UNIVERZITA KARLOVA v PRAZE

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Využití aplikací algebry v přírodovědných oborech na 2. a 3. stupni školy

Diplomová práce

Autor: Bc. Tomáš Novotný

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

Praha 2014

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze literaturu uvedenou v seznamu použité literatury.

V Praze dne ………………………………

Tomáš Novotný

Poděkování:

Děkuji prof. RNDr. Jarmile Novotné, CSc., za čas a úsilí, které věnovala mé diplomové práci.

Název:

Využití aplikací algebry v přírodovědných oborech na 2. a 3. stupni školy

Abstrakt:

Diplomová práce se zaměřuje na strategie, které žáci používají při řešení úloh se soustavami lineárních rovnic v jiných předmětech, konkrétně ve fyzice a chemii. Cílem práce je pak na základě výsledků experimentu navrhnout použití takových úloh při výuce matematiky.

První část práce je věnována oblastem fyziky a chemie, kde se soustavy lineárních rovnic používají. V další části je popsán experiment, který byl v rámci práce uskutečněn. Ten je rozdělen na dvě části. První část je zaměřena na žáky základní školy a druhá na žáky střední školy. V poslední části je návrh použití úloh z fyziky a chemie ve výuce matematiky při zavádění a procvičování soustav lineárních rovnic.

Klíčová slova:

Algebra, aplikace algebry, soustavy lineárních rovnic, mezipředmětové vztahy, školní matematika

Title:

Use of applications of algebra in sciences at secondary schools

Abstract:

The MA thesis focuses on the strategies pupils use when solving mathematical problems involving systems of linear equations in other subjects, namely in physics and chemistry. Drawing on the results of the experiment, the aim of the thesis is to propose ways in which these problems can be used in math lessons.

The first part of the thesis is dedicated to those branches of physics and chemistry in which systems of linear equations are used. In the following part, the experiment itself is described. Divided into two parts, the first part of the experiment focuses on pupils at lower secondary schools, the other on pupils at upper secondary schools. The final part of the thesis is dedicated to suggesting how problems from physics and chemistry can be used in math lessons when introducing and practising systems of linear equations.

Key words:

Algebra, application of algebra, system of linear equations, interdisciplinary relations, school mathematics

Obsah

1. Úvod

Matematika je abstraktní věda, která vznikla jako snaha o popsání dějů v reálném světě. Během svého dlouhého vývoje prošla mnoha změnami a od prvotní motivace, kterou bylo zaznamenat nějakým způsobem majetky, se vyvinula až do dnešní podoby. Mnoho lidí se začalo domnívat, že je natolik abstraktní, že se od reálného světa odklonila a většina matematického obsahu je pro použití běžným člověkem zbytečná.

Rámcový vzdělávací program byl vytvořen tak, aby dával učitelům a škole volnost ohledně dosažení vzdělávacích cílů. Je to z toho důvodu, že při výuce jednotlivých předmětů bez využívání znalostí z předmětů jiných dochází k předmětové izolovanosti (Čadílek, 2005). Žáci si nezvládnou spojit jednotlivé poznatky mezi předměty do uceleného systému informací a nedokážou je pak ani aplikovat do běžných situací v životě.

Na základní škole se žáci v mnoha předmětech setkávají s aplikací matematiky. Pro úplné propojení poznatků je pak zapotřebí, aby se s těmito aplikacemi setkávali i v matematice při probírání jednotlivých okruhů, se kterými se již v jiných předmětech setkali nebo setkají.

Soustavy lineárních rovnic jsou v tomto ohledu velice speciálním případem. Na základní škole se žáci totiž setkají s touto problematiku dřív v jiných předmětech než v matematice a až poté je probírají v rámci hodin matematiky. Ve fyzice téměř od prvních výpočtů používají dosazení jednoho vzorce za neznámou ve vzorci druhém. Fyzika je přitom vyučována nejčastěji od sedmého ročníku základní školy. V chemii se se soustavami lineárních rovnic žáci setkají při vyčíslování stechiometrických koeficientů v chemických rovnicích. V tomto případě žáci spíše využívají algoritmus uvedený v kapitole 6.1.2.a, ale stále se o soustavy lineárních rovnic jedná. V matematice se soustavy lineárních rovnic převětšinou vyučují až v 9. ročníku základní školy. Využití úloh, které se řeší pomocí soustav lineárních rovnic, z jiných oborů může některým žákům pomoct porozumět problematice soustav lineárních rovnic a jejich řešení. Pro jiné žáky toto propojením může naopak pomoct při chápání problematiky, ve které se soustavy lineárních rovnic aplikují. Tento přístup žákům poskytuje možnost propojit informace a může tak mít u některých žáků vliv na zvýšení motivace učit se matematiku.

1.1. Úvod do mezipředmětových vztahů

Dle Bloomovy taxonomie kognitivního učení je proces učení rozdělen do těchto částí seřazených vzestupně: znalost, porozumění, použití, analýza, syntéza, hodnocení (Skalková, 2007).

Škola by měla u žáků podporovat rozvoj všech úrovní procesu učení. Žák se nemá jen osvojit znalost, pochopit ji a dokázat použít v probírané oblasti, což jsou nižší úrovně kognitivního učení, ale má také dokázat analyzovat spojitosti a podobnosti mezi předměty a na základě toho si vytvořit vlastní ucelený systém poznání, na jehož základě je schopen si vytvořit vlastní obraz o světě, učivu a svém postavení ve světě.

Pokud výuka jednotlivých předmětů probíhá bez návaznosti na informace z jiných předmětů, je pro žáka samotného téměř nemožné objevit propojenost jednotlivých oborů. Je tomu tak i proto, že témata, která spolu souvisí, se mnohdy vyučují v rozdílném období.

Tím dochází k tomu, že žák nedokáže vědomosti z jednoho předmětu převést do předmětů jiných. Tento jev se nazývá předmětová izolovanost. Na základě toho se pak žák jednu informaci, která se vyučuje ve více předmětech, musí učit víckrát, místo toho, aby pouze použil informaci, kterou si již dříve naučili v jiném předmětu.

Pokud však při výuce učitel používá informace z jiných předmětů a na souvislosti upozorňuje, žákům tím ukáže možnost, jakým způsobem mohou v jiných oborech či běžných situacích poznat, že se o danou problematiku jedná. Žáci pak jsou schopni na tomto základě sami propojovat další informace. Tím se rozvíjí žákovy kompetence k řešení problému, neboť je schopen přesáhnout rámec daného předmětu a rozpoznat podobnosti a souvislosti mezi předměty.

Aby učitel mohl využívat mezipředmětových vztahů ve výuce, je potřeba, aby spolupracoval s ostatními učiteli pedagogického sboru. Pro navázání na téma z jiného předmětu učitel potřebuje vědět, jakým způsobem se dané téma žáci učili. Spolupráce učitelů by však měla být oboustranná. Pokud například učitel žákům při hodině fyziky vysvětluje daný matematický postup, je vhodné, aby naopak učitel matematiky při probírání daného matematického tématu připomněl jeho použití ve fyzice.

Ve školách se většinou setkáme pouze s prvním případem, to jest upozornění žáků na aplikace matematiky v jiných předmětech. Aby žák pochopil celou problematiku, je potřeba, aby toto propojení bylo oboustranné. V ideálním případě učitelé předmětů spolupracují do té míry, že témata, která spolu souvisí, jsou probírána v obou předmětech ve stejném čase.

2. Ukázky aplikací soustav lineárních rovnic ve fyzice a chemii

V této části jsou shrnuty oblasti z fyziky a chemie, ve kterých se používají soustavy lineárních rovnic a které se v práci dále vyskytují. Práce navazuje na bakalářskou práci (Novotný, 2012). V následujícím textu zařazujeme informace z této bakalářské práce, většinou v původním znění, pouze v 2.1 je text doplněn.

2.1. Zákon o zachování mechanické energie

„Při všech mechanických dějích v izolované soustavě se může měnit kinetická energie v potenciální a naopak, celková mechanická energie se však nemění.“

(Bednařík, 2009, s. 113)

Zákon o zachování mechanické energie se nejčastěji používá při volném pádu, kdy těleso má na začátku kinetickou energii nulovou, která se během pádu přetváří na energii kinetickou a při dopadu má nulovou energii potenciální. Pak se kinetická energie při dopadu rovná potenciální energii na začátku pádu. Zákon o zachování mechanické energie $\boldsymbol{E}$ lze vyjádřit matematickým vztahem pomocí kinetické energie $\boldsymbol{E}_{\mathbf{k}}$ a potenciální energie $\boldsymbol{E}_{\mathbf{p}}$:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{\mathbf{k}} + \boldsymbol{E}_{\mathbf{p}} = \textbf{konstanta.}$$

Potenciální energie je rovna součinu hmotnosti m, gravitačního zrychlení g a výšky h.

$$E_{\mathrm{p}} = m \cdot g \cdot h .$$

Kinetická energie je rovna polovině součinu hmotnosti m a druhé mocniny rychlosti v.

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 .$$

Příklad 1: Z věže vysoké 45 m padá volně kámen o hmotnosti 300 g. Určete celkovou mechanickou energii kamenu vzhledem k Zemi na konci první sekundy pohybu.

(http://www.priklady.eu/cs/Fyzika/Mechanicka-prace/Energie.alej)

Označme si h výšku věže, m hmotnost kamene a g = 10 m/s^2 gravitační zrychlení Země. Abychom měli všechny veličiny vyjádřené za pomoci základních jednotek SI, musíme hmotnost kamene m vyjádřit pomocí kilogramů: m = 0,3 kg. Potenciální energie vzhledem k zemi je na začátku maximální a kinetická nulová. Jelikož se celková mechanická energie při volném pádu nemění, víme, že součet kinetické a potenciální energie na konci první sekundy bude stejný, jako potenciální energie na začátku.

$$E = E_{\mathrm{p}} + E_{\mathrm{k}} = E_{\mathrm{p}} + 0 = E_{\mathrm{p}} ,$$
$$E = E_{\mathrm{p}} = m\, g\, h .$$

Po dosazení nám tedy vyjde, že celková mechanická energie na konci první sekundy je 135 J.

Pokud bychom chtěli zjistit hodnoty velikostí jednotlivých energií na konci první sekundy, budeme vycházet z tohoto výpočtu. Víme totiž že jejich součet bude 135 J. Stačí nám proto vypočítat pouze jednu z nich.

Počítáme, že gravitační zrychlení je 10 m/s^2. Na konci první sekundy bude tedy rychlost tělesa 10 m/s. Vypočítáme tedy kinetickou energii ze vzorce výše.

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 ,$$

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}3\,\mathrm{kg} \cdot 10\ \mathrm{m}/s ,$$

$$E_\mathrm{k} = 15\,\mathrm{J}.$$

Potenciální energii pak vypočítáme na základě zákona o zachování mechanické energii. To znamená, že nám stačí od celkové mechanické energie odečíst energii kinetickou.

$$E_\mathrm{p} = E - E_\mathrm{k} ,$$

$$E_\mathrm{p} = 135\,\mathrm{J} - 15\,\mathrm{J} ,$$

$$E_\mathrm{p} = 120\,\mathrm{J}.$$

2.2. Zákon o zachování hybnosti

„Celková hybnost izolované soustavy těles se vzájemným působením těles nemění.“

(Bednařík, 2009, s. 81)

Zákon o zachování hybnosti vychází ze zákona o zachování energie.

Matematický vztah tedy je:

$$\frac{\overrightarrow{\delta p}}{\delta t} = 0\,,$$

kde $\overrightarrow{\delta p}$ je celková změna hybnosti izolované soustavy těles a δt je čas, za který se změny udály. Pro $\delta t = t_2 - t_1$, t_2 je čas po udání změn, t_1 je čas před začátkem a $\overrightarrow{\delta p}$ se vypočítá:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i - \sum_{j=n+1}^{2n} \vec{p}_j\,,$$

kde $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n$ jsou hybnosti všech těles v soustavě na konci (v čase t_2) a $\vec{p}_{n+1}, \vec{p}_{n+2}, \dots, \vec{p}_{2n}$ jsou hybnosti všech těles v soustavě na počátku (v čase t_1).

Ukázky řešených úloh (Bednařík, 2009, s. 82, 84):

Příklad 2: Vozík o hmotnosti 4 kg jede po vodorovných kolejích rychlostí 0,5 m/s a narazí na vozík o hmotnosti 2 kg, který jede týmž směrem rychlostí 0,2 m/s. Při nárazu se oba vagóny spojí a dále se pohybují společně. Urči rychlost po srážce. Tření a odpor vzduchu zanedbej.

m_1 = 4 kg

v_1 = 0,5 m/s

m_2 = 2 kg

v_2 = 0,2 m/s

v_3 = ?

Na vozíky sice působí gravitační síla, ale dle zákona akce a reakce na vozík působí stejně velká síla kolejnic opačného směru nežli síla gravitační. Proto můžeme vozíky považovat za izolovanou soustavu.

Vycházíme z toho, že hybnost před srážkou p_1 mínus hybnost po srážce p_2 se rovná nule. Hybnost před srážkou získáme součtem hybností obou vagónů.

$$p_1 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$
$$p_1 - p_2 = 0$$

Po srážce budou mít oba vagóny stejnou rychlost v_3.

$$p_2 = m_1 v_3 + m_2 v_3$$
$$p_2 = v_3 (m_1 + m_2)$$

Dosadíme do rovnice p_1 - p_2 = 0 a upravíme.

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 - v_3 (m_1 + m_2) = 0$$
$$\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = v_3$$

Nyní už jen dosadíme hodnoty jednotlivých veličin a získáme výslednou rychlost v_3.

$$(4 \text{ kg} \cdot 0{,}5 \text{ m/s} + 2 \text{ kg} \cdot 0{,}2 \text{ m/s}) / (4 \text{ kg} + 2 \text{ kg}) = v_3$$

$$0{,}4 \text{ m/s} = v_3$$

Odpověď tedy zní: Rychlost spojených vozíků po srážce bude 0,4 m/s.

Příklad 3: Střela o hmotnosti 0,001 kg je vystřelena rychlostí 800 m/s z pušky o hmotnosti 4 kg. Vypočtěte zpětnou rychlost pušky.

$$m_1 = 0{,}01 \text{ kg}$$

$$v_1 = 800 \text{ m/s}$$

$$m_2 = 4 \text{ kg}$$

$$v_2 = ?$$

Jelikož považujeme jak pušku, tak střelu na začátku v klidu, musí být výslednice všech sil na ně působících nulová. Proto můžeme pušku a střelu považovat za izolovanou soustavu.

Vycházíme z toho, že počáteční hybnost je nulová. Hybnosti po výstřelu budou mít potom opačný směr, proto v zákoně o zachování hybnosti budou mít opačná znaménka

$$p_1 - p_2 = 0$$

$$p_1 = m_1 v_1$$

$$p_2 = m_2 v_2$$

Použitím substituční metody do první rovnice dosadíme za p_1 a p_2 a vyjádříme v_2.

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0$$
$$v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_2}$$

Nyní dosadíme hodnoty ze zadání a dostaneme výsledek.

$$v_2 = (0{,}01 \text{ kg} \cdot 800 \text{ m/s}) / 4 \text{ kg}$$

$$v_2 = 2 \text{ m/s}$$

Odpověď: Puška po výstřelu bude mít rychlost 2 m/s.

2.3. Kirchhoffovy zákony

Kirchhoffovy zákony byly popsány Gustavem Robertem Kirchhoffem v 40. letech 19. století. Popisují děje stejnosměrného proudu ve složitějších elektrických obvodech - tzv. elektrických sítích, které se od jednoduchých obvodů liší hlavně tím, že obsahují uzly, což jsou místa, kde se vodivě stýkají nejméně tři vodiče, a větve, vodivé spoje dvou sousedních uzlů.

Jelikož se pohybujeme v elektrice, budeme potřebovat i Ohmův zákon, který říká:

$$R = \frac{U}{I},$$

kde R je odpor, jehož jednotka je Ω (ohm), U napětí s jednotkou V (volt) a I proud s jednotkou A (ampér).

2.3.1. První Kirchhoffův zákon

První Kirchhoffův zákon se týká proudů přitékajících a odtékajících z uzlu.

„Algebraický součet proudů v uzlu je nulový.“

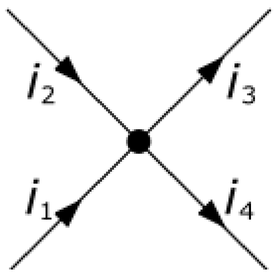
(Leipl, 2011, s. 75)

Je založen na zákonu o zachování elektrického náboje, což je zúžení zákona o zachování energie.

Matematicky lze vyjádřit takto:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0,$$

kde $I_1, I_2, \ldots, I_n$ jsou proudy vytékající a vtékající do uzlu, jejichž znaménka jsou určena znaménkovou konvencí tak, že proudy do uzlu vtékající jsou se znaménkem kladným a vytékající se znaménkem záporným.



Na obrázku máme příklad čtyř větví stékajících se v jednom uzlu s proudy i_1, i_2, i_3, i_4, pro které tedy dle prvního Kirchhoffova zákona platí, že $i_1+i_2-i_3-i_4=0$. Vyjde-li nakonec některý proud záporný, bude jeho směr ve skutečnosti opačný, nežli směr zvolený.

2.3.2. Druhý Kirchhoffův zákon

Druhý Kirchhoffův zákon je opět zkonkretizováním zákona o zachování energie. Týká se smyček a napětí v nich, kde smyčka je jakýkoli nerozvětvený uzavřený okruh sítě.

„Součet okamžitých hodnot napětí ve větvích libovolné uzavřené smyčky elektrického obvodu je roven nule.“

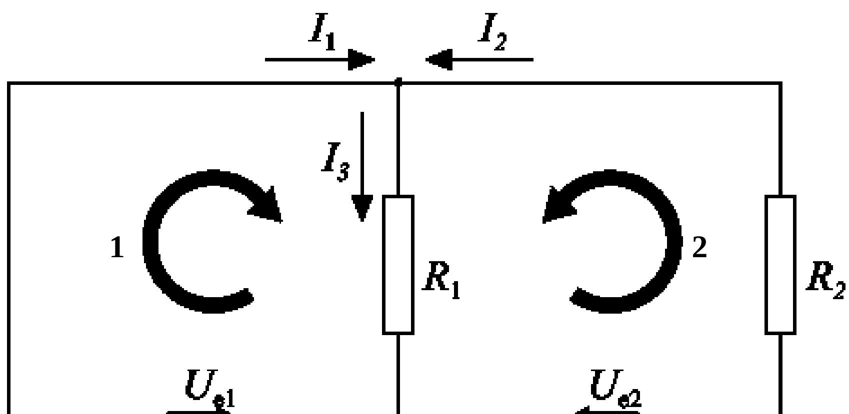
(Leipl, 2011, s. 75)

Matematicky zapsán je pak ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{n} U_i = 0 \, ,$$

kde $U_1, \ldots, U_n$ jsou napětí, kterým jsou přiřazena znaménka podle následujícího algoritmu.

1. Určíme jeden směr otáčení ve smyčce, kterým se budeme řídit.
2. Přiřadíme šipky zdrojům od “-“ k “+“, ke každé větvi přiřadíme libovolně směr proudu, kterým se budou řídit znaménka napětí na rezistorech.
3. Všechna napětí rezistorů na větvích, kde má proud stejný směr jako směr otáčení námi určený, budou mít znaménko záporné a v případě opačném kladné.
4. Napětí na zdrojích budou kladná, má-li šipka jim přiřazená směr stejný jako směr otáčení. Pokud je šipka proti směru otáčení, bude napětí záporné.

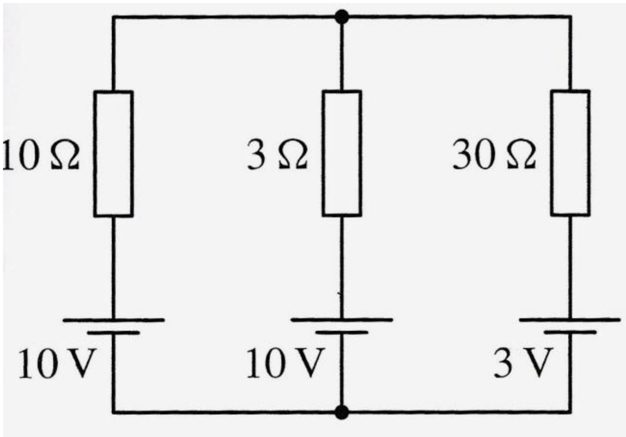


Na obrázku vidíme elektrickou síť se dvěma uzly a dvěma smyčkami. Šipky **1** a **2** naznačují směr otáčení, který jsme zvolili. U_{e1} a U_{e2} jsou elektromotorická napětí, R_1 *a* R_2 jsou odpory rezistorů a I_1, I_2 *a* I_3 jsou proudy na větvích. Postupujeme podle předešlého algoritmu a dostaneme pro tento příklad, že $-R_1 I_3 - R_2 I_2 - U_{e2} = 0$ a $-R_1 I_3 - U_{e1} = 0$.

Pokud některý proud vyjde nakonec záporný, jeho směr bude ve skutečnosti opačný nežli námi zvolený na začátku, stejně jako u prvního Kirchhoffova zákona.

Ukázky řešení úloh (Leipl, 2011, s. 77):

Příklad 4: Řešte síť na obrázku, ve které jsou tři rezistory a tři ideální zdroje napětí. Jaké proudy procházejí větvemi?



Označme proudy: I_1 je proud na levé větvi, I_2 je proud na střední větvi a I_3 je proud na větvi pravé. Zvolme směr obíhání v obou smyčkách proti směru hodinových ručiček a směr všech proudů zvolme tak, že všechny vtékají do horního uzle.

Potom z prvního Kidchhoffova zákona dostaneme jednu rovnici a další dvě z druhého Kirchhoffova zákona:

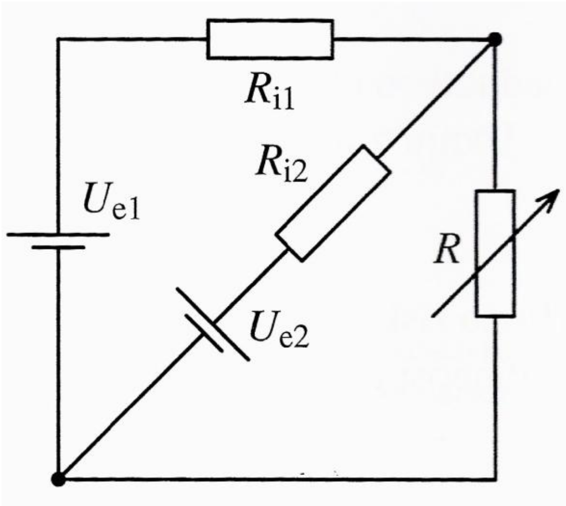
$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$
$$10 - 3 \cdot I_2 + 10 \cdot I_1 - 10 = 0$$
$$3 - 30 \cdot I_3 + 3 \cdot I_2 - 10 = 0$$

Tuto soustavu vyřešíme pomocí metod uvedených v kapitole 3.3. a dostaneme řešení:

$$P([I_1, I_2, I_3]) = \{[\frac{1}{20}, \frac{1}{6}, -\frac{13}{60}]\}$$

Z výsledku vidíme, že proud I_3 bude mít opačný směr, nežli jsme zvolili.

Příklad 5: V síti na obrázku platí, že U_{e1} = 4,5 V, R_{i1} = 1,5 Ω, U_{e2} = 3 V, R_{i2} = 0,3 Ω. Jaký musí být odpor R, aby zdroje dodávaly stejný proud?



Označme I_1 proud na horní větvi, I_2 proud na střední větvi a I_3 proud na spodní větvi. Zvolme proudy I_1 a I_2 vtékající do horního uzlu a I_3 proud z horního uzle vytékající.

Šipky obíhání na obou smyčkách zvolme proti směru hodinových ručiček.

Sestavíme soustavu lineárních rovnic, které získáme z Kirchhoffových zákonů a jednu ze zadání.

$$I_1 = I_2$$
$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$
$$R_{i1} I_1 - U_{e1} + U_{e2} - R_{i2} I_2 = 0$$
$$R I_3 - U_{e2} + R_{i2} I_2 = 0$$

Za použití substituční metody dosadíme z první rovnice do všech ostatních rovnic I_1 za I_2.

$$2 I_1 = I_3$$
$$I_1 = \frac{U_{e1} - U_{e2}}{R_{i1} - R_{i2}}$$
$$R = \frac{U_{e2} - R_{i2} I_1}{I_3}$$

Po dosazení hodnot ze zadání z třetí rovnice zjistíme hodnotu I_1, načež zjistíme z druhé rovnice hodnotu I_3. Následně si z poslední rovnice vyjádříme R a dosadíme všechny již známé hodnoty. Vyjde obor pravdivosti

$$P([I_1; I_2; I_3]) = [3{,}5; 3{,}5; 7].$$

Obor pravdivosti $P(R)$ = {0,28}

Odpověď: Aby oba zdroje dodávaly stejný proud, musí být nastaven odpor 0,28 Ω.

2.3.3. Aplikace Kirchhoffových zákonů

Stejnosměrný proud se zatím stále popisuje analogicky k proudění kapalin. Proto je zřejmé, že Kirchoffovy zákony mají využití nejen v elektřině, ale i v dalších oblastech.

2.3.3.1. Doprava

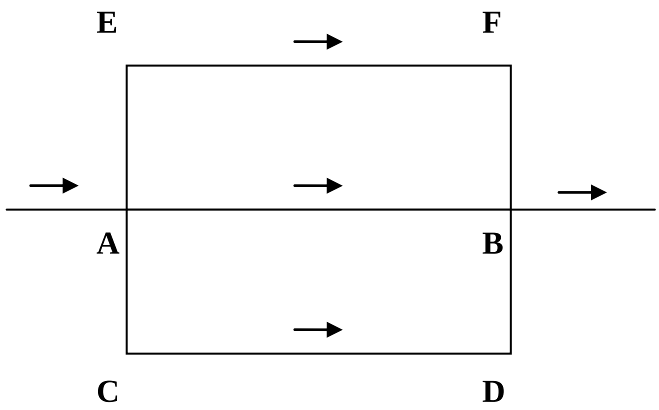
Využití mají třeba v dopravě, například při plánování objížděk v případě uzavírky některé silnice. Využívá se zde převážně první Kirchhoffův zákon. Křižovatky jsou brány jako uzly a proud je analogicky počet aut, která projedou za hodinu. S napětím a odporem se zde ve smyslu jako v elektřině nepočítá. Je zde však průjezdnost, která se v jistém smyslu dá brát jako odpor, což je maximální počet aut, která mohou projet za hodinu. Průjezdnost může být způsoben semafory, přechody pro chodce, omezením rychlosti, převýšením a nerovností silnice atp. Jsou zde i další vlivy ovlivňují průjezdnost, které jsou však neměřitelné, jako počasí, psychický stav řidiče atp.

V praxi se vše počítá za pomoci programů a výpočty jsou složité jak z kombinatorického hlediska, tak tím, že se vytvářejí statistické modely, podle kterých se pak celá situace modeluje. S Kirchhoffovými zákony se sice počítá, ale jsou mezi ostatními zákonitostmi tak základní a jednoduché, že spíše nežli by se používali přímo k vyřešení situace, jsou jen okrajovou záležitostí.

Tato aplikace je zde uvedena hlavně z toho důvodu, že je možno ji použít při hodinách matematiky pro zpestření výuky a ukázky využití matematiky v praxi.

Níže uvedená úloha je vytvořena jako ukázka způsobu, jakým způsobem lze první Kirchhoffův zákon v dopravě začlenit do hodin matematiky.

Příklad 6: V oblasti jsou vybudovány tři paralelní silnice, mezi nimiž jsou dvě spojovací cesty. Pro zjednodušení uvažujeme, že pouze prostřední silnicí lze přijet a odjet z celé soustavy a všechny ulice jsou pouze jednosměrné.



Víme, že do soustavy na křižovatku **A** přijede 120 aut za hodinu. Úsekem **A**-**B** projede dvakrát více aut nežli úseky **A**-**E**-**F**-**B** a **A**-**C**-**D**-**B**. Úsekem **A**-**E**-**F**-**B** projede za hodinu třetina aut, která za hodinu projedou úsekem **A**-**C**-**D**-**B**. Kolik aut za hodinu projede jednotlivými úseky?

Označme x počet aut, která projedou za hodinu úsekem **A**-**B**, počet aut za hodinu úsekem **A**-**E**-**F**-**B** y a počet aut za hodinu úsekem **A**-**C**-**D**-**B** z. Z křižovatky **B** odjede stejný počet aut, jako přijel do křižovatky **A**.

Nyní vytvoříme soustavu rovnic. První rovnice plyne z prvního Kirchhoffova zákona a další dvě ze zadání úlohy:

$$120-x-y-z=0$$
$$x=2(y+z)$$
$$y=\frac{z}{3},$$

kterou vyřešíme za pomocí metod v kapitole 3.3., a dostaneme obor pravdivosti soustavy:

$$P([x,y,z])=[80,10,30]$$

Odpověď: Úsekem **A**-**B** projede 80 aut za hodinu, úsekem **A**-**E**-**F**-**B** 10 aut za hodinu a úsekem **A**-**C**-**D**-**B** 30 aut za hodinu.

2.4. Kalorimetrická rovnice

Než se začneme zabývat přímo kalorimetrickou rovnicí, musíme napřed říct něco o teplu, tepelné výměně a vlastnostech s nimi spojených.

2.4.1. Teplo, tepelná výměna, měrná tepelná kapacita

„Děj, při němž neuspořádaně se pohybující částice teplejšího tělesa narážejí na částice studenějšího tělesa a předávají jim část své energie, nazýváme tepelnou výměnou.“

(Bartuška, 1993, s. 54)

Energii, kterou teplejší těleso odevzdá studenějšímu, nazýváme *teplo*. Značíme ho Q a jednotkou je joule (J).

Když těleso přijme teplo Q a nedojde ke změně skupenství, změní se jeho teplota z původní hodnoty t_1 na t_2. Tuto změnu značíme δt a vypočítáme jí $t_2 - t_1$.

<u>*Tepelná kapacita*</u>

„Tepelnou kapacitu tělesa, kterou značíme C, definujeme vztahem:

$$C = \frac{Q}{\delta t}. \text{“}$$

(Bartuška, 1993, s. 56)

<u>*Měrná tepelná kapacita*</u>

Z tepelné kapacity, která se mění s hmotností tělesa, lze vytvořit *měrnou tepelnou kapacitu*, která je pro danou látku specifická a neměnná a značíme jí c.

Matematický vztah je takto:

$$c = \frac{C}{m}.$$

Po dosazení za tepelné kapacitu C a úpravě dostaneme vztah pro výpočet tepla Q.

$$Q = c m \delta t.$$

2.4.2. Kalorimetrická rovnice

Uvažujeme tepelně izolovanou nádobu, což znamená, že nedochází k tepelné výměně mezi kapalinou v nádobě a nádobou samotnou. Dále předpokládejme, že kapalina uvnitř nádoby a nádoba samotná spolu nijak nereagují. Vložíme do kapaliny, která má teplotu t_2, těleso, které má teplotu t_1, hmotnost m_1 a měrnou tepelnou kapacitu c_1. Hmotnost kapaliny označme m_2 a její měrnou tepelnou kapacitu c_2. Předpokládáme, že $t_2 < t_1$.

Začne docházet k tepelné výměně mezi kapalinou a tělesem, dokud se nevyrovnají jejich teploty na teplotu t, pro kterou platí, že $t_2 < t < t_1$.

Ze zákonu o zachování energie potom plyne kalorimetrická rovnice, která říká:

„Teplo Q_1, které těleso odevzdá se rovná teplu Q_2, které kapalina přijme.“

(Bartuška, 1993, s. 59)

Matematický vztah je tedy:

$$Q_1 = Q_2$$

Kalorimetrická rovnice se používá hlavně pro zjištění měrné tepelné kapacity jedné látky, když známe měrnou tepelnou kapacitu látky druhé.

Na řešené úloze ukážeme způsob výpočtu měrné tepelné kapacity pomocí kalorimetrické rovnice (Bartuška, 1993, s. 61):

Příklad 7: Hliníkový předmět o hmotnosti 0,8 kg a teplotě 250 °C byl vložen do vody o hmotnosti 1,5 kg a teplotě 15 °C. Jaká je měrná tepelná kapacita hliníku, když víme, že voda má měrnou tepelnou kapacitu 4 180 J/(kg·K) a že teplota po dosažení rovnovážného stavu je 39 °C? Předpokládáme, že tepelná výměna nastala jen mezi hliníkovým předmětem a vodou.

$$m_1 = 0{,}8\ \text{kg}$$

$$t_1 = 250\ °\text{C}$$

$$m_2 = 1{,}5\ \text{kg}$$

$$t_2 = 15°\text{C}$$

$$c_2 = 4\,180\ \text{J} / (\text{kg} \cdot \text{K})$$

$$t = 39°\text{C}$$

$$c_1 = ?$$

Začneme kalorimetrickou rovnicí, do které dosadíme vztah pro teplo odvozený v kapitole 2.4.1.

$$Q_1 = Q_2$$
$$m_1 c_1 (t_1 - t) = m_2 c_2 (t - t_2)$$

Vyjádříme c_1 a poté dosadíme hodnoty ze zadání.

$$c_1 = m_2 c_2 (t - t_2) / (m_1 (t_1 - t))$$

$$c_1 = 1{,}5\ \mathrm{kg} \cdot 4\,180\ \mathrm{J} / (\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}) \cdot 24{,}1\ °\mathrm{C} \cdot (0{,}8\ \mathrm{kg} \cdot 210{,}9\ °\mathrm{C}$$

$$c_1 = 895{,}6\ \mathrm{J} / (\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K})$$

Odpověď: Měrná tepelná kapacita hliníku je 895,6 J/(kg·K)

2.5. Vyčíslování chemických rovnic

Chemická reakce je děj, při kterém se za určitých vnějších podmínek přeměňují látky na látky jiné. Látky, které do reakce vstupují, se nazývají *výchozí látky*, látky, které vznikají, se nazývají *produkty*.

2.5.1.1. Chemická rovnice

$$2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$$

Výchozí látky Produkty

Chemická rovnice popisuje chemickou reakci. Na levou stranu píšeme výchozí látky a na pravou produkty. Mezi se píše šipka ve směru zleva doprava - od výchozích látek k produktům. Jedinou výjimkou jsou rovnice reakcí zpětných, kde se píše šipka na obě strany, neboť reakce probíhá zároveň jak jedním, tak druhým směrem.

Příklad zápisu zpětné reakce:

$$H_2 + I_2 \leftrightarrow 2HI$$

Prvky se v rovnici zapisují značkami a sloučeniny vzorci, před které se píší číslice - tzv. *stechiometrické koeficienty*. Stechiometrické koeficienty vyjadřují látková množství látek reagujících a poměry počtu molekul výchozích látek a produktů.

Dále v chemických rovnicích platí zákon o zachování počtu atomů každého prvku a zákon o zachování elektrického náboje.

Zákon o zachování počtu atomů

V chemické rovnici se zachovává počet atomů každého prvku, tudíž ve výchozích látkách je stejně atomů každé látky jako v produktech.

$$H_2SO_4 + 2NaCl \rightarrow 2HCl + Na_2SO_4$$

	Pravá strana	Levá strana
H	2 atomy	2 atomy
S	1 atom	1 atom
O	4 atomy	4 atomy
Na	2 atomy	2 atomy
Cl	2 atomy	2 atomy

Zákon o zachování elektrického náboje

Výsledný náboj výchozích látek je stejný jako v produktech.

$$H_3O^+ + OH^- \rightarrow 2H_2O$$

Náboje látek ve výchozích látkách jsou + a -, což dohromady je neutrální. Látka vyprodukovaná je také neutrální.

Vyčíslování chemických rovnic je pro naše účely dobré rozdělit podle toho, jestli jednotlivé prvky v průběhu chemické reakce mění své oxidační číslo.

2.5.1.2. Rovnice beze změny oxidačního čísla

Příklad na vyčíslení:

$$CaO + HNO_3 \rightarrow Ca(NO_3)_2 + H_2O$$

2.5.1.2.a. Řešení způsobem, který používají chemici

Na školách se vyčíslování chemických rovnic beze změny oxidačního čísla učí řešit dle algoritmu, který ve své podstatě kopíruje řešení za pomocí soustavy lineárních rovnic. Řešení tímto způsobem je u některých úloh jednodušší a rychlejší, avšak hlavně u složitějších úloh je těžké uhlídat veškeré podmínky a může se zde rychle vyskytnout chyba z nepozornosti.

Při řešení se postupuje víceméně intuitivně, přičemž se řídíme několika pravidly, která nejsou však zcela stálá. Musí se ke každé úloze přistupovat částečně individuálně.

Celý postup je založen na zákonu o zachování počtu atomů. Vodíky a kyslíky se povětšinou vyčíslují jako poslední.

Začneme u jednoho prvku, v našem případě zvolíme například vápník. Ve výchozích látkách je pouze jednou a v produktech také, tudíž rovnici zatím neměníme a přejdeme k dalšímu prvku.

Dusík je ve výchozích látkách zastoupen jedním atomem, ale v produktech je zastoupen dvěma. Před molekulu obsahující dusík v látkách výchozích tudíž dosadíme koeficient dva, aby byl zachován počet atomů.

Přejdeme ke kontrole vodíků a kyslíků. Vodíku máme nyní ve výchozích látkách dva atomy, neboť je již před molekulou kyseliny dusičné koeficient dva. Na straně produktů jsou dva vodíky v molekule vody, čímž je stav obou stran roven. Kyslíků je ve výchozích látkách sedm a v produktech též.

Na závěr ještě jednou zkontrolujeme, zda počty atomů odpovídají a rovnici případně doupravíme. V našem případě počty atomů odpovídají. Konečná rovnice tedy bude

$$CaO + 2HNO_3 \rightarrow Ca(NO_3)_2 + H_2O.$$

2.5.1.2.b. *<u>Řešení za pomoci soustav lineárních rovnic</u>*

Před každou molekulu dáme neznámou, která bude zastupovat budoucí stechiometrický koeficient.

$$a\mathrm{CaO} + b\mathrm{HNO_3} \rightarrow c\mathrm{Ca(NO_3)_2} + d\mathrm{H_2O}$$

$$a, b, c, d \in \mathbb{N}$$

Nyní vytvoříme rovnici pro každý prvek podle zákonu o zachování počtu atomů

$$\begin{array}{ll} \text{Ca:} & a=c \\ \text{O:} & a+3b=3\cdot 2c+d \\ \text{H:} & b=2\mathrm{d} \\ \text{N:} & b=2c \end{array}$$

Úpravou dostaneme $a=c=d \wedge b=2a$. Jelikož chceme nejmenší možné řešení, dosadíme $a=1$ a dostaneme řešení celé rovnice.

$$1CaO + 2HNO_3 \rightarrow 1Ca(NO_3)_2 + H_2O$$

2.5.1.3. Rovnice se změnou oxidačního čísla

Tyto rovnice se v literatuře také nazývají rovnice oxidačně redukční či zkráceně redoxní rovnice. Nazývají se tak z důvodu, že jeden prvek při chemické reakci zvýší své oxidační číslo a jeden své oxidační číslo sníží. Zvýšení oxidačního čísla nazýváme oxidací a snížení redukcí. Zjednodušeně řečeno, dochází k tomu tak, že při reakci se elektrony z jednoho prvku uvolňují a přechází k prvku druhému.

$$2Mg^0 + O_2{}^0 \rightarrow 2Mg^{II}O^{-II}$$

$$2\mathrm{Mg}^0 - 4e^- \rightarrow 2\mathrm{Mg}^{\mathrm{II}} \quad \text{Oxidace}$$

$$2\mathrm{O}^0 + 4e^- \rightarrow 2\mathrm{O}^{-\mathrm{II}} \quad \text{Redukce}$$

Počet předávaných elektronů musí být stejný, což v tomto případě je splněno. Pokud tomu tak není, použijeme analogii ke sčítací metodě a vynásobíme každou rovnici přirozeným číslem tak, abychom stejného počtu dosáhli. Nejsou zde sice přímo rovnice, ale můžeme s výrazy pracovat jako s rovnicemi. Znamená to, že najdeme nejmenší společný násobek počtů předávaných elektronů a každou rovnice vynásobíme nejmenším společným násobkem, vyděleným počtem předávaných elektronů v dané rovnici.

V chemii se většinou uvádí, že máme každou rovnici vynásobit počtem elektronů předávaných v rovnici druhé. Pokud jsou počty elektronů čísla soudělná, dostaneme rovnici, která nemá koeficienty nejmenší možné. Dle tohoto postupu máme navíc nakonec zkontrolovat možnost, že všechny koeficienty mají společného dělitele různého od jedné. Pokud tomu tak je, vydělíme celou rovnici tímto číslem. Tato kontrola v prvním postupu odpadá.

$$\underline{Cu^{II}O^{-II} + N^{-III}H_3^{I} \rightarrow Cu^{0} + N_2^{0} + H_2O^{-II}}$$

$$N^{-III} - 3e^{-} \rightarrow N^{0} \qquad / \cdot 2$$

$$\underline{Cu^{II} + 2e^{-} \rightarrow Cu^{0} \qquad / \cdot 3}$$

$$2N^{-III} - 6e^{-} \rightarrow 2N^{0}$$

$$3Cu^{II} + 6e^{-} \rightarrow 2Cu^{0}$$

Dosadíme koeficienty do rovnice:

$$3Cu^{II}O^{-II} + 2N^{-III}H_3^{I} \rightarrow 3Cu^{0} + N_2^{0} + H_2O^{-II}$$

a dopočítáme zbývající koeficienty, aby se zachovával počet atomů (kapitola 6.1.2.)

$$3Cu^{II}O^{-II} + 2N^{-III}H_3^{I} \rightarrow 3Cu^{0} + N_2^{0} + 3H_2O^{-II}$$

3. Výzkumná část

Diplomová práce je zaměřena na to, jak žáci základních a středních škol využívají soustavy lineárních rovnic při řešení úloh v jiných předmětech než v matematice, jmenovitě ve fyzice a v chemii. Cílem je zjistit ve vybraných třídách 2. a 3. stupně školy, jaké strategie žáci používají při řešení takových úloh, do jaké míry využívají postupy, které se naučili v matematice, v jiných kontextech.

Plán výzkumu:

Vytvořit a zadat na daných základních a středních školách test z úloh na aplikace matematiky ve fyzice a chemii. Z jeho výsledků zjistit, do jaké míry jsou žáci schopni používat matematické znalosti při řešení aplikačních úloh z fyziky a chemie, zda používají matematické postupy s porozuměním, nebo používají spíše algoritmické postupy bez hlubšího porozumění matematického obsahu a v důsledku toho si nejsou schopni plně propojit dané téma s matematickým obsahem, který pro řešení používají. Na základě výsledků testů vytvořit návrh použití aplikačních úloh při výuce soustav lineárních rovnic v hodinách matematiky.

Výzkumné otázky:

1) *Jsou žáci 9. ročníku základní školy, která se zúčastnila experimentu, schopni úspěšně řešit úlohy na aplikace matematiky ve fyzice a chemii, při jejichž řešení se vyskytují soustavy lineárních rovnic, aniž by je v matematice probírali?*

2) *Jaké jsou nejčastější žákovské strategie řešení takovýchto úloh ve třídách, které se zúčastnili experimentu?*

3) *Užívají žáci tříd, které se zúčastnili experimentu, matematické znalosti při řešení těchto úloh s porozuměním?*

4) *Jaké se vyskytují typické chyby při řešení těchto úloh?*

5) *Jaké typy úloh působí žákům nejmenší obtíže při řešení?*

6) *Jak lze využít takovýchto úloh při výuce?*

7) *Jak koresponduje hodnocení žáka učitelem s jeho sebehodnocením?*

Do testu jsou vybrány úlohy z fyziky a chemie tak, aby korespondovali s rámcovým vzdělávacím programem. Testování je rozděleno do dvou částí. První část je určena pro základní školy a druhá pro školy střední.

Testování na základních školách proběhlo v dvou třídách ve dvou různých školách. První test byl zadán v 9. ročníku na základní škole Na Slovance. Druhé testování proběhlo v 9. ročníku základní školy Karla Čapka. Žáci ze základní školy Na Slovance v matematice zatím neprobírali soustavy lineárních rovnic, oproti tomu žáci na základní škole Karla Čapka soustavy lineárních rovnic již probírali. Na základě srovnání výsledků v těchto dvou třídách by bylo možné vytvořit hypotézu, zda má tento fakt na řešení úloh na aplikace matematiky ve fyzice a chemii vliv, pro další výzkum s větším zkoumaným vzorkem. To by mohlo být podkladem pro širší výzkum na ověření této hypotézy, ve kterém by se zohlednily další faktory, které mají vliv na úspěšnost žáků při řešení takovýchto úloh. Takový výzkum však je nad rámec této diplomové práce.

Testování středních škol proběhlo ve třech třídách tří různých gymnázií. Konkrétně v posledním ročníku osmiletého studia Gymnázia Havlíčkův Brod, předposledním ročníku šestiletého studia Gymnázia Jana Nerudy a v šestém ročníku osmiletého studia Gymnázia Nad Alejí. Test byl podmíněn tím, že se žáci již museli ve fyzice setkat s Kirchhoffovými zákony, neboť k sestavení soustav rovnic, které je třeba řešit, je potřeba hlubší porozumění této problematice. Na Gymnáziu Havlíčkův Brod žáci probírali Kirchhoffovy zákony školní rok před tím a v tomto ročníku již měli fyziku a chemii pouze ti žáci, kteří si vybrali seminář z těchto předmětů. Na Gymnáziu Jana Nerudy probírali Kirchhoffovy zákony také v předešlém školním roce a fyziku a chemii měli stále všichni žáci. Na Gymnáziu nad Alejí žáci probírali Kirchhoffovy zákony v prvním pololetí stejného školního roku, v němž proběhlo testování, a fyziku a chemii měli všichni žáci.

Test je určen na jednu vyučovací hodinu (viz Příloha 1. Test ZŠ a Příloha 2. Test SŠ). Při jeho plnění mají žáci k dispozici na první straně potřebné informace ke zvládnutí testu a možnost využít kalkulátor. Na první stránce je krátký dotazník, který obsahuje otázky na věk a pohlaví žáka, žákovo sebehodnocení a hodnocení žáka učitelem. U sebehodnocení žák vybere jednu ze tří nabízených odpovědí na otázku: Sám bych své matematické schopnosti hodnotil/a (dobře, průměrně, podprůměrně). Do hodnocení učitelem žák vyplní průměrnou známku na vysvědčení v posledních třech pololetích.

Zbytek otázek tvoří slovní úlohy na aplikace matematiky ve fyzice a chemii. Žáci zaznamenají veškeré postupy a úvahy do testu, aby bylo možné analyzovat, jakým způsobem úlohy řešili.

Výsledky úloh jsou hodnoceny dle následujících kritérií.

0 – Žák úlohu nezačal nikterak řešit.

1 – Žák pouze analyzoval a vypsal data potřebná k řešení úlohy.

2 – Žák začal úlohu řešit, ale nedostal se k výsledku.

3 – Žák řešil úlohu a dospěl k výsledku.

Kritéria 2 a 3 se obě dělí na další tři podčásti:

0 – Žák řešil úlohu podle zcela špatných předpokladů.

1 – Žák během řešení udělal chybu v úsudku, nebo numerickou chybu.

2 – Žák řešil úlohu správně.

Kritéria 2 a 3 byla tedy hodnocena dvěma čísly. Například úloze, ve které žák dospěl k výsledku, ale během výpočtů udělal numerickou chybu, bude přiřazena hodnota 31.

3.1. Test pro základní školy

Úlohy do testu (viz Příloha 1.Test ZŠ) pro základní školy jsou vybrány tak, aby neobsahovaly složité matematické úpravy. V zadání jsou vždy uvedena všechna potřebná data tak, aby při použití vzorců stačily pouze minimální úpravy pro to, aby žáci zvládli úlohu vyřešit. Je to z toho důvodu, že samotné slovní úlohy jsou kognitivně náročné. Navíc musí žáci analyzovat, ke kterému tématu se daná úloha vztahuje, a vybrat podle toho adekvátní vzorec a ještě ho správně použít. Tím, že test je zaměřen hlavně na schopnosti žáků právě tyto kroky zvládnout, bylo by nežádoucí, aby pak žáci úlohy nevyřešili jen kvůli samotné matematické obtížnosti úlohy.

Dalším kritériem pro vybírání úloh bylo, aby v zadání vždy byla uvedena problematika, ke které se daná úloha váže. Žáci by tímto způsobem měli mít možnost vyřešit i takový typ úloh, které si buďto nepamatují, nebo se s nimi zatím nesetkali, jako je tomu v úloze číslo 4. Z hlediska očekávaných výstupů uvedených v rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání by totiž žáci měli být schopni aplikovat a kombinovat poznatky a dovednosti z různých tematických a vzdělávacích oblastí. Navíc by žák měl být schopen analyzovat a řešit jednoduché problémy, modelovat konkrétní situace, v nichž využívá matematický aparát v oboru celých a racionálních čísel. Z tohoto hlediska by mělo být v možnostech žáka 9. ročníku základní školy vyřešit i úlohy, které jsou analogické s již vyučovanou látkou, pokud má dostatek informací pro takovýto výpočet.

V testu jsou použity úlohy z těchto oblastí: Fyzika – zákon o zachování mechanické energie, zákon o zachování hybnosti, kalorimetrická rovnice, aplikace Kirchhoffových zákonů do dopravy. Chemie – vyčíslování stechiometrických koeficientů chemických rovnic.

Před samotným testováním proběhlo předtestování, které mělo za účel zjistit veškeré potřebné vzorce a zákony, které bude žák 9. ročníku základní školy potřebovat pro výpočty. Dále na jeho základě byla některá zadání pozměněna z jejich původního znění do takové podoby, aby nároky, kladené na analýzu zadání, přiřazení dané problematiky a aplikaci daných informací byly pro žáka základní školy adekvátní.

Na první stránce testu je vložen tento seznam použitých značení, potřebných informací, vzorců a zákonů:

m – hmotnost

h – hladina/výška

v – rychlost

p – hybnost – $p = m v$

c – tepelná kapacita

$c_{(H_2O)} = 4\ 180 \frac{\text{J}}{(\text{kg}\cdot\text{K})}$

t – teplota

Δt – změna teploty

Potenciální energie – $E_p = m g h$

Kinetická energie – $E_k = \frac{1}{2} m v^2$

g – gravitační zrychlení – odpovídá přibližně 10 m/s^2

Q – Teplo – $Q = m c \Delta t$.

Zákon o zachování hybnosti – Celková hybnost izolované soustavy těles se nemění.

Zákon o zachování mechanické energie – $E = E_\text{p} + E_\text{k} = \text{konstanta}$.

Kalorimetrická rovnice – Teplo předané jednou látkou se rovná teplu přijatému druhou látkou.

3.1.1.1. Předpokládané výsledky testu pro základní školy

Žáci se budou vyhýbat řešení úloh na aplikace matematiky, převážně proto, že používají pro jejich řešení naučené algoritmy, kterým nerozumí. Jednodušší úlohy na aplikaci soustav lineárních rovnic budou však žáci řešit, i když je před tím v matematice neprobírali. Budou je řešit je převážně pomocí algoritmických postupů, které se naučili v jiných předmětech. Při porovnání výsledků obou základních škol budou podobné výsledky třídy, která v matematice již soustavy lineárních rovnic probírala, a třídy, která se s touto problematikou již v hodinách matematiky setkala.

Ačkoli by teoreticky měli žáci 9. ročníku všechny úlohy zvládnout vypočítat, úspěšnost řešení nebude nikterak vysoká. Největší počet správných řešení bude u 2. úlohy, která je zaměřena na vyčíslení stechiometrických koeficientů chemické rovnice.

Další úlohou, která nebude žákům dělat větší obtíže, je poslední úloha na aplikaci Kirchhoffových zákonů do dopravy.

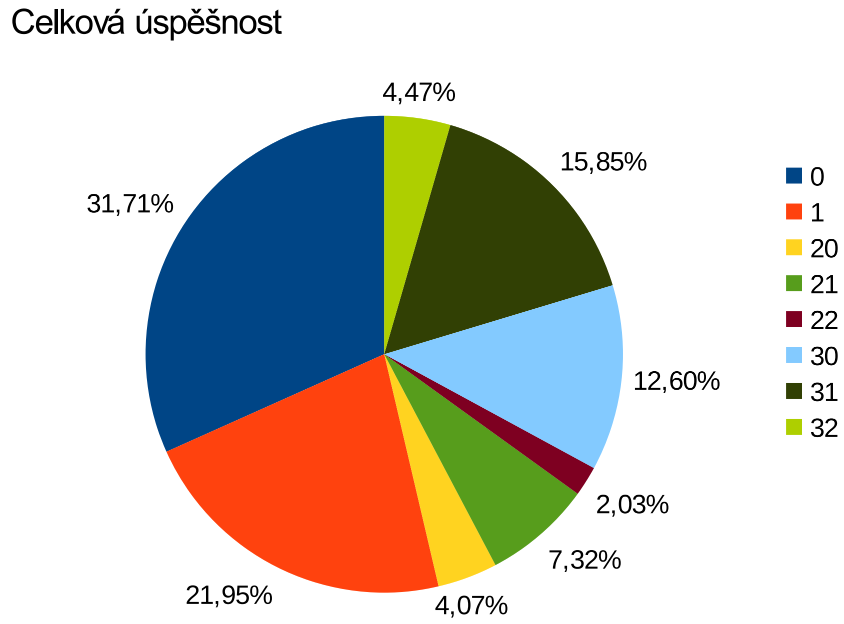
Naopak nejobtížnější pro žáky bude úloha číslo 4.

3.1.1.2. Výsledky testu pro základní školy

Z celkového počtu 246 úloh žáci správně vyřešili 11 úloh a 132 úloh zůstalo bez řešení nebo pouze s vypsaným zadáním. Níže je uvedena celková úspěšnost žákovských řešení ve všech úlohách rozdělená podle jednotlivých kategorií uvedených v části 3.

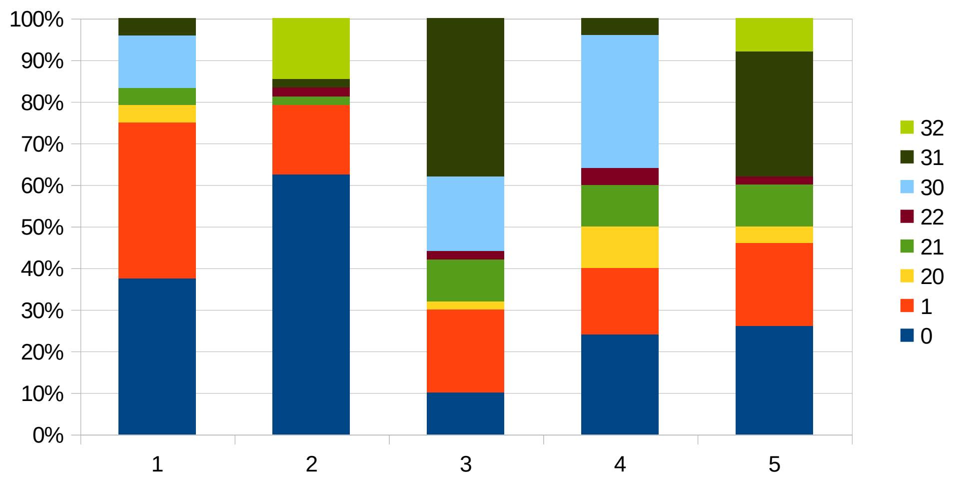
V tabulce jsou uvedeny počty úloh, kterým byla přiřazena daná kategorie. V diagramu je procentuální rozvržení jednotlivých kategorií:

Přiřazené hodnocení		Počet žáků
0	–	78
1	–	54
20	–	10
21	–	18
22	–	5
30	–	31
31	–	39
32	–	11



Žádný z žáků nevypočítal víc než dvě úlohy správně. Z celkového počtu 50 žáků jeden žák ze základní školy Na Slovance vypočítal správně dvě úlohy a jednu úlohu vypočítalo správně 9 žáků. Z nich bylo 5 ze základní školy Na Slovance a 4 ze základní školy Karla Čapka.

Nejmenší obtíže působily žákům úlohy číslo 2 a 5 a naopak nejobtížnější pro žáky byla úloha číslo 1. Celkový přehled úspěšnosti řešení úloh rozdělených dle kritérií v části 3 pro jednotlivé úlohy 1 až 5 je v následujícím grafu. Na vodorovné ose jsou čísla jednotlivých úloh a na svislé ose je procentuální zastoupení počtu žáků, kterým z dané úlohy bylo přiřazeno hodnocení z části 3.



Úloha, kterou žáci nejméně řešili, to jest neřešili vůbec nebo pouze vypsali informace ze zadání, je úloha 2 (38 z 50 žáků). V této úloze žáci měli vyčíslit stechiometrické koeficienty chemické rovnice a předpoklad byl takový, že ji většina žáků vyřeší správně. Této otázce se dále věnuje část 3.1.3.3.

Podobně je tomu u úlohy 4, u které bylo předpokládáno, že ji většina žáků řešit ani nezačne. Úloha je na použití zákona o zachování hybnosti, se kterým se žáci v hodinách fyziky ještě nesetkali (více v části 3.1.5.). Tuto úlohu bez řešení nebo pouze s vypsanými informacemi ze zadání nechalo 20 z 50 žáků.

3.1.2. Úloha 1.

„Závaží o hmotnosti 500 g z neznámého prvku o teplotě 100 °C vhodíme do 2 kg vody o teplotě 20 °C. Teplota vody a závaží se ustálila na 24 °C . Urči měrnou tepelnou kapacitu neznámého prvku.“

(http://www.ucebnice.krynicky.cz/Fyzika/2_Molekulova_fyzika_a_termika/2_Vnitrni_energie_prace_teplo/2203_Kalorimetricka_rovnice.pdf, cit. 28.3. 2014)

Jedná se o úlohu na použití kalorimetrické rovnice, což by žák měl poznat podle toho, že se jedná o předávání tepla tím, že dva materiály při vzájemném kontaktu mění teplotu, dokud se její hodnota neustálí. Navíc je otázka na měrnou tepelnou kapacitu, která se jinde v potřebných vzorcích nevyskytuje.

3.1.2.1. Řešení

Závaží o hmotnosti m_z = 500 g o teplotě t_z = 100 °C. Vložíme ho do vody o hmotnosti m_v = 2 kg a teplotě t_v = 20 °C. Teplota se nakonec ustálí na t_2 = 24 °C. Měrná tepelná kapacita vody je uvedena v potřebných vzorcích c_v = 4180 J/(kg · K). Hledanou měrnou kapacitu závaží označme c_z. Před začátkem výpočtu ještě vyjádříme hmotnost závaží v kilogramech, abychom měli všechny veličiny vyjádřeny vždy za pomoci stejných jednotek – m_z = 0,5 kg.

Z kalorimetrické rovnice víme, že teplo předané jednou látkou se rovná teplu přijatému látkou druhou. Teplo zde předává závaží, označme ho Q_z, a naopak teplo přijímá voda, označme ho Q_v. Dále použijeme vzorce pro výpočet tepla každé látky a dostaneme následující soustavu rovnic.

$$Q_z = Q_v ,$$
$$Q_z = m_z \cdot c_z \cdot (t_z - t_2) ,$$
$$Q_v = m_v \cdot c_v \cdot (t_2 - t_v) ,$$

Tuto soustavu vyřešíme a dosazením dostaneme výsledek.

$$m_v \cdot c_v \cdot (t_2 - t_v) = m_z \cdot c_z \cdot (t_z - t_2) ,$$
$$\frac{m_v \cdot c_v \cdot (t_2 - t_v)}{m_z \cdot (t_z - t_2)} = c_z ,$$
$$\frac{2\ \mathrm{kg} \cdot 4180\ \frac{\mathrm{J}}{(\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K})} \cdot (24\ ^\circ\mathrm{C} - 20\ ^\circ\mathrm{C})}{0{,}5\ \mathrm{kg} \cdot (100\ ^\circ\mathrm{C} - 24\ ^\circ\mathrm{C})} = c_z ,$$
$$880\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}} = c_z$$

Odpověď je tedy: Měrná tepelná kapacita neznámého prvku je 880 J/(kg · K).

3.1.2.2. Předpokládané výsledky

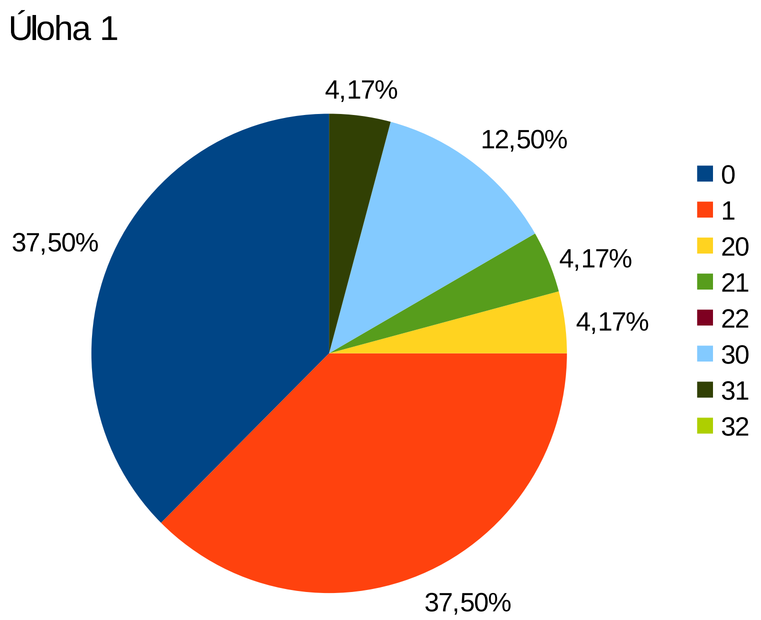
V této úloze bude žákům činit největší obtíže správně určit, jak vypočítat rozdíl teploty ohřívané vody a chlazeného závaží. Jelikož se jinak jedná o standardní úlohu na kalorimetrickou rovnici, kde máme zadané všechny potřebné veličiny k vypočtení úlohy, nebudou mít žáci jinak problém tuto úlohu vyřešit.

3.1.2.3. Výsledky

36 z 48 žáků úlohu nezačalo řešit nebo pouze vypsalo ze zadání informace. Žádný žák úlohu nevyřešil správně. 2 žáci úlohu dořešili, avšak při řešení udělali chybu. Jeden žák byl ze základní školy Na Slovance a jeden ze základní školy Karla Čapka. Oba žáci chybně vytvořili kalorimetrickou rovnici.

Výsledky celého testovaného vzorku jsou uvedeny v následující tabulce. V tabulce jsou napsány počty žáků, kterým byla přiřazena daná kategorie z části 3. Diagram znázorňuje procentuální zastoupení jednotlivých hodnocení ve výsledcích žáků:

Přiřazené hodnocení		Počet žáků
0	–	18
1	–	18
20	–	2
21	–	2
22	–	0
30	–	6
31	–	2
32	–	0



Tuto úlohu dostalo k řešení pouze 48 z 50 žáků, kteří se účastnili experimentu. Je to z toho důvodu, že při zadávání testu se vyskytla chyba a u dvou testů chyběla strana s úlohou 1 a 2.

3.1.3. Úloha 2.

„Zjisti nejmenší koeficienty $a, b, c \in \mathbb{N}$ této chemické rovnice:
a **Al** + b $\mathbf{O_2} \rightarrow c$ $\mathbf{Al_2O_3}$.“

3.1.3.1. Řešení

Při vyčíslování stechiometrických koeficientů chemické rovnice je nejdůležitější zákon o zachování počtu atomů, který říká, že na pravé straně rovnice musí být stejný počet atomů daného prvku jako na straně levé. Na tomto základě můžeme vytvořit pro každý prvek rovnici, která tento přesun bude zachycovat. Hliník má na levé straně jeden atom, který můžeme *a*-krát přidat, a na pravé straně rovnice jsou hliníku dva atomy, které můžeme přidat *c*-krát. Z tohoto vytvoříme jednu rovnici a analogicky vytvoříme druhou rovnici pro kyslík. Vyjdou tak následující rovnice:

$$a\,\mathrm{Al} + b\,\mathrm{O_2} \rightarrow c\,\mathrm{Al_2O_3},$$

$$\begin{aligned} a &= 2c, \\ 2b &= 3c. \end{aligned}$$

Z druhé rovnice vidíme, že $b = (3/2)\,c$, ale má přitom patřit do množiny přirozených čísel. Proto volíme nejmenší $c = 2$, pro které je podmínka $c \in \mathbb{N}$ splněna, a dostáváme zbylé koeficienty $b = 3$ a $a = 4$.

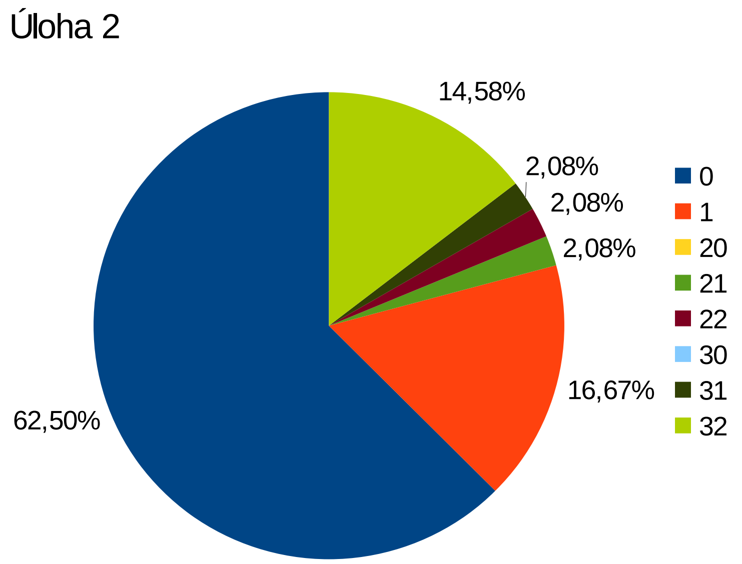
3.1.3.2. Předpokládané výsledky

Tato úloha nebude žákům činit větší potíže. Žáci budou upřednostňovat řešení pomocí algoritmu uvedeného v části 2.5.1.2.a. Většina žáků tuto úlohu vyřeší správně a nebude patrný rozdíl mezi třídou, která soustavy lineárních rovnic již probírala, a mezi třídou, která je neprobírala.

3.1.3.3. Výsledky

Ke správnému výsledku dospělo 7 žáků z celkového počtu 48 žáků. Úlohu k řešení dostalo pouze 48 z 50 žáků, kvůli chybě při zadávání testu (viz 3.1.2.3.). Výsledky celého testovaného vzorku jsou uvedeny v následující tabulce. V tabulce jsou napsány počty žáků, kterým byla přiřazena daná kategorie z části 3. Diagram znázorňuje procentuální zastoupení jednotlivých hodnocení ve výsledcích žáků:

Přiřazené hodnocení		Počet žáků
0	–	30
1	–	8
20	–	0
21	–	1
22	–	1
30	–	0
31	–	1
32	–	7



Žáci řešili úlohu pomocí postupu uvedeného v části 3.1.3.1. Jedna žačka ze základní školy Na Slovance, která patří mezi úspěšné řešitele, k řešení použila soustavy lineárních rovnic.

Oproti očekávání velké množství žáků úlohu nezačalo vůbec řešit. Je to nejspíš z důvodu, který jeden žák v testu uvedl:

„U normálních čísel bych asi věděl, ale tohle jsme v chemii ještě nedělali.“

V chemii se v zadání rovnice pro vyčíslení neobjevují žádné koeficienty. Rovnice je zadána v podstatě jako chybná, ve které se každá molekula nachází jednou. V testu byla rovnice zadána s koeficienty vyjádřenými pomocí neznámých a, b, c. Je to z důvodu matematické korektnosti a jednodušší formulace otázky.

Mnoha žákům tato skutečnost však znemožnila řešit úlohu, neboť jejich chápání neznámých je buď chybné, nebo neúplné.

3.1.4. Úloha 3.

„Kámen o hmotnosti 2 kg padá volným pádem z věže o výšce 80 m. Jakou má kinetickou energii při dopadu?“

(Bednařík, 2009, s. 113)

Jedná se o úlohu na využití zákona o zachování mechanické energie, což by žáci měli poznat podle toho, že otázka je na kinetickou energii. V úloze navíc žáci porovnávají pouze počáteční a koncový stav, kdy na začátku je nulová kinetická energie a na konci potenciální energie.

3.1.4.1. Řešení

Jedná se o úlohu na zákon o zachování mechanické energie.

„Při všech mechanických dějích v izolované soustavě se může měnit kinetická energie v potenciální a naopak, celková mechanická energie se však nemění.“

(Bednařík, 2009, s. 113)

Mechanická energie je tedy na začátku pádu E_0 stejná jako na konci E_1. Na konci pádu je výška nulová a na začátku je nulová rychlost. Proto je kinetická energie E_{k0} nulová a na konci pádu je nulová energie potenciální E_{p1}, pokud ji počítáme vzhledem k úpatí věže. Z tohoto vyplývají následující vztahy:

$$E_0 = E_1 \,,$$
$$E_0 = E_{k0} + E_{p0} \,,$$
$$E_1 = E_{k1} + E_{p1} \,,$$
$$E_{k0} = E_{p1} = 0 \,,$$

kde E_{p0} je potenciální energie na začátku pádu a E_{k1} kinetická energie na konci pádu. Označme dále hmotnost kamene m, gravitační zrychlení g a výšku věže h. Upravením rovnic, dosazením vzorce pro výpočet potenciální energie a následným dosazením hodnot ze zadání, dostaneme výsledek:

$$\begin{aligned} E_{k0}+E_{p0} &= E_{k1}+E_{p1}, \\ E_{p0} &= E_{k1}, \\ m\cdot g\cdot h &= E_{k1}, \\ 2\,\mathrm{kg}\cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 80\,\mathrm{m} &= E_{k1}, \\ 1600\,\mathrm{J} &= E_{k1}. \end{aligned}$$

Odpověď zní: Kámen má při dopadu kinetickou energii 1600 J.

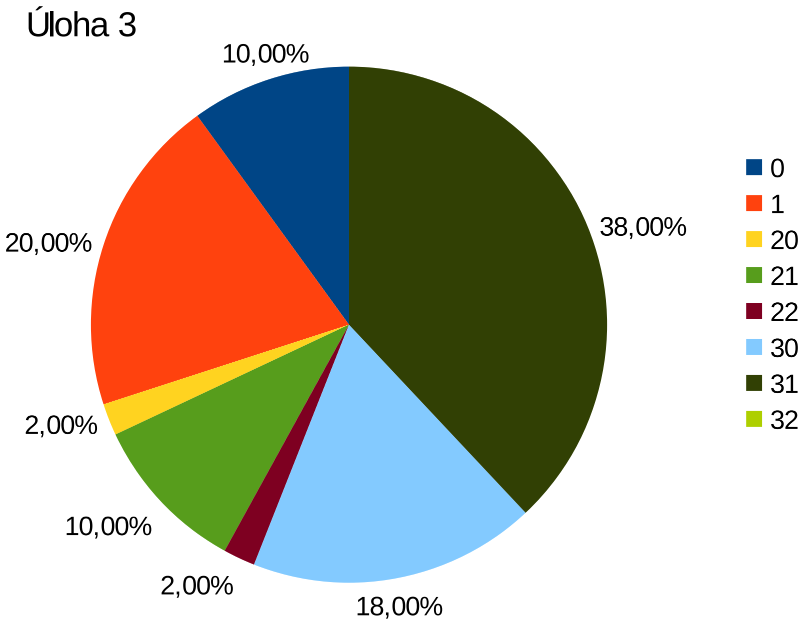
3.1.4.2. Předpokládané výsledky

Alespoň čtvrtina žáků úlohu zvládne vyřešit správně. Největší problém bude pro žáky aplikovat zákon o zachování mechanické energie a uvědomit si, že ačkoli je otázka na kinetickou energii na konci pádu, je řešení založeno na výpočtu energie potenciální na začátku pádu.

3.1.4.3. Výsledky

Žádný žák nevypočítal úlohu správně. Výsledky celého testovaného vzorku jsou uvedeny v následující tabulce. V tabulce jsou napsány počty žáků, kterým byla přiřazena daná kategorie z části 3. Diagram znázorňuje procentuální zastoupení jednotlivých hodnocení ve výsledcích žáků:

Přiřazené hodnocení		Počet žáků
0	–	5
1	–	10
20	–	1
21	–	5
22	–	1
30	–	9
31	–	19
32	–	0



15 z 50 žáků úlohu řešit nezačalo nebo jen vypsalo informace ze zadání.

16 z 35 žáků, kteří úlohu nějakým způsobem alespoň začali řešit, při řešení úlohy do vzorce pro výpočet kinetické energie dosadilo za *v* místo rychlosti výšku. Tato chyba je

způsobena nejspíš tím, že v geometrii používají žáci označení *v* pro výšku trojúhelníku. Proto dosadili výšku i zde, ačkoli v informacích o značení, které je uvedeno na první straně testu, je napsáno, že v testu se písmenem *v* značí rychlost.

3.1.5. Úloha 4.

„Akční hrdina (hmotnost 80 kg) skočí při honičce v bývalém podzemním dole na zlato rychlostí 6 m/s (ve vodorovném směru) na stojící nezabrzděny kolový vozík o hmotnosti 150 kg. Urči, jakou rychlostí se vozík rozjede.“

(Krynický)

Jedná se o úlohu, která nespadá dle rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání do kompetencí žáka z hlediska fyzikálních znalostí. Proto do testu byla zařazena v pozměněné podobě.

„Akční hrdina (hmotnost 80 kg) skočí při honičce v bývalém podzemním dole na zlato rychlostí 6 m/s (ve vodorovném směru) na stojící nezabrzděný kolový vozík o hmotnosti 150 kg. Urči, jakou rychlostí se vozík s hrdinou rozjede. Hrdinu a vozík považuj za izolovanou soustavu těles.“

V této podobě sice stále neodpovídá učivu fyziky, které znají žáci 9. ročníku, avšak z hlediska matematických kompetencí by tuto úlohu měli zvládnout vypočítat, mají-li k dispozici vzorec pro vypočítání hybnosti a zákon o zachování hybnosti:

„Celková hybnost izolované soustavy těles se vzájemným působením těles nemění.“

(Bednařík, 2009, s. 81)

S těmito informacemi se sice jedná o úlohu v podstatě fyzikální, avšak jediné, co z fyziky žáci potřebují znát, je způsob, kterým se počítají úlohy, při kterých se používají zákony o zachování jistého fyzikálního jevu. S tím se již setkali dle rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání minimálně u zákona o zachování mechanické energie. Žáci musí analyzovat, jaké hybnosti mají srovnávat jako sobě rovny, a tedy kde nastane daný bod změny, který v této úloze nastává dopadem akčního hrdiny na vozík.

3.1.5.1. Řešení

Hybnost p vypočítáme pomocí vzorce $p = m v$. V zadání je napsáno, že hrdina a vozík tvoří izolovanou soustavu těles. Tento pojem je důležitý i v samotném zákonu o zachování hybnosti a žáci by jej měli z fyziky znát, neboť se s ním seznámili již při pohybových vlastnostech hmotného bodu. Navíc tím, že je v úloze tento fakt zmíněn, žáci si ho nemusí nikterak dokazovat nebo odvozovat. Jedná se tedy o dva různé stavy rozdělené dopadem hrdiny na vozík. Pro zjednodušení úvahy je v zadání zmíněno, že se následně rozjede vozík i s hrdinou, což by si jinak žáci museli uvědomit při úvaze o hmotnosti při vypočítání hybnosti po dopadu hrdiny na vozík.

Akční hrdina letí vodorovným směrem a stejným směrem, jako se po jeho naskočení vozík rozjede. Označme hybnost před naskočením hrdiny na vozík p_1 a hybnost po naskočení p_2. Ze zákona o zachování hybnosti víme, že $p_1 = p_2$. Rychlost akčního hrdiny před naskočením na vozík je v_h=6 m/s a jeho hmotnost m_h=80 kg. Vozík, jehož hmotnost je m_v=150 kg, je před naskočením hrdiny v klidu, tím pádem v_v=0 m/s.

Po naskočení hrdiny na vozík je potřeba, aby si žáci uvědomili, že se dál pohybuje jak vozík, tak akční hrdina: $m_h + m_v$. V zadání je úmyslně pro zjednodušení této úvahy otázka položena na rychlost vozíku s hrdinou. Z tohoto již můžeme sestavit soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} p_\mathrm{v} &= m_\mathrm{v} v_\mathrm{v}, \\ p_\mathrm{h} &= m_\mathrm{h} v_\mathrm{h}, \\ p_1 &= p_\mathrm{v} + p_\mathrm{h}, \\ p_2 &= (m_\mathrm{h} + m_\mathrm{v}) v_2, \\ p_1 &= p_2. \end{aligned}$$

Tyto rovnice lze jednoduše sloučit do jediné, kterou lze již bez problému vyřešit:

$$m_\mathrm{v} v_\mathrm{v} + m_\mathrm{h} v_\mathrm{h} = (m_\mathrm{h} + m_\mathrm{v}) v_2,$$

$$\frac{(m_\mathrm{v} v_\mathrm{v} + m_\mathrm{h} v_\mathrm{h})}{(m_\mathrm{h} + m_\mathrm{v})} = v_2,$$

$$\frac{(150\,\mathrm{kg} \cdot 0\,\mathrm{m/s} + 80\,\mathrm{kg} \cdot 6\,\mathrm{m/s})}{(230\,\mathrm{kg})} = v_2,$$

$$\frac{48}{23}\,\mathrm{m/s} = v_2.$$

Odpověď tedy zní: Vozík s akčním hrdinou se rozjede rychlostí (48/23) m/s.

3.1.5.2. Předpokládané výsledky

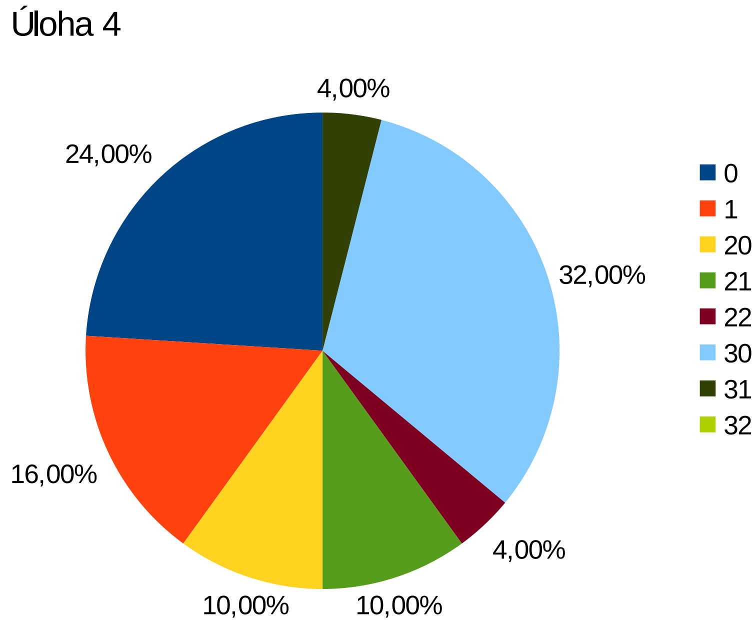
Tato úloha bude žákům činit největší potíže. Většina žáků ji nezačne řešit nebo pouze vypíšou informace ze zadání, protože nebudou schopni aplikovat své poznatky z podobných úloh, jako jsou třeba úlohy využívající zákon o zachování mechanické energie, ve kterých se používá podobný postup.

Pouze minimum žáků zvládne úlohu vyřešit správně.

3.1.5.3. Výsledky

Žádný z 50 žáků úlohu nevyřešil správně. Výsledky celého testovaného vzorku jsou uvedeny v následující tabulce. V tabulce jsou napsány počty žáků, kterým byla přiřazena daná kategorie z části 3. Diagram znázorňuje procentuální zastoupení jednotlivých hodnocení ve výsledcích žáků:

Přiřazené hodnocení		Počet žáků
0	–	12
1	–	8
20	–	5
21	–	5
22	–	2
30	–	16
31	–	2
32	–	0



Dva žáci úlohu dořešili s chybou. Jeden správně určil, že se jedná o zákon o zachování hybnosti, avšak udělal chybu při tvoření rovnice. Druhý žák použil postupu pro výpočet „úměrnosti". Tento postup je teoreticky možný a je převoditelný na řešení pomocí zákonu o zachování hybnosti, avšak při vytváření rovnice také udělal chybu. Řešení pomocí „úměrnosti" by mohlo být takovéto:

Základem řešení je úvaha, jejíž závěr je: Pokud se hmotnost v jistém poměru zvýší, musí se rychlost změnit v převráceném poměru. Pokud se tady v tomto případě hmotnost zvýšila v poměru (23/8), rychlost musíme vynásobit převrácenou hodnotou (8/23), z čehož dostaneme výsledek 6 m/s · (8/23) = (48/23) m/s.

Že je toto řešení převoditelné na řešení pomocí zákonu o zachování hybnosti, dokážeme takto:

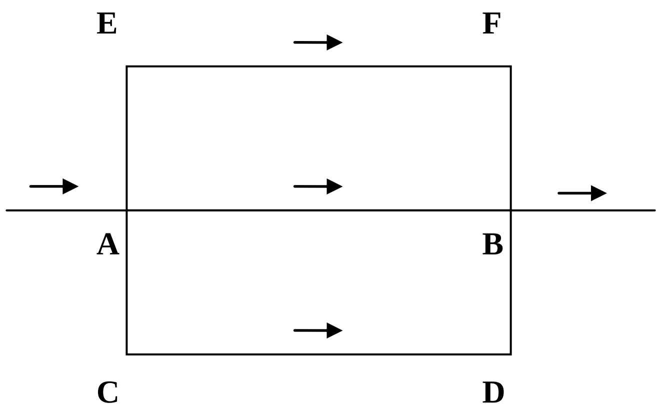
Poměr (23/8) je vyjádření poměru hmotností (m_2/m_1), kde m_2 je hmotnost celku po naskočení hrdiny a m_1 je hmotnost hrdiny. Označme rychlosti takto: v_1 je rychlost hrdiny a v_2 je hledaná rychlost. Ze zákona o zachování hybnosti vyplývá tato rovnost: $m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2$.

Když si vyjádříme rychlost v_2, dostaneme rovnici, která je shodná s rovnicí použitou v úvaze: $v_1 \cdot (m_1 / m_2) = v_2$.

Žák při řešení správně použil jako druhou hmotnost součet hmotnosti hrdiny a vozíku, avšak rychlost násobil nepřevráceným poměrem hmotností.

3.1.6. Úloha 5.

V oblasti jsou vybudovány tři paralelní silnice, mezi nimiž jsou dvě spojovací cesty. Pro zjednodušení uvažujeme, že pouze prostřední silnicí lze přijet a odjet z celé soustavy a všechny ulice jsou pouze jednosměrné.



Víme, že do soustavy na křižovatku **A** přijede 120 aut za hodinu. Úsekem **A-B** projede dvakrát více aut nežli úseky **A-E-F-B** a **A-C-D-B**. Úsekem **A-E-F-B** projede za hodinu třetina aut, která za hodinu projedou úsekem **A-C-D-B**. Kolik aut za hodinu projede jednotlivými úseky?

(Bakalářská práce, 2012)

Tato úloha je v testu zařazena mimo jiné proto, že se na rozdíl od jiných úloh nejedná o klasickou úlohu z fyziky či chemie. Úloha se dá řešit soustavou lineárních rovnic nebo úvahou (viz 3.1.6.1.).

3.1.6.1. Řešení

Postup řešení pomocí soustav lineárních rovnic je uvedený v části 2.3.3.1. Dalším možným postupem řešení je úvahou. Označme si úseky **A-B**, **A-E-F-B** a **A-C-D-B** postupně 1, 2, 3. Víme, že do soustavy celkem přijede 120 aut. Úsekem 1 projede dvakrát víc aut než úseky 2 a 3. To znamená, že jedna část projede úseky 2 a 3 a dvě stejně velké části projedou úsekem 1. To dělí celkový počet aut na tři stejně velké části, což je na jednu část 120 : 3 = 40 aut. Dvě takové části projedou úsekem 1, což je 80 aut, a zbylá část se dál dělí.

Další informací ze zadání je, že úsekem 2 projede 1/3 počtu aut, která projedou úsekem 3. Úsekem 2 tedy projede jedna část počtu aut a úsekem 3 projedou tři takové části počtu aut. Dohromady projedou úseky 2 a 3 čtyři stejně velké části počtu aut, což je 40 : 4 = 10 aut v jedné takové části.

Jedna taková část počtu aut projede úsekem 2, což je 10 aut, a tři části projedou úsekem 3, což je 30 aut.

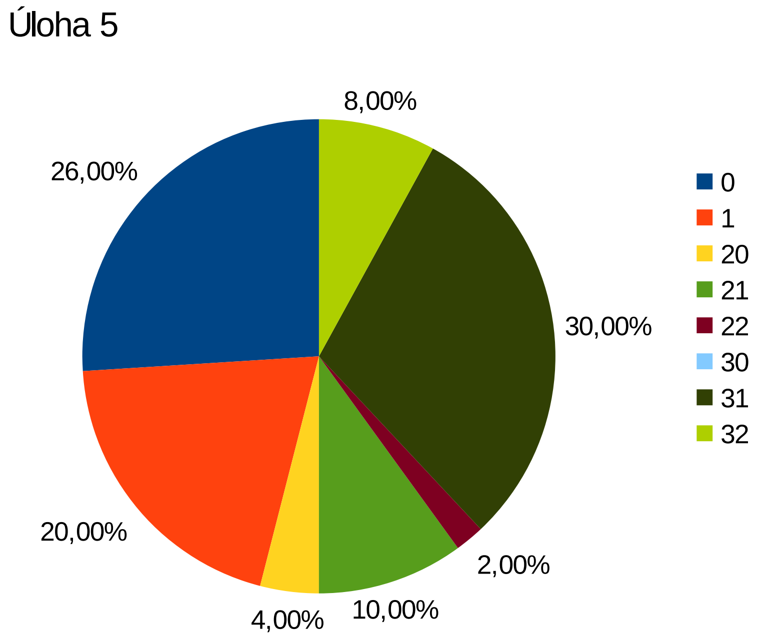
3.1.6.2. Předpokládané výsledky

Žáci budou úlohu řešit převážně pomocí úvahy, jejíž vzorové řešení je uvedeno v předchozí části 3.1.6.1. Tuto úlohu většina žáků začne řešit. Postup řešení pomocí soustav lineárních rovnic se bude vyskytovat pouze ojediněle, a to spíše ve třídě ze základní školy Karla Čapka, neboť v matematice již řešili slovní úlohy na soustavy lineárních rovnic.

3.1.6.3. Výsledky

Úlohu správně vyřešili čtyři žáci z celkového počtu padesáti žáků. Výsledky celého testovaného vzorku jsou uvedeny v následující tabulce. V tabulce jsou napsány počty žáků, kterým byla přiřazena daná kategorie. Diagram znázorňuje procentuální zastoupení jednotlivých hodnocení ve výsledcích žáků:

Přiřazené hodnocení		Počet žáků
0	–	13
1	–	10
20	–	2
21	–	5
22	–	1
30	–	0
31	–	15
32	–	4



Kromě postupu řešení uvedeného v části 3.1.6.1., který použila většina žáků, tři žáci řešili úlohu pomocí soustav lineárních rovnic. Z toho dva byli ze základní školy Na Slovance, kteří soustavy lineárních rovnic zatím v matematice neprobírali. Jedna žačka, opět ze základní školy Na Slovance, použila pro postup řešení grafické znázornění (viz 4.1.1.).

3.2. Test pro střední školy

Do testu (viz Příloha 2. Test SŠ) pro střední školy jsou již vybrány takové úlohy, aby žáci museli kromě standardních výpočtů navíc udělat další matematické úpravy. Většina úloh se sice dá vyřešit i bez těchto úprav tak, že žáci pouze dosadí do vzorce všechna potřebná čísla a výpočet provedou na kalkulátoru. Tím je možné vypozorovat, do jaké míry používají s porozuměním matematické znalosti v aplikačních úlohách. Témata úloh jsou shodná s tématy v testu pro základní školy, kromě úlohy číslo 5, která je zaměřena na Kirchhoffovy zákony.

Na první stránce testu je vložen tento seznam použitých značení, potřebných informací, vzorců a zákonů:

m – hmotnost

h – hladina/výška

v – rychlost

p – hybnost – $p = m v$

c – tepelná kapacita

$c_{(H_2O)} = 4\ 180 \frac{\mathrm{J}}{(\mathrm{kg \cdot K})}$

Q – Teplo – $Q = m c \Delta t$

g – gravitační zrychlení – odpovídá přibližně 10 m/s^2

t – teplota

Δt – změna teploty

U – napětí

U_e – elektromotorické napětí

R – odpor

I – proud – $I = \frac{U}{R}$

Potenciální energie – $E_p = m g h$

Kinetická energie – $E_k = \frac{1}{2} m v^2$

Kalorimetrická rovnice – Teplo předané jednou látkou se rovná teplu přijatému druhou látkou.

1. Kirchhoffův zákon – Součet proudů vtékajících do uzlu se rovná součtu proudů z uzlu vytékajících.

2. Kirchhoffův zákon – Součet elektromotorických napětí v dané smyčce elektrického obvodu je roven součtu úbytku napětí na spotřebičích.

Zákon o zachování hybnosti – Celková hybnost izolované soustavy těles se nemění.

Zákon o zachování mechanické energie – $E = E_\mathrm{p} + E_\mathrm{k} = \mathrm{konstanta}$.

3.2.1.1. Předpokládané výsledky testu pro střední školy

Úspěšnost řešení úloh bude vyšší než v testu pro základní školu mimo jiné proto, že se jedná o gymnázia. Největší problémy bude žákům činit úloha 5, která je zaměřena na Kirchhoffovy zákony. Naopak nejjednodušší budou pro žáka úlohy 4 a 6.

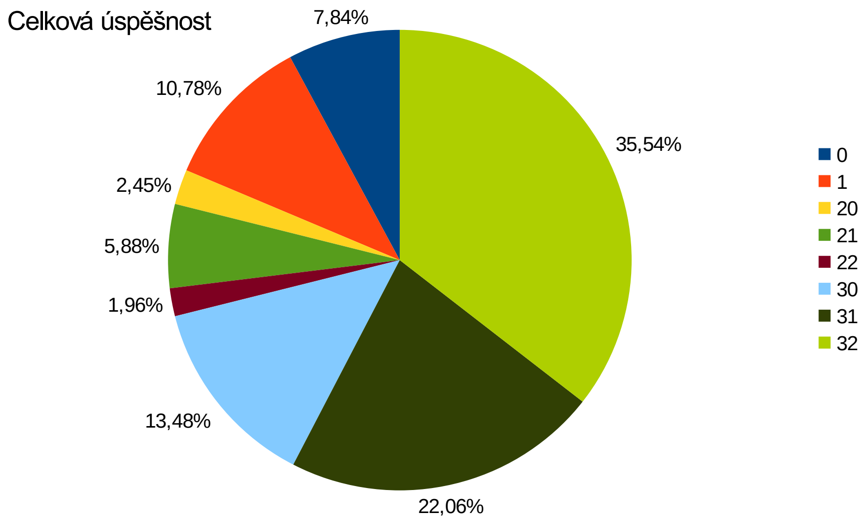
Někteří žáci zvládnou již vyřešit správně všechny úlohy.

Počet úloh, které žáci vůbec nezačnou řešit, nebude větší jak čtvrtina celkového počtu úloh.

3.2.1.2. Výsledky testu pro střední školy

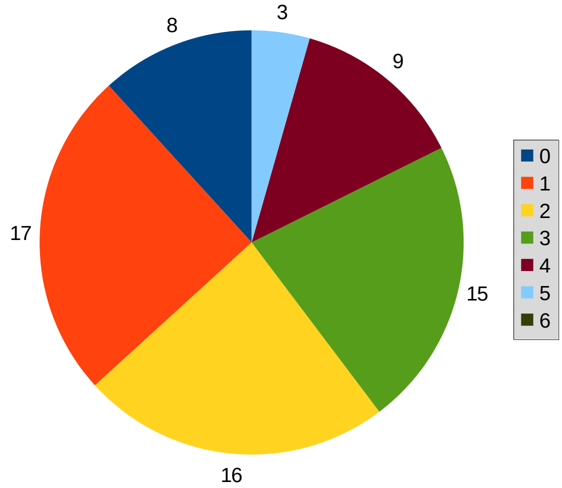
Z celkového počtu 408 úloh žáci úspěšně vyřešili 145 úloh a 76 úloh zůstalo bez jakéhokoli řešení, nebo jen s vypsaným zadáním. Níže je uvedena celková úspěšnost žákovských řešení ve všech úlohách rozdělena podle jednotlivých kategorií uvedených v části 3. V tabulce jsou uvedeny počty úloh, kterým byla přiřazena daná kategorie. V diagramu je procentuální rozvržení jednotlivých kategorií:

Přiřazené hodnocení		Počet úloh
0	–	32
1	–	44
20	–	10
21	–	24
22	–	8
30	–	55
31	–	90
32	–	145



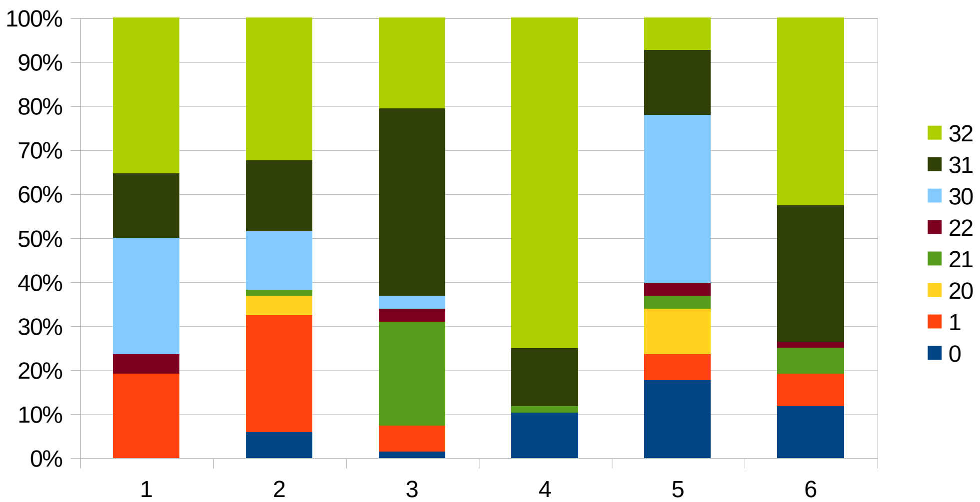
Jelikož se jedná o žáky gymnázií, není překvapivé, že jsou výsledky lepší než u základní školy. Oproti očekávání žádný z testovaných žáků nevypočítal správně všechny úlohy. Jenom 3 žáci správně vyřešili pět z šesti úloh. Alespoň tři úlohy vyřešilo 27 žáků, což je necelých 40 % z celkového počtu.

Počet úspěšně vyřešených úloh	0	1	2	3	4	5	6
Počet žáků, kteří dosáhli daného počtu správných řešení	8	17	16	15	9	3	0



Zde vidíme celkové počty žáků, rozdělené podle toho, kolik úloh žáci úspěšně vyřešili. Graf znázorňuje data uvedená v tabulce nad ním.

Nejmenší obtíže působily žákům úlohy číslo 4 a 6 a naopak nejobtížnější pro žáky byla úloha číslo 5. Celkový přehled úspěšnosti řešení úloh rozdělených dle kritériích v části 3 pro jednotlivé úlohy 1 až 6 je v následujícím grafu. Na vodorovné ose jsou čísla jednotlivých úloh a na svislé ose je procentuální zastoupení počtu žáků, kterým z dané úlohy bylo přiřazeno hodnocení z části 3.



3.2.2. Úloha 1.

Prázdný nákladní vůz o hmotnosti $1 \cdot 10^4$ kg se pohybuje rychlostí 0,9 m/s po vodorovné trati a narazí na naložený vůz o hmotnosti $2 \cdot 10^4$ kg pohybující se ve stejném směru rychlostí 0,1 m/s. Při nárazu jsou oba vozy spolu spojeny. Určete, jakou společnou rychlostí se pohybují.

Tato úloha byla do testu zařazena v tomto znění, neboť se zde jedná o složitější případ úlohy na zákon o zachování hybnosti. Ve standardních úlohách se jedná povětšinou o dvě tělesa, z nichž jedno je na počátku v klidu, a po kontaktu se obě tělesa pohybují dál stejným směrem, nebo pohybující těleso předá veškerou hybnost tělesu stojícímu a po kontaktu zůstane v klidu. Tak tomu bylo i v původním znění úlohy:

„Prázdný nákladní vůz o hmotnosti $1 \cdot 10^4$ kg se pohybuje rychlostí 0,9 m/s po vodorovné trati a narazí na naložený vůz o hmotnosti $2 \cdot 10^4$ kg, který je v klidu. Při nárazu jsou oba vozy spolu spojeny. Určete, jakou společnou rychlostí se pohybují.“

(Bednařík, 2009. s. 84.)

Zde se obě tělesa na začátku pohybují stejným směrem, je tedy potřeba správně určit i celkovou počáteční hybnost soustavy. Navíc si zde žák musí uvědomit, že po srážce se vozíky spojí a je zapotřebí je počítat jako jedno těleso.

3.2.2.1. Řešení

Jedná se o úlohu, při jejímž řešení se používá zákon o zachování hybnosti, dle kterého se hybnost v izolované soustavě těles nemění. Jelikož nejsou v zadání uvedeny údaje o tření, odporu vzduchu nebo jiných vnějších silách, můžeme považovat vozy za izolovanou soustavu těles. Označme váhu prázdného vozu m_p, hmotnost naloženého vozu m_f, rychlost prázdného vozu v_p, rychlost plného vozu v_f a hledanou společnou rychlost v_s. Dále označme hybnost prázdného vozu p_p a hybnost plného vozu p_f. Momentem předávání hybnosti je srážka obou vozů a víme, že celková hybnost před srážkou p_1 se má rovnat celkové hybnosti po srážce p_2. Toto lze zapsat rovnicemi takto:

$$p_1 = p_2\,,$$
$$p_1 = p_\mathrm{p} + p_\mathrm{f}\,.$$

Spojením těchto rovnic, dosazením vzorců a dosazením hodnot ze zadání dostaneme výsledek:

$$p_p + p_f = p_2\,,$$
$$m_p \cdot v_p + m_f \cdot v_f = (m_p + m_f) \cdot v_s\,,$$
$$\frac{(m_p \cdot v_p + m_f \cdot v_f)}{(m_p + m_f)} = v_s\,,$$
$$\frac{(1 \cdot 10^4\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}9\,\mathrm{m}/s + 2 \cdot 10^4\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}1\,\mathrm{m}/s)}{(1 \cdot 10^4\,\mathrm{kg} + 2 \cdot 10^4\,\mathrm{kg})} = v_s\,,$$
$$\frac{11}{30}\,\mathrm{m}/s = v_2$$

Odpověď zní: Vozy se po srážce budou pohybovat společnou rychlostí (11/30) m/s.

3.2.2.2. Předpokládané výsledky

Žákům zvládnou tuto úlohu vyřešit bez větších obtíží.

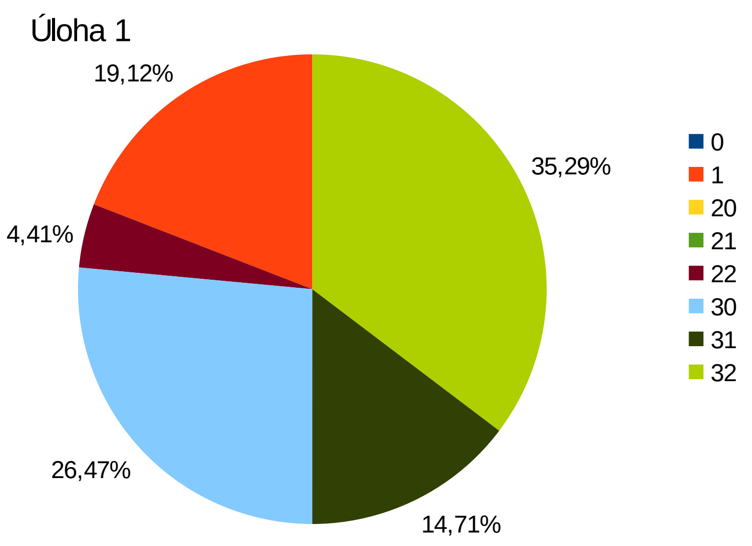
Nejčastější chybou bude při sestavování rovnice vyjadřující rovnováhu hybností, že žáci budou hybnosti jednotlivých vozíků před srážkou odečítat, neboť se s takovými úlohami setkali častěji.

Pokud vytvoří správně rovnice pro výpočet, nebude již žákům dělat problém dokončit řešení úlohy a dospět ke správnému výsledku.

3.2.2.3. Výsledky

V této úloze k správnému řešení dospělo 24 žáků z celkových 68. Celé hodnocení výsledků je zachyceno v následujícím grafu a tabulce. V tabulce je k jednotlivým hodnocením uveden počet žáků, kterým toto hodnocení bylo přiřazeno. Diagram znázorňuje procentuální zastoupení počtu žáků v daných kategoriích hodnocení:

Přiřazené hodnocení		Počet žáků
0	–	0
1	–	13
20	–	0
21	–	0
22	–	3
30	–	18
31	–	10
32	–	24



Všichni žáci udělali alespoň první kroky směřující k řešení úlohy. 13 žáků pouze správně analyzovalo zadání a vypsali si potřebné informace ze zadání. 52 žáků dospělo k nějakému výsledku a další 3 žáci úlohu řešili správně, jen konečného výsledku nedosáhli.

Neobjevilo se jiné správné řešení, nežli je uvedeno v části 3.2.2.1.

Častou chybou bylo špatné určení počáteční celkové hybnosti vozíků, neboť žáci od sebe jednotlivé hybnosti odčítali.

Další chyba, která se objevila, byla ta, že žáci chybně analyzovali problematiku, které se úlohy týká, a řešili ji pomocí kinetických energií vozíků. Dle jejich mylného pčedpokladu má v izolované soustavě platit zákon o zachování kinetické energie.

3.2.3. Úloha 2.

„Kolik studeného čaje o teplotě 20 °C musíme nalít do 0,25 l horkého čaje o teplotě 80 °C, abychom získali snesitelně teplý nápoj o teplotě 45 °C.“

(http://www.ucebnice.krynicky.cz/Fyzika/2_Molekulova_fyzika_a_termika/2_Vnitrni_energie_prace_teplo/2203_Kalorimetricka_rovnice.pdf)

Úloha byla zařazena do testu z toho důvodu, že se nejedná o standardní úlohu na kalorimetrickou rovnici, kde jsou z možných veličin, jimiž jsou měrná tepelná kapacita, hmotnost a teplota obou vzájemně působících objektů a výsledná teplota, zadány všechny kromě jedné, kterou má žák vypočítat. Nejčastěji je v takovýchto úlohách otázka na měrnou tepelnou kapacitu neznámého prvku, jako tomu bylo v úloze pro základní školy, nebo na jednu z teplot.

V této úloze není zadaná měrná tepelná kapacita, neboť se jedná pouze o jednu látku a při výpočtu žák zjistí, že díky tomu není potřebné znát její měrnou tepelnou kapacitu pro výpočet hledané hmotnosti.

3.2.3.1. Řešení

Úloha je určena pro použití kalorimetrické rovnice. Z ní víme, že teplo předané jednou látkou se rovná teplu přijatému látkou druhou. V našem případě horký čaj s počáteční teplotou t_h = 80 °C předává teplo Q_h studenému čaji s počáteční teplotou t_s = 20 °C, který přijímá teplo Q_s. Jejich výslednou teplotu po smíchání označme t_v = 45 °C a měrnou tepelnou kapacitu čaje c. Předpokládejme, že čaj má stejnou hustotu jako voda, proto jeden litr čaje váží jeden kilogram. Pak můžeme říct, že teplý čaj má hmotnost m_h = 0,25 kg a hledáme objem studeného čaje V_s, který odpovídá jeho hmotnosti m_s. Z těchto údajů vytvoříme rovnice:

$$Q_\mathrm{h} = Q_\mathrm{t}\,,$$
$$Q_\mathrm{s} = m_\mathrm{s} \cdot c \cdot (t_\mathrm{v} - t_\mathrm{s})\,,$$
$$Q_\mathrm{h} = m_\mathrm{h} \cdot c \cdot (t_\mathrm{h} - t_v).$$

Upravením této soustavy rovnic a následným dosazením hodnot ze zadání dostaneme výsledek:

$$m_\mathrm{s} \cdot c \cdot (t_\mathrm{v} - t_\mathrm{s}) = m_\mathrm{h} \cdot c \cdot (t_\mathrm{h} - t_\mathrm{v})\,,$$
$$\frac{m_\mathrm{h} \cdot \cancel{c} \cdot (t_\mathrm{h} - t_\mathrm{v})}{\cancel{c} \cdot (t_\mathrm{v} - t_\mathrm{s})} = m_\mathrm{s}\,,$$
$$\frac{0{,}25\ \mathrm{kg} \cdot 35\ ^\circ\mathrm{C}}{25\ ^\circ\mathrm{C}} = m_\mathrm{s}\,,$$
$$0{,}35\,\mathrm{kg} = m_\mathrm{s}\,,$$
$$m_\mathrm{s}[\mathrm{kg}] \approx V_\mathrm{s}[\mathrm{l}] \Rightarrow V_\mathrm{s} = 0{,}35\,\mathrm{l}$$

Odpověď tedy zní: Musíme přilít 0,35 l studeného čaje.

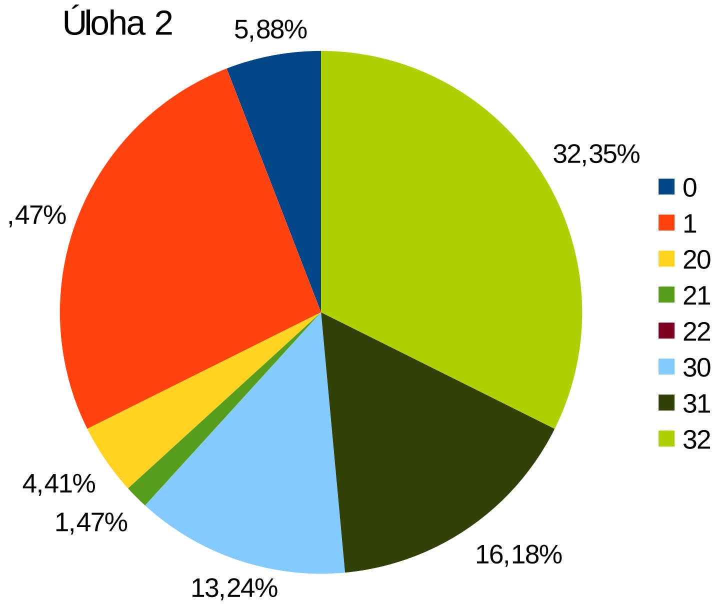
3.2.3.2. Předpokládané výsledky

V této úloze se dá zjistit, zda žáci používají matematické znalosti při řešení aplikačních úloh s porozuměním, nebo pouze opakují algoritmus, kterému plně nerozumí. V potřebných informacích pro výpočet je totiž informace, která není potřebná při řešení jediné úlohy v celém testu. Tou je měrná tepelná kapacita vody. Při výpočtu této úlohy není zapotřebí znát měrnou tepelnou kapacitu čaje, neboť se při výpočtu vykrátí, jak je ukázáno v části 3.2.3.1. Žáci, kteří řeší úlohy tak, že vytvoří rovnici, vyjádří hledanou veličinu, dosadí ze zadání hodnoty všech veličin a následně provedou výpočet na kalkulátoru, dosadí za měrnou tepelnou kapacitu čaje již zmíněnou měrnou tepelnou kapacitu vody místo toho, aby ji předtím vykrátili. Nezjistí tak, že k tomuto výpočtu je informace o hodnotě měrné tepelné kapacity čaje zbytečná.

3.2.3.3. Výsledky

Z celkového počtu 68 žáků správně dořešilo úlohu 22 žáků. Celé hodnocení výsledků je zachyceno v následujícím grafu a tabulce. V tabulce je k jednotlivým hodnocením uveden počet žáků, kterým toto hodnocení bylo přiřazeno. Diagram znázorňuje procentuální zastoupení počtu žáků v daných kategoriích hodnocení:

Přiřazené hodnocení		Počet žáků
0	–	4
1	–	18
20	–	3
21	–	1
22	–	0
30	–	9
31	–	11
32	–	22



V grafu je vyznačeno procentuální zastoupení jednotlivých kategorií z celku 68 žáků. Kategorie jsou označeny dle legendy grafu, která se nachází v pravé části.

Z 68 žáků jich 46 úlohu začalo nějakým způsobem řešit.

U této úlohy bylo dále zjišťováno, kolik žáků, kteří úlohu nějakým způsobem začali řešit, ji řešili tak, že při výpočtu nepoužili měrnou tepelnou kapacitu vody.

Z 46 žáků, kteří úlohu řešit začali, jich 19 nedosazovalo do vzorce při výpočtu měrnou tepelnou kapacitu vody. Z 22 žáků, kteří vyřešili úlohu správně, jich nedosazovalo měrnou tepelnou kapacitu vody 13.

Při řešení úlohy většina žáků volila postup uvedený v části 3.2.3.1. V ojedinělých případech se objevilo i jiné správné řešení, které se však pouze jednomu žákovi podařilo zdárně dokončit. Žák úlohu řešil takto:

Místo výpočtu předávaného a přijatého tepla vypočítal na základě analogie například se zákonem o zachování hybnosti, teplo ustáleného nápoje. To se musí rovnat součtu tepel původních kapalin, které se mísily. Obě řešení jsou na sebe převeditelná.

U žáka, který toto řešení použil, bylo navíc zajímavé, že s úlohou pracoval jako s čistě matematickou slovní úlohou a neznámou hmotnost označil standardně jako *x*, na rozdíl od většiny, kteří používali fyzikální veličiny pro označování neznámých. To by mohlo naznačovat, že žák pouze náhodně zkombinoval údaje ze zadání a zrovna v tomto případě se mu podařilo dospět k výsledku. Protože však žák dořešil veškeré úlohy, z toho tři zcela správně a ve dvou úlohách měl pouze numerickou chybu, je to málo pravděpodobné. Jedině v 5. úloze na Kirchhoffovy zákony k řešení sice dospěl, ale na základě zcela mylného úsudku.

Nejčastější chyby při řešení úlohy, kromě numerických chyb, byly tyto dvě – špatné určení změny teploty, chybné vytvoření kalorimetrické rovnice. Tyto chyby vyplývají povětšinou z toho, že žáci buď používají naučený algoritmus a nedokáží si přitom uvědomit, co jednotlivé kroky znamenají, nebo špatně analyzují údaje ze zadání.

3.2.4. Úloha 3.

„Kámen o hmotnosti 2 kg padá volným pádem z věže o výšce 80 m. Jakou má kinetickou a potenciální energii v čase 1 s od začátku pádu?“

(Bednařík, 2009, s.113)

Tato úloha je téměř shodná s úlohou v testu pro základní školy. Zde je však kladena otázka na kinetickou a potenciální energii v čase 1 s od začátku pádu. Tím je úloha značně komplikovanější. Žáci musí provést úvahu, jak potom obě energie vypočítat. Nejjednodušší způsob, který je také v hypotéze předpokládán jako nejpoužívanější, je uveden v části 3.2.4.1. Při tomto postupu je zapotřebí si uvědomit, že při zrychlení 10 m/s^2 má po 1 s pádu kámen rychlost právě 10 m/s. Na tomto základě žák vypočítá kinetickou energii a dopočítá potenciální energii jako doplněk kinetické energie do celkové mechanické energie, kterou lze jednoduše zjistit v počátečním stavu před započetím pádu. Lze také vypočítat potenciální energii na základě výpočtu dráhy, kterou kámen urazí za 1 s pádu. Pro toto řešení však není uveden vzorec pro výpočet dráhy u rovnoměrně zrychleného postupu.

3.2.4.1. Řešení

Úloha je na využití zákona o zachování mechanické energie. Mechanická energie se vypočítá jako součet potenciální a kinetické energie, a při mechanických dějích v izolované soustavě se nemění. V tomto případě, pokud zanedbáme vlivy prostředí, jako je odpor vzduchu, máme izolovanou soustavu kamene a země. Na začátku děje je kinetická energie nulová, neboť je nulová rychlost, proto je mechanická energie rovna počáteční energii potenciální. Označme hmotnost kamene m = 2 kg, výšku věže h = 80 m, gravitační zrychlení

g = 10 m/s^2, počáteční potenciální energii E_{p0}, hledanou potenciální energii E_p a hledanou kinetickou energii E_k. Počáteční mechanickou energii tedy vypočítáme takto:

$$E = E_{p0} = m \cdot g \cdot h$$

Při zrychlení 10 m/s^2 bude mít na konci první vteřiny kámen rychlost v = 10 m/s. Můžeme tedy vypočítat kinetickou energii na konci první vteřiny a na základě zákona o zachování mechanické energie vypočítáme potenciální energii jako rozdíl mechanické energie a kinetické energie:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 ,$$
$$E_p = E - E_k ,$$
$$E_p = E_{p0} - E_k ,$$
$$E_p = m \cdot g \cdot h - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 .$$

Dosazením hodnot ze zadání potom dostaneme výsledek:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot 2\ \mathrm{kg} \cdot (10\ \mathrm{m}/s)^2 ,$$
$$\underline{E_p = 2\ \mathrm{kg} \cdot 10\ \mathrm{m}/s^2 \cdot 80\ \mathrm{m} - E_k ,}$$
$$E_k = 100\ \mathrm{J} ,$$
$$E_p = 1600\ \mathrm{J} - 100\ \mathrm{J} = 1500\ \mathrm{J} .$$

Odpověď zní: Po 1 sekundě pádu bude mít kámen kinetickou energii 100 J a potenciální energii 1500 J.

3.2.4.2. Předpokládané výsledky

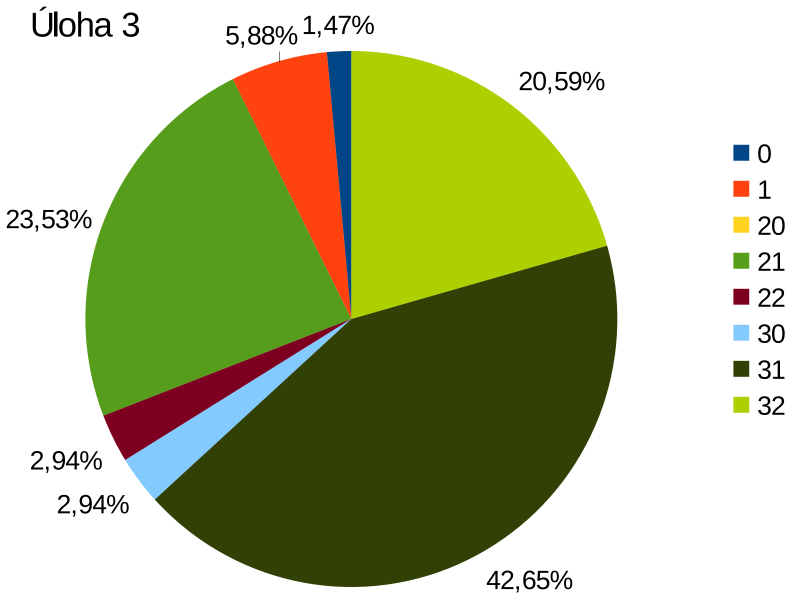
Největší problémy budou mít žáci s úvahou, jakým způsobem vypočítat energie v 1 s pádu. Kromě výše uvedeného postupu řešení v části 3.2.4.1. budou žáci využívat postup řešení přes výpočet dráhy, kterou kámen za 1 s pádu urazí. Tam však je problém, že se nejedná o rovnoměrný pohyb, což si někteří žáci neuvědomí. Je potřeba použít vzorec pro rovnoměrně zrychlený pohyb $s = ½ at^2$. Někteří žáci použijí vzorec pro výpočet dráhy pro rovnoměrný pohyb $s = vt$ a dojdou k nesprávnému výsledku. Postup přes výpočet dráhy je o něco náročnější, proto tento postup bude méně používaný. Tento postup je náročnější hlavně proto, že vzorec není uveden ve vzorcích potřebných pro řešení úloh, protože ve skutečnosti opravdu potřebný není.

Je také možnost, že žáci uvedou jako odpověď místo potenciální energie v 1 s pádu počáteční potenciální energii, neboť tu při řešení úlohy také počítají, a neuvědomí si, že to není odpověď na otázku kladenou v zadání.

3.2.4.3. Výsledky

Tuto úlohu správně vyřešilo 14 žáků z 68. Celé hodnocení výsledků je zachyceno v následujícím grafu a tabulce. V tabulce je k jednotlivým hodnocením uveden počet žáků, kterým toto hodnocení bylo přiřazeno. Diagram znázorňuje procentuální zastoupení počtu žáků v daných kategoriích hodnocení:

Přiřazené hodnocení		Počet žáků
0	–	1
1	–	4
20	–	0
21	–	16
22	–	2
30	–	2
31	–	29
32	–	14



Z výsledků je vidět, že řešení této úlohy bylo pro žáky obtížnější. Nejvíce chyb žáci udělali při úvaze, jak zjistit jednotlivé energie po 1 s pádu. U úspěšných řešitelů se objevovaly dvě strategie řešení, které byly i předpokládány v části 3.2.4.2. 11 žáků použilo postup řešení přes výpočet dráhy ze vzorce pro rovnoměrně zrychlený pohyb. 3 žáci použili postup řešení uvedený v části 3.2.4.1.

V postupech řešení se objevily předpokládané chyby – výpočet dráhy ze vzorce pro rovnoměrný přímočarý pohyb a uvedení počáteční potenciální energie do výsledků.

Další chybou, která se vyskytla v řešení pěti žáků, je dosazení do vzorce pro výpočet kinetické energie za *v* místo rychlosti výšku. Tato chyba je nejspíš způsobena tím, že v geometrii jsou žáci zvyklí vždy označovat písmenem *v* výšku, ačkoli je v informacích potřebných pro řešení úloh napsané, že písmenem *v* je v tomto testu označována rychlost.

Mnoho žáků také skončilo pouze výpočtem počáteční potenciální energie a dál úlohu neřešilo.

3.2.5. Úloha 4.

Zjisti nejmenší koeficienty $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ této chemické rovnice:

a $Ba(NO_3)_2$ + b $Al_2(SO_4)_3$ → c $BaSO_4$ + d $Al(NO_3)_3$

(http://www.e-chembook.eu/cz/obecna-chemie/chemicke-rovnice-vycislovani-a-vypocty)

Úloha je do testu zařazena z toho důvodu, že při jejím řešením pomocí soustav lineárních rovnic vzniknou čtyři rovnice o čtyřech neznámých. Navíc žáci musí na základě úvahy zjistit, že nemusí počítat veškeré prvky (tím by vzniklo pět rovnic o čtyřech neznámých), ale mohou brát celé zbytky kyselin (NO_3 a SO_4) namísto jejich rozdělení na jednotlivé prvky.

Úlohu je také možné řešit již poměrně náročně pomocí algoritmu uvedeného v části 2.5.1.2.a.

3.2.5.1. Řešení

Při řešení chemické rovnice je nejdůležitějším kritériem zákon o zachování počtu atomů, který říká, že pro každý prvek musí být shodný počet atomů na levé straně s počtem jeho atomů na straně pravé. Jedná se o chemickou reakci beze změny oxidačního čísla, což znamená, že jednotlivé prvky mají na levé straně stejné oxidační číslo jako na straně pravé. Proto je i zákon o zachování počtu atomů v tomto případě jediným kritériem pro určení koeficientů. Pro každý prvek tak můžeme vyjádřit rovnici této rovnováhy. Jelikož se zde objevují zbytky kyseliny dusičité a sýrové, které se bez změny vyskytují jak na levé, tak na pravé straně, můžeme počítat rovnováhu pro celý zbytek a ne jen pro jednotlivé prvky v nich.

Vzniknou tedy tyto rovnice:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ba}: &\quad a = c, \\ \mathrm{Al}: &\quad 2b = d, \\ \mathrm{NO_3}: &\quad 2a = 3d, \\ \mathrm{SO_4}: &\quad 3b = c. \end{aligned}$$

Ze zadání víme, že $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Navíc mají být nejmenší možná. Vyjádříme všechny koeficienty za pomocí a:

$$a = c,$$

$$b = \frac{a}{3},$$

$$\frac{2a}{3} = d.$$

Aby byla splněna podmínka, že jsou všechny koeficienty přirozená čísla, zvolíme *a* = 3. Tím dostaneme výsledné koeficienty: *b* = 1, *c* = 3, *d* = 2.

Výsledná chemická rovnice tím pádem vypadá takto:

$$3\ Ba(NO_3)_2 + Al_2(SO_4)_3 \rightarrow 3\ BaSO_4 + 2\ Al(NO_3)_3$$

3.2.5.2. Předpokládané výsledky

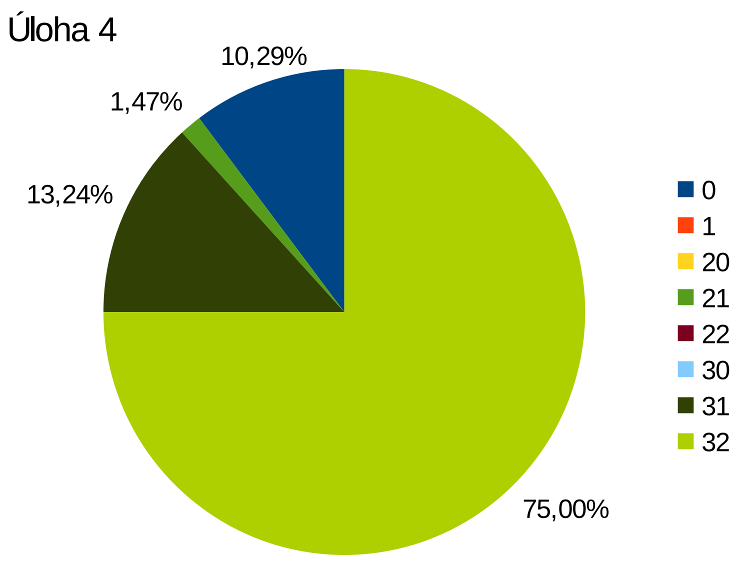
Žáci s řešením úlohy nebudou mít potíže. Většinou ji budou řešit pomocí algoritmu pro odhad stechiometrických koeficientů chemické rovnice uvedeného v části 2.5.1.2.a. Při použití tohoto postupu řešení se u některých žáků vyskytne násobek nejmenšího řešení, které se má dle zadání najít, protože žáci zapomenou koeficienty vydělit jejich největším společným dělitelem. Budou se však vyskytovat i řešení pomocí soustav lineárních rovnic.

3.2.5.3. Výsledky

V této úloze ke správnému řešení dospělo 51 žáků, což je 75 % z celkového počtu žáků.

Celé hodnocení výsledků je zachyceno v následujícím grafu a tabulce. V tabulce je k jednotlivým hodnocením uveden počet žáků, kterým toto hodnocení bylo přiřazeno. Diagram znázorňuje procentuální zastoupení počtu žáků v daných kategoriích hodnocení:

Přiřazené hodnocení		Počet žáků
0	–	7
1	–	0
20	–	0
21	–	1
22	–	0
30	–	0
31	–	9
32	–	51



Z výsledků je patrné, že tato úloha žákům nepůsobila téměř žádné obtíže. Toto tvrzení potvrzuje i fakt, že pouze 7 žáků úlohu nezačalo řešit.

Žáci úlohu řešili téměř výhradně odhadem pro výpočet stechiometrických koeficientem chemických rovnic. Často, jako odůvodnění jak na výsledek přišli, žáci psali „logickou úvahou“.

Dva žáci řešili úlohu pomocí soustav lineárních rovnic, z toho jeden úlohu nedořešil a druhý dospěl ke správnému výsledku.

4 žáci chybně usoudili, že jelikož koeficient *b* můžeme nakonec vynechat, bude jeho hodnota místo jedné rovna nule.

3.2.6. Úloha 5.

Na obrázku je nakresleno schéma obvodu se dvěma zdroji elektromotorického napětí U_{e1}, U_{e2} a se třemi rezistory R_1, R_2, R_3.

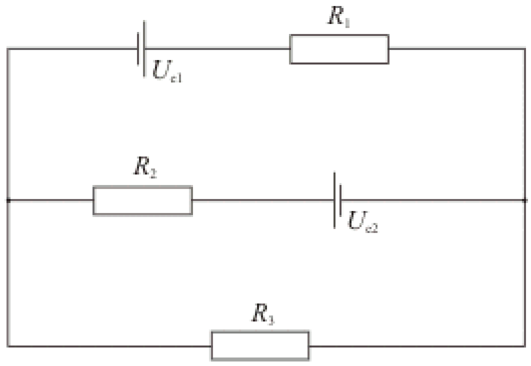
Určete, jaké proudy procházejí jednotlivými rezistory (jaká je jejich velikost a směr), jestliže:

$U_{e1} = 2U_{e2}$

$U_{e2} = 20$ V

$R_1 = R_3 = 20\ \Omega$

$R_2 = 30\ \Omega$



(http://fyzikalniulohy.cz/uloha.php?uloha=30)

Úloha byla zařazena do testu, neboť se při řešení využívá složitějších soustav lineárních rovnic. Je to jedna z mála aplikací problematiky soustav lineárních rovnic do fyziky na střední škole, ve které se v každé rovnici vyskytují téměř všechny neznámé.

Samotné Kirchhoffovy zákony jsou navíc učivem v rámci fyziky náročnějším, které se probírá až v pozdějších ročnících gymnázií a některých středních škol.

3.2.6.1. Řešení

Úloha je zaměřena na Kirchhoffovy zákony. Označme proudy na uzlu, který se nachází na obrázku vpravo takto: I_1 je proud, který směřuje od zdroje elektromotorického napětí U_{e1} do tohoto uzlu, I_2 je proud směřující od rezistoru s odporem R_2 do uzlu a I_3 je proud směřující z daného uzlu k rezistoru s odporem R_3. Na základě prvního Kirchhoffova zákona (součet proudů vtékajících do uzlu se rovná součtu proudů z uzlu vytékajících) vytvoříme první rovnici: $I_1 + I_2 - I_3 = 0$ A.

Zvolme směr obíhání po směru hodinových ručiček v horní smyčce, tvořené dvěma větvemi, ve kterých jsou oba zdroje elektromotorického napětí. V dolní smyčce, tvořené větvemi, ve kterých jsou rezistory s odpory R_2 a R_3, zvolme směr obíhání také po směru hodinových ručiček. Elektromotorická napětí mají směr od „mínusu k plusu“ (na obrázku od kratší k delší úsečce znázorňující zdroj elektromotorického napětí). Na základě druhého Kirchhoffova zákona (součet elektromotorických napětí v dané smyčce elektrického obvodu je roven součtu úbytku napětí na spotřebičích) vytvoříme tyto dvě rovnice:

$$U_{e1} + U_{e2} = -R_1 I_1 + R_2 I_2 \,,$$
$$-U_{e2} = -R_2 I_2 - R_3 I_3$$

Tím dostaneme soustavu tří rovnic o třech neznámých I_1, I_2, I_3. Dosadíme do nich za I_3 výraz $I_1 + I_2$ a rovnice, které plynou ze zadání úlohy: $U_{e1} = 2U_{e2}$, $R_1 = R_3$. Tím dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, kterou vyřešíme takto:

$$3U_{e2} = -R_1 I_1 + R_2 I_2 \,,$$
$$-U_{e2} = -R_2 I_2 - R_1 I_1 - R_1 I_2 \,.$$

Odečtením druhé rovnice od první dostaneme jednu rovnici o jedné neznámé, ze které vyjádříme neznámou I_2, a poté dosadíme hodnoty veličin ze zadání a dostaneme výslednou hodnotu:

$$4U_{e2} = I_2 (2 R_2 + R_1) \,,$$
$$\frac{4U_{e2}}{2 R_2 + R_1} = I_2 \,,$$
$$\frac{4\,20\,\mathrm{V}}{2\,30\,\Omega + 20\,\Omega} = I_{2,}$$
$$1\ \mathrm{A} = I_2 .$$

Nyní musíme dopočítat zbylé proudy. Z rovnice vyjádříme $3U_{e2} = -R_1 I_1 + R_2 I_2$ proud I_1 a dostaneme pro něj výsledek -1,5 A. Dále dosadíme tyto hodnoty do rovnice $I_3 = I_1 + I_2$ a získáme tak výsledek pro proud $I_3 =$ -0,5 A. Záporný výsledek u proudů značí, že proudy budou mít ve skutečnosti opačný směr, než směr, který jsme na začátku zvolili.

Odpověď zní: Proudy I_1, I_2, I_3 budou mít postupně velikost 1,5 A, 1 A a 0,5 A. Proudy I_2 a I_3 budou do zvoleného uzlu vtékat a proud I_3 bude z uzlu vytékat.

3.2.6.2. Předpokládané výsledky

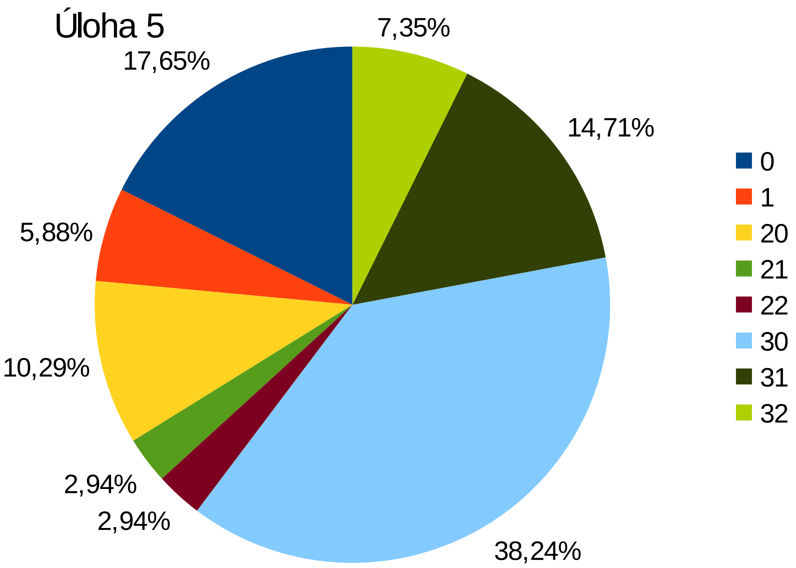
Tato úloha bude žákům působit největší problémy. Je to z toho důvodu, že vytvoření rovnic potřebných k řešení je náročné a žáci si musí z fyziky pamatovat postup pro jejich vytvoření. Lze sice odvodit sestrojení rovnic pouze na základě znění Kirchhoffových zákonů, které mají žáci uvedeny v potřebných informacích k řešení úloh. Tato metoda je však natolik náročná, že je velmi nepravděpodobné, aby některý z žáků takovýmto způsobem postupoval.

Pokud žáci vytvoří správně rovnice ze zadání, většinou je již dokáží správně vyřešit.

3.2.6.3. Výsledky

Z celkového počtu 68 žáků ke správnému výsledku dospělo pouze 5 žáků. Celé hodnocení výsledků je zachyceno v následujícím grafu a tabulce. V tabulce je k jednotlivým hodnocením uveden počet žáků, kterým toto hodnocení bylo přiřazeno. Diagram znázorňuje procentuální zastoupení počtu žáků v daných kategoriích hodnocení:

Přiřazené hodnocení		Počet žáků
0	–	12
1	–	4
20	–	7
21	–	2
22	–	2
30	–	26
31	–	10
32	–	5



Z výsledků je vidět, že počet správných řešení je nejmenší ze všech úloh, což bylo předpokládáno. Počet žáků, kteří vytvořili správně rovnice, je 19 z celkových 68. Z těchto žáků 5 dokončilo správně výpočet, 2 žáci sice sestavili správně soustavu rovnic, ale nedokončili úspěšně řešení úlohy. Oba totiž udělali při řešení soustavy chybu; tu sice odhalili a pokusili se ji opravit, ale na dořešení už jim nezbylo dost času.

3 žáci pro zápis soustavy lineárních rovnic použili rozšířenou matici a úlohu řešili Gaussovou eliminační metodou. Všichni tři žáci byli z Gymnázia Nad Alejí. Pouze jeden

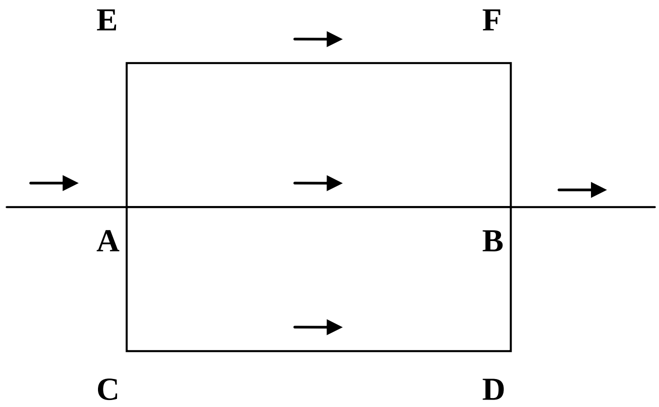
z nich úlohu vyřešil správně. Zbylí 2 žáci při pokusu o Gaussovu eliminaci používali postupy chybně a ke správnému výsledku se nedobrali.

Zbytek žáků k řešení použil postup, který je uveden v části 3.2.6.1.

Opakovanou chybou bylo nevyužití Kirchhoffových zákonů a snaha o řešení úlohy pouze na základě vzorce $U = R \cdot I$.

3.2.7. Úloha 6.

V oblasti jsou vybudovány tři paralelní silnice, mezi nimiž jsou dvě spojovací cesty. Pro zjednodušení uvažujeme, že pouze prostřední silnicí lze přijet a odjet z celé soustavy a všechny ulice jsou pouze jednosměrné.



Víme, že do soustavy na křižovatku **A** přijede 120 aut za hodinu. Úsekem **A**-**B** projede dvakrát více aut nežli úseky **A**-**E**-**F**-**B** a **A**-**C**-**D**-**B**. Úsekem **A**-**E**-**F**-**B** projede za hodinu třetina aut, která za hodinu projedou úsekem **A**-**C**-**D**-**B**. Kolik aut za hodinu projede jednotlivými úseky?

(Bakalářská práce, 2012)

Tato úloha byla do testu zařazena, neboť se jedná o netradiční úlohu. Úloha je z problematiky aplikací Kirchhoffových zákonů do dopravy a nejedná se tudíž o klasickou úlohu z fyziky či chemie.

Úloha je ve stejném znění i v testu pro základní školy. Proto lze udělat srovnání řešitelských strategií žáků základní školy a žáků gymnázia.

3.2.7.1. Řešení

Vzorové řešení této úlohy je uvedeno v části 2.3.3.1.

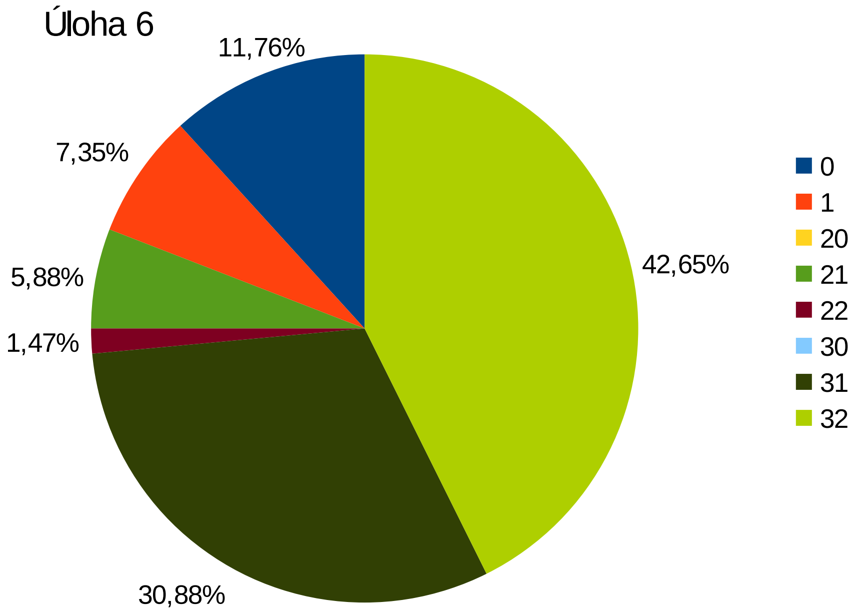
3.2.7.2. Předpokládané výsledky

Žáci budou k řešení úlohy používat převážně řešení pomocí soustav lineárních rovnic, které je uvedeno v části 2.3.3.1. Úloha nebude žákům činit větší problémy. Mohou se vyskytnout chyby způsobené špatným pochopením zadání, a to hlavně při matematizaci situace, že úsekem **A-B** projede dvakrát více aut nežli úseky **A-E-F-B** a **A-C-D-B**. Tuto větu mohou někteří žáci pochopit tak, že úsekem **A-B** projede dvakrát více aut nežli úsekem **A-E-F-B** nebo úsekem **A-C-D-B**.

3.2.7.3. Výsledky

Při řešení úlohy dospělo ke správnému řešení 29 žáků. Celé hodnocení výsledků je zachyceno v následujícím grafu a tabulce. V tabulce je k jednotlivým hodnocením uveden počet žáků, kterým toto hodnocení bylo přiřazeno. Diagram znázorňuje procentuální zastoupení počtu žáků v daných kategoriích hodnocení:

Přiřazené hodnocení		Počet žáků
0	–	8
1	–	5
20	–	0
21	–	4
22	–	1
30	–	0
31	–	21
32	–	29



Je vidět, že tato úloha žákům působila menší problémy. 24 žáků k řešení použilo soustavy lineárních rovnic. Zbylí žáci řešili úlohu úvahou nebo pomocí jedné rovnice.

4 žáci dospěli k řešení takovému, že součet jejich výsledných počtů aut, která projedou jednotlivými úseky, byl větší, než celkový počet aut, která přijedou do soustavy

silnic, uvedený v zadání. Tato chyba byla v jednom případě způsobena tím, že žák tento počet aut určil jako počet aut, která projedou úsekem **A**-**B**. Zbylí 3 žáci chybně pochopili zadání tak, že úsekem **A**-**B** projede dvakrát více aut nežli úsekem **A**-**E**-**F**-**B** nebo úsekem **A**-**C**-**D**-**B**.

3.3. Odpovědi na výzkumné otázky

1) *Jsou žáci 9. ročníku základní školy, která se zúčastnila experimentu, schopni úspěšně řešit úlohy na aplikace matematiky ve fyzice a chemii, při jejichž řešení se vyskytují soustavy lineárních rovnic, aniž by je v matematice probírali?*

Z výsledků experimentu vyplývá, že žáci 9. ročníku základní školy nejsou schopni úspěšně řešit úlohy tohoto typu nezávisle na tom, zda soustavy lineárních rovnic již probírali, nebo ne.

Zobecnění tohoto tvrzení však vyžaduje rozsáhlejší výzkumný vzorek.

2) *Jaké jsou nejčastější žákovské strategie řešení takovýchto úloh ve třídách, které se zúčastnili experimentu?*

Jednotlivé strategie jsou popsány v částech 3.1. a 3.2.

3) *Užívají žáci tříd, které se zúčastnili experimentu, matematické znalosti při řešení těchto úloh s porozuměním?*

Z výsledků experimentu vyplývá, že žáci při řešení používají spíš algoritmy, které se naučili v jiných předmětech nežli v matematice. Toto tvrzení potvrzují hlavně výsledky z úloh 2 a 3 z testu pro střední školy (viz části 3.2.2.3. a 3.2.3.3.)

Zobecnění tohoto tvrzení však vyžaduje rozsáhlejší výzkumný vzorek.

4) *Jaké se vyskytují typické chyby při řešení těchto úloh?*

Typické chyby pro jednotlivé úlohy jsou uvedeny ve výsledcích jednotlivých úloh v částech 3.1. a 3.2.

5) *Jaké typy úloh působí žákům nejmenší obtíže při řešení?*

V testu pro základní i střední školy dosáhli žáci nejvyšší úspěšnosti v úloze na vyčíslení stechiometrických koeficientů chemických rovnic a na aplikaci Kirchhoffových zákonů do dopravy (ve ZŠ testu úlohy 2 a 5 a v SŠ testu úlohy 4 a 6). Obě tyto úlohy nevyžadují znalosti z fyziky a dají se řešit „úvahou“, to jest jinak než použitím soustav lineárních rovnic.

6) *Jak lze využít takovýchto úloh při výuce?*

Odpovědí na tuto otázku je návrh využití aplikačních úloh při výuce matematiky, který je obsahem části 4.

7) *Jak koresponduje hodnocení žáka učitelem s jeho sebehodnocením?*

Žáci v testu vyplňovali, zda své matematické schopnosti hodnotí jako dobré, průměrné či podprůměrné. Do tří kategorií byly rozděleny i výsledky hodnocení učitelem podle těchto kritérií:

Kategorie	Průměrná známka na vysvědčení za poslední 3 pololetí
Dobré	Do 2,3 včetně
Průměrné	Od 2,3 do 3,6 včetně
Podprůměrné	Nad 3,6

Ze 118 dotazovaných žáků 82 mělo stejné sebehodnocení matematických schopností jako hodnocení daného žáka učitelem. U 27 žáků se potvrdila předpoklad, že chlapci považují své matematické schopnosti za lepší, než jaká jim odpovídá známka ve škole, a dívky naopak za horší. U 9 dotazovaných žáků tomu bylo naopak.

4. Návrh využití aplikačních úloh při výuce matematiky

Z výsledků testu je patrné, že aplikační úlohy jsou pro žáky obtížné. Využití aplikačních úloh při výuce matematiky by mělo žákům poskytnout možnost lépe pochopit témata, ve kterých se aplikace matematiky používá, a zároveň přiblížit jim smysl matematiky v dnešním světě. Při výuce matematiky se aplikační úlohy používají, avšak přímo použití úloh z jiných předmětů se vyskytuje pouze minimálně. Je to i z toho důvodu, že učitelé matematiky se takovým úlohám sami vyhýbají, případně dané problematice nerozumí. Přitom využitím úloh z jiných předmětů v hodinách matematiky je možné zvýšit motivaci žáků. Učitel může použít aplikaci matematiky v tématu, které žáky zajímá. Dalším motivačním prvkem pro žáka může být to, že pomocí využití úlohy z tématu, které žákovi dělá problémy, žák pochopí i dané téma.

U soustav lineárních rovnic se dá využít navíc takovýchto úloh při jejich samotném zavádění v hodinách matematiky, neboť se žáci v jiných předmětech již se soustavami setkali. Tím je možné dosáhnout toho, že někteří žáci pochopí postupy pro řešení soustav lineárních rovnic mnohem rychleji. Dají se totiž vybrat takové úlohy, které žáci již znají a v některých předmětech je již řešili, a které přitom přesně kopírují metody řešení soustav lineárních rovnic vyučované na základní škole.

Z výzkumu, který byl uskutečněn v rámci této práce, se dá usoudit, že schopnost žáků na základní škole řešit aplikační úlohy, ve kterých se soustavy lineárních rovnic používají, není vázána na to, zda žáci již probírali soustavy v hodinách matematiky. Také je patrné, že žáci se takovým úlohám již z principu vyhýbají a řešit je často ani nezačnou. V experimentu popsaném v kapitole 3 byla víc než polovina úloh, řešených žáky základní školy, odevzdána bez jakéhokoli náznaku řešení, anebo pouze s vypsanými hodnotami ze zadání bez pokusu o pokračování v řešení úlohy.

To, že si někteří žáci neuvědomují souvislosti mezi matematikou používanou v jiných předmětech a tím, co se učí přímo v matematice, potvrzuje tento příklad: U sebehodnocení matematických znalostí jedna žačka označila své matematické schopnosti za průměrné a dopsala k tomu, že to ale u ní neplatí ve fyzice a geometrii.

4.1. Zavedení soustav lineárních rovnic pomocí aplikačních úloh

V této části je návrh, jakým způsobem by se daly ve výuce matematiky zavést soustavy lineárních rovnic a metody řešení vyučované na školách pomocí aplikačních úloh. Při vhodném použití úloh totiž lze žákům ukázat, že se s celou problematikou již dříve setkali. A to nejen se soustavami jako takovými, ale i s jednotlivými metodami řešení vyučovaných na základní škole.

4.1.1. Úvod do tématu soustav lineárních rovnic

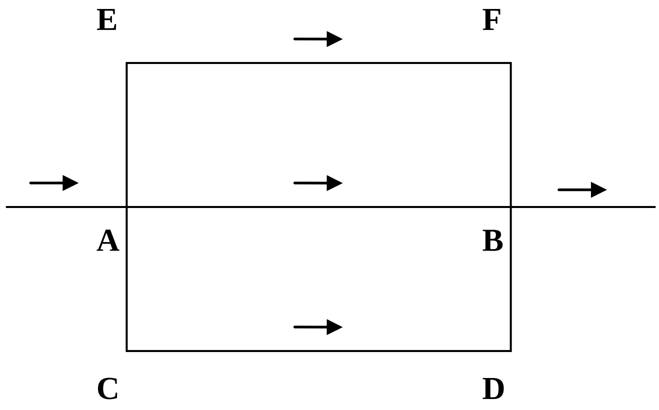
K samotnému začátku soustav lineárních rovnic a uvedení žáků do této problematiky se dají využít úlohy označované jako slovní úlohy o rozdělení celku na nestejné části. Jsou to úlohy, kde žák má daný celek rozdělit na několik částí tak, aby přitom splnil podmínky kladené na velikost jednotlivých částí. Tyto úlohy se dají řešit více způsoby a mimo jiné i soustavou lineárních rovnic, což je postup řešení, který je u žáků, kteří soustavy již znají a umějí je používat, ve velké míře zastoupen.

Tímto typem úlohy je i příklad na aplikaci Kirchhoffových zákonů do dopravy, který žáci v testu řešili, a při jehož řešení byly žáci úspěšnější, než ve většině zbylých úloh.

Na následujícím příkladě je ukázáno, jak lze tuto úlohu použít pro samotný úvod do problematiky soustav lineárních rovnic a ukázat na ní analogie mezi postupem řešení pomocí úvahy, grafického znázornění a soustav.

Učitel zadá žákům úlohu:

„V oblasti jsou vybudovány tři paralelní silnice, mezi nimiž jsou dvě spojovací cesty. Pro zjednodušení uvažujeme, že pouze prostřední silnicí lze přijet a odjet z celé soustavy a všechny ulice jsou pouze jednosměrné.



Víme, že do soustavy na křižovatku **A** přijede 120 aut za hodinu. Úsekem **A-B** projede dvakrát více aut nežli úseky **A-E-F-B** a **A-C-D-B**. Úsekem **A-E-F-B** projede za hodinu třetina aut, která za hodinu projedou úsekem **A-C-D-B**. Kolik aut za hodinu projede jednotlivými úseky? “

(Bakalářská práce, 2012)

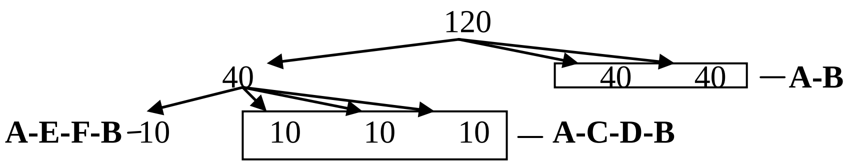
Žáci by měli úlohu zvládnout vyřešit pomocí úvahy nebo graficky. Z toho grafické řešení kopíruje postup řešení úvahou. Níže je uveden postup řešení úvahou a jeho grafická interpretace.

120 aut se nám rozdělí na 3 stejné skupiny, z nich 2 pojedou úsekem **A-B**. Zbytek aut se rozdělí na 4 skupiny, z nich 3 pojedou úsekem **A-C-D-B** (více viz kapitola 7.1.7.a).

Jedna možná grafická interpretace je pomocí následující tabulky:

	/:3	**/:4**	
	A-B		80 aut
	A-B		
120 aut	**A-E-F-B** **a A-C-D-B**	**A-E-F-B**	10 aut
		A-C-D-B	
		A-C-D-B	30 aut
		A-C-D-B	

Dalším způsobem, který jedna žákyně i v testu použila, je takovéto znázornění.



Po vyřešení úlohy tímto způsobem učitel upozorní žáky, že existuje ještě další možný způsob postupu řešení.

Učitel předvede žákům řešení úlohy pomocí soustav lineárních rovnic (viz kapitola 4.3.1.). Označíme-li *x, y*, resp. *z* počet aut, která projedou úsekem A-B, A-E-F-B, resp. A-C-D-B, soustava, kterou vytvoříme na základě podmínek uvedených v zadání bude tedy vypadat takto:

$$x+y+z=120\,,$$
$$2(y+z)=x\,,$$
$$\frac{1}{3}z=y\,.$$

Na postupu řešení pomocí soustav lineárních rovnic pak učitel ukáže, že oba postupy řešení jsou v podstatě pouze jiným zápisem téže skutečnosti a lze je na sebe vzájemně převést. Pokud například druhou rovnici upravíme do tvaru $y + z = x/2$ a dosadíme tento vztah do první rovnice, získáme rovnici $3/2 \cdot x = 120$, ze které, pokud chceme vyjádřit *x*, musíme 120 vydělit 3/2, což je pouze jiné vyjádření skutečnosti, že 120 aut se rozdělíme na tři skupiny o stejném počtu aut a dvě z nich projedou úsekem **A-B**.

Při tomto postupu zavedení soustav lineárních rovnic žáci od začátku vědí, k čemu soustavy slouží. Je zde navíc možnost, že žákům celá problematika bude připadat jednodušší, neboť se v podstatě neučí nové postupy, nýbrž jenom nový zápis postupů, které již znají.

4.1.2. Substituční metoda

Substituční metodu žáci běžně používají ve fyzice a používají ji téměř intuitivně. Avšak často si při matematice nejsou schopni tuto skutečnost uvědomit a učí se znovu věc, kterou již znají. Ve fyzice téměř od samého začátku používají při výpočtech dosazení jednoho vzorce do druhého, což je přímo použití substituční metody. Již samotné dosazení hodnot do vzorce je ve své podstatě substituce, neboť do vzorce–rovnice dosazují žáci za veličinu–neznámou, kterou mají vyjádřenou jednoduchou rovnicí.

Učitel může tedy využít toho, že žáci substituční metodu již umí a jsou jí schopni v úlohách ve fyzice používat. Před začátkem výuky substituční metody učitel tedy zadá například takovouto úlohu:

Jaká gravitační síla působí na jeden litr rtuti, když víme, že hustota rtuti je 13 534 kg/m^3 a gravitační zrychlení je 10 m/s^2?

Žáci by ji měli být schopni bez větších problémů vyřešit takto:

Velikost gravitační síly vypočítáme dle vzorce $F=m\cdot g$, kde *m* je hmotnost tělesa a *g* je gravitační zrychlení. Zatím neznáme hmotnost. Ta se vypočítá pomocí vzorce $m=V\cdot\rho$, kde

V je objem tělesa a ρ je jeho hustota. Nyní ještě potřebujeme vyjádřit objem, který je v litrech, v metrech krychlových, abychom počítali se stejnými jednotkami, čímž dostaneme objem rtuti 0,001 m^3. Máme tedy dva vzorce: $F=m\cdot g$, $m=V\cdot\rho$. Dosazením hodnot jednotlivých veličin ze zadání dostaneme následující soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, kde v druhé máme přímo vyjádřenou neznámou m, tudíž ji dosadíme do rovnice první a tu následně vyřešíme.

$$F = m \cdot 10\ \mathrm{m/s^2}\,,$$
$$m = 0{,}001\ \mathrm{m^3} \cdot 13\,534\ \mathrm{kg/m^3}\,.$$
$$\downarrow$$
$$F = 0{,}001\ \mathrm{m^3} \cdot 13\,534\ \mathrm{kg/m^3} \cdot 10\ \mathrm{m/s^2}\,,$$
$$F = 135{,}34\ \mathrm{N}\,.$$

Odpověď tedy je: Na jeden litr rtuti působí gravitační síla 135,34 N.

Po vyřešení této úlohy učitel upozorní žáky na krok ve výpočtu, při kterém dosazovali jeden vzorec do vzorce druhého a vysvětlí jim, že tato metoda řešení soustav lineárních rovnic se nazývá dosazovací, neboli substituční, a v matematice je běžně používaná.

4.1.3. Komparační metoda

S komparační, nebo také srovnávací, metodou řešení soustav lineárních rovnic se žáci také již setkali. Opět může učitel použít pro názornou ukázku této metody úlohu z fyziky. Jedno z názorných použití komparační metody ve fyzice je u dějů, kde se zachovává jistá vlastnost. V učivu základní školy to je dle rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání například zákon o zachování mechanické energie a kalorimetrická rovnice. Vzhledem k tomu, že v testu uspěli žáci lépe při řešení zákona o zachování mechanické energie, je vhodnější použít příklad právě z této problematiky.

Příklad, na kterém může učitel komparační metodu předvést a vysvětlit žákům, může vypadat například takto:

„Kámen o hmotnosti 2 kg padá volným pádem z věže o výšce 80 m. Jakou má kinetickou energii při dopadu?“

(Bednařík, 2009, str. 113)

Potenciální energie je rovna součinu hmotnosti, gravitačního zrychlení a výšky. Kinetická energie je rovna polovině součinu hmotnosti a druhé mocniny rychlosti.

Kinetickou energii nyní nemůžeme vypočítat. Víme však, že při dopadu je potenciální energie nulová a na začátku děje je nulová energie kinetická. Označme tedy E_{kz} kinetickou energii na začátku děje, E_{pz} potenciální energii na začátku děje a E_{z} mechanickou energii na začátku děje. Analogicky označíme E_{kd}, E_{pd}, E_{d} jako energii kinetickou, potenciální a mechanickou při dopadu.

$$E_{\mathrm{z}} = E_{\mathrm{pz}} + E_{\mathrm{kz}},$$
$$E_{\mathrm{d}} = E_{\mathrm{pd}} + E_{\mathrm{kz}}.$$

Jelikož víme, že mechanická energie se během děje nemění, můžeme za E_{z} a E_{d} dosadit E. Následně použitím komparační metody sloučíme obě rovnice do jedné a dostaneme jednu rovnici s jednou neznámou, kterou vyřešíme:

$$E = E_{\mathrm{pz}} + E_{\mathrm{kz}},$$
$$E = E_{\mathrm{pd}} + E_{\mathrm{kz}},$$

$$E_{\mathrm{pz}} + E_{\mathrm{kz}} = E_{\mathrm{pd}} + E_{\mathrm{kd}},$$
$$m \cdot g \cdot h = E_{\mathrm{kd}}.$$

Dosazením hodnot ze zadání dostaneme výsledek. Odpověď zní: Kámen má při dopadu kinetickou energii 1 600 J.

V úloze učitel upozorní na krok, který byl proveden na základě neměnnosti mechanické energie během mechanického děje v izolované soustavě. Mechanická energie je vyjádřena dvěma různými vztahy, které sloučíme do jedné rovnice. Srovnáváme, neboli komparujeme, dva vztahy, které se rovnají jedné veličině.

Učitel žákům vysvětlí, že tato metoda se nazývá komparační nebo také srovnávací a v matematice se používá pro řešení soustav lineárních rovnic.

4.1.4. Sčítací metoda

Postup, který se používá při sčítací metodě, se používá v chemii při vyčíslování chemických rovnic se změnou oxidačního čísla, také zvaných oxidačně redukční rovnice nebo zkráceně RedOx rovnice. Zde se nepoužívá přímo pro řešení soustavy rovnic, ale důvod a způsob jeho použití je stejný jako u postupu řešení soustav lineárních rovnic sčítací metodou. Pro úvod může učitel použít například takovouto úlohu:

Dopočítejte stechiometrické koeficienty u následující chemické rovnice.

$$\mathrm{Cu^{II}O^{-II}} + \mathrm{N^{-III}H_3^{I}} \rightarrow \mathrm{Cu^0} + \mathrm{N_2^0} + \mathrm{H_2^I O^{-II}}$$

Vypíšeme z rovnice prvky, které mění své oxidační číslo, a počet elektronů, které se při reakci přeskupují (viz část 2.5.1.3.).

$$\mathrm{N}^{-\mathrm{III}} - 3e^{-} \rightarrow \mathrm{N}^{0}$$
$$\mathrm{Cu}^{\mathrm{II}} + 2e^{-} \rightarrow \mathrm{Cu}^{0}$$

Jelikož elektrony během reakce nevznikají ani nezanikají, musí se počet odebraných elektronů rovnat počtu elektronů předaných. Obě rovnice tedy vynásobíme tak, aby počet předávaných elektronů v každé rovnici byl stejný. V chemii se převážně používá takzvané křížové pravidlo, za pomoci kterého danou rovnici vynásobíme počtem elektronů v rovnici druhé. Tím však nemusíme dostat řešení s nejmenšími koeficienty. Musíme tedy na konci provést ještě kontrolu, zda neexistuje řešení menší. Při použití metody násobení rovnic tak, aby výsledný počet předávaných elektronů se rovnal nejmenšímu společnému násobku počtů předávaných elektronů v obou původních rovnicích, toto riziko odpadá.

$$\mathrm{N}^{-\mathrm{III}} - 3e^{-} \rightarrow \mathrm{N}^{0} \quad / \cdot 2$$
$$\mathrm{Cu}^{\mathrm{II}} + 2e^{-} \rightarrow \mathrm{Cu}^{0} \quad / \cdot 3$$

$$2\,\mathrm{N}^{-\mathrm{III}} - 6\,e^{-} \rightarrow 2\mathrm{N}^{0}$$
$$3\,\mathrm{Cu}^{\mathrm{II}} + 6e^{-} \rightarrow 3\mathrm{Cu}^{0}$$

$$3\,\mathrm{Cu}^{\mathrm{II}} + 2\,\mathrm{N}^{-\mathrm{III}} \rightarrow 3\mathrm{Cu}^{0} + 2\mathrm{N}^{0}$$

Nyní dosadíme vypočítané koeficienty do původní rovnice a dopočítáme chybějící koeficienty na základě zákona o zachování počtu atomů.

$$3\,\mathrm{Cu}^{\mathrm{II}}\,\mathrm{O}^{-\mathrm{II}} + 2\,\mathrm{N}^{-\mathrm{III}}\,\mathrm{H}_3^{\mathrm{I}} \rightarrow 3\mathrm{Cu}^{0} + \mathrm{N}_2^{0} + 3\,\mathrm{H}_2^{\mathrm{I}}\,\mathrm{O}^{-\mathrm{II}}$$

Učitel se poté zaměří na část postupu řešení, kdy se řešila rovnost elektronů, které se během reakce přeskupují. Násobily se tam jednotlivé rovnice tak, aby při součtu „koeficientů“, které vyjadřují počet elektronů podle znaménka buď předávaných, nebo přijatých, byl nulový.

Pokud žáci v řešení neuvedou krok, kdy se sečtou dané rovnice do jedné, která již neobsahuje elektrony, dopíše učitel tento krok do řešení. Vysvětlí pak žákům, že tento krok je dále rozepsaný v koncové rovnici, kde jsou jen navíc dopsané další prvky, které se účastní reakce.

Naváže na tento příklad úlohou, kde se budou vyskytovat u jedné neznámé stejné koeficienty jako u elektronů. Úloha bude vypadat například takto:

$$4x - 3y = 1,$$
$$3x + 2y = 5.$$

Na tomto příkladě učitel žákům ukáže stejný postup řešení, který byl použit v části řešení chemické úlohy: Pomocí sčítací metody vypočítat nejprve neznámou *x*.

4.1.5. Soustavy *n* rovnic o *m* neznámých, kde *n* > 2 a *m* > 2

Jedná se o téma, které se většinou učí až na střední škole. Do rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání spadají pouze soustavy dvou rovnic o dvou neznámých.

S tímto tématem se žáci setkali v chemii při vyčíslování stechiometrických koeficientů chemických rovnic beze změny oxidačního čísla, které se probírá již na základní škole. Pro výpočet však většinou používají algoritmus, který je uvedený v části 2.5.1.2.a. Algoritmus je založen na řešení soustav lineárních rovnic, pouze však na jistém druhu odhadu řešení. Dají se jeho pomocí rychle řešit jednodušší chemické rovnice. Vyčíslení složitější chemických rovnic je již tímto způsobem obtížné. Proto je pro vyčíslení složitějších chemických rovnic výhodnější použití postupu řešení pomocí soustav lineárních rovnic. Mnohdy se však ve školách tento postup v chemii neučí. Tyto úlohy se však dají v matematice využít pro úvod do problematiky soustav více než dvou rovnic o více než dvou neznámých.

Učitel jako úvod do tématu zadá žákům k řešení úlohu:

Zjisti nejmenší koeficienty $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ této chemické rovnice:

$a\ Ba(NO_3)_2 + b\ Al_2(SO_4)_3 \rightarrow c\ BaSO_4 + d\ Al(NO_3)_3$

Může se stát, že žáci nebudou úlohu schopni řešit, pokud jsou koeficienty vyjádřeny pomocí neznámých (viz část 3.1.3.3.). V takovém případě může učitel zadat úlohu bez koeficientů, což sice není zcela korektní, avšak v chemii se takto úlohy tohoto typu často zadávají.

Žáci úlohu vyřeší pomocí algoritmu takto:

Na levé straně rovnice jsou dva atomy hliníku a na pravé pouze jeden, proto zvýšíme na pravé straně koeficient před molekulou dusičnanu hlinitého na 2. Tím dostaneme na pravé straně 6 atomů dusíku. Na levé straně jsou atomy dusíku 2, proto zvýšíme koeficient před molekulou dusičnanu barnatého na 3, čímž se nám počet atomů dusíku vyrovná. Na levé straně máme nyní 3 atomy barya a na pravé pouze 1. Zvýšíme tedy koeficient před molekulou síranu barnatého na 3. To zvýší počet atomů síry na pravé straně na 3 atomy, což je rovno počtu atomů síry na levé straně. Ještě zkontrolujeme počty atomů kyslíku, které již vychází na levé a pravé straně rovnice stejně.

Řešením je tedy rovnice:

$3\ Ba(NO_3)_2 + Al_2(SO_4)_3 \rightarrow 3\ BaSO_4 + 2\ Al(NO_3)_3$

U této úlohy řešení pomocí algoritmu již není úplně jednoduché a některým žákům může dělat problémy úlohu vyřešit.

Po vyřešení úlohy pomocí algoritmu ukáže učitel žákům řešení pomocí soustav lineárních rovnic (viz část 3.1.3.1.).

Úlohy na vyčíslení stechiometrických koeficientů chemických rovnic beze změny oxidačního čísla lze navíc použít při výuce rovnic s parametrem. Jednoznačný výsledek totiž zde vyjde pouze díky podmínce, že máme nalézt nejmenší řešení. Pokud bychom tuto podmínku neměli, dostali bychom nekonečně mnoho řešení, která budou závislá na jednom parametru.

4.2. Procvičování soustav lineárních rovnic pomocí aplikačních úloh

Využívání úloh zaměřených na aplikace matematiky v jiných předmětech k procvičování matematických schopností je vhodné pro posílení žákovy představy o využitelnosti daného tématu matematiky. Jelikož žák pro jejich řešení používá i informace z jiných předmětů, utváří si tak ucelený systém informací a lépe si uvědomuje vzájemné propojení jednotlivých předmětů.

Z výsledků experimentu je patrné, že u úloh zaměřených na aplikaci matematiky žáci využívají spíše algoritmického postupu. Zařazením těchto úloh mezi úlohy k procvičování soustav lineárních rovnic poskytuje učitel žákovi možnost pochopit matematickou podstatu daného tématu a tím zlepšit jeho úspěšnost nejen v matematice, ale i v daném předmětu.

4.2.1. Kalorimetrická rovnice

V experimentu se ukázalo, že žáci při řešení úloh na využití kalorimetrické rovnice nevyužívají matematické znalosti s dostatečným porozuměním. Tím si výpočet úlohy dělají zbytečně složitým. Mnohdy je právě toto důvod, proč žák nedospěje ke správnému výsledku.

Využití úloh na použití kalorimetrické rovnice je vhodné například pro procvičování komparační metody, jak je již uvedeno v části 4.1.3. Následující příklad ilustruje, jakým způsobem kalorimetrická rovnice s komparační metodou koresponduje:

„Závaží o hmotnosti 500 g z neznámého prvku o teplotě t_p = 100 °C vhodíme do 2 kg vody o teplotě t_v = 20 °C. Teplota vody a závaží se ustálila na t = 24 °C. Urči měrnou tepelnou kapacitu neznámého prvku, když víš, že měrná tepelná kapacita vody je rovna 4 180 J/(kg · K).“

(http://www.ucebnice.krynicky.cz/Fyzika/2_Molekulova_fyzika_a_termika/2_Vnitrni_energie_prace_teplo/2203_Kalorimetricka_rovnice.pdf, cit. 28.3. 2014)

Teplo vypočítáme jako součin hmotnosti, měrné tepelné kapacity a změny teploty. Označíme veličiny popisující stav vody dolním indexem v a veličiny popisující stav neznámého prvku dolním indexem p.

$$Q_v = m_v \cdot c_v \cdot (t - t_v),$$
$$Q_p = m_p \cdot c_p \cdot (t_p - t).$$

Na základě platnosti kalorimetrické rovnice víme, že tepla Q_v *a* Q_p se rovnají, proto je můžeme označit obě písmenem *Q*. Převedeme hmotnost neznámého prvku na kilogramy, následně použijeme komparační metody a dostaneme rovnici s jednou neznámou veličinou, do které dosadíme a dopočítáme ji:

$$Q = m_v \cdot c_v \cdot (t - t_v),$$
$$Q = m_p \cdot c_p \cdot (t_p - t),$$

$$m_v \cdot c_v \cdot (t - t_v) = m_p \cdot c_p \cdot (t_p - t).$$

Dosazením hodnot ze zadání dostaneme výsledek. Odpověď zní: Měrná tepelná kapacita neznámého prvku je 880 J/(kg · K).

4.2.2. Zákon o zachování hybnosti

Jak je již zmíněno v části 3.1.5., zákon o zachování hybnosti nespadá do učiva fyziky základní školy dle rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání. Použití úloh na využití zákona o zachování hybnosti k procvičování soustav lineárních rovnic proto je učeno spíše pro střední školy či gymnázia, když se žáci s touto problematikou již setkali ve fyzice.

Žáci by však měli být schopni své matematické znalosti aplikovat i v nestandardních úlohách. V očekávaných výstupech žáka základní školy z matematiky a jejích aplikací v rámcovém vzdělávacím programu je uvedeno:

„Žák řeší úlohy na prostorovou představivost, aplikuje a kombinuje poznatky a dovednosti z různých tematických a vzdělávacích oblastí.“

(Jeřábek, 2007. s. 33)

Úlohy na využití zákona o zachování hybnosti tak lze využít jako jistý druh problémových úloh. Pokud mají totiž žáci k dispozici vzorec pro výpočet hybnosti a znění zákona o zachování hybnosti, měli by na základě předchozích zkušeností z fyziky a matematiky být schopni úlohu vypočítat.

Problémové úlohy by měly vycházet z reálných situací. V případě úloh na využití zákona o zachování hybnosti, i obecně při využití fyzikálních úloh, se vždy jedná o reálné situace. Jelikož žák u těchto úloh musí zkombinovat poměrně velké množství znalostí, je vhodné zadat žákům úlohu jako práci ve skupinách.

Takovouto úlohu je potřeba zařadit do výuky až poté, co žáci již dokáží úlohy na soustavy lineárních rovnic řešit. Jedná se hlavně o rozvíjení schopnosti žáků použít již nabyté znalosti v nových situacích. Lze například použít úlohu:

„Na pramici o hmotnosti 60 kg spolu plují kluk o hmotnosti 75 kg a dívka o hmotnosti 50 kg. Pramice s oběma pasažéry se pohybuje rychlostí 2 m/s, když z ní kluk skočí do vody tak, že vodorovná složka jeho rychlosti má velikost 6 m/s. Urči, jakou rychlostí se bude po jeho skoku pohybovat dívka s lodí, pokud kluk vyskočil proti směru jízdy loďky.

(http://www.realisticky.cz/ucebnice/02%20Fyzika%20S%C5%A0/01%20Mechanika/02%20Dynamika/19%20Z%C3%A1kon%20zachov%C3%A1n%C3%AD%20hybnosti%20II.pdf)

Aby úlohu žáci zvládli vyřešit, je potřeba zadání úlohy upravit a přiřadit k zadání informace o výpočtu hybnosti a znění zákona o zachování hybnosti. Zadání pak může vypadat takto:

Hybnost p tělesa se vypočítá $p = m \cdot v$, kde v je rychlost tělesa a m jeho hmotnost.

Zákon o zachování hybnosti: Celková hybnost izolované soustavy těles se vzájemným působením těles nemění.

Na základě těchto informací vyřešte úlohu:

Na pramici o hmotnosti 60 kg spolu plují kluk o hmotnosti 75 kg a dívka o hmotnosti 50 kg. Pramice s oběma pasažéry se pohybuje rychlostí 2 m/s, když z ní kluk skočí do vody tak, že vodorovná složka jeho rychlosti vzhledem k zemi má velikost 6 m/s. Dívku, chlapce a pramici považuj za izolovanou soustavu.

Urči hybnost soustavy před tím, než chlapec vyskočil z pramice.

Urči, jakou rychlostí se bude po jeho skoku pohybovat dívka s lodí, pokud kluk vyskočil proti směru jízdy loďky.

Otázka na hybnost soustavy před vyskočením chlapce je přidána z toho důvodu, aby si žáci napřed vyzkoušeli vypočítat samotnou hybnost a nevedla žáky k dalšímu postupu řešení. Jelikož se ptá na hybnost před vyskočením chlapce, napovídá tak, že dva stavy, které budou žáci porovnávat, jsou rozděleny právě výskokem chlapce. Řešení pak vypadá takto:

Hybnost soustavy před vyskočením chlapce se vypočítá jako součet hmotností chlapce, dívky a pramice vynásobené jejich rychlostí, kterou se spolu s pramicí pohybují.

Označme si proto m_c, m_d, respektive m_p postupně hmotnosti chlapce, dívky, respektive pramice. Rychlost, kterou se na začátku pohybuje pramice, označme v_{p0} a hybnost soustavy před vyskočením chlapce p_0.

Výpočet hybnosti bude vypadat takto:

$$p_0 = (m_\mathrm{c} + m_\mathrm{d} + m_\mathrm{p}) \cdot v_{\mathrm{p}0}\,,$$
$$p_0 = (75\,\mathrm{kg} + 50\,\mathrm{kg} + 60\,\mathrm{kg}) \cdot 2\,\mathrm{m/s}\,,$$
$$p_0 = 370\,\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Odpověď na první otázku zní: Hybnost soustavy před vyskočením chlapce je 370 (kg · m)/s.

Označme si rychlost chlapce po vyskočení v_c a jeho hybnost p_c. Hybnost pramice s dívkou po vyskočení označme p_1. Celkovou hybnost po vyskočení chlapce si označme p_2. Jelikož chlapec vyskočí v opačném směru, než se pohybuje pramice, bude jeho rychlost mít zápornou hodnotu v_c = -6 m/s. Hybnost soustavy před vyskočením chlapce má být stejná, jako celková hybnost po jeho vyskočení. Na základě podobnosti například se zákonem o zachování mechanické energie potom vytvoříme tyto rovnice:

$$p_0 = p_2\,,$$
$$p_2 = p_1 + p_\mathrm{c}\,,$$
$$p_\mathrm{c} = m_\mathrm{c} \cdot v_\mathrm{c}\,,$$
$$p_1 = (m_\mathrm{d} + m_\mathrm{p}) \cdot v_1\,.$$

Sloučením těchto rovnic a následným dosazením hodnot veličin ze zadání dostaneme výsledek:

$$p_0 = (m_\mathrm{d} + m_\mathrm{p}) \cdot v_1 + m_\mathrm{c} \cdot v_\mathrm{c}\,,$$
$$\frac{p_0 - m_\mathrm{c} \cdot v_\mathrm{c}}{m_\mathrm{d} + m_\mathrm{p}} = v_1\,,$$
$$\frac{370\,\frac{(kg \cdot m)}{s} - 75\,\mathrm{kg} \cdot (-6\,\frac{m}{s})}{50\,\mathrm{kg} + 60\,\mathrm{kg}} = v_1\,,$$
$$\frac{82}{11}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = v_1\,.$$

Odpověď zní: Pramice s dívkou se po vyskočení chlapce bude pohybovat rychlostí (82/11) m/s.

5. Závěry

Cílem této práce bylo zjistit, jaké strategie řešení úloh zaměřených na aplikaci matematiky v jiných předmětech, konkrétně fyzice a chemii, využívají žáci základních a středních škol, které se zúčastnily experimentu. Toho bylo dosaženo prostřednictvím experimentu, kterého se zúčastnily dvě třídy základní školy a tři třídy gymnázií.

Dalším cílem bylo vytvořit návrh využití takovýchto úloh ve výuce matematiky, čehož bylo v práci dosaženo.

Výsledky experimentu lze použít jako základ pro širší výzkum, který by se věnoval zkoumání konkrétnějších cílů, které se při tomto experimentu objevily. Například zda má vliv na žákovu schopnost řešit aplikační úlohy fakt, že v hodinách matematiky již probíral soustavy lineárních rovnic.

Na práci lze také navázat zavedením navrhovaného použití aplikačních úloh do praxe a zjištěním prospěšnosti využití tohoto přístupu pro žákovo pochopení soustav lineárních rovnic a daných témat z jiných předmětů.

6. Seznam použité litaratury

BARTUŠKA, K., SVOBODA, E., *Fyzika pro gymnázia – molekulová fyzika a termika*. 1. vyd. Praha : Galaxie, 1993. ISBN 80-85204-22-3.

BEDNAŘÍK, M., ŠIROKÁ, M., *Fyzika pro gymnázia – mechanika*. 4. vyd. Praha : Prometheus, 2009. ISBN 978-80-7196-382-0.

BEDNÁROVÁ, R., *Mezipředmětové vazby ve výuce matematiky a fyziky na ZŠ*. [Diplomová práce] Brno : Masarykova univerzita, 2008

BENEŠ, P., PUMPR, V., BANÝR, J., *Základy chemie I.* 4. vyd. Praha : Fortuna, 2005. ISBN 80-7168-720-0.

BICAN, L., *Lineární algebra a geometrie*. 1. vyd. Praha : Academia, 2000. ISBN 80-200-0843-8.

ČADÍLEK, M., LOVEČEK, A., *Didaktika odborných předmětů.* Brno : 2005

JEŘÁBEK, J., TUPÝ, J., *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. Praha : VÚP, 2007.

KOZÁKOVÁ, L., *Mezipředmětové vazby matematika – chemie : Aplikace matematiky v učivu chemie na základní škole.* [Diplomová práce] Brno : Masarykova univerzita, 2008

KUŘINA, F., a kol. *Matematika a porozumění světu : Setkání s matematikou po základní škole*. 1. vyd. Praha : Academia, 2009. ISBN 978-80-200-1743-7

LEIPL, O., ŠEDIVÝ, P., *Fyzika pro gymnázia – elektřina a magnetismus*. 6. vyd. Praha : Prometheus, 2011. ISBN 978-80-7196-385-1.

LOUTHAN, M., *Vztah digitálního modelu reliéfu a síťových analýz při řešení dopravních úloh.* [Diplomová práce] Olomouc : Univerzita Palackého v Olomouci, 2010.

NOVOTNÝ, T., *Aplikace algebry v přírodovědných oborech a ekonomii.* [Bakalářská práce] Praha : Univerzita Karlova v Praze, 2012.

SKALKOVÁ, J., *Obecná didaktika*. Praha : Grada Publishing, a.s., 2007.

TRNA, J., Nastává éra mezioborových didaktik? *Pedagogická orientace*, 2005, roč. 15, č. 1, 89–97. ISSN 1805-9511.

7. Seznam příloh

Příloha 1. Test ZŠ

Dobrý den,

děkuji za vaši spolupráci na mé diplomové práci, která se zabývá aplikací matematiky v ostatních vyučovacích předmětech. Data, která z tohoto testování získám, budou použita pouze pro analýzu vašich znalostí a postupů, které budete v následujících úlohách používat. Prosím vás tedy o to, abyste veškeré postupy do testu zaznamenali.

Bc. Tomáš Novotný

Pedagogická Fakulta Univerzity Karlovy

Pohlaví	Věk	Sám bych své matematické schopnosti hodnotil/a	Hodnocení učitelem
		Dobře/Průměrně/Podprůměrně*	

*Odpověď zakroužkuj

Potřebné znalosti a vzorce:

m – hmotnost

h – hladina/výška

v – rychlost

p – hybnost – $p = m v$

c – tepelná kapacita

$c_{(H_2O)} = 4\,180 \frac{\mathrm{J}}{(\mathrm{kg \cdot K})}$

t – teplota

Δt – změna teploty

Potenciální energie – $E_\mathrm{p} = m g h$

Kinetická energie – $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} m v^2$

g – gravitační zrychlení – odpovídá přibližně 10 m/s^2

Zákon o zachování hybnosti – Celková hybnost izolované soustavy těles se nemění.

Zákon o zachování mechanické energie – $E = E_\mathrm{p} + E_\mathrm{k} = \mathrm{konstanta}$.

Kalorimetrická rovnice – Teplo předané jednou látkou se rovná teplu přijatému druhou látkou.

Q – Teplo – $Q = m c \Delta t$.

1.

Závaží o hmotnosti 500 g z neznámého prvku o teplotě 100 °C vhodíme do 2 kg vody o teplotě 20 °C. Teplota vody a závaží se ustálila na 24 °C. Urči měrnou tepelnou kapacitu neznámého prvku.

2.

Zjisti nejmenší koeficienty $a, b, c \in \mathbb{N}$ této chemické rovnice:

$a\ \mathbf{Al} + b\ \mathbf{O_2} \rightarrow c\ \mathbf{Al_2O_3}$

3.

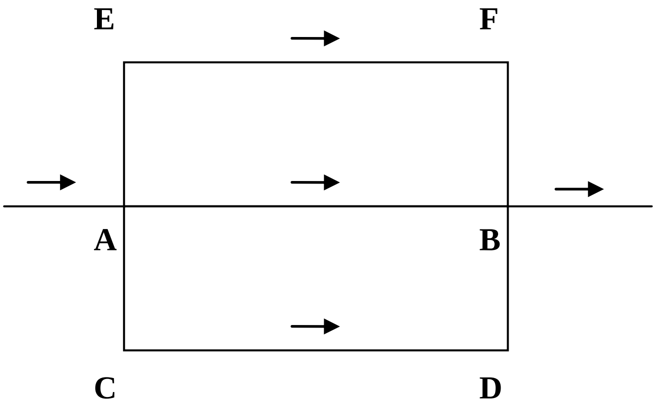
Kámen o hmotnosti 2 kg padá volným pádem z věže o výšce 80 m. Jakou má kinetickou energii při dopadu.

4.

Akční hrdina (hmotnost 80 kg) skočí při honičce v bývalém podzemním dole na zlato rychlostí 6 m/s (ve vodorovném směru) na stojící nezabrzděný kolový vozík o hmotnosti 150 kg. Urči, jakou rychlostí se vozík s hrdinou rozjede. Hrdinu a vozík považuj za izolovanou soustavu těles.

5.

V oblasti jsou vybudovány tři paralelní silnice, mezi nimiž jsou dvě spojovací cesty. Pro zjednodušení uvažujeme, že pouze prostřední silnicí lze přijet a odjet z celé oblasti vyznačené na obrázku a všechny ulice jsou pouze jednosměrné.



Víme, že do soustavy na křižovatku **A** přijede 120 aut za hodinu. Úsekem **A**-**B** projede dvakrát více aut nežli úseky **A**-**E**-**F**-**B** a **A**-**C**-**D**-**B**. Úsekem **A**-**E**-**F**-**B** projede za hodinu třetina aut, která za hodinu projedou úsekem **A**-**C**-**D**-**B**. Kolik aut za hodinu projede jednotlivými úseky?

Příloha 2. Test SŠ

Dobrý den,

děkuji za vaší spolupráci na mé diplomové práci, která se zabývá aplikací matematiky v ostatních vyučovacích předmětech. Data, která z tohoto testování získám, budou použita pouze pro analýzu vašich znalostí a postupů, které budete v následujících úlohách používat. Prosím vás tedy o to, abyste veškeré postupy do testu zaznamenali.

Bc. Tomáš Novotný

Pedagogická Fakulta Univerzity Karlovy

Pohlaví	Věk	Sám bych své matematické schopnosti hodnotil/a	Hodnocení učitelem
		Dobře/Průměrně/Podprůměrně*	

*Odpověď zakroužkuj

Potřebné znalosti a vzorce:

m – hmotnost

h – hladina/výška

v – rychlost

p – hybnost – $p = m v$

c – tepelná kapacita

$c_{(H_2O)} = 4\,180 \frac{\text{J}}{(\text{kg}\cdot\text{K})}$

t – teplota

Δt – změna teploty

U – napětí

U_e – elektromotorické napětí

R – odpor

I – proud – $I = \frac{U}{R}$

Potenciální energie – $E_\text{p} = m g h$

Kinetická energie – $E_\text{k} = \frac{1}{2} m v^2$

Q – Teplo – $Q = m c \Delta t$

g – gravitační zrychlení – odpovídá přibližně 10 m/s^2

Kalorimetrická rovnice – Teplo předané jednou látkou se rovná teplu přijatému druhou látkou.

1. Kirchhoffův zákon – Součet proudů vtékajících do uzlu se rovná součtu proudů z uzlu vytékajících.

2. Kirchhoffův zákon – Součet elektromotorických napětí v dané smyčce elektrického obvodu je roven součtu úbytku napětí na spotřebičích.

Zákon o zachování hybnosti – Celková hybnost izolované soustavy těles se nemění.

Zákon o zachování mechanické energie – $E = E_\text{p} + E_\text{k} = \text{konstanta}$.

1.

Prázdný nákladní vůz o hmotnosti $1 \cdot 10^4$ kg se pohybuje rychlostí 0,9 m/s po vodorovné trati a narazí na naložený vůz o hmotnosti $2 \cdot 10^4$ kg pohybující se ve stejném směru rychlostí 0,1 m/s. Při nárazu jsou oba vozy spolu spojeny. Určete jakou společnou rychlostí se pohybují.

2.

Kolik studeného čaje o teplotě 20 °C musíme nalít do 0,25 l horkého čaje o teplotě 80 °C, abychom získali snesitelně teplý nápoj o teplotě 45 °C.

3.

Kámen o hmotnosti 2 kg padá volným pádem z věže o výšce 80 m. Jakou má kinetickou a potenciální energii v čase 1 s od začátku pádu.

4.

Zjisti nejmenší koeficienty $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ této chemické rovnice:

$a\ \mathbf{Ba(NO_3)_2} + b\ \mathbf{Al_2(SO_4)_3} \rightarrow c\ \mathbf{BaSO_4} + d\ \mathbf{Al(NO_3)_3}$

5.

Na obrázku je nakresleno schéma obvodu se dvěma zdroji elektromotorického napětí U_{e1}, U_{e2} a se třemi rezistory R_1, R_2, R_3.

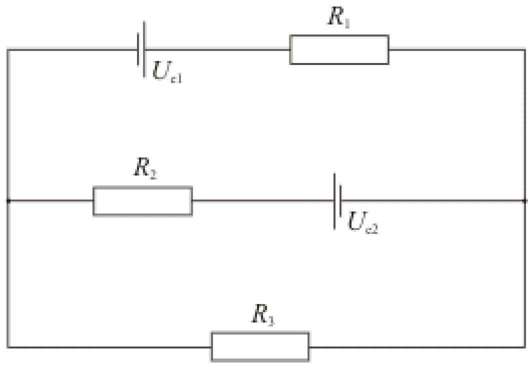
Určete, jaké proudy procházejí jednotlivými rezistory (jaká je jejich velikost a směr), jestliže:

$U_{e1} = 2U_{e2}$

$U_{e2} = 20\ \mathrm{V}$

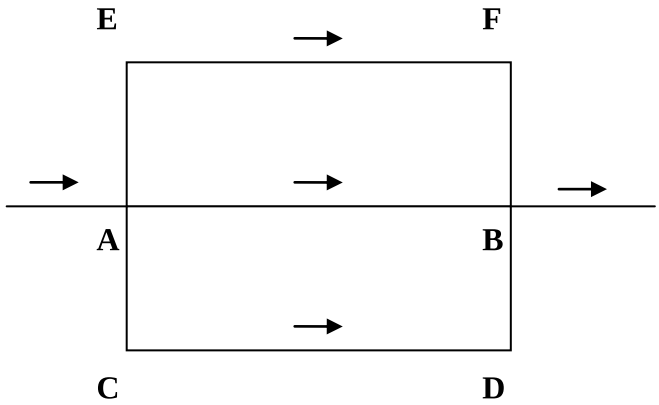
$R_1 = R_3 = 20\ \Omega$

$R_2 = 30\ \Omega$



6.

V oblasti jsou vybudovány tři paralelní silnice, mezi nimiž jsou dvě spojovací cesty. Pro zjednodušení uvažujeme, že pouze prostřední silnicí lze přijet a odjet z celé oblasti vyznačené na obrázku a všechny ulice jsou pouze jednosměrné.



Víme, že do soustavy na křižovatku **A** přijede 120 aut za hodinu. Úsekem **A-B** projede dvakrát více aut nežli úseky **A-E-F-B** a **A-C-D-B**. Úsekem **A-E-F-B** projede za hodinu třetina aut, která za hodinu projedou úsekem **A-C-D-B**. Kolik aut za hodinu projede jednotlivými úseky?