

*Posudek vedoucího na disertační práci*

## **Properties of weakly differentiable functions and mappings**

Autor práce: Luděk Kleprlík

Vedoucí práce: Stanislav Hencel

Tato disertační práce se skládá ze čtyř článků, které již vyšly v solidních zahraničních časopisech. Dva z těchto článků napsal autor sám a dva se spoluautory. Tématem práce a všech čtyřech článků je regularita složeného zobrazení  $u \circ f$ . Tedy za jakých podmínek na homeomorfismus  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  dokážeme usoudit, že složené zobrazení  $u \circ f$  leží v nějakém prostoru slabě diferencovatelných funkcí  $WX(\Omega)$  pro každou funkci z prostoru  $WY(f(\Omega))$ .

V prvním článku je dokázán optimální výsledek pro operátor složení na Sobolevových prostorech, tedy pro  $X = L^p$  a  $Y = L^q$ ,  $1 \leq p \leq q < \infty$ . Výsledky tohoto typu byly studovány ruskými matematiky jako je Ukhlov, Goldstein nebo Vodopyanov, ale jejich články jsou nekorektní a důkazy obsahují mezery. Toto bylo v práci jasně ukázáno, byly přidány dodatečné podmínky, které jsou nutné, a byl podán detailná korektní důkaz tohoto tvrzení. Toto tvrzení má fundamentální význam v teorii Sobolevových prostorů i v aplikacích, a pro jsme se ho rozhodli i s důkazem zařadit do nedávné monografie s Pekkou Koskelou.

Další tři články se zabývají otázkou jaké jsou nutné a postačující podmínky na homeomorfismus  $f$ , aby operátor složení zobrazil  $WX(\Omega)$  do  $WX(\Omega)$ . V posledním čtvrtém článku je dokázáno, že pro  $X$  blízké  $L^q(\Omega)$  musí být homeomorfismus  $f$  nutně  $q$ -kvazikonformní. Tato podmínka je také postačující pro mnoho prostorů funkcí, jako jsou například  $W^{1,q}$ , nebo pro  $q = n$  také  $BMO$  a interpolační Sobolevovy prostory s neceločíselnou derivací mezi  $BMO$  a  $W^{1,n}$ .

V druhém článku je ukázáno, že  $q$ -kvazikonformita je nutná a postačující podmínka pro prostory  $WL^q \log^\alpha L$  pro ( $q \geq n$  a  $\alpha \geq 0$ ) a pro ( $1 < q \leq n$  a  $\alpha \leq 0$ ) zatímco tato podmínka je postačující, ale nikoli nutná pro ostatní hodnoty parametrů. V třetím článku je překvapivě ukázáno, že nutná a postačující podmínka pro prostor  $WL^{n,q}$ ,  $q \neq n$ , je bilipschitzovskost zobrazení  $f$ . Toto je první příklad toho, že  $n$ -kvazikonformita není postačující pro nějaký používaný a užitečný prostor (jako je  $WL^{n,1}$ ) blízko  $W^{1,n}$ .

Tato disertační práce je krásným a uceleným souborem vědeckých prací. Jasně ukazuje, že Luděk Kleprlík je schopen samostatné vědecké práce. Toto dokazuje i fakt, že jeho práce už jsou citovány kolegy z Itálie, Ruska i Finska. Kdykoliv potřebuji vědět něco o regularitě operátoru skládání, tak se obrátím na něj, neboť patří k největším expertům v této oblasti a má všestranný přehled. Velmi rád a s nadšením doporučuji tuto práci k obhajobě.

V Praze dne 17.5.2014

Stanislav Hencel