Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jakub Ježo

Mnohorozměrné normální rozdělení

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Michal Kulich, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2014

Týmto by som sa chcel poďakovať doc. Mgr. Michalovi Kulichovi, Ph.D. za jeho odborné vedenie tejto bakalárskej práce a za jeho čas.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Mnohorozměrné normální rozdělení

Autor: Jakub Ježo

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Michal Kulich, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Tato bakalářská práce se věnuje mnohorozměrnému normálnímu rozdělení, rozděleními od něj odvozenými a vztahy mezi nimi. Na začátku je uvedena definice a charakterizace n-rozměrného normálního rozdělení, odvození jeho charakteristické funkce a definice maticového normálního rozdělení. Dále se zabývá vlastnostmi mnohorozměrného normálního rozdělení a zkoumá lineární kombinace normálních vektorů, lineární kombinace normálních matic a jejich vlastnosti. Poté se práce věnuje kvadratickými formami matic z normálního rozdělení, co vede k Wishartovmu rozdělení, jeho vlastnostem a analýze mnohorozměrných dat na něm založené. Ke konci práce se zkoumají kombinace náhodných vektorů a matice z normálního rozdělení vedoucí k Hotellingovmu rozdělení a jeho vlastnostem. V průběhu práce je odvozeno rozdělení a vlastnosti vektoru výběrových průměrů a výběrové kovarianční matice náhodného výběru z n-rozměrného normálního rozdělení.

Klíčová slova: normální rozdělení; Wishartovo rozdělení; Hotellingovo rozdělení

Title: Multivariate Normal Distribution

Author: Jakub Ježo

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. Mgr. Michal Kulich, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: This bachelor thesis deals with the multivariate normal distribution, distributions derived from it and relations between them. The definition and characterization of the n-dimensional multinormal distribution, derivation of its characteristic function and definition of the matrix normal distribution are shown at the beginning. Further this thesis looks at the properties of the multivariate normal distribution and examines the linear combinations of normal vectors, linear combinations of normal matrices and theirs properties. After that the quadratic forms of matrices from the normal distribution are shown, which leads to the Wishart distribution, its properties and the analysis of multidimensional data based on it. At the end of the thesis, the combinations of random vectors and matrix from the normal distribution are examined, which results to the Hotelling distribution and its properties. The distribution and properties of the sample mean vector and sample covariance matrix of a random sample from n-dimensional multinormal distribution are presented in this thesis.

Keywords: normal distribution; Wishart distribution; Hotelling distribution

Názov práce: Mnohorozmerné normálne rozdelenie

Autor: Jakub Ježo

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedúci bakalárskej práce: doc. Mgr. Michal Kulich, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Táto bakalárska práca sa venuje mnohorozmernému normálnemu rozdeleniu, rozdeleniami od neho odvodenými a vzťahmi medzi nimi. Na začiatku je uvedená definícia a charakterizácia n-rozmerného normálneho rozdelenia, odvodenie jeho charakteristickej funkcie a definícia maticového normálneho rozdelenia. Ďalej sa zaoberá vlastnosťami mnohorozmerného normálneho rozdelenia a skúma lineárne kombinácie normálnych vektorov, lineárne kombinácie normálnych matíc a ich vlastnosti. Potom sa práca venuje kvadratickými formami matíc z normálneho rozdelenia, čo vedie k Wishartovmu rozdeleniu, jeho vlastnostiam a analýze mnohorozmerných dát na ňom založenej. Ku konci práce sa skúmajú kombinácie náhodných vektorov a matice z normálneho rozdelenia vedúce k Hotellingovmu rozdeleniu a jeho vlastnostiam. V priebehu práce je odvodené rozdelenie a vlastnosti vektora výberových priemerov a výberovej kovariančnej matice náhodného výberu z n-rozmerného normálneho rozdelenia.

Kľúčové slová: normálne rozdelenie; Wishartovo rozdelenie; Hotellingovo rozdelenie

Obsah

Úvod

V tejto bakalárskej práci sa zaoberáme mnohorozmerným normálnym rozdelením, rozdeleniami od neho odvodenými, vzťahmi medzi nimi a náhodným výberom z n-rozmerného normálneho rozdelenia. Rozdelenia, ktoré odvodíme od mnohorozmerného normálneho rozdelenia, budeme skúmať, bez toho aby sme odvodzovali a používali ich funkcie hustoty.

V prvej kapitole je najprv definované n-rozmerné normálne rozdelenie a maticové normálne rozdelenie. Ďalej sa tam nachádza odvodenie charakteristickej funkcie n-rozmerného normálneho rozdelenia a jeho charakterizácia pomocou Cramér-Woldovej vety.

Nasledujúca kapitola sa venuje vlastnostiam mnohorozmerného normálneho rozdelenia. V tejto kapitole je ukázané, ktoré lineárne kombinácie normálnych vektorov a lineárne kombinácie normálnych matíc zachovávajú normalitu a aké sú ich vlastnosti.

V tretej kapitole sú ukázané kvadratické formy matíc z normálneho rozdelenia, ktoré vedú k Wishartovmu rozdeleniu a jeho vlastnostiam. Na konci tejto kapitoly sa venujeme analýze mnohorozmerných dát založenej na Wishartovom rozdelení.

Posledná kapitola skúma kombinácie náhodných vektorov a matice z normálneho rozdelenia, čo vedie k Hotellingovmu rozdeleniu a jeho vlastnostiam.

Rozdelenie a vlastnosti vektora výberových priemerov a výberovej kovariančnej matice náhodného výberu z n-rozmerného normálneho rozdelenia sú v priebehu práce odvodené ako dôsledky vyššie spomínaného.

Podklady pre túto bakalársku prácu som čerpal zo základných prednášok pravdepodobnosti a štatistiky a knihy (Mardia,1979).

Kapitola 1

Mnohorozmerné normálne rozdelenie

Mnohorozmerné normálne rozdelenie dostaneme priamym zobecnením normálneho rozdelenia $\mathbf{N}(\mu,\sigma^2)$ na n-rozmerov.

Definícia 1. *Nech máme náhodný vektor* $\mathbf{Y} = (Y_1,...,Y_k)^T$*, ktorého prvky sú nezávislé náhodné veličiny z rozdelenia* $\mathbf{N}(0,1)$*, maticu* $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ *a* n*-rozmerný pevne daný vektor* $\boldsymbol{\mu}$*, potom náhodný vektor* $\mathbf{X} = A\mathbf{Y} + \boldsymbol{\mu}$ *má* n*-rozmerné normálne rozdelenie s vektorom stredných hodnôt* $\boldsymbol{\mu}$ *a maticou disperzie* $\boldsymbol{\Sigma} = AA^T$*. Značíme ako* $\mathbf{X} \sim \mathbf{N_n}\big(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}\big)$*.*

Veta 1. *Ak náhodný vektor* $\mathbf{X} = (X_1,...,X_n)^T$ *má rozdelenie* $\mathbf{N_n}\big(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}\big)$ *a matica disperzie* $\boldsymbol{\Sigma}$ *je regulárna matica, potom existuje jeho hustota*

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \left|2\pi\boldsymbol{\Sigma}\right|^{-\frac{1}{2}} exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right\},$$

kde $\left|2\pi\boldsymbol{\Sigma}\right|^{-\frac{1}{2}} = \left\{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\left|\boldsymbol{\Sigma}\right|^{\frac{1}{2}}\right\}^{-1}$*, vzhľadom k Lebesgueovej miere na* $\mathbb{R}^n$*.*

Poznámka. Hustotu náhodného vektora, ktorý má n-rozmerné normálne rozdelenie s vektorom stredných hodnôt $\boldsymbol{\mu}$ a maticou disperzie $\boldsymbol{\Sigma}$, môžeme tiež vyjadriť, ako

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \left|2\pi\boldsymbol{\Sigma}\right|^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma^{ij}(x_i-\mu_i)(x_j-\mu_j)\right\}, \boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \left(\sigma^{ij}\right).$$

Definícia 2. *Nech* $\mathbb{X}$ *je matica typu* $(m\times n)$*, ktorej* m *riadkov* $\mathbf{X}_1^T,...,\mathbf{X}_m^T$ *sú nezávislé rovnako rozdelené náhodné vektory z rozdelenia* $\mathbf{N_n}\big(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}\big)$*, potom povieme, že matica* $\mathbb{X}$ *má maticové normálne rozdelenie s hustotou*

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{X}}(\mathbb{M}) &= \left|2\pi\boldsymbol{\Sigma}\right|^{-\frac{m}{2}} exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}(\mathbf{M}_r-\boldsymbol{\mu})^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{M}_r-\boldsymbol{\mu})\right\} = \\ &= \left|2\pi\boldsymbol{\Sigma}\right|^{-\frac{m}{2}} exp\left\{-\frac{1}{2}tr\left[\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\left(\mathbb{M}-\mathbf{1}_m\boldsymbol{\mu}^T\right)^T\left(\mathbb{M}-\mathbf{1}_m\boldsymbol{\mu}^T\right)\right]\right\}, \end{aligned}$$

kde matica $\mathbb{M} = \left(\mathbf{M}_r^T\right)_{r=1}^{m}$*,* $\mathbf{M}_r \in \mathbb{R}^n$ *a* $\mathbf{1}_m$ *je* m*-rozmerný jednotkový vektor.*

Teraz odvodíme charakteristickú funkciu pre n-rozmerné normálne rozdelenie. Charakteristická funkcia náhodného vektora $\mathbf{X}$ s hustotou $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ je definovaná, ako

$$\hat{P}_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \mathbf{E}\left[e^{i\mathbf{t}^T\mathbf{X}}\right] = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\mathbf{t}^T\mathbf{x}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}, \mathbf{t} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}.$$

Vlastnosti charakteristickej funkcie náhodného vektora $\mathbf{X}$:

- Charakteristická funkcia vždy existuje, $\hat{P}_{\mathbf{X}}(\mathbf{0}) = 1$ a $\left|\hat{P}_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})\right| \leq 1$.
- Jednoznačnosť: Dva náhodné vektory majú rovnakú charakteristickú funkciu vtedy a len vtedy, keď majú rovnakú distribúciu.
- Inverzia: Ak charakteristická funkcia $\hat{P}_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})$ je absolútne integrovateľná, potom hustota je daná vzorcom:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\mathbf{t}^T\mathbf{x}} \hat{P}_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})\,\mathrm{d}\mathbf{t}.$$

- Nech $\mathbf{X}^T = \left(\mathbf{Y}^T, \mathbf{Z}^T\right)$, náhodné vektory $\mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ sú nezávislé práve vtedy, keď združená charakteristická funkcia náhodného vektora $\mathbf{X}$ je súčinom marginálnych charakterictických funkcí:

$$\hat{P}_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \hat{P}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{t}_{\mathbf{Y}})\,\hat{P}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{t}_{\mathbf{Z}}), \mathbf{t}^T = \left(\mathbf{t}_{\mathbf{Y}}{}^T, \mathbf{t}_{\mathbf{Z}}{}^T\right).$$

  Marginálnu charakteristickú funkciu náhodného vektora $\mathbf{Y}$ dostaneme ako $\hat{P}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{t}_{\mathbf{Y}}) = \hat{P}_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}_{\mathbf{Y}}, \mathbf{0})$.
- Nech $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ a $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_m)^T$ sú nezávislé náhodné vektory s charakteristickými funkciami $\hat{P}_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})$ a $\hat{P}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{t})$, potom pre ich súčet $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ platí rovnosť:

$$\begin{aligned}\hat{P}_{\mathbf{X}+\mathbf{Y}}(\mathbf{t}) = \mathbf{E}\left[e^{i\mathbf{t}^T(\mathbf{X}+\mathbf{Y})}\right] = \mathbf{E}\left[e^{i\mathbf{t}^T\mathbf{X}} e^{i\mathbf{t}^T\mathbf{Y}}\right] = \\ = \mathbf{E}\left[e^{i\mathbf{t}^T\mathbf{X}}\right] \mathbf{E}\left[e^{i\mathbf{t}^T\mathbf{Y}}\right] = \hat{P}_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})\,\hat{P}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{t}).\end{aligned}$$

Charakteristická funkcia náhodnej premennej s normálnym rozdelením $\mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$, ktorá má strednú hodnotu μ a disperziu rovnú $\sigma^2 \geq 0$, sa dá vyjadriť, ako

$$\hat{P}_X(t) = \exp\left\{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right\}, \text{ pre } t \in \mathbb{R}.$$

Veta 2. *Nech máme náhodný vektor* $\mathbf{X} \sim \mathbf{N_n}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, *potom jeho charakteristickú funkciu vyjadríme, ako*

$$\hat{P}_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = exp\left\{i\mathbf{t}^T\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{t}^T\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}\right\}, \mathbf{t} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}.$$

Dôkaz. Máme $\mathbf{X} = \mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Y} + \boldsymbol{\mu}$ s charakteristickou funkciou

$$\hat{P}_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \mathbf{E}\left[e^{i\mathbf{t}^T\mathbf{X}}\right] = \mathbf{E}\left[e^{i\mathbf{t}^T\left(\mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Y}+\boldsymbol{\mu}\right)}\right] = \mathbf{E}\left[e^{i\mathbf{t}^T\boldsymbol{\mu}}e^{i\mathbf{t}^T\mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Y}}\right] = e^{i\mathbf{t}^T\boldsymbol{\mu}}\mathbf{E}\left[e^{i\mathbf{t}^T\mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Y}}\right],$$

kde $\mathbf{Y} = (Y_1,...,Y_n)^T$má nezávislé rovnako rozdelené zložky s rozdelením $\mathbf{N}(0,1)$, takže charakteristická funkcia

$$\hat{P}_{Y_j}(t_j) = \mathbf{E}\left[e^{it_jY_j}\right] = \exp\left\{-\frac{t_j^2}{2}\right\}, \text{ pre všetky } j = 1,...,n.$$

Označíme $\mathbf{u}^T = \mathbf{t}^T\mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}}$, takže

$$\mathbf{E}\left[e^{i\mathbf{u}^T\mathbf{Y}}\right] = \mathbf{E}\left[e^{i\sum_{j=1}^n u_jY_j}\right] = \prod_{j=1}^n \mathbf{E}\left[e^{iu_jY_j}\right] = \prod_{j=1}^n \hat{P}_{Y_j}(u_j) =$$

$$= \prod_{j=1}^n \exp\left\{-\frac{u_j^2}{2}\right\} = \exp\left\{-\sum_{j=1}^n \frac{u_j^2}{2}\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{u}^T\mathbf{u}\right\},$$

z čoho vyplýva, že

$$\mathbf{E}\left[e^{i\mathbf{t}^T\mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Y}}\right] = \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\left(\mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\right)\left(\mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\right)^T\mathbf{t}\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\mathbf{\Sigma}\mathbf{t}\right\},$$

takže dostaneme

$$\hat{P}_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = e^{i\mathbf{t}^T\boldsymbol{\mu}}e^{-\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\mathbf{\Sigma}\mathbf{t}} = \exp\left\{i\mathbf{t}^T\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{t}^T\mathbf{\Sigma}\mathbf{t}\right\}.$$

❑

Pre charakterizáciu n-rozmerného normálneho rozdelenia použijeme vetu:

Veta 3 (Cramér-Wold)**.** *Rozdelenie n-rozmerného náhodného vektora $\mathbf{X}$ je celkom určené množinou všetkých jednorozmerných rozdelení lineárnych kombinácií $\mathbf{t}^T\mathbf{X}$, kde $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$, sa pohybuje cez všetky pevné n-rozmerné vektory.*

Dôkaz. Pre Y=$\mathbf{t}^T\mathbf{X}$, vyjadríme charakteristickú funkciu:

$$\hat{P}_Y(s) = \mathbf{E}\left[e^{isY}\right] = \mathbf{E}\left[e^{is\mathbf{t}^T\mathbf{X}}\right].$$

Zrejme, pre $s = 1$ dostaneme

$$\hat{P}_Y(1) = \mathbf{E}\left[e^{i\mathbf{t}^T\mathbf{X}}\right] = \hat{P}_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}),$$

čo, ako funkcia premennej $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ predstavuje charakteristickú funkciu náhodného vektora $\mathbf{X}$.

❑

Cramér-Woldova veta implikuje, že náhodný vektor $\mathbf{X}$ má n-rozmerné normálne rozdelenie vtedy a len vtedy, keď lineárna kombinácia $\mathbf{a}^T\mathbf{X}$ má jednorozmerné normálne rozdelenie, pre všetky pevne dané n-rozmerné vektory $\mathbf{a}$, v prípade $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, považujeme konštanty ako degenerované formy normálneho rozdelenia.

Poznámka. Nech

$$\mathbf{V} = \left(\mathbf{X}^T, \mathbf{Y}^T\right)^T \sim \mathbf{N_{2n}}\left(\left(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}^T, \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{Y}}^T\right)^T, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{XX}} & \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{XY}} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{YX}} & \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{YY}} \end{pmatrix}\right),$$

pričom pre podmaticu $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{XY}}$ typu $(n \times n)$ platí, že $-\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{XY}} = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{XY}}^T = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{YX}}$, potom povieme, že vektor $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + i\mathbf{Y}$ má komplexné mnohorozmerné normálne rozdelenie.

Kapitola 2

Vlastnosti mnohorozmerného normálneho rozdelenia

V tejto kapitole si odvodíme a ukážeme vlastnosti mnohorozmerného normálneho rozdelenia.

Tvrdenie 4. *Všetky nenulové lineárne kombinácie prvkov náhodného vektora* $\mathbf{X} \sim \mathbf{N_n}\big(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}\big)$ *majú jenorozmerné normálne rozdelenie.*

Dôkaz. Nech $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ je n-rozmerný vektor z $\mathbb{R}^n$, charakteristická funkcia náhodnej premennej $Y = \mathbf{b}^T\mathbf{X}$ je rovná

$$\hat{P}_Y\big(t\big) = \hat{P}_{\mathbf{b}^T\mathbf{X}}\big(t\big) = \hat{P}_{\mathbf{X}}\left(t\mathbf{b}^T\right) = \exp\left\{it\mathbf{b}^T\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}t^2\mathbf{b}^T\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{b}\right\},$$

čo je charakteristická funkcia náhodnej premennej z jednorozmerného normálneho rozdelenia so strednou hodnotou $\mathbf{b}^T\boldsymbol{\mu}$ a disperziou $\mathbf{b}^T\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{b} > 0$, takže máme $Y \sim \mathbf{N}\big(\mathbf{b}^T\boldsymbol{\mu},\mathbf{b}^T\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{b}\big)$.

❑

Tvrdenie 5.

1. *Dva náhodné vektory z jedného mnohorozmerného normálneho rozdelenia sú nezávislé vtedy a len vtedy, keď sú nekorelované.*

2. *Pre dva normálne náhodné vektory z jedného rozdelenia platí, že nezávislosť po dvojiciach ich prvkov implikuje združenú nezávislosť.*

Dôkaz. Charakteristická funkcia náhodného vektora z n-rozmerného normálneho rozdelenia sa dá rozložit na násobky príslušných častí, čo implikuje ich nezávislosť, len keď odpovedajúca podmatica matice dizperzie je nulová. Tento jav nastane práve vtedy, keď vektory sú nekorelované.

❑

Ďalej sa v tejto časti budeme zaoberať lineárnymi kombináciami náhodného vektora $\mathbf{X} \sim \mathbf{N_n}\big(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}\big)$, pevne danej matice A, ktorá má plnú hodnosť a konštantných vektorov $\mathbf{b}$,$\mathbf{c}$.

Veta 6. *Nech* $\mathbf{X}$ *má* n*-rozmerné normálne rozdelenie a* $\mathbf{Y} = A\mathbf{X} + \mathbf{b}$*, kde* A *je ľubovolná matica typu* $(m \times n)$ *s plnou hodnosťou a* $\mathbf{b}$ *je ľubovolný* m*-rozmerný vektor, potom* $\mathbf{Y}$ *má* m*-rozmerné normálne rozdelenie.*

Dôkaz. Máme ľubovolný pevne daný m-rozmerný vektor $\mathbf{c}$. Uvažujeme lineárnu kombináciu

$$\mathbf{c}^T\mathbf{Y} = \mathbf{c}^T\left(A\mathbf{X} + \mathbf{b}\right) = \mathbf{a}^T\mathbf{X} + \mathbf{c}^T\mathbf{b},\ \mathbf{a} = A^T\mathbf{c}.$$

Z mnohorozmernej normálnosti $\mathbf{X}$ vyplýva, že lineárna kombinácia $\mathbf{a}^T\mathbf{X}$ má jednorozmerné normálne rozdelenie, takže $\mathbf{c}^T\mathbf{Y}$ je tiež jednorozmerná normálna náhodná premenná pre všetky pevne dané m-rozmerné vektory $\mathbf{c}$, takže dostávame, že náhodný vektor $\mathbf{Y}$ má m-rozmerné normálne rozdelenie.

❑

Dôsledok. Ľubovolná podmnožina prvkov normálneho náhodného vektora má mnohorozmerné normálne rozdelenie, obzvlášť, jednotlivé prvky majú jednorozmerné normálne rozdelenie.

Tvrdenie 7. *Ak* $\mathbf{X} \sim \mathbf{N_n}\big(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}\big)$ *a* $\mathbf{Y} = A\mathbf{X}+\mathbf{b}$*, kde* $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ *s plnou hodnosťou,* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ *sú konštantné, potom* $\mathbf{Y} \sim \mathbf{N_m}\big(A\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}, A\boldsymbol{\Sigma}A^T\big)$*.*

Dôkaz. Vo Vete 6 sme ukázali, že náhodný vektor $\mathbf{Y} = A\mathbf{X} + \mathbf{b}$, má m-rozmerné normálne rozdelenie. Z vlatností vektora stredných hodnôt dostaneme, že

$$\mathbf{E}\big[\mathbf{Y}\big] = \mathbf{E}\big[A\mathbf{X} + \mathbf{b}\big] = A\mathbf{E}\big[\mathbf{X}\big] + \mathbf{b} = A\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}.$$

$$\mathbf{Var}\big[\mathbf{Y}\big] = \mathbf{Var}\big[A\mathbf{X} + \mathbf{b}\big] = A\mathbf{Var}\big[\mathbf{X}\big]A^T = A\boldsymbol{\Sigma}A^T,$$

platí z vlastností matice disperzie, takže máme $\mathbf{Y} \sim \mathbf{N_m}\big(A\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}, A\boldsymbol{\Sigma}A^T\big)$.

❑

Ľubovolný náhodný vektor $\mathbf{X} \sim \mathbf{N_n}\big(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}\big)$, kde $\boldsymbol{\Sigma} > \mathbf{0}$, môžeme bez problémov znormovať. Dostaneme

$$\mathbf{Y} = \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\left(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}\right) \sim \mathbf{N_n}\left(\mathbf{0},\mathbf{I}_n\right), \text{ kde } \mathbf{I}_n \text{ je jednotková matica.}$$

Dôsledok. Ak $\mathbf{X} \sim \mathbf{N_n}\big(\mathbf{0},\mathbf{I}_n\big)$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ je ľubovoľný nenulový vektor, tak lineárna transformácia $\frac{\mathbf{b}^T\mathbf{X}}{\sqrt{\mathbf{b}^T\mathbf{b}}}$ má jenodnorozmerné normované normálne rozdelenie.

Dôkaz.

$$\mathrm{E}\left[\frac{\mathbf{b}^T\mathbf{X}}{\sqrt{\mathbf{b}^T\mathbf{b}}}\right] = \frac{\mathbf{b}^T\mathbf{E}\left[\mathbf{X}\right]}{\sqrt{\mathbf{b}^T\mathbf{b}}} = \frac{\mathbf{b}^T\mathbf{0}}{\sqrt{\mathbf{b}^T\mathbf{b}}} = 0$$

a

$$\mathrm{var}\left[\frac{\mathbf{b}^T\mathbf{X}}{\sqrt{\mathbf{b}^T\mathbf{b}}}\right] = \frac{\mathbf{b}^T\mathbf{Var}\big[\mathbf{X}\big]\mathbf{b}}{\left(\sqrt{\mathbf{b}^T\mathbf{b}}\right)^2} = \frac{\mathbf{b}^T\mathbf{I}_n\mathbf{b}}{\mathbf{b}^T\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{b}^T\mathbf{b}}{\mathbf{b}^T\mathbf{b}} = 1.$$

Lineárna transformácia normálneho náhodného vektora zachováva normalitu, takže platí, že $\frac{\mathbf{b}^T\mathbf{X}}{\sqrt{\mathbf{b}^T\mathbf{b}}} \sim \mathbf{N}\left(0,1\right)$.

❑

Poznámka. Predchádzajúci dôsledok platí aj pre náhodný vektor $\mathbf{Z} \sim \mathbf{N_n}\big(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}\big)$ a lineárnu transformáciu $\mathbf{b}^T\left(\mathbf{Z}-\boldsymbol{\mu}\right)/\sqrt{\mathbf{b}^T\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{b}}$. Znormovaním náhodného vektora $\mathbf{Z}$ ľahko prevedieme na predchádzajúci prípad:

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\left(\mathbf{Z}-\boldsymbol{\mu}\right) \sim \mathbf{N_n}\left(\mathbf{0},\mathbf{I}_n\right), \text{ takže } \frac{\mathbf{b}^T\left(\mathbf{Z}-\boldsymbol{\mu}\right)}{\sqrt{\mathbf{b}^T\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{b}}} = \frac{\mathbf{b}^T\mathbf{X}}{\sqrt{\mathbf{b}^T\mathbf{b}}}.$$

Dôsledok. Nech $\mathbf{X} \sim \mathbf{N_n}\big(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}\big)$ a $\boldsymbol{\Sigma} > \mathbf{0}$, potom $\left(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}\right)^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\left(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}\right) \sim \chi^2_n$, kde χ^2_n je chí-kvadrát rozdelenie.

Dôkaz. Položíme $\mathbf{Y} = \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\left(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}\right) \sim \mathbf{N_n}\left(\mathbf{0},\mathbf{I}_n\right)$, takže dostaneme

$$\left(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}\right)^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\left(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}\right) = \left(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}\right)^T\left(\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right)^T\left(\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}\right) = \mathbf{Y}^T\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2,$$

kde $Y_i \sim \mathbf{N}\left(0,1\right)$ sú nezávislé, takže $\left(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}\right)^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\left(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}\right) \sim \chi^2_n$.

❑

Tvrdenie 8. *Nech máme náhodný vektor* $\mathbf{X} \sim \mathbf{N_n}\big(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}\big)$ *a pevne dané matice* A *a* B *s plnou hodnosťou, potom* $A\mathbf{X}$ *a* $B\mathbf{X}$ *sú nezávislé vtedy a len vtedy, keď* $A\boldsymbol{\Sigma}B^T = \mathbf{0}$.

Dôkaz. $\mathbf{Cov}\big[A\mathbf{X},B\mathbf{X}\big] = A\mathbf{Cov}\big[\mathbf{X},\mathbf{X}\big]B^T = A\mathbf{Var}\big[\mathbf{X}\big]B^T = A\boldsymbol{\Sigma}B^T$, takže $A\boldsymbol{\Sigma}B^T = \mathbf{0}$ práve vtedy, keď $A\mathbf{X}$ a $B\mathbf{X}$ sú nekorelované, čo je pri normálnom rozdelení ekvivaletné s tým, že sú nezávislé.

❑

Máme nezávislé náhodné vektory $\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_m$ z rozdelenia $\mathbf{N_n}\big(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}\big)$ a maticu $\mathbb{X} = \left(\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_m\right)^T$, ktorá má maticové normálne rozdelenie a lineárnu kombináciu typu $\mathbb{Y} = A\mathbb{X}B$, kde $A \in \mathbb{R}^{q\times m}$ a $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ sú reálne matice.

Pokiaľ $\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_m$ sú náhodné výbery z $\mathbf{N_n}\big(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}\big)$, tak pre $A = \frac{1}{m}\mathbf{1}_m^T$ a $B = \mathbf{I}_n$ dostaneme vektor výberových priemerov $\overline{\mathbf{X}}^T = \frac{1}{m}\mathbf{1}_m^T\mathbb{X}$.

Veta 9. *Máme maticu* $\mathbb{X}$ *typu* $(m \times n)$, *ktorej* m *riadkových vektorov predstavuje náhodné výbery z rozdelenia* $\mathbf{N_n}\big(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}\big)$, *potom pre vektor výberových priemerov platí, že*

$$\overline{\mathbf{X}} = \frac{1}{m}\mathbb{X}^T\mathbf{1}_m \sim \mathbf{N_n}\left(\boldsymbol{\mu},\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{\Sigma}\right).$$

Dôkaz. Z normality náhodných výberov $\mathbf{X}_i$ vyplýva, že každý prvok vektora $\overline{\mathbf{X}} = \frac{1}{m}\mathbb{X}^T\mathbf{1}_m = \left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m X_{i1},\ldots,\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m X_{in}\right)^T$, pričom X_{ij} sú prvky matice $\mathbb{X}$, má jednorozmerné normálne rozdelenie. Ďalej máme

$$\mathbf{E}\left[\,\overline{\mathbf{X}}\,\right] = \mathbf{E}\left[\begin{pmatrix}\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m X_{i1}\\ \vdots \\ \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m X_{in}\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \mathrm{E}\left[X_{i1}\right]\\ \vdots \\ \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \mathrm{E}\left[X_{in}\right]\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{m}{m}\mu_1\\ \vdots \\ \frac{m}{m}\mu_n\end{pmatrix} = \boldsymbol{\mu}$$

a

$$\mathbf{Var}\left[\,\overline{\mathbf{X}}\,\right] = \mathbf{Cov}\left[\,\overline{\mathbf{X}},\overline{\mathbf{X}}\,\right] = \mathbf{Cov}\left[\begin{pmatrix} \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_{i1} \\ \vdots \\ \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_{in} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_{i1} \\ \vdots \\ \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_{in} \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{m^2}\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} \operatorname{cov}(X_{i1},X_{i1}) & \cdots & \sum_{i=1}^{m} \operatorname{cov}(X_{i1},X_{in}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} \operatorname{cov}(X_{in},X_{i1}) & \cdots & \sum_{i=1}^{m} \operatorname{cov}(X_{in},X_{in}) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{m^2}\begin{pmatrix} m\Sigma_{11} & \cdots & m\Sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m\Sigma_{n1} & \cdots & m\Sigma_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{m}\boldsymbol{\Sigma},$$

takže dostávame $\overline{\mathbf{X}} = \frac{1}{m}\mathbb{X}^T\mathbf{1}_m \sim \mathbf{N_n}\left(\boldsymbol{\mu},\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{\Sigma}\right)$.

❑

Teraz ukážeme, za akých podmienok má matica $\mathbb{Y} = A\mathbb{X}B$ maticové normálne rozdelenie. To, že každý prvok matice $\mathbb{Y} = (Y_{ij})$ má jednorozmerné normálne rozdelenie, vyplýva z vyjadrenia $Y_{ij} = \sum_{\alpha,\beta} a_{i\alpha}X_{\alpha\beta}b_{\beta j}$. Avšak, aby matica $\mathbb{Y}$ mala maticové normálne rozdelenie musí byť splnené, že riadky matice sú združene nezávislé a rovnako rozdelené.

Nasledujúca veta udáva nutné a postačujúce podmienky na matice A a B.

Veta 10. *Nech matica $\mathbb{X} = (\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_m)^T$, kde náhodné vektory $\mathbf{X}_i \sim \mathbf{N_n}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$ sú nezávislé, pre $i = 1,\ldots,m$, má maticové normálne rozdelenie a $\mathbb{Y} = A\mathbb{X}B$, kde $A \in \mathbb{R}^{q\times m}$ a $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, potom $\mathbb{Y}$ má maticové normálne rozdelenie práve vtedy, keď:*

- *$B^T\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ alebo $A\mathbf{1}_n = \alpha\mathbf{1}_n$, pre nejaký skalár α, a*
- *$B\boldsymbol{\Sigma}B^T = \mathbf{0}$ alebo $AA^T = \beta\mathbf{I}_n$, pre nejaký skalár β.*

Ak sú obe podmienky splnené tak $\mathbb{Y}$ má maticové normálne rozdelenie, jej riadkové vektory sú nezávislé a majú rozdelenie $\mathbf{N_p}\left(\alpha B^T\boldsymbol{\mu},\beta B^T\boldsymbol{\Sigma}B\right)$.

Definícia 3. *Kroneckerovo násobenie matice A typu $(m \times n)$ a matice B typu $(p \times q)$ definujeme ako*

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix},$$

pričom matica $A \otimes B$ je typu $(mp \times nq)$.

Základné vlastnosti Kronecherového násobenia:

$$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T,\ (A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$$

a $\alpha(A \otimes B) = (\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B) = \alpha A \otimes B$, pre nejaký skalár α.

Ďalej $\mathbf{X}^{\mathbf{V}}$ značí mn-rozmerný vektor, ktorý sme dostali z matice $\mathbb{X}$ typu $(m \times n)$, tým, že sme pod seba naukladali jej stĺpcove vektory:

$$\mathbf{X}^{\mathbf{V}} = \left(\mathbf{X}_{(1)}^T,...,\mathbf{X}_{(n)}^T\right)^T, \text{ pričom } \mathbb{X} = \left(\mathbf{X}_{(1)},...,\mathbf{X}_{(n)}\right).$$

Pre tieto dve operácie platí rovnosť $(A\mathbb{X}B)^{\mathbf{V}} = \left(B^T \otimes A\right)\mathbf{X}^{\mathbf{V}}$.

Dôkaz. [Vety 10] Najprv dokážeme tvrdenie:

Nech máme $\mathbf{X}^{\mathbf{V}}$ mn-rozmerný vektor, ktorý sme dostali z matice $\mathbb{X}$, potom matica $\mathbb{X} = (\mathbf{X}_1,...,\mathbf{X}_m)^T$, kde náhodné vektory $\mathbf{X}_i \sim \mathbf{N_n}\big(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}\big)$ sú nezávislé, pre $i = 1,...,m$, má maticové normálne rozdelenie práve vtedy, keď

$$\mathbf{X}^{\mathbf{V}} \sim \mathbf{N_{mn}}\big(\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{1}_m,\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}_m\big).$$

Pre prvky matice $\mathbb{X} = (X_{kl})$, $k = 1,...,m$ a $l = 1,...,n$, platí: $X_{kl} \sim \mathbf{N}\left(\mu_l,\Sigma_{ll}\right)$, kde $\Sigma_{ll} = \text{var}\left[X_{kl}\right]$ sú diagonálne prvky matice dizperzie $\boldsymbol{\Sigma}$, pričom nediagonálne prvky tejto matice sú vyjadrené ako $\Sigma_{rs} = \text{cov}\left[X_{kr},X_{ks}\right]$, pre každé k, takže vektor $\mathbf{X}^{\mathbf{V}} = \left(X_{11},...,X_{m1},X_{12},...,X_{m(n-1)},X_{1n},...,X_{mn}\right)^T$ má mn-rozmerné normálne rozdelenie s vektorom stredných hodnôt

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\mathbf{X}^{\mathbf{V}}\right] = \big(\mathbf{E}\left[X_{11}\right],...,\mathbf{E}\left[X_{m1}\right],\mathbf{E}\left[X_{12}\right],...,\mathbf{E}\left[X_{m(n-1)}\right],\mathbf{E}\left[X_{1n}\right],...,\mathbf{E}\left[X_{mn}\right]\big)^T = \\ = \left(\mu_1,...,\mu_1,\mu_2,...,\mu_{n-1},\mu_n,...,\mu_n\right)^T = \boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{1}_m\end{aligned}$$

a maticou dizperzie

$$\mathbf{Var}\left[\mathbf{X}^{\mathbf{V}}\right] = \mathbf{Cov}\left[\mathbf{X}^{\mathbf{V}},\mathbf{X}^{\mathbf{V}}\right] = \left(\text{cov}\left[X_{ab},X_{cd}\right]\right),$$

kde

$$\text{cov}\left[X_{ab},X_{cd}\right] = \begin{cases} \text{pre}\,(a = c) \wedge (b = d) & = \Sigma_{bb} \\ \text{pre}\,(a = c) \wedge (b \neq d) & = \Sigma_{bd} \\ \text{pre}\,(a \neq c) \wedge (b = d) & = 0 \\ \text{pre}\,(a \neq c) \wedge (b \neq d) & = 0 \end{cases},$$

pre $a,c = 1,...,m$ a $b,d = 1,...,n$, takže $\mathbf{Var}\left[\mathbf{X}^{\mathbf{V}}\right] = \boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}_m$.

Teraz ukážeme opačnú implikáciu. Máme mn-rozmerný náhodný vektor

$$\mathbf{X}^{\mathbf{V}} = \left(X_{(1)},...,X_{(nm)}\right)^T \sim \mathbf{N_{mn}}\big(\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{1}_m,\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}_m\big),$$

kde prvky matice $\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}_m$ sú rovné $\text{cov}\left[X_k,X_l\right] = \begin{cases} \text{pre}\ \ (k = l) & = \Sigma_{kk} \\ \text{pre}\,(|k - l| = m) & = \Sigma_{kl} \\ \text{inak} & = 0 \end{cases}$,

ktorého i-ta m-tica $X_{(m(i-1)+1)},...,X_{(mi)}$ prvkov je z rozdelenia $\mathbf{N}\left(\mu_i,\Sigma_{ii}\right)$, pre $i = 1,...,n$, pričom Σ_{ii} sú diagonálne prvky matice $\boldsymbol{\Sigma}$. Tento vektor rozdelíme na n m-rozmerných podvektorov,

$$\mathbf{X}^{\mathbf{V}} = \left(\mathbf{X}_1^T,...,\mathbf{X}_n^T\right)^T, \text{ pričom } \mathbf{X}_i = \left(X_{(m(i-1)+1)},...,X_{(mi)}\right)^T, \text{ pre } i = 1,...,n,$$

z ktorých zložíme maticu $\mathbb{X}$ typu $(m \times n)$ tak, že dané vektory $\mathbf{X}_i$ poskladáme vedľa seba, takže budú tvoriť stĺpce matice $\mathbb{X} = (\mathbf{X}_1,...,\mathbf{X}_n)$. Pre riadkové vektory matice $\mathbb{X} = \left(\mathbf{X}_{(1)}^T,...,\mathbf{X}_{(m)}^T\right)^T$ platí, že

$$\mathbf{X}_{(j)} = \left(X_{(j)},X_{(j+m)},X_{(j+2m)},...,X_{(j+(n-1)m)}\right)^T, \text{ pre } j = 1,...,m,$$

pričom n prvkov vektora $X_{(j)}$ má v danom poradí rozdelenie $\mathbf{N}\left(\mu_i,\Sigma_{ii}\right)$, pre $i = 1,...,n$ a ich vzájomná kovariancia je vyjadrená ako nediagonálne prvky matice $\boldsymbol{\Sigma}$, takže každý vektor $\mathbf{X}_{(j)}$ má rozdelenie $\mathbf{N_n}\left(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}\right)$ a je nezávislý od vektora $\mathbf{X}_{(k)}$, $k \neq j$, keďže kovariancia ich prvkov je nulová. Pre normálne rozdelenie nezávislosť po dvojiciach implikuje združenú nezávislosť, takže matica $\mathbb{X} = (\mathbf{X}_1,...,\mathbf{X}_m)^T$, kde $\mathbf{X}_i \sim \mathbf{N_n}\big(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}\big)$ sú nezávislé, pre $i = 1,...,m$, má maticové normálne rozdelenie. Tým je dokázané požadované tvrdenie.

Z práve dokázaného tvrdenia vyplýva, že $(A\mathbb{X}B)^{\mathbf{V}} = \left(B^T \otimes A\right)\mathbf{X}^{\mathbf{V}}$ má mnohorozmerné normálne rozdelenie s vektorom stredných hodnôt

$$\mathbf{E}\left[\left(B^T \otimes A\right)\mathbf{X}^{\mathbf{V}}\right] = \left(B^T \otimes A\right)\mathbf{E}\left[\mathbf{X}^{\mathbf{V}}\right] = \left(B^T \otimes A\right)(\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{1}_m) = \left(B^T\boldsymbol{\mu}\right) \otimes (A\mathbf{1}_m)$$

a maticou disperzie

$$\begin{gathered}\mathbf{Var}\left[\left(B^T \otimes A\right)\mathbf{X}^{\mathbf{V}}\right] = \left(B^T \otimes A\right)\mathbf{Var}\left[\mathbf{X}^{\mathbf{V}}\right]\left(B^T \otimes A\right)^T = \\ = \left(B^T \otimes A\right)(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}_m)\left(B \otimes A^T\right) = \left(B^T\boldsymbol{\Sigma}B\right) \otimes \left(A\mathbf{I}_m A^T\right) = \left(B^T\boldsymbol{\Sigma}B\right) \otimes \left(AA^T\right),\end{gathered}$$

takže $A\mathbb{X}B$ má maticové normálne rozdelenie vtedy a len vtedy, keď platí, že

$$B^T\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0} \text{ alebo } A\mathbf{1}_n = \alpha\mathbf{1}_n, \text{ pre nejaký skalár } \alpha,$$

a tiež platí, že

$$B\boldsymbol{\Sigma}B^T = \mathbf{0} \text{ alebo } AA^T = \beta\mathbf{I}_n, \text{ pre nejaký skalár } \beta.$$

Ak sú obe podmienky splnené tak $A\mathbb{X}B$ má maticové normálne rozdelenie, jej riadkové vektory sú nezávislé a majú rozdelenie $\mathbf{N_p}\left(\alpha B^T\boldsymbol{\mu},\beta B^T\boldsymbol{\Sigma}B\right)$.

❑

Poznámka. Matica B v predchádzajúcej vete symbolizuje pridávanie váhových premenných a matica A symbolizuje transformáciu vážených objektov. Z nezávislosti pôvodných objektov (riadkové vektory $\mathbb{X}$) vyplýva nezávislosť transformovaných objektov (riadkové vektory $\mathbb{Y}$), pokiaľ násobenie maticou A nezavedie nejaké vnútorné závislosti, ale tomuto sa predíde podmienkami, ktoré sú kladené na danú maticu.

V nasledujúcej vete sa budeme zaoberať koreláciou medzi dvoma lineárnymi kombináciami a podmienkami ich nezávislosti.

Veta 11. *Nech máme maticu $\mathbb{X} = (\mathbf{X}_1,...,\mathbf{X}_m)^T$ z normálneho rozdelenia, kde $\mathbf{X}_i \sim \mathbf{N_n}\big(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}\big)$ sú nezávislé, pre $i = 1,...,m$, a lineárne transformácie $\mathbb{Y} = A\mathbb{X}B$ a $\mathbb{Z} = C\mathbb{X}D$, potom prvky matice $\mathbb{Y}$ sú nezávislé od prvkov matice $\mathbb{Z}$ práve vtedy, keď platí, že $B^T\boldsymbol{\Sigma}D = \mathbf{0}$ alebo $AC^T = \mathbf{0}$.*

Dôkaz. Máme maticu $\mathbb{X}$, ktorá má maticové normálne rozdelenie.

$$\text{Pre } \mathbb{Y} = A\mathbb{X}B \text{ máme } \mathbf{Y}^{\mathbf{V}} = (A\mathbb{X}B)^{\mathbf{V}} = \left(B^T \otimes A\right)\mathbf{X}^{\mathbf{V}}$$

a

$$\mathbf{Z}^{\mathbf{V}} = (C\mathbb{X}D)^{\mathbf{V}} = \left(D^T \otimes C\right)\mathbf{X}^{\mathbf{V}}, \text{ pre } \mathbb{Z} = C\mathbb{X}D.$$

Z dôkazu Vety 10 vieme, že $\mathbf{X}^{\mathbf{V}} \sim \mathbf{N}_{\mathbf{mn}}\big(\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{1}_m, \boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}_m\big)$, takže

$$\mathbf{Cov}\left[\boldsymbol{Y}^{\mathbf{V}}, \boldsymbol{Z}^{\mathbf{V}}\right] = \mathbf{Cov}\left[\left(B^T \otimes A\right)\mathbf{X}^{\mathbf{V}}, \left(D^T \otimes C\right)\mathbf{X}^{\mathbf{V}}\right] =$$

$$= \left(B^T \otimes A\right)\mathbf{Cov}\left[\mathbf{X}^{\mathbf{V}}, \mathbf{X}^{\mathbf{V}}\right]\left(D^T \otimes C\right)^T = \left(B^T \otimes A\right)\mathbf{Var}\left[\mathbf{X}^{\mathbf{V}}\right]\left(D \otimes C^T\right) =$$

$$= \left(B^T \otimes A\right)(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}_m)\left(D \otimes C^T\right) = \left(B^T \boldsymbol{\Sigma} D\right) \otimes \left(A \mathbf{I}_m C^T\right) = \left(B^T \boldsymbol{\Sigma} D\right) \otimes \left(A C^T\right).$$

Prvky matíc $\mathbb{Y}$ a $\mathbb{Z}$ sú nekorelované práve vtedy, keď matica $\left(B^T \boldsymbol{\Sigma} D\right) \otimes \left(AC^T\right)$ je nulová, čo nastáva vtedy a len vtedy, keď $B^T \boldsymbol{\Sigma} D = \mathbf{0}$ alebo $AC^T = \mathbf{0}$.

❑

Dôsledok. Nech máme maticu $\mathbb{X}$ typu $(m \times n)$, ktorej m riadkových vektorov sú náhodné výbery z $\mathbf{N_n}\big(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}\big)$, potom vektor výberových priemerov

$$\overline{\mathbf{X}} = \frac{1}{m}\mathbb{X}^T \mathbf{1}_m \text{ a } H\mathbb{X}, \text{ kde } H = \mathbf{I}_m - \frac{1}{m}\mathbf{1}_m \mathbf{1}_m^T$$

je centrovacia matica, sú nezávislé, takže vektor výberových priemerov je nezávislý od výberovej kovariančnej matice $\mathbb{S} = \frac{1}{m}\mathbb{X}^T H \mathbb{X}$.

Dôkaz. Položíme

$$A = \frac{1}{m}\mathbf{1}_m^T \text{ a } C = H = \mathbf{I}_m - \frac{1}{m}\mathbf{1}_m \mathbf{1}_m^T,$$

takže

$$AC^T = AH^T = AH = \frac{1}{m}\mathbf{1}_m^T\left(\mathbf{I}_m - \frac{1}{m}\mathbf{1}_m \mathbf{1}_m^T\right) =$$
$$= \frac{1}{m}\mathbf{1}_m^T \mathbf{I}_m - \frac{1}{m^2}\mathbf{1}_m^T \mathbf{1}_m \mathbf{1}_m^T = \frac{1}{m}\mathbf{1}_m^T - \frac{m}{m^2}\mathbf{1}_m^T = \mathbf{0}.$$

❑

Kapitola 3

Wishartovo rozdelenie

V tejto kapitole prejdeme z lineárných transformácií na kvadratické maticové funkcie vo forme $\mathbb{X}^T C \mathbb{X}$, kde C je symetrická matica. Medzi takéto funkcie patrí permutácia riadkov matice $\mathbb{X}$ alebo hľadanie kovariančných matíc v regresnej analýze. Tieto kvadratické funkcie často vedú k Wishartovmu rozdeleniu, ktoré predstavuje maticové zobecnenie chí-kvadrát rozdelenia a má veľa podobných vlastností.

Definícia 4. *Ak sa $\mathbb{W}$, matica typu $(n \times n)$, dá napísať ako $\mathbb{W} = \mathbb{X}^T \mathbb{X}$, pričom matica $\mathbb{X} = (\mathbf{X}_1,...,\mathbf{X}_m)^T$, kde náhodné vektory $\mathbf{X}_i \sim \mathbf{N_n}\big(\mathbf{0},\mathbf{\Sigma}\big)$ sú nezávislé, pre $i = 1,...,m$, má maticové normálne rozdelenie, potom povieme, že $\mathbb{W}$ má Wishartovo rozdelenie s maticou váh $\mathbf{\Sigma}$ a m stupňami volnosti.*

Značíme $\mathbb{W} \sim \mathbf{W_n}(\mathbf{\Sigma},m)$, pokiaľ $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{I}_n$, povieme, že rozdelenie je v štandartizovanej forme.

Poznámka.

1. Ak $\mathbb{W} \sim \mathbf{W_n}(\mathbf{\Sigma},m)$, kde $\mathbf{\Sigma} > \mathbf{0}$ a $m \geq n$, tak $\mathbb{U} = \mathbb{W}^{-1}$ má inverzné Wishartovo rozdelenie $\mathbf{W_n}^{-1}(\mathbf{\Sigma},m)$.

2. Nech matica $\mathbb{X} = (\mathbf{X}_1,...,\mathbf{X}_m)^T$ má maticové normálne rozdelenie, kde náhodné vektory $\mathbf{X}_i \sim \mathbf{N_n}\big(\boldsymbol{\mu},\mathbf{\Sigma}\big)$ sú nezávislé, pre $i = 1,...,n$, $\boldsymbol{\mu} \neq 0$, potom $\mathbb{W} = \mathbb{X}^T\mathbb{X}$ má necentrálne Wishartovo rozdelenie.

Zvyčajne predpokladáme, že $\mathbf{\Sigma} > \mathbf{0}$. Prvý moment $\mathbf{W}$ je daný ako

$$\mathbf{E}[\mathbb{W}] = \mathbf{E}\left[\mathbb{X}^T\mathbb{X}\right] = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{E}\left[\mathbf{X}_i^T\mathbf{X}_i\right] = m\mathbf{\Sigma}.$$

Poznámka. Pre $n = 1$ máme rozdelenie $\mathbf{W_1}(\sigma^2,m)$ dané $\mathbb{X}^T\mathbb{X}$, kde prvky $\mathbb{X} \in \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ sú nezávislé rovnako rozdelené náhodné veličiny z rozdelenia $\mathbf{N}(0,\sigma^2)$, takže $\mathbf{W_1}(\sigma^2,m)$ je zhodné s $\sigma^2\chi^2_m$ rozdelením.

Ďalej sa budeme zaoberať vlastnosťami Wishartovho rozdelenia.

Veta 12. *Nech $\mathbb{W} \sim \mathbf{W_n}(\mathbf{\Sigma},m)$ a B je matica typu $(p \times n)$ potom*

$$B^T\mathbb{W}B \sim \mathbf{W_n}\left(B^T\mathbf{\Sigma}B,m\right).$$

Dôkaz. Tvrdenie vyplýva priamo z definície Wishartovho rozdelenia, keďže

$$B^T \mathbb{W} B = B^T \mathbb{X}^T \mathbb{X} B = \mathbb{Y}^T \mathbb{Y}, \text{ kde } \mathbb{Y} = \mathbb{X} B,$$

pričom riadkové vektory matice $\mathbb{X}$ sú nezávislé z rozdelenia $\mathbf{N_n}\big(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}\big)$, takže z Vety 10 dostaneme, že riadkové vektory matice $\mathbb{Y}$ sú nezávislé z rozdelenia $\mathbf{N_n}\big(\mathbf{0}, B^T \mathbf{\Sigma} B\big)$. Z definície dostaneme

$$\mathbb{Y}^T \mathbb{Y} = B^T \mathbb{W} B \sim \mathbf{W_n}\left(B^T \mathbf{\Sigma} B, m\right).$$

❏

Nasledujúce dôsledky dostaneme dosadením príslušných matíc za maticu B do predchádzajúcej vety.

Dôsledok. $\left(\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right)^T \mathbb{W} \mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \sim \mathbf{W_n}\left(\mathbf{I}_n, m\right)$.

Dôsledok. Ak $\mathbb{W} \sim \mathbf{W_n}\left(\mathbf{I}_n, m\right)$ a B je matica typu $(p \times n)$, splňujúca $B^T B = \mathbf{I}_p$, potom $B^T \mathbb{W} B \sim \mathbf{W_p}\left(\mathbf{I}_p, m\right)$.

Dôsledok. Diagonálne podmatice $\mathbb{W}$ majú Wishartovo rozdelenie.

Z posledného dôsledku vyplýva, že každý prvok diagonály matice $\mathbb{W}$ má $\Sigma_{ii}\chi^2_m$ rozdelenie.

V nasledujúcom tvrdení je ukázané zovšeobecnenie vzťahu medzi chí-kvadrát rozdelením a Wishartovým rozdelením.

Tvrdenie 13. *Nech máme* $\mathbb{W} \sim \mathbf{W_n}\left(\mathbf{\Sigma}, m\right)$ *a pevne daný vektor* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ *tak, aby* $\mathbf{a}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{a} \neq 0$ *potom*

$$\frac{\mathbf{a}^T \mathbb{W} \mathbf{a}}{\mathbf{a}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{a}} \sim \chi^2_m.$$

Dôkaz. Použitím Vety 12 dostaneme, že

$$\mathbf{a}^T \mathbb{W} \mathbf{a} \sim \mathbf{W_1}\left(\mathbf{a}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{a}, m\right), \text{ takže } \frac{\mathbf{a}^T \mathbb{W} \mathbf{a}}{\mathbf{a}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{a}} \sim \mathbf{W_1}\left(1, m\right),$$

čo odpovedá tvrdeniu.

❏

Tvrdenie 14. *Pre* $\mathbb{W} \sim \mathbf{W_n}\left(\mathbf{\Sigma}, m\right)$ *a pevne dané vektory* $\mathbf{b}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ *platí, že* $\mathbf{b}^T \mathbb{W} \mathbf{b}$ *a* $\mathbf{d}^T \mathbb{W} \mathbf{d}$ *sú nezávislé, pokiaľ* $\mathbf{b}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{d} = 0$.

Dôkaz. Matica $\mathbb{W}$ sa dá napísať ako $\mathbb{X}^T \mathbb{X}$, kde $\mathbb{X}$, ktorej riadkové vektory sú nezávislé z rozdelenia $\mathbf{N_n}\left(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}\right)$, má maticové rozdelenie. Dostaneme, že

$$\mathbf{b}^T \mathbb{W} \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbb{X}^T \mathbb{X} \mathbf{b} \text{ a } \mathbf{d}^T \mathbb{W} \mathbf{d} = \mathbf{d}^T \mathbb{X}^T \mathbb{X} \mathbf{d}$$

sú nezávislé práve vtedy, keď $\mathbb{X}\mathbf{b}$ a $\mathbb{X}\mathbf{d}$ sú nezávislé. Z Vety 11 vyplýva, že $\mathbb{X}\mathbf{b}$ a $\mathbb{X}\mathbf{d}$ sú nezávislé, pokiaľ $\mathbf{b}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{d} = 0$.

❏

Ukázali sme, že trieda matíc z Wishartovho rozdelenia je uzavretá na transformácie typu $B^T \mathbb{W} B$. Teraz ukážeme, že táto trieda je uzavretá aj na aditivitu.

Tvrdenie 15. *Nech* $\mathbb{W}_1 \sim \mathbf{W_n}(\mathbf{\Sigma},m_1)$ *a* $\mathbb{W}_2 \sim \mathbf{W_n}(\mathbf{\Sigma},m_2)$ *sú nezávislé potom*

$$\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2 \sim \mathbf{W_n}(\mathbf{\Sigma},m_1+m_2).$$

Dôkaz. Maticu $\mathbb{W}_i$ môžeme napísať ako $\mathbb{X}_i^T\mathbb{X}_i$, kde matica $\mathbb{X}_i$ má m_i nezávislých riadkových vektorov z rozdelenia $\mathbf{N_n}(\mathbf{0},\mathbf{\Sigma})$, pre $i = 1{,}2$, takže

$$\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2 = \mathbb{X}_1^T\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2^T\mathbb{X}_2 = \mathbb{X}^T\mathbb{X},$$

pričom $\mathbb{X}$ dostaneme tak, že maticu $\mathbb{X}_2$ pripojíme pod maticu $\mathbb{X}_1$, takže máme $\mathbb{X} = \left(\mathbb{X}_1^T,\mathbb{X}_2^T\right)^T$. Z nezávislosti $\mathbb{W}_1$ a $\mathbb{W}_2$ vyplýva nezávislosť $\mathbb{X}_1$ a $\mathbb{X}_2$, takže (m_1+m_2) riadkových vektorov matice $\mathbb{X}$ je nezávislých z rozdelenia $\mathbf{N_n}(\mathbf{0},\mathbf{\Sigma})$. Z definície Wishartovho rozdelenia dostaneme, že

$$\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2 \sim \mathbf{W_n}(\mathbf{I}_n,m_1+m_2).$$

❑

Ďalej sa budeme zaoberať kvadratickými funkciami typu $\mathbb{X}^TC\mathbb{X}$, kde matica C je symetrická ($A^T = A$) a idempotentná ($A^TA = A$), čo vyplýva z vety:

Veta 16 (Cochran,1934)**.** *Ak matica* $\mathbb{X} = (\mathbf{X}_1,...,\mathbf{X}_m)^T$*, kde náhodné vektory* $\mathbf{X}_i \sim \mathbf{N_n}(\mathbf{0},\mathbf{\Sigma})$ *sú nezávislé, pre* $i = 1,...,m$*, má maticové normálne rozdelenie a* C *je symetrická matica typu* $(m \times m)$*, potom:*

- $\mathbb{X}^TC\mathbb{X}$ *má rovnaké rozdelenie ako vážená suma nezávislých matíc s rozdelením* $\mathbf{W_n}(\mathbf{\Sigma},1)$*, kde vlastné čísla matice* C *predstavujú dané váhy.*
- $\mathbb{X}^TC\mathbb{X}$ *má Wishartovo rozdelenie vtedy a len vtedy, keď matica* C *je idempotentná, v tom prípade,* $\mathbb{X}^TC\mathbb{X} \sim \mathbf{W_n}(\mathbf{\Sigma},r)$*, kde* $r = tr(C) = rank(C)$*.*

Ak máme ľubovolnú maticu A typu $(n \times n)$ a polynom $p(\lambda) = |A - \lambda\mathbf{I}_n|$ rádu n, tak korene tohoto polynomu $\lambda_1,...,\lambda_n$ sa nazývajú vlastné čísla matice A. $|A - \lambda_i\mathbf{I}_n| = 0$, pre všetky $i = 1,...,n$, takže $A - \lambda_i\mathbf{I}_n$ je singulárna matica, z čoho vyplýva, že existuje nenulový vektor Γ_i, splňujúci $A\Gamma_i = \lambda_i$. Tento vektor Γ_i je vlastný vektor matice A príslušný vlastnému číslu λ_i. Ak vlastný vektor Γ_i má reálne prvky a $(\Gamma_i)^T\Gamma_i = 1$, potom Γ_i sa nazýva štandartizovaný vlastný vektor matice A. Nasledujúca veta bude uvedená bez dôkazu.

Veta 17 (o spektrálnom rozklade matice)**.** *Ľubovolnú symetrickú štvorcovú maticu* A *môžeme napísať ako* $A = \mathbf{\Gamma\Lambda\Gamma}^T = \sum_i \lambda_i\Gamma_i\Gamma_i^T$*, kde diagonálna matica* $\mathbf{\Lambda}$ *má vlastné čísla matice* A *na diagonále a* $\mathbf{\Gamma}$ *je ortogonálna matica, ktorej stĺpce sú štandartizované vlastné vektory matice* A*.*

Dôkaz. [Vety 16] Použitím Vety o spektrálnom rozklade matice, môžeme rozpísať maticu C ako $\sum_{i=1}^m \lambda_i\Gamma_i\Gamma_i^T$, kde λ_i je i-te vlastné číslo matice C a Γ_i je príslušný štandartizovaný vlastný vektor.

Položíme

$$\mathbb{X}^TC\mathbb{X} = \sum_{i=1}^m \lambda_i\mathbf{Y}_i\mathbf{Y}_i^T \text{ , pričom } \mathbf{Y}_i = \mathbb{X}^T\Gamma_i\text{, takže } \mathbb{Y} = \mathbf{\Gamma}^T\mathbb{X},$$

kde $\mathbf{\Gamma}$ je ortogonálna matica, ktorej stĺpce sú štandartizované vlastné vektory matice C. Máme $\mathbb{Y} = A\mathbb{X}B$, kde $A = \mathbf{\Gamma}^T$, $B = \mathbf{I}_n$ a $\mathbb{X} = (\mathbf{X}_1,...,\mathbf{X}_m)^T$, nezávislé $\mathbf{X}_i \sim \mathbf{N_n}\big(\mathbf{0},\mathbf{\Sigma}\big)$, pre $i = 1,...,m$, takže

$$B^T\boldsymbol{\mu} = \mathbf{I}_n\mathbf{0} = \mathbf{0} \text{ a } AA^T = \mathbf{\Gamma}^T\left(\mathbf{\Gamma}^T\right)^T = \mathbf{\Gamma}^T\mathbf{\Gamma} = \mathbf{I}_m = \beta\mathbf{I}_m, \text{ pre } \beta = 1.$$

Použitím Vety 10 dostávame, že vektory $\mathbf{Y}_i \sim \mathbf{N_n}\big(\alpha B^T\boldsymbol{\mu},\beta B^T\mathbf{\Sigma}B\big) = \mathbf{N_n}\big(\mathbf{0},\mathbf{\Sigma}\big)$ sú nezávislé, pre $i = 1,...,m$, takže $\mathbf{Y}_i\mathbf{Y}_i^T$ sú nezávislé matice z rozdelenia $\mathbf{W_n}(\mathbf{\Sigma},1)$, takže sme ukázali platnosť prvého tvrdenia.

Pre dôkaz druhého tvrdenia si treba uvedomiť, že idempotentná matica C s hodnosťou r, jej stopa je tiež rovná r, má práve r nenulových vlastných čísel, ktoré sú rovné 1, takže $\mathbb{X}^TC\mathbb{X} \sim \mathbf{W_n}(\mathbf{\Sigma},r)$, ako bolo požadované. Dôkaz nutnosti podmienky idempotencie matice C sa nachádza v (Anderson,1958) strana 158.

❑

Poznámka. Predchádzajúca veta platí tiež, keď $\boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{0}$, pokiaľ C je symetrická idempotentná matica, ktorej suma každého riadkového vektora je rovná nule. Ak matica $\mathbb{X} = (\mathbf{X}_1,...,\mathbf{X}_m)^T$, $\mathbf{X}_i \sim \mathbf{N_n}\big(\boldsymbol{\mu},\mathbf{\Sigma}\big)$ sú nezávislé, pre $i = 1,...,m$, má maticové normálne rozdelenie a $\mathbb{Y} = \mathbb{X} - \mathbf{1}_m\boldsymbol{\mu}^T$, potom riadkové vektory matice $\mathbb{Y}$ sú nezávislé z rozdelenia $\mathbf{N_n}\big(\mathbf{0},\mathbf{\Sigma}\big)$.

Teraz máme

$$\mathbb{X}^TC\mathbb{X} = \mathbb{Y}^TC\mathbb{Y} + \mathbb{Y}^TC\mathbf{1}_m\boldsymbol{\mu}^T + \boldsymbol{\mu}\mathbf{1}_m^TC\mathbb{Y} + \left(\mathbf{1}_m^TC\mathbf{1}_m\right)\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T.$$

Ak matica C je symetrická a idempotentná, potom z Vety 16 vyplýva, že $\mathbb{Y}^TC\mathbb{Y}$ má Wishartovo rozdelenie, takže $\mathbb{X}^TC\mathbb{X}$ je suma matice s Wishartovým rozdelením, dvoch matíc s maticovým normálnym rozdelením, ktoré nie sú nezávislé, a matice konštant. Avšak, v prípade, keď sa riadkové vektory matice C sčítajú na nulu platí, že $C\mathbf{1}_m = \mathbf{0}$, takže sčítance

$$\mathbb{Y}^TC\mathbf{1}_m\boldsymbol{\mu}^T,\ \boldsymbol{\mu}\mathbf{1}_m^TC\mathbb{Y} \text{ a } \left(\mathbf{1}_m^TC\mathbf{1}_m\right)\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T \text{ sú rovné nule,}$$

z čoho dostaneme zobecnenie predchádzajúcej vety:

Nech máme maticu $\mathbb{X} = (\mathbf{X}_1,...,\mathbf{X}_m)^T$, kde náhodné vektory $\mathbf{X}_i \sim \mathbf{N_n}\big(\boldsymbol{\mu},\mathbf{\Sigma}\big)$ sú nezávislé, pre $i = 1,...,m$, z maticového normálneho rozdelenia a symetrickú maticu C, potom $\mathbb{X}^TC\mathbb{X} \sim \mathbf{W_n}(\mathbf{\Sigma},r)$ vtedy a len vtedy, keď matica C je idempodentná a platí, že $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ alebo $C\mathbf{1}_m = \mathbf{0}$, pričom $r = \operatorname{tr}(C)$.

Dôsledok. Máme maticu $\mathbb{X}$ typu $(m \times n)$, ktorej m riadkových vektorov predstavuje náhodné výbery z rozdelenia $\mathbf{N_n}\big(\boldsymbol{\mu},\mathbf{\Sigma}\big)$, potom pre výberovú kovariančnú maticu

$$\mathbb{S} = \frac{1}{m}\mathbb{X}^TH\mathbb{X}, \text{ kde } H = \mathbf{I}_m - \frac{1}{m}\mathbf{1}_m\mathbf{1}_m^T,$$

platí, že

$$\mathbb{S} \sim \mathbf{W_n}\left(\frac{1}{m}\mathbf{\Sigma},m-1\right).$$

Dôkaz. Kedže riadkové vektory matice $\mathbb{X}$ sú náhodné výbery z $\mathbf{N_n}\big(\boldsymbol{\mu},\mathbf{\Sigma}\big)$ a všetky riadkové vektory idempotentnej matice

$$H = \mathbf{I}_m - \frac{1}{m}\mathbf{1}_m\mathbf{1}_m^T, \text{ ktorej } \operatorname{tr}(H) = m-1,$$

sa sčítajú na nulu. Dostávame, že

$$\mathbb{X}^T H \mathbb{X} \sim \mathbf{W_n}\left(\mathbf{\Sigma}, m-1\right),$$

takže

$$\mathbb{S} = \frac{1}{m}\mathbb{X}^T H \mathbb{X} \sim \mathbf{W_n}\left(\frac{1}{m}\mathbf{\Sigma}, m-1\right).$$

❑

Nasledujúca veta sa zaoberá podmienkami, za ktorých sú kvadratické funkcie $\mathbb{X}^T C \mathbb{X}$ a $\mathbb{X}^T D \mathbb{X}$ nezávislé.

Veta 18 (Craig,1943)**.** *Ak máme maticu $\mathbb{X} = (\mathbf{X}_1,...,\mathbf{X}_m)^T$, kde $\mathbf{X}_i \sim \mathbf{N_n}\big(\boldsymbol{\mu},\mathbf{\Sigma}\big)$ sú nezávislé, pre $i = 1,...,m$, s maticovým normálnym rozdelením a $C_1,...,C_k$ sú symetrické matice typu $(m \times m)$, tak $\mathbb{X}^T C_1 \mathbb{X},...,\mathbb{X}^T C_k \mathbb{X}$ sú nezávislé, pokiaľ $C_r C_s = \mathbf{0}$, pre všetky $r \neq s$.*

Dôkaz. Najprv ukážeme platnosť vety pre $k = 2$. Označíme $C_1 = C$ a $C_2 = D$. Z Vety o spektrálnom rozklade matice dostaneme:

$$\mathbb{X}^T C \mathbb{X} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{Y}_i \mathbf{Y}_i^T \text{ , pričom } \mathbf{Y}_i = \mathbb{X}^T \Gamma_i,$$

kde λ_i je i-te vlastné číslo matice C a Γ_i je príslušný štandartizovaný vlastný vektor, a

$$\mathbb{X}^T D \mathbb{X} = \sum_{j=1}^{m} \psi_j \mathbf{Z}_j \mathbf{Z}_j^T \text{ , pričom } \mathbf{Z}_j = \mathbb{X}^T \boldsymbol{\delta}_j,$$

kde ψ_j je j-te vlastné číslo matice D a $\boldsymbol{\delta}_j$ je príslušný štandartizovaný vlastný vektor. Vektory $\mathbf{Y}_i$ a $\mathbf{Z}_j$ sú nezávislé práve vtedy, keď $(\Gamma_i)^T \boldsymbol{\delta}_j = 0$, toto dostaneme z Vety 11, takže mn-rozmerné vektory z normálneho rozdelenia $\left(\lambda_1^{\frac{1}{2}} \mathbf{Y}_1^T,...,\lambda_m^{\frac{1}{2}} \mathbf{Y}_m^T\right)$ a $\left(\psi_1^{\frac{1}{2}} \mathbf{Z}_1^T,...,\psi_m^{\frac{1}{2}} \mathbf{Z}_m^T\right)$ sú nezávislé, vždy keď $(\Gamma_i)^T \boldsymbol{\delta}_j = 0$ a vlastné čísla λ_i, ψ_j sú nenulové. Toto nastáva, ak

$$\lambda_i \psi_j (\Gamma_i)^T \boldsymbol{\delta}_j = 0, \text{ pre všetky } i,j, \text{ pričom } CD = \sum_{i,j} \lambda_i \psi_j \Gamma_i (\Gamma_i)^T \boldsymbol{\delta}_j (\boldsymbol{\delta}_j)^T.$$

Ak $CD = \mathbf{0}$, tak $(\Gamma_u)^T CD \boldsymbol{\delta}_v$ nám dá $\lambda_u \psi_v (\Gamma_u)^T \boldsymbol{\delta}_v = 0$, pre všetky u,v, takže dostávame, že funkcie nezávislých mn-rozmerných vektorov z normálneho rozdelenia $\mathbb{X}^T C \mathbb{X}$ a $\mathbb{X}^T D \mathbb{X}$ sú nezávislé.

K dôkazu vety pre $k > 2$, si stačí uvedomiť, že pre náhodného vektory z normálneho rozdelenia platí, že nezávislosť po dvojiciach implikuje združenú nezávislosť, z čoho vyplýva združená nezávislosť $\mathbb{X}^T C_1 \mathbb{X},...,\mathbb{X}^T C_k \mathbb{X}$.

❑

V nasledujúcom tvrdení ukážeme podmienky pre nezávislosť lineárnej transfomácie $A\mathbb{X}B$ a kvadratickej funkcie $\mathbb{X}^T C \mathbb{X}$.

Tvrdenie 19. *Nech matica* $\mathbb{X} = (\mathbf{X}_1,...,\mathbf{X}_m)^T$*, kde* $\mathbf{X}_i \sim \mathbf{N_n}\big(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}\big)$ *sú nezávislé náhodné vektory, pre* $i = 1,...,m$*, má maticové normálne rozdelenie,* $A \in \mathbb{R}^{q\times m}$*,* $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ *a* C *je symetrická matica typu* $(m \times m)$*, potom* $A\mathbb{X}B$ *a* $\mathbb{X}^T C\mathbb{X}$ *sú nezávislé, pokiaľ* $B^T\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{0}$ *alebo* $AC = \mathbf{0}$*.*

Dôkaz. Položíme $\mathbb{X}^T C\mathbb{X} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{Y}_i \mathbf{Y}_i^T$, pričom $\mathbf{Y}_i = \mathbb{X}^T\Gamma_i$, kde λ_i je i-te vlastné číslo matice C a Γ_i je príslušný štandartizovaný vlastný vektor, potom $A\mathbb{X}B$ a $\lambda_i^{\frac{1}{2}}\left(\Gamma_i\right)^T\mathbb{X}$ sú nezávislé vtedy a len vtedy, keď $B^T\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{0}$ alebo $\lambda_i A\Gamma_i = \mathbf{0}$, toto pre každé i nastáva práve vtedy, keď $AC = \mathbf{0}$.

❑

Mnoho testov v analýze jednorozmerných dát je založených na štatistikách, ktoré majú nezávislé chí-kvadrát rozdelenie, takže v analýze mnohorozmerných dát sa používajú štatistisky s nezávislým Wishartovým rozdelením.

Máme nezávislé $\mathbb{U} \sim \mathbf{W_n}\left(\boldsymbol{\Sigma},p\right)$, kde $p \geq n$, a $\mathbb{V} \sim \mathbf{W_n}\left(\boldsymbol{\Sigma},q\right)$. Keďže $p \geq n$, existuje inverzia matice $\mathbb{U}$ a nenulové vlastné čísla matice $\mathbb{U}^{-1}\mathbb{V}$, ktoré nás budú zaujímať. Matica $\mathbb{U}^{-1}\mathbb{V}$ je podobná pozitívne semidefinítnej matici $\mathbb{U}^{-\frac{1}{2}}\mathbb{V}\mathbb{U}^{-\frac{1}{2}}$, takže všetky nenulové vlastné čísla sú kladné. Teraz si ukážeme, že rozdelenie týchto vlastných čísel nezávisí na matici $\boldsymbol{\Sigma}$.

Tvrdenie 20. *Pre nezávislé* $\mathbb{U} \sim \mathbf{W_n}\left(\boldsymbol{\Sigma},p\right)$*, kde* $p \geq n$*, a* $\mathbb{V} \sim \mathbf{W_n}\left(\boldsymbol{\Sigma},q\right)$ *platí, že* $\mathbb{U}^{-1}\mathbb{V}$ *má rovnaké vlastné čísla ako* $\mathbb{U}_\diamond^{-1}\mathbb{V}_\diamond$*, pričom*

$$\mathbb{U}_\diamond = \left(\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right)^T \mathbb{U}\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \sim \mathbf{W_n}\left(\mathbf{I}_n,p\right)$$

je nezávislé od

$$\mathbb{V}_\diamond = \left(\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right)^T \mathbb{V}\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \sim \mathbf{W_n}\left(\mathbf{I}_n,q\right),$$

takže rozdelenie vlastných čísel $\mathbb{U}^{-1}\mathbb{V}$ *nezávisí na* $\boldsymbol{\Sigma}$*.*

Dôkaz. Pre regulárne matice A a C rovnakých rozmerov $(n \times n)$ platí:

$$|A - \lambda\mathbf{I}_n| = |C|\left|A - \lambda C^{-1}C\right|\left|C^{-1}\right| = \left|CAC^{-1} - \lambda\mathbf{I}_n\right|,$$

takže matica A a CAC^{-1} majú rovnaké vlastné čísla.

Máme

$$\mathbb{U}_\diamond^{-1}\mathbb{V}_\diamond = \left[\left(\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right)^T \mathbb{U}\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}\left[\left(\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right)^T \mathbb{V}\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right] = \boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\mathbb{U}^{-1}\mathbb{V}\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}},$$

z čoho vyplýva rovnosť

$$\left|\mathbb{U}^{-1}\mathbb{V} - \lambda\mathbf{I}_n\right| = \left|\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\mathbb{U}^{-1}\mathbb{V}\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} - \lambda\mathbf{I}_n\right| = \left|\mathbb{U}_\diamond^{-1}\mathbb{V}_\diamond - \lambda\mathbf{I}_n\right|.$$

Ukázali sme, že $\mathbb{U}^{-1}\mathbb{V}$ a $\mathbb{U}_\diamond^{-1}\mathbb{V}_\diamond$ majú rovnaké vlastné čísla, takže rozdelenie vlastných čísel $\mathbb{U}^{-1}\mathbb{V}$ nezávisí na $\boldsymbol{\Sigma}$.

❑

Definícia 5. *Nech* $\mathbb{U} \sim \mathbf{W_n}(\mathbf{I}_n,p)$, $p \geq n$ *a* $\mathbb{V} \sim \mathbf{W_n}(\mathbf{I}_n,q)$ *sú nezávislé, tak povieme, že*

$$\Lambda = \frac{|\mathbb{U}|}{|\mathbb{U}+\mathbb{V}|} = \left|\mathbf{I}_n + \mathbb{U}^{-1}\mathbb{V}\right|^{-1} \sim \Lambda(n,p,q)$$

má Wilksovo lambda rozdelenie s parametrami n, p *a* q.

Poznámka. Parameter p zvyčajne reprezentuje stupne voľnosti chyby a parameter q stupne voľnosti hypotézy, takže súčet $p+q$ reprezentuje celkový počet stupňou voľnosti rozdelenia.

Veta 21. *Pre Wilksovo lambda rozdelenie s parametrami* n, p *a* q *platí, že*

$$\Lambda(n,p,q) \sim \prod_{i=1}^{q} Z_i, \text{ kde } Z_i \sim B\left(\frac{1}{2}(p+i-n), \frac{1}{2}n\right), \text{ pre } i = 1,...q,$$

pričom $Z_1,...,Z_q$ *sú nezávislé náhodné premenné a* $B\left(\frac{1}{2}(p+i-n), \frac{1}{2}n\right)$ *značí jednorozmerné beta rozdelenie s danými parametrami.*

Tvrdenie 22. *Nech náhodný vektor* $\mathbf{X} \sim \mathbf{N_n}(\mathbf{0},\mathbf{I}_n)$ *a maticu* $\mathbb{W} \sim \mathbf{W_n}(\mathbf{I}_n,m)$ *sú nezávislé potom* $\mathbf{X}^T\mathbb{W}^{-1}\mathbf{X}$ *a* $\mathbb{W}+\mathbf{X}\mathbf{X}^T$ *sú nezávislé.*

Dôkaz. Toto tvrdenie bude uvedené bez dôkazu. Dôkaz toho tvrdenia sa nachádza v (Mardia,1979) strana 76.

❑

Dôkaz. [Vety 21] Máme nezávislé $\mathbb{U} \sim \mathbf{W_n}(\mathbf{I}_n,p)$, $p \geq n$ a $\mathbb{V} \sim \mathbf{W_n}(\mathbf{I}_n,q)$, kde $\mathbb{V} = \mathbb{X}^T\mathbb{X}$, pričom q riadkových vektorom matice $\mathbb{X}$ je nezávislých z rozdelenia $\mathbf{N_n}(\mathbf{0},\mathbf{I}_n)$. Maticu typu $(i \times n)$, ktorá je zložená z prvých i riadkových vektorov matice $\mathbb{X}$, budeme značiť $\mathbb{X}_i$. Ďalej položíme $\mathbb{W}_i = \mathbb{U}+\mathbb{X}_i^T\mathbb{X}_i$, pre $i = 1,...,q$, takže platí, že

$$\mathbb{W}_0 = \mathbb{U},\ \mathbb{W}_q = \mathbb{U}+\mathbb{V} \text{ a } \mathbb{W}_i = \mathbb{W}_{i-1} + \mathbf{X}_i\mathbf{X}_i^T,$$

kde $\mathbf{X}_i$ je i-ty riadkový vektor matice $\mathbb{X}$. Dostávame, že

$$\Lambda(n,p,q) = \frac{|\mathbb{U}|}{|\mathbb{U}+\mathbb{V}|} = \frac{|\mathbb{W}_0|}{|\mathbb{W}_q|} = \frac{|\mathbb{W}_0|}{|\mathbb{W}_1|}\frac{|\mathbb{W}_1|}{|\mathbb{W}_2|}...\frac{|\mathbb{W}_{q-1}|}{|\mathbb{W}_q|}.$$

Označíme

$$Z_i = \frac{|\mathbb{W}_{i-1}|}{|\mathbb{W}_i|} = \frac{|\mathbb{W}_{i-1}|}{|\mathbb{W}_{i-1}+\mathbf{X}_i\mathbf{X}_i^T|}, \text{ pre } i = 1,...,q,$$

takže z druhého dôsledku Vety 26 dostaneme, že $Z_i \sim B\left(\frac{1}{2}(p-n+i), \frac{1}{2}n\right)$, pre $i = 1,...,q$. Z Tvrdenia 22 dostaneme, že $\mathbb{W}_i$ je nezávislé od

$$1 + \mathbf{X}_i^T\mathbb{W}_{i-1}^{-1}\mathbf{X}_i = \frac{|\mathbb{W}_i|}{|\mathbb{W}_{i-1}|} = Z_i^{-1}.$$

Ďalej z nezávislosti Z_i od $\mathbf{X}_{i+1},...,\mathbf{X}_q$ a zo vzťahu

$$\mathbb{W}_{i+j} = \mathbb{W}_i + \sum_{k=1}^{j} \mathbf{X}_{i+k}\mathbf{X}_{i+k}^T,$$

plynie nezávislosť Z_i a $\mathbb{W}_{i+1},...,\mathbb{W}_q$, z čoho vyplýva, že Z_i je nezávislé od $Z_{i+1},...,Z_q$, takže máme nezávislé $Z_1,...,Z_q$. Ukázali sme, že

$$\Lambda(n,p,q) = \frac{|\mathbb{U}|}{|\mathbb{U}+\mathbb{V}|} = \prod_{i=1}^{q} Z_i,$$

kde Z_i sú nezávislé s rozdelením $B\left(\frac{1}{2}(p-n+i), \frac{1}{2}n\right)$, pre $i = 1,...,q$.

❑

Tvrdenie 23. *Pre nezávislé $\mathbb{U} \sim \mathbf{W_n}(\mathbf{\Sigma},p)$, kde $p \geq n$, a $\mathbb{V} \sim \mathbf{W_n}(\mathbf{\Sigma},q)$ platí, že*

$$\frac{|\mathbb{U}|}{|\mathbb{U}+\mathbb{V}|} \sim \Lambda(n,p,q).$$

Dôkaz. Máme $\left(\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right)^T \mathbb{U}\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \sim \mathbf{W_n}(\mathbf{I}_n,p)$ a $\left(\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right)^T \mathbb{V}\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \sim \mathbf{W_n}(\mathbf{I}_n,q)$ nezávislé, pre ktoré platí, že

$$\frac{\left|\left(\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right)^T \mathbb{U}\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right|}{\left|\left(\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right)^T \mathbb{U}\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} + \left(\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right)^T \mathbb{V}\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right|} \sim \Lambda(n,p,q).$$

Pre determinant matice AB platí, že $|AB| = |A||B|$, kde A a B sú regulárne matice. Dostamene

$$\frac{\left|\left(\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right)^T \mathbb{U}\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right|}{\left|\left(\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right)^T \mathbb{U}\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} + \left(\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right)^T \mathbb{V}\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right|} = \frac{\left|\left(\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right)^T\right| |\mathbb{U}| \left|\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right|}{\left|\left(\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right)^T\right| |\mathbb{U}+\mathbb{V}| \left|\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right|} = \frac{|\mathbb{U}|}{|\mathbb{U}+\mathbb{V}|},$$

z čoho výplýva, že

$$\frac{|\mathbb{U}|}{|\mathbb{U}+\mathbb{V}|} \sim \Lambda(n,p,q).$$

❑

Definícia 6. *Ak matice $\mathbb{U} \sim \mathbf{W_n}(\mathbf{I}_n,p)$, $p \geq n$ a $\mathbb{V} \sim \mathbf{W_n}(\mathbf{I}_n,q)$ sú nezávislé, potom θ, najväčšie vlastné číslo matice $(\mathbb{U}+\mathbb{V})^{-1}\mathbb{U}$, sa nazýva štatistika najväčšieho koreňa a jej rozdelenie je značené ako $\theta(n,p,q)$, kde parameter n značí dimenziu, p stupne voľnosti chyby a q stupne voľnosti hypotézy.*

Poznámka. Rozdelenie $\theta(n,p,q)$ môže byť definované ako najväčší koreň rovnice

$$|\mathbb{V} - \theta(\mathbb{U}+\mathbb{V})| = 0.$$

Kapitola 4

Hotellingovo T-kvadrát rozdelenie

V tejto časti sa budeme zaoberať kombináciami typu $\mathbf{X}^T\mathbb{W}^{-1}\mathbf{X}$, kde náhodný vektor $\mathbf{X}$ má mnohorozmerné normálne rozdelenie a matica $\mathbb{W}$ je z Wishartovho rozdelenia. Odvodíme všeobecné rozdelenie pre takéto kvadratické formy.

Definícia 7. *Ak $\mathbb{T}^2$ môžeme napísať ako formu $m\mathbf{X}^T\mathbb{W}^{-1}\mathbf{X}$, kde $\mathbf{X} \sim \mathbf{N_n}\big(\mathbf{0},\mathbf{I}_n\big)$ a $\mathbb{W} \sim \mathbf{W_n}\left(\mathbf{I}_n,m\right)$ sú nezávislé, potom môžeme povedať, že $\mathbb{T}^2$ má Hotellingovo T-kvadrát rozdelenie s parametrami n a m, označíme $\mathbb{T}^2 \sim \mathbf{T^2}\left(n,m\right)$.*

Veta 24. *Nech máme $\mathbf{X} \sim \mathbf{N_n}\big(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}\big)$ a $\mathbb{W} \sim \mathbf{W_n}\left(\boldsymbol{\Sigma},m\right)$ nezávislé, potom*

$$m\left(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}\right)^T\mathbb{W}^{-1}\left(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}\right) \sim \mathbf{T^2}\left(n,m\right).$$

Dôkaz. Položíme

$$\mathbf{Y} = \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\left(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}\right) \sim \mathbf{N_n}\left(\mathbf{0},\mathbf{I}_n\right)$$

a

$$\mathbb{V} = \left(\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right)^T\mathbb{W}\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \sim \mathbf{W_n}\left(\mathbf{I}_n,m\right),$$

kedže $\mathbf{Y}$ a $\mathbb{V}$ splňujú požiadavky definície, dostávame

$$m\mathbf{Y}^T\mathbb{V}^{-1}\mathbf{Y} = m\left\{\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\left(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}\right)\right\}^T\left\{\left(\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right)^T\mathbb{W}\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right\}^{-1}\left\{\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\left(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}\right)\right\} =$$

$$= m\left(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}\right)^T\left(\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right)^T\left(\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\right)^T\mathbb{W}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\left(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}\right) =$$

$$= m\left(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}\right)^T\mathbb{W}^{-1}\left(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}\right) \sim \mathbf{T^2}\left(n,m\right).$$

❑

Poznámka. Pre $n = 1$ získame nezávislé $X \sim \mathrm{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$ a $S^2 \sim \sigma^2\chi^2_m$, takže máme

$$\frac{\left(X-\mu\right)}{\sigma} \sim \mathrm{N}\left(0,1\right), \; \frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_m$$

a

$$m\frac{(X-\mu)}{\sigma}\left(\frac{S^2}{\sigma^2}\right)^{-1}\frac{(X-\mu)}{\sigma}=m\,(X-\mu)\,S^{-2}\,(X-\mu)=\left(\frac{\sqrt{m}\,(X-\mu)}{S}\right)^2.$$

Pre nezávislé $Y\sim \mathrm{N}\,(0{,}1)$ a $Z\sim\chi^2_k$ platí, že $\frac{Y}{\sqrt{Z/k}}\sim t_k$, kde t_k je Studentovo t-rozdelenie, takže dostaneme, že

$$\left(\frac{\sqrt{m}\,(X-\mu)}{S}\right)^2\sim t^2_m,\text{ z čoho vyplýva, že } t^2_m=\mathbf{T}^2\,(1{,}m)\,.$$

Keď máme náhodný výber $Y_1,...,Y_m$ z rozdelenia $\mathbf{N}\,(\mu{,}\sigma^2)$, potom

$$\sqrt{m}\frac{\left(\overline{Y}-\mu\right)}{S}\sim t_{m-1},$$

kde

$$\overline{Y}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}Y_i\text{ je výberový priemer}$$

a

$$S^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(Y_i-\overline{Y}\,\right)\text{ je výberová disperzia.}$$

Dôsledok. Nech máme maticu $\mathbb{X}$ typu $(m\times n)$, ktorej m riadkových vektorov sú náhodné výbery z $\mathbf{N_n}\big(\boldsymbol{\mu}{,}\boldsymbol{\Sigma}\big)$, potom pre vektor výberových priemerov $\overline{\mathbf{X}}= =\frac{1}{m}\mathbb{X}^T\mathbf{1}_m$, výberovú kovariančnú maticu $\mathbb{S}=\frac{1}{m}\mathbb{X}^TH\mathbb{X}$, kde $H=\mathbf{I}_m-\frac{1}{m}\mathbf{1}_m\mathbf{1}^T_m$, a $\mathbb{S}_*=\frac{m}{m-1}\mathbb{S}$ platí, že

$$(m-1)\left(\,\overline{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu}\right)^T\mathbb{S}^{-1}\left(\,\overline{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu}\right)=m\left(\,\overline{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu}\right)^T\mathbb{S}^{-1}_{\diamond}\left(\,\overline{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu}\right)\sim\mathbf{T^2}\,(n{,}m-1)\,.$$

Dôkaz. V druhej kapitole sme si ukázali, že vektor výberových priemerov má rozdelenie $\mathbf{N_n}\left(\boldsymbol{\mu}{,}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{\Sigma}\right)$ a tiež, že $\overline{\mathbf{X}}$ je nezávislé od výberovej kovariančnej matice. Ďalej v tretej kapitole sme si ukázali, že $\mathbb{S}$ má rozdelenie $\mathbf{W_n}\left(\frac{1}{m}\boldsymbol{\Sigma}{,}m-1\right)$.

Máme nezávislé

$$m^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\left(\,\overline{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu}\right)\sim\mathbf{N_n}\,(\mathbf{0}{,}\mathbf{I}_n)\ \text{ a } m\left(\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right)^T\mathbb{S}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right)\sim\mathbf{W_n}\,(\mathbf{I}_n{,}m-1)\,,$$

takže dostaneme

$$\begin{aligned}(m-1)\,\frac{m^{\frac{1}{2}}m^{\frac{1}{2}}}{m}\left(\,\overline{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu}\right)^T\left(\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right)^T\left(\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\right)^T\mathbb{S}^{-1}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\right)\left(\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\,\overline{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu}\right)=\\ =(m-1)\left(\,\overline{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu}\right)^T\mathbb{S}^{-1}\left(\,\overline{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu}\right)\sim\mathbf{T^2}\,(n{,}m-1)\,.\end{aligned}$$

❑

Veta 25. *Ak máme nezávislé* $\mathbf{X}\sim\mathbf{N_n}\big(\boldsymbol{\mu}{,}\boldsymbol{\Sigma}\big)$ *a* $\mathbb{W}\sim\mathbf{W_n}\,(\boldsymbol{\Sigma}{,}m)$, *potom* $m\mathbf{X}^T\mathbb{W}^{-1}\mathbf{X}$ *má necentrálne Hotellingovo T-kvadrát rozdelenie, pre ktoré platí, že*

$$m\mathbf{X}^T\mathbb{W}^{-1}\mathbf{X}=\mathbb{T}^2+2m\boldsymbol{\mu}^T\mathbb{W}^{-1}\,(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})+m\boldsymbol{\mu}^T\mathbb{W}^{-1}\boldsymbol{\mu},$$

kde $\mathbb{T}^2\sim\mathbf{T^2}\,(n{,}m)$.

Dôkaz. Vyjadríme $\mathbb{T}^2$ ako

$$m\left(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}\right)^T\mathbb{W}^{-1}\left(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}\right)=m\mathbf{X}^T\mathbb{W}^{-1}\left(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}\right)-m\boldsymbol{\mu}^T\mathbb{W}^{-1}\left(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}\right)=$$

$$=m\mathbf{X}^T\mathbb{W}^{-1}\mathbf{X}-m\mathbf{X}^T\mathbb{W}^{-1}\boldsymbol{\mu}-m\boldsymbol{\mu}^T\mathbb{W}^{-1}\mathbf{X}+m\boldsymbol{\mu}^T\mathbb{W}^{-1}\boldsymbol{\mu}=$$

$$=m\mathbf{X}^T\mathbb{W}^{-1}\mathbf{X}-m\left(\mathbf{X}^T\mathbb{W}^{-1}\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}^T\mathbb{W}^{-1}\mathbf{X}\right)+m\boldsymbol{\mu}^T\mathbb{W}^{-1}\boldsymbol{\mu}=$$

$$=m\mathbf{X}^T\mathbb{W}^{-1}\mathbf{X}+m\boldsymbol{\mu}^T\mathbb{W}^{-1}\boldsymbol{\mu}-$$

$$-m\left[\left(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}\right)^T\mathbb{W}^{-1}\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{\mu}^T\mathbb{W}^{-1}\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}^T\mathbb{W}^{-1}\left(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}\right)+\boldsymbol{\mu}^T\mathbb{W}^{-1}\boldsymbol{\mu}\right]=$$

$$=m\mathbf{X}^T\mathbb{W}^{-1}\mathbf{X}-m\left[\left(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}\right)^T\mathbb{W}^{-1}\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{\mu}^T\mathbb{W}^{-1}\left(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}\right)\right]-m\boldsymbol{\mu}^T\mathbb{W}^{-1}\boldsymbol{\mu}=$$

$$=m\mathbf{X}^T\mathbb{W}^{-1}\mathbf{X}-2m\boldsymbol{\mu}^T\mathbb{W}^{-1}\left(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}\right)-m\boldsymbol{\mu}^T\mathbb{W}^{-1}\boldsymbol{\mu},$$

pričom

$$\left(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}\right)^T\mathbb{W}^{-1}\boldsymbol{\mu}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu_i\right)W^{ij}\mu_j=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mu_jW^{ji}\left(X_i-\mu_i\right)=\boldsymbol{\mu}^T\mathbb{W}^{-1}\left(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}\right)$$

platí vďaka tomu, že matica W je symetrická.

Ukázali sme, že platí vzťah

$$m\mathbf{X}^T\mathbb{W}^{-1}\mathbf{X}=\mathbb{T}^2+2m\boldsymbol{\mu}^T\mathbb{W}^{-1}\left(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}\right)+m\boldsymbol{\mu}^T\mathbb{W}^{-1}\boldsymbol{\mu}.$$

❑

Veta 26. *Pre Hotellingovo T-kvadrát rozdelenie platí rovnosť:*

$$\mathbf{T^2}\left(n,m\right)=\frac{mn}{m-n+1}F_{n,m-n+1},$$

kde $F_{n,m-n+1}$ značí Fisherovo F-rozdelenie s danými parametrami.

Tvrdenie 27. *Nech máme $\mathbb{W}\sim\mathbf{W_n}\left(\boldsymbol{\Sigma},m\right)$ a pevne daný vektor $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n$, potom*

$$\frac{\mathbf{a}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{a}}{\mathbf{a}^T\mathbb{W}^{-1}\mathbf{a}}\sim\chi^2_{m-n+1}.$$

Dôkaz. Toto tvrdenie bude uvedené bez dôkazu. Dôkaz toho tvrdenia sa nachádza v (Mardia,1979) strana 72.

❑

Dôkaz. [Vety 26] Máme $\mathbb{T}^2=m\mathbf{X}^T\mathbb{W}^{-1}\mathbf{X}$, kde $\mathbf{X}\sim\mathbf{N_n}\left(\mathbf{0},\mathbf{I}_n\right)$ a $\mathbb{W}\sim\mathbf{W_n}\left(\mathbf{I}_n,m\right)$ sú nezávislé. Rozšírime

$$\mathbb{T}^2=m\mathbf{X}^T\mathbf{X}\frac{\mathbf{X}^T\mathbb{W}^{-1}\mathbf{X}}{\mathbf{X}^T\mathbf{X}},$$

pričom $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ má rozdelenie χ^2_n. Z nezávislosti $\mathbf{X}$,$\mathbb{W}$ a Tvrdenia 27 dostávame, že podmienené rozdelenie $\frac{\mathbf{X}^T\mathbf{X}}{\mathbf{X}^T\mathbb{W}^{-1}\mathbf{X}}$ pri danom $\mathbf{X}$ je chí-kvadrát rozdelenie s parametrom $m-n+1$, kedže podmienené rozdelenie nezávisí na $\mathbf{X}$, je to tiež marginálne rozdelenie, z čoho vyplýva nezávislosť $\frac{\mathbf{X}^T\mathbf{X}}{\mathbf{X}^T\mathbb{W}^{-1}\mathbf{X}}$ a $\mathbf{X}$.

Pre dve nezávislé náhodné veličiny $Y \sim \chi^2_n$ a $Z \sim \chi^2_m$ platí vzťah:

$$\frac{Y/n}{Z/m} \sim F_{n,m},$$

takže dostaneme

$$m\frac{\mathbf{X}^T\mathbf{X}}{\frac{\mathbf{X}^T\mathbf{X}}{\mathbf{X}^T\mathbb{W}^{-1}\mathbf{X}}} = \frac{mn}{m-n+1}\frac{\mathbf{X}^T\mathbf{X}/n}{\frac{\mathbf{X}^T\mathbf{X}}{\mathbf{X}^T\mathbb{W}^{-1}\mathbf{X}}/\left(m-n+1\right)} \sim F_{n,m-n+1},$$

z čoho plynie, že

$$\mathbf{T^2}\left(n,m\right) = \frac{mn}{m-n+1}F_{n,m-n+1}.$$

❑

Dôsledok. Máme maticu $\mathbb{X}$ typu $(m \times n)$, ktorej m riadkových vektorov predstavuje náhodné výbery z rozdelenia $\mathbf{N_n}\big(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}\big)$, potom pre vektor výberových priemerov $\overline{\mathbf{X}} = \frac{1}{m}\mathbb{X}^T\mathbf{1}_m$ a výberovú kovariančnú maticu $\mathbb{S} = \frac{1}{m}\mathbb{X}^T H\mathbb{X}$, kde $H = \mathbf{I}_m - \frac{1}{m}\mathbf{1}_m\mathbf{1}_m^T$, platí, že

$$\frac{m-n}{n}\left(\overline{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu}\right)^T\mathbb{S}^{-1}\left(\overline{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu}\right) \sim F_{n,m-n}.$$

Dôsledok. Pre nezávislé $\mathbf{X} \sim \mathbf{N_n}\big(\mathbf{0},\mathbf{I}_n\big)$ a $\mathbb{W} \sim \mathbf{W_n}\left(\mathbf{I}_n,m\right)$ platí, že

$$\frac{|\mathbb{W}|}{|\mathbb{W}+\mathbf{X}\mathbf{X}^T|} \sim B\left(\frac{1}{2}\left(m-n+1\right),\frac{1}{2}n\right).$$

Záver

V kapitole 1 tejto bakalárskej práce bolo definované n-rozmerné normálne rozdelenie a maticové normálne rozdelenie, potom nasledovalo odvodenie charakteristickej funkcie n-rozmerného normálneho rozdelenia a jeho charakterizácia pomocou Cramér-Woldovej vety.

Ďalšia kapitola sa zaoberala vlastnosťami mnohorozmerného normálneho rozdelenia a bolo v nej odvodené, ktoré lineárne kombinácie normálnych vektorov a lineárne kombinácie normálnych matíc zachovávajú normalitu a ich vlastnosti. Tak tiež tu bolo odvodené rozdelenie vektora výberových priemerov náhodného výberu z n-rozmerného normálneho rozdelenia a dokázaná jeho nezávislosť od výberovej kovariačnej matice. Tvrdenie 7 a oba jeho dôsledky, Tvrdenie 8 a Veta 9, ktoré sa nachádzajú v tejto kapitole, boli mnou dokázané a odvodené. Dôkaz Vety 10, ktorý bol v knihe (Mardia,1979), len hrubo naznačený ako cvičenie, som tiež vypracoval a podrobne rozpísal sám.

Kvadratické formy matíc z normálneho rozdelenia, ktoré vedú k Wishartovmu rozdeleniu a jeho vlastnostiam, boli ukázané v kapitole 3. Ďalej sa tam nachádzalo odvodenie rozdelenia výberovej kovariačnej matice náhodného výberu z n-rozmerného normálneho rozdelenia. Koniec tejto kapitoly bol venovaný analýze mnohorozmerných dát založenej na Wishartovom rozdelení. Dôkazy Tvrdenia 14, Tvrdenia 20 a Tvrdenia 23, ktoré sa tam nachádzali, boli mnou vypracované.

V kapitole 4 boli skúmané kombinácie náhodných vektorov a matice z normálneho rozdelenia, čo viedlo k Hotellingovmu rozdeleniu a jeho vlastnostiam. V tejto kapitole bola mnou odvodená poznámka za Vetou 24 a dôkaz Vety 25.

Zvyšné dôkazy a odvodenia, ktoré sa nachádzajú v tejto bakalárskej práci, sú prevzaté z knihy (Mardia,1979) kapitola 3, pričom pre potreby tejto práce boli podrobne vypracované a rozpísané.

Literatúra

(Anderson,1958) Anderson, T.W. *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis.* Wiley, New York, 1958.

(Cochran,1934) Cochran, W.G. *The distribution of quadratic forms in a normal system, with applications to the analysis of variance.* Proc. Camb. Phil. Soc., 1934, 30, str. 178-191.

(Craig,1943) Craig, A.T. *A note on the independence of certain quadratic forms.* Ann. Math. Statist., 1943, 14, str. 195-197.

(Mardia,1979) Mardia, K.W., Kent, J.K., Bibby, J.M. *Multivariate Analysis.* Academic Press, London, 1979.