Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Martin Měsíček

Nashova rovnováha ve hře více hráčů

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce:	Doc.RNDr. Petr Lachout, CSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2014

Rád bych poděkoval především panu doc. RNDr. Petru Lachoutovi, CSc. za vedení této práce, důležité poznámky a rady při psaní tohoto textu.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Nashova rovnováha ve hře více hráčů

Autor: Martin Měsíček

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Doc.RNDr. Petr Lachout, CSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Práce je motivována nalezením Nashovy rovnováhy ve specifických situacích karetní hry poker texas holdem. Pokouší se nabídnout ucelený teoretický základ ilustrovaný na jednoduchých příkladech pro porozumění pojmu Nashova rovnováha. Poté dokázat existenci Nashovy rovnováhy ve zmiňované hře jak v situaci dvou hráčů tak i v situaci více hráčů. Ukáže se, že hra dvou hráčů v pokeru může být reprezentována maticovou hrou a hra více hráčů pak nekooperativní hrou N hráčů. Pro maticovou hru popíšeme univerzální metodu nalezení Nashovy rovnováhy založenou na nějaké metodě řešení úloh lineárního programování a pomocí ní nalezne rovnováhu pro konkrétní situace. Vzhledem k rozsahu problému bude k výpočtům použita výpočetní technika.

Klíčová slova: Nashova rovnováha, maticová hra, nekooperativní hra N hráčů, poker texas holdem

Title: Nash's equillibrium in a game of several players

Author: Martin Měsíček

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Doc.RNDr. Petr Lachout, CSc., Department of Prabability and Mathematical Statistics

Abstract: This thesis is concerned with finding the Nash‘s equilibrium in specific situations of card game poker texas holdem. It lays solid theoretical foundations illustrated on simple problems for understanding the notion of Nash‘s equilibrium. Then we try to prove the existence of Nash‘s equilibrium in the situations of two or more players in the game. It turns out that the two-player game can be represented by two-person zero-sum game and the game with more players by uncooperative game of N players. We describe a method for finding the Nash‘s equilibrium for two-person zero-sum game game based on a method of solving problems of linear programming and we find the equilibrium for particular situations. Considering the extent of the problem, computing device is used when calculating some problems.

Keywords: Nash's equillibrium, two-person zero-sum game, noncooperative N-player game, poker texas holdem

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Teorie her je poměrně nová matematická disciplína. I přesto, že snahy o hledání optimálních strategií, což je hlavní cíl teorie her, bychom mohli najít v menší či větší podobě již v dřívějších dobách, její základy byly dány až počátkem 20.století. Je spojena především se jménem Johna von Neumanna, který ve své knize Theory of Games and Economic Behavior (1944) zavedl nové pojmy a konkrétní problémy a položil tak základ pro vznik teorie her jakožto matematické disciplíny.

V běžném životě schopnost správně se rozhodovat rozděluje úspěšné od neúspěšných. Jsou situace, kdy je správné rozhodnutí zřejmé, typicky jsou to situace, kdy výsledek závisí pouze na našem rozhodnutí a případně na nějakých dalších vlivech, které ovšem nejsme schopni s určitou pravděpodobností předpovídat. Poněkud těžší pro nás může být rozhodnutí, kdy výsledek situace ovlivňují i další inteligentní účastníci. Příkladem může být karetní hra poker texas holdem. Náplní teorie her je analyzovat takovéto typy situací a nabídnout každému z účastníků nejlepší strategie nebo alespoň lepší strategii než je jeho stávající. Motivací k sepsání práce je hledání optimálních strategií v určitých situací hry poker texas holdem, v situacích, které lze řešit pomocí teorie her. Uplatnění teorie her nenajdeme jen v klasických hrách jako takových, ale je možné jej nalézt snad ve všech odvětvích lidské činnosti přes biologii, sociologii až k odvětví, které rozvoj teorie her ovlivnilo nejvíce, tedy ekonomii.

V práci se snažím seznámit čtenáře se základními pojmy teorie her v normálním tvaru, vysvětlit velmi důležitý pojem tzv. Nashovy rovnováhy, tedy situace, kdy žádný z účastníků nemůže změnou pouze svého rozhodnutí docílit lepšího výsledku pro něj samotného. Seznámit čtenáře s pravidly karetní hry poker texas holdem a ukázat, pro které situace ve hře je možné hledat Nashovy rovnovážné strategie. Jelikož hra dvou hráčů v této karetní hře je konfliktní situace dvou inteligentních účastníků, ve které zisk jednoho odpovídá ztrátě druhého, lze ji modelovat jako maticovou hru. Proto bude maticovým hrám věnován velký prostor. Práce nabídne důkaz existence Nashovy rovnováhy pro maticové hry a metodu hledání Nashovy rovnováhy maticových her. Na závěr kapitoly pomocí této metody nalezne Nashovy rovnovážné strategie v konkrétních příkladech. Mezi příklady nebude chybět hra dvou hráčů ve specifických situacích zmiňované karetní hry poker texas holdem a pokusíme se nabídnout ucelený návod ke hře. Vzhledem k rozsahu úlohy a výpočetní náročnosti budou výpočty prováděny pomocí přiloženého programu. Ve hře více hráčů karetní hry poker, kterou lze modelovat jako nekooperativní hru N hráčů, se spokojíme s konstatováním, že rovnovážné strategie ve smíšeném rozšíření hry existují. Pro výpočet by bylo třeba důkladnější studium numerických metod, což nebyl záměr práce.

Text je členěn do 7 kapitol. Protože neexistuje univerzální metoda hledání Nashových rovnovážných strategií, je výhodné hry dále rozlišovat. Proto nás druhá kapitola seznámí s klasifikací rozhodovacích situací dle různých hledisek. Ve třetí kapitole si vysvětlíme pojem Nashovy rovnováhy. Čtvrtá kapitola nám objasní principy a pravidla ve hře poker texas holdem. Dále se zaměříme na maticové hry. Zformulujeme si větu o existenci Nashovy rovnováhy v každé maticové hře včetně všech pomocných tvrzení. Vysvětlíme si používání metody založené na lineárním programování a kromě pokeru dvou hráčů vyřešíme i nějaký jiný zajímavý příklad maticové hry. V předposlední kapitole se budeme věnovat nekooperativní hře N hráčů. A nakonec v závěru shrneme nejdůležitější poznatky a přínos práce.

Kapitola 2

Klasifikace rozhodovacích situací

2.1 Hra v normálním tvaru

Jak jsme nastínili v úvodu, v běžném životě se vyskytuje široká škála rozhodovacích situací, kdy je v zájmu každého subjektu udělat co nejoptimálnější rozhodnutí v určitém smyslu.

Všechny tyto situace nazýváme *hrami* a jednotlivé účastníky hry (osoby, instituce, náhodné mechanismy), jejichž rozhodnutí ovlivňují konečné výsledky, nazýváme souhrnně *hráči*. Uvažujeme vždy konečný počet hráčů $N \in \mathbf{N}$. Hráče můžeme značit čísly $1, 2, ..., N$ a množinu $H = \{1, 2, \ldots, N\}$ nazýváme *množina hráčů*. Jednotlivá rozhodnutí hráče nazýváme *strategie*, množinu všech možných rozhodnutí hráče $i \in H$ nazýváme *prostor strategií hráče* i a značíme S_i. Kartézský součin prostoru strategií $S = S_1 \times S_2 \times ... \times S_N$ všech hráčů nazýváme *prostor strategií*.

V dané situaci volí hráč i strategii $s_i \in S_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$. N-tice strategií $s = [s_1, s_2, \ldots, s_N]$ tvoří tzv.*strategický profil* daného prostoru strategií. To nakolik bylo rozhodnutí i-tého hráče pro něj výhodné kvantifikuje tzv.*výplatní funkce i-tého hráče* $F_i(s)$, je to funkce definovaná na prostoru strategií S, tedy $s \in S$. Je-li výplatní funkce kladná hovoříme o *zisku*, je-li záporná pak hovoříme o *ztrátě* velikosti $|F_i(s)|$. A nyní formálně.

Definice 1. *Nechť H je konečná neprázdná množina. Nechť $|H| = N$, prvky H označme čísly $1, ..., N$ a nazvěme hráči, H nazvěme množinou hráčů. Nechť jsou dány S_i prostor strategií i-tého hráče a $F_i(s_1, s_2, ..., s_N)$ výplatní funkce i-tého hráče definovaná na prostoru strategií $S = S_1 \times S_2 \times ... \times S_N$, pro všechna $i = 1, ..., N$. Pak Hrou N hráčů v normálním tvaru nazveme množinu $\Omega = \{H, S_1, ..., S_N; F_1(s_1, ..., s_N), ..., F_N(s_1, ..., s_N)\}$.*

Poznámka. Model hry N hráčů v normálním tvaru je univerzálním modelem popisu rozhodovací situace. V některých situacích však může být výhodnější použití jiného popisného modelu. Pro rozhodovací situace, kde je podstatné, že se skládají z tahů (např. hra šachy), je vhodnější model *hry v explicitním tvaru.* Taková situace může být popsána souvislým grafem bez cyklů tzv. *stromem.* Je-li v situaci možné sdružování účastníků do skupin za účelem zvýšení svých výplatních funkcí, je vhodnější použít model *hry ve tvaru charakteristické funkce.* Protože však žádný z těchto modelů není vhodný pro řešení našich klíčových příkladů, nebudeme se jimi zabývat.

Příklad 1. Nechť $H = \{1,2\}$, $S_1 = \{-1,0\}$, $S_2 = \{0,1,2,3\}$,
$F_1(s_1,s_2) = -s_1 s_2$, $F_2(s_1,s_2) = s_2 - s_1$.
Jedná se o hru 2 hráčů, ve které první hráč má k dispozici 2 strategie a druhý hráč 4 strategie. Např. pro strategický profil $s = (-1,2)$ získáváme výplatní funkce $F_1(s_1, s_3) = F_1(-1,2) = 2$ a $F_2(s_1, s_2) = F_2(-1, 2) = 2 - (-1) = 3$. Nabízí se otázka, jaké strategie by hráči měli volit, aby získali co nejvyšší výplatu. Snadno nahlédneme, že pro oba hráče je nejvýhodnější strategický profil $s = (-1, 3)$, neboť $F_1(3, -1) \geq F_1(s_1, s_2)$ a $F_2(3, -1) \geq F_2(s_1, s_2)$ pro všechna $s_1 \in S_1$, $s_2 \in S_2$.

Jedním z hlavní cílů teorie her je hledání rovnovážných strategií, protože neexistuje univerzální metoda pro všechny hry v normálním tvaru, je vhodné rozlišovat jednotlivé typy her. Nechť Ω je hra definovaná v definici 1.

Klasifikace dle generování výhry

Definice 2. *Řekneme, že Ω je hra s konstantním součtem, jestliže*

$$F_1(s) + F_2(s) + ... + F_N(s) = konst \text{ pro všechna } s \in S_1 \times S_2 \times ... \times S_N.$$

V opačném případě říkáme, že Ω je hra s nekonstantním součtem. Speciálně je-li $konst = 0$ říkáme, že Ω je hra s nulovým součtem.

Dle počtu hráčů

Definice 3. *Řekneme, že hra Ω je konečná, jestliže prostory strategií všech hráčů jsou konečné množiny. V opačném případě řekneme, že je nekonečná.*

Budeme se zabývat pouze situacemi s konečným počtem hráčů. Speciálně rozlišujeme:

- *Jeden hráč* ($N = 1$) - situace, kdy se hry účastní pouze jeden hráč, je z hlediska teorie her nezajímavá. Hráč má plně pod kontrolou hodnotu výplatní funkce, jakožto důsledek jeho rozhodnutí. Situaci lze řešit jako úlohu *matematického programování.*

- *Dva hráči* ($N = 2$) - hra dvou hráčů má velmi široké praktické uplatnění a zároveň je velmi dobře řešitelná, na rozdíl od hry více hráčů. Významným typem hry dvou hráčů je tzv. *antagonistická hra.*

Definice 4. *Hru dvou inteligentních hráčů s konstantním součtem nazýváme antagonistická hra.*

- *Více hráčů* ($N > 2$) - zde se situace trochu komplikuje, protože už je možné uvažovat, že se část hráčů může spojit do koalice za účelem dosažení lepších výsledků (zvětšení svých výplatních funkcí). Podle toho, zda pravidla hry umožňují takovéto sdružení do koalic, rozlišujeme hry na *kooperativní* (tvorba koalic je možná) a *nekooperativní* (tvorba koalic je zakázaná).

Dle přítomnosti náhodného faktoru

Definice 5. *Hráči ve hře Ω se nazývají inteligentní, pokud volí své strategie tak, aby maximalizovali svou výplatní funkci. V opačném případě se nazývají neinteligentní. Neinteligentní hráči reprezentují náhodné faktory, které ovlivňují výplatní funkci ostatních hráčů. Hráče, kteří se rozhodují z části racionálně a z části jejich rozhodnutí závisí na náhodě nazýváme p-inteligentní, kde $p \in [0,1]$ značí míru inteligence. Zřejmě $p = 0$ značí neinteligentního hráče, $p = 1$ pak hráče inteligentního.*

Hru, kde se vyskytují alespoň dva inteligentní hráči, nazýváme *konflikt.* Pro úplnost doplníme další dvě kritéria dělení rozhodovacích situací, přestože pro naše příklady toto dělení nebude mít větší význam.

Dle informovanosti hráčů

Ve hrách tvořených posloupností tahů je třeba rozlišit případ, kdy hráči mají před každým tahem přesnou informaci o tom, co se v partii dělo (tzv. *hra s úplnou informací*), od případů, kdy mají informaci pouze částečnou (tzv. *hra s neúplnou informací*).

Dle přerozdělení výhry

Ve hrách, kdy není součet výplatních funkcí konstantní, může existovat soubor strategií, který maximalizuje součet hodnot výplatních funkcí, ačkoliv volba strategie některého hráče je pro něj nevýhodná. Tedy existuje pro něj strategie, která mu garantuje větší hodnotu výplatní funkce. Předpokládáme-li navíc inteligenci onoho hráče, pak je zřejmé, že tento soubor strategií se nikdy nezrealizuje. Nabízí se tedy varianta domluvy hráčů na přerozdělení svých výher po odehrání hry za účelem maximalizace součtu všech hodnot výplatních funkcí. Připouštíme-li možnost, aby si hráči poté, co jim byly vyplaceny částky odpovídající jejich výplatním funkcím, tyto sumy přerozdělili, jedná se o tzv. *hru s přenosnou výhrou.* V opačném případě se jedná o tzv. *hru s nepřenosnou výhrou.*

Kapitola 3

Nashova rovnováha v teorii her

Poznámka. Situace v příkladu 1 je pro všechny účastníky ideální, neboť pro každého hráče existuje strategie, která mu garantuje nejvyšší možnou výhru pro libovolné strategie soupeřů, tedy existuje $s_i^* \in S_i$ tak, že platí:

$F_i(s_1, s_2, ..., s_{i-1}, s_i^*, s_{i+1}, ..., s_N) \geq F_i(s_1, s_2, ..., s_N)$
pro všechna $(s_1, s_2, ..., s_N) \in S_1 \times S_2 \times ... \times S_N$, $i = 1, ..., N$.

Hráč i tedy může s klidem volit strategii s_i^* a ví, že neexistuje strategie, která by mu mohla zvětšit výplatní funkci. Ovšem ne vždy je situace tak jednoduchá.

Příklad 2. Uvažujme jednoduchou hru 2 hráčů
$H = \{1,2\}, S_1 = \{0, 1\}, S_2 = \{0,1\}$
$F_1(s_1, s_2) = s_1 + s_2 \bmod 2$ a $F_2(s_1, s_2) = -F_1(s_1, s_2)$
Pak zřejmě neexistuje taková strategie pro žádného hráče.

Poznámka. Příklad 2 ilustruje, že ne vždy je možné najít nejlepší strategii pro i-tého hráče bez ohledu na strategie protihráče. Bylo by tedy užitečné alespoň najít nejvýhodnější strategii pro i-tého hráče, známe-li strategie protihráčů. To nás vede k zavedení pojmu *nejlepší odpověď i-tého hráče na strategie protihráčů.*

Definice 6. *Řekneme, že $\overline{s}_i \in S_i$ je nejlepší odpovědí i-tého hráče na strategie protihráčů $(s_1, s_2, ..., s_{i-1}, s_{i+1},...,s_N) \in S_1 \times S_2 \times ... \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times ... \times S_N$, pokud platí*

$F_i(s_1, s_2, ..., s_{i-1}, \overline{s}_i, s_{i+1}, ...,s_N) \geq F_i(s_1, s_2, ..., s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, ..., s_N)$, *pro všechna* $s_i \in S_i$.

Pokud pro nějaký strategický profil $\overline{s} \in S$ hraje každý z hráčů nejlepší odpověď na strategie soupeřů, říkáme, že se jedná o Nashův rovnovážný bod v čistých strategiích.

Poznámka. V příkladu 2 by nejlepší odpovědi 1.hráče na strategie soupeře byly:

$\overline{s}_1 = 1$ pro $s_2 = 0$,
$\overline{s}_1 = 0$ pro $s_2 = 1$.

Definice 7. *Řekneme, že strategický profil $\overline{s} \in S$ je Nashovým rovnovážným bodem v čistých strategiích, jestliže pro všechna $i \in H$ a pro všechna $s_i \in S_i$ platí*

$$F_i(\overline{s}_1, \overline{s}_2, ..., \overline{s}_{i-1}, \overline{s}_i, \overline{s}_{i+1}, ..., \overline{s}_N) \geq F_i(\overline{s}_1, \overline{s}_2, ..., \overline{s}_{i-1}, s_i, \overline{s}_{i+1}, ..., \overline{s}_N).$$

Souřadnice $\overline{s}_i$ se nazývá Nashova rovnovážná strategie i-tého hráče.

Tedy pokud všichni hráči hrají Nashovu rovnovážnou strategii a libovolný z nich se od ní odchýlí, může jedině prodělat.

Příklad 3. Nechť $H = \{1, 2\}, S_1 = \{-1, 5\}, S_2 = \{-1, 5\}$
$F_1(s_1, s_2) = s_1 s_2 = F_2(s_1, s_2)$.
Rozebráním všech 4 strategických profilů zjistíme, že existují dva rovnovážné body (-1,-1) a (5,5). A dostáváme pro ně:
$F_1(-1, -1) = 1 = F_2(-1, -1)$,
$F_1(5, 5) = 25 = F_2(5, 5)$.

Na tomto příkladě je vidět, že hrát nějaký rovnovážný bod nemusí být vždy to úplně nejoptimálnější řešení vzhledem k maximalizaci výplatních funkcí hráčů.

Vrátíme-li se k příkladu 2 pak dokonce zjistíme, že rovnovážný bod v čistých strategiích ani existovat nemusí. Je to dáno tím, že zájmy hráčů jsou opačné. Jedná se o tzv. *antagonistický konflikt*.

Kdybychom hru dvou inteligentních hráčů, z příkladu 2, opakovali dostatečněkrát a (s_1, s_2) by byl strategický profil pro první hru, zřejmě by hráči nehráli počáteční strategie ve všech hrách, neboť by to znamenalo jistou ztrátu pro jednoho z hráčů. Což by byl spor s jeho racionalitou. Pokud by se například hráč 1 rozhodl hrát strategii $s_1 = 0$ s pravděpodobností $p \in (0{,}1)$, $p \neq 0{,}5$ a druhou strategii s pravděpodobností $1 - p$ pak by jeho inteligentní protihráč po odehrání dostatečného počtu her hrál vždy strategii $s_2 = 0$ pro $p > 0{,}5$. Pro $p < 0{,}5$ by vždy volil $s_2 = 1$. Což by opět vedlo k trvale neoptimální strategii hráče 1. Je tedy zřejmé, že po dostatečném počtu her by se strategie obou hráčů ustálila na volbě strategie s_1 i s_2 s pravděpodobností 0,5. Tento příklad nás vede k definici *smíšených strategií.*

Definice 8. *Nechť Ω je hra definovaná v definici 1, pak smíšeným rozšířením hry Ω nazýváme nekonečnou hru $\Theta = \{H, \Sigma_1, \Sigma_2, ..., \Sigma_N; F_1(\sigma), F_2(\sigma), ..., F_N(\sigma)\}$, kde*

$$\Sigma_i = \{\sigma_i : S_i \longrightarrow R^+ | \sum_{s_i \in Si} \sigma_i(s_i) = 1\}$$

$$F_i(\sigma) = \sum_{s \in S} \sigma(s) F_i(s), \textit{ pro každé } \sigma \in \Sigma_1 \times \Sigma_2 \times ...\Sigma_N, \textit{ kde}$$

$$\sigma(s) = \prod_{i=1}^{N} \sigma_i(s_i), \sigma_i \in \Sigma_i$$

pro všechna $s \in S$ a pro $i = 1, ..., N$. Říkáme, že $\sigma_i \in \Sigma_i$ je smíšená strategie i-tého hráče.

Definice 9. *Smíšený strategický profil* $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, ..., \sigma_N^*) \in \Sigma_1 \times \Sigma_2 \times ...\Sigma_N$ *nazveme Nashovým rovnovážným bodem ve smíšených strategiích, jestliže pro všechna* $i \in H$ *a všechna* $\sigma_i \in \Sigma_i$ *splňuje*

$$F_i(\sigma_1^*, \sigma_2^*, ..., \sigma_N^*) \geq F_i(\sigma_1^*, \sigma_2^*, ..., \sigma_{i-1}^*, \sigma_i, \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_N^*).$$

Kapitola 4

Poker texas holdem

Máme za sebou dostatečný teoretický základ na to, abychom mohli zvolit vhodný aparát teorie her na nalezení Nashovy rovnováhy v hře poker texas holdem. Seznámíme se prvně se hrou samotnou.

Poker texas holdem je nejhranější a nejoblíbenější varianta karetní hry poker. Ukažme si blíže principy hry. Hra se hraje s žetony a může být hrána turnajovým stylem nebo v podobě tzv. cash game, kdy hodnoty žetonů odpovídají přesně hodnotě peněz a je možné kdykoliv do hry vstoupit a vystoupit. Nás však bude spíše zajímat turnajový poker z důvodu, který vysvětlíme později. Podstatné je, že každé jednotlivé hry se může účasnit 2 až 10 hráčů dle obsazenosti pokerového stolu. Balíček obsahuje 52 karet rozdělených do čtyř barev, s hodnotami 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J (kluk), Q (královna), K (král), A (eso). V této variantě dostává hráč na začátku hry dvě karty a na stůl se postupně vykládá pět společných karet. Karty, které obdrží hráč na začátku hry nazýváme *startovní karetní kombinací*, dále budeme používat pouze spojení *startovní kombinace*. Jeden z hráčů je na pozici tzv. *dealera*, tato pozice je nejvýhodnější, neboť se během hry vyjadřuje jako poslední. Nejdříve dvojice hráčů, kteří jsou ve směru chodu hodinových ručiček po hráči na pozici dealer, vloží po řadě tzv. malý a velký vklad (ve hře dvou hráčů se pořadí obrací, první hráč vkládá velký vklad a druhý - hráč na pozici dealer vkládá malý vklad). Tedy hráči po levé ruce hráče na pozici dealer jsou povinni vsadit, ostatní mohou po rozdání karet ještě složit bez toho, aniž by do hry museli investovat jediný žeton. Všem hráčům se rozdá po dvou kartách. Kdo se chce účastnit hry, musí dorovnat velký vklad nebo jej zvýšit. Po dokončení sázek rozdávající vyloží tři karty současně. Začne další kolo sázek, hráči se vyjadřují vždy ve směru hodinových ručiček počínaje hráčem, který vkládal malý vklad. Pokud nikdo před nimi nevsadil, mohou buďto nesázet a nebo vsadit. Minimální sázka je rovna velkému vkladu. Pokud před nimi již nějaká sázka proběhla, mohou buď složit karty a v této hře prohrávají (výjimku tvoří situace, kdy hráč už nemá žádné žetony, zůstává ve hře a hraje o úměrnou část výhry), dorovnat poslední sázku, případně ještě navýšit. Sázení končí v případě, že všichni hráči dorovnali nejvyšší navýšení a nebo karty složili. Po dokončení sázek vyloží rozdávající další kartu. Hráči opět sází. Po dokončení sázek vyloží rozdávající poslední kartu a započne poslední kolo sázek. Karetní kombinace se skládá z 5 karet které si každý hráč vybírá ze 7 (dvou karet ve své ruce a 5 společných vyložených na stole) tak aby vytvořil co nejlepší kombinaci. Nejsilnější kombinace vyhrává, přičemž může dojít i k rozdělení výhry mezi více hráčů, pokud mají shodnou výherní kombinaci. Pro úplnost si ještě ukažme výherní kombinace od nejslabší po nejsilnější.

- nejvyšší karta
  Pokud nedržíte žádnou vyšší kombinaci, o síle vaší ruky rozhodne nejvyšší karta. Pokud mají dva hráči shodnou nejvyšší kartu, o výherní kombinaci rozhodne druhá (případně třetí, čtvrtá nebo pátá) karta.

- pár
  Pár je velice častá kombinace, kterou tvoří dvě karty stejné hodnoty. Pokud mají dva hráči pár, rozhoduje hodnota páru. Pokud je shodná, rozhodne další nejvyšší karta (případně druhá nebo třetí nejvyšší).

- dva páry
  Jak už název kombinace napovídá, dva páry se skládají ze dvou dvojic karet o stejné hodnotě. Mají-li dva hráči dva páry, o vítězi rozhodne hodnota vyššího z párů. Pokud mají shodný vyšší pár, rozhodne nižší. Teprve jako třetí kritérium se používá hodnota páté karty dotvářející kombinaci.

- trojice
  Trojice, tedy tři karty stejné hodnoty. V případě, že více hráčů má jako svou nejvyšší kombinaci trojici, vyhrává ten s vyšší hodnotou. V případě, že dva hráči mají stejnou trojici, rozhoduje hodnota nejvyšší karty dotvářející kombinaci pěti karet. Je-li i tato hodnota stejná stejná, potom rozhodne hodnota druhé nejvyšší karty dotvářející kombinaci.

- postupka
  Postupka se skládá z po sobě jdoucích karet mimo barvu (tj. nesmí být všechny ve stejné barvě pak už se jedná o jinou kombinaci). Nesmí mezi nimi být žádná mezera. Eso, jinak nejvyšší karta v pokeru, se dá v postupce použít i jako jednička. V jedné postupce však může být použito jen v jedné hodnotě, takže například z karet 3, 2, A, K, Q ji neutvoříte. Má-li více hráčů postupku, vyhrává ta nejvyšší. Nejsilnější postupka je tedy A, K, Q, J, T, nejslabší pak A, 2, 3, 4, 5.

- barva
  Pět karet jedné barvy nazýváme barva. Má-li více hráčů barvu, vyhrává hráč s nejvyšší kartou v této barvě.

- fullhouse
  Pro trojici a dvojici v pěti kartách používáme anglický název fullhouse (v překladu "plný dům"). O tom, který fullhouse je silnější, rozhoduje nejprve hodnota trojice a až na druhém místě dvojice.

- čtveřice (poker)
  Kombinace, která dala hře jméno, je velice vzácná. K jejímu složení potřebujete na ruce dvojici a dvojici stejné hodnoty mezi společnými kartami, nebo tři stejné karty na stole a jednu v ruce. Pokud se do společných karet otočí poker, rozhoduje nejvyšší karta.

- čistá postupka
  Skládá se z pěti po sobě jdoucích karet ve stejné barvě. Má-li více hráčů postupku v barvě, vyhrává ta nejvyšší. Nejsilnější postupka je tedy A, K, Q, J, T všechny v jedné barvě. Této karetní kombinaci se také říká královská postupka.

Matematika má v pokeru velmi široké uplatnění. Především v podobě výpočtu elementárních pravděpodobností, návratností investovaných žetonů, reálné hodnoty žetonů v turnajovém pokeru (tzv. equity) apod. Nás ovšem bude zajímat pouze tzv. situace *push or fold*, které bychom do češtiny mohli přeložit jako vsaď všechno nebo slož, čímž je myšleno vsadit vše nebo složit ještě před rozdáním společných karet. Pokud totiž nastane situace, kdy má hráč velmi málo žetonů vůči velkému vkladu (běžně se hodnota žetonů hráče počítá ve velkých vkladech), je pro něj nevýhodné se účastnit hry jakýmkoliv jiným způsobem. Poté, co by takový hráč vsadil, se totiž může stát, že některý z hráčů ještě navýší a náš hráč potom bude muset buď dorovnat za všechny svoje žetony a nebo složit a přijít tak zbytečně o relativně velkou část svých žetonů. Z tohoto pohledu má smysl karty buď složit a nebo vsadit vše, hrát tzv. *all in*. Tento výraz budeme pro jeho jednoduchost využívat. Pokud někdo hraje all-in, nemůže prohrát bez vyhodnocení výherních kombinací. Udává se, že počet žetonů pro hru push or fold je 0-15 velkých vkladů. Toto doporučení vychází ze zkušeností a statistik hráčů, hranice hry push or fold tedy není pevně daná. Do této situace se dostávají především turnajoví hráči, kteří na začátku turnaje dostanou určitý počet žetonů a pak (nebo od určité fáze turnaje) už žetony nemohou přikupovat. Zároveň se povinné sázky po určitých časových intervalech zvyšují a tak je fáze push or fold pro některé hráče nevyhnutelná. Na rozdíl od cash game, kdy je možné přikupovat kdykoliv a povinné sázky se nemění. Strategií ve hře push or fold nazýváme soubor startovních kombinací, se kterými v dané situaci hrajeme all in (ostatní startovní kombinace skládáme).

Ovšem odhadnout nejlepší strategii nebývá vůbec jednoduché. I kdybychom mohli v dané situaci provést výpočet, nejlepší strategii nezjistíme. Neznáme totiž přesné strategie soupeřů. Faktory ovlivňující rozhodnutí jsou naše startovní kombinace, počet hráčů, pozice ve hře (kolik hráčů se bude vyjadřovat ještě po nás) a informace o strategiích soupeřů. Ačkoliv je poker hra s neúplnou informací, je možné postupně o protihráčích informace sbírat a přizpůsobit podle toho svou hru. Máme-li dostatek informací o protihráčích a víme, že hrají v nějakém ohledu špatně, je nejlepší naši strategii přizpůsobit jejich chybám. Neznáme-li naopak naše protihráče nebo víme, že hrají dobře, jako nejvhodnější se ukazuje volit Nashovu rovnovážnou strategii. Ve hře dvou hráčů nám volba Nashových rovnovážných strategií dokonce garantuje, že z dlouhodobého hlediska bez ohledu na strategii soupeře náš zisk bude nezáporný! Z dlouhodobého hlediska říkáme proto, že pro soubory strategií hráčů může určit pouze střední hodnoty výplatních funkcí kvůli náhodnému faktoru ve hře. Tedy rovnovážná strategie nám garantuje, že nad naším soupeřem budeme získávat žetony v nejhorším případě, bude-li hrát také dle Nashovy rovnováhy, nebude mít ani jeden z hráčů výhodu. Ve hře více hráčů takové garance máme bohužel pouze, pokud se od rovnovážné strategie odchýlí nejvýše jeden hráč. Nicméně, pokud se od rovnovážné strategie odchýlí více hráčů, je z definice rovnovážných strategií vždy možné pro některé hráče změnou strategie docílit zvýšení své výplatní funkce. A vzhledem ke konstantnímu součtu hry dojde ke snížení výplatních funkcí některých protihráčů. Jinými slovy nerovnovážné strategie hráčům nemůžou garantovat žádnou výplatu, pokud se libovolný hráč usmyslí změnit svou strategii.

Pokusme se nyní klasifikovat rozhodovací situace v push or fold situaci z hlediska teorie her. Jedná se o konečnou hru, neboť počet startovních kombinací je konečný a strategie hráčů jsou tvořeny podmnožinami množiny všech startovních kombinací. Hráči jsou inteligentní, neboť analyzují hru a využívají všechny dostupné informace k maximalizaci svých výplatních funkcí. Jedná se o hru s neúplnou informací. Jedná se o hru s konstantním nulovým součtem (výhra jednoho hráče nutně znamená v součtu stejně velkou ztrátu ostatních hráčů). Speciálně pro dva hráče se jedná o tzv. maticovou hru, neboť oba hráči jsou inteligentní a hra má nulový součet. Ve hře více hráčů je jakákoliv spolupráce skupiny hráčů pravidly zakázaná, jedná se tedy o nekooperativní hru N hráčů. V následující kapitole si vybudujeme teoretický základ pro to, abychom:

- Mohli s jistotou tvrdit, že Nashova rovnováha ve hře dvou hráčů existuje vždy.
- Ukázali, že pokud rovnovážných bodů existuje více, tak z hlediska výplatních funkcí nezáleží na tom, který zvolíme.
- Znali metodu k nalezení Nashovy rovnováhy ve hře dvou hráčů.
- Nashovu rovnováhu pro hru dvou hráčů skutečně nalezli pro konkrétní hodnoty žetonů (v počtu velkých vkladů) tak, aby bylo možné hráčům nabídnout ucelený návod ke hře v situacích push or fold.

Kapitola 5

Maticové hry

Definice 10. *Konečnou hru dvou inteligentních hráčů v normálním tvaru s konstantním součtem nazýváme antagonistický konflikt.*

Speciálním případem antagonistického konfliktu, kterému se budeme z praktických důvodů obzvláště věnovat, je tzv. *maticová hra.*

Definice 11. *Konečnou hru dvou inteligentních hráčů v normálním tvaru s konstantním nulovým součtem nazýváme maticovou hrou.*

Zřejmě platí
$S_1 = \{1, 2, ..., m\}$
$S_2 = \{1, 2, ..., n\}$, *pro nějaká* $n, m \in N$ *a výplatní funkce*
$F_1(s_1, s_2) = -F_2(s_1, s_2)$ *nabývají* mn *hodnot.*

Tedy maticovou hru, jak již název napovídá, můžeme přehledně charakterizovat výplatní funkcí $F(s_1, s_2) := F_1(s_1, s_2) - F_2(s_1, s_2) = 2F_1(s_1, s_2)$ *zapsanou do matice* $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$. *Kde* $a_{ij} = F(s_i, s_j)$ *pro* $i = 1, ..., m$ *a* $j = 1, ..., n$, $\boldsymbol{A}$ *se nazývá matice hry.*

Definice 12. *Řekneme, že* a_{ij} *prvek matice* $\boldsymbol{A}$ *je sedlový prvek, jestliže je současně největší ve svém sloupci a nejmenší ve svém řádku.*

Tvrzení 1. *Je-li* $\boldsymbol{A}$ *matice hry definované v definici 11, pak* a_{ij} *je sedlový prvek matice* $\boldsymbol{A}$ *právě tehdy, když* (s_i, s_j) *je Nashův rovnovážný bod v čistých strategiích.*

Důkaz. přímo z definic 7 a 12.

❑

Příklad 4. Mějme matici hry

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Matice $\boldsymbol{A}$ má 4 sedlové body $a_{11}, a_{13}, a_{31}, a_{33}$. Maticová hra charakterizovaná maticí $\boldsymbol{A}$ má tedy 4 rovnovážné body v čistých strategiích. A v těchto bodech je hodnota výplatní funkce totožná. Nabízí se otázka, zda je tomu tak vždy. Tj. zda z předpokladu (s_i, s_j) a (s_k, s_l) jsou rovnovážné body maticové hry plyne, že $F(s_i, s_j) = F(s_k, s_l)$, kde $s_i, s_k \in S_1$ a $s_j, s_l \in S_2$.

Tvrzení 2. *Nechť je dána maticová hra s prostory strategií S_1, S_2 a výplatní funkcí F. Nechť (s_i, s_j), $(s_k, s_l) \in S_1 \times S_2$ jsou její dva rovnovážné body v čistých strategiích. Pak*

$F(s_i, sj) = F(s_k, s_l)$.

Důkaz. Nechť (s_i, s_j) a (s_k, s_l) jsou rovnovážné strategie pak a_{ij}, a_{kl} jsou sedlové prvky matice A $\Longrightarrow$

$a_{ij} \leq a_{il} \leq a_{kl}$ a zároveň

$a_{ij} \geq a_{kj} \geq a_{kl} \Longrightarrow a_{ij} = a_{kl}$ tedy $F(s_i, s_j) = F(s_k, s_l)$.

❑

Definice 13. *Hodnotě výplatní funkce v rovnovážném bodě říkáme cena hry.*

Tvrzení 3. *Z definice 8 dostáváme, že smíšeným rozšířením maticové hry definované v definici 11 je hra dvou hráčů s nulovým součtem, kde*

$$\Sigma_1 = \{\boldsymbol{x}; \boldsymbol{x}^T = (x_1, x_2, ..., x_m) | \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$$

$$\Sigma_2 = \{\boldsymbol{y}; \boldsymbol{y}^T = (y_1, y_2, ..., y_n) | \sum_{i=1}^{n} y_i = 1, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\}$$

$$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}.$$

Dále z definice 9 plyne, že v maticové hře s maticí $\boldsymbol{A}$ existuje Nashův rovnovážný bod ve smíšených strategiích, jestliže existují vektory $\overline{\boldsymbol{x}} \in \Sigma_1$ a $\overline{\boldsymbol{y}} \in \Sigma_2$ takové, aby platilo

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{y}} \leq \overline{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{y}} \leq \overline{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$$

pro všechna $\boldsymbol{x} \in \Sigma_1$ a $\boldsymbol{y} \in \Sigma_2$.

(převzato z Maňas (1991))

Následující tvrzení nám umožní hledat Nashovy rovnovážné body libovolné antagonistické hry pomocí metod pro maticové hry.

Tvrzení 4. *Nechť $\Omega = \{H = \{1, 2\}, S_1, S_2; F_1(s_1,s_2), F_2(s_1, s_2)\}$ je antagonistická hra s konstantním součtem K. Potom $(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{y}}) \in \Sigma_1 \times \Sigma_2$ je její Nashův rovnovážný bod ve smíšených strategiích tehdy a jen tehdy, je-li zároveň Nashovým rovnovážný bodem ve smíšených strategiích v maticové hře*
$\Theta = \{H = \{1, 2\}, S_1, S_2; F(s_1, s_2)\}$, kde $F(s_1, s_2) = F_1(s_1,s_2) - F_2(s_1, s_2)$.

Důkaz. Plyne přímo z definice 9, tvrzeni 3 a vztahů

$$F_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + F_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = K,\ F(x, y) = F_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - F_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

pro všechna $\boldsymbol{x} \in \Sigma_1, \boldsymbol{y} \in \Sigma_2$.

❑

(převzato z Maňas (1991))

Tvrzení 5. *Hodnoty výplatních funkcí ve všech Nashových rovnovážných bodech ve smíšených strategiích maticové hry jsou stejné.*

Důkaz. sporem, nechť $(\overline{\boldsymbol{x}}_1, \overline{\boldsymbol{y}}_1)$, $(\overline{\boldsymbol{x}}_2, \overline{\boldsymbol{y}}_2) \in \Sigma_1 \times \Sigma_2$ jsou Nashovy rovnážné body maticové hry s maticí $\boldsymbol{A}$ a nechť bez újmy na obecnosti platí:

$$\overline{\boldsymbol{x}}_1^T \boldsymbol{A} \overline{\boldsymbol{y}}_1 < \overline{\boldsymbol{x}}_2^T \boldsymbol{A} \overline{\boldsymbol{y}}_2$$

z poznámky 2.19 $\Rightarrow$

$$\overline{\boldsymbol{x}}_2^T \boldsymbol{A} \overline{\boldsymbol{y}}_1 \leq \overline{\boldsymbol{x}}_1^T \boldsymbol{A} \overline{\boldsymbol{y}}_1 < \overline{\boldsymbol{x}}_2^T \boldsymbol{A} \overline{\boldsymbol{y}}_2 \leq \overline{\boldsymbol{x}}_2^T \boldsymbol{A} \overline{\boldsymbol{y}}_1.$$

❑

Lemma 6. *Rovnovážné strategie smíšeného rozšíření maticové hry se nezmění, přičteme-li ke každému prvku matice nenulové číslo c.*

Důkaz. Nechť $\overline{\boldsymbol{x}} \in \Sigma_1$ a $\overline{\boldsymbol{y}} \in \Sigma_2$ jsou rovnovážné strategie smíšeného rozšíření hry s maticí $\boldsymbol{A} \Leftrightarrow$

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \overline{\boldsymbol{y}} \leq \overline{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{A} \overline{\boldsymbol{y}} \leq \overline{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{y} \text{ pro všechna } \boldsymbol{x} \in \Sigma_1,\ \boldsymbol{y} \in \Sigma_2.$$

Nechť $\mathbf{E}$ je matice typu (m,n) samých jedniček. Pak $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{E} \boldsymbol{y} = 1$ pro všechna $\boldsymbol{x} \in \Sigma_1$ a $\boldsymbol{y} \in \Sigma_2 \Rightarrow$

$$\boldsymbol{x}^T (\boldsymbol{A} + c\boldsymbol{E}) \overline{\boldsymbol{y}} \leq \overline{\boldsymbol{x}}^T (\boldsymbol{A} + c\boldsymbol{E}) \overline{\boldsymbol{y}} \leq \overline{\boldsymbol{x}}^T (\boldsymbol{A} + c\boldsymbol{E}) \boldsymbol{y} \text{ pro všechna } \boldsymbol{x} \in \Sigma_1,\ \boldsymbol{y} \in \Sigma_2$$

$\Leftrightarrow \overline{\boldsymbol{x}}$ a $\overline{\boldsymbol{y}}$ jsou rovnovážnými strategiemi ve maticové hře s maticí $\boldsymbol{A} + c\boldsymbol{E}$.

❑

Rozdíl mezi hrami s maticemi $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{A} + c\boldsymbol{E}$ je v tom, že v druhém případě hráči dostanou respektive zaplatí bez ohledu na volbu strategií navíc částku c.
(převzato z Maňas (1991))

Definice 14. *Úlohu minimalizovat $\mathbf{c}^T \boldsymbol{x}$ pomocí $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$, za podmínek $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$, kde $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^m$, $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}^{m \times n}$, nazýváme úlohou lineárního programování ve tvaru nerovností. Množinu $M = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}\}$ nazýváme množinou přípustných řešení.*

Definice 15. *Vektor $\boldsymbol{x} \in M$ nazveme optimálním řešením úlohy lineárního programování ve tvaru nerovností definované v definici 14, pokud platí:*

$\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{y}$ *pro všechna* $y \in M$.

Lemma 7. *Úloha lineárního programování ve tvaru nerovností definovaná v definici 14 má optimální řešení tehdy a jen tehdy, když*

(i) $M \neq \emptyset$,
(ii) $\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{y} \geq 0$ *pro všechna* $\boldsymbol{y} \in \{\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{R}^n : \boldsymbol{A}\boldsymbol{s} \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{s} \geq \mathbf{0}\}$.

(převzato z Dupačová J. (2011))

Definice 16. *Úlohu maximalizovat* $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$ *pomocí* $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^m$ *za podmínek* $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$, *kde* $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{A}$ *jsou stejné jako v definice 14, nazýváme duální úlohou k úloze lineárního programování ve tvaru nerovností definované v definici 14*

Označme $N = \{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^m : \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{c}, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\}$.

Lemma 8. *Úloha definovaná v definice 14 má optimální řešení tehdy a jen tehdy, má-li optimální řešení její duální úloha definovaná v definici 16. Navíc platí:*

$$\min_{x \in M} \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \max_{y \in N} \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}.$$

(převzato z Dupačová J. (2011))

Lemma 9. *Nechť* $v \in \boldsymbol{R}$ *pak platí:*

$$v \leq \overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \text{ pro všechna } \boldsymbol{y} \in \Sigma_2 \Leftrightarrow v \leq \overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{s} \text{ pro všechna } \boldsymbol{s} \in \Sigma_2$$

kde $\boldsymbol{s}$ *jsou tvaru [1, 0, …, 0], [0, 1, 0, …, 0],…,[0, 0, …, 1], tedy čisté strategie druhého hráče.*

Důkaz. " $\Rightarrow$ " $\boldsymbol{s} \in \Sigma_2$, *tj. všechny čisté strategie jsou zároveň smíšenými*
" $\Leftarrow$ " *libovolnou smíšenou strategii* $\boldsymbol{y} \in \Sigma_2$ *lze vyjádřit jako lineární kombinaci čistých strategií* $\boldsymbol{s} \in S_2$.

❏

Věta 10 (Základní věta maticových her). *Pro každou maticovou hru existuje Nashův rovnovážný bod ve smíšených strategiích.*

Důkaz. Dle tvrzení 3 je věta $\Leftrightarrow$ pro každou matici $\boldsymbol{A}$ existují vektory $\overline{\boldsymbol{x}} \in \Sigma_1$ a $\overline{\boldsymbol{y}} \in \Sigma_2$ takové, aby platilo

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{y}} \leq \overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{y}} \leq \overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \tag{5.1}$$

pro všechna $\boldsymbol{x} \in \Sigma_1$ a $\boldsymbol{y} \in \Sigma_2$.

Dle lemmatu 6 můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že matice $\boldsymbol{A}$ má všechny prvky kladné. Potom existuje kladné číslo v tak, že pro libovolné pevné $\overline{\boldsymbol{x}} \in \Sigma_1$ a všechna $\boldsymbol{y} \in \Sigma_2$ platí

$$v \leq \overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}. \tag{5.2}$$

Existenci v nám zaručuje Weierstrassova věta, neboť funkce $f(\boldsymbol{y}) = \overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ je všude v Σ_2 spojitá a kladná a Σ_2 je kompaktní množina.

Dle lemmatu 9

$$v \leq \overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \text{ pro všechna } \boldsymbol{y} \in \Sigma_2 \Leftrightarrow v \leq \overline{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{s_2} \text{ pro všechna } \boldsymbol{s_2} \in \Sigma_2,$$

kde s_2 jsou tvaru [1, 0, …, 0], [0, 1, 0, …, 0], …, [0,0,…,1], tedy čisté strategie druhého hráče. Tedy podmínku (5.2) lze vyjádřit jako soustavu

$$a_{11}\overline{x}_1 + a_{21}\overline{x}_2 + ... + a_{m1}\overline{x}_m \geq v \quad (\boldsymbol{y} = [1, 0, ..., 0])\ ,$$

$$\vdots \tag{5.3}$$

$$a_{1n}\overline{x}_1 + a_{2n}\overline{x}_2 + ... + a_{mn}\overline{x}_m \geq v \quad (\boldsymbol{y} = [0, 0, ..., 1]) \ .$$

Aby byl vektor $\overline{\boldsymbol{x}}$ optimální smíšenou strategií prvního hráče a v byla cena hry, musí platit současně soustava (5.3) a

$$\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + ... + \overline{x}_m = 1, \quad \overline{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{0} \tag{5.4}$$

a musí existovat vektor $\overline{\boldsymbol{y}}$ tak, aby pro všechna $\boldsymbol{x} \in \Sigma_1$ platila druhá část podmínek (5.1), tj.

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \overline{\boldsymbol{y}} \leq v \ . \tag{5.5}$$

Vztah (5.5) je ekvivalentní soustavě

$$a_{11}\overline{y}_1 + a_{21}\overline{y}_2 + ... + a_{1n}\overline{y}_n \geq v \quad (\boldsymbol{x} = [1, 0, ..., 0]) \ ,$$

$$\vdots \tag{5.6}$$

$$a_{m1}\overline{y}_1 + a_{m2}\overline{y}_2 + ... + a_{mn}\overline{y}_m \geq v \quad (\boldsymbol{x} = [0, 0, ..., 1]) \ .$$

Aby byla $\overline{\boldsymbol{y}}$ strategie musí navíc platit

$$\overline{y}_1 + \overline{y}_2 + ... + \overline{y}_n = 1, \quad \overline{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{0} \ . \tag{5.7}$$

Dokážeme-li, že pro každou matici $\boldsymbol{A}$ má soustava podmínek (5.3), (5.4), (5.6), (5.7) řešení, věta bude dokázána.

Označíme-li si $p_i = \overline{x}_i / v$ pro $i = 1, 2, ..., m$, dostáváme následující soustavy podmínek:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \leq \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{p} \tag{5.8}$$

$p_i \geq 0$ pro $i = 1, ..., m$.

Volbou $\overline{\boldsymbol{x}} \in \Sigma_1$ se hráč 1 snaží docílit toho, aby cena hry v byla co nejvyšší. Uvědomíme-li si, že $p_1 + p_2 + ... + p_m = 1/v$ pak volbou $\boldsymbol{p} = [p_1, ..., p_m]$ hledáme $min\{p_1 + ... + p_n\}$ za daných podmínek.

Jedná se tedy o úlohu lineárního programování ve tvaru nerovností s účelovou funkcí $min\{p_1 + ... + p_m\}$. Podmínky 5.8 jsou pak omezení této úlohy. Označme tuto úlohu $\boldsymbol{U}$.

Analogicky označíme-li $q_i = \overline{y}_i / v$ pro i = 1,2,...,n, dostáváme následující úlohu:

$max\{q_1 + ... + q_n\}$, za podmínek:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \geq \boldsymbol{Aq}$$

$q_i \geq 0$ pro $j = 1, ..., n$.

Což je duální úloha k úloze $\boldsymbol{U}$. Zbývá dokázat, že obě úlohy ($\boldsymbol{U}$ a k ní duální úloha) mají současně řešení pro libovolnou kladnou matici $\boldsymbol{A}$. Což je ekvivalentní s řešitelností původní úlohy.

Ověříme-li předpoklady lemmatu 7 pro $\boldsymbol{U}$ dokážeme, že $\boldsymbol{U}$ má optimální řešení $\overline{\boldsymbol{p}}$. Z lemma 8 $\Rightarrow$ i duální úloha má optimální řešení $\overline{\boldsymbol{q}}$ a platí:

$\boldsymbol{c}^T\overline{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{b}^T\overline{\boldsymbol{q}} \Rightarrow \overline{p_1} + ... + \overline{p_m} = \overline{q_1} + ... + \overline{q_n}$.

Ověřme tedy předpoklady lemmatu 7 pro úlohu $\boldsymbol{U}$

(i) $M = \left\{\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^n : \overline{\boldsymbol{p}}^T\boldsymbol{A} \geq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, p_i \geq 0 \text{ pro všechna } i = 1, 2, ..., n\right\}$ je neprázdná, neboť matice A má všechny prvky kladné, tedy za p_i stačí volit dostatečně velká čísla. Volme např. pro všechna $i \in \{1, ..., m\}$:

$$p_i := (\min_{i \in \{1,...,m\}, j \in \{1,...,n\}} a_{ij})^{-1}$$

pak

$$\sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} \geq m \geq 1$$

pro všechna $j = 1, ..., n$.

(ii) $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y} \geq 0$ pro všechna $\boldsymbol{y} \in \{\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{R}^n : \boldsymbol{As} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}\}$ platí, neboť $\boldsymbol{c}$ je vektor samých jedniček.

❑

(převzato z Maňas (1991))

Uvědomme si, že tento důkaz nám zároveň poskytuje návod k hledání rovnovážných bodů, disponujeme-li nějakou metodou na řešení úloh lineárního programování.

5.1 Metody hledání rovnovážných strategií maticových her

Předpokládejme, že máme zadánu matici $\boldsymbol{A}$ typu $m \times n$ maticové hry, kde $m,n \in \boldsymbol{N}$. Ačkoliv z příkladu 2 víme, že Nashův rovnovážný bod nemusí existovat v čistých strategiích, věta 5 nám dává jistotu, že existuje alespoň jeden Nashův rovnovážný bod ve smíšených strategiích. Může jich dokonce existovat i více. My se však spokojíme s nalezením jednoho z nich, neboť tyto rovnovážné body jsou ekvivalentní z hlediska ceny hry dle tvrzení 5.

5.1.1 Dominování

Abychom nedělali zbytečně mnoho výpočtů při hledání rovnovážných bodů maticových her, uvažujme, zda není někdy možné zadanou maticovou hru zjednodušit.

Příklad 5. Mějme následující primitivní hru dvou hráčů, kdy jeden hráč schovává míček a druhý hráč hádá kam byl míček schován. První hráč má následující možnosti (strategie):
s_1...schovat míček do první krabice,
s_2... vzdát hru,
s_3... schovat míček do druhé krabice.
Druhý hráč může:
s_1...hádat, že je míč v první krabici,
s_2... vzdát hru,
s_3... hádat, že je míč v druhé krabici.

Pokud hráč dva uhodne polohu míčku, dostane od prvního hráče 1 minci, v opačném případě mu jednu minci zaplatí. Pokud se kterýkoliv z hráčů vzdá, zaplatí tomu druhému 1 minci. Matice hry je potom:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Je zřejmé, že strategii s_2 nebude žádný racionálně jednající první hráč volit. Neboť má k dispozici strategii, která pro libovolnou strategii jeho protihráče mu přinese alespoň tak velké výplatu jako strategie s_2, v některých případech dokonce větší. Je pro něj výhodnější volit např. strategii s_1, neboť $F(s_2,s) \leq F(s_1,s)$ pro všechna $s \in S_2$. Analogicky druhý hráč, bude-li jednat racionálně, nikdy nebude volit s_2 na úkor například s_1. Všimněme si, že všechny prvky matice hry v druhém řádku jsou menší nebo rovny prvků v prvním řádků tj. $a_{2,j} \leq a_{1,j}$ pro $j = 1,2,3$ a analogicky všechny prvky druhého sloupce jsou větší nebo rovny prvkům prvního sloupce.

Říkáme, že první řádek dominuje řádek druhý a první sloupec dominuje sloupec druhý. Tedy druhé strategie obou hráčů jsou dominovány. Někdy ovšem strategii, jejíž využití nám nepřináší žádné zvýšení zisku nebo dokonce je nevýhodné ji používat, není tak snadné rozpoznat.

Příklad 6. Uvažujme maticovou hru s maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ačkoliv žádný řádek nedominuje jiný řádek ani žádný sloupec nedominuje jiný sloupec přímo, ukážeme, že existuje strategie prvního hráče, jejíž použití nemá smysl. Uvažujme smíšenou strategii $x = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Pak dosazením všech čistých strategií druhého hráče a s využitím lemmatu 9 dostáváme $F_1(s_1, s) \leq F_1(x, s)$ pro všechna $s \in S_2 \Leftrightarrow F_1(s_1, y) \leq F_1(x, y)$ pro všechna $y \in \Sigma_2$. Tedy strategie s_1 prvního hráče je dominována konvexní kombinací strategií s_2 a s_3.

Definice 17. *Řekneme, že strategie s_i prvního hráče maticové hry s maticí $\boldsymbol{A}$ je dominována (ostře dominována), jestliže existují*
$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_m \in [0,1]$ *takové, že* $\sum_{i=1, i\neq j}^{m} \alpha_i = 1$ *a platí*

$$a_{i,j} \leq \alpha_1 a_{1,j} + \alpha_2 a_{2,j} + ... + \alpha_{i-1} a_{i-1,j} + \alpha_{i+1} a_{i+1,j} + ... + \alpha_m a_{m,j}$$

$$(a_{i,j} < \alpha_1 a_{1,j} + \alpha_2 a_{2,j} + ... + \alpha_{i-1} a_{i-1,j} + \alpha_{i+1} a_{i+1,j} + ... + \alpha_m a_{m,j})$$

pro $j = 1, ..., n$. *Řekneme, že strategie s_i druhého hráče maticové hry s maticí je dominována (ostře dominována), jestliže existují*
$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n \in [0,1]$ *takové, že* $\sum_{i=1, i\neq j}^{n} \alpha_i = 1$ *a platí*

$$a_{j,i} \geq \alpha_1 a_{j,1} + \alpha_2 a_{j,2} + ... + \alpha_{i-1} a_{j,i-1} + \alpha_{i+1} a_{j,i+1} + ... + \alpha_n a_{j,n}$$

$$(a_{j,i} > \alpha_1 a_{j,1} + \alpha_2 a_{j,2} + ... + \alpha_{i-1} a_{j,i-1} + \alpha_{i+1} a_{j,i+1} + ... + \alpha_n a_{j,n})$$

pro $j = 1, ..., m$.

Vypuštěním dominovaných strategií Nashovy rovnovážné body neznehodnotíme v tom smyslu, že bude existovat stále alespoň jeden a výplatní funkce v něm (cena hry) bude stále stejná. Vypuštěním ostře dominovaných strategií se množina všech Nashových rovnovážných bodů dokonce vůbec nezmění. Vraťme se k příkladu 5. Vynecháme-li dominovanou strategii prvního hráče, dostaneme hru s maticí:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Vynecháme-li dominovanou strategii druhého hráče, dostaneme hru s maticí

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Kde již neexistují dominované strategie. Tento postup nám umožňuje snížit výpočetní náročnost úlohy.

5.1.2 Rovnováha v čistých strategiích

Na hledání Nashových rovnovážných bodů maticových her bychom rovnou mohli aplikovat nějakou ověřenou metodu, která by nám zaručeně našla nějaký rovnovážný bod ve smíšených strategiích. Ale pokud preferujeme vědět s jistotou, zda existuje rovnovážný bod v čistých strategiích a šance, že v maticové hře existuje rovnovážný bod v čistých strategiích není zanedbatelná, je výhodné prvně ověřit, zda takový rovnovážný bod existuje. Rovnovážný bod v čistých strategiích bývá obvykle praktičtější, neboť nabízí snadnější návod k rozhodování. Navíc jeho nalezení je výpočetně jednodušší, než hledat rovnovážný bod ve smíšených strategií a může se stát, že nám metody hledání rovnovážných bodů ve smíšených strategií jako nalezený rovnovážný bod nenajdou rovnovážný bod v čistých strategiích, ačkoliv existuje. Tato situace může nastat, pokud existuje více rovnovážných bodů v čistých strategiích. Pak zřejmě jakákoliv konvexní kombinace těchto bodů je rovnovážným bodem (stále splňuje soustavu lineárních podmínek), nikoliv však nutně v čistých strategiích.

Dle tvrzení 1 pro maticovou hru existuje rovnovážný bod v čistých strategiích $\Leftrightarrow$ existuje sedlový prvek matice $\boldsymbol{A}$. To ověříme tak, že projdeme každý prvek matice $\boldsymbol{A}$ a do vektoru množin $\boldsymbol{M} = (M_1, ..., M_n)$ si ukládáme čísla řádků s maximálním prvkem v daném sloupci, tj.:

$$M_j = \{k : a_{kj} = max\{a_{ij}; i \in \{1, 2, ..., m\}\}\}.$$

Do vektoru množin $\boldsymbol{m} = (m_1, ..., m_m)$ pak ukládáme čísla sloupců s minimálním prvkem v daném řádků, tj.:

$$m_i = \{k : a_{ik} = min\{a_{ij}; j \in \{1, 2, ..., n\}\}\}.$$

Pokud nastane $j \in m_k$ pro nějaké $k \in M_j$ a pro nějaký sloupec $j \in \{1, 2, ..., n\}$ pak prvek a_{kj} je sedlovým prvkem matice a dvojice $(s_k,\, s_j)$ je Nashovým rovnovážným bodem v čistých strategiích.

Příklad 7. Ilustrace metody na příkladu hry s více rovnovážnými body v čistých strategiích. Označme prvně maximální prvky ve sloupcích kroužkem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Minimální prvky v řádcích označme podtržením:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & \underline{1} \\ -2 & \underline{-5} & -3 \\ \underline{1} & 3 & \underline{1} \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že matice má 4 sedlové body a tedy příslušná maticová hra má 4 rovnovážné body v čistých strategiích a sice (s_1, s_1), (s_1, s_3), (s_3, s_3), (s_3, s_1). Rovnovážné body v čistých strategiích jsou speciálním případem rovnovážných bodů ve smíšených strategiích, tedy tyto body splňují všechny lineární podmínky pro to, aby byly rovnovážnými body ve smíšených strategiích $\Rightarrow$ i jejich konvexní kombinace musí tyto podmínky splňovat. Tedy $((\alpha, 0, 1-\alpha),(\beta, 0, 1-\beta))$ jsou pro všechna α, $\beta \in [0,1]$ rovnovážné body ve smíšených strategiích v našem příkladu.

5.1.3 Metoda založená na řešení úlohy LP

Pokud v matici neexistuje sedlový prvek, je třeba hledat rovnováhu ve smíšených strategiích. Nejpoužívanější je metoda založená na řešení úlohy lineárního programování.

Definice 18. *Úlohu minimalizovat* $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ *pomocí* $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ *za podmínek* $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^m$, $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}^{m\times n}$ *nazýváme úlohou lineárního programování ve standardním tvaru.*

Simplexový algoritmus je nejpoužívanější metoda na řešení úloh lineárního programování (dále jen LP) ve standardním tvaru. Bylo dokázáno, že počet aritmetických operací může při použití simplexového algoritmu růst nejhůře jako exponenciální funkce rozměrů úlohy. Ačkoliv existují algoritmy, které zaručují nižší výpočetní složitost, jejich střední efektivnost nedosahuje efektivnosti simplexového algoritmu, nebudeme se jimi tedy zabývat. (převzato z Maňas (1991))

Postupujme nyní dle důkazu základní věty maticových her. Předpokládejme, že maticová hra nemá sedlový prvek a všechny její prvky jsou kladné. Předpoklad neexistence sedlového prvku není nutný, ovšem jak již bylo řečeno, může být vhodné toto prvně ověřit. Nechť je charakterizována maticí hry $\boldsymbol{A}$ typu $m \times n$. Nechť $\overline{\boldsymbol{x}} \in \Sigma_1$ a $\overline{\boldsymbol{y}} \in \Sigma_2$ jsou hledané rovnovážné strategie. Označme v cenu hry. Zavedením $p_i = \overline{x}_i/v$ pro $i = 1, 2, ..., m$ dostáváme úlohu $\mathbf{U}$ LP ve tvaru nerovností:

$min\{p_1 + ... + p_m\}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \leq \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{p} \tag{5.9}$$

$p_i \geq 0$ pro $i = 1, ..., m$. $\boldsymbol{A}$ je matice s kladnými prvky $\Rightarrow$ splňuje předpoklady lemmatu 7 $\Rightarrow$ existuje optimální řešení úlohy $\mathbf{U}$ $\Rightarrow$ existuje optimální řešení úlohy $\mathbf{U}$ převedené na standartní tvar:

$$min\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{p} : \tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{p} = (1, 1, ..., 1)^T, \boldsymbol{p} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^{m+n}\}, \text{ kde} \tag{5.10}$$

$$c_i = \begin{cases} 1, & i = 1, ..., m, \\ 0, & i = m+1, ..., m+n. \end{cases}$$

$$\tilde{\boldsymbol{A}} := \left(\ \boldsymbol{A}^T| - \boldsymbol{I}_n\ \right).$$

Nyní již můžeme použít simplexový algoritmus. Dostáváme $\overline{\boldsymbol{p}} = (\overline{p}_1, ..., \overline{p}_{m+n})$ jako optimální řešení, rovnovážnou strategii prvního hráče dostáváme ze vztahů:

$$\frac{1}{p_1 + ... + p_m} = v, \tag{5.11}$$

$$x_i = p_i v,\ i = 1, 2, ..., m. \tag{5.12}$$

Zavedením $q_i = \overline{y}_i / v$ pro $i = 1, 2, ..., n$ dostáváme úlohu **L** LP ve tvaru nerovností:

$min\{-q_1 - ... - q_n\}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \geq \boldsymbol{Aq}$$

$q_i \geq 0$ pro $i = 1, ..., n$. Protože se jedná o duální úlohu k úloze **U** tak dle lemmatu 8 existuje její optimální řešení $\Rightarrow$ existuje optimální řešení úlohy **L** převedené na standardní tvar:

$$min\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{q} : \tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{q} = (1, 1, ..., 1)^T, \boldsymbol{q} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{R}^{n+m}\}, \text{ kde}$$

$$c_i = \begin{cases} -1, & i = 1, ..., n, \\ 0, & i = m+1, ..., n+m. \end{cases}$$

$$\tilde{\boldsymbol{A}} := \left(\ \boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}_m \ \right).$$

Opět stačí aplikovat simplexový algoritmus a dopočítat rovnovážnou strategii druhého hráče pomocí vztahů:

$$y_i = q_i v, \ i = 1, 2, ..., n. \tag{5.13}$$

Ukažme si kompletní výpočet rovnovážných bodů pomocí uvedené metody na příkladu.

Příklad 8. Mějme dánu matici hry $\boldsymbol{A}$, úkolem je nalézt nějaký rovnovážný bod ve smíšených strategiích. Nejprve ověříme, zda neobsahuje sedlový prvek:

$$\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \underline{0} & 2 & 2 \\ \underline{-2} & 3 & 0 \\ \underline{-2} & 2 & -1 \\ 4 & 0 & \underline{-3} \end{pmatrix}.$$

Kroužek značí největší hodnotu ve sloupci, podtržení pak nejmenší v řádku. Protože obojí nenastává pro žádný prvek matice, tak sedlový prvek (rovnovážný bod v čistých strategiích) neexistuje.

Snadno si můžeme ověřit, že třetí řádek je dominovaný přímo prvním řádkem (tj. třetí strategie prvního hráče je dominována první) a druhý sloupec třetím (druhá strategie druhého hráče je dominována přímo jeho třetí strategií) a po vypuštění druhého sloupce je druhý řádek dominován prvním. Upravme tedy:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Tímto jsme se zbavili dominovaných strategií, ve výsledku budou souřadnice rovnovážných strategií odpovídající dominovaným strategiím nulové. Pro nezápornost ceny hry v potřebujeme, aby prvky matice byly kladné, dle lemmatu

6 můžeme ke každému prvku matice přičíst např. $c = 4$ aniž bychom změnili rovnovážné strategie.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} =: \tilde{\boldsymbol{A}}$$

Z (5.9) dostáváme úlohu lineárního programování **U**
$min\{p_1 + p_4\}$
$4p_1 + 8p_4 \geq 1$
$6q_1 + 1p_4 \geq 1,$
kde $p_1 \geq 0$, $p_4 \geq 0$.

Podle (5.10) úlohu **U** převedeme na standartní tvar:

$min\{p_1 + p_4\}$
$4p_1 + 8p_4 - z_1 = 1$
$6q_1 + 1p_4 - z_2 = 1,$
kde $z = (p_{m+1}, ..., p_{m+n})$, $p_1 \geq 0$, $p_4 \geq 0$, $z_1 \geq 0$, $z_2 \geq 0$.

Jejíž řešením je vektor $\overline{p} = (\overline{p}_1, 0, 0, \overline{p}_4)$. K ní duální úlohu

$max\{q_1 + q_3\}$
$4p_1 + 6p_3 + w_1 = 1$
$8q_1 + 1p_3 + w_2 = 1,$
kde $z = (q_{n+1}, ..., q_{n+m})$, $q_1 \geq 0$, $q_3 \geq 0$, $w_1 \geq 0$, $w_2 \geq 0$,

řeší vektor $\overline{q} = (\overline{q}_1, 0, \overline{q}_3)$. Nyní již můžeme aplikovat simplexový algoritmus. Využijeme softwaru Mathematica a dostáváme: $\overline{p} = (\frac{7}{44}, 0, 0, \frac{1}{22})$, $\overline{q} = (\frac{5}{44}, 0, \frac{1}{11})$.

Z (5.11), (5.12), (5.13) dostáváme: cena hry je $v = \frac{44}{9}$,
rovnovážné strategie pak $\overline{\boldsymbol{x}} = (\frac{7}{9}, 0, 0, \frac{2}{9})$, $\overline{\boldsymbol{y}} = (\frac{5}{9}, 0, \frac{4}{9})$.

5.2 Řešené příklady

5.2.1 Dělení kořisti

Následující hra má více různých interpretací. Uvedeme ji například jako vojenskou. Máme dvě alianční strany, které rabují na dobytém území nepřítele, sestávající se z k oblastí. Bohatství i-té oblasti má hodnotu h_i, $i = 1, 2, ..., k$. První strana má k dispozici a vojenských jednotek, druhá strana má k dispozici b jednotek. Obě strany mají informace o bohatství oblastí i vojenské síle alianční strany. Předpokládejme, že obě strany jsou schopny své jednotky dopravit do všech oblastí ve stejný čas a že bohatství oblasti připadne stranám v poměru počtu vojenských jednotek, které do oblasti dorazí. Nedorazí-li do oblasti žádné jednotky, bohatství oblasti se rozdělí napůl mezi obě alianční strany. Naším úkolem je nalézt rovnovážné strategie pro dané počty vojenských jednotek a dané hodnoty bohatství jednotlivých oblastí. Obě strany se samozřejmě snaží maximalizovat hodnotu, kterou získají.

Jedná se o antagonistický konflikt, který modelujeme jako hru 2 inteligentních hráčů v normálním tvaru s konstatním součtem S:

$$\{H = \{1, 2\}, X, Y, F_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), F_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\},$$

kde

$$S := \sum_{i=1}^{k} h_i,$$

$X = \{\boldsymbol{x}; x_1 + x_2 + ... + x_k = a, x_i \in \boldsymbol{N}, i = 1, 2, ..., k\}$,
$Y = \{\boldsymbol{y}; y_1 + y_2 + ... + y_k = b, y_i \in \boldsymbol{N}, i = 1, 2, ..., k\}$,

$$F_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{k} f(x_i, y_i)h_i,\ F_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{k} f(y_i, x_i)h_i,$$

$f(x, y) = \frac{x}{x+y}$ pro $x + y \neq 0$ a $f(x, y) = \frac{1}{2}$, pro $x + y = 0$.

Dle tvrzení 4 můžeme uvažovat maticovou hru

$$\{H = \{1,2\}, X, Y, F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\},$$

kde

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = F_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - F_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),$$

aniž bychom změnili Nashovy rovnovážné body. Dle základní věty maticových her máme zaručenu existenci alespoň jednoho Nashova rovnovážného bodu ve smíšených strategiích. Můžeme se tedy pustit do výpočtu pro nějaké konkrétní hodnoty.

Volme počet oblastí např. $k = 3$ a označme je písmeny A, B, C, počet vojenských jednotek hráčů $a = b = 2$ a bohatství oblastí $h_A = 5$, $h_B = 3$, $h_C = 6$. Oba hráči mají rovnocenné podmínky a každý má k dispozici celkově 6 čistých strategií.

A…vyslat obě jednotky do oblasti A
B…vyslat obě jednotky do oblasti B
C…vyslat obě jednotky do oblasti C
AB…vyslat jednu jednotku do oblasti A a jednu jednotku do oblasti B
AC…vyslat jednu jednotku do oblasti A a jednu jednotku do oblasti C
BC…vyslat jednu jednotku do oblasti B a jednu jednotku do oblasti C
Ze vztahu pro výplatní funkci

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = F_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - F_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{k} (f(x_i, y_i) - f(y_i, x_i))h_i$$

spočítáme matici hry

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & \frac{-4}{3} & \frac{-13}{3} & -4 \\ -2 & 0 & -3 & -4 & -8 & -5 \\ 1 & 3 & 0 & -2 & -3 & -1 \\ \frac{4}{3} & 4 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ \frac{13}{3} & 8 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

V tomto případě není těžké určit výsledek, neboť $a_{5,5}$ je sedlovým prvkem matice $\boldsymbol{A}$. Tedy rovnovážnou strategií pro oba hráče je strategie AC, která radí vysílat jednu jednotku do oblasti A a jednu jednotku do oblasti C.

Uvažujme, že se náhle změní situace a my zjistíme, že jednotky alianční strany nejsou ochotny k rabovaní přistoupit mírumilovně, ale že chtějí o kořist bojovat. Předpokládejme, že strana, která vyšle do oblasti více jednotek v takovém případě získá celé bohatství oblasti, neboť méně početnější strana se vyhne střetu a kořist jim raději přenechá. V případě, kdy do oblasti dorazí stejný počet jednotek na obou stranách, dojde k boji a s pravděpodobností 1/2 zvítězí každá ze stran a získá tak celé bohatství oblasti. Nedorazí-li do oblasti žádné jednotky, bohatství oblasti se rozdělí napůl mezi obě alianční strany.

Oproti předchozí situaci se mění pouze výplatní funkce obou stran (jedná se o střední hodnoty výplatních funkcí):

$$F_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{k} (\chi_{x_i>y_i} + \frac{1}{2}\chi_{x_i=y_i})h_i \quad F_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{k} (\chi_{y_i>x_i} + \frac{1}{2}\chi_{x_i=y_i})h_i$$

dostáváme matici hry

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & -4 \\ -2 & 0 & -3 & -2 & -8 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & 8 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & -3 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

K matici přičteme $c\boldsymbol{E}_6$ pro vhodné $c > 8$ a metodou založenou na lineární programování s využitím softwaru Mathematica dostáveme:

$\overline{\boldsymbol{p}} = (0, 0, \frac{3}{48}, \frac{1}{48}, \frac{2}{48}, 0) = \overline{\boldsymbol{q}} \Rightarrow$
$\overline{\boldsymbol{x}} = (0, 0, \frac{3}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, 0) = \overline{\boldsymbol{y}}.$

Teorie her nám doporučuje, abychom v polovině takových situací vysílali obě naše jednotky do oblasti C, v jedné situaci z šesti vysílali jednu jednotku do A a jednu do B a ve dvou situacích z šesti pak vysílali jednu jednotku do A a jednu do B.

5.2.2 Poker-hra dvou hráčů v situaci push or fold

Vraťme se k cíli práce, a sice hledání Nashovy rovnováhy ve hře poker texas holdem. Situace je následující. Hrají proti sobě dva hráči, z nichž alespoň jeden má velmi málo žetonů vůči velikosti velkého vkladu (méně než 15 velkých vkladů). Menší hodnotu žetonů obou hráčů (v počtu velkých vkladů) nazýváme *efektivní počet žetonů* a značíme e. Je třeba si uvědomit, že i v situaci, kdy jeden z hráčů má hodně žetonů a jeho protihráč velmi málo, je nucen hrát push of fold, neboť v každé hře může efektivně využít pouze žetony v hodnotě, které drží jeho protihráč. V každé hře se nachází jeden z hráčů na pozici dealer a je povinen do hry vkládat malý vklad, druhý hráč do hry musí vkládat velký vklad o velikosti dvojnásobku malého vkladu. Hráče na pozici dealer budeme nazývat *první hráč*, jeho protihráče pak *druhý hráč*. Po každé hře se pozice hráče na pozici dealer střídá. První hráč se vyjadřuje první a vzhledem k tomu, že se nacházíme v situaci push or fold, může buď vsadit všechny žetony (hrát all in) a nebo složit karty. V případě, že složí, prohrává žetony ve výši malého vkladu. V případě, že vsadí a nebude dorovnán, vyhrává žetony ve výši velkého vkladu a konečně v případě, že vsadí a bude dorovnán druhým hráčem, bude okamžitě rozdáno 5 společných karet a hráč s vyšší kombinací vyhraje žetony o hodnotě efektivního počtu žetonů. Tedy v případě, že měl vyhrávající hráč alespoň tolik žetonů jako soupeř, hra končí, neboť už získal všechny žetony.

Hra dvou hráčů v situaci push or fold splňuje definici maticové hry a pro ně už jsme schopni hledat rovnovážné body. Standardně užijeme metodu založenou na řešení úlohy LP. Nejprve je ovšem nutné spočítat matici hry $\boldsymbol{A}$. K tomu je nezbytné znát všechny možné strategie hráčů. Jak již bylo řečeno, každá strategie je podmnožina množiny všech startovních kombinací. Kolik je ovšem startovních kombinací?

V balíčku se nachází 52 jedinečných karet, startovní kombinaci můžeme tedy dostat: $\binom{52}{2}$. Je třeba si uvědomit, že některé startovní kombinace jsou z hlediska šancí na výhru totožné. Dva stejné páry jsou rovnocenné startovní kombinace bez ohledu na to, v jakých barvách karty jsou. U nepárových startovních kombinací je pro dvojici karet stejných hodnot (např. AK) rozdíl možný pouze, je-li jedna dvojice ve stejné barvě a druhá v jiné (např. A křížové, K křížový je lepší startovní kombinace než A srdcové, K kárový). Nepárové kombinace můžu tedy vybrat $\binom{13}{2} * 2$ způsoby (vyberu dvojici různých hodnot z 2, 3, …, K, A a rozhodnu, zda budou ve stejné barvě a nebo v různé). Párové kombinace můžu dostat 13 způsoby, celkově tedy:

$$\binom{13}{2} * 2 + 13 = 169.$$

I přes tuto redukci bude počet všech strategií příliš vysoký. Je to počet možností, jak vybrat podmnožinu z množiny se 169 prvky. Tedy každý hráč má k dispozici 2^{169} strategií. K tomu, abychom úlohu mohli řešit v reálném čase, bude potřeba nějaké zjednodušení.

K výpočtu výplatních funkcí hráčů budeme potřebovat matici vzájemných šancí startovních kombinací $\boldsymbol{Q} = (q_{ij})_{i,j=1}^{169}$ a matici pravděpodobností setkání startovních kombinací $\boldsymbol{P} = (p_{ij})_{i,j=1}^{169}$. Označíme si startovní kombinace b_1,b_2,...,b_{169} v libovolném pořadí, pak $q_{i,j} \in [0,1]$ bude udávat pravděpodobnost výhry startovní kombinace b_i proti startovní kombinaci b_j (v případě, že oba hráči vsadí všechny žetony do hry) a $p_{i,j} \in [0,1]$ pravděpodobnost, že prvnímu hráči bude rozdána startovní kombinace b_i a zároveň druhému hráči startovní kombinace b_j. Dále si označme potenční množinu všech startovních kombinací $S = 2^{\{b_1,b_2,\ldots,b_{169}\}}$ jako prostor strategií obou hráčů. Jednotlivé strategie hráčů jsou prvky této potenční množiny, tedy každá strategie udává u každé startovní kombinace, zda hrát all in nebo fold. Potom k-tý prvek potenční množiny $S_k \in S$ je k-tá strategie obou hráčů, kde $k = 1, 2, ..., 2^{169}$. Nyní již můžeme analyticky vyjádřit výplatní funkci naší hry (v počtu velkých vkladů).

$$\frac{F(k,l)}{2} = F_1(k,l) = \sum_{i \in S_k, j \in S_l} e(2q_{i,j} - 1)p_{i,j} + \sum_{i \in S_k, j \notin S_l} p_{i,j} - \sum_{i \notin S_k, j=1}^{169} \frac{p_{i,j}}{2}$$

Kde e je efektivní počet žetonů a $k, l = 1, 2, ..., 2^{169}$. První suma udává střední hodnotu součtu výher (v počtu velkých vkladů) prvního hráče v situacích, kdy je prvnímu hráči rozdána startovní kombinace, se kterou dle své strategie hraje all in, a druhému hráči startovní kombinace, se kterou dle své strategie dorovnává. Druhá suma je pak střední hodnotou součtu výher prvního hráče v situacích, kdy jsou hráčům rozdány startovní kombinace tak, že první hráč hraje all in a druhý skládá. Poslední suma pak udává střední hodnotu součtu výher prvního hráče v situacích, kdy je prvnímu hráči rozdána karetní kombinace, se kterou dle své strategie skládá.

K výpočtu je třeba znát matice $\boldsymbol{Q}$ a $\boldsymbol{P}$. Vzájemné šance 2 startovních kombinací vůči sobě bohužel nelze spočítat analyticky, jediný způsob je pro všechna možné rozdání společných karet určit vítěznou kombinaci. Opět se jedná o velmi velký počet možností, přesně $\binom{48}{5}$ (vybíráme 5 společných karet ze 48 karet v balíčku). K přibližnému určení hodnot se používá metoda *fiktivní hry*. Nechá se simulovat náhodné rozdání 5 společných karet z balíčku, vyhodnotí se nejsilnější kombinace 5 karet pro každou ze startovních kombinací a určí se vítěz. Hodnota $q_{i,j}$ se získá jako počet vítězství startovní kombinace b_i vůči startovní kombinaci b_j děleno počet simulovaných her. Data získaná z fiktivní hry ovšem nebudeme počítat sami, ale odkážeme se na internetový zdroj (Chubukov (2003)).

K výpočtu hodnot matice $\boldsymbol{P}$ si naopak vystačíme s jednoduchou kombinatorikou. Počet možností startovních kombinací, které můžou mít hráči je $K := \binom{52}{2}\binom{50}{2}$ (rozlišujeme jakou startovní kombinaci má první hráč a jakou startovní kombinaci má druhý hráč). Hodnotou karty rozumíme jeden z třinácti znaků (2,3,…,K,A). Dle hodnoty karet v jednotlivých startovních kombinacích můžeme rozlišit typy situací:

a) První hráč má hodnoty obou karet své startovní kombinace stejné jako druhý hráč.
b) První hráč má stejnou hodnotu právě jedné karty z jeho karetní kombinace jako druhý hráč.
c) První hráč má hodnoty obou karet ve své startovní kombinaci jiné než jsou hodnoty karet startovní kombinace druhého hráče.

U nepárových startovních kombinací označujeme startovní kombinaci s (z anglického "suited"), pokud jsou obě karty stejné barvy. V opačném případě je označujeme o (z anglického "ofsuit"). Čísla uvedená níže udávají pravděpodobnosti rozdání <u>konkrétních</u> (předem zvolených) startovních kombinací proti <u>konkrétním</u> startovním kombinacím daných typů. Tedy nejedná se o pravděpodobnosti, že hráči dostatnou nějaký typ těchto karet. Pravděpodobnosti jsou platné i při opačném pořadí startovních kombinací u hráčů. Např. "rozdílné hodnoty: pár proti nepárová o", je myšlena pravděpodobnost, že prvnímu hráči bude rozdán nějaký předem zvolený pár např. A,A a druhému hráči nějaká předem zvolená nepárová kombinace mimo barvu, kde ani jedna z karet není eso, např. 8,7 různé barvy. Pro větší srozumitelnost první závorka vždy udává počet možností, jak rozdat danou startovní kombinaci prvnímu hráči, druhá závorka počet možností jak rozdat danou startovní kombinaci druhému hráči (až po rozdání karet prvnímu hráči). Vše je děleno počtem všech možných startovních kombinací obou hráčů, tedy konstantou K.

a) obě hodnoty karet jsou stejné

- pár $\frac{\binom{4}{2}(1)}{K}$
- nepárová o $\frac{(4\cdot3)(3(\frac{1}{3}3+\frac{2}{3}2))}{K}$
- nepárová s $\frac{(4)\cdot(3)}{K}$
- nepárová s proti stejné nepárové o $\frac{(4)\cdot(3\cdot2)}{K}$

b) právě jedna hodnota je stejná

- pár proti nepárové s $\frac{\binom{4}{2}(2)}{K}$
- pár proti nepárové o $\frac{\binom{4}{2}(2\cdot3)}{K}$
- nepárová o proti nepárové o $\frac{(4\cdot3)(3\cdot3)}{K}$
- nepárová s proti nepárové s $\frac{(4)\cdot(3)}{K}$
- nepárová o proti nepárové s $\frac{(4\cdot3)\cdot(3)}{K}$

c) rozdílné hodnoty

- pár proti nepárové s $\frac{\binom{4}{2}(4)}{K}$
- pár proti nepárové o $\frac{\binom{4}{2}\cdot(4\cdot3)}{K}$
- nepárová s proti nepárové s $\frac{(4)\cdot(4)}{K}$
- nepárová o proti nepárové o $\frac{(4\cdot3)(4\cdot3)}{K}$
- nepárová o proti nepárové s $\frac{(4\cdot3)(4)}{K}$

Vzhledem k rozsahu problému necháme všechny výpočty provádět počítač. Do matice $\boldsymbol{P}$ necháme naším programem zanést výše uvedené pravděpodobnosti, podle toho o který typ setkání startovních kombinací se jedná. Kompletní zdrojový kód je v přiloženém souboru nash.pas. Nyní není problém spočítat libovolný prvek matice hry $\boldsymbol{A}$, ovšem výpočet celé matice ($2^{169} \times 2^{169}$) je i pro výpočetní techniku příliš rozsáhlý problém. Snížíme tedy počet možných strategií tak, že si podle nějaké kritéria síly seřadíme startovní kombinace od nejsilnější po nejslabší a budeme uvažovat strategie následovně:

s_1... pouze nejsilnější startovní kombinace
s_2...pouze první a druhá nejsilnější startovní kombinace
$\vdots$
s_{168}...všechny startovní kombinace kromě nejslabší
s_{169}...všechny startovní kombinace.

Zbývá zvolit vhodné kritérium síly startovních kombinací. Nejrozumnější se jeví šance startovní kombinace vůči jiné náhodné startovní kombinaci. Tyto hodnoty lze opět vypočítat pomocí *fiktivní hry* tak, že se nechá dostatečně krát náhodně vybrat karetní kombinaci soupeři, rozdat společné karty a určit vítěze. Následující tabulka řadí startovní kombinace dle šancí vůči jiné náhodné startovní kombinaci.

pořadí	startovní kombinace	šance proti jiné náhodné kombinaci
1	AA	0.8520371
2	KK	0.8239568
3	QQ	0.7992516
4	JJ	0.7746947
5	TT	0.7501178
6	99	0.7205725
7	88	0.6916304
8	AKs	0.6704463
9	77	0.6623602
10	AQs	0.6620886
11	AJs	0.6539268
12	AKo	0.6532007
13	ATs	0.6460239
14	AQo	0.6443184
15	AJo	0.6356326
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
165	72o	0.3458365
166	52o	0.3428465
167	62o	0.3407514
168	42o	0.3319975
169	32o	0.3230323

(převzato z Rec.Gambling.Poker (1995))

Nyní je vhodné přeuspořádat matice $\boldsymbol{Q}$ a $\boldsymbol{P}$ podle síly startovních kombinací. Předpokládejme, že matice jsou přeuspořádány, prvek nové matice hry $\tilde{\boldsymbol{A}}$ vypočteme :

$$\tilde{a}_{k,l} = F_1(k,l) = \sum_{i,j=1}^{k,l} e(2q_{i,j}-1)p_{i,j} + \sum_{i=1,j=l+1}^{k,169} p_{i,j} - \sum_{i=k+1,j=1}^{169,169} \frac{p_{i,j}}{2}, \tag{5.14}$$

pro $k,l = 1,2,...,169$. Máme-li uloženou matici hry, můžeme nechat náš program vypsat pro danou matici $\tilde{\boldsymbol{A}}$ úlohu lineárního programování a použít software Mathematica. Naším cílem je vytvořit ucelený návod pro hru v situacích push or fold. Spočítáme tedy všechny rovnovážné strategie pro efektivní hodnoty žetonů $e = 1,2,3,...,25$ a pokusíme se tento návod nějak vhodně graficky prezentovat.

Výpočet

Máme dánu hodnotu efektivního počtu žetonů e. Počítáme Nashovy rovnážné strategie ve smíšených strategií pro hru s maticí $\tilde{\boldsymbol{A}}$. Smíšenou strategii prvního hráče označme $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_{169})$, druhého hráče $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, ..., y_{169})$. V textovém souboru Q.txt máme uloženu matici $\boldsymbol{Q}$, v souboru P.txt pak matici $\boldsymbol{P}$. Pro hodnotu e efektivního počtu žetonů necháme dle 5.14 vypočítat matici hry a zadání pro výpočet simplexovou metodou rovnovážných strategií obou hráčů. Zadání pro prvního hráče uložíme do textového souboru push.txt, pro druhé pak do souboru call.txt. Využijeme služeb softwaru Mathematica a jako výsledek dostáváme vektory

$\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, ..., f_{169})$,
$\boldsymbol{g} = (g_1, g_2, ..., g_{169})$,

přičemž cena hry je $v = (\sum_{i=1}^{169} f_i)^{-1}$, $x_i = f_i v$ a $y_i = g_i v$, pro $i = 1, 2, ..., 169$.

Pro jednoduší interpretaci výsledků budeme složky vektorů s hodnotami menšími $v \cdot 10^{-6}$ nazývat *zanedbatelně malé* a budeme je uvažovat jako nulové. Vzhledem k délce vektorů budeme uvádět jen nezanedbatelné složky. Řešení je vždy ve smíšených strategiích ovšem většina složek vektorů je zanedbatelně malá. Počet nezanedbatelných složek je v námi řešených případech 1 nebo 2.

- e=1

  $\boldsymbol{f} = (6.79912 \cdot 10^{-15}, 6.95063 \cdot 10^{-15}, ..., 7.65459 \cdot 10^{-12}, 0.5)$

  $\sum_{i=1}^{169} f_i = 0.5 \Rightarrow v = 2 \Rightarrow x_{169} \doteq 1$

  Tedy neuděláme velkou chybu, když jako Nashovu rovnovážnou strategii místo smíšené strategie budeme uvažovat čistou strategii s_{169}, která říká, aby první hráč při efektivním počtu žetonů jeden velký vklad hrál all in s libovolnou startovní kombinací.

  $\boldsymbol{g} = (4.05384 \cdot 10^{-12}, 4.08506 \cdot 10^{-12}, ..., 4.73447 \cdot 10^{-10}, 0.5)$

  $v = 2 \Rightarrow y_{169} \doteq 1$

  Stejně tak můžeme uvažovat pro druhého hráče strategii s_{169} jako Nashovu rovnovážnou. A s efektivní počtem žetonů jeden velký vklad dorovnávat s libovolnou startovní kombinací.

- e=5

  $\sum_{i=1}^{169} f_i = 0{,}487127,\ f_{129} = 0{,}487127 \Rightarrow x_{129} \doteq 1$

  První hráč při efektivním počtu žetonů 5 má s prvními 129 nejlepšími startovními kombinacemi hrát all in a s ostatními skládat.

  $g_{107} = 0.487125 \Rightarrow y_{107} \doteq 1$

Druhý hráč má při efektivním počtu 5 žetonů dorovnávat se 107 nejlepšími startovními kombinacemi a ostatní startovní kombinace skládat.

- e=10

  $\sum_{i=1}^{169} f_i = 0{,}513582$, $f_{101} = 0{,}513581$, $g_{66} = 0{,}513581 \Rightarrow x_{101} \doteq 1$, $y_{66} \doteq 1$

  S efektivním počtem žetonů 10 velkých vkladů má první hráč hrát all in se 101 nejlepšími startovními kombinacemi a ostatní skládat. Druhý hráč má s 66 nejlepšími startovními kombinacemi dorovnávat a ostatní startovní kombinace skládat.

- e=15

  $\sum_{i=1}^{169} f_i = 0{,}536125$, $f_{87} = 0{,}38983$, $f_{73} = 0{,}146294 \Rightarrow x_{87} = 0.727126$, $x_{73} = 0.272874$

  Tentokrát i po zanedbání zanedbatelně malých hodnot dostáváme smíšenou strategii, která říká, abychom v pozici prvního hráče s nejlepšími 73 startovními kombinacemi hráli all in vždy a přibližně v 73% takových situací hráli all in i se 74.-87. nejlepší startovní kombinací a ve zbylých 27 % situací tyto kombinace skládali.

  $g_{53} = 0{,}284300$, $g_{49} = 0{,}251822 \Rightarrow y_{53} = 0{,}530287$, $y_{49} = 0{,}469709$

  Rovnováhou pro druhého hráče je s nejlepšími 49 startovními kombinacemi dorovnávat vždy a se startovními kombinacemi na 50.-53. pořadí dorovnávat přibližně v 53% situací a ve zbylých 47% situací skládat.

Nabídneme ještě ucelený návod pro hru. Byl sestaven z výpočtů s krokem 0,1 velkého vkladu pro 0-25 velkých vkladů. V návodu však byly využity jen některé hodnoty, přednostně ty pro které vycházeli čisté rovnovážné strategie (opomeneme-li zanedbatelné složky). Výběr použitých spočítaných hodnot se řídil pravidlem, že v každém intervalu délky 0,5 velkého vkladu musel být použit nějaký výpočet pro dané hodnoty velkého vkladu. Proto nebylo úplně možné se smíšeným strategiím vyhnout (v daném intervalu vycházeli pouze smíšené strategie), ale alespoň jsme je z důvodu použitelnosti návodu zjednodušili. Každá smíšená strategie v našich výpočtech má nezanedbatelné vždy nejvýše dvě hodnoty. V tabulce došlo vždy k zaokrouhlení těchto dvojic pravděpodobností buď to na: 0 a 1 (vzniká čistá strategie), 0,25 a 0,75 nebo 0,5 a 0,5. Je tedy třeba brát přesnost hodnot se značnou rezervou. V případě potřeby si čtenář může vypočítat přesně rovnovážné strategie pomocí přiloženého programu.

Tabulka 5.1: 1.hráč

	A	**K**	**Q**	**J**	**T**	**9**	**8**	**7**	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**
A	25+	25+	25+	25+	25+	25+	25+	25+	25+	25+	25+	25+	25+
K	25+	25+	25+	25+	25+	25+	25+	25+	25+	25+	25+	25+	15
Q	25+	25+	25+	25+	25+	25+	25+	25+	15	15	14, 17	14, 17	11
J	25+	25+	25+	25+	25+	25+	25+	14, 17	14, 17	11	9, 13	9, 13	7, 9
T	25+	25+	25+	25+	25+	25+	15	14, 17	9, 13	7, 9	7,9	5.5, 7.5, 8.5	5.5, 7.5, 8.5
9	25+	25+	25+	15	14, 17	25+	14, 17	9, 13	7,9	5.5, 7.5, 8.5	3.6, 5.5	3.6, 5.5	3.2
8	25+	25+	15	14, 17	11	9, 13	25+	9, 13	7,9	5.5, 7.5, 8.5	3.6, 5.5	2.7	2.5
7	25+	25+	14, 17	9, 13	9, 13	7,9	5.5, 7.5, 8.5	25+	5.5, 7.5, 8.5	3.6, 5.5	3.2	2.5	2.1
6	25+	25+	14, 17	7,9	5.5, 7.5, 8.5	5.5	3.6, 5.5	3.2	25+	3.6, 5.5	2.8	2.2	2
5	25+	15	11	7,9	3.6, 5.5	3.2	2.8	2.6	2.4	25+	3	2.3	2
4	25+	14, 17	9, 13	5.5, 7.5, 8.5	3.6, 5.5	2.6	2.2	2.1	2	2.1	25+	2.2	1.8
3	25+	14, 17	9, 13	5.5, 7.5, 8.5	3.2	2.5	1.9	1.8	1.7	1.8	1.6	25+	1.4
2	25+	14, 17	7,9	3.6, 5.5	3	2.2	1.8	1.6	1.5	1.5	1.4	1.4	25+

Tabulka 5.2: 2.hráč

	A	**K**	**Q**	**J**	**T**	**9**	**8**	**7**	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**
A	25+	25+	25+	25+	25+	25+	25+	25+	25+	25+	25+	21	15, 16, 17
K	25+	25+	25+	25+	25+	25+	21	15, 16, 17	14.5, 15	13	11	10.5, 11	9
Q	25+	25+	25+	25+	25+	15, 16, 17	14.5, 15	11	9.3, 9.6	8.6	8.1	7.2, 7.5, 7.7, 7.9	6.9
J	25+	25+	17, 18, 19, 20	25+	15, 16, 17	11.5, 12, 12.5	10.5, 11	8.1	7.2, 7.5, 7.7, 7.9	6.5	5.9	5.5	5.2
T	25+	25+	15, 16, 17	11.5, 12, 12.5	25+	10.5, 11	8.6	7.2, 7.5, 7.7, 7.9	5.8	5	4.9	4.7	4.5
9	25+	17, 18, 19, 20	11.5, 12, 12.5	9	7.2, 7.5, 7.7, 7.9	25+	7.2, 7.5, 7.7, 7.9	6	5.2	4.7	4	3.9	3.7
8	25+	14.5, 15	9.3, 9.6	7.2, 7.5, 7.7, 7.9	6.2	5.5	25+	5.5	4.9	4.5	3.9	3.5	3.4
7	25+	11.5, 12, 12.5	8.1	6.2	5.2	4.9	4.5	25+	4.7	4	3.7	3.4	3.2
6	17, 18, 19, 20	10.5, 11	7.2, 7.5, 7.7, 7.9	5.2	4.7	4.1	3.9	3.7	25+	3.9	3.6	3.4	3.2
5	17, 18, 19, 20	9.3, 9.6	6.8	5	4	3.7	3.6	3.4	3.4	25+	3.6	3.4	2.7
4	15, 16, 17	8.6	6.2	4.8	3.9	3.4	3.2	3.2	3.2	3.2	15, 16, 17	3.2	2.9
3	14.5, 15	7.2, 7.5, 7.7, 7.9	5.5	4.5	3.7	3.4	2.9	2.9	2.9	2.9	2.9	10.5, 11	2.9
2	11.5, 12, 12.5	7.2, 7.5, 7.7, 7.9	5.2	4.1	3.6	3.2	2.9	2.7	2.7	2.7	2.7	2.5	7.2, 7.5, 7.7, 7.9

Čísla v tabulce udávají maximální efektivní počet žetonů pro prvního hráče, aby hrál all in a pro druhého, aby all in soupeře dorovnal (je-li u čísla uvedeno plus znamená to, že může danou akci zahrát i s větším počtem žetonů). Je-li číslo uvedeno černě, znamená to, že má-li hráč nejvýše daný počet velkých vkladů, měl by hrát all in (dorovnávat) ve všech situacích s danou karetní kombinací. Je-li číslo uvedeno modře pak ve 25% takových situací (ve zbylých situacích skládat), je-li zeleně pak v 50% takových situací (ve zbylých situacích skládat) a konečně je-li červeně pak v 75% takových situací (ve zbylých situacích skládat). Je-li v políčku více čísel různé barvy, řídíme se vždy nejmenším číslem, které je zároveň větší rovno našemu efektivnímu počtu žetonů. Je třeba vědět, že nad pomyslnou diagonálou tabulky (vpravo nahoře) jsou karetní kombinace v jedné barvě a pod diagonálou pak mimo barvu (na diagonále jsou páry), proto tabulka není symetrická. Protože rovnovážné strategie je celý soubor startovní kombinací, používání tabulky může mít význam pouze v případě, je-li používána pro všechny startovní kombinace.

Kapitola 6

Nekooperativní hra N hráčů

V této kapitole se zaměříme na konfliktní situace, kterých se účastní alespoň tři hráči. O všech hráčích předpokládáme opět, že jsou inteligentní, tedy své strategie volí na základě posouzení všech dostupných informací tak, aby maximalizovali svou výhru. Zároveň je v těchto situacích zakázána jakákoliv spolupráce hráčů. Modelem situace je hra v normálním tvaru:

$\Omega = \{H, X_1, ..., X_N; F_1(x_1, ..., x_N), ..., F_N(x_1, ..., x_N)\}$, kde seznam hráčů $H = \{1, 2, ..., N\}$.

Poznámka. Připomeňme si, že strategický profil $\overline{\boldsymbol{x}} \in X_1 \times ... \times X_N$ je *Nashovým rovnovážným bodem v čistých strategiích*, jestliže pro všechna $i \in H$ a pro všechna $x_i \in X_i$ platí

$$F_i(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_N) \geq F_i(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_{i-1}, x_i, \overline{x}_{i+1}, ..., \overline{x}_N).$$

Složka $\overline{x}_i$ se nazývá rovnovážná strategie i-tého hráče. Za předpokladu, že všichni ostatní hráči volí rovnovážné strategie, může i-tý hráč odchýlením se od $\overline{x}_i$ svou výhru jedině snížit. Platí také, že $\overline{\boldsymbol{x}}$ je Nashovým rovnovážným bodem právě, když pro všechna $i = 1, 2, ..., N$ je $\overline{x}_i$ je nejlepší odpovědí na strategický profil protihráčů $(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_{i-1}, \overline{x}_{i+1}, ..., \overline{x}_N)$. Tento fakt si ukážeme na pár jednoduchých příkladech.

Příklad 9 (Modelářská soutěž). Mějme tři kamarády, účastníky modelářské soutěže, označme je A, B, C. Každý z nich si na soutěž vytvářel vlastní model a zároveň spolupracovali na společném modelu, každý z kamarádů vyrobil část tohoto modelu. Ovšem kamarádi se delší dobu neviděli a nemohou spolu ani komunikovat. Každý z nich je schopen na soutěž přinést buď svůj vlastní model a nebo příslušnou část jejich společného modelu. Pokud ovšem jeden z kamarádů svou část nepřinese, bude model nepoužitelný, tedy výplatní funkce hráče, který přinese část společného modelu, bude 0. Pokud donesou na soutěž všechny tři části společného modelu, bude výplatní funkce všech tří kamarádů 2. Rozhodne-li se některý z kamarádů nespoléhat na ostatní a vezme-li si svůj vlastní model, bude jeho výplatní funkce 1. Znázorníme si výplatní funkce v jednotlivých případech a z definice nejlepší odpovědi nalezneme Nashovy rovnovážné body.

A bere společný model	C společný	C vlastní
B společný	(2,2,2)	(0,0,1)
B vlastní	(0,1,0)	(0,1,1)

A bere vlastní model	C společný	C vlastní
B společný	(1,0,0)	(1,0,1)
B vlastní	(1,1,0)	(1,1,1)

Zafixujeme-li si vždy strategie dvou hráčů a budeme hledat nejlepší odpověď zbylého hráče na tyto strategie. Bude-li i-tá strategie z nějakého souboru strategií nejlepší odpovědí i-tého hráče na strategie jeho protihráčů pro $i = 1, 2, 3$, je tento soubor strategií Nashovým rovnovážným bodem. Označme kolečkem výplatní hodnotu pro nejlepší odpověď hráče A na zafixované strategie hráčů B a C, podtržením výplatní hodnotu pro nejlepší odpověď hráče B a čárkou výplatní hodnotu pro nejlepší odpověď hráče C.

A bere společný model	C společný	C vlastní
B společný	$(2, \underline{2}, \overline{2})$	(0,0,1)
B vlastní	(0,1,0)	$(0,\underline{1},\overline{1})$

A bere vlastní model	C společný	C vlastní
B společný	$(1, 0, 0)$	$(1,0,\overline{1})$
B vlastní	$(1,\underline{1},0)$	$(1,\underline{1},\overline{1})$

Dostáváme tedy, že ve hře existují dva Nashovy rovnovážné body. Jeden nastává, vezmou-li všichni kamarádi společný model a druhý pokud všichni kamarádi zradí a vezmou svůj vlastní model.

Příklad 10 (Upřímný sponzor). Předpokládejme, že ve státě existují 3 velcí sponzoři politických stran, označme je 1, 2, 3. První z nich je ochotný dát nějaké politické straně 25 miliónů korun, druhý 35 miliónů a třetí 40 miliónů korun. Ve státě jsou politické strany A, B, C a předpokládá se, že strana, která získá nejvíc sponzorských darů, ve volbách vyhraje. Sponzoři můžou dát dar pouze jedné straně a darování probíhá utajeně, takže ostatní sponzoři neví, které strany již byly sponzorovány. Preference jednotlivých sponzorů jsou následující:

sponzor	první volba	druhá volba	třetí volba
1	A	B	C
2	B	C	A
3	C	B	A

V případě, že zvítězí strana, kterou daný sponzor preferuje jako první, jeho užitek bude 2. Zvítězí-li strana, kterou preferuje jako druhou, bude jeho užitek 1. Ve zbylém případě bude jeho užitek nulový. Všichni sponzoři znají preference ostatních sponzorů a sumu a částky, které jsou ochotní dát jako sponzorské dary. Nabízí se otázka, zda je výhodné pro sponzory dávat dar upřímně straně, kterou preferují nejvíce.

vítěz voleb	výplatní funkce sponzorů
A	(2, 0, 0)
B	(1, 2, 1)
C	(0, 1, 2)

Tedy pro jednotlivé strategie sponzorů dostáváme:

3 sponzoruje A	2 sponzoruje A	2 sponzoruje B	2 sponzoruje C
1 sponzoruje A	(2, 0, 0)	(2, 0, 0)	(2, 0, 0)
1 sponzoruje B	(2, 0, 0)	(1, 2, 1)	(2, 0, 0)
1 sponzoruje C	(2, 0, 0)	(2, 0, 0)	(0, 1, 2)

3 sponzoruje B	2 sponzoruje A	2 sponzoruje B	2 sponzoruje C
1 sponzoruje A	(2, 0, 0)	(1, 2, 1)	(1, 2, 1)
1 sponzoruje B	(1, 2, 1)	(1, 2, 1)	(1, 2, 1)
1 sponzoruje C	(1, 2, 1)	(1, 2, 1)	(0, 1, 2)

3 sponzoruje C	2 sponzoruje A	2 sponzoruje B	2 sponzoruje C
1 sponzoruje A	(2, 0, 0)	(0, 1, 2)	(0, 1, 2)
1 sponzoruje B	(0, 1, 2)	(1, 2, 1)	(0, 1, 2)
1 sponzoruje C	(0, 1, 2)	(0, 1, 2)	(0, 1, 2)

Rovnovážné body najdeme opět z definice (metodou nejlepší odpovědi).

3 sponzoruje A	2 sponzoruje A	2 sponzoruje B	2 sponzoruje C
1 sponzoruje A	$(\underline{2}, \overline{0}, 0)$	$(\underline{2}, \overline{0}, 0)$	$(\underline{2}, \overline{0}, 0)$
1 sponzoruje B	$(\underline{2}, 0, 0)$	$(1, \overline{2}, 1)$	$(\underline{2}, 0, 0)$
1 sponzoruje C	$(\underline{2}, 0, 0)$	$(\underline{2}, 0, 0)$	$(0, \overline{1}, 2)$

3 sponzoruje B	2 sponzoruje A	2 sponzoruje B	2 sponzoruje C
1 sponzoruje A	$(\underline{2}, 0, 0)$	$(\underline{1}, \overline{2}, 1)$	$(\underline{1}, \overline{2}, 1)$
1 sponzoruje B	$(1, \overline{2}, 1)$	$(\underline{1}, \overline{2}, 1)$	$(\underline{1}, \overline{2}, 1)$
1 sponzoruje C	$(1, \overline{2}, 1)$	$(\underline{1}, \overline{2}, 1)$	$(0, 1, 2)$

3 sponzoruje C	2 sponzoruje A	2 sponzoruje B	2 sponzoruje C
1 sponzoruje A	$(\underline{2}, 0, 0)$	$(0, \overline{1}, 2)$	$(\underline{0}, \overline{1}, 2)$
1 sponzoruje B	$(0, 1, 2)$	$(\underline{1}, \overline{2}, 1)$	$(\underline{0}, 1, 2)$
1 sponzoruje C	$(0, \overline{1}, 2)$	$(0, \overline{1}, 2)$	$(\underline{0}, \overline{1}, 2)$

Rovnovážné strategie jsou: (A, A, A), (B, B, B), (A, C, C), (B, B, C), (C, C, C). Tedy upřímná volba všech sponzorů, strategický profil (A, B, C) není rovnovážným bodem. Uvažujeme-li navíc, že sponzoři jako racionální hráči nikdy nebudou volit ostře dominované strategie a stejně tak předpokládají o ostatních sponzorech, že nebudou volit své ostře dominované strategii, počet rovnovážných bodů, které mohou nastat, se redukuje na (A, C, C), (B, B, C) a (B, C, C). Pro prvního hráče strategie A ostře dominuje strategii C. Pro druhého hráče naopak strategie

B ostře dominuje strategii A a pro třetího hráče strategie C ostře dominuje jak strategii A tak strategii B. Tedy třetí hráč bude hrát vždy strategii C. V této situaci pro druhého hráče strategie B ostře dominuje zbylé strategie, tedy druhý hráč bude hrát vždy strategii B. Nejlepší odpovědí prvního hráče je pak strategie B. Touto úvahou dostáváme, že za těchto předpokladů se bude přímo realizovat rovnovážná strategie (B, B, C). Pro prvního hráče je tedy nejvýhodnější nebýt úplně upřímným sponzorem, nýbrž sponzorovat stranu, která je pro něj až druhá nejvýhodnější.

Poznámka. Snad není ani třeba ukazovat, že Nashův rovnovážný bod v čistých strategiích nemusí existovat vždy. Formulujme tedy větu, která při splnění určitých podmínek existenci rovnovážného bodu zaručuje.

Věta 11. *Nechť má hra v normálním tvaru tyto vlastnosti:*
(1) X_i jsou kompaktní konvexní podmnožiny euklidovských prostorů E^{m_i}, $i = 1, 2, ..., N$.
(2) $F_i(\boldsymbol{x}^{(1)}, ..., \boldsymbol{x}^{(i)}, ..., \boldsymbol{x}^{(N)})$ jsou konkávní funkce v proměnných $\boldsymbol{x}^i$ definované na prostorech X_i, a to pro všechna $\boldsymbol{x}^{(1)}, ..., \boldsymbol{x}^{(i-1)}, \boldsymbol{x}^{(i+1)}, ..., \boldsymbol{x}^{(N)} \in X_1 \times ... \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times ... \times X_N$, $i = 1, 2, ..., N$.
(3) Funkce $\sum_{i=1}^{N} F_i(\boldsymbol{x})$ je spojitá v celém svém definičním oboru $X_1 \times X_2 \times ... \times X_N$.
(4) Pro každé $\boldsymbol{x}^{(i)} \in X_i$ jsou funkce $F_i(\boldsymbol{x}^{(1)}, ..., \boldsymbol{x}^{(i)}, ..., \boldsymbol{x}^{(N)})$ spojité vzhledem k $\boldsymbol{x}^{(1)}, ..., \boldsymbol{x}^{(i-1)}, \boldsymbol{x}^{(i+1)}, ..., \boldsymbol{x}^{(N)}$ na množině $X_1 \times ... \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times ... \times X_N$, $i = 1, 2, ..., N$.
Potom má hra v normálním tvaru alespoň jeden Nashův rovnovážný bod.

Poznámka. Předchozí věta má významný důsledek a sice, že smíšené rozšíření každé konečné hry N hráčů má alespoň jeden rovnovážný bod, neboť splňuje všechny předpoklady věty 11.

Poznámka. Metody hledání rovnovážných strategií ve hře více hráčů vycházejí z metod pro vyhledávání extrémů funkcí při vedlejších podmínkách. Neboť je-li $\boldsymbol{x}^*$ rovnovážný bod pak platí:

$$x_i^* = arg \max_{x_i \in X_i} F_i(x_1^*, ..., x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, ..., x_N^*) \text{ pro } i = 1, 2, ..., N.$$

Většina metod pro výpočet rovnovážných strategií je iterativních. Aby byla zaručena jejich konvergence, musí být splněny podmínky obdobné předpokladům věty 11. Kde předpoklad (2) dokonce vyžaduje konkávnost ryzí, aby byla zaručena jednoznačnost Nashova rovnovážného bodu a nemohlo tak dojít k zacyklení iterační metody.

(převzato z Maňas (1991))

Kapitola 7

Závěr

Práce byla motivována nalezením rovnovážných strategií v tzv. push or fold situacích karetní hry poker. Kladla si za cíl vybudovat potřebný matematický aparát pro to, aby dokázala existenci Nashovy rovnováhy v těchto situacích a nabídla nějakou metodu k jejímu nalezení. Jednotlivé pojmy jsou ilustrovány na jednoduchých příkladech, aby čtenáře nenuceně seznámila s potřebnou teorií. Kromě pokeru se ukazuje použití teorie i na jiných příkladech, ovšem hlavním cílem práce bylo nalezení rovnovážných strategií ve zmiňované karetní hře.

Ukázalo se, že hru dvou hráčů v situacích push or fold lze modelovat jako maticovou hru a hru více hráčů pak jako nekooperativní hru N hráčů. Vzhledem k rozsahu problému a větší praktické využitelnosti byla práce především zaměřena na hru dvou hráčů. Neboť ve hře dvou hráčů nám Nashovy rovnovážné strategie mohou při jejich používání garantovat, že náš zisk bude nezáporný. Ve hře více hráčů taková garance neexistuje. Ve hře dvou hráčů je také snazší nabídnout nějaký ucelený návod ke hře. V práci je dokázána věta o existenci Nashových rovnovážných bodů ve smíšených rozšířeních maticových her, a na jeho základě je vysvětlena metoda hledání těchto rovnovážných bodů využívající nějakou metodu na řešení úloh lineárního programování. Zatímco rovnovážné body maticových her lze počítat přesně právě pomocí metod lineárního programování, ve hře více hráčů by bylo třeba použít nějakou numerickou metodu. Jelikož práce nebyla zamýšlena jako studium numerických metod, spokojíme se pouze s konstatováním, že smíšené rovnovážné strategie ve hře více hráče této karetní hry existují. Naopak ve hře dvou hráčů se nám podařilo poskytnout ucelený návod ke hře. I přestože jsme provedli redukci možných strategií a rovnovážné strategie byly tedy počítány ve zjednodušené hře, výsledky mohou nalézt jisté uplatnění především pro méně zkušené hráče.

Možnost, jak dosáhnout přesnějších hodnot, je vyhnout se tomuto zjednodušení a použít některou z numerických metod, pro niž jsou splněny podmínky konvergence. Jedna taková byla použita v programátorském experimentu v roce 2007, inspirovaným knihou Mathematics of poker. Čtenář může porovnat náš návod ke hře s návodem založeným na hodnotách spočítaných v tomto experimentu.

Tabulka 7.1: 1.hráč

	A	**K**	**Q**	**J**	**T**	**9**	**8**	**7**	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**
A	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+
K	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	19.9	19.3
Q	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	16.3	13.5	12.7
J	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	18.6	14.7	13.5	10.6	8.5
T	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	11.9	10.5	7.7	6.5
9	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	14.4	6.9	4.9	3.7
8	20+	18	13	13.3	17.5	20+	20+	20+	20+	18.8	10.1	2.7	2.5
7	20+	16.1	10.3	8.5	9.0	10.8	14.7	20+	20+	20+	13.9	2.5	2.1
6	20+	15.1	9.6	6.5	5.7	5.2	7.0	10.7	20+	20+	16.3	2.3	2.0
5	20+	14.2	8.9	6.0	4.1	3.5	3.0	2.6	2.4	20+	20+	2.4	2.0
4	20+	13.1	7.9	5.4	3.8	2.7	2.3	2.1	2.0	2.1	20+	2.2	1.8
3	20+	12.2	7.5	5.0	3.4	2.5	1.9	1.8	1.7	1.8	1.6	20+	1.7
2	20+	11.6	7.0	4.6	2.9	2.2	1.8	1.6	1.5	1.5	1.4	1.4	20+

Tabulka 7.2: 2.hráč

	A	**K**	**Q**	**J**	**T**	**9**	**8**	**7**	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**
A	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+	20+
K	20+	20+	20+	20+	20+	20+	17.6	15.2	14.3	13.2	12.1	11.4	10.7
Q	20+	20+	20+	20+	20+	16.1	13.0	10.5	9.9	8.9	8.4	7.8	7.2
J	20+	20+	19.5	20+	18.0	13.4	10.6	8.8	7.0	6.9	6.1	5.8	5.6
T	20+	20+	15.3	12.7	20+	11.5	9.3	7.4	6.3	5.2	5.2	4.8	4.5
9	20+	17.1	11.7	9.5	8.4	20+	8.2	7.0	5.8	5.0	4.3	4.1	3.9
8	20+	13.8	9.7	7.6	6.6	6.0	20+	6.5	5.6	4.8	4.1	3.6	3.5
7	20+	12.4	8	6.4	5.5	5.0	4.7	20+	5.4	4.8	4.1	3.6	3.3
6	20+	11	7.3	5.4	4.6	4.2	4.1	4.0	20+	4.9	4.3	3.8	3.3
5	20+	10.2	6.8	5.1	4.0	3.7	3.6	3.6	3.7	20+	4.6	4.0	3.6
4	18.3	9.1	6.2	4.7	3.8	3.3	3.2	3.2	3.3	3.5	20+	3.8	3.4
3	16.6	8.7	5.9	4.5	3.6	3.1	2.9	2.9	2.9	3.1	3.0	20+	3.3
2	15.8	8.1	5.6	4.2	3.5	3.0	2.8	2.6	2.7	2.8	2.7	2.6	15

(přejato z (Holdemresources.net, 2007))

Je třeba zdůraznit, že tento návod je opět zjednodušením vypočtených hodnot, neboť v některých situacích opět vycházeli smíšené strategie. Z toho důvodu se nezávisle vypočtené (a zjednodušené) návody ke hře z pravidla liší. Návod byl vytvořen sérií výpočtů s krokem 0,05 velkého vkladu pro 0 až 20 velkých vkladů. Startovní kombinace nad diagonálou jsou opět v barvě (pod diagonálou mimo barvu). Z rozdílu hodnot pro konkrétní startovní situaci v těchto tabulkách nelze úplně vyvozovat použitelnost námi vytvořeného návodu, neboť každá rovnovážná strategie je soubor startovních kombinací a je třeba ji uvažovat jako celek. Bylo by potřeba provést simulace hry, abychom zjistili nakolik jsme od přesných Nashových rovnovážných bodů vzdáleni a jak velkou ztrátu by to mohlo znamenat.

Ačkoliv stěžejním příkladem práce je hra v klasickém smyslu, z ostatních řešených příkladů je patrné, že teorie her má široké využití i v situacích, které jako hry chápany nejsou. S trochou nadsázky můžeme říci, že teorie her může nalézt uplatnění i při konfliktních situacích, kterým je každý člověk denně vystavován. Doufejme tedy, že text bude sloužit i jako motivace k dalšímu studiu teorie her.

Literatura

Chubukov (2003). Poker evs. URL http://web.archive.org/web/20040612135939/http://decf.berkeley.edu/~chubukov/evs.html.

Dupačová J., L. P. (2011). *Úvod do optimalizace*. První vydání. Matfyzpress, Praha. ISBN 978-80-7378-176-7.

Holdemresources.net (2007). Headsup push/fold nash equilibrium. URL http://www.holdemresources.net/h/poker-theory/hune.html.

Maňas, M. (1991). *Teorie her a její aplikace*. První vydání. Matfyzpress, Praha. ISBN 80-03-00358-X.

Rec.Gambling.Poker (1995). Heads up hold'em percentages. URL http://www.jazbo.com/poker/huholdem.html.