzy rámce G s ohodnocením $e_a(A) = 1, e_b(A) = 0$, buď $m = 1, n = 2$:

$$\begin{array}{l} \min\,(r(a,a) \Rightarrow (\min\,(r^2(a,a) \Rightarrow e_a(A), r^2(a,b) \Rightarrow e_b(A)) \Rightarrow e_a(A)), \\ \qquad r(a,b) \Rightarrow (\min\,(r^2(b,a) \Rightarrow e_a(A), r^2(b,b) \Rightarrow e_b(A)) \Rightarrow e_b(A))) = \\ = \min\,(0.75 \Rightarrow (\min\,(1, 0.5) \Rightarrow 1), 0.75 \Rightarrow (\min\,(1, 0.5) \Rightarrow 0)) = 0.75 < 1 \end{array}$$

zatímco pro $m \geq 2$ již bude výsledek roven jedné.

A7 má následující znění ve fuzzy modální logice a ve fuzzy rámcích:

$$O_k(P_mO_n \to A)$$
$$\inf_u(r^k(w,u) \Rightarrow [\sup_v[r^m(u,v) * \inf_{v'}(r^n(v,v') \Rightarrow e_{v'}(A))] \Rightarrow e_u(A)]) = 1$$

Tento axiom má charakterizovat téměř symetrické fuzzy rámce.

$$\begin{array}{rcl} r^k(w,u) * r^m(u,v) & \leq & r^n(w,u) * r^n(u,v) \\ r(w,u) * r(u,v) & \leq & r(v,u) \\ r^n(w,u) * r^n(u,v) & \leq & r^n(v,u) \\ r^n(v,u) * (r^n(v,u) \Rightarrow e_u(A)) & \leq & e_u(A) \\ r^k(w,u) * r^m(u,v) * (r^n(v,u) \Rightarrow e_u(A)) & \leq & e_u(A) \\ r^k(w,u) * (r^m(u,v) * \inf\limits_{v'}(r^n(v,v') \Rightarrow e_{v'}(A))) & \leq & e_u(A) \end{array}$$

Platnost první nerovnost můžeme zaručit jen pro $k \geq n, m \geq n$, druhá je podmínka téměř symetrické relace, čtvrtá plyne ze sémantické interpretace teorému (BL4).

$$\begin{aligned} r^k(w,u) &\leq (r^m(u,v) * \inf_{v'}(r^n(v,v') \Rightarrow e_{v'}(A))) \Rightarrow e_u(A) \\ r^k(w,u) &\leq \sup_{v}(r^m(u,v) * \inf_{v'}(r^n(v,v') \Rightarrow e_{v'}(A))) \Rightarrow e_u(A) \end{aligned}$$

První nerovnost plyne z definice rezidua a platí pro všechna v, proto z ní můžeme odvodit druhou nerovnost. A protože ta platí pro všechna u, platí i náš axiom (za podmínky $k \geq n, m \geq n$).

Pro případ $k < n, m < n$ použijeme opět fuzzy rámec G, ohodnocení $e_a(A) = 0, e_b(A) = 1$ a ukážeme, že pro $k = 1, m = 1, n = 2$ není „axiom“ ve světě a splněn:

$$\begin{aligned} &\min\ (r(a,a) \Rightarrow (\max\ (r(a,a) * \min(r^2(a,a) \Rightarrow e_a(A), r^2(a,b) \Rightarrow e_b(A)), \\ &\qquad\qquad r(a,b) * \min(r^2(b,a) \Rightarrow e_a(A), r^2(b,b) \Rightarrow e_b(A))) \Rightarrow e_a(A)), \\ &\quad r(a,b) \Rightarrow (\max\ (r(b,a) * \min(r^2(a,a) \Rightarrow e_a(A), r^2(a,b) \Rightarrow e_b(A)), \\ &\qquad\qquad r(b,b) * \min(r^2(b,a) \Rightarrow e_a(A), r^2(b,b) \Rightarrow e_b(A))) \Rightarrow e_b(A))) = \\ &= \min\ (0.75 \Rightarrow (\max\ (0.75 * \min(0.5,1), 0.75 * \min(1,1)) \Rightarrow 0), \\ &\quad 0.75 \Rightarrow (\max\ (0.5 * \min(0.5,1), 0.75 * \min(1,1)) \Rightarrow 1)) = 0.5 < 1 \end{aligned}$$

Při $k = 1, m = 2$ nebo $k = 2, m = 1$ bude výsledek 0.75 a v ostatních případech ($m \geq 3$ nebo $k \geq 3$ případně $k = 2, m = 2$) už to bude 1.

Shrneme-li si teď, jak vypadají axiomy deontických systémů ve fuzzy logice a jakým vlastnostem fuzzy rámců odpovídají, vyjde nám tato tabulka:

(A0)	všechny 1-tautologie logiky Ł	všechny fuzzy rámce
(A1)	$P_n A \leftrightarrow \neg O_n \neg A$	všechny fuzzy rámce
(A2)	$O_n(A \to B) \to (O_m A \to O_{m+n} B)$	všechny fuzzy rámce
(A3)	$O_n A \to P_n A$	sériové fuzzy rámce $(\forall w)(\exists v)\ r(w,v) = 1$
(A4)	$O_n A \to O_m O_n A, m \geq n$	tranzitivní fuzzy rámce $(\forall w,v,v')\ r(w,v) * r(v,v') \leq r(w,v')$
(A5)	$P_m O_n A \to O_n A, m \geq n$	euklidovské fuzzy rámce $(\forall w,v,v')\ r(w,v) * r(w,v') \leq r(v,v')$
(A6)	$O_m(O_n A \to A)$	téměř reflexivní fuzzy rámce $(\forall w,v)\ r(w,v) \leq r(v,v)$
(A7)	$O_k(P_m O_n A \to A), k \geq n, m \geq n$	téměř symetrické fuzzy rámce $(\forall w,v,v')\ r(w,v) * r(v,v') \leq r(v',v)$

Odvozovací pravidla jsou MP a O_n-Nec.

Věta. Axiomy A6, A7 nejsou odvoditelné z ostatních.

Důkaz. Ukážeme protipříklad. Mějme tříprvkovou množinu $W = \{a,b,c\}$ a relaci r takovou, že

$r(a,b) = 0.75$
$r(b,c) = 0.75$
$r(c,b) = 0.25$
a pro ostatní dvojice x,y je $r(x,y) = 0.5$.

Lze ukázat, že tento fuzzy rámec je tranzitivní a euklidovský – neplatí v něm pouze dvě nerovnosti typu $r{*}r \leq r$ (což je schematická podoba obou těchto vlastností), totiž $r(a,b) * r(b,c) > r(c,b)$ a $r(b,c) * r(a,b) > r(c,b)$, a ty nejsou v tranzitivních a euklidovských fuzzy rámcích vyloučeny. Tento rámec ale není ani téměř reflexivní, ani téměř symetrický:

$$r(a,b) > r(b,b)$$
$$r(a,b) * r(b,c) > r(c,b).$$

Je to proto, že v tranzitivních a euklidovských fuzzy rámcích platí pouze

$$r^2(x,y) * r(y,z) \leq r(z,y)$$
$$r^2(x,y) \leq r(y,y).$$

□

Poznámka: Tentokrát jsme museli použít na protipříklad fuzzy rámec o třech prvcích. Dvouprvkový fuzzy rámec je totiž téměř symetrický vždy, když je euklidovský. Z množiny 6 nerovností, které musí platit, aby byl fuzzy rámec téměř symetrický, jich v dvouprvkovém rámci naprostá většina platí triviálně (jsou instancí nerovnosti $a{*}b \leq a$), výjimkou jsou pouze dvě nerovnosti: $r(a,a) * r(a,b) \leq r(b,a)$ a $r(b,b) * r(b,a) \leq r(a,b)$ a ty platí ve všech euklidovských fuzzy rámcích.

Důsledek (Věta o korektnosti). Deontické systémy jsou korektní vůči následujícím třídám fuzzy rámců:

OK(Ł)	A0–A2	všechny fuzzy rámce
OK$^+$(Ł)	A0–A2, A3	sériové fuzzy rámce
OM(Ł)	A0–A2, A6	téměř reflexivní fuzzy rámce
OM$^+$(Ł)	A0–A2, A3, A6	téměř reflexivní a sériové fuzzy rámce
OS4(Ł)	A0–A2, A4, A6	téměř reflexivní a tranzitivní fuzzy rámce
OS4$^+$(Ł)	A0–A2, A3, A4, A6	téměř reflexivní, tranzitivní a sériové fuzzy rámce
OB(Ł)	A0–A2, A6, A7	téměř reflexivní a téměř symetrické fuzzy rámce
OB$^+$(Ł)	A0–A2, A3, A6, A7	téměř reflexivní, téměř symetrické a sériové fuzzy rámce
OS5(Ł)	A0–A2, A4, A5	tranzitivní a euklidovské fuzzy rámce
OS5$^+$(Ł)	A0–A2, A3, A4, A5	tranzitivní, euklidovské a sériové fuzzy rámce

5 Překlad mezi alethickými a deontickými systémy

V první kapitole jsme se zmínili, že v dvouhodnotové deontické logice existuje překlad ϕ, v němž jsou odpovídající si alethické a deontické systémy ekvivalentní. Konkrétně pro dvojice z následující tabulky platí $\vdash_{c(\mathcal{K})} A$ iff $\vdash_{\mathcal{K}} \phi A$.

Alethický systém $\mathcal{K}$	Deontický systém $c(\mathcal{K})$
$\mathbf{K}_Q$	**OK**
$\mathbf{M}_Q$	**OM**
$\mathbf{S4}_Q$	**OS4**
$\mathbf{B}_Q$	**OB**
$\mathbf{S5}_Q$	**OS5**
$\mathbf{K}_Q^+$	$\mathbf{OK}^+$
$\mathbf{M}_Q^+$	$\mathbf{OM}^+$
$\mathbf{S4}_Q^+$	$\mathbf{OS4}^+$
$\mathbf{B}_Q^+$	$\mathbf{OB}^+$
$\mathbf{S5}_Q^+$	$\mathbf{OS5}^+$

Důkaz tohoto tvrzení lze nalézt v [Åqvist 1984] a je veden tak, že implikace zleva doprava se dokazuje syntakticky: dokáže se, že překlad axiomů deontických systémů je dokazatelný v příslušných teoriích a že odvozovací pravidla zachovávají dokazatelnost. Tento směr můžeme prozkoumat i v našich fuzzy systémech.

Opačný směr – zprava doleva – je dokázán sémanticky kontrapozicí: pokud A není dokazatelné v $c(\mathcal{K})$, pak existuje protipříklad v modelu $c(\mathcal{K})$ (díky úplnosti $c(\mathcal{K})$), k němu lze sestrojit model $\mathcal{K}$, v němž existuje protipříklad ϕA, a pak (z korektnosti $\mathcal{K}$) není ϕA dokazatelné v $\mathcal{K}$. Jádrem důkazu je pak sestrojování modelu $\mathcal{K}$ odpovídajícího příslušnému modelu $c(\mathcal{K})$.

Ve fuzzy modální logice ovšem nemáme dokázánu úplnost, takže směr zprava doleva nemůžeme dokázat tímto způsobem. Otázku, zda věta v tomto směru také platí, tedy necháme otevřenou. Můžeme tak učinit s čistým svědomím i proto, že směr zleva doprava je ten zajímavější. Máme-li totiž výrok v deontickém jazyce, tedy relativně blízký přirozenému jazyku příkazů a zákazů, zajímá nás, zda je dokazatelný v alethické logice, tedy ve standardní modální logice, která je dobře zmapovaná. Na druhou stranu nás málokdy bude zajímat, zda výrok vyjádřený v alethické modální logice platí i v deontické logice – tedy směr zprava doleva.

Podívejme se tedy na směr zleva doprava podrobně. Zmíněný překlad ϕ deontické logiky do alethické jsme v jeho hlavní části již zmínili, přesně zní:

$\phi(p) = p$
ϕ s výrokovými spojkami komutuje
$\phi(O_n A) = \Box_n(Q^n \to \phi A)$
$\phi(P_n A) = \Diamond_n(Q^n \,\&\, \phi A)$

Učiníme ještě jedno omezení – vynecháme systémy označené indexem $^+$, nebudeme tedy brát v úvahu dvojici axiomů A3/B3. Důvodem je to, že jsme již výše zdůvodnili, že ve fuzzy deontických logikách tyto axiomy nebudeme uvažovat, protože jsou příliš striktní.

Věta (o překladu). Buď $\mathcal{K}$ některý z pěti alethických systémů $\mathbf{K}_Q \ldots \mathbf{S5}_Q$ a buď $c(\mathcal{K})$ jeho korelát z deontických systémů podle předchozí tabulky. Pak pro každou sentenci A alethického jazyka platí: jestliže $\vdash_{c(\mathcal{K})} A$, pak $\vdash_{\mathcal{K}} \phi A$.

Důkaz indukcí podle důkazu formule A.

1) A je některý z axiomů A0–A2, A4–A7 (nebudeme zohledňovat, o který systém z **OK** až **OS5** jde, ale budeme si všímat, které axiomy z B0–B2, B4–B7 využijeme)

A0: překlad nezmění platnost 1-tautologií Ł, všechny budou patřit mezi B0

A1:

$$\begin{array}{rcl} \phi(P_n A & \leftrightarrow & \neg O_n \neg A) \\ \Diamond_n(Q^n \& \phi A) & \leftrightarrow & \neg \Box_n(Q^n \to \neg \phi A) \end{array}$$

Formule plyne z instance axiomu B1

$$\Diamond_n(Q^n \& \phi A) \leftrightarrow \neg \Box_n \neg (Q^n \& \phi A)$$

protože z definice spojky $\neg$ platí

$$\neg(Q^n \& \phi A) \equiv ((Q^n \& \phi A) \to \overline{0}) \equiv (Q^n \to (\phi A \to \overline{0})) \equiv (Q^n \to \neg \phi A)$$

A2:

$$\begin{array}{rcl} \phi(O_n(A \to B) & \to & (O_m A \to O_{m+n} B)) \\ \Box_n(Q^n \to (\phi A \to \phi B)) & \to & (\Box_m(Q^m \to \phi A) \to \Box_{m+n}(Q^{n+m} \to \phi B)) \end{array}$$

Tato formule je dokazatelná díky axiomu BL1 z následujících dvou formulí:

$$\begin{array}{rcl} \Box_n(Q^n \to (\phi A \to \phi B)) & \to & \Box_n((Q^m \to \phi A) \to (Q^{n+m} \to \phi B)) \\ \Box_n((Q^m \to \phi A) \to (Q^{n+m} \to \phi B)) & \to & (\Box_m(Q^m \to \phi A) \to \Box_{m+n}(Q^{n+m} \to \phi B)) \end{array}$$

První implikace je instance axiomu B2, druhá plyne $(\Box_n \to \Box_n)$-necesitací z formule (2.2), která v logice BL platí. Právě snaha zajistit platnost axiomu A2 v logice s axiomem B2 je důvod, proč v definici překladu zdvojujeme výskyt indexů (jak u alethické modality, tak u Q). Příčinou je stále stejná formule (2.1) dokazatelná v G a nedokazatelná pro nekontraktivní konjunkci.

A4:

$$\begin{array}{rcl} \phi(O_n A & \to & O_m O_n A) \text{ pro } m \geq n \\ \Box_n(Q^n \to \phi A) & \to & \Box_m(Q^m \to \Box_n(Q^n \to \phi A)) \end{array}$$

Tato formule je dokazatelná díky axiomu BL1 z následujících dvou formulí:

$$\begin{array}{rcl} \Box_n(Q^n \to \phi A) & \to & \Box_m \Box_n(Q^n \to \phi A) \\ \Box_m \Box_n(Q^n \to \phi A) & \to & \Box_m(Q^m \to \Box_n(Q^n \to \phi A)) \end{array}$$

První z těchto formulí je instancí axiomu B4 (který platí pro $m \geq n$) a druhá vyplývá ($\Box_n \to \Box_n$)-necesitací z této instance teorému (BL1):

$$\Box_n(Q^n \to \phi A) \to (Q^m \to \Box_n(Q^n \to \phi A))$$

A5:

$$\begin{array}{rcl} \phi(P_m O_n A & \to & O_n A) \text{ pro } m \geq n \\ \Diamond_m(Q^m \& \Box_n(Q^n \to \phi A)) & \to & \Box_n(Q^n \to \phi A) \end{array}$$

Tato formule je dokazatelná díky axiomu BL1 a pravidlu modus ponens z následujících dvou formulí

$$\begin{array}{rcl} \Diamond_m(Q^m \& \Box_n(Q^n \to \phi A)) & \to & \Diamond_m \Box_n(Q^n \to \phi A) \\ \Diamond_m \Box_n(Q^n \to \phi A) & \to & \Box_n(Q^n \to \phi A) \end{array}$$

Druhá formule je instancí axiomu B5 (platí jen pro $m \geq n$). První je instancí formule dokazatelné z axiomu BL2; axiomu Ł3, teorémů (BL17), (Ł1) a MP; ($\Box_n \to \Box_n$)-Nec; opět axiomu Ł3, teorémů (BL17), (Ł1) a MP; B1:

$$\begin{array}{rcl} (A \& B) & \to & A \\ \neg A & \to & \neg(A \& B) \\ \Box_m \neg A & \to & \Box_m \neg(A \& B) \\ \neg\Box_m \neg(A \& B) & \to & \neg\Box_m \neg A \\ \Diamond_m(A \& B) & \to & \Diamond_m A \end{array}$$

A6:

$$\begin{array}{rcl} \phi(O_m(O_n A & \to & A)) \text{ pro } m \geq n \\ \Box_m(Q^m \to (\Box_n(Q^n \to \phi A) & \to & \phi A)) \end{array}$$

Tato formule je z teorému (BL2) ekvivalentní následující formuli

$$\Box_m(\Box_n(Q^n \to \phi A) \to (Q^m \to \phi A))$$

která je necesitovaným důsledkem dvojice formulí

$$\begin{array}{rcl} \Box_n(Q^n \to \phi A) & \to & (Q^n \to \phi A) \\ (Q^n \to \phi A) & \to & (Q^m \to \phi A) \end{array}$$

První implikace je instance axiomu B6 a druhá platí pro $m \geq n$.

A7:

$$\begin{array}{c} \phi(O_k(P_m O_n A \to A)) \text{ pro } k \geq n, m \geq n \\ \Box_k(Q^k \to (\Diamond_m(Q^m \& \Box_n(Q^n \to \phi A)) \to \phi A)) \\ \Box_k(\Diamond_m(Q^m \& \Box_n(Q^n \to \phi A)) \to (Q^k \to \phi A)) \end{array}$$

Poslední formule, ekvivalentní s předposlední z teorému (BL2), je necesitovaná formule dokazatelná díky opakované aplikaci axiomu BL1 a pravidla modus ponens z následujících tří formulí

$$\begin{aligned}\Diamond_m(Q^m \& \Box_n(Q^n \to \phi A)) &\to \Diamond_m \Box_n(Q^n \to \phi A)\\ \Diamond_m \Box_n(Q^n \to \phi A) &\to (Q^n \to \phi A)\\ (Q^n \to \phi A) &\to (Q^k \to \phi A)\end{aligned}$$

První je formule, kterou jsme dokázali u axiomu A5, druhá formule je instancí axiomu B7 (platného pro $m \geq n$) a třetí platí pro $k \geq n$.

2) A je odvozena z předchozích formulí pravidlem modus ponens nebo O_n-necesitace

MP: A je odvozena z předchozích formulí B a $B \to A$. Z indukčního předpokladu jsou ϕB a $\phi(B \to A)$ (a tedy i $\phi B \to \phi A$) dokazatelné a je tedy dokazatelné i ϕA.

O_n-Nec: $A = O_n B$ pro nějaké B, přičemž ϕB je dokazatelné. Z indukčního předpokladu $\vdash B$ plyne $\vdash Q^n \to B$ a $\Box_n$-necesitací dostaneme $\vdash \Box_n(Q^n \to B)$, což je ϕA.

Závěr

Tato práce přináší několik nových výsledků. Nejsem si vědoma, že by jinde byly důkladněji rozebrány axiomy slabších modálních logik se závěrem, že mezi indexy u modalit platí předvedené vztahy. Stejně tak je původní i dokázaná podoba věty o dedukci. Pokud jde konkrétně o deontické logiky, ukázali jsme, že některé výsledky, které jsou v dvouhodnotových logikách přirozené, při rozšíření na fuzzy logiky neplatí.

Tato práce rozhodně nemůže vyčerpat celé téma fuzzifikace deontických systémů, zvlášť když oba systémy, jak fuzzy logiky, tak deontická logika, jsou v jistém smyslu kontroverzní (nemalá část odborné obce jejich zkoumání a výsledky odmítá). Možností, kam toto téma dále rozvíjet, je mnoho.

Předně lze podobným způsobem vyšetřit fuzzifikaci dyadických logik, které mají své, intuitivně obhajitelné, místo vedle monadických systémů. [Åqvist 1984] je rozpracovává stejně podrobně. Pak lze samozřejmě porovnat dosažené výsledky s výsledky této práce.

Bylo by také vhodné ověřit, zda dosažené výsledky neplatí i ve slabších logikách. Axiomy a teorémy logiky Ł jsme používali často, v logice BL (ani MTL) tedy totéž dokázat nepůjde. Kandidátem je ale logika IMTL. Bylo by tedy třeba projít všechny použité teorémy BL a Ł a zkoumat, zda v jejich důkazu nebyl použit axiom BL4.

Dále je pochopitelně otevřená otázka úplnosti fuzzy modálních logik nad Ł vůči fuzzy rámcům. Je možné prozkoumat pavelkovskou úplnost vůči fuzzy rámcům nad standardní MV-algebrou, nebo vyčkat, zda se neobjeví důkaz úplnosti S5(Ł) (nebo i pro jinou fuzzy logiku – my jsme si Ł vybrali jakožto vhodný kompromis mezi obecností a dokazovacími schopnostmi), a ten pak přepracovat pro slabší modální logiky.

V neposlední řadě se nabízí možnost interpretovat deontické logiky v druhořádové fuzzy logice, rozpracované především Liborem Běhounkem a Petrem Cintulou (popsána například v [Běhounek 2004]). Pak by bylo také technicky možné uvažovat i fuzzy množinu možných světů a úplnost (nebo „neúplnost“) našich fuzzy deontických systémů vůči fuzzy rámcům by vyplynula jako vedlejší výsledek.

Příloha 1

Teorémy BL:

(BL1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

(BL2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))$

(BL3) $\varphi \to \varphi$

(BL4) $(\varphi \& (\varphi \to \psi)) \to \psi$

(BL5) $\varphi \to (\psi \to (\varphi \& \psi))$

(BL6) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \& \chi) \to (\psi \& \chi))$

(BL7) $((\varphi_1 \to \psi_1) \& (\varphi_2 \to \psi_2)) \to ((\varphi_1 \& \varphi_2) \to (\psi_1 \& \psi_2))$

(BL8) $(\varphi \& \psi) \& \chi \leftrightarrow \varphi \& (\psi \& \chi)$

(BL9) $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$
$(\varphi \wedge \psi) \to \psi$
$(\varphi \& \psi) \to (\varphi \wedge \psi)$

(BL10) $(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\varphi \wedge \psi))$

(BL11) $(\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi)$

(BL12) $((\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \chi)) \to (\varphi \to (\psi \wedge \chi))$
$((\varphi \to \psi) \& (\varphi \to \chi)) \to (\varphi \to (\psi \wedge \chi))$

(BL13) $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$
$\psi \to (\varphi \vee \psi)$
$(\varphi \vee \psi) \to (\psi \vee \varphi)$

(BL14) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \psi)$

(BL15) $(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$

(BL16) $((\varphi \to \chi) \vee (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \vee \psi) \to \chi)$
$((\varphi \to \chi) \& (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \vee \psi) \to \chi)$

(BL17) $\varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$
$\varphi \to \neg\neg\varphi$
$(\varphi \& \neg\varphi) \to \overline{0}$

(BL18) $(\varphi \to (\psi \& \neg\psi)) \to \neg\varphi$
$(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$
$(\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \neg\varphi)$

(BL19) $\overline{1}$

(BL20) $\varphi \to (\overline{1} \& \varphi)$
$(\overline{1} \to \varphi) \to \varphi$

(BL21) $(\varphi \wedge (\psi \wedge \chi)) \leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \wedge \chi)$

(BL22) $(\varphi \vee (\psi \vee \chi)) \leftrightarrow ((\varphi \vee \psi) \vee \chi)$

(BL23) $\varphi \rightarrow (\varphi \wedge (\varphi \vee \psi))$
$(\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)) \rightarrow \varphi$

(BL24) $\varphi \leftrightarrow \varphi$
$(\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\psi \leftrightarrow \varphi)$
$((\varphi \leftrightarrow \psi) \& (\psi \leftrightarrow \chi)) \rightarrow (\varphi \leftrightarrow \chi)$

(BL25) $(\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$
$(\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

(BL26) $(\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \& \chi) \leftrightarrow (\psi \& \chi))$

(BL27) $\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \chi) \leftrightarrow (\psi \rightarrow \chi))$

(BL28) $(\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow ((\chi \rightarrow \varphi) \leftrightarrow (\chi \rightarrow \psi))$

(BL29) $(\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$

(BL30) $\varphi \& (\psi \vee \chi) \leftrightarrow (\varphi \& \psi) \vee (\varphi \& \chi)$
$\varphi \& (\psi \wedge \chi) \leftrightarrow (\varphi \& \psi) \wedge (\varphi \& \psi)$

(BL31) $(\varphi \wedge (\psi \vee \chi)) \leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi))$
$(\varphi \vee (\psi \wedge \chi)) \leftrightarrow ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi))$

(BL32) $(\varphi \vee \psi) \& (\varphi \vee \psi) \rightarrow ((\varphi \& \varphi) \vee (\psi \& \psi))$
$(\varphi \wedge \psi) \& (\varphi \wedge \psi) \rightarrow ((\varphi \& \varphi) \wedge (\psi \& \psi))$

(BL33) $(\varphi \rightarrow \psi)^n \vee (\psi \rightarrow \varphi)^n$ pro každé n

(BL34) $(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \leftrightarrow \neg(\varphi \vee \psi)$

(BL35) $(\neg\varphi \vee \neg\psi) \leftrightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$

Teorémy Ł (nedokazatelné v BL):

(Ł1) $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$

(Ł2) $\neg(\varphi \& \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \veebar \neg\psi)$

(Ł3) $\neg(\varphi \veebar \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \& \neg\psi)$

(Ł4) $\psi \rightarrow (\varphi \veebar \psi)$

(Ł5) $(\varphi \veebar \psi) \rightarrow (\psi \veebar \varphi)$

(Ł6) $(\varphi \veebar (\psi \veebar \chi)) \leftrightarrow ((\varphi \veebar \psi) \veebar \chi)$

(Ł7) $(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\varphi \veebar \neg\psi) \& \psi$

(Ł8) $(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi \& \neg\psi) \veebar \psi$

(Ł9) $\varphi \veebar \neg\varphi$

(Ł10) $(\varphi \& \neg\psi) \veebar \psi \leftrightarrow \varphi \veebar (\psi \& \neg\varphi)$

(Ł11) $(\varphi \veebar \neg\psi) \& \psi \leftrightarrow \varphi \& (\psi \veebar \neg\varphi)$

(Ł12) $(\varphi \vee \varphi) \to \varphi$

(Ł13) $(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi) \to \chi))$

Teorémy BL$\forall$ (x není volná v χ):

(BL$\forall$1) $(\forall x)(\chi \to \varphi) \leftrightarrow (\chi \to (\forall x)\varphi)$

(BL$\forall$2) $(\forall x)(\varphi \to \chi) \leftrightarrow ((\exists x)\varphi \to \chi)$

(BL$\forall$3) $(\exists x)(\chi \to \varphi) \to (\chi \to (\exists x)\varphi)$

(BL$\forall$4) $(\exists x)(\varphi \to \chi) \to ((\forall x)\varphi \to \chi))$

(BL$\forall$5) $(\forall x)(\varphi \to \psi) \to ((\forall x)\varphi \to (\forall x)\psi)$

(BL$\forall$6) $(\forall x)(\varphi \to \psi) \to ((\exists x)\varphi \to (\exists x)\psi)$

(BL$\forall$7) $((\forall x)\varphi \& (\exists x)\psi) \to (\exists x)(\varphi \& \psi)$

(BL$\forall$8) $(\forall x)\varphi(x) \leftrightarrow (\forall y)\varphi(y)$
$(\exists x)\varphi(x) \leftrightarrow (\exists y)\varphi(y)$, je-li y substituovatelné za x ve φ

(BL$\forall$9) $(\exists x)(\varphi \& \chi) \leftrightarrow ((\exists x)\varphi \& \chi)$

(BL$\forall$10) $(\exists x)(\varphi \& \varphi) \leftrightarrow ((\exists x)\varphi \& (\exists x)\varphi)$

(BL$\forall$11) $(\exists x)\varphi \to \neg(\forall x)\neg\varphi$

(BL$\forall$12) $\neg(\exists x)\varphi \leftrightarrow (\forall x)\neg\varphi$

(BL$\forall$13) $(\exists x)(\chi \wedge \varphi) \leftrightarrow (\chi \wedge (\exists x)\varphi)$

(BL$\forall$14) $(\exists x)(\chi \vee \varphi) \leftrightarrow (\chi \vee (\exists x)\varphi)$

(BL$\forall$15) $(\forall x)(\chi \wedge \varphi) \leftrightarrow (\chi \wedge (\forall x)\varphi)$

(BL$\forall$16) $(\exists x)(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow ((\exists x)\varphi \vee (\exists x)\psi)$

(BL$\forall$17) $(\forall x)(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow ((\forall x)\varphi \wedge (\forall x)\psi)$

Literatura

[Åqvist 1984] Åqvist, Lennart: *Deontic Logic*. In Gabbay, D.; Guenthner, F. (eds.): Handbook of Philosophical Logic, Volume II. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1984 (reprint 2001), pp. 605–714.

[Běhounek 2004] Běhounek, Libor: *Fuzzification of Groenendijk-Stokhof propositional erotetic logic*. In Logique et Analyse 47 (2004), pp. 167–188.

[Cintula 2005] Cintula, Petr: *Short Note: On the Redundancy of Axiom (A3) in BL and MTL*. In Soft Computing 9 (2005), p. 942.

[Duc 1995] Duc, Ho Ngoc: *Semantical Investigations in the Logic of Actions and Norms*. Diplomová práce, Universität Leipzig, 1995.
ttp://www.informatik.uni-leipzig.de/∼duc/papers/mathesis.ps.gz

[Duc 2001] Duc, Ho Ngoc: *Resource-Bounded Reasoning about Knowledge*. Disertační práce, Universität Leipzig, 2001.
http://www.informatik.uni-leipzig.de/∼duc/papers/diss.pdf

[Esteva–Godo 2001] Esteva, Francesc; Godo, Lluís: *Monoidal t-norm based logic: towards a logic for left-continuous t-norms*. In Fuzzy Sets and Systems 124 (2001), pp. 271–288.

[Gounder–Esterline 1998] Gounder, Ramasamy S.; Esterline, Albert C.: *Fuzzy Versions of Epistemic and Deontic Logic*. NASA-URC98, Huntsville, AL., 1998.
http://www.ncat.edu/∼agents/Publications/GounderURC98.pdf

[Hájek 1998] Hájek, Petr: *Metamathematics of Fuzzy Logics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1998 (reprint 2001).

[Chang 1958] Chang, C. C.: *Algebraic analysis of many valued logics*. In Trans. Amer. Math. Soc., 88 (1958), pp. 467–490.

[Lehmke 2005] Stephan Lehmke: *Proof of dependent BL Axiom A2 found by the Simple Prover*. Nepublikované poznámky, 2005.

[Mironov 2005] Mironov, A. M.: *Fuzzy Modal Logics*. In Journal of Mathematical Sciences 128 (2005), pp. 3461–3483.

[Monagin 2006] Monagin, Michelle: *The Possibility of Many Valued Deontic Logic*. Oakland University, 2006.
http://www.oakland.edu/phil/Monagin/journalartical8.pdf

[Nakamura–Gao 1992] Nakamura, Akira; Gao, Jian-Ming: *On a KTB-Modal Fuzzy Logic*. In Fuzzy Sets and Systems 45 (1992), pp. 327–334.

[Peregrin 2004] Peregrin, Jaroslav: *Logika a logiky*. Academia, Praha, 2004.

[Ying 1988] Ying, Ming-Sheng: *On standard models of fuzzy modal logics*. In Fuzzy Sets and Systems 26 (1988), pp. 357–363.

[Zadeh 1971] Zadeh L. A.: *Similarity relations and fuzzy orderings*. In Information Science 3 (1971), pp. 177–200.