Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jiří Lžičař

Charakterizace konvexních množin

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce:	Doc. RNDr. Petr Lachout, CSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2014

Poděkování: V první řadě děkuji vedoucímu této práce panu Doc. RNDr. Petru Lachoutovi, CSc. za množství plodných konzultací, za jeho velikou ochotu a trpělivost nejen při hledání a vysvětlování mých chyb a za inspirativní a zábavné téma.
Dále děkuji svým rodičům za vytrvalou podporu při studiu.
Rovněž děkuji všem lidem z mého okolí, kteří mi při práci pomáhali, především pak své mamince Martině Lžičařové (ještě jednou) a své přítelkyni Zuze Peštové za korektury a svému spolužákovi Vojtěchu Kovaříkovi za cenné rady ohledně literatury týkající se matematické analýzy.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Charakterizace konvexních množin

Autor: Jiří Lžičař

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Petr Lachout, CSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Pojem konvexní množiny je velmi důležitý zejména pro teorii pravděpodobnosti, optimalizaci a stochastickou optimalizaci. Konvexita je v mnohém unikátní množinová vlastnost, již se vyplatí zkoumat. Různé vlastnosti konvexních množin jsou obecně známé, například ty spojené s oddělitelností. Ukazuje se však, že definice konvexity je velmi zajímavá i v tom smyslu, že je možné ji nahradit různými sadami vlastností, které jsou s touto definicí ekvivalentní. Stejně tak existují množinové operace, které konvexitu zachovávají a další, které ji zachovávají za přidání určitých podmínek.

Klíčová slova: konvexita, topologie, poloprostor

Title: Název práce v angličtině dle SISu

Author: Jiří Lžičař

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Doc. RNDr. Petr Lachout, CSc., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: The idea of convexity is very important especially for probability theory, optimization and stochastic optimization. Convexity is a unique set property in many ways, which is worth to be studied. Various properties of convex sets are generally known, such as the ones related to separability. It however becomes apparent that the definition of convexity is very interesting, since it is possible to replace the definition by various collections of properties which are equivalent to it. There also exist set operations preserving convexity and another ones which preserve it when supported by another requirements.

Keywords: convexity, topology, half-space

Obsah

1 Úvod **2**

2 Konvexní množina **3**
2.1 Pojem konvexní množiny 3
2.2 Konvexní funkce 5

3 Topologické vlastnosti množin a konvexita **8**
3.1 Uzavřené množiny 9
3.2 Otevřené množiny 13
3.3 Další vlastnosti množin 15

4 Konvexní množiny a nadroviny **18**
4.1 Nadrovina a opěrná nadrovina 18
4.2 Charakterizující vlastnosti uzavřených množin pomocí nadrovin . 20

5 Slovo závěrem **23**

Literatura **25**

Kapitola 1

Úvod

Konvexita je pojem hojně využívaný v teorii pravděpodobnosti, optimalizaci a ekonometrii. V následujícím textu se budeme zabývat tím, zda je možné najít sady podmínek, které konvexitu implikují - zda poměrně silný předpoklad v definici konvexity vyměnit za jiný nebo zda ho nelze zeslabit, při dodání dalších, ne tak silných, vlastností, jež by měla množina splňovat, aby byla konvexní.
K obsahu práce:
V druhé kapitole uvedeme definici konvexity, základní vlastnosti konvexních množin a funkcí a důležitý případ konvexních množin vytvořených konvexní funkcí, tzv. level sets.
V třetí kapitole se pak zabýváme zeslabením přímé definice konvexity za přidání dalších množinových vlastností, zvláštní zřetel je brán na množiny uzavřené a otevřené.
Ve čtvrté kapitole se pozornost obrací směrem zcela opačným, a to k opěrným nadrovinám konvexních množin a oddělitelnosti. Na konci této kapitoly je rovněž uvedena věta, která stanovuje podmínky, kdy je uzavřené sjednocení dvou konvexních množin rovněž konvexní množina.

Kapitola 2

Konvexní množina

2.1 Pojem konvexní množiny

Poznámka. V celém textu budeme eukleidovským prostorem rozumět množinu $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ s eukleidovskou normou

$$\| \boldsymbol{x} \|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \,,$$

kde $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.
Symbolem $\overline{\boldsymbol{ab}}$ budeme značit úsečku spojující body $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, tedy množinu $\overline{\boldsymbol{ab}} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ \boldsymbol{x} = (1-\lambda)\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}, \lambda \in (0,1)\}$.
Nakonec, množinu $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ \boldsymbol{x} = (1-\lambda)\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ nazveme *přímkou* procházející body $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$.

Pro úplnost zavedeme i pojem metrického prostoru:

Definice 1. *Dvojici (P, ϱ), kde P je množina a ϱ je metrika, tj. funkce $\varrho : P \times P \to \mathbb{R}$ s vlastnostmi:*

1. $\forall\, x, y \in P :\ \varrho\,(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$
2. $\forall\, x, y \in P :\ \varrho\,(x, y) = \varrho\,(y, x),$
3. $\forall\, x, y, z \in P :\ \varrho\,(x, z) \le \varrho\,(x, y) + \varrho\,(y, z),$

nazveme metrický prostor.

Poznámka. Na eukleidovský prostor můžeme nahlížet rovněž jako na metrický prostor $(\mathbb{R}^n, \varrho_2)$, kde $\varrho_2\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$.

Definice 2 (Konvexní množina)**.** *Řekneme, že $C \subset \mathbb{R}^n$ je* konvexní množina*, jestliže pro každou dvojici $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in C$ a pro každé $\lambda \in [0,1]$ platí $(1-\lambda)\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b} \in C$.*

Lemma 1. *Nechť $A \in \mathbb{R}^n$ je konvexní množina, nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom $\alpha A = \{\alpha\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{a} \in A\}$ je konvexní množina.*

Důkaz. Jestliže A je prázdná nebo jednobodová, pak je tvrzení zřejmé. Jestliže $A \neq \emptyset$ & $\alpha = 0$, pak $\alpha A = \{0\}$. Nechť tedy A obsahuje alespoň dva body a α nenulové. Zvolíme nějaké dva body $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in A$ (tedy $\alpha\boldsymbol{a}, \alpha\boldsymbol{b} \in \alpha A$) a bod $\boldsymbol{c}$ náležící

úsečce spojující body $\alpha\boldsymbol{a}$ a $\alpha\boldsymbol{b}$. Ukážeme, že pak $\boldsymbol{c}$ náleží množině αA.
Buď $\lambda \in (0,1)$ takové, že $\boldsymbol{c} = (1-\lambda)\alpha\boldsymbol{a} + \lambda\alpha\boldsymbol{b}$. Potom

$$\frac{1}{\alpha}\boldsymbol{c} = \frac{1}{\alpha}((1-\lambda)\alpha\boldsymbol{a} + \lambda\alpha\boldsymbol{b}) = (1-\lambda)\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b} \in A,$$

neboť $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in A$ a A je konvexní. Tedy $\boldsymbol{c} = \alpha\frac{1}{\alpha}\boldsymbol{c} \in \alpha A$.

❑

Lemma 2. *Nechť $A, B \subset \mathbb{R}^n$ jsou konvexní množiny. Pak také*

$$\begin{aligned} A + B &= \{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b};\ \boldsymbol{a} \in A, \boldsymbol{b} \in B\}\ a \\ A - B &= \{\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b};\ \boldsymbol{a} \in A, \boldsymbol{b} \in B\} \end{aligned}$$

jsou konvexní množiny.

Důkaz. Nechť $a, b \in A + B$. Nechť $\boldsymbol{c}$ náleží úsečce $\boldsymbol{ab}$. Potom existují body $\boldsymbol{a}_A, \boldsymbol{b}_A \in A$ a $\boldsymbol{a}_B, \boldsymbol{b}_B \in B$ takové, že $\boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}_A + \boldsymbol{b}_B = \boldsymbol{b}$.
Dále existuje λ takové, že

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c} &= (1-\lambda)\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b} = (1-\lambda)(\boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_B) + \lambda(\boldsymbol{b}_A + \boldsymbol{b}_B) \\ &= ((1-\lambda)\boldsymbol{a}_A + \lambda\boldsymbol{b}_A) + ((1-\lambda)\boldsymbol{a}_B + \lambda\boldsymbol{b}_B) = \boldsymbol{c}_A + \boldsymbol{c}_B, \end{aligned}$$

přičemž $\boldsymbol{c}_A = (1-\lambda)\boldsymbol{a}_A + \lambda\boldsymbol{b}_A \in A$ z konvexity množiny A a podobně
$\boldsymbol{c}_B = (1-\lambda)\boldsymbol{a}_B + \lambda\boldsymbol{b}_B$ z konvexity množiny B. Tedy $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}_A + \boldsymbol{c}_B \in A + B$.

❑

Lemma 3. *Buď I indexová množina libovolné mohutnosti a $A_i \subset \mathbb{R}^n, i \in I$, buďte konvexní množiny. Pak i $\bigcap_{i\in I} A_i$ je konvexní množina.*

Důkaz. Jestliže $\bigcap_{i\in I} A_i$ je prázdná nebo jednobodová, je důkaz hotov. V opačném případě existují body $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \bigcap_{i\in I} A_i$. Nechť je $\boldsymbol{c}$ libovolný bod náležící úsečce $\overline{\boldsymbol{ab}}$. Pak $\boldsymbol{c} \in A_i\, \forall i \in I$, neboť $A_i, i \in I$ jsou konvexní neboli $\boldsymbol{c} \in \bigcap_{i\in I} A_i$. Protože bod $\boldsymbol{c}$ byl zvolen libovolně, náleží množině $\bigcap_{i\in I} A_i$ celá úsečka $\boldsymbol{ab}$ a tato množina je tudíž konvexní.

❑

2.2 Konvexní funkce

V této podkapitole uvedeme důležitý příklad konvexních množin, tzv. *level sets*. K tomu však budeme potřebovat definici konvexní funkce. Není na škodu spolu s ní uvést i nějaké vlastnosti, jež konvexitu funkcí implikují nebo zachovávají.

Definice 3. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a $f : G \to \mathbb{R}$ je funkce. Potom:*

1. *Řekneme, že f je konvexní, jestliže pro každé $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in G$ a pro každé $\lambda \in (0, 1)$ platí*

$$f((1 - \lambda)\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y}) \leq (1 - \lambda)f(\boldsymbol{x}) + \lambda f(\boldsymbol{y}).$$

2. *Řekneme, že f je striktně (ryze) konvexní, jestliže pro každé $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in G$ a pro každé $\lambda \in (0, 1)$ platí*

$$f((1 - \lambda)\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y}) < (1 - \lambda)f(\boldsymbol{x}) + \lambda f(\boldsymbol{y}).$$

3. *Řekneme, že f je konkávní, jestliže pro každé $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in G$ a pro každé $\lambda \in (0, 1)$ platí*

$$f((1 - \lambda)\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y}) \geq (1 - \lambda)f(\boldsymbol{x}) + \lambda f(\boldsymbol{y}).$$

4. *Řekneme, že f je striktně (ryze) konkávní, jestliže pro každé $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in G$ a pro každé $\lambda \in (0, 1)$ platí*

$$f((1 - \lambda)\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y}) > (1 - \lambda)f(\boldsymbol{x}) + \lambda f(\boldsymbol{y}).$$

Poznámka. Jestliže $f : G \to \mathbb{R}^n$, kde $G \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina, je (striktně) konvexní funkce, pak $-f$ je (striktně) konkávní funkce.

Poznámka. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Má-li f na $Int(I)$ první derivaci, je f konvexní (resp. striktně konvexní) na I právě tehdy, když je f' neklesající (resp. rostoucí) na $Int(I)$. Speciálně, má-li f na $Int(I)$ druhou derivaci, je f na I konvexní právě tehdy, když platí $f'' \geq 0$ na $Int(I)$.

Poznámka. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená konvexní množina. Nechť má funkce $f : G \to \mathbb{R}^n$ spojité všechny druhé parciální derivace na G. Pak je f konvexní (resp. ryze konvexní) na G právě tehdy, když je Hessian (matice druhých parciálních derivací) funkce f pozitivně semidefinitní (resp. pozitivně definitní) na G.

Následující tři tvrzení dávají další možnosti, jak charakterizovat konvexní funkce.

Lemma 4. *(Čerpáno z [5]) Nechť má funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ spojité všechny parciální derivace na $\mathbb{R}^n$. Pak je f konvexní právě tehdy, když pro každé $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ platí:*

$$f(\boldsymbol{y}) \geq f(\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})^T \nabla_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}).$$

Důkaz. Viz [5], str. 12, Lemma 2.36. ❑

Lemma 5. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina, nechť $g : G \to \mathbb{R}$ je lineární funkce a nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je konvexní funkce. Potom $(f \circ g)$ je konvexní funkce.*

Důkaz. Zvolíme libovolnou dvojici bodů $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in G$. Pak platí:

$$(f \circ g)((1 - \lambda)\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y}) = f(g((1 - \lambda)\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y})$$
$$= f((1 - \lambda)g(\boldsymbol{x}) + \lambda g(\boldsymbol{y})) \leq (1 - \lambda)f(g(\boldsymbol{x})) + \lambda f(g(\boldsymbol{y}))$$

a důkaz je hotov. ❑

Lemma 6. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina, nechť $g : G \to \mathbb{R}$ je konvexní funkce a nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je neklesající konvexní funkce. Potom $(f \circ g)$ je konvexní funkce.*

Důkaz. Zvolíme libovolnou dvojici bodů $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in G$. Pak platí:

$$(f \circ g)((1 - \lambda)\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y}) = f(g((1 - \lambda)\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y})$$
$$\leq f((1 - \lambda)g(\boldsymbol{x}) + \lambda g(\boldsymbol{y})) \leq (1 - \lambda)f(g(\boldsymbol{x})) + \lambda f(g(\boldsymbol{y}))$$

a důkaz je hotov.

Věta 1. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a nechť $f : G \to \mathbb{R}$ je funkce konvexní na G. Pak jsou množiny $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ f(\boldsymbol{x}) < k\}$ a $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ f(\boldsymbol{x}) \leq k\}$, $k \in \mathbb{R}$, konvexní.*

Důkaz. Zvolíme libovolné body $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ f(\boldsymbol{x}) < k\}$ a libovolný bod $\boldsymbol{c}$ náležící úsečce $\overline{\boldsymbol{ab}}$. Potom existuje $\lambda \in (0, 1)$ takové, že $\boldsymbol{c} = (1 - \lambda)\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$. Máme

$$f(\boldsymbol{c}) = f((1 - \lambda)\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}) \leq (1 - \lambda)f(\boldsymbol{a}) + \lambda f(\boldsymbol{b}) < (1 - \lambda)k + \lambda k = k,$$

tedy bod $\boldsymbol{c}$ náleží množině $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ f(\boldsymbol{x}) < k\}$.

Protože byl tento bod zvolen libovolně, je námi zkoumaná množina konvexní. Konvexita množiny $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ f(\boldsymbol{x}) \leq k\}$ se dokáže zcela analogicky. ❑

Důsledek. Díky předchozí větě platí následující dvě tvrzení:

1. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a nechť $f : G \to \mathbb{R}$ je funkce konkávní na G. Pak jsou množiny $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ f(\boldsymbol{x}) > k\}$ a $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ f(\boldsymbol{x}) \geq k\}$, $k \in \mathbb{R}$, konvexní.

2. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a nechť $f : G \to \mathbb{R}$ je funkce lineární na G. Pak jsou množiny $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ f(\boldsymbol{x}) > k\}$, $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ f(\boldsymbol{x}) \geq k\}$, $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ f(\boldsymbol{x}) < k\}$, $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ f(\boldsymbol{x}) \leq k\}$, $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ f(\boldsymbol{x}) = k\}$, $k \in \mathbb{R}$, konvexní.

Důkaz.

1. K důkazu první části si stačí uvědomit, že, je-li f konvexní funkce, pak je funkce $-f$ konkávní, a tedy lze tvrzení převést na **větu 1**.

2. Každá lineární funkce je konvexní a konkávní zároveň, všechny zmíněné množiny lze buď převést na část 1. tohoto důsledku, nebo na **větu 1**.

❑

Kapitola 3

Topologické vlastnosti množin a konvexita

V následující kapitole ukážeme, že pokud nějaká množina $A \subset \mathbb{R}^n$ splňuje určité vlastnosti, stačí, aby tato množina s každými svými dvěma body $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in A$ obsahovala jen určité „řešeto" bodů ležící na úsečce tyto dva body spojující. Hlavní důraz je kladen na případy, kdy je množina A otevřená či uzavřená. Nejprve je však třeba připomenout následující definice:

Definice 4 (Koule v $\mathbb{R}^n$)**.** *Symbolem* $B(\boldsymbol{s}, r)$, $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}_n$, $r > 0$ *budeme značit* otevřenou kouli v $\mathbb{R}^n$ *se středem v bodě* $\boldsymbol{s}$ *a o poloměru* r, *to jest množinu* $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s}\| < r\}$.

Množina $clo\,(B(\boldsymbol{x}, r)) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s}\| \leq r\}$ *se potom nazývá* uzavřená koule v $\mathbb{R}^n$ se středem $\boldsymbol{x}$ a poloměrem r.

Definice 5 (Vnitřek množiny)**.** *Nechť* $M \subset \mathbb{R}^n$ *je množina,* $\boldsymbol{x} \in M$. *Řekneme, že* $\boldsymbol{x}$ *je* vnitřním bodem množiny M, *jestliže existuje* $r > 0$ *tak, že* $B(\boldsymbol{x}, r)$ *leží celá v* M. *Množinu všech vnitřních bodů* M *pak nazveme* vnitřkem množiny M *a budeme značit* $Int\,(M)$.

Definice 6 (Hranice množiny)**.** *Nechť* M *je podmnožina* $\mathbb{R}^n$. *Pak řekneme, že bod* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ *je* hraničním bodem *množiny* M, *jestliže pro každé* $r > 0$ *platí* $B(\boldsymbol{x}, r) \cap M \neq \emptyset$ *a* $B(\boldsymbol{x}, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset$. *Množinu všech hraničních bodů množiny* M *pak nazveme* hranicí množiny M *a budeme značit* δM.

Definice 7 (Uzávěr množiny)**.** Uzávěrem *množiny* $M \subset \mathbb{R}^n$ *rozumíme množinu* $clo\,(M) = M \cup \delta M$.

Definice 8 (Otevřená množina, uzavřená množina)**.** *Řekneme, že* $G \subset \mathbb{R}^n$ *je* otevřená množina, *jestliže* $G = Int\,(G)$. *Řekneme, že množina* $H \subset \mathbb{R}^n$ *je* uzavřená množina, *jestliže* $clo\,(H) = H$.

Příklad. Nechť $r_1, r_2 > 0$ a $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2 \in \mathbb{R}^n$ tak, že $|r_1 + r_2| > \|\boldsymbol{s}_1 - \boldsymbol{s}_2\| > |r_1 - r_2|$. Potom $C := B(\boldsymbol{s}_1, r_1) \subset \mathbb{R}^n$ i $D := B(\boldsymbol{s}_2, r_2) \subset \mathbb{R}^n$ jsou konvexní množiny, ale $A \cup B$ ani $A \setminus B$ zřejmě konvexní nejsou.

Příklad. Nechť $A := \mathbb{Q}$. Pak A má následující vlastnost:

$$\begin{aligned}\text{Pro }&\text{ každou dvojici } \boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q} \in A \text{ leží střed úsečky spojující body}\\ &\boldsymbol{p} \text{ a } \boldsymbol{q}, \text{ tj. bod } \tfrac{p+q}{2} \text{ v } A\end{aligned} \tag{3.1}$$

Množina $\mathbb{Q}$ ovšem není konvexní, neboť pro každá dvě racionální čísla $p < q$ existuje (z hustoty $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) iracionální číslo x takové, že $p < x < q$.

3.1 Uzavřené množiny

Poznámka. Před formulací vět připomeňme lemma potřebné pro důkazy:

Lemma 7 (Limita posloupnosti v uzavřené množině)**.** *Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je uzavřená právě tehdy, když každou konvergentní posloupnost $\{\boldsymbol{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $\boldsymbol{a}_n \in A\ \forall n \in \mathbb{N}$, platí $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{a}_n \in A$.*

Důkaz. Viz [3], str. 40, **8.2.1.**

❑

Věta 2. *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je uzavřená s vlastností (3.1). Potom A je konvexní množina.*

Důkaz. Je-li A prázdná nebo jednobodová, je tvrzení věty zřejmé. Nechť tedy A obsahuje alespoň dva body. Pak zvolíme libovolné body $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in A$ a libovolný bod $\boldsymbol{c}$ ležící na úsečce tyto dva body spojující. Pokud $\boldsymbol{c} \in \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$, je tvrzení rovněž zřejmé. $\boldsymbol{c} \in \overline{\boldsymbol{ab}} \setminus \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$.
Potom existuje $\lambda \in (0,\, 1)$ tak, že $c = (1-\lambda)\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$.
Definujeme posloupnost $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ takto:

$$\lambda_1 := \frac{1}{2}$$
$$\lambda_{n+1} := \begin{cases} \lambda_n, & \lambda = \lambda_n, \\ \lambda_n + \dfrac{1}{2^{n+1}}, & \lambda > \lambda_n, \\ \lambda_n - \dfrac{1}{2^{n+1}}, & \lambda < \lambda_n, \end{cases}$$

pro $n \in \mathbb{N}$.

Pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme posloupnost $\{\boldsymbol{c}_n\}_{n=1}^{\infty}$ předpisem $\boldsymbol{c}_n := (1-\lambda_n)\boldsymbol{a} + \lambda_n\boldsymbol{b}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ patří $\boldsymbol{c}_n$ do množiny A:
Definujeme posloupnost množin $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ předpisem

$$A_n := \{(1 - \frac{m}{2^n})\boldsymbol{a} + \frac{m}{2^n}\boldsymbol{b};\ m = 0, 1, 2, \ldots, 2^n\},\ n \in \mathbb{N}.$$

Ukážeme indukcí, že pak $\boldsymbol{c}_n \in A\ \forall n \in \mathbb{N}$:

$\boldsymbol{c}_1 \in A_1$ platí zřejmě.

Nyní nechť $\boldsymbol{c}_n \in A$ a BÚNO nechť $\lambda_{n+1} < \lambda_n$ (pro $\lambda_{n+1} = \lambda_n$ platí zřejmě, pro $\lambda_{n+1} > \lambda_n$ analogicky $\lambda_{n+1} < \lambda_n$). Najdeme $m_0 \in \{0, 1, \ldots, 2^n\}$ tak, že

$$\boldsymbol{c} = (1 - \frac{m}{2^n})\boldsymbol{a} + \frac{m}{2^n}\boldsymbol{b}.$$

Pak jest

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}_{n+1} &= (1 - (\frac{m_0}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}})\boldsymbol{a} + (\frac{m_0}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}})\boldsymbol{b} \\ &= (1 - \frac{2m_0 - 1}{2^{n+1}})\boldsymbol{a} + \frac{2m_0 - 1}{2^{n+1}}\boldsymbol{b} \in A_{n+1}. \end{aligned}$$

Protože A_{n+1} vznikne z A_n přidáním středů úseček spojujících body množiny A_n a protože $A_1 = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}}{2}\}$, platí, že $A_n \subset A\ \forall n \in \mathbb{N}$. Dohromady tudíž máme $\boldsymbol{c}_n \in A\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Pro $n \in \mathbb{N}$ platí: $|\ \lambda - \lambda_n\ | \leq \frac{1}{2^n} \to 0,\ n \to \infty$. Jest

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{c}_n - \boldsymbol{c}\| &= \|(1 - \lambda_n)\boldsymbol{a} + \lambda_n\boldsymbol{b} - (1 - \lambda)\boldsymbol{a} - \lambda\boldsymbol{b}\| \\ &= \|\boldsymbol{a}(\lambda - \lambda_n) + \boldsymbol{b}(\lambda - \lambda_n)\| \leq \underbrace{\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\|}_{konst.} \cdot \underbrace{|\lambda - \lambda_n|}_{\to 0} \to 0,\ n \to \infty. \end{aligned}$$

Tedy $\lim\limits_{x\to\infty} \boldsymbol{c}_n = \boldsymbol{c}$. Jelikož A je uzavřená, je $\boldsymbol{c} \in A$, a protože byla trojice bodů $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ zvolena libovolně, je A konvexní.

❑

Poznámka. Vlastnost (3.1) je možné považovat za speciální případ následující vlastnosti:

$$\text{Existuje } \xi \in (0,1) \text{ takové, že pro každou dvojici bodů } \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in A \text{ je i bod } (1 - \xi)\boldsymbol{a} + \xi\boldsymbol{b}, \text{ prvkem množiny } A, \tag{3.2}$$

Přičemž vlastnost (3.1) získáme volbou $\xi := \frac{1}{2}$. **Větu 1** pak lze vyslovit takto:

Věta 3. *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je uzavřená a má vlastnost (3.2). Pak A je konvexní množina.*

Důkaz. Je-li A prázdná nebo jednobodová, je tvrzení věty zřejmé. V opačném případě můžeme zvolit (libovolné) body $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in A$. Dále zvolíme libovolný bod $\boldsymbol{c}$ ležící na úsečce tyto dva body spojující. Pokud $\boldsymbol{c} \in \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$, je tvrzení rovněž zřejmé.
Nechť tedy $\boldsymbol{c} \in \overline{\boldsymbol{ab}} \setminus \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$.
Definujeme posloupnost uspořádaných dvojic $\{(\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}_n)\}_{n=1}^{\infty}, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}_n \in \mathbb{R}^n$, následovně:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1) &:= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \\ (\boldsymbol{a}_{n+1}, \boldsymbol{b}_{n+1}) &:= \begin{cases} ((1 - \xi)\boldsymbol{a}_n + \xi\boldsymbol{b}_n, \boldsymbol{b}_n), & \boldsymbol{c} \geq (1 - \xi)\boldsymbol{a}_n + \xi\boldsymbol{b}_n, \\ (\boldsymbol{a}_n, (1 - \xi)\boldsymbol{a}_n + \xi\boldsymbol{b}_n), & \boldsymbol{c} < (1 - \xi)\boldsymbol{a}_n + \xi\boldsymbol{b}_n, \end{cases} \end{aligned}$$

pro $n \geq 1$.

Potom $\|\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{b}_n\| \leq \underbrace{\|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\|}_{konst.} \cdot \underbrace{(\max\{\xi, 1 - \xi\})^{n-1}}_{\to 0} \to 0,\ n \to 0.$

Dále platí, že $\boldsymbol{a}_n \leq \boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{b}_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Tedy $\|\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{c}\| \leq \|\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{b}_n\| \to 0, n \to \infty$ neboli $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{c}$. Podobně také $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{c}$. Navíc z definice posloupnosti $\{(\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}_n)\}$ a předpokladu věty platí, že $\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}_n$ jsou prvky množiny A pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Z uzavřenosti A je tedy $\boldsymbol{c} \in A$. Protože bod $\boldsymbol{c}$ byl zvolen libovolně stejně jako body $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$, je množina A konvexní.

❑

Poznámka. Předpoklad **Věty 2** lze dále ještě zobecnit:

Věta 4. *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je uzavřená, splňuje:*

$$\text{\textit{Nechť existují čísla }} \underline{\xi}, \overline{\xi},\ 0 < \underline{\xi} < \overline{\xi} < 1 \text{\textit{ a nechť pro každou dvojici bodů }} \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in A \text{\textit{ existuje }} \xi_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} \in [\underline{\xi}, \overline{\xi}] \text{\textit{ takové, že bod }} (1 - \xi_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\boldsymbol{a} + \xi_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\boldsymbol{b} \text{\textit{ je prvkem množiny }} A. \tag{3.3}$$

Pak A je konvexní množina.

Důkaz. Důkaz je podobný důkazu **Věty 2**. Nechť A obsahuje alespoň dva body (jinak je tvrzení zřejmě platné). Zvolíme libovolnou dvojici bodů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in A$ a k nim zvolíme (opět libovolný) bod $\boldsymbol{c} \in \overline{\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}}$. Pokud $\boldsymbol{c} \in \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$, je důkaz hotov. Nechť $\boldsymbol{c} \in \overline{\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}} \setminus \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$.

Podobně jako v důkazu **Věty 2** definujeme posloupnost uspořádaných dvojic $\{(\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}_n)\}_{n=1}^{\infty}, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}_n \in A$ předpisem:

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1) := (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$$

$$(\boldsymbol{a}_{n+1}, \boldsymbol{b}_{n+1}) := \begin{cases} ((1 - \xi_{\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}_n})\boldsymbol{a}_n + \xi_{\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}_n}\boldsymbol{b}_n, \boldsymbol{b}_n), \boldsymbol{c} \geq (1 - \xi_{\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}_n})\boldsymbol{a}_n + \xi_{\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}_n}\boldsymbol{b}_n, \\ (\boldsymbol{a}_n, (1 - \xi_{\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}_n})\boldsymbol{a}_n + \xi_{\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}_n}\boldsymbol{b}_n), \boldsymbol{c} < (1 - \xi_{\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}_n})\boldsymbol{a}_n + \xi_{\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}_n}\boldsymbol{b}_n, \end{cases}$$

pro $n \geq 1$.

Potom $\|\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{b}_n\| \leq \underbrace{\|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\|}_{konst.} \cdot \underbrace{(\max\{\overline{\xi}, 1 - \underline{\xi}\})^{n-1}}_{\to 0} \to 0,\ n \to 0.$

Dále platí, že $\boldsymbol{a}_n \leq \boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{b}_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Tedy $\|\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{c}\| \leq \|\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{b}_n\| \to 0, n \to \infty$, neboli $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{c}$. Podobně také $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{c}$.

Navíc z definice posloupnosti $\{(\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}_n)$ a předpokladu věty jsou $\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}_n$ prvky množiny A pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Z uzavřenosti A je tedy $\boldsymbol{c} \in A$.

Protože body $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{c}$ byly zvoleny libovolně, je množina A konvexní.

❑

Definice 9. *Nechť $M \subset N \subset \mathbb{R}^n$ jsou množiny. Potom:*

1. *Řekneme, že $\boldsymbol{x} \in M$ je* vnitřním bodem množiny M vzhledem k množině N, *jestliže existuje $r > 0$ tak, že $B(\boldsymbol{x}, r) \cap N \subset M$.*

2. *Množinu všech vnitřních bodů množiny M vzhledem k množině N nazveme* relativním vnitřkem množiny M vzhledem k množině N *a budeme značit* $Int_N(M)$.

3. *Řekneme, že* M je relativně otevřená vzhledem k N, *jestliže* $M = Int_N(M)$.

4. *Podobně, řekneme, že* $\boldsymbol{x} \in M$ *je* hraničním bodem množiny M vzhledem k množině N, *jestliže pro každé* $r > 0$ *platí*

$$B(\boldsymbol{x}, r) \cap M \cap N \neq \emptyset \text{ a}$$
$$B(\boldsymbol{x}, r) \cap M \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset.$$

5. *Množinu všech hraničních bodů množiny M vzhledem k množině N nazveme* relativní hranicí množiny M vzhledem k množině N *a budeme značit* $\delta_N(M)$.

6. Relativním uzávěrem množiny M vzhledem k množině N *rozumíme množinu* $clo_N(M) = M \cup \delta_N(M)$.

7. *Nakonec řekneme, že* množina M je relativně uzavřená vzhledem k množině N, *jestliže* $M = clo_N(M)$.

Poznámka. Předpoklad existence čísel $\underline{\xi}$ a $\overline{\xi}$ v předchozí větě není nutný, jak ukážeme ve větě následující. Důkaz je však založen na zcela jiné myšlence:

Věta 5. *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je uzavřená a nechť má následující vlastnost:*

$$\begin{gathered}\text{Nechť ke každé dvojici bodů } \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in A \text{ existuje číslo} \\ \xi_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} \in (0,1) \text{ tak, že bod } (1 - \xi_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\boldsymbol{a} + \xi_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\boldsymbol{b} \text{ náleží množině } A.\end{gathered} \tag{3.4}$$

Potom A je konvexní množina.

Důkaz. Sporem. Nechť A je uzavřená a splňuje (3.4), ale není konvexní. Pak existují body $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in A$ takové, že $\overline{\boldsymbol{ab}} \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$.
Protože A je uzavřená, je $\mathbb{R}^n \setminus A$ otevřená a tedy $\overline{\boldsymbol{ab}} \cap (\mathbb{R}^n \setminus A)$ je relativně otevřená vzhledem k $\overline{\boldsymbol{ab}}$.
Zvolíme bod $\boldsymbol{c} \in \overline{\boldsymbol{ab}} \cap (\mathbb{R}^n \setminus A)$ a z relativní otevřenosti $\overline{\boldsymbol{ab}} \cap (\mathbb{R}^n \setminus A)$ vzhledem k $\overline{\boldsymbol{ab}}$ můžeme najít body $\boldsymbol{a}^* \in \delta A \cap \overline{\boldsymbol{ac}} \subset A$ a $\boldsymbol{b}^* \in \delta A \cap \overline{\boldsymbol{bc}} \subset A$ takové, že $Int_{\overline{\boldsymbol{ab}}}(\overline{\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{c}}) \cap A = \emptyset$ a $Int_{\overline{\boldsymbol{ab}}}(\overline{\boldsymbol{b}^*\boldsymbol{c}}) \cap A = \emptyset$. Potom také $Int_{\overline{\boldsymbol{ab}}}(\overline{\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{b}^*}) \cap A = \emptyset$.
Protože $\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}^* \in A$, existuje $\xi_{\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{b}^*} \in (0,1)$ takové, že bod $\boldsymbol{c}^* = (1 - \xi_{\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{b}^*})\boldsymbol{a} + \xi_{\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{b}^*}\boldsymbol{b} \in A$, ovšem $\boldsymbol{c}^* \in Int(\overline{\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{b}^*}) \cap A = \emptyset$, což je spor a A je tudíž konvexní.

❑

3.2 Otevřené množiny

Poznámka. Jestliže má množina $A \subset \mathbb{R}^{\varkappa}$ vlastnost (3.1), má i vlastnost (3.2), podobně má-li A vlastnost (3.2), pak má i vlastnost (3.3), a nakonec, má-li A vlastnost (3.3), potom má i vlastnost (3.4).
Následující věty a protipříklad tedy můžeme uvést v co nejobecnějším tvaru.

Věta 6. *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina mající vlastnost (3.2). Pak je A konvexní.*

Důkaz. Pro A prázdnou tvrzení platí zjevně. V opačném případě můžeme zvolit nějaké dva body $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in A$ a libovolný bod $\boldsymbol{c}$ ležící na úsečce tyto dva body spojující. Ukážeme, že potom $\boldsymbol{c} \in A$.
Nechť $\boldsymbol{c} \in \overline{\boldsymbol{ab}} \setminus \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ (Jinak je důkaz hotov). Definujeme posloupnost uspořádaných dvojic $\{(\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}_n)\}_{n=1}^{\infty}, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}_n \in A$ následovně:

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1) := (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$$

$$(\boldsymbol{a}_{n+1}, \boldsymbol{b}_{n+1}) := \begin{cases} ((1-\xi)\boldsymbol{a}_n + \xi \boldsymbol{b}_n, \boldsymbol{b}_n), & \boldsymbol{c} \geq (1-\xi)\boldsymbol{a}_n + \xi \boldsymbol{b}_n, \\ (\boldsymbol{a}_n, (1-\xi)\boldsymbol{a}_n + \xi \boldsymbol{b}_n), & \boldsymbol{c} < (1-\xi)\boldsymbol{a}_n + \xi \boldsymbol{b}_n, \end{cases}$$

pro $n \geq 1$.

Potom platí $\|\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{b}_n\| \leq \underbrace{\|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\|}_{konst.} \cdot \underbrace{(\max\{\xi, 1-\xi\})^{n-1}}_{\to 0} \to 0,\ n \to 0.$
Dále platí, že $\boldsymbol{a}_n \leq \boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{b}_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Tedy $\|\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{c}\| \leq \|\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{b}_n\| \to 0, n \to \infty$, neboli $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{c}$. Podobně také $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{c}$.

Navíc existuje $r > 0$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N}$ leží $B(\boldsymbol{a}_n, r)$ celá v A:
Indukcí podle n.
$\underline{n = 1:}$ Protože $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1 \in A$, existují $r_1, r_2 > 0$ tak, že $B(\boldsymbol{a}_1, r_1), B(\boldsymbol{b}_1, r_2) \in A$. Zvolíme $r := \min\{r_1, r_2\}$. Pak $B(\boldsymbol{a}_1, r), B(\boldsymbol{b}_1, r) \in A$.
$\underline{n \Rightarrow n+1:}$ BÚNO nechť $\boldsymbol{a}_1 < \boldsymbol{a}_{n+1} < \boldsymbol{b}_{n+1} = \boldsymbol{b}_n$ (pro případ $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_{n+1} < \boldsymbol{b}_{n+1} < \boldsymbol{b}_n$ je důkaz zcela analogický), tedy $(\boldsymbol{a}_{n+1}, \boldsymbol{b}_{n+1}) := ((1-\xi)\boldsymbol{a}_n + \xi \boldsymbol{b}_n, \boldsymbol{b}_n)$.
Potom $B(\boldsymbol{b}_{n+1}, r) = B(\boldsymbol{b}_n, r) \subset A$.
Zvolíme libovolné $\boldsymbol{d}$ z otevřené koule $B(\boldsymbol{a}_{n+1}, r)$.
Pak existuje vektor $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ takový, že $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a}_{n+1} + \overrightarrow{v}$, navíc zřejmě platí $\|\overrightarrow{v}\| < r$.
Dále definujeme body $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{e} := \boldsymbol{a}_n + \overrightarrow{v}, \boldsymbol{f} := \boldsymbol{b}_n + \overrightarrow{v}$. Pak z indukčního předpokladu platí $\boldsymbol{e} \in B(\boldsymbol{a}_n, r) \subset A$ a $\boldsymbol{f} \in B(\boldsymbol{b}_n, r) \subset A$. Potom jest

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d} &= (1-\xi)\boldsymbol{a}_n + \xi \boldsymbol{b}_n + \overrightarrow{v} = (1-\xi)(\boldsymbol{e} - \overrightarrow{v}) + \xi(\boldsymbol{f} - \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{v} = \\ &= (1-\xi)\boldsymbol{e} - \overrightarrow{v} + \xi\overrightarrow{v} + \xi \boldsymbol{f} - \xi\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v} = (1-\xi)\boldsymbol{e} + \xi \boldsymbol{f} \in A \end{aligned}$$

z předpokladů věty.

Zvolme nyní $\epsilon \in (0, r)$. Protože $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{c}$, můžeme najít $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n \geq n_0$ platí $\|\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{c}\| < \epsilon < r$, jinými slovy, pro $n \geq n_0$ platí

$$\boldsymbol{c} \in B(\boldsymbol{a}_n, \epsilon) \subset B(\boldsymbol{a}_n, r) \subset A.$$

Protože bod $\boldsymbol{c}$ byl zvolen libovolně, je množina A konvexní.

❑

Příklad. Definujeme množinu $A := (0,1) \cup (2,3) \subset \mathbb{R}$. Potom A je zřejmě otevřená. Navíc A splňuje vlastnost (3.4):
Nechť $a, b \in A, a < b$. Ukážeme, že pak existuje číslo $\xi_{a,b} \in (0,1)$ tak, že bod $c = (1 - \xi_{a,b})\boldsymbol{a} + \xi_{a,b} b$ náleží množině A. Jestliže $b \in (0,1)$ nebo $a \in (2,3)$, můžeme volit ξ libovolné.
Vyberme tedy libovolné $a \in (0,1)$ a $b \in (2,3)$. Pak volíme

$$\xi_{a,b} := \frac{\frac{1+a}{2} - a}{b - a}$$

.

Potom platí:

$$c = (1 - \xi_{a,b})a + \xi_{a,b} b = \left(1 - \frac{\frac{1+a}{2} - a}{b-a}\right) a + \frac{\frac{1+a}{2} - a}{b-a} b =$$

$$= a + \frac{(b-a)\left(\frac{1+a}{2} - a\right)}{b-a} = a + \frac{1+a}{2} - a = \frac{1+a}{2} \in (0,1) \subset A.$$

A je ovšem nesouvislá, tedy není konvexní.

Příklad. Nechť $A^* \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná, otevřená a konvexní. Nechť množina A vznikne z A^* odebráním spočetně mnoha bodů, tj. existuje posloupnost $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že $A = A^* \setminus \{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$. Potom zřejmě A je otevřená a není konvexní, ale splňuje vlastnost (3.3):
Nechť jsou dána čísla $\underline{\xi}, \overline{\xi}$ z vlastnosti (3.3). Zvolíme libovolné body $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in A$ a ukážeme, že existuje $\xi_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} \in [\underline{\xi}, \overline{\xi}]$ tak, že bod $(1 - \xi_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\boldsymbol{a} + \xi_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\boldsymbol{b}$ leží v A. Nechť $I = \{n_1, n_2, \dots\}$ je množina právě všech indexů takových, že $\boldsymbol{x}_{n_k}$ leží na úsečce $\overline{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}$ $\forall n_k \in I$.
Pak ke každému $n_k \in I$ existuje $\xi_k \in [0,1]$ tak, že $\boldsymbol{x}_{n_k} = (1 - \xi_k)\boldsymbol{a} + \xi_k \boldsymbol{b}$. Těchto ξ_k, $n_k \in I$ je však nejvýše spočetně mnoho, tedy existuje $\xi_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} \in [\underline{\xi}, \overline{\xi}]$ různé od všech ξ_k, $n_k \in I$ tak, že bod $(1 - \xi_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\boldsymbol{a} + \xi_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\boldsymbol{b}$ leží v A, tedy A splňuje vlastnost (3.3).

Poznámka. Předchozí příklad je uveden pouze pro ilustraci, že protipříklady není nutné dělat pouze na úsečce. Pro úplnost uveďme i příklad co nejjednodušší. K tomu je však třeba připomenout definici souvislé a nesouvislé množiny:

Definice 10. *Řekneme, že množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je* souvislá, *jestliže existují dvě neprázdné disjunktní množiny G_1, G_2, relativně otevřené vzhledem k A a takové, že $A = G_1 \cup G_2$.*
V opačném případě říkáme, že A je souvislá.

Poznámka. Zřejmě každá konvexní množina je souvislá.

Příklad. Definujeme množinu $A \subset \mathbb{R}$ jako $A := (0,1) \cup (1,2)$. Potom A je otevřená a splňuje vlastnost (3.3):
Zvolíme čísla libovolně $0 < \underline{\xi} < \overline{\xi} < 1$.
Pak pro každé dva body $a, b \in A$ existuje nejvýše jedno $\xi \in [\underline{\xi}, \overline{\xi}]$ tak, že $(1-\xi)a + \xi b = 1 \in \overline{ab} \backslash A$. Tedy existuje $\xi_{a,b} \in [\underline{\xi}, \overline{\xi}]$ různé od ξ tak, že bod $(1-\xi_{a,b})a + \xi_{a,b}b$ leží v množině A. A je ovšem nesouvislá, tedy není konvexní.

3.3 Další vlastnosti množin

V této sekci zkusíme zeslabit definici konvexity jiným směrem než v sekcích předchozích.

Definice 11 (Hvězdicovitá množina)**.** *Řekneme, že množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je* hvězdicovitá*, jestliže obsahuje bod $\boldsymbol{h}$ takový, že úsečka $\overline{\boldsymbol{xh}}$ náleží celá množině A pro každé $\boldsymbol{x} \in A$.*

Příklad. Definujeme množinu $A \subset \mathbb{R}^2$ předpisem

$$A := [0,1] \times [0,1) \cup \{ [1, \frac{m}{2^n}] \in \mathbb{R}^2;\ n \in \mathbb{N}, m = 0, \ldots, 2^n \}.$$

Potom A je hvězdicovitá souvislá množina a splňuje vlastnost (3.1) (a s ní i vlastnosti (3.2), (3.3) a (3.4)), ale není konvexní:
A totiž obsahuje body $[1,0]$ a $[1,1]$, ale neobsahuje bod $[1,q]$ pro $q \in (0,1) \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ libovolné, tedy neobsahuje všechny body úsečky spojující $[1,0]$ a $[1,1]$.

Definice 12 (Úsečkově souvislá množina)**.** *Řekneme, že množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je* úsečkově souvislá*, jestliže každé dva body $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ náležící množině A lze spojit lomenou čarou, tj. existuje konečná posloupnost bodů $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}_0, \ldots, \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{b}, n \in \mathbb{N}$ taková, že pro každé $i = 1, \ldots, n$ leží v A celá úsečka spojující $\boldsymbol{x}_{i-1}$ s $\boldsymbol{x}_i$.*

Poznámka. Protože každá hvězdicovitá množina je úsečkově souvislá, předcházející příklad též říká, že hvězdicovitost neimplikuje konvexitu ani spolu s vlastností (3.1) (a tedy ani vlastnostmii (3.2), (3.3) či (3.4)).

Poznámka. Na závěr této kapitoly se pokusíme zobecnit uzavřenost (resp. otevřenost) v předpokladech **Věty 2 - Věty 6**:

Definice 13. *Řekneme, že množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je* typu F_σ*, jestliže A je spočetným sjednocením uzavřených podmnožin $\mathbb{R}^n$.*
Dále řekneme, že množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je typu G_δ*, jestliže A je spočetným průnikem otevřených podmnožin $\mathbb{R}^n$.*

Poznámka. Zřejmě každá uzavřená množina je typu F_σ i typu G_δ a každá otevřená množina je typu F_σ i typu G_δ.

Příklad. Množina $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel splňuje vlastnost (3.1) a není konvexní, ovšem je typu F_σ, neboť $\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{q_n\}$, kde q_n je n-té racionální číslo při libovolné bijekci $\mathbb{N}$ na $\mathbb{Q}$. Množiny $\{q_n\}$ jsou zřejmě uzavřené.

Dokázat dostatečně obecné tvrzení o charakterizaci konvexní množiny zahrnující množinu typu G_δ a nějakou další vlastnost (například vlastnost (3.2)) se ukazuje obtížné. Stejně tak i nalezení protipříkladu. Pro ilustraci uvedeme tvrzení, k jehož důkazu potřebujeme následující verzi Baireovy věty:

Věta 7 (Baireova). *V úplném metrickém prostoru (P, ϱ) platí, že pro každou posloupnost otevřených množin $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}, G_n \subset P$, hustých v P, platí, že $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ je hustá v P.*

Důkaz. Je možné nalézt například v [**?**], str. 97.

❑

Tvrzení 8. *Množina $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel není typu G_δ.*

Důkaz. Sporem. Nechť je $\mathbb{Q}$ typu G_δ. Pak existuje posloupnost otevřených množin $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}, A_n \subset \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, tak, že $\mathbb{Q} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Protože $\mathbb{Q}$ je hustá v $\mathbb{R}$, jsou i $A_n, n \in \mathbb{N}$, husté v $\mathbb{R}$.
Na druhou stranu, protože $\mathbb{Q}$ je rovněž typu F_σ, je $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ typu G_δ, jinými slovy, existuje posloupnost otevřených množin $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}, B_n \subset \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ tak, že $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. Protože $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je hustá v $\mathbb{R}$, jsou i $B_n, n \in \mathbb{N}$, husté v $\mathbb{R}$.
Baireova věta věta speciálně říká, že pro každou posloupnost otevřených množin $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}, G_n \subset \mathbb{R}$, hustých v $\mathbb{R}$, platí, že $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ je hustá v $\mathbb{R}$.
Protože platí, že $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ a $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{Q}$, je průnik $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ prázdná množina, která vznikla jako průnik otevřených hustých podmnožin $\mathbb{R}$, což je spor.

❑

Poslední věta z této kapitoly ilustruje, že zeslabení definice konvexity se může ubírat ještě jiným směrem než v předchozím textu. Nejprve však připomeňme definici kompomenty souvislosti.

Definice 14. *Řekneme, že množina $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$ je* komponentou souvislosti množiny B*, jestliže A je souvislá a každá $C \subset B$ taková, že $A \subset C$ a $A \neq C$, je nesouvislá.*

Věta 9. *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je množina. Nechť platí, že je-li $B \subset A$ omezená, pak B má konečně mnoho komponent souvislosti. Dále nechť A splňuje vlastnost (3.2). Pak A je konvexní množina.*

Důkaz. Uvažujme A alespoň dvoubodovou (jinak je totiž tvrzení triviální).
Nechť $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in A$ jsou libovolné dva body. Zvolme nějaký bod $\boldsymbol{c} \in \overline{\boldsymbol{ab}}$. Jestliže $\boldsymbol{c} \in \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$, jsme hotovi.
V opačném případě ukážeme, že $\boldsymbol{c}$ náleží množině A.

Označme $C := ((\overline{\boldsymbol{ab}} \cap A) \setminus \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\})$. Potom C je zřejmě omezená podmnožina A, tedy má konečně mnoho komponent souvislosti a splňuje vlastnost (3.2).
Definujeme zobrazení $\varphi : \overline{\boldsymbol{ab}} \to [0, 1]$ předpisem

$$\varphi((1 - \lambda)\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}) := 1 - \lambda.$$

Potom φ je bijekce, tedy $\varphi(C)$ má konečně mnoho komponent souvislosti a splňuje vlastnost (3.2). Navíc platí, že ukážeme-li, že $\varphi(\boldsymbol{c}) \in \varphi(C)$, bude platit i $\boldsymbol{c} \in C$.

Protože $\varphi(C)$ je podmnožinou $\mathbb{R}$, existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že platí $\varphi(C) = \bigcup_{i=1}^{m} I_i$, kde I_i je jednobodová množina nebo interval, $i \in \{1, \ldots, m\}$.
Nyní sporem ukážeme, že $\varphi(\boldsymbol{c}) \in \varphi(C)$.
Předpokládejme tedy, že $\varphi(\boldsymbol{c}) \notin \varphi(C)$. Dále předpokládejme, že existuje $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ takové, že I_{i_0} je alespoň z jedné strany uzavřený, BÚNO zprava. Dále BÚNO předpokládejme, že intervaly jsou „hezky seřazené”, neboli
$\forall i, j \in \{1, \ldots, m\}$ platí: $i < j \Rightarrow \alpha < \beta, \forall\alpha \in I_i, \forall\beta \in I_j$.
Označíme x pravý krajní bod I_{i_0}. Mohou nastat dva případy:

1. I_{i_0+1} je jednobodová množina, tento jeden bod označíme z. Pak ale bod $(1-\xi)x + \xi z$ nepatří do množiny $\varphi(C)$ pro ξ libovolné, což je spor s tím, že tato množina má vlastnost (3.2), a tedy bod $\varphi(\boldsymbol{c})$ patří do množiny $\varphi(C)$.

2. I_{i_0+1} je interval. Označíme y jeho levý krajní bod.
   Potom interval (x, y) nenáleží množině $\varphi(C)$ a pro libovolně zvolené
   $\varepsilon \in (0, \min\{\frac{(1 - \xi)y - (1 - \xi)x}{\xi}, \sup I_{i_0+1} - y\})$ platí, že
   $y + \varepsilon \in I_{i_0+1} \subset \varphi(C)$ a $x < (1 - \xi)x + \xi(y + \varepsilon) < y$, tedy
   $(1 - \xi)x + \xi(y + \varepsilon) \notin \varphi(C)$, což je spor s tím, že C splňuje vlastnost (3.2), neboli opět platí $\varphi(\boldsymbol{c}) \in \varphi(C)$.

Musí tedy platit, že I_i je otevřený $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$.
Pak je ale $\varphi(C)$ otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$ splňující vlastnost (3.2), tedy dle **Věty 6** konvexní množina. Z definice konvexní množiny pak plyne $\varphi(\boldsymbol{c}) \in \varphi(C)$.
Ukázali jsme tedy, že $\boldsymbol{c} \in C$. Protože body $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ byly zvoleny libovolně, je A konvexní množina.

❑

Kapitola 4

Konvexní množiny a nadroviny

V této kapitole se budeme zabývat pojmem opěrné nadroviny konvexní množiny, který umožňuje zcela jiný pohled na charakterizaci konvexních množin: Zatímco v předchozí kapitole jsme se zabývali výhradně tím, jak vypadá konvexní množina „uvnitř", zde se budeme zabývat tím, jak vypadá „zvenku".

4.1 Nadrovina a opěrná nadrovina

Nejprve je třeba zavést pojem nadroviny a oddělitelnosti a připomenout základní věty o oddělitelnosti.

Definice 15 (Afinní podprostor). *Množinu $M \subset \mathbb{R}^n$ nazveme* afinním podprostorem *v $\mathbb{R}^n$, jestliže pro každé dva (různé) body $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M$ náleží M i celá přímka těmito dvěma body procházející.*

Definice 16 (Nadrovina). *Množinu $M \subset \mathbb{R}^n$ nazveme* nadrovinou *v $\mathbb{R}^n$, jestliže M je Afinním podprostorem v $\mathbb{R}^n$ takovým, že* dim $M = n - 1$.

Poznámka. Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je nadrovina v $\mathbb{R}^n$, jestliže existují $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ a $c \in \mathbb{R}$ tak, že $M = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} = c\}$. (viz [1], str. 192, **věta 19.15.** (O popisu podprostorů rovnicemi))

Definice 17 (Poloprostor). *Nechť $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ je nenulové. Pak* uzavřeným poloprostorem *v $\mathbb{R}^n$ rozumíme jakoukoliv množinu, kterou je možné zapsat ve tvaru $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \leq c\}$ nebo $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \geq c\}, c \in \mathbb{R}$.*
Otevřeným poloprostorem *v $\mathbb{R}^n$ pak rozumíme jakoukoliv množinu, kterou je možné zapsat ve tvaru $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} < c\}$ nebo $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} > c\}, c \in \mathbb{R}$.*

Poznámka. Otevřený poloprostor v $\mathbb{R}^n$ je zřejmě otevřená konvexní množina, uzavřený poloprostor v $\mathbb{R}^n$ je zřejmě uzavřená konvexní množina.

Poznámka. Každá nadrovina v $\mathbb{R}^n$ rozděluje $\mathbb{R}^n$ na dva poloprostory.

Lemma 8 (O projekci). *(Čerpáno z [4]). Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná uzavřená konvexní množina, nechť $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je bod. Pak existuje právě jeden bod $\widehat{\boldsymbol{x}} \in A$ takový, že $\|\boldsymbol{x} - \widehat{\boldsymbol{x}}\| = \min\{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|;\ \boldsymbol{y} \in A\}$.*
Tento bod je jednoznačně určen podmínkou

$$(\boldsymbol{x} - \widehat{\boldsymbol{x}})^T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \leq 0 \text{ pro každé } \boldsymbol{y} \in A. \tag{4.1}$$

Důkaz. (viz [4], str. 35, lemma 3.2 (o projekci)) ❑

Poznámka. Bod $\widehat{\boldsymbol{x}}$ z předchozího lemmatu nazýváme *projekcí bodu $\boldsymbol{x}$ na množinu* A, kde $\boldsymbol{x}$ a A jsou jako z předchozího lemmatu.

Definice 18 (Oddělitelnost)**.** *Nechť $A, B \subset \mathbb{R}^n$ jsou množiny. Pak řekneme, že A a B jsou* neostře oddělitelné, *jestliže existuje $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tak, že $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b}$ pro každé $\boldsymbol{a} \in A$, $\boldsymbol{b} \in B$.*
Jinými slovy, existuje $c \in R$ tak, že nadrovina $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x} = c\}$ určuje dva uzavřené poloprostory $H_1, H_2 \subset \mathbb{R}^\kappa$ takové, že $\boldsymbol{a} \in H_1$ a $\boldsymbol{b} \in H_2$ pro každé $\boldsymbol{a} \in A, \boldsymbol{b} \in B$.
Dále řekneme, že A a B jsou ostře oddělitelné, *jestliže existují bod $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ a čísla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tak, že $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{a} > \alpha > \beta > \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b}$ pro každé $\boldsymbol{a} \in A$, $\boldsymbol{b} \in B$.*
Jinými slovy existují čísla $c \in R, \epsilon > 0$ tak, že nadrovina $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x} = c\}$ určuje dva otevřené poloprostory $H_1, H_2 \subset \mathbb{R}^\kappa$ takové, že $\boldsymbol{a} + \epsilon\boldsymbol{d} \in H_1$ a zároveň $\boldsymbol{b} + \epsilon\boldsymbol{d} \in H_2$ pro každé $\boldsymbol{a} \in A, \boldsymbol{b} \in B$ a $\boldsymbol{d}$ takové, že $\|\boldsymbol{d}\| = 1$.

Věta 10 (Oddělitelnost konvexních množin)**.** *(Přeloženo z [2]) Nechť $A, B \in \mathbb{R}^n$ jsou neprázdné konvexní množiny. Pak A a B jsou ostře oddělitelné právě tehdy, když*

$$\inf\{\|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\|;\ \boldsymbol{a} \in A, \boldsymbol{b} \in B\} > 0, \tag{4.2}$$

neboli

$$\boldsymbol{0} \notin clo(A - B). \tag{4.3}$$

Důkaz. Viz [2], str. 98, Theorem 11.4. ❑

Věta 11 (O opěrné nadrovině)**.** *(Čerpáno z [4]). Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná konvexní množina a $\boldsymbol{a} \in \delta A$ je bod. Pak existuje $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n\{0\}$ tak, že*

$$\inf\{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{x} \in A\} \geq \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{a}.$$

Důkaz. Viz [4], str. 37, Věta 3.4. ❑

Poznámka. (Čerpáno z [4]). **Věta 11** říká, že existuje nadrovina $L = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x} = c\}$ a jí určený uzavřený poloprostor $H = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x} \geq c\}$ tak, že $\boldsymbol{a} \in L \cap \overline{A}$ a $A \subset H$. Této nadrovině říkáme *opěrná nadrovina množiny A v bodě $\boldsymbol{a} \in \delta A$* a poloprostoru H říkáme *opěrný poloprostor množiny A v bodě $\boldsymbol{a} \in \delta A$*

Poznámka. Ve speciálním případě, že ve **větě 4.3** zvolíme množinu B jednobodovou, pak lze získat silnější tvrzení:

Věta 12 (Oddělitelnost bodu a konvexní množiny). *(Čerpáno z [4], str. 36, Věta 3.3.)*
Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a $\boldsymbol{x} \notin clo\,(A)$. Potom existuje $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ takové, že

$$\inf\{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{a} \in A\} > \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x}.$$

Speciálně lze volit $\boldsymbol{y} = \widehat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}$, kde $\widehat{\boldsymbol{x}}$ je projekce bodu $\boldsymbol{x}$ na množinu A. Pro tuto speciální volbu dostáváme silnější výsledek

$$\inf\{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{a} \in A\} = \min\{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{a} \in cl\,(A)\} = \boldsymbol{y}^T\widehat{\boldsymbol{x}} > \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x}. \tag{4.4}$$

Důkaz. Viz [4] str. 36, Věta 3.3.

❑

Poznámka. (Čerpáno z [4]). **Věta 12** vlastně říká, že pro bod $\boldsymbol{x}$ ležící vně uzávěru množiny A existuje nadrovina kolmá k vektoru $\boldsymbol{x} - \widehat{\boldsymbol{x}}$, která je zároveň opěrnou nadrovinou množiny A.

4.2 Charakterizující vlastnosti uzavřených množin pomocí nadrovin

V této sekci uvedeme důležité věty o charakterizaci uzavřených množin a uvedeme příklad podmínek, kdy je sjednocení dvou konvexních množin rovněž konvexní.

Věta 13 (Charakterizace uzavřené konvexní množiny pomocí poloprostorů). *Buď $A \subset \mathbb{R}^n$ uzavřená množina. Pak A je konvexní právě tehdy, když A je průnikem všech uzavřených poloprostorů, které ji obsahují.*

Důkaz. Uzavřený poloprostor je konvexní množina a průnik konvexních množin je konvexní množina, tedy průnik uzavřených poloprostorů je vždy konvexní.
Naopak, nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní a uzavřená. Když $A = \emptyset$ nebo $A = \mathbb{R}^n$, je důkaz hotov. Nechť tedy $A \neq \emptyset$ a $A \neq \mathbb{R}^n$. Pak můžeme vybrat libovolný bod $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n \setminus A$.
Protože $\mathbb{R}^n \setminus A$ je otevřená (z uzavřenosti A), existuje $r > 0$ tak, že $B(\boldsymbol{c}, r)$ patří celá do $\mathbb{R}^n \setminus A$, jinými slovy, $\|\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}\| \geq r > 0$ pro každé $\boldsymbol{a} \in A$.
Tedy množiny A a $\{\boldsymbol{c}\}$ splňují předpoklad (4.2), navíc jsou obě neprázdné a konvexní, čili splňují všechny předpoklady **Věty 10** a existuje nadrovina L určující dva (disjunktní) otevřené poloprostory H_1, H_2 takové, že A patří do H_1 a tudíž $\{\boldsymbol{x}\}$ patří do H_2. Bod $\boldsymbol{x}$ proto nenáleží uzavřenému poloprostoru $\mathbb{R}^n \setminus H_2 = clo\,(H_1)$, který obsahuje množinu A.
Ukázali jsme, že k libovolnému bodu $\boldsymbol{c}$ nenáležícímu množině A existuje uzavřený poloprostor takový, který obsahuje množinu A, ale neobsahuje bod $\boldsymbol{c}$, tedy A je rovna průniku všech uzavřených poloprostorů, které ji obsahují.

❑

Poznámka. Tvrzení předchozí věty lze zesílit pomocí využití **věty 12**. Toto zesílení je založeno na tom, že každý poloprostor obsahující konvexní množinu zároveň obsahuje alespoň jeden opěrný poloprostor této konvexní množiny.

Věta 14 (Charakterizace uzavřených konvexních množin pomocí opěrných poloprostorů)**.** *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je uzavřená množina. Pak A je konvexní právě tehdy, když A je průnikem všech svých opěrných poloprostorů.*

Důkaz. Opěrný poloprostor množiny A je konvexní množina a průnik konvexních množin je opět konvexní množina.
Nechť je nyní $A \in \mathbb{R}^n$ uzavřená konvexní množina. Zvolíme nějaký (libovolný) bod $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n \setminus A$.
Nechť $\widehat{\boldsymbol{c}}$ je projekce bodu $\boldsymbol{c}$ na množinu A. Pak $\widehat{\boldsymbol{c}} \in \delta A$. Z **věty 12** (vztahu (4.4)) a **věty 11** existuje opěrná nadrovina L množiny A v bodě $\widehat{\boldsymbol{c}}$, která je kolmá na vektor $\boldsymbol{c} - \widehat{\boldsymbol{c}}$ a s ní i opěrný poloprostor H množiny A v bodě $\widehat{\boldsymbol{c}}$.
Z **lemmatu 8** a toho, že množina $\mathbb{R}^n \setminus A$ je otevřená, bod $\boldsymbol{x}$ neleží v H, ovšem množina A v H leží, čímž je důkaz hotov.

❑

Poznámka. **Věta 14** nám dává do rukou velmi silný nástroj, díky kterému můžeme dokázat následující větu.

Věta 15 (O uzavřeném konvexním sjednocení dvou konvexních množin)**.** *Nechť $A, B \subset \mathbb{R}^n$ jsou dvě konvexní množiny, jejichž sjednocení $A \cup B$ je uzavřená množina. Nechť dále platí následující podmínky:*

1. *Existuje M nadrovina v $\mathbb{R}^n$ tak, že $\emptyset \neq A \cap M = B \cap M$.*
2. *Nechť pro každý bod $\boldsymbol{x} \in \delta(A \cap M) = \delta(B \cap M)$ existuje nadrovina $L_{\boldsymbol{x}}$, jež je opěrnou nadrovinou množiny $A \cup B$ v bodě $\boldsymbol{x}$.*
3. *Nechť je vnitřek průniku $A \cap B$ neprázdná množina.*
4. *Nechť platí:*
   $(A \cup B) \cap H_M \subset clo\,(A)$,
   $(A \cup B) \cap H'_M \subset clo\,(B)$,
   kde H_M a H'_M jsou uzavřené poloprostory určené nadrovinou M

Pak $A \cup B$ je konvexní množina.

Důkaz. Ukážeme, že množina $A \cup B$ je průnikem všech svých opěrných poloprostorů a tedy dle **věty 14** konvexní (uzavřená je z předpokladu věty).
Zvolíme libovolný bod $\boldsymbol{c} \in \delta(A \cup B)$ (protože vnitřek průniku množin A a B je otevřený, takový bod existuje). Pak z uzavřenosti množin A, B platí $\boldsymbol{c} \in A \cap \delta(A)$ nebo $\boldsymbol{c} \in B \cap \delta(B)$.
BÚNO nechť je $\boldsymbol{c} \in A \cap \delta(A)$.

Protože A je konvexní, prochází bodem $\boldsymbol{c}$ nadrovina $L_{\boldsymbol{c}}$, která je opěrnou nadrovinou množiny A, tedy existuje uzavřený poloprostor $H_{\boldsymbol{c}}$ obsahující A (daný nadrovinou $L_{\boldsymbol{c}}$) a otevřený poloprostor $G_{\boldsymbol{c}} = \mathbb{R}^n \setminus H$. Ukážeme, že množina B

leží v $H_{\boldsymbol{c}}$:

Zvolíme libovolný bod $\boldsymbol{d} \in G$. Pak nastává jedna z možností:

1. Platí $\boldsymbol{d} \notin \bigcap_{\boldsymbol{x} \in \delta(A \cap M)} H_{\boldsymbol{x}}$, kde $H_{\boldsymbol{x}}$ je uzavřený poloprostor obsahující množinu $A \cup B$, daný opěrnou nadrovinou $L_{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x} \in \delta(A \cap M)$. Pak z předpokladů věty spolu s tvrzením **věty 10** máme $\boldsymbol{d} \notin B$.

2. Platí $\boldsymbol{d} \in \bigcap_{\boldsymbol{x} \in \delta(A \cap M)} H_{\boldsymbol{x}}$, přičemž $H_{\boldsymbol{x}}$ je uzavřený poloprostor obsahující množinu $A \cup B$, daný opěrnou nadrovinou $L_{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x} \in \delta(A \cap M)$.

   BÚNO nechť uzavřený poloprostor H_M daný nadrovinou M obsahuje bod $\boldsymbol{c}$. Nechť $\overrightarrow{u}$ je vektor kolmý na nadrovinu $L_{\boldsymbol{c}}$. Potom existuje právě jedna rovina obsahující body $\boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{d}$ a vektor $\overrightarrow{u}$. Tuto rovinu označme τ.
   Potom $M \cap \tau$, $L_{\boldsymbol{c}} \cap \tau$ a $L_{\boldsymbol{x}} \cap \tau, \boldsymbol{x} \in (\delta(A \cap M) \cap \tau)$, jsou přímky, $H_M \cap \tau$ je polorovina a množina $A \cap \tau$ je konvexní (zřejmě je tedy konvexní i množina $(A \cap H_M \cap \tau)$).
   Protože $L_{\boldsymbol{c}}$ je opěrnou nadrovinou množiny A, je i opěrnou nadrovinou množiny $A \cap H_M$, a tedy $L_{\boldsymbol{c}} \cap \tau$ je opěrnou přímkou (tj. opěrnou nadrovinou v $\mathbb{R}^2$) množiny $A \cap H_M \cap \tau$. Protože M je rovněž opěrnou nadrovinou množiny $A \cap H_M$, platí, že $M \cap \tau$ je opěrnou přímkou množiny $A \cap H_M \cap \tau$ a tudíž jest $(M \cap L_{\boldsymbol{c}} \cap \tau) \subset ((\mathbb{R}^n \cap \tau) \setminus Int_{H_M}(A \cap H_M))$. Protože ale M je i opěrnou nadrovinou množiny $B \cap H'_M$, platí, že $M \cap \tau$ je opěrnou přímkou množiny $(B \cap H'_M \cap \tau)$ a tedy $\boldsymbol{d} \notin (B \cap \tau) \subset B$.

Dokázali jsme tedy, že libovolný bod $\boldsymbol{d}$, který nepatří do poloprostoru $H_{\boldsymbol{c}}$, nepatří ani do množiny B. Protože ale bod $\boldsymbol{c}$ byl zvolen libovolně, máme v každém hraničním bodě množiny $A \cup B$ opěrnou polorovinu této množiny, jinými slovy, množina $A \cup B$ je konvexní.

❑

Poznámka. V předpokladu **věty 15** by bylo možné namísto uzavřenosti množiny $A \cup B$ požadovat uzavřenost samostatných množin A a B. Tento předpoklad by však byl silnější, neboť sjednocení dvou uzavřených množin je vždy uzavřená množina, ale například intervaly $[0, 2) \in \mathbb{R}$ a $(1, 3] \in \mathbb{R}$ uzavřené nejsou, ale jejich sjednocením je uzavřený interval $[0, 3]$.

Kapitola 5

Slovo závěrem

Závěrem uveďme několik podnětů, kudy by práce o charakterizaci konvexních množin šla nadále rozvíjet, potažmo do jaké míry by bylo možné pojem konvexity zobecnit.

Definice konvexity uvedená v druhé kapitole se v literatuře (zvláště pak té zabývající se funkcionální analýzou) uvádí pro obecné normované lineární prostory, tj. i s nekonečnou dimenzí a s obecnou normou. V případě $\mathbb{R}^n$ na tom, jaká norma se vybere, nezáleží, jelikož je známo, že v R^n jsou všechny normy ekvivalentní. V této práci je tedy eukleidovská norma používána především pro jednoduchost a snadnou představu.

Konvexní funkce je pak možné zobecnit do metrických prostorů.

Snadno se ověří, že například **Věty 2**, **3** a **4** lze vyslovit též v obecných NLP. Platnost **Věty 5** v obecných NLP pak může být předmětem hlubšího zkoumání.

Jako protipříklad můžeme uvést, že například v metrickém prostoru $(\mathbb{R}^n, diskr.)$, kde $diskr.$ je diskrétní metrika, tj. metrika taková, že

$$diskr.(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 1, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y},$$
$$diskr.(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0,$$

by důkazy **Vět 2**, **3**, **4** a **6** nebylo možné vést způsobem, jakým jsou vedeny v této práci.

Autor práce se domnívá, že nejzajímavějším předmětem dalšího zkoumání by bylo, zda je možné množinu typu G_δ spolu s vlastností (3.1) nebo (3.2) (jak je ukázáno v třetí kapitole, tyto dvě vlastnosti jsou v problematice konvexity více méně ekvivalentní) prohlásit za konvexní, tento problém se ukazuje býti velmi zajímavým.

Většina vět o oddělitelnosti ve čtvrté kapitole lze opět vyslovit pro obecné NLP v nekonečné dimenzi, znění a důkazy těchto vět lze nalézt například v [7].

Za další přemýšlení by rovněž stálo zobecnění nebo zesílení **Vět 9** a **15**, například druhou jmenovanou vyslovit i pro otevřenou množinu.

Úplným závěrem lze ještě dodat krátké a odlehčené zamyšlení nad pojmem konvexní množiny jako takovým v souvislosti s touto prací:

Člověk znalý pojmu konvexní množiny intuitivně (můžeme doufat, že většina absolventů středních škol) má zpravidla obecnou představu, že konvexní množina má typicky nějaký „zaoblený, kompaktní tvar“, například kobliha konvexní je, zatímco hlava nějakého dostatečně ušatého zvířátka konvexní není (slovo „kompaktní" zde v žádném případě nesouvisí s kompaktními množinami).

Přitom zajímavost matematické definice konvexity tkví právě v tom, že namísto zkoumání „tvaru"množiny (říkejme jí pro jednoznačnost A) lze jednoduše vybrat libovolnou přímku, která prochází touto množinou a zjistit, zda je průnik této přímky s množinou A souvislý. Zjistíme-li, že tomu tak je, už víme, že taková množina bude jakousi verzí například výše zmíněného „koblížku". Tímto pohledem se vlastně zjednodušeně zabývá celá třetí kapitola této práce.

Na druhou stranu se ovšem nabízí možnost namísto zkoumání přímek množinou A procházejících (tedy jejího vnitřku) zkoumat, jak tato množina opravdu „vypadá zvenčí", tedy jestli je možné v každém jejím hraničním bodě najít nějakou opěrnou nadrovinu. Tím jsme se zabývali v kapitole čtvrté.

Literatura

[1] Bican, L.: *Lineární algebra a geometrie.* Academia, Praha, 2009.

[2] Rockafellar, R. T.: *Convex analysis.* Princeton University Press, 1970.

[3] Čech, E.; Jarník, V.: *Bodové množiny. S dodatkem „O derivovaných číslech funkcí jedné proměnné”.* Jednota Československých matematiků a fysiků, 1936.

[4] Lachout, P.: Konvexita v konečné dimenzi. 2011, url: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~lachout/Vyuka/Optima1/111016-Konvexita-skripta.pdf

[5] Lachout, P.: Úvod do optimalizace. Matfyzpress, Praha, 2011.

[6] Rudin, W.: Real and Complex Analysis. McGraw - Hill Book Co., Singapore, 1987.

[7] Rudin, W.: Functional Analysis. McGraw - Hill Book Co., Singapore, 1991.