Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DISERTAČNÍ PRÁCE

Irena Sýkorová

Matematika ve staré Indii

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí disertační práce: doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.
Studijní program: matematika
Studijní obor: 4M8 Obecné otázky matematiky a informatiky

Praha 2014

Poděkování.

Je mou milou povinností poděkovat svému školiteli doc. RNDr. Jindřichu Bečvářovi, CSc. za cenné rady a podnětné připomínky, které přispěly ke zkvalitnění této disertační práce, a zejména za laskavost a nekonečnou trpělivost, s jakou mě vedl v průběhu celého studia.

Ráda bych touto cestou rovněž vyjádřila poděkování všem kolegům z katedry didaktiky matematiky za vstřícnost a přátelské prostředí.

Prohlašuji, že jsem tuto disertační práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 8. dubna 2014 Irena Sýkorová

Název práce: Matematika ve staré Indii

Autor: Irena Sýkorová

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí disertační práce: doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.,
katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Práce je věnována staré indické matematice, popisuje matematické vědomosti, výpočetní postupy a metody řešení různých aritmetických, algebraických a geometrických úloh, které Indové znali a používali. Práce sleduje vývoj indické matematiky od nejstarších poznatků obsažených ve starověkých védských textech až po znalosti uvedené v klasických středověkých aritmetických a algebraických dílech. Jedná se o první ucelený text napsaný v českém jazyce, který obsahuje překlad původních úloh a analýzu jejich řešení v současné matematické formulaci a symbolice. Výchozími zdroji byly zejména anglické překlady starých sanskrtských textů a jejich komentáře.

Klíčová slova: stará indická matematika, aritmetika, algebra, geometrie

Title: Mathematics in Ancient India

Author: Irena Sýkorová

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.,
Department of Mathematics Education

Abstract: The thesis is devoted to ancient Indian mathematics; it describes the mathematical knowledge, computational techniques and methods for solving various arithmetic, algebraic and geometric problems that the Indians knew and used. The thesis follows the development of Indian mathematics from the oldest knowledge contained in ancient Vedic texts to the knowledge originated from the classic medieval arithmetic and algebraic works. This is the first comprehensive text written in Czech which contains the translation of original problems and analysis of their solutions in the current mathematical formulation and symbolism. The sources are mainly English translations of ancient Sanskrit texts and their commentaries.

Keywords: ancient Indian mathematics, arithmetic, algebra, geometry

OBSAH

Při citaci pravidel a příkladů jsou použity níže uvedené zkratky, kde za lomítkem následuje římskými číslicemi číslo kapitoly oddělené tečkou od čísla sloky s daným pravidlem či příkladem (BrSpSi/xii.1).

Pāṭī-gaṇita není členěna do kapitol, pravidla a příklady jsou číslovány zvlášť, proto v souladu s překladem [Shu1] je u příkladu uvedena zkratka Ex.

Jednotlivé listy rukopisu *Bakhshālī* mají kromě čísla ještě označení *recto*, resp. *verso*.

BSS	–	*Śulbasūtra* (Baudhāyana, 8. stol. př. n. l.)
MSS	–	*Śulbasūtra* (Manava, kolem 750 př. n. l.)
ApSS	–	*Śulbasūtra* (Āpastamba, 6. stol. př. n. l.)
KSS	–	*Śulbasūtra* (Kātyāyana, 2. stol. př. n. l.)
Ar	–	*Āryabhaṭīya* (Āryabhaṭa I., 5.–6. stol.)
BrSpSi	–	*Brāhma-sphuta-siddhānta* (Brahmagupta, 7. stol.)
MaBh	–	*Mahā-bhāskarīya* (Bhāskara I., 7. stol.)
BMs	–	*Bakhshālī* (anonymní rukopis, asi 7. nebo 8. stol.)
GaSaSa	–	*Gaṇita-sāra-saṁgraha* (Mahāvīra, 9. stol.)
PaGa	–	*Pāṭī-gaṇita* (Śrīdhara, 9.–10. stol.)
MaSi	–	*Mahāsiddhānta* (Āryabhaṭa II., 10. stol.)
GaTi	–	*Gaṇita-tilaka* (Śrīpati, 11. stol.)
Lila	–	*Līlāvatī* (Bhāskara II., 12. stol.)
BiGa	–	*Bījagaṇita* (Bhāskara II., 12. stol.)
GaKa	–	*Gaṇita-kaumudī* (Nārāyaṇa, 14. stol.)

Většina těchto zkratek se v podobné podobě standardně používá ve světové literatuře.

Poznámka k přepisu sanskrtských termínů. Sanskrtská slova byla vyjádřena podle zásad pro transliteraci z písma *devanāgarī* do češtiny uvedených v [ZS] a [SMK]. Pruh nad samohláskou ji prodlužuje, například *ā* odpovídá našemu *á* atd., samohlásky *e*, *o* jsou vždy dlouhé. Souhlásky *ṣ* a *ś* se čtou jako *š*, u ostatních tečka dole výslovnost nemění, pouze *ḥ* na konci slova zaniká. Souhláska *ñ* se čte jako *ň*, *c* jako *č*, *ch* jako *čch*, *j* jako *dž*, *jh* jako *džh*, *y* odpovídá českému *j*. Slabiky *di*, *ti* se vyslovují tvrdě. Například *Āryabhaṭīya* se vyslovuje jako *Árjabhatýja*, *Bījagaṇita* jako *Bídžaganyta*, *pañca* jako *paňča*, *daśa* jako *daša*. U některých, v češtině častěji používaných, slov je při prvním výskytu uveden v závorce český přepis. Sanskrtské termíny byly přeloženy s pomocí slovníku [MW].

ÚVOD

Hlavním motivem k sepsání této práce byla skutečnost, že neexistuje ucelený česky psaný text věnovaný matematice ve staré Indii. Zmínil se o ní již Josef Úlehla v knize *Dějiny matematiky I* vydané v roce 1901 (viz [Ul]), v sedmdesátých letech dvacátého století pak vyšel překlad knihy Adolfa Pavloviče Juškeviče nazvané *Dějiny matematiky ve středověku*, v níž je indické matematice věnována druhá kapitola (viz [Ju]).

Cílem práce bylo podrobně popsat matematické znalosti, výpočetní postupy a aritmetické, algebraické a geometrické metody, které staří Indové znali a používali od starověku až do doby Nārāyaṇy, tj. do 14. století. Její hlavní přínos tedy spočívá ve vypracování rozsáhlého a uceleného českého textu, který je založen na překladu velkého množství původních úloh a analýze jejich řešení v současné matematické formulaci a symbolice. Některé zajímavé úlohy indické matematiky jsou též porovnány s podobnými úlohami, které byly řešeny ve staré Mezopotámii, Egyptě, Řecku, Číně nebo v islámských zemích.

V první kapitole je stručně přiblížena nejstarší civilizace Indického poloostrova. Na základě studia sekundární literatury (popis a analýza nejdůležitějších archeologických nálezů a výzkumů) je dokázána existence vysoce rozvinuté společnosti, přítomnost matematické vyspělosti a velké geometrické přesnosti užívané při plánování i výstavbě tehdejších měst (např. kolmé sítě ulic). Zdá se pravděpodobné, že starověká civilizace v povodí Indu měla jednotný systém měr a vah založený na desítkovém základu.

Nejstarší indické geometrické znalosti jsou obsaženy v textech zvaných *Śulbasūtry* neboli *Pravidla provazce* (1. tisíciletí př. n. l.), v nichž jsou uvedena nejdůležitější pravidla používaná při stavbě obětních oltářů. Jejich překlad, analýza a matematický komentář jsou náplní druhé kapitoly.

Ve třetí kapitole jsou shrnuty matematické poznatky z doby kolem počátku našeho letopočtu. Výrazným impulzem rozvoje tehdejší matematiky byla džinistická kosmologie, která používala při výpočtech velká čísla a motivovala tak matematiky k zajímavým úvahám o nekonečnu. Poznamenejme, že v této době se rozvíjela také kombinatorika, např. prozodik Piṅgala (kolem roku 200 př. n. l.) popsal schéma binomických koeficientů, které dnes známe jako Pascalův trojúhelník.

Za klasickou éru indické středověké matematiky bývá předními znalci historie matematiky považováno období počínající dílem Āryabhaṭy I., tj. od 5. až 6. stol. n. l., a končící prací Nārāyaṇy, tj. 14. stoletím. Vzhledem k tomu, že se jedná o poměrně dlouhé období, v němž působilo mnoho indických vědců a myslitelů a v němž vznikla řada textů, je ve čtvrté kapitole uveden komentovaný chronologický přehled nejvýznamnějších učenců a jejich nejdůležitejších děl.

Pátá kapitola analyzuje vývoj vyjadřování čísel a jejich zápisů a přibližuje nejdůležitější proměny matematické terminologie. Protože zápis čísel v desítkové poziční soustavě má své kořeny v Indii, je této problematice věnována poměrně velká pozornost.

Se způsobem zápisu čísel velmi úzce souvisí provádění základních aritmetických operací – sčítání, odčítání, násobení a dělení. Staří Indové mezi ně řadili také výpočet druhé a třetí mocniny, druhé a třetí odmocniny a některé algoritmy, které dnes považujeme spíše za algebraické (např. pravidlo tří, tj. trojčlenka, metoda falešného předpokladu, směšovací počet, úrokový počet). Podstatnou součástí indické aritmetiky bylo též počítání se zlomky. Podrobný komentovaný popis a výklad indických algoritmů základních aritmetických operací a metod je obsahem šesté kapitoly.

Sedmá kapitola se zabývá středověkou indickou algebrou, v níž indičtí matematici patrně dosáhli největších úspěchů, tj. pojednává o období od 6. do 14. století. Již tehdy indická algebra zahrnovala operace se zápornými čísly a velmi obratné počítání s iracionalitami. Jejím hlavním tématem však bylo řešení slovních úloh, které dnes reprezentujeme rovnicí s jednou neznámou nebo rovnicemi s více neznámými. Indičtí učenci formulovali pravidla pro řešení lineárních a kvadratických rovnic a jejich soustav, zabývali se rovněž některými rovnicemi vyšších stupňů a zejména neurčitými rovnicemi. Pozoruhodná je jejich metoda *kuṭṭaka*, kterou užívali k řešení neurčité lineární rovnice se dvěma neznámými (tj. tzv. diofantická rovnice) a algoritmus pro řešení tzv. Pellovy rovnice. Poznamenejme, že indičtí matematici neměli k dispozici dnešní názornou a propracovanou symboliku; neznámé, resp. operace označovali zkratkami slov, strany „rovnic“ zapisovali pod sebou, algoritmy popisovali slovně a předváděli je na konkrétních příkladech.

Osmá kapitola pojednává o středověké indické geometrii. Obsahuje výklad tradičních i netradičních metod výpočtů obsahů základních rovinných útvarů a objemů těles. Připojeny jsou také četné zajímavé úlohy, jejichž vzorové řešení je komentováno a doplněno přehlednými a názornými obrázky.

Staří Indové se věnovali také astronomii, konali četná astronomická pozorování a měření, která přispěla k rozvoji rovinné a sférické trigonometrie. Dnes je všeobecné známo, že indické astronomické texty z počátku našeho letopočtu obsahují rozsáhlé tabulky hodnot sinů (s krokem $3^\circ 45'$). Trigonometrii však indičtí učenci považovali jen za speciální astronomickou aplikaci geometrie a pozdější samostatné matematické texty ji již neobsahovaly. Proto nebyla do této práce zařazena.

Primárními prameny při zpracování této práce byly překlady sanskrtských textů, vybrány byly zejména z knihy H. T. Colebrooka *Algebra, with Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhascara* (viz [Col]),[1] práce *Ganita-sara-sangraha of Mahaviracarya with English Translation and*

[1] Jedná se o překlad komentovaných matematických kapitol (12. a 18.) astronomické práce *Brāhma-sphuta-siddhānta* (Brahmagupta, 7. stol.) a dvou textů Bhāskary II. (12. stol.) – aritmetického *Līlāvatī* a algebraického *Bījagaṇita*.

Notes, jejímž autorem je M. Rangacarya (viz [Ran]),[2] díla W. E. Clarka *The Āryabhaṭīya of Āryabhaṭa* (viz [Cla]).[3] Jako další zdroje byly použity práce K. S. Shukla: *The Pāṭīgaṇita of Śrīdharācarya* (viz [Shu1]),[4] P. Dvivedi: *The Gaṇita-kaumudī by Nārāyaṇa Paṇḍita (Part II)* (viz [DvP]),[5] H. R. Kāpadīā: *Gaṇita Tilaka by Śrīpati* (viz [KaHR]),[6] a články A. Bürka *Das Āpastamba-Śulba-Sūtra* (viz [BuA1] a [BuA2]).[7]

Podrobný a inspirativní přehled vývoje indické matematiky je uveden v dvoudílné monografii B. Datty a A. N. Singha *History of Hindu Mathematics (part I and part II)* (viz [DS1] a [DS2]), z novějších publikací je vhodné připomenout knihu *Mathematics in India* od K. Plofker (viz [Pl1]). Historií indické geometrie se zabývají například T. A. Sarasvati Amma v knize *Geometry in Ancient and Medieval India* (viz [SA]) a B. Datta, jenž je autorem práce *Ancient Hindu Geometry: The Science of the Sulba* (viz [Dat]).

---

[2] Sanskrtský text matematika Mahāvīry (9. stol.) s anglickým překladem a opatřený komentáři.

[3] Komentovaný překlad astronomické práce Āryabhaṭy I. (přelom 5. a 6. stol.).

[4] Sanskrtský text Śrīdhary (přelom 9. a 10. stol.) s anglickým překladem.

[5] Sanskrtský text Nārāyaṇy (14. stol.) s anglickým překladem.

[6] Sanskrtský text Śrīpatiho (11. stol.) s anglickým překladem.

[7] Německý překlad Āpastambovy *Śulbasūtry* s podrobným výkladem.

1. CIVILIZACE ÚDOLÍ INDU

1.1. Objevení staré civilizace údolí Indu

V polovině 3. tisíciletí před naším letopočtem (podle některých badatelů i dříve) vznikla v povodí řeky Indu[1] osobitá vyspělá kultura. Podle zeměpisné polohy bývá nazývána *civilizace údolí Indu.*[2] Příslušníci této civilizace byli pravděpodobně Drávidové, přímí předchůdci a předkové dnešních obyvatel jižní Indie. Území, které obývali, bylo značně rozsáhlé; od *Lothalu* na jihu na Káthijávárském poloostrově přes *Sutkágen Dor*, bývalý přístav u Arabského moře, až na sever k městu *Rúpar* na řece Satladži. Přesnější vymezení doby, v níž tato civilizace rozkvétala, je stále předmětem vědeckých bádání a diskusí. Vše nasvědčuje tomu, že její existence spadá přibližně do let 2500 až 1500 př. n. l.[3] Nezachovaly se žádné písemné památky, veškeré informace pocházejí z archeologických vykopávek.

Ve 2. polovině 19. století byly na území dnešní severozápadní Indie a Pákistánu budovány železnice. K výstavbě bylo třeba mít dostatek kamenů na zpevnění náspů. Kamení je však v této oblasti poměrně vzácné, a tak stavitelé používali i staré vypálené cihly, které zde, v okolí řeky Indu, nalézali.

V roce 1873 se k britskému archeologovi siru Alexandru Cunninghamovi[4] dostala malá destička nalezená v této oblasti, na níž byl reliéf a znaky připomínající neznámé písmo. Původ destičky mu zůstal neznámý (viz [Zb1]). Rozsáhlejší archeologický výzkum začal až ve 20. století. Od roku 1921 zde pracoval britský archeologický tým pod vedením sira Johna Marshalla[5] a objevil zbytky velkého města postaveného z pálených cihel.

Nedaleko od místa, kde archeologové pracovali, stála na pahorku poblíž řeky Indu stará buddhistická *stúpa*, kopulovitá stavba s ostatky buddhistických světců. Místní obyvatelé nazývali tento pahorek *Móhan džó daró* (Návrší mrtvých). Možná proto, že poblíž nalézali pozůstatky prastarých koster. Objevené město bylo podle místa nálezu pojmenováno *Mohendžo-daro.* Další objevy ukázaly, že se nejednalo o jediné samostatné město, postupně byly odkryty pozůstatky dalších měst a osad. Archeologické nálezy i z menších osad vykazují společné rysy – budovy z pálených cihel, keramiku, nástroje a nářadí.

---

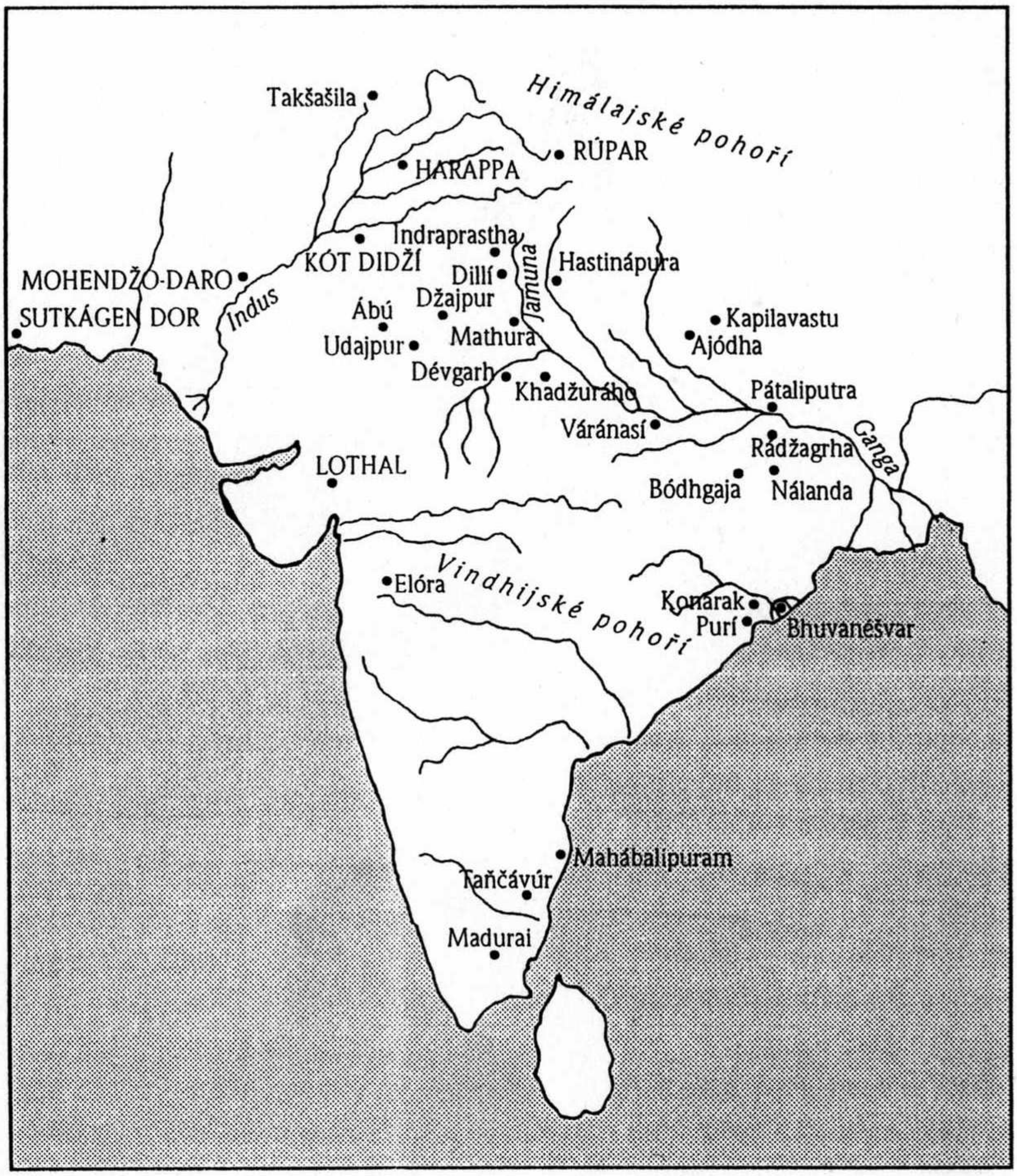
[1] V Balúčistánu na severozápadě Indického poloostrova, na území dnešního Pákistánu a Indie.

[2] D. Zbavitel užívá název *civilizace poříčí Indu*, viz [Zb1], [Zb2], J. Vacek dává přednost označení *protoindická civilizace.* Někdy bývá tato civilizace nazývána *harappská kultura*, viz [Whe].

[3] Provedené radiokarbonové zkoušky ukazují na 22. až 18. stol. př. n. l., viz [Zb1].

[4] Sir Alexander Cunningham (1814–1893) byl britský archeolog, účastník archeologických výzkumů na území Indického poloostrova, zakladatel *Archaeological Survey of India.*

[5] Sir John Hubert Marshall (1876–1958) byl členem *Archaeological Survey of India* a vedoucím badatelem archeologických vykopávek.



Obr. 1.1 Mapka Indie s vyznačenými starověkými městy,
převzato z [Zb2].

Informace o podobě civilizace údolí Indu pocházejí zejména z vykopávek dvou největších měst, Mohendžo-dara rozkládajícího se v pákistánské provincii Sindh a *Harappy* ležícího od něj severovýchodně v provincii Paňdžáb (Pětiříčí). Obě města měřila po obvodu přes pět kilometrů a byla vystavěna podle pokročilých urbanistických zásad (viz [Whe]). Na obrázku 1.2 je pohled na vykopávky s buddhistickou *stúpou* v pozadí.

Obr. 1.2 Stúpa v Mohendžo-daru, převzato z [Ken].

1.2. Mohendžo-daro

Mohendžo-daro leželo na břehu řeky Indu v pákistánské provincii Sindh. Zaujímalo plochu asi 2,5 km^2, počet obyvatel v době rozkvětu se odhaduje na 30 tisíc (viz [Zb1]). Nad městem na západní straně se vypínal uměle navršený téměř 16 metrů vysoký pahorek dlouhý přes 400 metrů a široký téměř 200 metrů, na kterém stávala citadela. Pahorek byl opevněn zdí z pálených cihel. Jádro citadely tvořila velká lázeň, bazén velikosti asi 12 krát 7 metrů, hluboký dva a půl metru. Byl pečlivě vydlážděn cihlami spojenými živicí, aby voda neprosakovala. Měl vybudovaný přívod vody i odtokové zařízení, nechyběly ani široké schody k sestupu do vody (viz [Whe], [Zb1]). Bazén se vstupním schodištěm je na obrázku 1.3.

Vedle lázně stála na cihlové podezdívce velká dřevěná sýpka postavená nad pravoúhlou sítí větracích průduchů, uvnitř rozčleněná na menší komory. Po jedné její straně se táhla nakládací rampa, do níž byl vyhlouben hranatý výklenek, kam mohly zajíždět vozy přivážející obilí z okolních vesnic. Poblíž sýpky se nacházely plošiny k drcení obilí. Pevná a vysoká sýpka kromě své původní funkce sloužila i jako součást obranného systému citadely. Další velkou budovou byla jakási hala dlouhá 70 a široká 24 metrů. Účel, kterému sloužila, není znám. Mohla být sídlem nějakého vysokého hodnostáře či velekněze, někdy bývá považována za kněžskou kolej. Dále byly na pahorku objeveny dvě sloupové síně, několik komůrek a koupelen určených snad k rituálním účelům. Na základě dosavadních nálezů se usuzuje, že citadela byla současně náboženským a mocenským střediskem města rozkládajícího se pod ní (viz [Zb1], [Whe]).

Ulice města místy široké až 10 metrů vedoucí od severu k jihu se křížily kolmo s jinými a vytvářely domovní bloky o velikosti asi 365 krát 183 metry. Tyto bloky byly rozděleny užšími uličkami vedoucími rovnoběžně s hlavními.

Obr. 1.3 Lázeň na pahorku v Mohendžo-daru, převzato z [Ken].

Domy byly postaveny důkladně, kolem dvora se rozkládalo několik místností a pevné schodiště vedoucí do prvního patra nebo na plochou střechu. Dvůr sloužil k přípravě jídel, byl tam umístěn krb, stávaly tam i nádoby k uskladnění zrní či oleje. Do dvora směřovala všechna okna a dveře jednotlivých místností. Do ulice vedly jen úzké otvory v horních částech zdí, které sloužily k větrání. To svědčí o smyslu pro soukromí a bezpečnost. Téměř všechny domy měly koupelnu, někdy i samostatnou studnu. Na obrázku 1.4 je studna postavená z cihel ve tvaru klínu. Některé cihly měly speciální drážky, aby lépe držely lano při čerpání vody.

Obr. 1.4 Studna v Mohendžo-daru, převzato z [Ken].

Některé domy byly vybaveny záchodem, který se podobal záchodům objeveným v Mezopotámii (např. v akkadském paláci v Tell Asmaru). Domy měly promyšlený systém odtoku odpadu do centrálních kanálů, které byly vyhloubeny pod hlavními ulicemi a vedly k řece. Byly asi půl metru hluboké, pečlivě zakryté vápencovými deskami nebo cihlami, měly otvory pro pravidelné čištění a údržbu. Jsou charakteristickým rysem této civilizace a svými úhledně upravenými kontrolními otvory patří k nejlépe propracovaným systémům svého druhu ve starověké Asii. Dokazují vysokou životní úroveň i snahu udržovat čistotu a pořádek. Na obrázku 1.5 je ulice s kanálem zakrytým vápencovými bloky, v popředí je cihlová plošina s vyhloubenými otvory, v nichž snad stály trámy nesoucí jakousi bránu (viz [Ken]).

Obr. 1.5 Kanál v Mohendžo-daru, převzato z [Ken].

Podél hlavních ulic jsou dobře rozeznatelné obchody, jeden má v podlaze kuželovité jamky, do kterých se vkládaly velké nádoby. Kromě soukromých studen uvnitř domů existovaly ještě studny veřejné. Byly objeveny i veřejné lázně, zachovaly se některé toaletní předměty. Na obrázku 1.6 je koupelna s podlahou vydlážděnou cihlami a odtokovým kanálkem.

Obr. 1.6 Koupelna v Mohendžo-daru, převzato z [Ken].

Všechny stavby byly vybudovány z pálených cihel, nepálené cihly se užívaly jen k vnitřním výplním. Většinu cihlového zdiva původně pokrývala omítka z hlíny. Vybavení domů bylo prosté, žádná vnitřní malba ani výzdoba nebyla zjištěna. Město bylo zřejmě dost často postiženo záplavami, protože úroveň přízemí se postupně zvyšovala (viz [Whe], [Zb1]).

1.3. Harappa a další města

Harappa ležela na břehu řeky Ráví asi 640 km severovýchodně od Mohendžodara. Také nad ní bylo návrší s citadelou obehnané hradbou z nepálených cihel. Mezi opevněným pahorkem a řekou byla 274 metrů široká plošina. Na ní stály bloky domků a vedle nich řady kruhových cihlových podlážek, na kterých se pravděpodobně tlouklo zrní na mouku. Jedna z nich je na obrázku 1.7.

Kromě obytných domů stálo na plošině dvanáct větraných sýpek seřazených do dvou řad. Celková plocha sýpek měřila více než 836 m^2. Z umístění sýpek přímo pod citadelou se dá soudit, že existovala přísná kontrola městských zásob potravin. Na jih od citadely bylo odkryto pohřebiště pro řadové příslušníky společnosti. Leželo v něm asi 60 koster hlavou k severu a u každé se našlo několik nádob charakteristických pro kulturu údolí Indu.

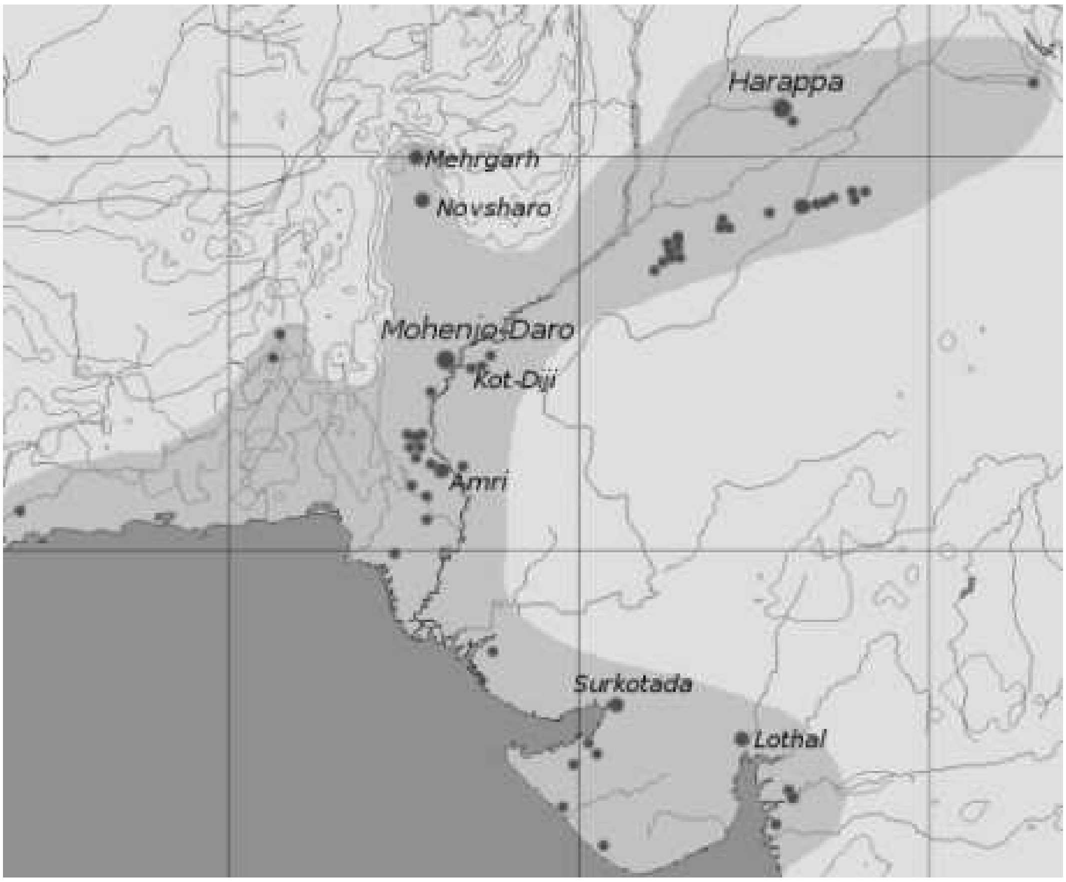
Obr. 1.7 Rekonstrukce kruhové plošiny z Harappy, převzato z [KM].

Asi 160 km na jihovýchod od Harappy bylo v roce 1965 objeveno indickými archeology sídliště *Kálíbangan*. Rozkládalo se nad údolím řeky Ghághry, dříve zvané Sarasvatí. Viditelné stopy po osídlení tu nesou dva pahorky. Na vyšším, západním, byla odkryta plošina z nepálených cihel, která byla sevřená hradbou, zpevněnou pravoúhlými baštami. Na jižní straně byl umístěn vchod. Na zbytcích zdiva je patrné, že nerovný povrch vnější strany z nepálených cihel byl vyrovnán hliněnou omítkou. Hradba patrně sloužila obranným účelům. Na nižším, východním pahorku stávalo město s mřížkovitou sítí ulic orientovanou přibližně k hlavním světovým stranám. Domy byly napojeny na kanály z pálených cihel. Jihozápadně od obou pahorků bylo objeveno pohřebiště s hroby, do nichž byli zemřelí ukládáni, stejně jako v Harappě, hlavou k severu (viz [Whe]).

Jiné podobné město menších rozměrů bylo odkryto v *Čanhu-daru*, asi 125 km jižně od Mohendžo-dara. Zřejmě postrádá citadelu, ale jinak se řadí k témuž typu městských sídlišť. Další malé město bylo objeveno v *Lothalu* na Káthijávárském poloostrově, asi 720 km na jihovýchod od Mohendžo-dara. Pro stavbu domů byly užívány i nepálené cihly, zatímco lázně, kanály a studně byly vybudovány z cihel pálených. Zachovaly se základy stavby, o níž se předpokládá, že mohla být sýpkou podobnou sýpce v Mohendžo-daru. Nacházel se zde komplex budov, který mohl být cihelnou, a pozoruhodná zděná ohrada asi 200 m dlouhá a 36 m široká obložená pálenými cihlami. Jednalo se nejspíš o dok, který byl propojen uměle vyhloubeným plavebním kanálem s mořem. Toto město tedy zřejmě bylo výchozím místem pro plavby do Perského zálivu (viz [Whe], [Zb1]).

Dalším objeveným starověkým městem je *Rúpar* na řece Satladži ještě dál na východ od Harappy. Asi 40 km východně od Mohendžo-dara leželo městečko *Kót Didží* s opevněnou citadelou, v *Amri* asi 150 km jižně od Mohendžo-dara byly pod vrstvami harappské civilizace odkryty vrstvy ještě starší vesnické kultury (viz [Zb1]). Na pobřeží Arabského moře, v dnešním Pákistánu, asi 480 km na západ od Káráčí, byl *Sutkágen Dor*. Stála zde obdélníková citadela obehnaná kamennou hradbou. Toto pobřežní sídliště pravděpodobně také pomáhalo zajišťovat hladký průběh námořního obchodu a střežilo přístup do vnitrozemí. Nyní je vzdáleno od moře asi 50 km, protože linie pobřeží se posunula.

Vzdálenosti mezi objevenými městy ukazují, na jak rozlehlém území se civilizace údolí Indu vyskytovala. Rozšířila se podle toku řeky Indu v délce přes 1400 km, od *Sutkágen Doru* na západě poblíž dnešní pákistánsko-íránské hranice až k severovýchodnímu *Rúparu*, táhla se podél indického pobřeží na jih až ke Khambátskému zálivu (viz [Whe]). Celkové území civilizace údolí Indu (viz obr. 1.8) bylo mnohem rozsáhlejší než rozloha oblastí, které obývala jak civilizace staroegyptská, tak mezopotámská.



Obr. 1.8 Mapa oblasti, kde se nacházela civilizace údolí Indu, převzato z [HI].

Nevíme nic o tom, zda byla celá tato oblast jedinou říší nebo volným sdružením několika celků. Nenašel se žádný palác výrazně odlišný od jiných budov, který by reprezentoval ústřední moc. Patrně se jednalo o vládu nejzámožnější vrstvy nebo kněžstva. K poslední možnosti se kloní mnoho badatelů, protože v pozdější védské společnosti zaujímali výjimečné místo právě kněží – *bráhmani* (viz [Zb2]). Podle M. Wheelera se mohlo jednat i o kombinaci královské a kněžské moci (viz [Whe]).

1.4. Život

Kultura v údolí Indu se rozvinula díky příznivým přírodním podmínkám – pravidelné deště, snadno obdělávatelné říční nánosy, menší zalesnění. Ostatně teplé podnebí, pravidelné záplavy, úrodná půda byly dobrými předpoklady rovněž pro život ve starověkém Egyptě a Mezopotámii, kde vznikly první vyspělé „poříční" civilizace.

Na indickém poloostrově vznikla rozsáhlejší a trvanlivější městská výstavba díky znalosti pálení cihel. Je pravděpodobné, že cihlové zdivo bylo doplněno dřevem, to se však nezachovalo. Na základě archeologických vykopávek byly rekonstruovány plány měst, které svědčí o promyšlené organizaci. Pevná administrativa zajišťovala chod města a dbala na pořádek a čistotu. Život ve městech byl pohodlný a fungující, proto zde lidé žili prakticky beze změny dlouhá staletí (viz [Zb1]).

Příslušníci civilizace údolí Indu se živili hlavně obděláváním půdy, pěstovali hrách, pšenici, šestiřadý ječmen, luštěniny a sezam na výrobu oleje. Zemědělské produkty dováželi do městských sýpek na dvoukolých kárkách tažených býky nebo buvoly. Dřevěná kola vozíků byla po obvodu pobita kovovým páskem. Pěstovali bavlnu, kterou zpracovávali – tkali bavlněné látky, ty pak zdobili různými barvami.

Chovali dobytek, zejména krátkorohý skot, zebu, buvoly. Jako domácí zvířata měli psy a kočky. Jezdili na velbloudech, koních a oslech, možná i slonech (viz [Whe]). Na obrázku 1.9 je soška psa nalezená v Harappě. Obojek kolem krku naznačuje domestikaci.

Obr. 1.9 Soška psa z Harappy, převzato z [KM].

Kromě zemědělství se obyvatelé měst věnovali i řemeslům. Znali bronz a měď, používali dobře opracované kamenné nástroje. Tvary nástrojů však byly poměrně jednoduché, například sekera se k topůrku přivazovala. V té době obyvatelé Mezopotámie už znali dokonalejší uchycení topůrka do otvoru (viz [Zb1]). Zbraní bylo nalezeno poměrně málo. Zřejmě se jednalo víc o zbraně lovecké než válečné. Jsou to jen hroty šípů, oštěpů, dýky, sekyry a nože.

Oblíbeným řemeslem bylo hrnčířství, hliněné nádoby byly většinou točeny na hrnčířském kruhu. Výzdoba byla provedena nejčastěji černou barvou a obsahovala různě silné linky, soustředné kružnice, šachovnicový vzor, listy fíkovníku, zvířata. Lidské postavy se vyskytovaly zřídka. Byly nalezeny různě velké mísy, malé nádobky zdobené výčnělky, válcovité dírkované cedníky, poháry krémové barvy se špičatou nožkou. Některé mají na sobě vyražené znaky, pravděpodobně „jméno“ hrnčíře. Ukázka keramiky je na obrázku 1.10.

Obr. 1.10 Keramický talíř a hrnec nalezené v Harappě,
převzato z [Whe], [KM].

Během archeologických výzkumů[6] bylo nalezeno mnoho hliněných figurek, například hrubě zpracované ženské postavy, které jsou považovány za sošky bohyně Matky. Různé malé sošky většinou představovaly lidské nebo božské bytosti. Mají velký obličej a oči vyložené mušlemi. Některé terakotové sošky jsou na obrázku 1.11.

Obr. 1.11 Terakotové sošky ženy a mužů nalezené v Harappě,
převzato z [KM], [HaJ].

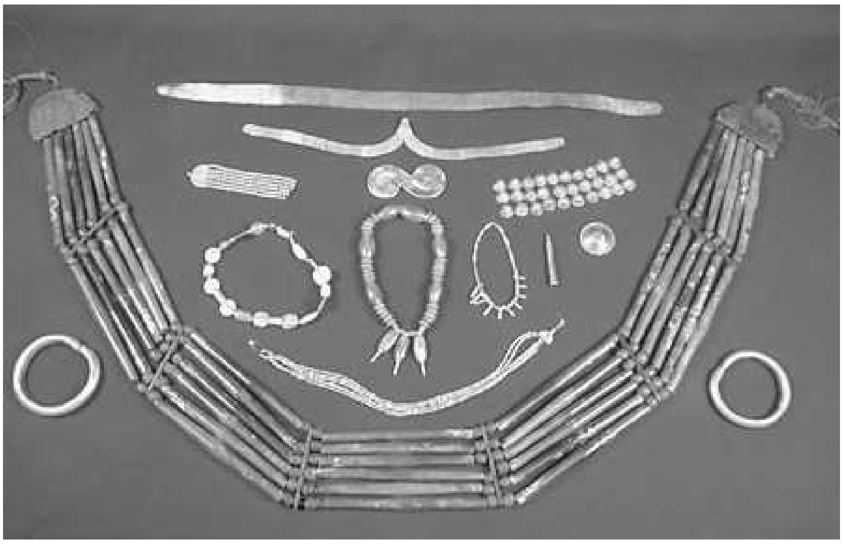
Byly objeveny i dětské hračky – hliněné figurky zvířat s kývacími hlavičkami, vozíčky s velkými koly, píšťalky. Zachovalo se několik menších bronzových plastik, například figurka buvola či známá soška vyzývavé tanečnice, která má na sobě jen několik náramků. Na obrázku 1.12 je bronzová soška vyzývavé ta-

6 Práce archeologů doplněná bohatou fotogalerií je popsána např. v [KM], [Ken], [Whe].

nečnice a steatitová busta muže,[7] nalezené v Harappě, dnes uložené v muzeu v Lahore a Národním muzeu v Karáčí.

Obr. 1.12 Bronzová soška tanečnice a steatitová soška kněze, převzato z [HaJ] a [KM].

Příslušníci civilizace údolí Indu se zřejmě rádi zdobili, bylo nalezeno mnoho šperků, které se podobají šperkům vykopaným ve městě Ur v Mezopotámii. Jsou ze zlata, stříbra, mědi, zdobené polodrahokamy a slonovinou. Náušnice, prsteny, náhrdelníky a spony byly určené pro ženy i pro muže. V *Čanhu-daru* byla dokonce objevena dílna na výrobu karneolových perel s perlami v různých fázích opracování (viz [Zb2]). Některé šperky nalezené v *Mohendžo-daru* jsou na obrázku 1.13.



Obr. 1.13 Šperky z Mohendžo-dara, převzato z [KM].

[7] Steatit je měkký minerál světlé barvy, druh mastku – $Mg_3Si_4O_{10}(OH)_2$.

Vedle zemědělství se rozvíjel i obchod. Zboží se dopravovalo karavanními stezkami po souši, loďmi po splavných řekách i podél mořského pobřeží. Nenašly se však žádné mince, které by dokazovaly existenci peněžního hospodářství. Obchodní kontakty s Mezopotámií potvrzují i harappská pečetidla nalezená v mezopotámském Uru a Tell Asmaru. V sumerských a akkadských dokumentech je zmiňován Dilmun.[8] Lodě z Dilmunu a Meluchchy prý přivážely kolem roku 2450 př. n. l. do sumerského Lagaše dřevo, zlato, stříbro, korálky a snad i perly. Nejživější obchodní kontakty s Mezopotámií existovaly v době Sargona Akkadského, jenž vládl asi v době od roku 2334 do roku 2279 př. n. l. (viz [BBV]). Námořní plavby kupců z Mohendžo-dara a Harappy jsou prokázány archeologickými vykopávkami v *Lothalu.*

Obyvatelé měst v údolí Indu používali pečetidla zhotovená ze steatitu.[9] Většinou byla čtvercová o stranách dlouhých od 2 do 4 cm. Byla opatřena držátkem, které bývalo provrtáno, aby se pečetidlo dalo zavěsit (viz obr. 1.14). Někdy se užívala pečetidla kruhová, je známo několik pečetidel válcových připomínajících mezopotámské pečetní válečky.

Obr. 1.14 Zadní strana pečetidla, převzato z [KM].

Obrázky byly v pečetidlech vyryty, takže v otisku na pečetích vystupovaly jako reliéfy (viz obr. 1.15). Pečetidla byla užívána na hliněné pečetě přivěšované na žoky či jiné zboží. Nápisy tedy měly pravděpodobně praktický význam, jejich úkolem bylo označit vlastníka zboží. Nejspíš se jednalo o jméno majitele a snad nějaké další doprovodné informace (viz [Zb2]).

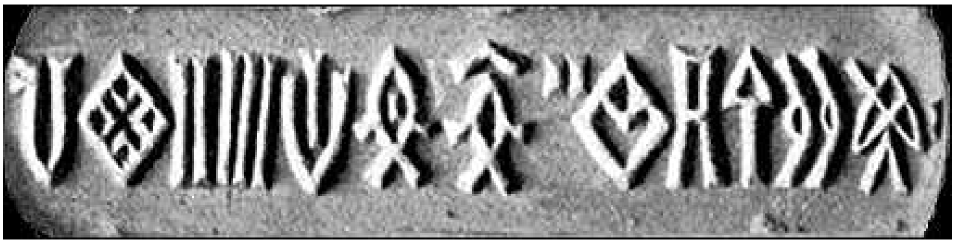
Obr. 1.15 Vzory pečetí, převzato z [KM], [HaJ].

[8] Někdy nazývaný Telmun. Poloha města Dilmunu nebyla dosud zjištěna, někteří badatelé, např. S. N. Kramer (1897–1990), je umísťují právě do údolí Indu. Podle jiných, např. A. L. Oppenheima (1904–1974), byl Dilmun ztotožňován s Bahrajnskými ostrovy a sloužil jako překládací stanice pro zboží z Meluchchy – dnešní Indie, viz [Whe].

[9] Jen v Mohendžo-daru jich bylo nalezeno přes 1200.

Pečetidla z údolí Indu měla svůj zvláštní charakter. Byly na nich vyryty ozdobné obrazce, často zvířata – nosorožec, slon, tygr, krokodýl, antilopa, zebu, býk a nejčastěji jednorožec, tj. zvíře podobné volu, ale jen s jedním rohem. Někdy se vyskytovaly i lidské podoby. Zajímavý je nepoměr mezi propracovaným vyobrazením zvířat a nízkou úrovní lidských postav. Většina pečetidel obsahovala krátké nápisy v obrázkovém písmu, které se liší od egyptského i mezopotámského a které nebylo dosud rozluštěno.

Na obrázku 1.16 je jeden z delších nápisů na pečeti nalezené při vykopávkách v Mohendžo-daru v období 1927–1931. Podobně dlouhý nápis byl nalezen na vývěsním štítu v Dholavíře (viz [KM]).



Obr. 1.16 Jeden z delších nápisů na pečeti, převzato z [KM].

Pečetě ve tvaru válečku se používaly i v Mezopotámii. Byly vyrobené z kamene nebo keramiky. Nejstarší válečky obsahovaly obrázek, někdy i text, který se otiskl valením po hliněné tabulce.

Bylo provedeno mnoho neúspěšných pokusů o dešifrování nápisů na pečetích. Nápisy jsou však příliš krátké a pravděpodobně obsahují hlavně jméno vlastníka, případně nějakou další krátkou informaci, například název města, odkud pocházel. Práci badatelům ztěžuje i fakt, že není vyjasněn původ jazyka, v němž jsou nápisy provedeny, dokonce ani přiřazení k některé z jazykových skupin. Rozluštit nápisy se kromě dalších pokoušel indický archeolog Dr. S. R. Rao (1922–2013).[10] Podle něj se písmo psalo zleva doprava a základy byly převzaty ze semitských liter.[11] Jazyk pokládal za ryze indoevropský, za předchůdce jazyka védských hymnů. Španělský badatel H. Heras (1888–1955) vycházel z hypotézy, že nositeli kultury byli Drávidové[12] a pokoušel se nápisy číst jako nějaký drávidský jazyk (viz [Zb1]).[13]

O počítačovou analýzu se jako první v roce 1964 pokusil tým ruských vědců vedený Jurijem Knorozovem (1922–1999). Analýza prokázala, že některé z protoindických znaků jsou pravděpodobně piktogramy, k jejich vyluštění však nevedla (viz [Fi]). V roce 2004 američtí vědci uveřejnili studii, podle níž znaky nalezené na pečetích nejsou žádným druhem písma, ale jedná se o symboly

[10] Ve čtyřicátých letech dvacátého století se pokoušel o rozluštění i český orientalista Bedřich Hrozný (1879–1952).

[11] Semitské jazyky tvoří samostatnou podskupinu afroasijských jazyků, zpravidla používají písma, ve kterých se nezaznamenávají samohlásky.

[12] Původní obyvatelé Indického poloostrova, kteří byli vytlačeni indoevropskými kmeny. Dnes se nacházejí především v jižní Indii, na Srí Lance, Bangladéši.

[13] K drávidským jazykům patří např. tamilština, malajálamština a telugština. Tyto jazyky jsou rozšířeny především v jižní Indii.

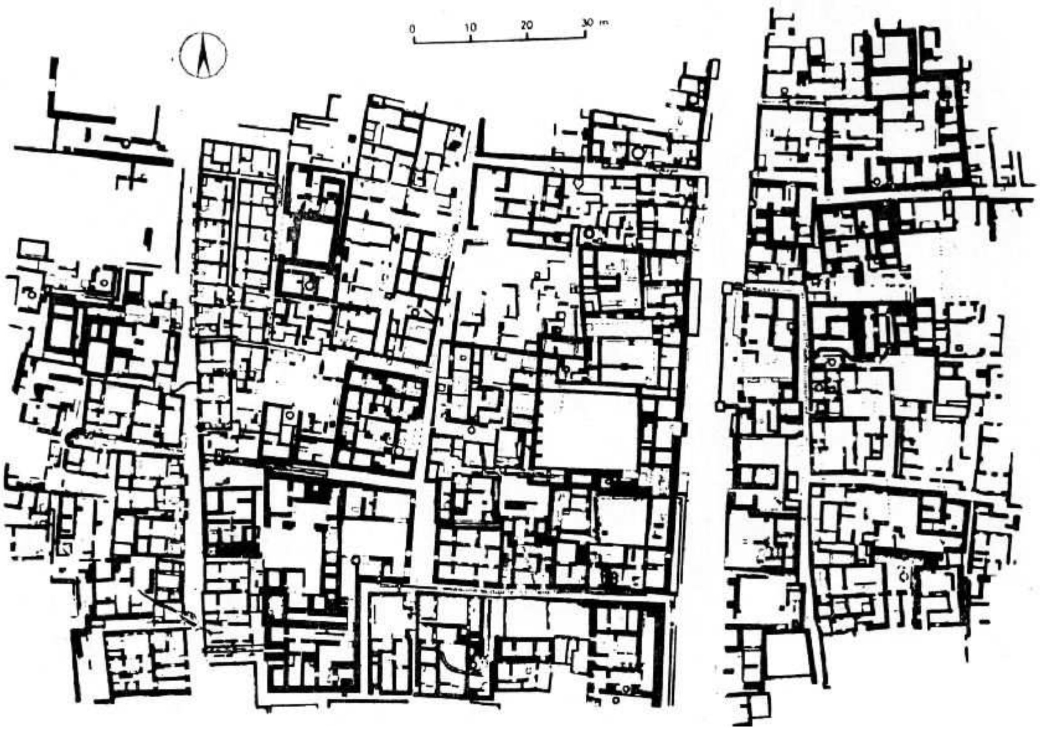
náboženského či společenského charakteru (viz [FSW]). Jejich teorie se opírá především o tyto skutečnosti: nápisy jsou velmi krátké a frekvence opakování jednotlivých znaků je nízká, nebyly nalezeny ani písařské pomůcky, dokonce ani žádná jejich vyobrazení ani vyobrazení písařů. V současnosti se zkoumáním písma zabývá například finský indolog Dr. Asko Parpola (narozen 1941).

Podle převládajícího názoru by písmo mohlo být logoslabičného charakteru, kde znak vždy zastupuje slovo, a které se psalo zprava doleva, v občasných případech se však v dalším řádku směr měnil (viz [Fi]).

1.5. Matematické znalosti

Matematické znalosti a dovednosti sloužily praktickým potřebám. Měření odkrytých staveb ukazují velkou přesnost. Cihly, ze kterých se stavěly domy, měly hrany v poměru 4 : 2 : 1; dodnes je tento tvar stavební cihly považován za optimální.

Půdorysy měst i stavby dokládají znalost konstrukce pravého úhlu, kolmic. Stavitelé dbali na přesnou orientaci vůči světovým stranám; hlavní ulice vedly od severu k jihu, křížily se v pravém úhlu s menšími vedoucími východozápadním směrem.[14] Pravoúhlá síť ulic v Mohendžo-daru je zachycena na obrázku 1.17.



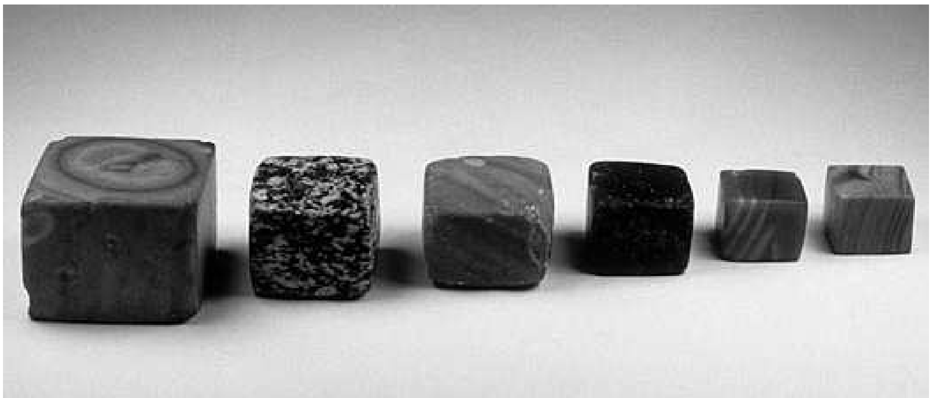
Obr. 1.17 Plán ulic v Mohendžo-daru, převzato z [Whe].

Patrové domy se schodištěm by nebylo možné postavit bez přesného měření, například západní strana lázně v Mohenžo-daru byla dlouhá 11,99 a východní

[14] Nabízí se srovnání s egyptskými pyramidami, jejichž stěny byly rovněž poměrně přesně orientovány na jednotlivé světové strany.

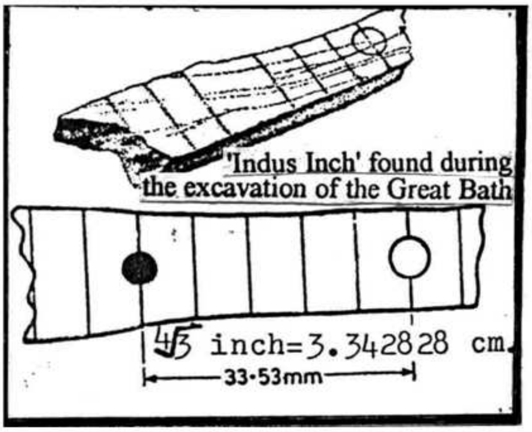
11,96 metrů, jižní šířka byla 6,98 a severní 6,87 metru, rozměry se liší velmi málo (viz [Ku2]).

Obyvatelé užívali jednotný systém vah a měr. V různých lokalitách byla nalezena závaží jednotného typu, která se používala při obchodování a možná i při výběru daní. Závaží měla tvar geometrických těles, například kvádru, válce, kuželu. J. M. Kenoyer a R. H. Meadow považují za nejběžnější závaží o hmotnosti přibližně 13,7 gramů, k němu existovaly jeho zlomky (viz obr. 1.18) polovina, čtvrtina, osmina, šestnáctina, větší závaží byla dvakrát, desetkrát a stokrát těžší (viz [KM]).[15]



Obr. 1.18 Závaží z Harappy, nejmenší má 0,856 gramů, převzato z [KM].

Bylo nalezeno několik měřidel délky. Jedno z nich, pocházející z Mohenžo-dara, je úlomek lastury dlouhý 66,2 mm. Na něm jsou rovnoběžné čárky vzdálené od sebe 6,7056 mm. Přesnost dělení je obdivuhodná, průměrná chyba je jen 0,0762 mm. Jedna z čárek je označena prázdným kroužkem a šestá čárka od ní je označena tečkou. Vzdálenost mezi značkami je 33,5 mm = 1,32 palce (viz obr. 1.19). Tato vzdálenost byla nazvána *induský palec* (viz [Jo1]). Deset jednotek (335 mm) byla míra *stopa*. Byla objevena i bronzová tyč, která má značky ve vzdálenosti 9,3 mm. Sto takových jednotek tvořilo míru délky nazývanou *krok* (viz [CR]).



Obr. 1.19 Měřidlo z Mohenžo-dara, převzato z [Vi].

[15] G. Joseph jako základní jednotku označil závaží s hmotností 27,584 gramů, další závaží byla řada jeho násobků: 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1; 2; 5; 10; 20; 50; 100; 200 a 500, viz [Jo1].

Bohužel však není jasné, jak se měřily tekutiny či sypké látky; zda obyvatelé starověkých měst používali nějaké „odměrky“, případně s jakými objemovými jednotkami pracovali.

1.6. Zánik civilizace údolí Indu

Příčina zániku civilizace údolí Indu je nejasná. Archeologické nálezy ukazují poměrně náhlý konec této civilizace. Historikové uvažují o čtyřech hlavních důvodech: změně klimatických podmínek a následné zemědělské krizi, přírodní pohromě – ničivých záplavách nebo naopak krutém suchu provázeném změnou toku řeky Indu a jejích přítoků a vysycháním některých řek, například Sarasvati, epidemii nějaké nemoci, vpádu árijských kmenů ze severozápadu. Mnozí historikové, například M. Wheeler, přisuzují zánik civilizace údolí Indu kombinaci všech těchto příčin (viz [Whe]).

Archeologické nálezy potvrdily skutečnost, že už před zničením této městské civilizace (na přelomu 3. a 2. tisíciletí př. n. l.) začalo docházet k jejímu postupnému úpadku (viz [Zb1], [Fi]). Je tedy možné, že posuny výše mořské hladiny a změny koryt velkých řek způsobily menší hospodářské výnosy. Velká spotřeba dřeva k vypalování cihel vedla k postupnému vykácení lesů, tím se zhoršovalo podnebí. Časté povodně rozvrátily zavodňovací systém. Města pomalu upadala. Nakonec přišli Árjové a dokončili zkázu měst, která při svém kočovném způsobu života nepotřebovali. Příslušníci původního obyvatelstva zřejmě nekladli Árjům velký odpor.

Árjové (tj. dobří, věrní, urození) začali pronikat na indický poloostrov asi v polovině 2. tisíciletí př. n. l. Byli to kočovníci, živili se chovem dobytka. Uctívali rozmanitá přírodní božstva, původně personifikované přírodní síly a úkazy. Dobyli Indii ve třech vlnách. Postupně si osvojili zvyky původních obyvatel, jazyk, náboženskou víru, ale uchovali si své vlastní náboženské představy i pověry. Z obou těchto zdrojů vznikla nová kultura. Zdrojem informací o životě a zvycích této společnosti jsou nejstarší literární památky Indie – védy.[16]

[16] Jazyk nejstarších literárních památek (véd) vykazuje známky drávidských vlivů. Árjové se po svém příchodu na indické území mísili s původním drávidským obyvatelstvem a později je vytlačili do jižní části Indie. Védské texty hovoří o neárijských obyvatelích země jako o lidech drobných postav, tmavé pleti a malých nosů, viz [Zb2].

2. VÉDSKÉ OBDOBÍ

Árjové postupně pronikali a osídlovali oblast Indického poloostrova, dostávali se do těsného kontaktu s původními obyvateli, obohacovali kulturu místních kmenů o svoje zvyky. Postupně vznikala nová kultura. Představu o tehdejším životě, znalostech a rozvoji vědeckých poznatků si můžeme utvořit na základě nejstarších památek Indie – védských textů.

Védy jsou nábožensko-filozofické spisy, hymny, kultické a magické předpisy. Výraz *véda* označuje soubor poznatků a znalostí, zejména znalostí obětních formulí, rituálů a melodií. Jazykem védské literatury je tzv. *védský jazyk*, někdy nazývaný *mantrový dialekt*, který je považován za předchůdce *sanskrtu.*[1] Védy původně nebyly sepsány, po dlouhá staletí se předávaly jen ústním podáním z pokolení na pokolení. Základní texty byly uspořádány do čtyř sbírek *samhit* (někdy *sanhit*), které tvoří starší védskou literaturu. Jedná se o cenný historický pramen, v němž má původ indická filozofie.[2]

Čtyři základní sbírky jsou:[3]

a) *Ṛgveda* (*rgvéda*) – sbírka 1028 hymnů rozdělených do 10 knih. Obsahuje obětní písně, které se obracejí k bohům s prosbami a chvalořečením. Byly recitovány knězem při oběti. Je nejstarší ze sbírek a tvoří jádro véd.
b) *Sāmaveda* (*Sámavéda*) – sbírka melodií, která textově opakuje hymny Ṛgvedu. Je zde uveden správný způsob recitace v průběhu oběti.
c) *Yajurveda* (*Jadžurvéda*) – soubor obětních formulí zvaných mantry, které byly nezbytné pro úspěch obřadu. Nalezneme zde i popis detailů védského rituálu.
d) *Atharvaveda* (*Atharvavéda*) – kouzelnické průpovědi a magická zaklínadla proti nemocem či pohromám. Obsahuje hymny a průpovědi sloužícím potřebám černé a bílé magie.

Čtyři védské sbírky původně existovaly zřejmě ve více verzích podle různých kmenových tradic. Současná podoba véd se ustálila kolem 2. tisíciletí př. n. l. a byla kodifikována jako posvátná. Za její autory byli prohlášeni sami bohové, od nich podle legendy prostřednictvím prvních věštců, tzv. *ršijů*, texty získali lidé (viz [Zb1]). Písně *Ṛgvedy* jsou tematicky pestré, kromě oslavných písní a zaříkávadel se objevují i počátky světské tématiky – nářek hráče kostek nad neustálými prohrami (*Píseň hráče*).

---

[1] *Védský jazyk* se používal zhruba v době 1500 př. n. l. – 500 př. n. l., období klasického *sanskrtu* nastupuje asi od 5. – 4. stol. př. n. l.

[2] Bhandarkar Oriental Research Institute shromáždil v různých oblastech Indie 30 rukopisů Rgvédy a uložil je v Deccan College Post-Graduate and Research Institute v Puně. Jsou psány písmem *śāradā* (šáradá) a *devanāgarī* (dévanágarí) na březové kůře a papíru.

[3] Védy jsou podrobněji popsány například v [Zb2]. Studiem a výkladem védských textů se zabývalo mnoho indologů, např. nizozemský indolog a badatel Jan Gonda (1905–1991), rumunský religionista Mircea Eliade (1907–1986), německý historik a indolog Heinrich Zimmer (1851–1910). K lepšímu pochopení obsahu védských sbírek bylo vydáno několik slovníků, například *Sanskrit-Wörterbuch* (O. Böhtlingk, R. Roth), *A Sanskrit-English Dictionary* (M. Monier-Williams), *Wörterbuch zum Rig-Veda* (H. G. Grassmann) a řada dalších.

Védská literatura podává svědectví o náboženství své doby. Jedná se hlavně o víru v personifikované přírodní síly a jevy, které je nutné neustále si usmiřovat a získávat oběťmi. Védské sbírky uvádějí jména 33 bohů rozdělených do tří kategorií – pozemské bohy v čele s bohem ohně *Agni*, nebeské bohy vedené bohem slunce *Sūryou* (*Súrjou*) a bohy větru, mezi nimiž přední místo zaujímá vládce všech bohů *Indra*.

Uctívání bohů bylo provázeno obětním kultem. K bohům se obraceli lidé se svými prosbami při oběti. Obřady měly pečlivě propracovaný řád. Zpočátku se nekonaly v chrámech, ale na posvátné půdě, která byla pečlivě vybrána a vyměřena. Hlavní a nejdůležitější byl oheň, principem rituálu bylo nabízení různých obětí ohni. Jako oběť sloužilo hlavně jídlo, někdy i zvířata a při některých obřadech vysoce ceněný nápoj *sóma*.[4] Později vznikaly zvláštní stavby pro uctívání bohů.

Zatímco se hovorový jazyk vyvíjel, texty provázející obřady zůstávaly stále neměnné, proto se stávaly méně srozumitelnými a kněží museli vysvětlovat jejich význam. V letech 1000 až 500 př. n. l. tak postupně vznikala mladší védská literatura, sbírky výkladů a úvah o védských knihách.

Mladší védskou literaturu tvoří:

a) *Brāhmaṇy* (*Bráhmany*) (asi 800 př. n. l.) jsou nejstarší sanskrtské prozaické texty, soubory výkladů jednotlivých obětí, které obsahují i úvahy o jejich smyslu, významu a původu[5] a různé legendy o vzniku obětí. Zdůrazňují význam bráhmanů, které nazývají lidskými bohy.

b) *Āraṇyaky* (*Áranjaky*, tj. lesní texty) (asi 700 př. n. l.) se zabývají mystikou a symbolikou obětí.[6]

c) *Upaniṣady* (*Upanišády*) (asi 600–500 př. n. l.) vykládají význam védských hymnů, obsahují meditace a rozhovory poustevníků a asketů o věcech božských i světských. Ústředním problémem upanišád je otázka života a smrti, tj. nositele života a posmrtného osudu. Někteří myslitelé hledali nositele života ve vodě, jiní jej spatřovali ve vzduchu a třetí hlavní proud hledal nositele života v ohni – podobně jako staří Řekové, kteří se také zabývali hledáním pralátky (*arché*).

Pro matematiku jsou důležitější dodatky k védám tzv. *vedāṅgy* (*védangy* – pomocné vědní disciplíny).[7] Vedāṅgy patří k okrajovým védám, jejími autory

[4] *Sóma* byl opojný nápoj, šťáva lisovaná z neznámé rostliny, jednou z diskutovaných možností je i muchomůrka červená.

[5] Jedna z nejstarších sbírek obětnických výkladů *Śatapatha-Brāhmaṇa* (Bráhmana sta cest), která obsahuje sto oddílů ve čtrnácti knihách, pojednává nejen o výkladu oběti, ale i o způsobech studia véd a pohřebních obřadech. Podává také svědectví o tom, jak pokračovalo osidlování směrem na východ. Bůh Agni začal vypalovat džungli a za ním kráčel lid od břehů řeky Sarasvatí. V této době řeka zanikla.

[6] Přídavné jméno „lesní“ znamenalo, že texty „se mají odříkávat v lese“, že tedy asketům žijícím v lese nahrazovaly obětní úkony. Někteří historikové však soudí, že obsah *āraṇyak* byl natolik posvátný, že musel být „odříkáván v lese“, tj. o samotě, viz [Zb2].

[7] Slovo *vedāṅga* doslova znamená úd védy.

byli lidé. Zatímco védy jsou považovány za zjevená díla, tzv. *śruti*,[8] vedāṅgy patří do skupiny textů označovaných jako díla zapamatovaná, tzv. *smṛti*.[9]

Vedāṅgy byly rozděleny do šesti skupin, které tvořily fonetika, tzv. *śikṣā*, gramatika, tzv.*vyākaraṇa*, etymologie, tzv.*nirukta*, umění prozódie, tzv.*chanda*, astronomie včetně matematiky a astrologie, tzv. *jyotiṣa*, pravidla pro obřady, tzv. *kalpa*. V posledních dvou jsou obsaženy nejdůležitější informace o matematice ve védském období. *Kalpa* pojednávala o pravidlech a metodách provádění védských rituálů, obětí a obřadů. Byla rozdělena do tří kategorií nazvaných *śrauta, gṛhya, dharma*. Všechny texty byly vytvořeny úsporným způsobem ve formě *sūter* – pravidel.[10] *Sūtry*, charakteristické osobitým způsobem vyjadřování, bývaly často ve verších, snažily se s maximální stručností vystihnout podstatu obsahu nebo výsledky. Snahou bylo vynechat co nejvíce sloves a řadit za sebou podstatná jména do dlouhých skupin, jež se snadno učily nazpaměť. Koncentrace v sútrách byl způsob, jak se vyrovnat s nedostatkem psacích potřeb. Tímto postupem se obsah *bráhman* zachoval, osvojili si jej nejen další učenci, ale i autoři knih. Jazykovědec a filozof Patañjali (2. stol. př. n. l.) se proslavil výrokem: *autor se raduje z každé ušetřené slabiky více než otec z narození syna.*

Převážná část staroindické literatury je psaná v *sanskrtu*. Významná je kniha o gramatice sanskrtu nazvaná *Aṣṭādhyāyī* (*Aštádhjájí*). Jejím autorem je bráhman Pāṇini (5.–4. stol. př. n. l.), který provedl pevnou gramatickou kodifikaci sanskrtu, setřídil gramatiku, nezasáhl však do fonetiky.[11]

Kalpasūtry se dělily na dvě kategorie; *Gṛhyasūtry* obsahovaly pravidla pro rodinné domácí obřady pořádané například u příležitosti svatby nebo narození dítěte, na ně navazovaly *Dharmasūtry*, které popisovaly povinnosti různých vrstev obyvatelstva. Z nich se dovídáme informace o životě společnosti kolem roku 500 př. n. l. Ve druhé skupině, zvané *Śrautasūtry*, byla popsána přesná, často velmi složitá pravidla pro konstrukci a vyměřování obětní půdy, tzv. *vedi*, obětních ohňů, tzv. *agni*, mohyl a oltářů, tzv. *citi*, v různých ročních obdobích. Někdy byl připojen i krátký komentář.

Pojednání o pravidlech pro stavbu oltářů a ohňů se objevovala jako samostatné práce, kterým se říkalo *Śulbasūtry* nebo jen *Śulby*. Jsou to nejstarší geometrické spisy, které představují tradiční indickou matematiku vyvinutou pro stavbu védských oltářů různých typů a tvarů. Slovo *śulba* (někdy *śulva*) nebo *rajju* znamenalo provaz, který byl užíván při vyměřování oltářů.[12]

Nejznámější a nejdůležitější jsou *Śulbasūtry*, které sestavil Baudhāyana

[8] Do kategorie *śruti* patří to, „co bylo vyslechnuto“, texty byly lidem sděleny bohy, a proto jsou dané, neměnné.

[9] Do kategorie *smṛti* patří to, „co bylo zapamatováno“, protože původně se šířily z generace na generaci pouze ústní tradicí.

[10] *Sūtra* znamená vlákno, nit.

[11] O životě Pāṇiniho se mnoho neví, dokonce i doba, ve které žil, je určena jen přibližně. Jisté je, že to bylo na konci védského období, protože podle jeho pravidel bylo možné rozluštit archaický védský sanskrt, který se stával nečitelným.

[12] Slova *śulba* či *śulva* nebo *rajju* byla používána i ve smyslu měřit (označovala jak proces měření, tak výsledek), resp. umění měřit, tj. geometrie, viz [Dat].

(8. stol. př. n. l.), Mānava (kolem 750 př. n. l.), Āpastamba (6. stol. př. n. l.) a Kātyāyana (2. stol. př. n. l.).

2.1. Obřady a oltáře

Pro každý obřad byl předepsán oltář určitého tvaru a velikosti. Oltáře byly orientovány podle linky *prācī* směrem východ – západ, tato důležitá přímka byla vyměřena podle stínu gnómónu (viz [Pl1]) a byla při konstrukci vždy zmiňována, protože tvořila osu symetrie. Někdy byla také nazývána *pṛṣṭhyā* (viz [SA]). Pouze přesně provedený obětní rituál zaručoval úspěch, sebemenší chyba či odchylka od předepsaného postupu, třeba jen položení obřadního nádobí na nesprávné místo, obličej obřadníka obrácený nesprávným směrem, nesprávný přízvuk na slově mohl mít účinek naprosto opačný, mohl způsobit neúspěch a neštěstí. Přesně vykonaná oběť byla podle výkladu bráhmanů všemocná. Přinášela zdraví, potomky, moc, majetek, místo v nebi.

Pro přesné vyměření velikosti oltáře byly používány různé jednotky délky, nejčastěji zmiňované jsou uvedeny v následující tabulce:

Jednotka	Vztah k jiné jednotce	Poznámka
aṅgula	asi $1,8$ cm ($\frac{3}{4}$ palce)	šířka prstu 34 sezamových semen vedle sebe
pada	15 *aṅgula*	stopa
prakrama	2 *pada* = 30 *aṅgula*	
vyāma	96 *aṅgula*	výška člověka od paty až ke kořínkům vlasů
puruṣa	120 *aṅgula*	míra dospělého muže se vztyčenými pažemi
prādeśa	$\frac{1}{10}$ *puruṣa* = 12 *aṅgula*	
aratni	$\frac{1}{5}$ *puruṣa* = 24 *aṅgula*	

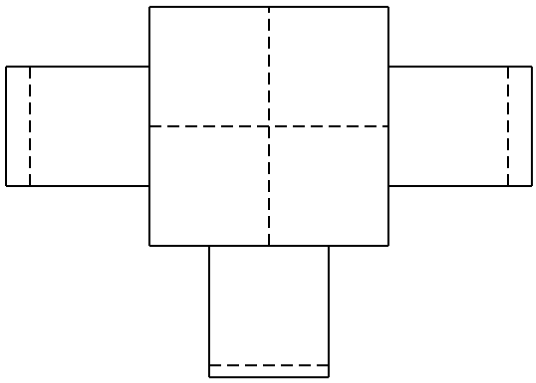
Obětní obřady se dělily do dvou skupin, *Nitya* a *Kāmya*. Do první skupiny patřily běžné denní rituály, které se podle védského náboženství musely povinně konat v každém domě, aby přinesly rodině štěstí a zdraví. Jejich zanedbání bylo považováno za hřích. Za tímto účelem byly v domě udržovány tři typy ohňů (*agni*) v oltářích speciálních tvarů – *Gārhapatya* (oheň hospodáře), *Āhavanīya* (oheň pro oběť) a *Dakṣiṇāgni* (jižní oheň).[13] Potřebné oltáře musely být stavěny s velkou přesností, aby vyhovovaly určitým speciálním požadavkům na tvar

[13] Albert Bürk připomíná, že už v hymnech *Ṛgvedy* „znalí“ muži vyměřovali sídlo Agniho, viz [BuA1], str. 543.

a velikost. Oltář pro oheň *Gārhapatya* byl někdy čtvercový, v jiném systému kruhový, oltář pro oheň *Āhavanīya* byl čtvercový a pro oheň *Dakṣiṇāgni* měl tvar půlkruhu. Každý z těchto oltářů musel mít plochu velikosti 1 čtverečný *vyāma* (viz [MFM], [Bag3]).[14]

Kromě těchto denních aktů uctívání existovaly ještě mnohem složitější obětní obřady pro získání milovaných předmětů nebo potřeb. Tyto rituály se nazývaly *Kāmya* a byly veřejné. Obětní oltáře pro takový obřad vyžadovaly mnohem složitější konstrukci složenou z cihel ve tvaru obdélníků, objevují se i nové tvary cihel – trojúhelníky a rovnoramenné lichoběžníky. Během obřadu obětování bylo třeba přeměnit původní oltář na jiný buď stejného nebo jiného tvaru, jehož velikost plochy byla v určitém daném poměru k velikosti plochy původního oltáře. Tyto obřady byly sezónní, pořádaly se například při úplňku, při slunovratu apod. Mezi nejnáročnější rituály patřily *Agnicayana* a *Aśvamedha.* Oltáře byly větší než u domácích obřadů, jejich původní plocha měla velikost $7\frac{1}{2}$ čtverečných *puruṣa.*

Mezi nejstarší typy oltářů patřil oltář *Śyenacit*[15] ve tvaru primitivního sokola (viz obr. 2.1). Jeho tělo bylo složeno ze čtyř čtverců o obsahu 1 čtverečný *puruṣa*, každé křídlo bylo tvořeno obdélníkem s rozměry 1 krát $1\frac{1}{5}$ *puruṣa* a ocas byl obdélník 1 krát $1\frac{1}{10}$ *puruṣa*, tedy s obsahem rovným $4 \cdot 1 + 2 \cdot 1\frac{1}{5} + 1\frac{1}{10} = 7\frac{1}{2}$ čtverečných *puruṣa.*[16]



Obr. 2.1 Oltář ve tvaru primitivního sokola.

Pro další obřady byly potřebné oltáře mající jiné tvary, například trojúhelník, obvykle rovnoramenný (oltář *Praūga*), kosočtverec (*Ubhayataḥ praūga*), kruh (*Rathacakra*), rovnoramenný lichoběžník (*Mahāvedi*, *Sautramani* nebo *Śmaśāna*), želva (*Kūrma*) atd. (viz [Bag3], [Dat]). Každý z oltářů měl stejnou velikost jako sokol, tj. $7\frac{1}{2}$ čtverečných *puruṣa.*

Oltáře byly stavěny z pěti vrstev cihel, jejich výška obvykle dosahovala ke kolenům a každá vrstva obsahovala přesný počet cihel předepsaných tvarů.[17] Pro menší oltáře stačilo 21 cihel, pro velké bylo třeba až 200 cihel v jedné

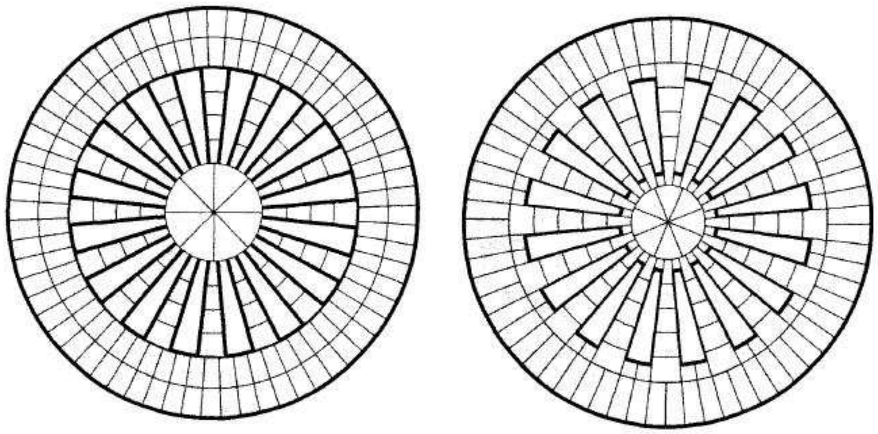
[14] *Vyāma* byla standardní míra pro oltáře denních obřadů.

[15] *Caturaśraśyenacit* nebo *Agni sarātniprādēśa saptavidha*, podle [BuA1].

[16] Délka křídel byla vyjádřena jako 1 *puruṣa* a 1 *aratni*, délka ocasu 1 *puruṣa* a 1 *prādeśa.*

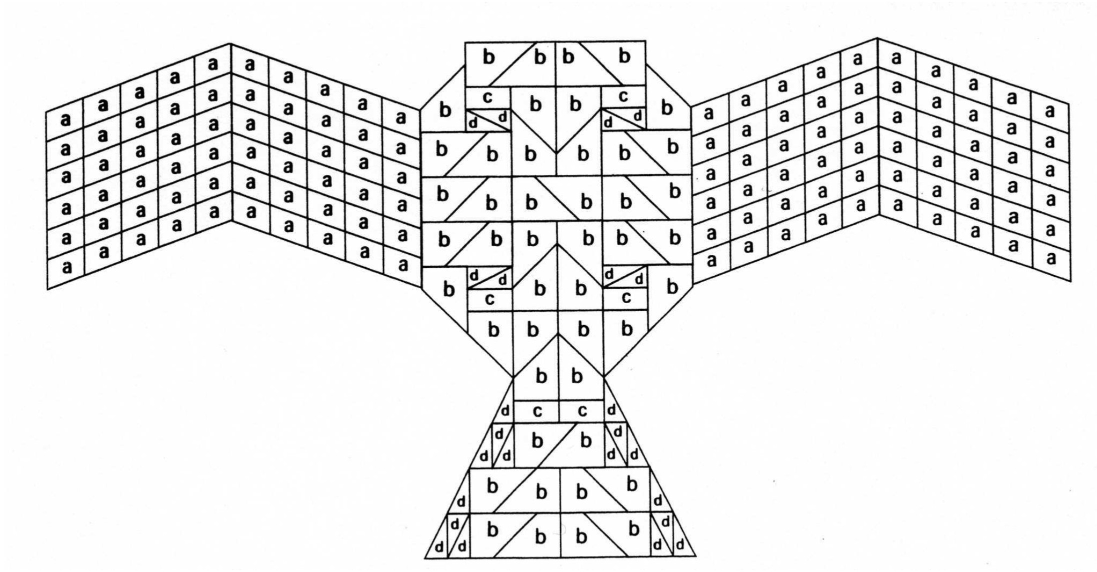
[17] V některých případech se oltáře skládaly i z deseti nebo patnácti vrstev, viz [Th].

vrstvě. Oltář *Rathacakra* měl tvar kola vozu s paprsky a obručí (viz obr. 2.2), jeho konstrukci využívající sedm typů cihel v liché vrstvě a devět typů cihel v sudé popsal Baudhāyana.



Obr. 2.2 Sudé a liché vrstvy oltáře *Rathacakra*, převzato z [Pri].

Jeden z nejsložitějších oltářů *Vakra-pakṣa-vyasta-puccha-śyena* měl tvar velkého sokola, tzv. *Śyena* (viz obr. 2.3), se zahnutými křídly a roztaženým ocasem. Lidé věřili, že přinesená oběť umožní duši prosebníka dostat se s pomocí sokola do nebe. První vrstvu tohoto oltáře tvořilo na každém křídle 60 cihel typu a, tělo obsahovalo 46 cihel typu b, 6 typu c a 24 typu d (viz [Jo1]).[18]



Obr. 2.3 Oltář ve tvaru velkého sokola, převzato z [Jo1].

2.2. Śulbasūtry

Śulbasūtry jsou soubory pravidel pro konstrukci obětních oltářů. Jejich autoři jsou neznámí, jméno dostala každá *Śulbasūtra* po učenci, který ji sesta-

[18] Jiný tvar sokola je uveden v [Kn].

vil a sepsal; ani o těchto lidech se mnoho neví, je možné, že to byli duchovní (viz [CR]). Nejvýznamnější jsou *Śulbasūtra* Baudhāyany, *Śulbasūtra* Āpastamby a *Śulbasūtra* Kātyāyany.

Baudhāyanova *Śulbasūtra* je nejstarší a největší. Je rozdělena do tří kapitol, z nichž první obsahuje 116 pravidel neboli *sūter*, z toho dvě jsou úvodní a dalších 19 definuje různé míry a měření, která se v těchto textech běžně používala. Pravidla 22 až 62 se týkala geometrie nutné ke konstrukci obětních oltářů, pravidla 63 až 116 stručně popisovala vzájemnou polohu a prostorovou velikost různých oltářů (*vedi*). Druhá kapitola je tvořena 86 pravidly, z nichž ta hlavní, 1 až 61, jsou věnována obecnému popisu prostorových vztahů při různých konstrukcích velkého oltáře pro oheň postaveného z cihel (*agni*), zbývající pravidla detailně rozepisují konstrukci dvou nejjednodušších oltářů pro oheň – *Gārhapatya-citi* (hospodářův ohňový oltář) a *Chandaś-citi* (ohňový oltář, který byl vystavěn mantrami místo cihel).[19] Ve třetí kapitole je 323 pravidel, která popisují konstrukce sedmnácti různých druhů *Kāmya Agni* (oltáře pro oběti za účelem získání určitého předmětu), některé velmi podrobně (viz [Dat]).

Śulbasūtra Āpastamby je rozdělena do šesti částí; první, třetí a pátá mají po třech kapitolách, druhá, čtvrtá a šestá jsou rozdělené do čtyř kapitol. Celkem tak práce obsahuje v 21 kapitolách 223 pravidel. V prvních třech kapitolách jsou popsány důležité geometrické poučky potřebné při konstrukci oltářů, obsah dalších tří kapitol se týká vzájemné polohy a velikosti různých oltářů. Na rozdíl od Baudhāyany Āpastamba krátce popsal i metody pro jejich konstrukci, což byly konkrétní aplikace obecných geometrických pouček z předchozí části. Zbývající kapitoly se zabývají konstrukcí *Kāmya Agni*. Většina geometrických pouček je stejná u Āpastamby a Baudhāyany, ale část týkající se *Kāmya Agni* je u Āpastamby stručnější (viz [Dat]).

Kātyāyanova *Śulbasūtra*[20] se skládá ze dvou částí, první obsahuje pravidla, stejně jako u předchozích autorů. Je rozdělena do sedmi odstavců, v nichž je 90 pravidel s geometrickými poučkami, ale nezabývá se konstrukcí *Kāmya Agni*. Druhá část je psána ve verších[21] a popisuje měřicí provaz, gnómon, ale i vlastnosti stavitelů oltářů a podává několik obecných pouček o jejich chování (viz [Dat]).

Dochovaly se ještě další texty, jejichž autory jsou Maitrāyaṇa, Vārāha a Vādhula.[22]

Později vzniklo k *Śulbasūtrám* mnoho komentářů. Původní *Śulbasūtry* obsahovaly jen strohý text pravidel; vysvětlivky, obrázky a tabulky byly připojeny

[19] Stavitel oltáře nejdříve nakreslil na zem předepsaný obrys, nejčastěji to byl tvar primitivniho sokola, pak procházel celý proces konstrukce, představoval si, jak pokládá každou cihlu na své místo a k tomu příslušnou mantru. Mantry skutečně „mumlal“, ale cihly doopravdy nepokládal, viz [Dat].

[20] Někdy nazývaná též *Kātyāyana Śulba-pariśiṣṭa* nebo *Kātiya Śulba-pariśiṣṭa*.

[21] Rukopis, který je v Londýně, obsahuje 48 veršů, zatímco rukopis v Pooně jich má jen 40, viz [Dat].

[22] R. C. Gupta v článku [Gu5] zmiňuje i jména dalších učenců spojených s *Śulbasūtrami*.

pozdějšími komentátory.[23]

Při stavbě oltářů byly potřebné tyto matematické znalosti:

a) sestrojení kolmice k dané přímce,
b) konstrukce základních geometrických útvarů – trojúhelníků, čtverců, obdélníků, rovnoramenných lichoběžníků, kruhů,
c) kombinace ploch – například konstrukce čtverce, jehož obsah je součtem nebo rozdílem obsahů dvou různých čtverců,
d) konstrukce rovnoplochých útvarů – transformace trojúhelníku ve čtverec a obrácený proces, kvadratura kruhu, cirkulatura čtverce,
e) konstrukce stejných tvarů s dvojnásobným, trojnásobným či vícenásobným obsahem.

Pravidla byla uvedena bez jakéhokoli odvození či důkazu, chyběly i obrázky a náčrtky. Některé popsané metody jsou přesné, například konstrukce čtverce s obsahem rovným obsahu daného obdélníku, některé pouze přibližné, například konstrukce čtverce s obsahem rovným obsahu daného kruhu.

Z konstrukcí uvedených v *Śulbasūtrách* plyne znalost běžně používaných jednoduchých tvrzení, například:

(1) každou úsečku lze rozdělit na libovolný počet stejných dílů,
(2) každá úhlopříčka půlí obdélník,
(3) úhlopříčky obdélníku se půlí navzájem a dělí obdélník na čtyři díly, přičemž dva a dva protilehlé jsou shodné,
(4) trojúhelník, který je vytvořen sousedními vrcholy čtverce a středem protilehlé strany, má poloviční obsah než čtverec,
(5) maximální čtverec, který může být vepsán do kružnice, má vrcholy na kružnici.

2.3. Pythagorova věta

Z uvedených pravidel je zřejmé, že autoři znali Pythagorovu větu a často ji používali, v pravidlech je uvedeno mnoho základních pythagorejských trojic, například

$$(3,4,5),\ (5,12,13),\ (8,15,17),\ (7,24,25),\ (12,35,37).$$

Při konstrukcích se pracovalo i s jejich násobky, například[24]

$$(12,16,20),\ (15,20,25),$$

a kromě těchto celočíselných trojic byly uvedeny i některé racionální, například

$$\left(2\frac{1}{4},\ 3,\ 3\frac{1}{4}\right),\ \left(7\frac{1}{2},\ 10,\ 12\frac{1}{2}\right),\ \left(1\frac{2}{3},\ 4,\ 4\frac{1}{3}\right),\ \left(2\frac{1}{2},\ 6,\ 6\frac{1}{2}\right),$$

[23] *Śulbasūtra* Baudhāyany byla komentována Veṅkateśvarou (nebo Vyaṅkateśvarou) a Dvārakānathou, *Śulbasūtru* Āpastamby komentovali Kapardi, Karavinda, Gopāla a Sundararāja, komentátory *Śulbasūtry* Kātyāyany byli Karka, Rāma, Vājapeyin, Mahīdhara (nebo Mahīdāsa) a Gaṅgādhara, viz [Gu5].

[24] Další násobky, potřebné zejména při konstrukci *Mahāvedi*, je možno nalézt např. v [MS1].

$$\left(2\frac{1}{12},\ 5,\ 5\frac{5}{12}\right),\ \left(78\frac{1}{3},\ 188,\ 203\frac{2}{3}\right),\ \left(11\frac{1}{4},\ 27,\ 29\frac{1}{4}\right).$$

Pythagorejské trojice se objevovaly v *Śulbasūtrách* v souvislosti s konstrukcemi čtverce, obdélníku či lichoběžníku, které byly při stavbě oltářů zásadní.[25] Konstrukce pravoúhlého trojúhelníku se stranami a, b, c, kde $a^2 + b^2 = c^2$, se prováděla tak, že se vyměřila vzdálenost $AB = a$ a vzal se provaz délky $b+c$, na němž se ve vzdálenosti b od kraje vyznačil bod N, ten se nazýval *nyancana*.[26] Konce provazu se upevnily v bodech A a B, a provaz, držený v bodě N, byl natažen do strany, kde se pak označil třetí vrchol trojúhelníku.[27] Protože rozhodující byl právě bod N, někdy se o tomto postupu mluví jako o metodě *nyancana* (viz [Dan]). Podobným způsobem byly konstruovány i jiné než pravoúhlé trojúhelníky.

Baudhāyana popsal speciální případ, metodu zdvojnásobení čtverce:[28]

> **BSS/i.9**
> *Provaz natažený přes diagonálu čtverce vytváří dvakrát větší obsah.*

Āpastamba předložil obecnější znění:[29]

> **ApSS/i.4**
> *Provaz natažený přes diagonálu obdélníku vytváří stejný obsah jako svislá a vodorovná strana dohromady.*

Pythagorova věta byla při geometrických konstrukcích využívána velmi často, sloužila i ke konstrukci iracionalit, například $\sqrt{2}$.

Je pravděpodobné, že Pythagorova věta byla známa v Indii dříve než v 5. stol. př. n. l., neboť pravidla obsažená v *Śulbasūtrách* jsou mnohem starší než sepsané texty. Dokonce už v dílech *Taittirīya-Saṃhitā* a *Śatapatha-Brāhmaṇa* (asi 8. stol. př. n. l.) jsou uvedeny míry oltáře pro oběť *sóma*, při jehož konstrukci se Pythagorova věta používala (viz [BuA1]).[30]

---

[25] Nejstarší dochované pythagorejské trojice jsou uvedeny na mezopotámské tabulce Plimpton 322 (19. až 17. stol. př. n. l.), kde je 15 pythagorejských trojic. Pravděpodobně byly stanoveny generováním dvojic nesoudělných přirozených čísel $p > q$ vztahem $(p^2 - q^2, 2pq, p^2 + q^2)$. Hodnoty jsou poměrně velké, čísla p a q byla volena vetšinou dvojciferná, více viz [BBV]. V Řecku se vědci snažili odvodit obecný postup pro nalezení pythagorejských trojic; Pýthagorás je vyjádřil pro p přirozené jako $(2p^2 + 2p, 2p + 1, 2p^2 + 2p + 1)$, Platón uvedl trojici $(p^2 - 1, 2p, p^2 + 1)$.

[26] Někdy též *niranchana*, viz [Dan].

[27] Viz například sloka ApSS/i.2, podle [BuA2], str. 327.

[28] Podle [Pl1], str. 20–21, [Ju], str. 101, podobná pravidla uvedli Āpastamba i Kātyāyana, viz sloky ApSS/i.5, KSS/ii.8.

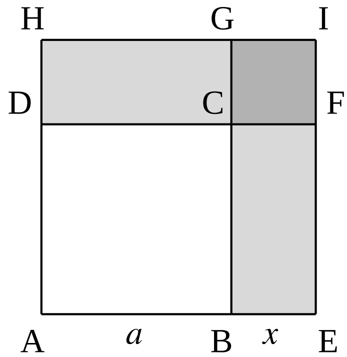
[29] Podle [Pl1], str. 20, [BuA2], str. 101.

[30] V díle *Taittirīya-Saṃhitā* je také pravděpodobně první zmínka o cihlách (*iṣṭakā*), z nichž se oltáře stavěly, viz [Kak2].

Āpastamba velmi stručně popsal metodu na zvětšení čtverce:[31]

ApSS/iii.9
Přidej obdélník, který se připojí na dvou stranách [čtverce – na východní a na severní] *a v* [severovýchodním] *rohu čtverec vytvořený daným prodloužením.*

Konstrukce je znázorněna na obrázku 2.4. K danému čtverci $ABCD$ o straně a se připojily dva obdélníky $BEFC$ a $CGHD$ a čtverec $CFIG$. Původní čtverec $ABCD$ měl obsah a^2, obsah čtverce $AEIH$ byl $c^2 = a^2+2ax+x^2$. Pokud obsah připojeného gnómónu $BEIHDC$ byl také druhou mocninou $2ax + x^2 = b^2$, a to staří indičtí učenci snadno poznali, bylo možné tímto způsobem získat další pythagorejskou trojici (viz [BuA1]).[32]



Obr. 2.4 Zvětšení čtverce.

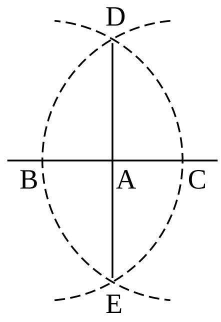
2.4. Geometrické konstrukce

V *Śulbasūtrách* jsou uvedeny různé metody pro konstrukce základních geometrických útvarů, některé z nich využívají provaz či šňůru, jiné bambusovou tyč. Základem konstrukcí je sestrojení kolmice k dané přímce. Metod existovalo více, uvedeme jednu z nich:[33]

Vezmi dva body [B, C] *na dané přímce ve stejné vzdálenosti od daného bodu* [A]. *Opiš kružnici se středem B a poloměrem BC. Podobně další se středem C a poloměrem BC. Označ D, E průsečíky těch kružnic a spoj DE nebo AD nebo AE. Pak tato přímka je kolmá k dané přímce BC v bodě A.*

Postup sestrojení kolmice je patrný z obr. 2.5.

[31] Podle [BuA2], str. 336.
[32] Další domněnky, jak bylo možno odvodit pythagorejské trojice, jsou uvedeny například v [Dan].
[33] Podle [Dat], str. 53–54.



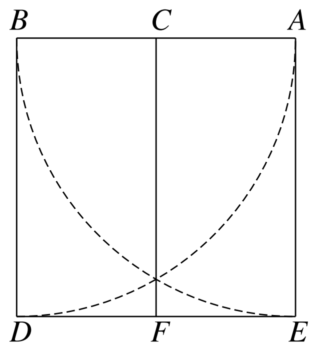
Obr. 2.5 Konstrukce kolmice.

Konstrukce čtverce

V *Śulbasūtrách* je popsáno pět metod na konstrukci čtverce s danou délkou strany. Āpastamba ji popsal takto:[34]

ApSS/viii.8–10 až ix.1
Na bambusové tyči udělej dvě díry [A, B] *ve vzdálenosti rovné výšce obětníka se vztyčenýma rukama a třetí* [C] *ve středu mezi nimi. Polož bambusovou tyč ve směru východ – západ a upevni kolíky do děr. Pak uvolni dva kolíky* [C, B] *a opiš kružnici* [otáčením bambusu] *jihovýchodním směrem dírou na konci. Pak upevni tyč na západě* [v původní poloze] *a opiš další kružnici jihozápadním směrem dírou na opačném konci. Nyní bambus* [zcela] *uvolni a upevni krajní díru na střední kolík* [C], *polož směrem k průsečíku kružnic a upevni kolík do nejvzdálenější díry* [F]. *Pak upevni na ten kolík střední díru bambusu a polož směrem ke krajům kružnic, upevni dva kolíky* [E, D] *do dvou* [krajních] *děr. To je čtverec* [$ABDE$ mající stranu] *1 puruṣa.*

Konstrukce čtverce podle Āpastambova pravidla je vidět na obrázku 2.6.



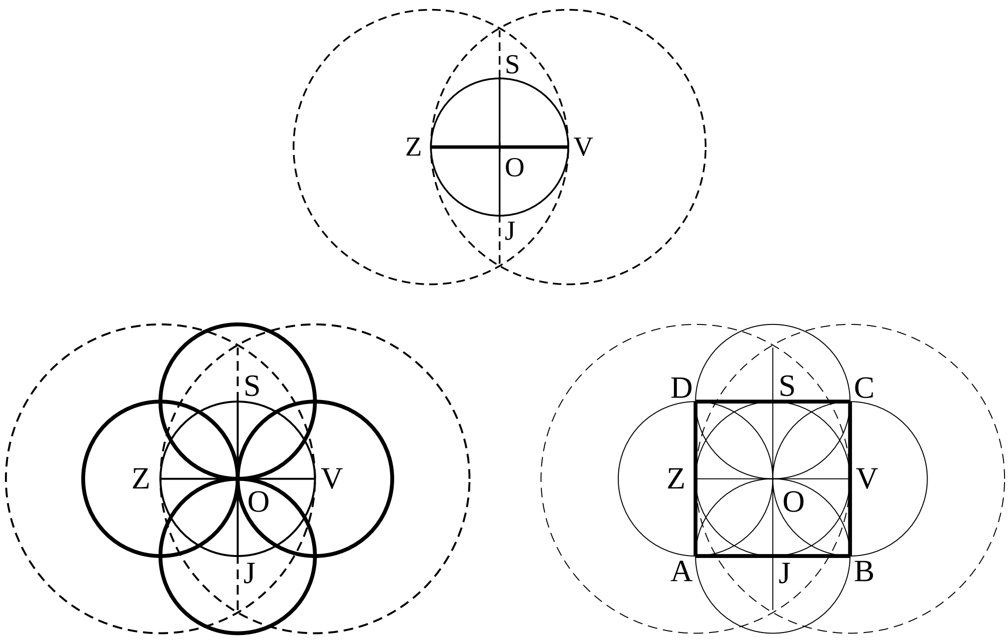
Obr. 2.6 Konstrukce čtverce.

[34] Podle [BuA2], str. 352–353.

Jinou metodu popsal Baudhāyana:[35]

BSS/i.22–28
Chceš-li sestrojit čtverec, vezmi provaz dlouhý jako jeho strana, udělej na koncích uzly a označ střed. Poté, co nakreslíš čáru požadované délky [směrem východ – západ], *upevni tyč v jejím středu. Oba uzly přivaž na tyč a značkou* [uprostřed provazu] *nakresli kruh. Nyní upevni tyče na obou koncích průměru* [východ – západ]. *Uvaž jeden uzel na východní tyč a nakresli kružnici druhým uzlem. Nakresli podobnou kružnici okolo západní tyče. Na spojnici průsečíků kružnic* [od severu k jihu] *bude nalezen druhý průměr. Poté, co upevníš oba uzly na východní tyč, opiš značkou kružnici. Podobně opiš kružnice okolo jižní, západní a severní tyče. Vnější průsečíky těchto kružnic určují čtverec.*

Při této konstrukci čtverce o straně a se vyznačila vzdálenost $|ZV| = a$ a označil její střed O, kolem něj se opsala základní kružnice s poloměrem $\frac{a}{2}$. Další pomocné kružnice s poloměrem a se opsaly kolem bodů Z a V, pomocí jejich průsečíků se stanovila kolmice k úsečce ZV procházející jejím středem O, průsečíky této kolmice se základní kružnicí byly označeny S a J (viz obr. 2.7 nahoře). Kolem každého z bodů Z, V, S a J se opsala kružnice s poloměrem $\frac{a}{2}$ (viz obr. 2.7 dole vlevo), jejich průsečíky určovaly vrcholy hledaného čtverce $ABCD$ (viz obr. 2.7 dole vpravo).



Obr. 2.7 Konstrukce čtverce – druhý způsob.

Pro konstrukci obdélníku se stranami dané délky existovala podobná pravidla jako pro konstrukci čtverců.

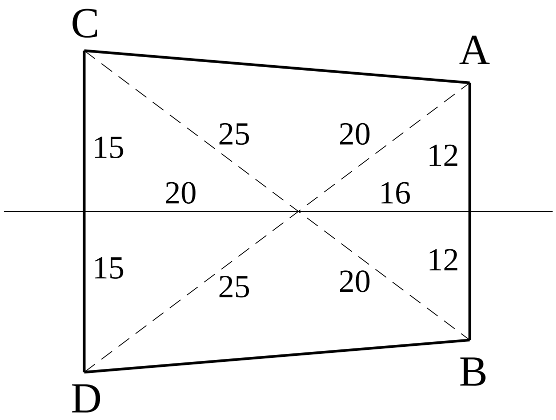
[35] Podle [Dat], str. 56–57.

Konstrukce rovnoramenného lichoběžníku

Následující metodu uvedl Āpastamba pro konstrukci velkého oltáře *Mahāvedi*.[36] Tento oltář má podle tradice tvar rovnoramenného lichoběžníku, jehož základna byla dlouhá 30 *pada*, čelo 24 *pada* a výška 36 *pada*.[37] Āpastamba popsal čtyři metody, které se liší jen málo. Jedna z nich je tato:[38]

> **ApSS/v.3**
> *Diagonála obdélníku, jehož strany jsou* 3 *a* 4 [*pada*], *je* 5. *S těmi zvětšenými o trojnásobek* [jsou určeny] *dva východní vrcholy vedi. S těmi zvětšenými o čtyřnásobek* [jsou určeny] *dva západní vrcholy.*

Popsaný lichoběžník je na obrázku 2.8.



Obr. 2.8 Konstrukce rovnoramenného lichoběžníku.

Āpastambova metoda využívá Pythagorovu větu:

$$3^2 + 4^2 = 5^2,$$

$$(3 + 3 \cdot 3)^2 + (4 + 3 \cdot 4)^2 = (5 + 3 \cdot 5)^2, \qquad 12^2 + 16^2 = 20^2,$$

$$(3 + 4 \cdot 3)^2 + (4 + 4 \cdot 4)^2 = (5 + 4 \cdot 5)^2, \qquad 15^2 + 20^2 = 25^2.$$

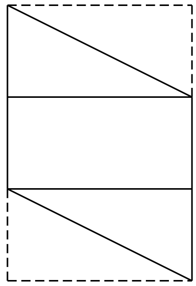
Konstrukce rovnoběžníku

Z různých metod na konstrukci rovnoběžníku vybereme jednu popsanou Āpastambou:[39]

> **ApSS/xvi.8**
> *Sestroj obdélník dlouhý $\frac{1}{5}$ puruṣa od východu na západ a $\frac{1}{10}$ puruṣa široký, na sever stejně jako na jih připoj další* [stejně velký obdélník]. *Sestroj jejich diagonály ze severozápadních vrcholů.*

[36] Někdy též *Sāumikī vēdi*, viz např. [BuA1], str. 545.
[37] Vrcholy se nazývaly *śroṇi* (kyčle) a *aṃsa* (ramena), viz [SA].
[38] Podle [BuA2], str. 340–341.
[39] Podle [BuA2], str. 375.

Postup konstrukce je patrný z obr. 2.9.



Obr. 2.9 Konstrukce rovnoběžníku.

2.5. Kombinace ploch

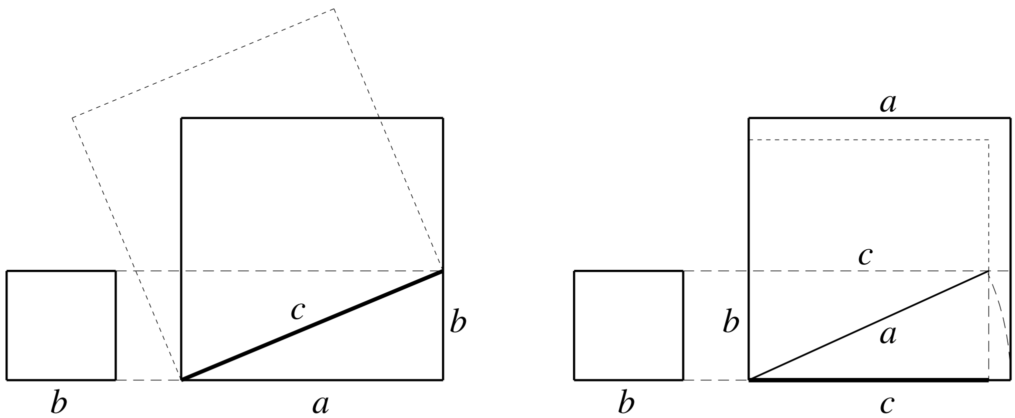
Konstrukce čtverce s obsahem rovným součtu, resp. rozdílu obsahů dvou různých čtverců

Téměř ve všech *Śulbasūtrách* nalezneme popis konstrukce čtverce, jehož obsah je roven součtu nebo rozdílu obsahů dvou daných různých čtverců. Následující pravidla uvedl Āpastamba:[40]

ApSS/ii.4
Odděl z většího [čtverce] *pruh o straně menšího čtverce. Diagonála odříznutého pruhu sjednocuje oba* [čtverce].

ApSS/ii.5
Chceš-li si odečíst od čtverce [jiný] *čtverec, tak odřízni pruh o straně toho čtverce, který chceš odečíst a táhni delší stranou odříznutého pruhu napříč ke druhé straně. Kde protne* [protilehlou stranu] *tento* [kus] *se odřízne. Tím je* [menší čtverec] *odečten.*

V obou případech se uplatní znalost Pythagorovy věty $a^2 + b^2 = c^2$, resp. $a^2 - b^2 = c^2$, postup je vidět na obrázku 2.10.



Obr. 2.10 Součet a rozdíl obsahů dvou čtverců.

[40] Podle [BuA2], str. 332–333, [Pl1], str. 21, podobně i ve slokách BSS/ii.1, BSS/ii. 2, KSS/ii.13, KSS/iii.3.

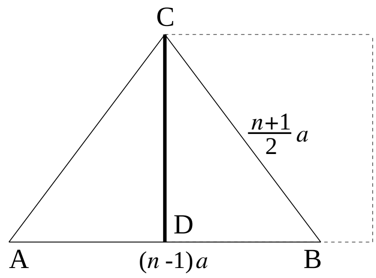
Konstrukce čtverce s obsahem rovným součtu obsahů n stejných čtverců

Kātyāyana popsal konstrukci čtverce, který má stejný obsah jako n stejných daných čtverců:[41]

KSS/vi.5
Tolik [n] *čtverců* [stejně velkých o straně a] *kolik si přeješ sloučit v jeden; příčná čára* [základna] *bude* [rovna] *o jednu méně, dvojnásobná strana bude* [rovna] *o jednu více,* [takto] *vytvoř* [rovnoramenný] *trojúhelník. Jeho šíp* [výška] *to dává.*

Jestliže n byl počet stejných čtverů o straně a, které se měly sloučit v jeden, sestrojil se rovnoramenný trojúhelník ABC, jehož základna AB měla délku $(n-1)$-násobku délky strany a. Obě ramena AC a BC dohromady měla délku $(n+1)$-násobku délky strany a. Konstrukce podle pravidel uvedených v *Śulbasūtrách*:

Nakreslila se úsečka AB délky $(n-1)a$. V bodech A a B se upevnily dvě tyče a na ně se přivázaly dva konce provazu délky $(n+1)a$. Provaz se držel za prostředek a natáhl se do strany, tam se označil bod C. V polovině strany AB se označil bod D a spojily se body C, D. Pak čtverec nad stranou CD měl stejný obsah jako n daných čtverců (viz obr. 2.11).



Obr. 2.11 Součet obsahů n stejných čtverců.

Opět byla užita Pythagorova věta, pro trojúhelník BCD platí:

$$(CD)^2 = (BC)^2 - (BD)^2 = \left(\frac{n+1}{2}a\right)^2 - \left(\frac{n-1}{2}a\right)^2 =$$
$$= \frac{n^2+2n+1}{4}a^2 - \frac{n^2-2n+1}{4}a^2 = na^2.$$

V případě, že číslo n je čtvercem, tj. $n = m^2$, lze odtud odvodit obecný tvar některých pythagorejských trojic $(m, \frac{m^2-1}{2}, \frac{m^2+1}{2})$. Podobně vyjadřoval trojice i Platón (viz [BeJ2]).

Existovala i pravidla pro konstrukci čtverce s obsahem stejným jako dva dané trojúhelníky či dva dané pětiúhelníky (viz [Dat]).

41 Podle [Dat], str. 72–73.

2.6. Transformace

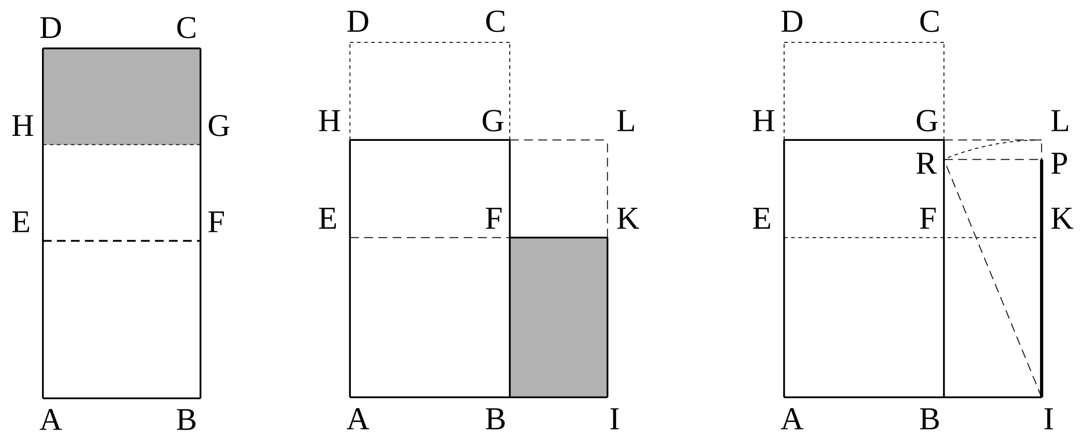
Při konstrukci oltářů byly důležité rovnoploché útvary, byla potřebná transformace („přeměna“) jednoho útvaru na druhý o stejném obsahu. Někdy musel nový útvar, kromě stejné velikosti plochy, splňovat ještě nějakou další podmínku, nejčastěji měl předepsanou délku jedné strany.

Transformace obdélníku na čtverec

Āpastamba, Baudhāyana i Kātyāyana popsali metodu k sestrojení čtverce s obsahem stejným jako daný obdélník. Následující pravidlo pochází od Āpastamby (podobně BSS/ii.5, KSS/iii.2):[42]

> **ApSS/ii.7**
> *Chceš-li přeměnit obdélník na čtverec, odděl čtvercovou část o jeho šířce; rozděl zbytek na dva stejné díly, přesuň a otoč* [vzdálenější z nich] *a připoj ke straně čtverce. Pak přidej* [čtvercový] *díl k zaplnění* [prázdného místa v rohu]. *To bylo učeno* [dříve] *jak odečíst* [připojený čtverec od nově vytvořeného].

Popis konstrukce je znázorněn na následujících obrázcích. Byl dán obdélník $ABCD$. Bod E leží na straně AD tak, že $|AE| = |AB|$. Pak se doplnil čtverec $ABFE$. Následně se v polovině strany ED označil bod H a obdélník $EFCD$ se rozdělil na poloviny úsečkou HG (viz obr. 2.12 vlevo). Pak se obdélník $HGCD$ přesunul do pozice $FBIK$ a doplnil se čtverec $AILH$ (viz obr. 2.12 uprostřed). Hledaný čtverec měl obsah rovný rozdílu obsahů čtverců $AILH$ a $FKLG$. Strana IL se otočila kolem bodu I tak, že proťala stranu BG v bodě R, tedy $|IL| = |IR|$. Nyní se vedla bodem R rovnoběžka RP se stranou GL tak, že bod P ležel na straně IL. Pak IP je stranou hledaného čtverce, který má obsah stejný jako obdélník $ABCD$ (viz obr. 2.12 vpravo).



Obr. 2.12 Transformace obdélníku na čtverec.

---

[42] Podle [Pl1], str. 22, [Dat], str. 83.

Označíme-li $|AB| = a$ a $|BC| = b$, pak strana malého čtverce $FKLG$ má délku $\frac{b-a}{2}$, strana velkého čtverce $AILH$ je $a + \frac{b-a}{2} = \frac{b+a}{2}$. Pak byla využita identita

$$\left(\frac{b+a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = ab.$$

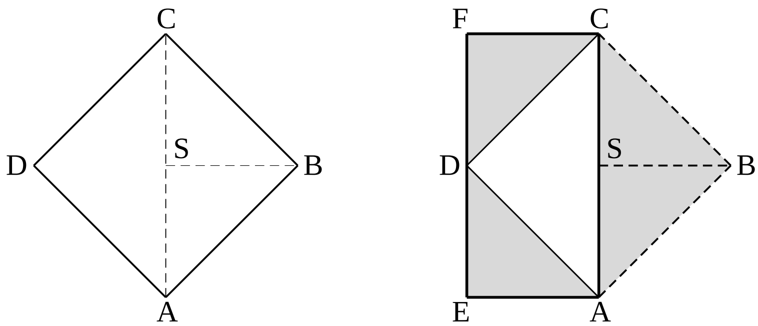
Budou-li čísla a, b čtverce, tj. $a = n^2$, $b = m^2$, dostáváme obecný tvar pythagorejských trojic $(mn, \frac{m^2-n^2}{2}, \frac{m^2+n^2}{2})$.

Transformace čtverce na obdélník

Baudhāyana uvedl i pravidlo na transformaci čtverce na obdélník:[43]

BSS/i.52
Chceš-li přeměnit čtverec na obdélník, rozděl ho diagonálou. Rozděl opět jednu z částí na dvě a připoj je vhodně tak, aby odpovídaly dvěma stranám [druhé poloviny].

Byl dán čtverec $ABCD$. Rozdělil se diagonálou AC a bod v jejím středu se označil S (viz obr. 2.13 vlevo). Pak se trojúhelník ABS otočil do pozice ADE a podobně trojúhelník CSB do pozice CFD. Pak vzniklý obdélník $EACF$ měl stejný obsah jako původní čtverec $ABCD$ (viz obr. 2.13 vpravo).



Obr. 2.13 Transformace čtverce na obdélník.

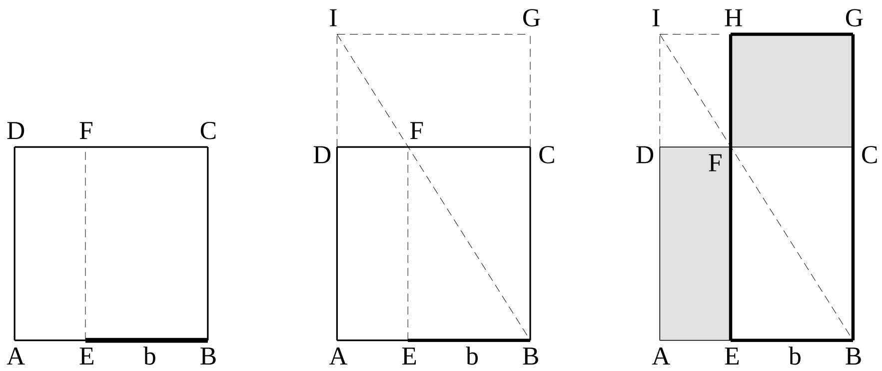
Transformace čtverce na obdélník s danou délkou strany

Transformaci čtverce na obdélník, jehož strana je daná, popsal Āpastamba (podobné pravidlo je také BSS/ii.4):[44]

ApSS/iii.1
Chceš-li přeměnit čtverec na obdélník [odděl obdélníkový díl] *se stranou dlouhou jak si přeješ* [daná strana obdélníku]. *Co přebývá, mělo by se přidat* [k prvnímu] *tak, aby to pasovalo.*

[43] Podle [Dat], str. 85.
[44] Podle [Pl1], str. 22, [BuA2], str. 334.

$ABCD$ byl daný čtverec se stranou délky a. Jestliže strana b hledaného obdélníku byla menší než strana čtverce a, pak se oddělila délka b ze stran AB a CD, tím vznikl obdélník $EBCF$ (viz obr. 2.14 vlevo). Úhlopříčka BF se prodloužila, až proťala stranu AD v bodě, který označíme I, a doplnil se obdélník $ABGI$ (viz obr. 2.14 uprostřed). Prodloužená strana EF proťala stranu GI v bodě H (viz obr. 2.14 vpravo). Pak $EBGH$ byl hledaný obdélník s obsahem rovným obsahu čtverce $ABCD$ a stranou EB dané délky b.



Obr. 2.14 Transformace čtverce na obdélník s danou délkou strany.

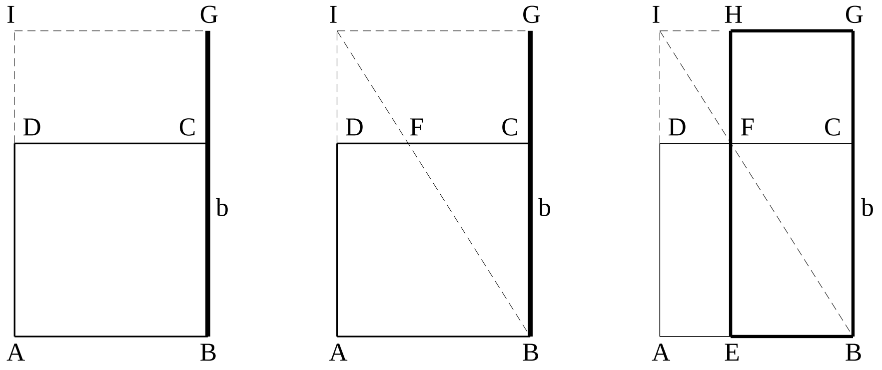
Tato metoda je založena na shodnosti trojúhelníků:

$\triangle\ ABI \cong \triangle\ GIB$, protože BI je diagonála obdélníku $ABGI$,

$\triangle\ EBF \cong \triangle\ CFB$, $\triangle\ DFI \cong \triangle\ HIF$,

Obsah obdélníku $AEFD$ je proto stejný jako obsah obdélníku $FCGH$, tedy obsah obdélníku $EBGH$ je stejný jako obsah daného čtverce $ABCD$.

Jestliže strana b hledaného obdélníku byla větší než strana a čtverce $ABCD$, postup byl podobný. Prodloužily se strany AD a BC a na nich se označily body I a G takové, že $|AI| = |BG| = b$. Vznikl obdélník $ABGI$ (viz obr. 2.15 vlevo). Diagonála BI proťala stranu CD v bodě F (viz obr. 2.15 uprostřed). Pak CF byla šířkou hledaného obdélníku. Bodem F se vedla rovnoběžka se stranou AI, která proťala stranu AB v bodě E a stranu GI v bodě H (viz obr. 2.15 vpravo). Pak $EBGH$ byl hledaný obdélník s obsahem rovným obsahu čtverce $ABCD$ a stranou EB dané délky b.



Obr. 2.15 Transformace čtverce na obdélník s danou délkou strany.

Popsaná geometrická konstrukce má i algebraický význam, jde o geometrické řešení rovnice

$$bx = a^2,$$

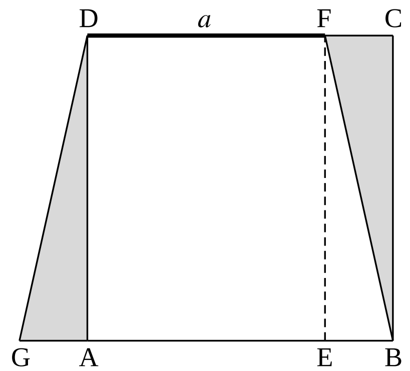
kde a je délka strany daného čtverce, b je daná délka jedné strany hledaného obdélníku, x je hledaná délka druhé strany. Podobné postupy užívali i staří Řekové (viz např. [BeJ2]).

Transformace čtverce nebo obdélníku na rovnoramenný lichoběžník s danou délkou kratší základny

Baudhāyana i Āpastamba popsali metodu *zkrácení čtverce nebo obdélníku na jedné straně*, což je způsob, jak přeměnit čtverec nebo obdélník na rovnoramenný lichoběžník, u něhož je známá velikost horní základny (čela):[45]

> **BSS/i.55**
> *Chceš-li zkrátit čtverec nebo obdélník na jedné straně* [odděl obdélníkový díl] *zkrácením délky strany. Rozděl zbytek diagonálou a připoj* [tyto dva díly] *k oběma stranám* [odděleného dílu] *po převrácení.*

Byl dán čtverec $ABCD$ a délka horní základny lichoběžníku a. Z daného čtverce se oddělil oddělník $AEFD$, kde $|AE| = |FD| = a$, zbylý obdélník $EBGF$ se rozdělil úlopříčkou FB. Nakonec se trojúhelník BCF přemístil do polohy DAG, tím byl zkonstruován lichoběžník $GBFD$, jehož horní základna měla požadovanou délku $|FD| = a$ (viz obr. 2.16).



Obr. 2.16 Transformace obdélníku na rovnoramenný lichoběžník.

Transformace čtverce nebo obdélníku na trojúhelník

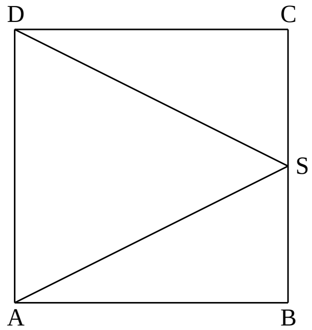
Pravidlo, jak transformovat čtverec na rovnoramenný trojúhelník se stejným

[45] Podle [Dat], str. 91.

obsahem, popsal například Baudhāyana:[46]

BSS/i.56
Chceš-li přeměnit čtverec nebo obdélník na trojúhelník, sestroj čtverec s dvojnásobnou plochou než plocha obrazce [který se má přeměnit]. *Upevni tyč uprostřed jeho východní strany. Uvaž na ni dva provazy a natáhni směrem k západním vrcholům. Odřízni díly na druhé straně provazů.*

Čtverec $ABCD$ byl sestrojen tak, aby jeho obsah byl dvakrát větší než obsah původního čtverce, resp. obdélníku, pro to existovala pravidla. Trojúhelník ASD je polovinou čtverce $ABCD$, proto má stejný obsah jako původní obrazec (viz obr. 2.17).



Obr. 2.17 Transformace čtverce na rovnoramenný trojúhelník.

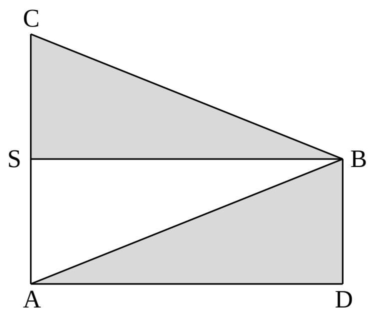
Transformace rovnoramenného trojúhelníku na čtverec

Pravidlo, jak transformovat rovnoramenný trojúhelník na čtverec, uvedl Kātyāyana:[47]

KSS/iv.5
Chceš-li přeměnit rovnoramenný trojúhelník na čtverec, odřízni jeho severní polovinu podle střední linky; pak ji překlop a polož k protější straně. Podle metody konstrukce čtverce se stejnou plochou jako obdélník sestroj čtverec. To je ta metoda konstrukce.

Podle Kātyāyanovy metody se nejprve sestrojil obdélník $ADBS$ se stejným obsahem jako původní rovnoramenný trojúhelník ABC, při tom se využila shodnost trojúhelníků SBC a ADB (viz obr. 2.18), pak se použila již dříve uvedená metoda přeměny obdélníku na rovnoplochý čtverec.

[46] Podle [Dat], str. 92.
[47] Podle [Dat], str. 92–93.



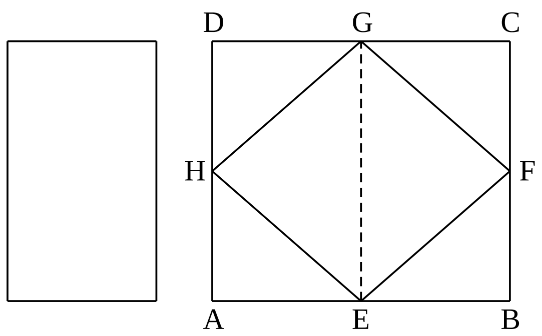
Obr. 2.18 Transformace rovnoramenného trojúhelníku na čtverec.

Transformace čtverce nebo obdélníku na kosočtverec

Metodu transformace daného čtverce nebo obdélníku na kosočtverec vysvětlil Baudhāyana takto:[48]

> **BSS/i.57**
> *Chceš-li přeměnit čtverec nebo obdélník na kosočtverec, sestroj obdélník s dvojnásobnou plochou* [než původní útvar]. *Upevni tyč ve středu východní strany. Uvaž na ni dva provazy a natáhni směrem ke středům severní a jižní strany* [obdélníku]. *Odřízni díly na druhé straně* [provazů]. *Tímto je také vysvětlena konstrukce druhého trojúhelníku.*

Obdélník $ABCD$ vznikl spojením dvou shodných obdélníků. Trojúhelník EFG má poloviční obsah než obdélník $EBCG$, totéž platí pro trojúhelník EGH a obdélník $AEGD$. Tedy kosočtverec $EFGH$ má stejný obsah jako původní obdélník (viz obr. 2.19). Podobná pravidla uvedli i Āpastamba a Kātyāyana.



Obr. 2.19 Transformace obdélníku na kosočtverec.

Transformace čtverce na kruh

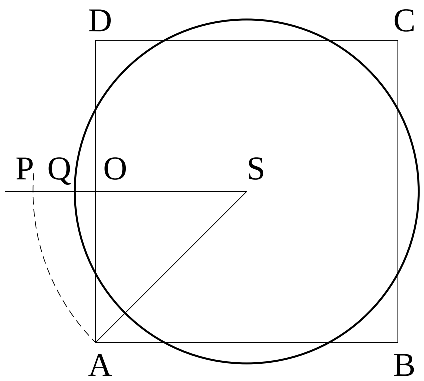
V *Śulbasūtrách* byl často řešen problém nalezení kruhu se stejným obsahem jako daný čtverec. Podobné metody uváděli i další autoři, takto popsal pravidlo

[48] Podle [Dat], str. 93.

Āpastamba:[49]

ApSS/iii.2
Chceš-li přeměnit čtverec na kruh, otoč polovinu diagonály směrem k přímce východ – západ; pak nakresli kružnici dohromady s jednou třetinou toho, co leží vně [čtverce].

Pravidlo říká, že v daném čtverci $ABCD$ se nalezl střed S jako průsečík úhlopříček. Pak se polopřímka SA otočila kolem středu S do pozice SP tak, aby SP byla kolmá ke straně AD. Střed strany AD byl označen jako O. Na úsečce OP byl vyznačen bod Q tak, že délka $|OQ|$ byla jednou třetinou délky $|OP|$. Hledaný kruh měl střed S a jeho poloměr měl délku $|SQ|$ (viz obr. 2.20).



Obr. 2.20 Transformace čtverce na kruh.

Označíme-li a stranu daného čtverce $ABCD$, pak polovina úhlopříčky má délku $|SA| = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, dále je $|OQ| = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right)a = \frac{\sqrt{2}-1}{6}a$, průměr d hledaného kruhu pak je

$$d = \left(1 + \frac{\sqrt{2}-1}{3}\right)a = \frac{2+\sqrt{2}}{3}a.$$

Této metodě odpovídá hodnota $\pi \approx 3,088$.

Transformace kruhu na čtverec

Všechny *Śulbasūtry* obsahují různé metody popisující kvadraturu kruhu, například Baudhāyana napsal:[50]

BSS/i.59
Chceš-li přeměnit kruh na čtverec, rozděl jeho průměr na osm dílů; pak rozděl jeden na dvacet devět dílů a z nich dvacet osm vynech a také šestinu dílu [z předchozího dělení] *zmenšenou o osminu.*

[49] Podle [BuA2], str. 335, [Pl1], str. 23, podobně i BSS/ii.9, KSS/iii.11.
[50] Podle [Dat], str. 143.

Strana hledaného čtverce je

$$a = \left(1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6} + \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8}\right) d,$$

kde d je průměr daného kruhu. Této metodě odpovídá hodnota $\pi \approx 3,088$.

Jedno z možných vysvětlení lze odvodit z předchozí úlohy:

$$d = \frac{2+\sqrt{2}}{3} a \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{3d}{2+\sqrt{2}}.$$

Protože staří indičtí učenci už od dob Baudhāyany uvažovali $\sqrt{2} = \frac{577}{408}$, hledali ve vztahu $a = \frac{1224}{1393} d$ nějaké vhodné vyjádření koeficientu u d. Je možné, že vycházeli ze vzathu

$$\frac{1224}{1393} = \frac{7}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6} + \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8} - \frac{41}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 1393},$$

kde zanedbávali poslední člen, tedy uvažovali[51]

$$\frac{1224}{1393} \approx \frac{7}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6} + \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8}$$

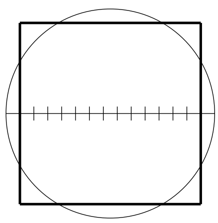
neboli

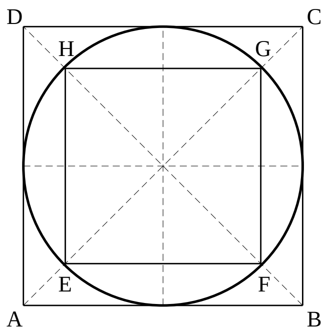
$$a = \frac{1224}{1393} d \approx \left(1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6} + \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8}\right) d.$$

Āpastamba uvedl jednodušší, avšak méně přesnou metodu (podobně také BSS/ii.11, KSS/iii.12):[52]

ApSS/iii.3
Rozděl [průměr] *na patnáct dílů a odstraň dva. To je zhruba strana* [stejného] *čtverce.*

Je to přibližná metoda založená na konstrukci čtverce, jehož strana a má délku $\frac{13}{15}\, d$, kde d je průměr daného kruhu (viz obr. 2.21 vlevo).





Obr. 2.21 Transformace kruhu na čtverec.

[51] Různé domněnky, jak staří Indové mohli dospět k tomuto vyjádření, jsou uvedeny v [Dat].
[52] Podle [BuA2], str. 335, [Pl1], str. 23.

Jedno z možných zdůvodnění tohoto postupu je uvedeno v [Dat]. Dané kružnici se opíše čtverec $ABCD$ a vepíše čtverec $EFGH$. Strana čtverce $ABCD$ má délku $2r$ a jeho obsah je $4r^2$. Strana menšího čtverce $EFGH$ má délku $\sqrt{2}r$ a jeho obsah je $2r^2$ (viz obr. 2.21 vpravo).

Označíme-li obsah kruhu S, pak platí

$$2r^2 < S < 4r^2.$$

Kruh leží „uprostřed“, jeho obsah může být přibližně aritmetickým průměrem čtverců

$$S = \frac{4r^2 + 2r^2}{2} = 3r^2.$$

To odpovídá hodnotě $\pi = 3$. Označme stranu hledaného čtverce a. Protože požadujeme, aby čtverec měl stejný obsah jako kruh, přibližně platí

$$a^2 = S = 3r^2 \qquad \Rightarrow \quad a = \sqrt{3}r.$$

Pro hodnotu $\sqrt{3}$ se používalo vyjádření $\sqrt{3} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{15} = \frac{26}{15}$, odtud tedy $a = \frac{26}{15}r = \frac{13}{15}d$.

Z této metody můžeme odvodit i odpovídající hodnotu π, která je ovlivněná přibližnou hodnotou $\sqrt{3}$:

$$\pi = 4\left(\frac{13}{15}\right)^2 = \frac{676}{225} \approx 3,00444.$$

To není příliš dobrá aproximace, rozhodně už staří Babyloňané znali přesnější (viz [BBV]).

V *Śulbasūtrách* „nalezneme“ mnoho různých hodnot π. Je to tím, že autoři nehledali přímo číslo π, jeho hodnoty dnes můžeme odvodit z různých přibližných metod transformace ploch, každé metodě tak odpovídá jiná hodnota π.[53]

Poznamejme, že v Mezopotámii se většinou počítalo s hodnotou $\pi = 3$ nebo $\pi = 3\frac{1}{8}$, ze starých egyptských výpočtů obsahu kruhu, je možné odvodit hodnotu $\pi \approx 3,1605$ (viz [BBV]). Archimédés (asi 287 až 212 př. n. l.) porovnáním obvodů 96-úhelníků opsaných a vepsaných do kruhu provedl velmi přesný odhad $3,140845 \approx 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} \approx 3,142857$ (viz [BS]).

2.7. Podobnost

Jak už bylo řečeno, oltář *Mahāvedi* měl tvar rovnoramenného lichoběžníku[54] se základnou 30 *pada* (nebo *prakrama*), čelem 24 *pada* (nebo *prakrama*) a výškou 36 *pada* (nebo *prakrama*), jeho obsah byl $S = 972$. *Sautrāmaṇi-vedi*, resp.

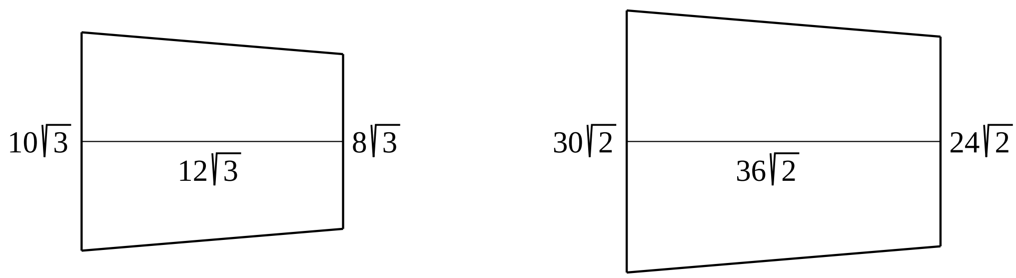
[53] Další nepříliš přesné hodnoty π odvozené z dalších konstrukcí jsou uvedeny např. v [Kak4], [Ku1].

[54] Rovnoramenný lichoběžník byl oblíbený i v Mezopotámii.

Aśvamedha-vedi (pro oběť koně) měly mít podle pravidel stejný tvar, ale třetinový, resp. dvojnásobný obsah (viz obr 2.22). Āpastamba popsal konstrukci pomocí *trtiya-karaṇī* ($\sqrt{\frac{1}{3}}$), *tri-karaṇī* ($\sqrt{3}$), resp. *dvi-karaṇī* ($\sqrt{2}$):[55]

ApSS/v.8
[Při *Sautrāmaṇi-vedi* je] *trtiya-karaṇī prakrama místo prakrama; nebo pomocí tri-karaṇī* [*prakrama*, přitom jsou] *obě kratší strany osminásobné a desetinásobné, Pṛṣṭhyā je dvanáctinásobná.*

ApSS/vi.1
[Při konstrukci *vedi* pro oběť koně] *se použije dvi-karaṇī prakrama místo prakrama.*



Obr. 2.22 Lichoběžníky s daným poměrem velikosti obsahů.

Pro menší z oltářů byly základny dlouhé $\frac{30}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}$, $\frac{24}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}$ a výška $\frac{36}{\sqrt{3}} = 12\sqrt{3}$, obsah pak byl

$$S_1 = 12\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}(8\sqrt{3} + 10\sqrt{3}) = 324 \ (= \frac{1}{3}S),$$

Podobně pro větší oltář:

$$S_2 = 36\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}(24\sqrt{2} + 30\sqrt{2}) = 1\,944 \ (= 2S).$$

Takto bylo možné zkonstruovat oltáře stejného tvaru s n-násobným obsahem. Podobná metoda se používala i pro oltáře složitějších tvarů, například pro zmiňovaný oltář *Śyenacit* ve tvaru primitivního sokola s obsahem $7\frac{1}{2}$ čtverečných *puruṣa* (viz obr. 2.1). Tato velikost se však týkala pouze první konstrukce, při druhé konstrukci musela mít plocha velikost $8\frac{1}{2}$ čtverečných *puruṣa*, při třetí $9\frac{1}{2}$ atd., takto se pokračovalo až k velikosti $101\frac{1}{2}$. Baudhāyana uvedl toto pravidlo:[56]

BSS/ii.12
Rozděl to, co je rozdíl od původní [dané] *velikosti oltáře, na* 15 *dílů, přičti ke každé* [základní] *části daného tvaru dva z těchto dílů. Pak sestroj obrazec* [stejným způsobem jako původní] *se* $7\frac{1}{2}$ *těchto* [upravených] *jednotek.*

[55] Podle [BuA2], str. 342. Konstrukce délek $\sqrt{3}$ a $\sqrt{\frac{1}{3}}$ jsou popsány v odstavci 2.9.

[56] Podle [Dat], str. 154–155.

Podle tohoto tvrzení se sestrojil čtverec s obsahem m čtverečných *puruṣa*, který se rozdělil na 15 stejných dílů – obdélníků. Dva z těchto dílů se sloučily s jednotkovým čtvercem tak, že vznikl nový čtverec o straně délky $\sqrt{1 + \frac{2m}{15}}$ *puruṣa*. Tato délka se pak stala novou jednotkou pro konstrukci oltáře, jehož obsah byl

$$7\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2m}{15}\right) = 7\frac{1}{2} + m \quad \text{(čtverečných } \textit{puruṣa}\text{)}.$$

Uvedená metoda představovala geometrické řešení kvadratické rovnice

$$ax^2 = b.$$

Původní oltář s obsahem $7\frac{1}{2}$ čtverečných *puruṣa* se skládal ze čtyř jednotkových čtverců (tělo sokola), dvou obdélníků 1 krát $1\frac{1}{5}$ (křídla) a jednoho obdélníku 1 krát $1\frac{1}{10}$ (ocas), jak je znázorněno na obr. 2.1. Při další konstrukci bylo potřeba každou stranu zvětšit x krát tak, aby obsah nového oltáře byl $7\frac{1}{2} + m$ čtverečných *puruṣa*, řešila se tedy rovnice

$$\begin{aligned} 2x \cdot 2x + 2x\left(x + \frac{x}{5}\right) + x\left(x + \frac{x}{10}\right) &= 7\frac{1}{2} + m, \\ \frac{15}{2}x^2 &= 7\frac{1}{2} + m, \\ x &= \sqrt{1 + \frac{2m}{15}}. \end{aligned}$$

Podobné metody uvedli i Āpastamba a Kātyāyana.

2.8. Obsahy

V *Śulbasūtrách* byla popsána i pravidla pro výpočet obsahu čtverce a obsahu rovnoramenného lichoběžníku. Autoři však znali i metody na výpočet obsahu obdélníku a trojúhelníku, protože obsah oltáře byl určován tak, že oltář byl rozdělen na elementární čtverce, trojúhelníky, obdélníky atd. Āpastamba uvedl:[57]

> **ApSS/iii.4**
> *Jedna* [délková], *jednotka* [např. 1 *puruṣa*, jako strana čtverce] *vytvoří jednu jednotku* [plochy – 1 čtverečný puruṣa].
>
> **ApSS/iii.6**
> *Dvěma* [délkovými jednotkami, které jsou stranami čtverce, vzniknou] *čtyři* [plošné jednotky], *třemi devět.*
>
> **ApSS/iii.7**
> *Šňůra vytvoří* [když se s ní konstruuje čtverec] *právě tolik řad* [malých čtverců], *kolik obsahuje jednotek.*

[57] Podle [BuA2], str. 335–336.

Āpastamba také počítal obsah *Mahāvedi* (velkého oltáře) tak, že přeměnil oltář, tj. rovnoramenný lichoběžník, na stejnoplochý obdélník podobným způsobem, jako tomu bylo při transformaci obdélníku na lichoběžník,[58] jak je naznačeno na obrázku 2.16. Musel tedy vědět, jak vypočítat obsah obdélníku, přestože konkrétní pravidlo nezmiňoval.

Śulbasūtry neobsahují obecná pravidla na výpočty obsahů elementárních útvarů – trojúhelníků, čtverců či obdélníků, výpočty byly provedeny vždy pro každý konkrétní případ.

2.9. Odmocniny

V pravidlech pro konstrukci oltářů se objevovaly odmocniny, které se nazývaly *karaṇī*,[59] konkrétně se v *Śulbasūtrách* vyskytovaly například *dvi-karaṇī* ($\sqrt{2}$), *tri-karaṇī* ($\sqrt{3}$), *tṛtiya-karaṇī* ($\sqrt{\frac{1}{3}}$), *saptama-karaṇī* ($\sqrt{\frac{1}{7}}$), *aṣṭadaśa-karaṇī* ($\sqrt{18}$). Diagonála čtverce o straně a, tj. $a\sqrt{2}$, se nazývala *saviśeṣa*.

Pozoruhodné je velmi přesné vyjádření $\sqrt{2}$, které používal Āpastamba:[60]

> **ApSS/i.6**
> *Zvětši míru* [ke které má být nalezena $\sqrt{2}$] *o její třetinu a ještě čtvrtinu* [té třetiny] *a zmenši o jednu svou čtyřiatřicetinu. To je saviśeṣa.*

Pravidlu odpovídá matematické vyjádření:

$$\sqrt{2}\, a = a + \frac{a}{3} + \frac{a}{3 \cdot 4} - \frac{a}{3 \cdot 4 \cdot 34},$$

odkud pro $a = 1$ dostáváme

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34} = \frac{577}{408} \approx 1.414215686\ldots \tag{2.1}$$

Porovnáme-li s přesnou hodnotou $\sqrt{2} \approx 1,414213562\ldots$, má indická hodnota pět správných desetinných míst a je jen o trochu horší než hodnota babylónská $\sqrt{2} \approx 1,414212963$ (viz [BBV]).[61] Není však jasné, jak bylo toto vyjádření odvozeno. Jeden z možných způsobů je popsán v [Dat] a opět využívá geometrické překládání ploch.[62]

---

[58] Viz ApSS/v.7, podle [BuA2], str 341.

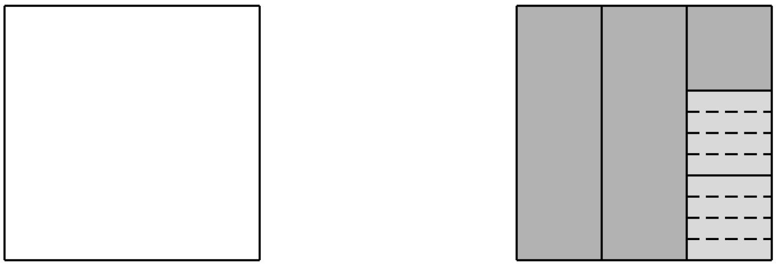
[59] Termín *karaṇī* lze vysvětlit jako „původce“, resp. to, co vytváří, tedy [strana čtverce] $\sqrt{2}$ vytváří [čtverec o velikosti plochy] 2, proto se $\sqrt{2}$ (*dvi-karaṇī*) někdy říkalo „zdvojovač“. Původně však *karaṇī*, resp. *rajju karaṇī* označovalo provazec, kterým se vyměřoval čtverec, viz [Th].

[60] Podle [BuA2], str. 329–330, stejné vyjádření je ve sloce BSS/ii.12.

[61] Komentátor Rama v polovině 15. století přidal k vzorci (2.1) ještě další dva členy $-\frac{1}{3\cdot4\cdot33\cdot34} + \frac{1}{3\cdot4\cdot34\cdot34}$, a tím získal hodnotu se 7 správnými desetinnými místy, viz [Jo1].

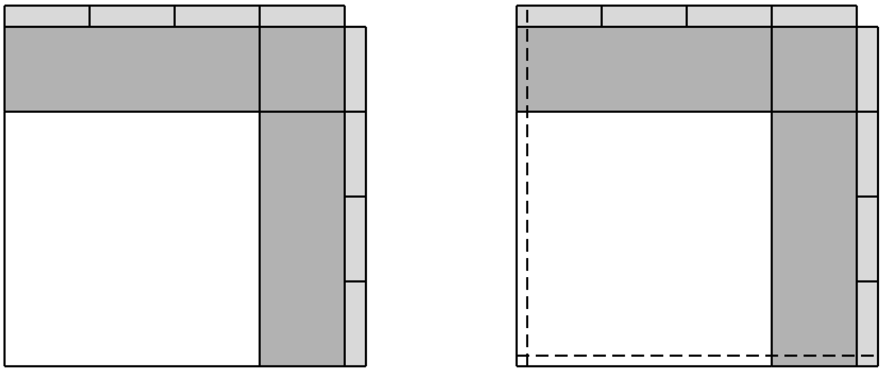
[62] Další možná odvození vztahu (2.1) je možno nalézt např. v [BeJ4], [SaTA], [Hen].

Vezmou se dva jednotkové čtverce, které, sloučené dohromady, vytvoří čtverec, jehož strana má délku $\sqrt{2}$. Jeden z daných čtverců se rozdělí na tři stejné obdélníky, z nichž jeden se dělí ještě dál, na tři stejné čtverečky. Dva z těchto čtverečků se znovu rozdělí, každý na čtyři stejné pruhy (viz obr 2.23).



Obr. 2.23 Geometrické odvození $\sqrt{2}$ – dělení čtverců.

Díly rozděleného čtverce se připojí k prvnímu čtverci, jak je znázorněno na obrázku 2.24. V pravém horním růžku však ještě kousek chybí, strany nového čtverce se proto musí o něco zmenšit.



Obr. 2.24 Geometrické odvození $\sqrt{2}$ – skládání čtverce.

Strana nového čtverce má délku $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$. Chceme ji zmenšit, abychom doplnili pravý horní růžek, tj. $\left(\frac{1}{12}\right)^2$, tedy

$$\begin{aligned} 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}\right) \cdot x &= \left(\frac{1}{12}\right)^2, \\ x &= \frac{1}{12 \cdot 34}. \end{aligned}$$

Strana hledaného čtverce má tedy délku

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}.$$

Výsledek není přesný, protože levý dolní růžek může být oddělen jen jednou.

Podobné vyjádření i s možným odvozením existovalo i pro $\sqrt{3}$:

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 52} = \frac{1\,351}{780} \approx 1,7320512\ldots.$$

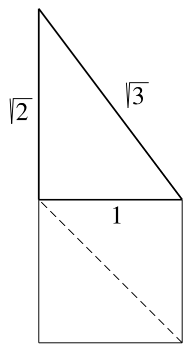
Porovnejme se správnou hodnotou $\sqrt{3} = 1,7230508\ldots$ a přesnějším odhadem, k němuž dospěl Archimédés[63]

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1\,351}{780}, \qquad \text{tj.} \qquad 1,7320231\cdots < \sqrt{3} < 1,7320512\ldots$$

Ke konstrukci délky $\sqrt{3}$ Āpastamba uvedl:[64]

ApSS/ii.2
Míra [jednotka] *je šířka, dvi-karaṇī* [$\sqrt{2}$] *je délka. Provazec* [rovný] *přeponě je tri-karaṇī* [$\sqrt{3}$].

Při této konstrukci se opět využívala Pythagorova věta $1^2 + (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2$, jak je patrné na obrázku 2.25.



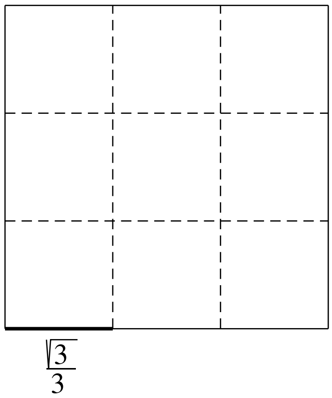
Obr. 2.25 Konstrukce $\sqrt{3}$.

Ke konstrukci délky $\sqrt{\frac{1}{3}}$ uvedl Āpastamba toto pravidlo:[65]

ApSS/ii.3
Tímto [$\sqrt{3}$] *je také objasněna tṛtiya-karaṇī* [$\sqrt{\frac{1}{3}}$]. *Ale* [čtverec nad $\sqrt{3}$] *je třeba rozdělit na 9 dílů.*

Sestrojil se čtverec o straně délky $\sqrt{3}$, který se rozdělil na devět stejných čtverečků (viz obr. 2.26). Strana malého čtverce měla délku $\frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

[63] Není jasné, jakým způsodem Archimédés nerovnosti stanovil, využil je v exhaustivní metodě při odhadu pro $\pi = \frac{o}{d}$, viz [BeJ4], [BS].
[64] Podle [BuA2], str. 332, [Pl1], str. 21, podobně ve slokách BSS/i.10, BSS/i.11, KSS/ii.10, KSS/ii.11.
[65] Podle [BuA2], str. 332.

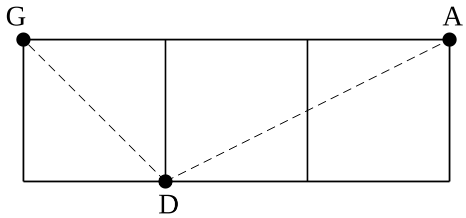


Obr. 2.26 Konstrukce $\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

V pravidlech pro vyměřování správné polohy tří základních ohňových oltářů *Gārhapatya*, *Āhavanīya* a *Dakṣiṇāgni* je možné nalézt i přibližnou hodnotu $\sqrt{5}$. Polohu těchto oltářů definoval Baudhāyana (podobně i ApSS/iv.3):[66]

BSS/i.67
Jednou třetinou délky [vzdálenosti mezi *Gārhapatya* a *Āhavanīya*] *nakresli tři čtverce těsně u sebe* [od západu k východu], *poloha Gārhapatya je v severozápadním rohu západního čtverce, Dakṣiṇāgni je v jeho jihovýchodním rohu a poloha Āhavanīya je v severovýchodním rohu východního čtverce.*

Vzájemná poloha oltářů je uvedena na obrázku 2.27. Označíme-li vzdálenost $|GA| = a$, pak $|GD| = \frac{\sqrt{2}}{3}\,a$, $|AD| = \frac{\sqrt{5}}{3}a$.



Obr. 2.27 Vzájemná poloha oltářů *Gārhapatya*, *Āhavanīya* a *Dakṣiṇāgni*.

V *Śulbasūtrách* však nalezneme ještě další metody, jak správně umístit tyto oltáře, například Āpastamba uvedl (podobně BSS/iii.3):[67]

ApSS/iv.4
Vzdálenost mezi Gārhapatya a Āhavanīya rozděl na pět nebo šest dílů, přidej šestý nebo sedmý díl (BC), rozděl [provaz této délky] *na tři díly a v západní třetině udělej značku. Pak upevni oba konce v Gārhapatya a Āhavanīya, natáhni* [provaz za značku] *na jih a udělej znamení. To je, podle písma, místo Dakṣiṇāgni.*

---

[66] Podle [Dat], str. 203.
[67] Podle [BuA2], str. 337, [Pl1], str. 24–25.

Podle uvedené metody můžeme vypočítat vzdálenosti oltářů $|GD| = \frac{2}{5}\,a$, $|AD| = \frac{4}{5}a$, resp. $|GD| = \frac{7}{18}\,a$, $|AD| = \frac{7}{9}a$.

Podobnou konstrukci popisovali i jiní autoři, mírně se však lišila délka provazu a místo, v němž se provaz držel, odtud pak dostáváme i další vyjádření vzdálenosti oltářů $|GD| = \frac{8}{21}\,a$, $|AD| = \frac{16}{21}a$ a $|GD| = \frac{12}{25}\,a$, $|AD| = \frac{18}{25}a$. Z těchto vztahů lze odvodit nepříliš přesné aproximace $\sqrt{2}$ a $\sqrt{5}$

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &\approx \frac{6}{5} = 1{,}2, & \sqrt{2} &\approx \frac{7}{6} = 1{,}166\ldots, \\ \sqrt{2} &\approx \frac{8}{7} = 1{,}142\ldots, & \sqrt{2} &\approx \frac{36}{25} = 1{,}44, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{5} &\approx \frac{12}{5} = 2{,}4, & \sqrt{5} &\approx \frac{7}{3} = 2{,}333\ldots, \\ \sqrt{5} &\approx \frac{16}{7} = 2{,}285\ldots, & \sqrt{5} &\approx \frac{54}{25} = 2{,}16. \end{aligned}$$

2.10. Zlomky

Při konstrukcích oltářů byly potřebné zlomky, které byly v *Śulbasūtrách* nazývány *aṃśa* nebo *bhāga* neboli část, resp. díl. Občas byl zlomek označen jako *kalā*, což je termín, kterým byl v textu *Ṛgveda* označen zlomek $\frac{1}{16}$. K pojmenování kmenných zlomků[68] se užívaly základní číslovky ve spojení se slovem *bhāga* nebo *aṃśa*, např. *pañca-daśa-bhāga* (patnáct dílů)[69] vyjadřovalo jednu patnáctinu ($\frac{1}{15}$) nebo řadové číslovky *pañcama-bhāga* (pátý díl)[70] neboli jedna pětina ($\frac{1}{5}$). Později se slovo *bhāga* vynechávalo, *pañcama* (pátý) znamenalo rovněž $\frac{1}{5}$. Počítání se zlomky je podrobněji pojednáno v 6. kapitole.

V *Śulbasūtrách* se však nepoužívaly jen kmenné zlomky, počítalo se i se zlomky s čitatelem větším než jedna, používala se i smíšená čísla. Zlomky $\frac{3}{8}$ nebo $\frac{2}{7}$ se nazývaly *tri-aṣṭama* (tři osmé) nebo *dvi-saptama* (dva sedmé).[71]

Autoři *Śulbasūter* zlomky nejen znali, dokázali s nimi i počítat, například Baudhāyana uvedl,[72] že je potřeba $187\frac{1}{2}$ čtvercových cihel o straně $\frac{1}{5}$ *puruṣa* k vystavění oltáře s obsahem $7\frac{1}{2}$ čtverečných *puruṣa*, tj.

$$7\frac{1}{2} : \left(\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\right) = \frac{15}{2}\cdot 25 = 187\frac{1}{2}.$$

68 Kmenný zlomek, je zlomek s čitatelem rovným jedné.
69 Viz ApSS/x.3, KSS/v.4, podle [BuA2], str. 360, [Dat], str. 212.
70 Viz ApSS/x.2, KSS/v.6, podle [BuA2], str. 360, [Dat], str. 212.
71 Viz ApSS/xix.2, ApSS/xix.6, podle [BuA2], str. 381, 382.
72 Podle [Dat], str. 214.

Āpastamba počítal obsah čtverce:[73]

ApSS/iii.8
Šňůra o $1\frac{1}{2}$ *puruṣa vytvoří* $2\frac{1}{4}$ [čtverečných *puruṣa*], *taková o* $2\frac{1}{2}$ *puruṣa* $6\frac{1}{4}$ [čtverečných *puruṣa*].

ApSS/iii.10
Polovinou strany [daného čtverce] *se vytvoří čtvrtina* [původního] *čtverce, protože* [čtverec nad] *polovinou vyplní čtvrtinu* [čtverce nad] *šňůrou dvojnásobné délky, třetí díl* [strany] *devátý díl* [čtverce].

Tato pravidla dokládají, že védští učenci zvládali umocňování zlomků:

$$\left(1\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}, \qquad \left(2\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}.$$

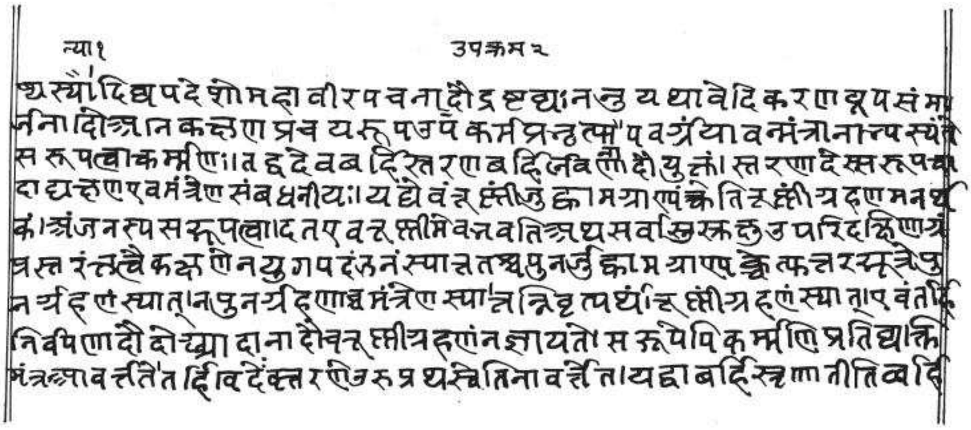
I když některé z uvedených metod jsou pracné nebo nejsou příliš přesné, pravidla obsažená v *Śulbasūtrách* prokazují slušné znalosti matematiky indických učenců už v prvním tisíciletí před naším letopočtem. Sami Indové však chápali *Śulbasūtry* spíše jako náboženské než matematické texty, v pozdějších matematických dílech už podobné konstrukce popisovány nebyly.

Přístup starých indických učenců ke geometrii v *Śulbasūtrách* byl jiný než v ostatních zemích. Geometrie sloužila náboženství, proto pohled na geometrické konstrukce byl podřízen přísným pravidlům pro obětní obřady. Ve starém Egyptě a Mezopotámii se problémy na výpočet obvodů a obsahů používaly v praktickém životě, určovala se například velikost pozemku nebo délka jeho hranice, k tomu často stačily jen výpočty přibližné. Obětní rituály naopak vyžadovaly přesné konstrukce nejen co do tvaru a velikosti, ale i umístění a orientace. Transformace rovnoplochých útvarů byly oblíbené v Řecku, ve starém Egyptě a Mezopozámii se nevyskytovaly. Na rozdíl od Mezopotámie a Řecka se v *Śulbasūtrách* neobjevují konstrukce pravidelných n-úhelníků.

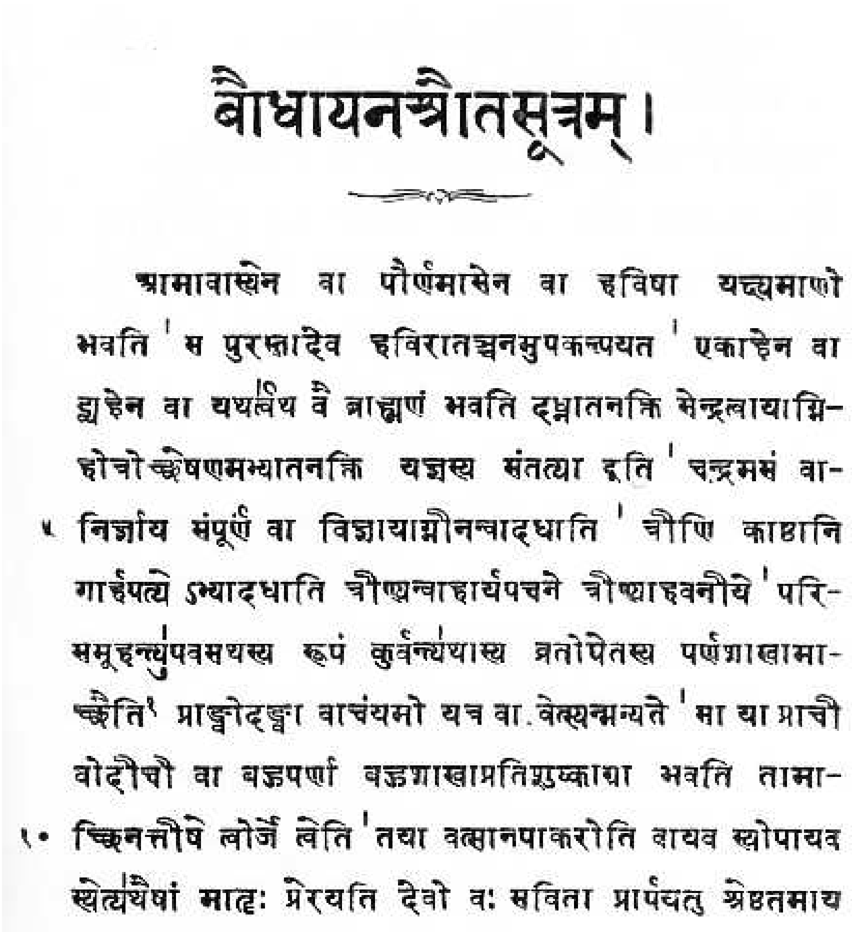
Zatímco v egyptských a mezopotámských textech najdeme většinou návody jak „vypočítat", v indických *Śulbasūtrách* je popsáno jak „zkonstruovat". I když ke stanovení potřebných délek stran bylo nutné znát základní vztahy a souvislosti, například mezi délkou strany a obsahem, důraz byl kladen na konstrukci. Konstrukce pomocí provazu a bambusové tyče připomínají některé Eukleidovy konstrukce popsané v Základech (viz [Eu]). V *Śulbasūtrách* však chybí definice a pravidla jsou uvedena bez odvozování a důkazů.

Otázkou zůstává, proč byly náboženské rituály svázány s geometrií. Je možné, že geometrické útvary symbolizovaly vesmírné objekty, kruh nebesa, čtverec Zemi atd. (viz [Pl1]). Není však jasné, zda geometrické poučky vznikly k přesnému vyjádření v rituálu nebo naopak už existující geometrická pravidla byla začleněna do náboženských praktik.

[73] Podle [BuA2], str. 336.



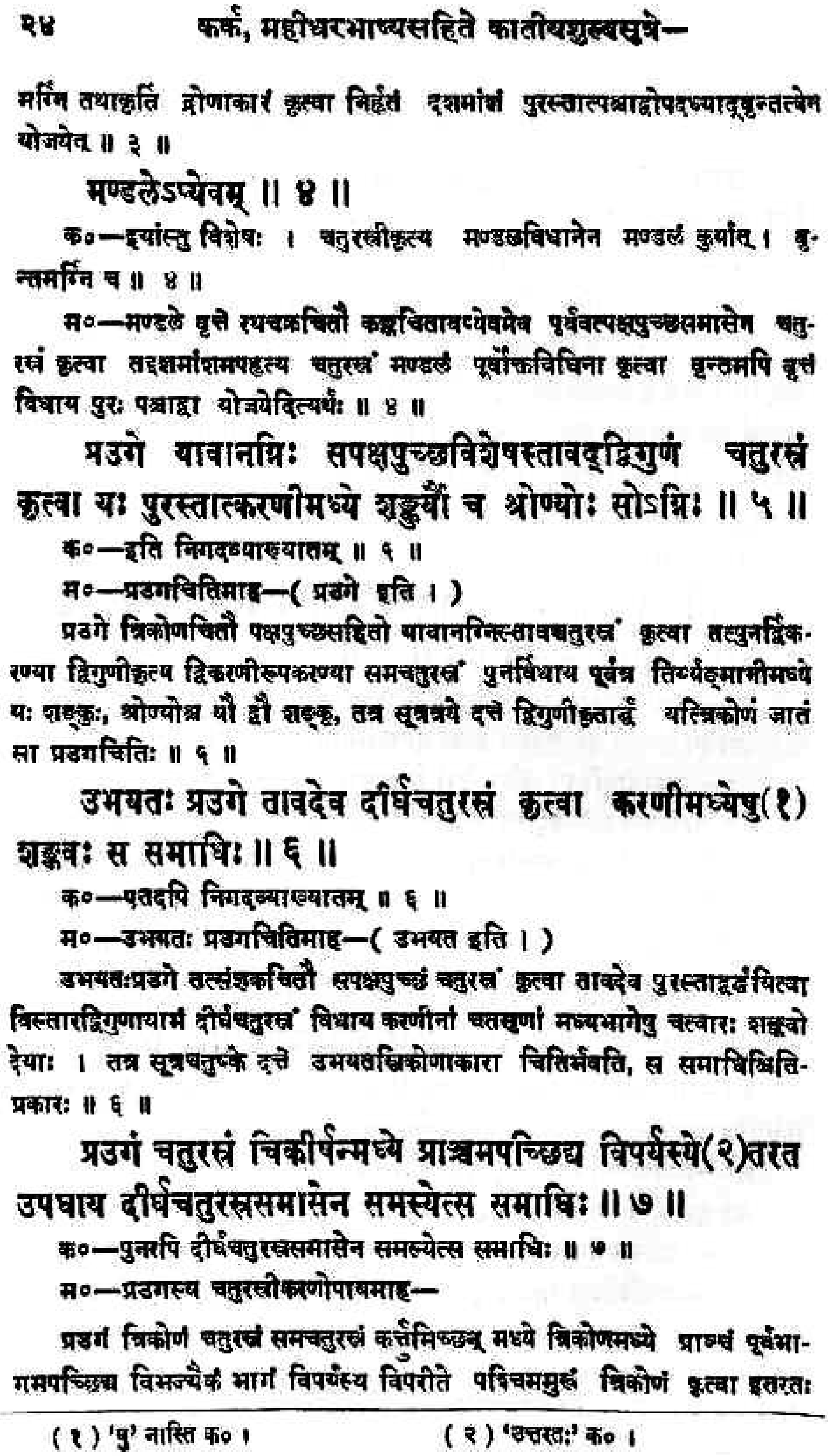
Obr. 2.28 Ukázka textu Mānavovy *Śulbasūtry*, převzato z [Man].



बौधायनश्रौतसूत्रम् ।

आमावास्येन वा पौर्णमासेन वा हविषा यक्ष्यमाणो भवति । स पुरस्तादेव हविरातञ्चनमुपकल्पयत । एकाहेन वा द्व्यहेन वा यथर्तु वै ब्राह्मणं भवति दध्नातनक्ति सेन्द्रत्वायाग्निहोत्रोच्छेषणमभ्यातनक्ति यज्ञस्य संतत्या इति । चन्द्रमसं वा निर्ज्ञाय संपूर्णं वा विज्ञायाग्नीनन्वादधाति । त्रीणि काष्ठानि गार्हपत्ये ऽभ्यादधाति त्रीण्यन्वाहार्यपचने त्रीण्याहवनीये । परिसमूहन्त्युपवसथस्य रूपं कुर्वन्त्यथास्य व्रतोपेतस्य पर्णशाखामाच्छैति[1] प्राङ्वोदङ्वा वाचंयमो यत्र वा वेत्थन्मन्यते । सा या प्राची वोदीची वा बहुपर्णा बहुशाखाप्रतिशुष्काग्रा भवति तामाच्छिनत्तीषे त्वोर्जे त्वेति । तया वत्सानपाकरोति वायव स्थोपायव स्थेत्यथैषां मातॄः प्रेरयति देवो वः सविता प्रार्पयतु श्रेष्ठतमाय कर्मण आप्यायध्वमघ्निया देवभागमूर्जस्वतीः पयस्वतीः प्रजावतीरनमीवा अयक्ष्मा मा व स्तेन ईशत माघशंसो रुद्रस्य हेतिः परि वो वृणक्त्विति । ध्रुवा अस्मिन्गोपतौ स्यात बह्वीरिति

Obr. 2.29 Ukázka textu Baudhāyanovy *Śulbasūtry*, převzato z [Cal].



२४ कर्क, महीधरभाष्यसहिते कातीयशुल्बसूत्रे—

मर्गिन तथाकृतिं द्रोणाकारं कृत्वा निर्हृतं दशमांशं पुरस्तात्पश्चाद्वोपदध्याद्वृन्तत्वेन योजयेत् ॥ ३ ॥

मण्डलेऽप्येवम् ॥ ४ ॥

क०—इयांस्तु विशेषः । चतुरस्रीकृत्य मण्डलविधानेन मण्डलं कुर्यात् । वृन्तमर्गिन च ॥ ४ ॥

म०—मण्डले वृत्ते रथचक्रचितौ कङ्कचितावप्येवमेव पूर्ववत्पक्षपुच्छसमासेन चतुरस्रं कृत्वा तद्दशमांशमपहृत्य चतुरस्रं मण्डलं पूर्वोक्तविधिना कृत्वा वृन्तमपि वृत्तं विधाय पुरः पश्चाद्वा योजयेदित्यर्थः ॥ ४ ॥

प्रउगे यावानग्निः सपक्षपुच्छविशेषस्तावद्द्विगुणं चतुरस्रं कृत्वा यः पुरस्तात्करणीमध्ये शङ्कुर्यौ च श्रोण्योः सोऽग्निः ॥ ५ ॥

क०—इति निगदव्याख्यातम् ॥ ५ ॥

म०—प्रउगचितिमाह—(प्रउगे इति ।)

प्रउगे त्रिकोणचितौ पक्षपुच्छसहितो यावानग्निस्तावच्चतुरस्रं कृत्वा तत्पुनर्द्विकरण्या द्विगुणीकृत्य द्विकरणीरूपकरण्या समचतुरस्रं पुनर्विधाय पूर्वत्र तिर्यङ्मानीमध्ये यः शङ्कुः, श्रोण्योश्च यौ द्वौ शङ्कू, तत्र सूत्रत्रये दत्ते द्विगुणीकृताद्यत्त्रिकोणं जातं सा प्रउगचितिः ॥ ५ ॥

उभयतः प्रउगे तावदेव दीर्घचतुरस्रं कृत्वा करणीमध्येषु(१) शङ्कवः स समाधिः ॥ ६ ॥

क०—एतदपि निगदव्याख्यातम् ॥ ६ ॥

म०—उभयतः प्रउगचितिमाह—(उभयत इति ।)

उभयतःप्रउगे तत्संज्ञकचितौ सपक्षपुच्छं चतुरस्रं कृत्वा तावदेव पुरस्तादूर्ध्वं नीत्वा विस्तारद्विगुणायामं दीर्घचतुरस्रं विधाय करणीनां चतसृणां मध्यभागेषु चत्वारः शङ्कवो देयाः । तत्र सूत्रचतुष्के दत्ते उभयतस्त्रिकोणाकारा चितिर्भवति, स समाधिश्चितिप्रकारः ॥ ६ ॥

प्रउगं चतुरस्रं चिकीर्षन्मध्ये प्राञ्चमपच्छिद्य विपर्यस्ये(२)तरत उपधाय दीर्घचतुरस्रसमासेन समस्येत्स समाधिः ॥ ७ ॥

क०—पुनरपि दीर्घचतुरस्रसमासेन समस्येत्स समाधिः ॥ ७ ॥

म०—प्रउगस्य चतुरस्रीकरणोपायमाह—

प्रउगं त्रिकोणं चतुरस्रं समचतुरस्रं कर्तुमिच्छन् मध्ये त्रिकोणमध्ये प्राञ्चं पूर्वभागमपच्छिद्य विभज्यैकं भागं विपर्यस्य विपरीते पश्चिममुखं त्रिकोणं कृत्वा इतरतः

(१) 'षु' नास्ति क० । (२) 'उत्तरतः' क० ।

Obr. 2.30 Ukázka textu Kātyāyanovy *Śulbasūtry*, převzato z [Ne].

3. MATEMATIKA V DŽINISTICKÝCH A BUDDHISTICKÝCH TEXTECH

Kolem poloviny 1. tisíciletí př. n. l. nastal odklon od krvavých obětí a krutého zabíjení zvířat. Nespokojenost s násilím provázejícím rituály a hinduistickým kastovním systémem vyústila ve vznik nových náboženských a filozofických směrů, z nichž jedním byl džinismus.

Za zakladatele džinismu bývají považováni Páršva (8. stol. př. n. l.) a Vardhamána (6. až 5. stol. př. n. l.) neboli Mahávíra (velký hrdina) zvaný Džina (vítěz), současník Buddhův, který učení zreformoval.[1]

Z Mahávírova učení se zachovaly jen aforismy, které jeho žáci uspořádali a uchovávali ústní tradicí. Džinismus proti rituálům s krvavými oběťmi postavil požadavek neubližování živým tvorům. Přisuzuje živou duši i neživým předmětům. Správný způsob života znamená zříci se veškerého majetku, postit se, studovat a meditovat.

Matematické poznatky byly využívány zejména v kosmologii, filozofii, astronomii a prozódii.[2]

Mezi džinistické a buddhistické texty patří *Sūryaprajñapti* (4. stol. př. n. l.), *Candraprajñapti* (4. stol. př. n. l.), *Jambūdvīpaprajñapti* (4. stol. př. n. l.), *Uttarādhyāyanasūtra* (kolem 300 př. n. l.), *Bhagabatisūtra* (3. stol. př. n. l.), *Sthānāṅgasūtra* (3. až 2. stol. př. n. l.), *Tattvārthasūtra* (kolem roku 150 př. n. l.), *Anuyogadvārasūtra* (2. až 1. stol. př. n. l.), *Lalitavistara* (1. stol. př. n. l.) a *Saṭkhaṇḍādhama* (asi 2. stol. n. l.).

Práce *Sthānāṅgasūtra* obsahuje seznam matematických témat, kterými se v té době indičtí učenci zabývali:[3]

(1) čtyři základní operace, tzv. *parikarma*,
(2) aplikace základních operací, tzv. *vyavahāra*,
(3) geometrie, tzv. *rajju*,
(4) výpočet objemů, tzv. *rāśi*,
(5) operace se zlomky, tzv.*kalāsavarṇa*,
(6) jednoduché rovnice, tzv. *yāvat-tāvat*,
(7) kvadratické rovnice, tzv. *varga*,
(8) kubické rovnice, tzv. *ghana*,
(9) bikvadratické rovnice, tzv. *varga-varga*,
(10) kombinatorika, tzv. *vikalpa*.

[1] Mahávíra pocházel ze zámožné rodiny, kde žil do svých 28 let jako princ. Pak náhle opustil domov, rodinu i veškerý majetek a stal se asketou. Po třinácti letech dosáhl osvícení, stal se Džinou a od té doby byl nazýván též Mahávíra. Zemřel dobrovolnou smrtí hladem ve věku 72 let, viz [Pra].

[2] Prozódie se zabývá zvukovými vlastnostmi jazyka. Podle toho, jaké prvky rozhodují o rytmu verše, se rozlišují různé prozodické systémy.

[3] Podle [JaP], [Jo1].

3.1. Geometrie – měření kruhu

Nejstarší indické představy o světě byly zachyceny v textech zvaných *Purāṇy* (*Purány*) (nejstarší jsou asi ze 4. stol. př. n. l.); byly to nábožensko-historické práce, které byly psány za účelem šíření vzdělanosti a náboženství mezi obyčejnými lidmi. Svět byl uzavřen do skořápky vejcovitého tvaru zvané „vesmírné vejce“ vytvořené jako sloup z kulatých desek různých průměrů. Plochá Země ležela v centru, byl to disk obrovských rozměrů odpovídající polovině velikosti dnešní sluneční soustavy. Střed Země tvořila kulatá pevnina (známý svět) obklopená slaným oceánem. Za ním byla jiná pevnina prstencového tvaru obklopená dalším oceánem sladké třtinové šťávy. Takto se střídaly prstence sedmi různých pevnin a sedmi oceánů. Ve středu (severně od Himalájí) stála veliká hora *Meru*, na jejímž vrcholu sídlili bohové. Na jednotlivých deskách obíhala nebeská tělesa po kruhových oběžných drahách rovnoběžných s povrchem Země okolo hory *Meru* a to způsobilo, že se zdálo, že zapadají, když zacházely za horu, a vycházejí, když se objevily na její druhé straně. Oběžná dráha Slunce byla nejblíže k Zemi, za ní následovala dráha měsíce a nad nimi dráhy pěti planet – Merkuru, Venuše, Marsu, Jupiteru a Saturnu, stejně jako v helénistické astronomii. Nad tím, na vrcholu hory *Meru*, bylo Sedm Mudrců, tj. sedm hvězd Velkého vozu s Polárkou, k níž byla připojena obíhající tělesa provazcem vesmírného větru tak, že kroužila kolem *Meru*. Nad Polárkou byly vyšší nebeské klenby, prostor pod Zemí byl zaplněn různými pekly. Země byla zespodu podpírána velkým hadem nebo želvou nebo jiným tvorem (viz [Pl1]).

Vesmírný model byl doplněn časovými údaji využívajícími velké časové cykly. Vesmír byl stvořen a zanikne během éry *kalpa*, tato doba představovala 4 320 000 000 let. Kratší časová perioda zvaná *mahāyuga* (dlouhá doba) neboli 4 320 000 let byla rozdělena do menších intervalů v poměru $4 : 3 : 2 : 1$, během nichž přijde úpadek a svět se změní z dobrého na špatný, podobně jako v řecké legendě doby zlatá, stříbrná, bronzová a železná (viz [Pl1]).

Tato kosmologie hluboce ovlivnila džinisty a buddhisty, kteří Zemi nazývali *Jambūdvīpa* (*Džambúdvípa*)[4] a představovali si ji, jak už bylo řečeno, jako kruhový ostrov obklopený kruhovým oceánem a soustředně uspořádanými kruhovými pásy pevniny vzájemně oddělenými kruhovými oceány. *Jambūdvīpa* byla rozdělena šesti rovnoběžnými stejně vzdálenými pohořími směřujícími od východu na západ do sedmi částí zvaných *varṣa*, z nichž nejjižnější byla Indie.[5] Průměr Země byl stanoven jako $d = 100\,000$ *yojana*,[6] každý další kruh (ostrov nebo oceán)[7] měl dvojnásobný průměr než předchozí, průměry tedy tvořily geometrickou posloupnost. Ve starých textech je možno nalézt různé hodnoty obvodu Země, tj. délky kružnice, od hrubého odhadu 300 000 *yojana* až po

[4] *Jambūdvīpa* znamená ostrov *Jambū*.

[5] Podle [Sr], str. 22, [SaTA].

[6] *Yojana* označuje vzdálenost, kterou lze ujet na jeden zápřah. Její hodnota se v různých textech liší, udává se přibližně 10 až 16 kilometrů.

[7] Jen první dvě ostrovní pevniny a vnitřní část třetí byly obyvatelné, dále od centra končila lidská působnost, viz [MaJ].

hodnotu uvedenou v díle *Jambūdvīpaprajñapti* (4. stol. př. n. l)[8]

$$316\,227 \textit{ yojana } 3 \textit{ krośa } 128 \textit{ danda } 13\tfrac{1}{2} \textit{ aṅgula},$$

kde

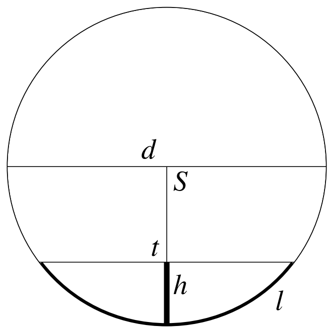
$$96 \textit{ aṅgula} = 1 \textit{ danda}, \quad 2000 \textit{ danda} = 1 \textit{ krośa}, \quad 4 \textit{ krośa} = 1 \textit{ yojana}.$$

Tento výsledek odpovídá výpočtu podle vzorce $o = \sqrt{10}\, d$, kde $\sqrt{10}$ byla v té době běžně používaná hodnota pro naše π. Hodnota $\sqrt{10}$ se počítala přibližně podle vztahu používaného po mnoho století až do středověku

$$\sqrt{Q} = \sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a},$$

tedy $\sqrt{10} \approx 3\frac{1}{6} \approx 3{,}16$ (viz [DS8]).

Důležitá je práce *Tattvārthasūtra*,[9] kterou napsal pravděpodobně kolem roku 150 př. n. l. Umāsvāti, člen známé matematické školy v Kusumapuře. Mezi matematickými výsledky této práce jsou vzorce pro výpočet obvodu a obsahu kruhu, délky tětivy, délky kruhového oblouku, výšky kruhové úseče (viz obr. 3.1).



Obr. 3.1 Měření kruhu.

Pro výpočty týkající se kružnice s průměrem d používal postupy odpovídající vzorcům:[10]

a) obvod kružnice $o = \sqrt{10}\, d$,
b) obsah kruhu $S = \frac{1}{4} o\, d$,[11]
c) délka tětivy $t = \sqrt{4h\,(d - h)}$, kde h byla výška kruhové úseče.

Poslední vzorec ukazuje znalost geometrických vlastností kruhu. Čtverec nad polovinou tětivy má stejný obsah jako obdélník se stranami h a $d - h$, vztah

[8] Podle [Sr], str. 22, podrobněji v [Gu1]. S. A. Parahmans v článku [Pa] však uvádí trochu jiné jednotky délky: 96 *aṅgula* = 1 *dhanu*, 1000 *dhanu* = 1 *krośa*, 2 *krośa* = 1 *gavyūti*, 4 *gavyūti* = 1 *yojana*.

[9] Někdy též *Tattvārtha-dhigama sūtra* nebo *Moksh-Shastra*.

[10] Podle [Sr], str. 21.

[11] Stejně počítal obsah kruhu Archimédés, ve svém spisu *Měření kruhu* uvedl tvrzení, jemuž v současné symbolice odpovídá vzorec $S = \frac{1}{2} or$, viz [BS].

známý dnes jako Eukleidova věta o výšce. Ze vztahu c) byly odvozeny další vzorce pro výpočet průměru kružnice a výšky kruhové úseče (viz [SA]):

$$d = \frac{1}{h}\left(h^2 + \frac{t^2}{4}\right), \qquad h = \frac{1}{2}\left(d - \sqrt{d^2 - t^2}\right). \tag{3.1}$$

Je zřejmé, že Umāsvāti uměl řešit kvadratické rovnice. To však není překvapivé, neboť řešení kvadratických rovnic bylo objeveno mnohem dříve,[12] i v *Śulbasūtrách* jsou jednoduché příklady kvadratických rovnic. Délka kruhového oblouku (kratšího než polokružnice) se počítala podle vzorce

$$l = \sqrt{6h^2 + t^2}.$$

V díle *Sūryaprajñapti* jsou uvedeny další vztahy odpovídající dnešním vzorcům (viz [SA])

$$h = \sqrt{\frac{l^2 - t^2}{6}}, \qquad t = \sqrt{l^2 - 6h^2}.$$

Práce *Jambūdvīpaprajñapti* obsahuje také rozměry nejjižnější části Země – Indie neboli *Bharatavarṣa*, která byla chápána jako kruhová úseč.

(1) šířka Indie (výška kruhové úseče) byla $h = 526\frac{6}{19}$ *yojana*,
(2) délka Indie (délka tětivy) byla „něco přes“ $t = 14471\frac{6}{19}$ *yojana*,
(3) délka jižní hranice (délka kruhového oblouku omezující úseč) byla $l = 14528\frac{11}{19}$ *yojana*.

O výše uvedené vzorce se opírá jedno z možných vysvětlení, proč se počítalo s hodnotou $\pi = \sqrt{10}$ (viz [SA]). Uvažujme kružnici o průměru d a vepišme do ní pravidelný šestiúhelník. Strana šestiúhelníku je tětivou a má délku $a_6 = t = \frac{d}{2}$. Jestliže budeme počítat výšku h kruhové úseče nad tětivou podle vzorce (3.1), dostaneme

$$h = \frac{1}{2}\left(d - \sqrt{d^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}\right) = \frac{1}{2}\left(d - \sqrt{\frac{3d^2}{4}}\right) = \frac{d}{4}\left(2 - \sqrt{3}\right).$$

Dosazením přibližné hodnoty $\sqrt{3} \approx \frac{5}{3}$ stanovíme výšku $h = \frac{d}{12}$. Nyní vepišme do téže kružnice ještě pravidelný 12-ti úhelník. Pro délku jeho strany platí $a_{12}^2 = h^2 + \left(\frac{a_6}{2}\right)^2$. Dosazením $h = \dfrac{d}{12}$ a snadnou úpravou získáme $a_{12}^2 = \dfrac{10d^2}{144}$. Protože obvod kružnice byl přibližně roven obvodu 12-ti úhelníku,

$$o \approx 12\sqrt{\frac{10d^2}{144}} = \sqrt{10}d.$$

Tato hodnota džinistům vyhovovala i vzhledem k tomu, že průměry ostrovů a oceánů vyjadřovali v mocninách deseti *yojana*.

[12] V Mezopotámii už ve 2. tisíciletí př. n. l., viz [BBV].

3.2. Velká čísla

Staří Indové byli fascinováni velkými čísly, která potřebovali zejména pro svá kosmologická měření prostoru a času. Džinisté používali pro měření času jednotky:[13]

$$purvi = 7,5 \cdot 10^{13}\text{dní}, \qquad \acute{S}\bar{\imath}r\d{s}aprahelik\bar{a} = (8\,400\,000)^{28}\ purvis.$$

Komentátor Hema Candra (11. stol.) tvrdil, že toto číslo obsahuje 194 míst.[14]

Ve známém buddhistickém díle *Lalitavistara* je uveden rozhovor mezi matematikem Arjunou a princem Guatamou – Buddhou. Princ ukazoval, že zná velká čísla až do *tallakṣaṇa* (10^{53}), a jmenoval řadu čísel založenou na stovkovém základu.

Současné číslice ještě neexistovaly, džinistické práce však používaly čísla v desítkové soustavě nazývaná podle jejich pozic:[15] *eka* (1), *daśa* (10), *sata* (100), *sahasra* (1 000), *dasa sahasra* (10 000), *sata sahasra* (100 000), *dasa sata sahasra* (10^6), *kōti* (10^7), *daśa kōti* (10^8), *sata kōti* (10^9).

Pojem matematického nekonečna se rozvinul díky džinistickým kosmologickým myšlenkám. Čas je věčný a bez tvaru, svět je nekonečný, nikdy nevznikl a vždy bude existovat (viz [CR]). Kosmologie v mnoha směrech silně ovlivnila džinistické matematiky a motivovala je k matematickým úvahám o nekonečnu.

V matematickém a astronomickém textu *Sūryaprajñapti* se objevila první zmínka o nekonečnu. Čísla byla rozdělena do tří základních skupin, z nichž každá obsahovala ještě tři podskupiny:[16]

(1) vyčíslitelná, tzv. *saṃkhyeya* (spočetná): nejmenší, střední, největší,
(2) nevyčíslitelná,[17] tzv. *asaṃkhyeya*[18] (nespočetná): téměř nevyčíslitelná, opravdu nevyčíslitelná, nevyčíslitelně nevyčíslitelná,
(3) nekonečná, tzv. *ananta*: téměř nekonečná, opravdu nekonečná, nekonečně nekonečná.

První skupina, tj. počitatelná čísla, obsahovala všechna čísla od 2 (jedničku ignorovali) po největší. Myšlenka nalezení největšího čísla je popsána v díle *Anuyogadvārasūtra*:[19]

> *Uvažuj koryto, jehož průměr je stejný jako průměr Země (*100 000 *yojana) a jehož obvod je* 316 227 *yojana. Naplň ho semínky bílé hořčice a počítej jedno po druhém. Podobně naplň hořčičnými semínky další koryta velikosti různých zemí a moří. Stále největší vypočitatelné číslo není dosaženo.*

---

[13] Podle [Jo1], str. 242.
[14] Podle [DS1], str. 12.
[15] Podle [Sr], str. 23.
[16] Podle [MaJ], podrobnější klasifikaci lze nalézt např. v [ShRS].
[17] Čísla konečná, která byla tak velká, že pro ně neexistovalo pojmenování.
[18] Někdy *asankhyēya*, podle [Sr], str. 23, nebo *asamkhyata*, podle [Jo1], str. 251.
[19] Podle [Sr], str. 24.

Když se dospělo k největšímu číslu (označme je N), bylo možno postupně celý proces opakovat, a tím se získalo nekonečno.

$$\begin{gathered}
2, 3, \dots, N, \\
N+1, N+2, \dots, (N+1)^2-1, \\
(N+1)^2, (N+1)^2+1, \dots, (N+1)^4-1, \\
(N+1)^4, (N+1)^4+1, \dots, (N+1)^8-1 \\
\text{atd.}
\end{gathered}$$

Tato myšlenka je podobná Archimédově úvaze o velkých číslech – přechodu od „největšího čísla" *myriada* (10^4) k ještě větším pomocí čísel rozdělených do řádů a period (viz [ArV], [BS]). Pro představu největšího realizovatelného čísla však Archimédés uvažoval sféru hvězd naplněnou zrnky písku.

Džinisté zformulovali poznatek, že existují různě velká nekonečna, rozlišovali pět různých druhů: nekonečné v jednom směru, nekonečné ve dvou směrech, nekonečné v ploše, nekonečné všude (ve všech směrech), nekonečné věčně.

3.3. Mocniny a odmocniny

Džinisté znali jednoduchá pravidla pro počítání s mocninami. V díle *Anuyogadvārasūtra* jsou uvedeny pojmy *první čtverec, druhý čtverec, třetí čtverec* atd., podobně *první odmocnina, druhá odmocnina, třetí odmocnina* atd., tedy pro číslo a se počítalo:

$$a^2, (a^2)^2, ((a^2)^2)^2, \dots \quad \text{neboli} \quad a^2, a^4, a^8, \dots$$

$$\sqrt{a}, \sqrt{\sqrt{a}}, \sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}, \dots \quad \text{neboli} \quad a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{4}}, a^{\frac{1}{8}}, \dots$$

Zatímco uvedené exponenty byly pouze ve tvaru 2^p, kde p je celé číslo, v práci *Uttarādhyāyanasūtra* je možné nalézt i některé další mocniny, například *varga* (druhá), *ghana* (třetí), *varga-varga* (čtvrtá), *ghana-varga* (šestá), *ghana-varga-varga* (dvanáctá), podle [Sr].

Anuyogadvārasūtra obsahuje také jednoduchá pravidla pro počítání s exponenty:[20]

> *Druhá odmocnina násobená druhou druhou odmocninou* [je] *třetí mocnina druhé druhé odmocniny; druhá druhá odmocnina násobená třetí druhou odmocninou* [je] *třetí mocnina třetí druhé odmocniny.*

V dnešním zápisu vyjádříme pravidlo vzorci:

$$a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}} = \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^3, \qquad a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{8}} = \left(a^{\frac{1}{8}}\right)^3.$$

[20] Podle [Jo1], str. 252.

Francouzský matematik François Viète (1540–1603) používal k vyjádření mocnic neznámých tzv. *species.* Neznámou reprezentovala samohláska, mocnina byla vyjádřena slovem, resp. zkratkou. Například *A cubum*, resp. *A cub.* znamenalo x^3, *E quadratum*, resp. *E quad.* představovalo y^2. Při násobení exponenty sčítal, *A quadratum* krát *A* bylo *A cubum.* Perský matematik al-Káší (asi 1380 až 1429)[21] v traktátu *Miftáḥ al-Hiṣáb* (*Klíč aritmetiky*) formuloval obecně dnešní pravidla

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad a^m : a^m = a^{m+n}, \quad \sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[mn]{a^n}\,\sqrt[mn]{b^m} = \sqrt[mn]{a^n b^m}.$$

Anuyogadvārasūtra obsahuje číslo 2^{96}, které má 29 dekadických číslic a vyjadřuje počet existujících lidských bytostí:[22]

> *Je to číslo získané násobením šestého čtverce* [čísla 2] *pátým čtvercem* [čísla 2] *nebo číslo, které může být děleno* [dvěma] 96 *krát.*

Získali je tedy násobením $2^{64} \cdot 2^{32} = 2^{96}$.

Uvedené poučky odpovídají našim současným vzorcům

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad (a^n)^m = a^{nm}.$$

Vīrasenācārya ve své práci *Dhavalā* (9. stol.), která je komentářem džinistického díla *Saṭkhaṇḍādhama*, naznačil jakousi myšlenku logaritmu o základu 2, 3 a 4.[23] Termíny *ardhacheda, trakacheda, chaturthacheda* vyjadřovaly, kolikrát může být dané číslo x děleno dvěma, resp. třemi či čtyřmi beze zbytku, tedy

$$ardhacheda\ x = \log_2 x,\ trakacheda\ x = \log_3 x,\ chaturthacheda\ x = \log_4 x.$$

3.4. Kombinatorika

Jak už bylo uvedeno, jedním z témat, kterými se džinisté zabývali, byla kombinatorika, tzv. *vikalpa.*[24]

Bhagabatisūtra obsahuje první úlohy týkající se kombinatoriky, například jak určit počet filozofických doktrín, které mohou být formulovány kombinováním jistého počtu základních filozofických kategorií, vezme-li se jedna, dvě, tři nebo více najednou. Podobně počítali skupiny, které mohou být získány z pěti smyslů nebo se zabývali výběrem skupiny lidí provedeným z daného počtu mužů a žen.

[21] Vlastním jménem Džamšíd Ghiyáth ad-Din al-Káší, viz [Ju].

[22] Podle [Sr], str. 25.

[23] Podle [Jo1], str. 252, [JaLC].

[24] Název *vikalpa* označoval permutace, pro kombinace se používal termín *bhaṅga*, viz [DS5].

Metody pro výpočet kombinací a variací (permutací) odpovídají současným vzorcům:

$$C_1(n) = n, \qquad C_2(n) = \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2}, \qquad C_3(n) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$
$$P_1(n) = n, \qquad P_2(n) = n \cdot (n-1), \qquad P_3(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2).$$

Hodnoty byly uvedeny pro $n = 2, 3, 4$, pak následovalo:[25]

> *Takto* 5, 6, 7, ... 10 *atd. nebo spočetné, nespočetné nebo nekonečné množství věcí může být stanoveno. Vytvořením kombinací jednočlenných, dvoučlenných, tříčlenných atd., desetičlenných, jedenáctičlenných, dvanáctičlenných atd., jak jsou postupně kombinace vytvářeny, všechny by měly být brány v úvahu.*

Dokonce už v medicínské práci *Suśruta-Saṁhitā* (6. stol. př. n. l.) se objevuje tvrzení, že může být získáno 63 různých chutí ze 6 základních – hořké, kyselé, slané, trpké, sladké, ostré tak, že se z těchto chutí vezme jedna, dvě, tři atd.[26] Výsledek 63 je získán výpočtem

$$C_1(6) + C_2(6) + C_3(6) + C_4(6) + C_5(6) + C_6(6) = 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63.$$

Kombinatorika byla zkoumána i v souvislosti s prozódií, která byla založena na střídání přízvučných slabik, tzv. *guru*, a nepřízvučných slabik, tzv. *laghu*. Sanskrtský verš, tzv. *śloka*, se skládal z určitého počtu stop, tzv. *pāda*, s předepsaným počtem slabik.[27]

Piṅgala (kolem 200 př. n. l.) ve své práci *Chandaḥ Sūtra* (*Čhanda sútra*)[28] zkoumal některé problémy týkající se uspořádání přízvučných a nepřízvučných slabik:

a) určit všechny způsoby uspořádání n slabik,
b) stanovit celkový počet různých uspořádání n slabik (aniž by bylo třeba je vypisovat).

Pokud jde o všechny možnosti uspořádání přízvučných a nepřízvučných slabik, použil Piṅgala následující úvahu. Pro jednu slabiku jsou pouze dvě možnosti – přízvučná (a) nebo nepřízvučná (b), budou-li slabiky dvě, ke každé se může přidat jak přízvučná (a), tak nepřízvučná (b). Tímto způsobem pak bylo možno přidávat i další slabiky.[29] Pro dvojslabičný verš je možno mít obě slabiky přízvučné (a^2), obě nepřízvučné (b^2) nebo jsou dvě možnosti, jak je kombinovat (ab, ba), tj. počet možností je tvořen součtem koeficientů binomického rozvoje

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

[25] Podle [DS5].
[26] Podle [DS5].
[27] Podrobnější popis sanskrtských veršů lze nalézt např. v [Kak5], [SiSL] nebo [Pl1], str. 302–304.
[28] Nebo *Chandaḥ Śāstra*.
[29] Podle [Bag1].

Možnosti pro tříslabičný verš jsou vypsány v následující tabulce, symbolicky je můžeme vyjádřit jako

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3.$$

a
b

a	a	a a
b		b a
a	b	a b
b		b b

a a	a	a a a
b a		b a a
a b		a b a
b b		b b a
a a	b	a a b
b a		b a b
a b		a b b
b b		b b b

Koeficienty binomického rozvoje Piṅgala uspořádal do tabulky; původní pravidlo však není příliš srozumitelné, komentátor Halāyudha (10. stol.) je vysvětloval takto:[30]

> *Nejdříve nakresli čtverec. Pod ním, od středu dolní strany, nakresli dva čtverce. Podobně pod nimi nakresli tři čtverce atd. Napiš číslo* 1 *doprostřed horního čtverce a do prvního a posledního čtverce v každé řadě. Do každého čtverce má být pak zapsáno číslo, jež je součtem čísel v sousedních horních čtvercích. Takto druhý řádek dává kombinace* [krátkých a dlouhých] *jedné slabiky, třetí řádek totéž pro dvě slabiky, čtvrtý řádek pro tři atd.*

Takto vytvořený diagram se nazýval *Meru Prastāra*[31] (viz obr. 3.2); není to nic jiného než tzv. Pascalův trojúhelník.[32]

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

Obr. 3.2 Diagram *Meru Prastāra*.

[30] Podle [Sr], str. 27–28, [Bag1], str. 72.

[31] Název je podle svaté hory Meru.

[32] V Číně byl znám jako Huiův trojúhelník, podle Yang Huie (asi 1238 až 1298), v Itálii mu říkali Tartagliův trojúhelník po Niccolo Fontanovi Tartagliovi (1499–1557), viz [KakS].

Metodu výpočtu, tj. kolika způsoby je možno seřadit přízvučné a nepřízvučné slabiky v n-slabičném verši, popsal Piṅgala takto:[33]

> *Dva* [dej]*, když půleno, nulu* [dej]*, když jednička odečtena; násob dvěma, když nula, umocni, když půleno.*

Postup popíšeme pro $n = 6$. Nejprve se použila první část poučky:

Dva [dej]*, když půleno, nulu* [dej]*, když jednička odečtena;*

Vzalo se dané číslo 6 a zjišťovalo se, zda je dělitelné dvěma. Pokud ano, rozpůlilo se a zapsala se dvojka. Jestliže bylo dané číslo liché, odečetla se jednička a poznamenala se nula. Takto se pokračovalo až k nule.

Vezmi číslo	6		
dva, když půleno	3	zapiš	2
nulu, když jednička odečtena	2	zapiš	0
dva, když půleno	1	zapiš	2
nulu, když jednička odečtena	0	zapiš	0

V dalším kroku se využila druhá část pravidla:

násob dvěma, když nula, umocni, když půleno.

Vzala se 1 a sloupec nul a dvojek se zpracovával zdola.

Vezmi 1			
násob dvěma, když nula	0	zdvojnásob	$2 \cdot 1 = 2$
umocni, když půleno	2	umocni	$2^2 = 4$
násob dvěma, když nula	0	zdvojnásob	$2 \cdot 4 = 8$
umocni, když půleno	2	umocni	$8^2 = 64$
Výsledek:			$2^6 = 64$

Nula a dvojka zde označují dvě různé operace – bylo by možno je označit i jinak. Objevuje se otázka, proč si Pingala zvolil právě nulu a dvojku. Užití dvojky se dá snadno vysvětlit tím, že naznačuje proces půlení – dělení dvěma. Nula byla užita pravděpodobně proto, že bývala ztotožňována s pojmem nepřítomnost, v tomto případě snad mohla znamenat, že číslo dělit dvěma nelze. Užití nuly v tomto smyslu bylo v indické matematice běžné. *Chandaḥ sūtra* je považována za nejstarší dílo, ve kterém se nula vyskytuje.

Přestože není dochováno mnoho džinistických textů týkajících se matematiky, je zřejmé, že matematika byla rozvíjena a využívána. Džinistická matematika tak vyplňuje dobu mezi védskou matematikou spojenou zejména s konstrukcí oltářů a klasickou středověkou indickou matematikou.

[33] Podle [DS1], str. 76.

4. KLASICKÁ ÉRA INDICKÉ MATEMATIKY

Kolem roku 500 n. l. začíná tzv. klasická éra indické matematiky. Zpočátku však nevznikaly samostatné matematické práce, matematika byla součástí astronomických pojednání, která se nazývala *Siddhānty.*[1]

V této kapitole je uveden stručný přehled nejvýznamnějších autorů, od Āryabhaṭy I. po Nārāyaṇu, a jejich prací. Životopisné údaje jsou velmi kusé, často pocházejí jen ze zmínek v dílech jiných autorů. Většinou se tito učenci zabývali astronomií nebo astrologií, matematice byla věnována pouze část jejich díla.

Obr. 4.1 Mapka středověké Indie, převzato z [Sm1].

[1] Například *Pauliśa-siddhānta*, *Romaka-siddhānta*, *Vasiṣṭa-siddhānta*, *Sūrya-siddhānta.*

4.1. Āryabhaṭa I. (asi 476 až 550)

Āryabhaṭa I. je autorem astronomické práce *Āryabhaṭīya*. O jeho životě se mnoho neví, některé údaje je možné odvodit z poznámek v dílech pozdějších autorů (viz [SaKV], [CR], [En1]). V době, kdy sepisoval práci *Āryabhaṭīya*, žil pravděpodobně v Kusumapuře (nyní Patna v severovýchodní části Indie), jež tehdy byla jedním ze dvou hlavních matematických center; druhým byl Ujjain [Uždžain] ve střední Indii.

Āryabhaṭīya je převážně astronomická práce psaná ve verších. Ve čtyřech kapitolách obsahuje 118 slok, z toho je matematice věnováno 33 slok ve druhé kapitole (viz [Cla]). V úvodu první kapitoly *Daśagītika* je ještě popsán speciální způsob vyjádření čísel pomocí písmen.[2] Matematická část *Gaṇitapāda* obsahuje pravidla pro aritmetické výpočty, metody řešení lineárních a kvadratických rovnic, nejvýznamnější je asi metoda *kuṭṭaka* na řešení neurčitých rovnic prvního stupně. Pravidla týkající se geometrie jsou věnována výpočtu obsahů geometrických útvarů, za zmínku stojí poměrně přesný výpočet délky kružnice a obsahu kruhu, kde hodnota π je dána vztahem $\pi = \frac{62\,832}{20\,000} = 3,1416$. Zbývající dvě kapitoly *Kālakryā* a *Gola* jsou věnovány astronomii.

Āryabhaṭīya je stručným souhrnem tehdejších znalostí astronomie a matematiky, která ovlivnila mnohé pozdější autory. Matematickými výsledky Āryabhaṭy I. se zabývají například články [Beh], [Bag2], [Kak1], [Vol].

4.2. Varāhamihira (asi 505 až 587)

Podle poznámek z jeho práce snad studoval a žil v Kapitthace, snad pracoval v Ujjainu (viz [CR], [Pl1]). Jeho nejznámějším dílem je *Pañca-siddhāntikā* (*Pět astronomických předpisů*), jež je souhrnem nedochovaných dřívějších astronomických pojednání *Sūrya-siddhānta*, *Romaka-siddhānta*, *Pauliśa-siddhānta*, *Vasiṣṭa-siddhānta* a *Paitamaha-siddhānta* (viz [TD]).[3] Kromě astronomie se věnoval i tehdy populární astrologii. Zformuloval některé trigonometrické vzorce a kombinatorická pravidla, zabýval se vlastnostmi magických čtverců.

4.3. Brahmagupta (598–670)

Na Āryabhaṭu I. navázal zhruba o sto let později matematik a astronom Brahmagupta. Narodil se patrně ve městě Bhillamala v severozápadní Indii. Podle některých pramenů se stal vedoucím astronomické observatoře v Ujjainu (viz [CR]), neexistují o tom však důkazy (viz [Pl1]).

Brahmagupta je autorem veršované astronomické práce *Brāhma-sphuta-siddhānta* (*Zdokonalené pojednání Brahmovo*, viz [Col]). Oproti *Āryabhaṭīye*

[2] Podrobnější popis je uveden v 5. kapitole.

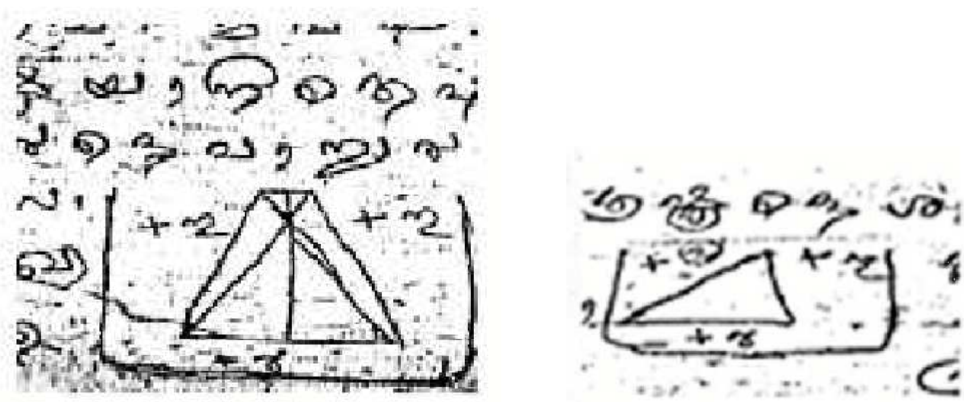
[3] *Siddhānty* byly ovlivněny řeckou astronomií, *Pauliśa-siddhānta* (*Paulova siddhānta*) odkazuje na astrologa Paula, který žil v Alexandrii, viz [Bo].

je tato práce mnohem obsáhlejší, skládá se z jednadvaceti kapitol, z nichž matematikou se zabývá dvanáctá *Gaṇita* (*Aritmetika*) a osmnáctá *Kuṭṭaka* (*Algebra*). Kapitola o aritmetice obsahuje deset částí, v nichž jsou rovněž jednoduché úlohy z geometrie – výpočty obsahů a objemů, problémy týkající se měřictví. Brahmagupta používal nulu jako plnohodnotnou číslici a jako první zformuloval pravidla pro počítání s nulou a zápornými čísly, která ovšem byla známa už dříve. V kapitole o algebře je osm částí, v nichž jsou uvedena pravidla pro řešení lineárních a kvadratických rovnic včetně neurčitých, významným výsledkem je metoda řešení tzv. Pellovy rovnice. Kromě této práce sepsal Brahmagupta astronomické pojednání *Khaṇḍa-khādyaka* (viz [En2]). O životě a díle pojednává například [BhRk].

Důležitý komentář *Vāsanā-Bhāshya* k Brahmaguptově práci *Brāhma-sphuta-siddhānta* napsal v 9. století Pṛthūdakasvāmin.

4.4. Bhāskara I. (asi 600 až 680)

Bhāskara I. sepsal komentář k práci *Āryabhaṭīya*; je autorem dvou astronomických pojednání *Mahā-bhāskarīya* a *Laghu-bhāskarīya* (viz [En3]). Je pravděpodobné, že žil v oblasti Aśmaka (viz [Pl1]), v jeho díle jsou též zmínky o městě Valabhī (dnešní Vala). Komentář k *Āryabhaṭīye* se týká jen matematické části – problému neurčitých rovnic prvního stupně, tětivových čtyřúhelníků a trigonometrických vztahů (viz [MA], [Maj1], [Ke3]). Na obrázku 4.2 jsou Bhāskarovy náčrtky.



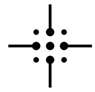
Obr. 4.2 Bhāskarovy geometrické náčrtky, převzato z [Ke3].

4.5. Lalla (asi 720 až 790)

Lalla je jedním z nejvýznamnějších indických astronomů 8. století, je autorem astronomického textu *Śiṣya-dhī-vṛddhida-tantra* a několika dalších ztracených astronomických prací. *Śiṣya-dhī-vṛddhida-tantra* je velmi rozsáhlá dvousvazková práce, kterou později komentoval Bhāskara II. (viz [En4]). Lalla též napsal populární astrologický text *Jyotisaratnakśa* a komentář k Brahmaguptově práci *Khaṇḍa-khādyaka* (viz [CR]).

4.6. Rukopis Bakhshālī (asi 7. nebo 8. století)

Rukopis byl nalezen v roce 1881 poblíž vesnice Bakhshālī (Bakhšhálí) na severozápadě Indického poloostrova, v dnešním Pákistánu. Skládá se ze 70 lístků březové kůry, z nichž největší měří 14,5 krát 8,9 centimetrů, z některých se však zachovaly jen útržky. Autor je neznámý, stáří rukopisu je předmětem mnoha diskusí.[4] Struktura rukopisu se podstatně liší od jiných středověkých prací, které byly psány velmi stručně a úsporně. Je tedy možné, že rukopis je vysvětlujícím komentářem k nějaké staré práci. Rukopisu jsou věnovány monografie [Kay1], [Kay2], [Ha1], různými typy rovnic nebo jejich soustav se zabývá článek [Gu4], stručný popis rukopisu je uveden též v [Sy3].

Ta část rukopisu, která je čitelná, je zcela věnována matematice, zejména aritmetice a algebře. Text se skládá z pravidel a příkladů. Pravidla neboli *sūtram* jsou psána ve verších a obvykle jsou číslována, není však uvedeno, jak byla odvozena. Způsob vyjádření pravidel není příliš srozumitelný, ke správnému pochopení bylo nutné studovat připojené příklady označené jako *udāharanaṁ*. Příklad začíná zkratkou *udā* a končí otázkou. Zadání je zapsáno slovy, pak někdy následuje ještě formální vyjádření, tzv. *sthāpanam*, se zkratkami a čísly. V řešení nazývaném *karaṇam* jsou někdy citovány části použitých pravidel. Nakonec bývá uveden důkaz či zkouška neboli *pratyayam*. Konec každého pravidla je označen za posledním příkladem symbolem  (viz obr. 4.3 vlevo dole) a také číslo pravidla je uvedeno až na konci. Některé příklady jsou velmi jednoduché, přesto jsou podrobně vysvětleny a vyřešeny. Také zkoušky jsou pečlivě vypracovány. U zkoušky je někdy uvedeno *pratyaya-trai-rāśikena* (zkouška pravidlem tří) nebo *pratyaya-rūponā-karanena* (zkouška metodou *rūponā*).

V rukopisu se už používá poziční zápis čísel v desítkové soustavě, v řešeních příkladů se vyskytují velká čísla obsahující až 23 číslic. Čísla jsou většinou zapsána do „buněk“, někdy jsou pouze oddělena jednou nebo dvěma svislými čarami (viz obr. 4.3 vlevo nahoře).

V textu se vyskytují zkratky, jednak místo matematických symbolů,[5] jednak pro jednotky,[6] ale i místo běžných slov.[7]

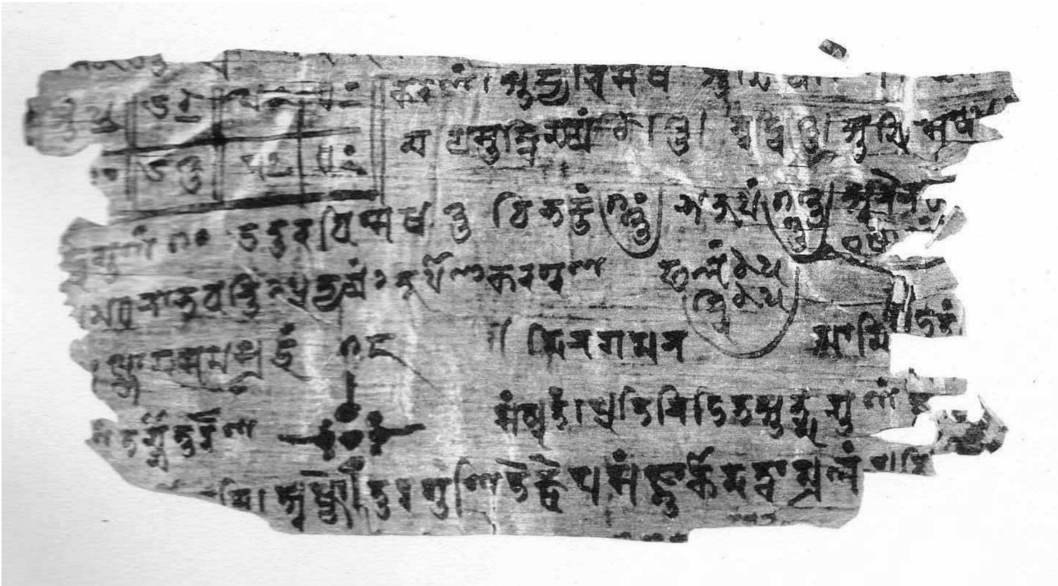
---

[4] Anglický orientalista Dr. Augustus Rudolf Hoernle (1841–1918) byl prvním, kdo se studiu rukopisu věnoval. Jako dobu vzniku uváděl 3. až 4. století n. l., viz [Hoe]. M. N. Channabasappa, B. Datta a A. N. Singh předpokládali, že práce mohla vzniknout někdy mezi roky 200 až 400 n. l., viz [Cha], [DS1]. G. G. Joseph považuje rukopis pravděpodobně za kopii díla z počátku letopočtu, viz [Jo1]. T. Hayashi soudí, že jde o kopii z 8. až 12. stol. původní práce ze 7. století, viz [Ha1], zatímco G. R. Kaye si myslel, že rukopis pochází až ze 12. století, viz [Kay1].

[5] Například *bhā* (*bhāga*) umístěné za výrazem znamenalo, že jde o dělitele, *śe* (*śeshaṁ*) označovalo zbytek, *mū* (*mūla*) byla zkratka pro kořen, tj. druhou odmocninu, *pha* (*phalaṁ*) znamenalo odpověď, řešení.

[6] Například *li* (*liptā*) znamenalo úhlovou minutu, tj. šedesátinu stupně, *vi* (*viliptā*) úhlovou vteřinu.

[7] Například *a* (*aśva*) označovalo koně, *ū* (*ūshṭra*) velblouda, *ya* (*yava*) byl symbol pro



ā	5 1	u	6 1	pa	0 1	dha	0 1	karaṇaṁ | ādyorviśesha*ṁ*ādi . . [5r.]
	10	u	3 1	pa	0 1	dha	0 1	chayaśuddhichayaṁ 6 | 3 | śuddhi | 3 | ādiśesha 5

dviguṇam 10 uttaraviśesha 3 vibhaktaṁ $\begin{array}{|c|} 10 \\ 3 \end{array}$ sarūpaṁ $\begin{array}{|c|} 13 \\ 3 \end{array}$ anenak*ā* . .

samadhanābhavanti // pratyayaṁ rūpoṇākaraneṇa phalaṁ $\begin{array}{|cc|} & 65 \\ \text{dvi} & 65 \end{array}$

ashṭādaśamasūtraṁ 18 || dinagamana mādirahitaṁ . .

ṇaṁtachchhottareṇa samyutaṁ | pratinihita ātmaguṇaṁjñ*eyaṁ*

. . . . . o.i | ashṭhottaraguṇitekshepasaṁjñakodatvāmūlaṁprati . i

Obr. 4.3 Rukopis *Bakhshālī*, folio 5 recto a jeho přepis, převzato z [Kay2].

V rukopisu se používají základní aritmetické operace – sčítání, odčítání, násobení a dělení, ale chybí popis, jakým způsobem se operace prováděly. Nalezneme jen formální vyjádření výrazů a výsledky. Zvláštností rukopisu je výskyt znaménka „+“, které bylo umístěné za číslem a značilo zápornou hodnotu, resp. označovalo číslo, které se mělo odečíst.[8] Zajímavý je přibližný výpočet druhé odmocniny, který byl popsán v mnoha příkladech s poměrně velkou přesností.

V algebraických úlohách nebylo označení neznámých ustálené, někde se pro neznámou používal stejný symbol jako pro nulu, tj. tečka • či kroužek ◦,[9] někde byly neznámé označeny zkratkami slov.

Dr. A. R. Hoernle věnoval rukopis *Bakhshālī* knihovně Bodleian Library (univerzitní knihovna Oxfordské univerzity), kde je uložen dodnes.

ječmen, *go* (*godhūma*) znamenalo pšenici, *sā* (*sāli*) rýži.

[8] Dr. A. Hoernle odvozoval znaménko „+“ ze starého symbolu pro *ka*, zkratku slova *kanita* (zmenšený), nebo podle Diofanta obrácené písmeno ψ.

[9] Jako neznámé, nepřítomné množství.

4.7. Govindasvāmin (asi 800 až 860)

Govindasvāmin byl indický matematik a astronom, jehož hlavním dílem byl komentář k práci *Mahā-bhāskarīya* Bhāskary I. (viz [Shu2], [CR], [Pl1], [Ha2]).

4.8. Mahāvīra (asi 800 až 870)

Nejvýznamnějším indickým matematikem 9. století byl Mahāvīra, autor práce *Gaṇita-sāra-saṁgraha* (*Krátký kurz početní vědy*, viz [Ran]). Mahāvīra na rozdíl od svých předchůdců nebyl astronomem, byl členem matematické školy v jihoindickém Mysore a celá jeho práce je matematická. Byl dobrým znalcem džinistické matematiky (viz [CR], [En5], [JaBS]).

Jeho kniha je rozdělena do devíti kapitol, v první z nich je uvedena použitá terminologie včetně názvů jednotlivých řádů v desítkové poziční soustavě, ve druhé části jsou popsány aritmetické operace, třetí a čtvrtá část je věnována zlomkům a výpočtům se zlomky včetně rozkladu na kmenné zlomky, v páté části je uvedeno pravidlo tří a jeho užití, šestá část obsahuje různé úlohy včetně mnoha problémů s úroky, v sedmé části jsou výpočty vztahující se k měření ploch, v osmé jsou popsány výpočty objemů v souvislosti s výkopy, a poslední, devátá část je věnována pravidlům pro počítání se stíny (viz [Ran]).

4.9. Pṛthūdakasvāmin (asi 830 až 890)

Pṛthūdakasvāmin, známý též jako Caturveda (ten, kdo zná čtyři védy),[10] napsal důležitý komentář *Vāsanā-Bhāshya* k Brahmaguptově práci *Brāhma-sphuta-siddhānta* (viz [Pl1]).

4.10. Śrīdhara (asi 870 až 930)

Śrīdhara je autorem aritmetické práce *Pāṭī-gaṇita* a jejím stručnějším zpracováním *Pāṭī-gaṇitasāra* (také *Triśatikā*, viz obr. 4.4),[11] které pojednávají zejména o aritmetice a měřictví. Pravidla popisují základní aritmetické operace i operace s nulou s výjimkou dělení, jsou zde uvedeny metody pro součet aritmetické a geometrické posloupnosti (viz [Shu1], [Jo1], [CR], [En6]). Bhāskara II. zmiňoval ještě Śrīdharovu algebraickou práci, která je však ztracená (viz [Ju]).

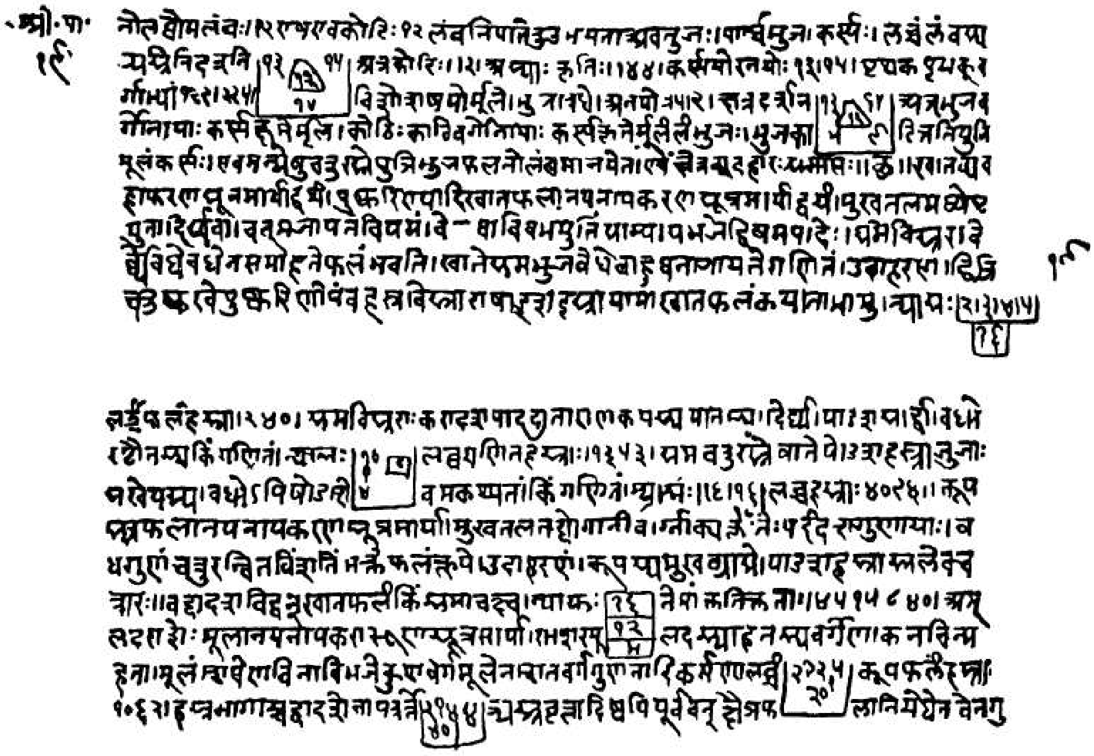
4.11. Āryabhaṭa II. (asi 920 až 1000)

Āryabhaṭa napsal veršovanou astronomickou práci *Mahāsiddhānta* (nebo *Āyasiddhānta*), v níž tři z osmnácti kapitol jsou věnované aritmetice, geometrii

[10] *Catur* znamená čtyři, podle [Pl1], str. 324.

[11] Protože obsahuje 300 slok, *tri* (tři), *śata* (sto).

a algebře, podrobně bylo popsáno řešení neurčité rovnice $by = ax+c$, (viz [CR], [DvS], [Jha], [Pl1], [En7]).



Obr. 4.4 Dvě stránky kopie práce *Triśatikā* (kolem roku 1025), převzato z [Sm1].

4.12. Śrīpati (1019–1066)

Śrīpati byl astronomem, astrologem a matematikem, jeho hlavním dílem je astronomická práce *Siddhānta-śekhara* (viz [BaMi]). Napsal též aritmetický spis *Gaṇita-tilaka* vycházející ze Śrīdharovy práce *Pāṭī-gaṇita* a astronomická pojednání *Dhīkotidakarana* a *Dhruvamānasa.* Je autorem populárních astrologických prací *Jātakapaddhati* (nebo *Śrīpatipaddhati*) a *Jyotisaratnamālā* (viz [En8]). Žil ve městě Rohiṇīkhaṇḍa asi 250 km jižně od Ujjainu, (viz [CR], [Pl1]).

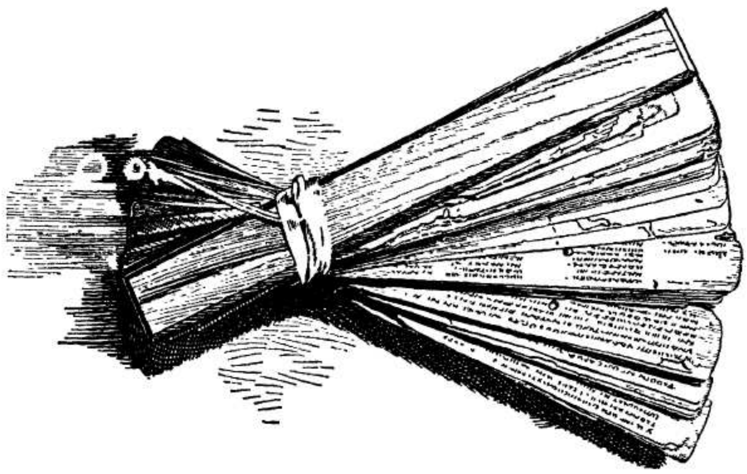
4.13. Bhāskara II. (1114–1185)

Za největšího středověkého indického matematika bývá považován Bhāskara, který je znám též jako Bhāskarācārya[12] nebo Bhāskara II. na rozdíl od Bhāskary I. Podle některých pramenů byl vedoucím astronomické observatoře v Ujjainu, kde byla známá matematická škola (viz [CR]), není to však dokázáno (viz [Pl1]).

[12] Bhāskarācārya znamená Bhāskara učený, vzdělaný.

Bhāskara je autorem několika významných prací; aritmetická *Līlāvatī* (*Krasavice*) je podle legendy pojmenovaná podle Bhāskarovy dcery.[13] Jeho dalším významným dílem je *Bījagaṇita* (*Algebra*) a astronomická práce *Siddhānta Śiromaṇi* (*Koruna vědy*).[14]

Līlāvatī (viz obr. 4.5) obsahuje 13 kapitol, ve kterých jsou v úvodu uvedeny měřické tabulky, v další části jsou pravidla pro aritmetické operace a pro počítání se zlomky. Ve třetí kapitole jsou popsány jednoduché algebraické postupy, například pravidlo chybného předpokladu, pravidlo tří. Ve čtvrté části jsou různé úlohy o úrocích, obchodní problémy, variace a kombinace, pátá kapitola obsahuje pravidla pro součet aritmetické a geometrické posloupnosti. Náplní šesté kapitoly je planimetrie, další tři kapitoly jsou také geometrické, věnují se především výpočtu objemů, v poslední kapitole jsou uvedeny různé kombinatorické úlohy (viz [Col]).



Obr. 4.5 Rukopis *Līlāvatī* na palmových listech, převzato z [Sm1].

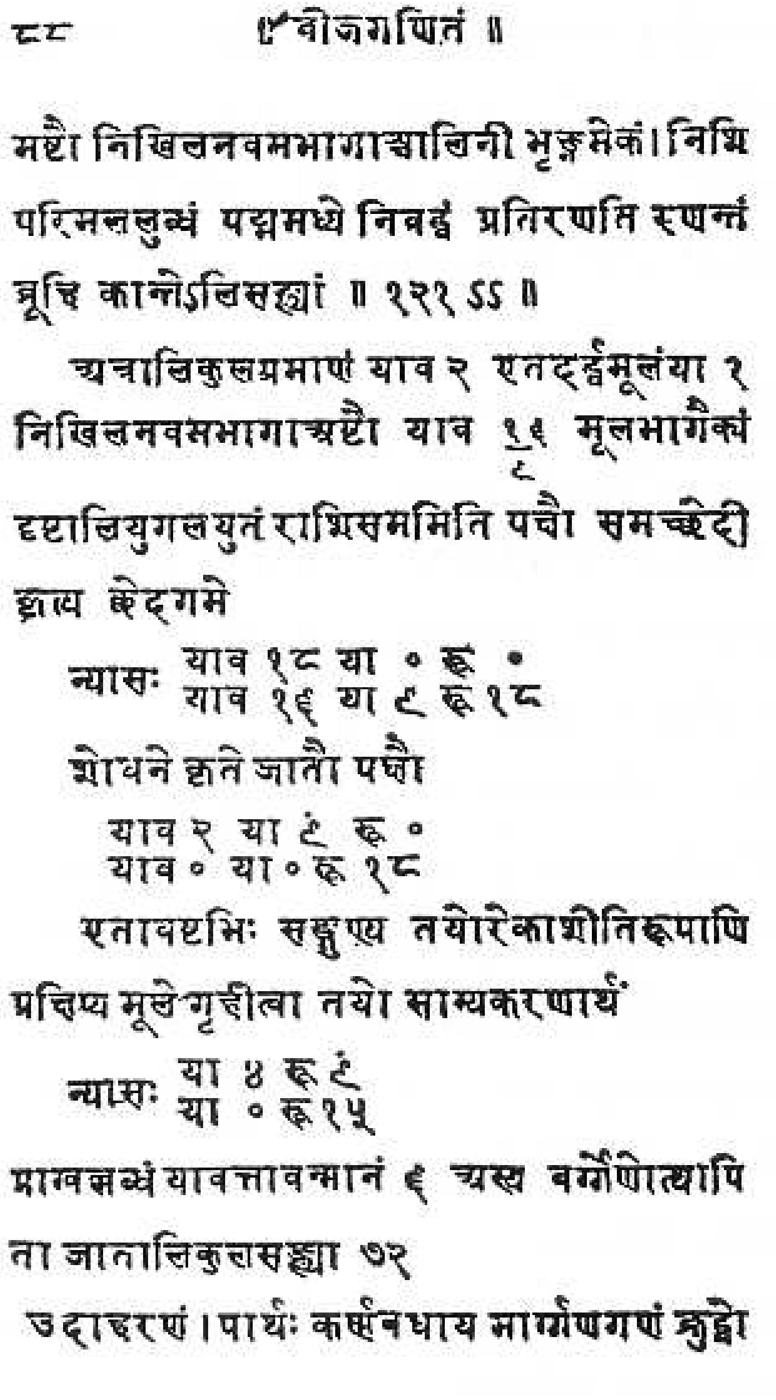
Bījagaṇita (viz obr. 4.6), se skládá z osmi kapitol. V první z nich jsou popsána základní algebraická pravidla, operace se zápornými čísly, s nulou, s odmocninami, v dalších dvou kapitolách jsou metody na hledání celočíselných řešení neurčitých rovnic lineárních a kvadratických. Kapitola čtvrtá a pátá obsahují různé problémy, které vedou na lineární, resp. kvadratické rovnice o jedné nebo více neznámých, jsou tu též obsaženy některé geometrické úlohy a dva důkazy Pythagorovy věty. V šesté kapitole lze nalézt různé úlohy, které vedou na určité nebo neurčité lineární rovnice s více neznámými a v posledních dvou kapitolách jsou různé druhy kvadratických rovnic (viz [Col]).

[13] Otec Līlāvatī podle horoskopu poznal, že vhodný čas pro svatbu dcery nastane konkrétní hodinu určitého dne. Do nádoby plné vody vložil pohárek s malou dírkou ve dně, který se pomalu plnil vodou a klesl by ke dnu, na začátku příznivé hodiny. Když bylo vše připraveno, Līlāvatī se ze zvědavosti naklonila nad nádobu a z jejích šatů spadla perla přímo do pohárku a ucpala dírku. Pohárek se nepotopil, ona tím zmeškala správný okamžik a nemohla se už vdát. Bhāskara byl přesvědčen, že sklíčenou dceru nejlépe utěší, když jí napíše matematickou příručku, podle [Jo1], str. 269. Není však doloženo, že Bhāskara měl dceru.

[14] Někteří považují první dvě práce za součást třetí, např. [Ju].

Bhāskarova práce navazuje na předchozí díla, autor sám se odvolává zejména na Brahmaguptu a Śrīdharu. Práce byla velmi oblíbená, studovali ji mnozí další matematikové, bylo napsáno několik komentářů.

Bhāskara rovněž napsal několik komentářů, například *Vivarana* k Lallově práci *Śiṣya-dhī-vṛddhida-tantra* (viz [CR], [En9]).


८८ ॥ बीजगणितं ॥

मष्टौ निखिलनवमभागाश्चालिनी भृङ्गमेकं । निभि
पद्मिनलुब्धं पद्ममध्ये निबद्धं प्रतिरणति रणन्तं
ब्रूहि कान्तेऽलिसङ्ख्यां ॥ १२१ ऽऽ ॥

अत्रालिकुलप्रमाणं याव २ एतदर्द्धमूलं या १
निखिलनवमभागाश्चाष्टौ याव १६/९ मूलभागैक्यं
दृष्टालियुगलयुतं राशिसममिति पक्षौ समच्छेदी
कृत्य छेदगमे

न्यासः याव १८ या ० रू ०
याव १६ या ९ रू १८

शोधने कृते जातौ पक्षौ
याव २ या ९ रू ०
याव ० या ० रू १८

एतावष्टभिः सङ्गुण्य तयोरेकाशीतिरूपाणि
प्रक्षिप्य मूले गृहीत्वा तयोः साम्यकरणार्थं

न्यासः या ४ रू ९
या ० रू १५

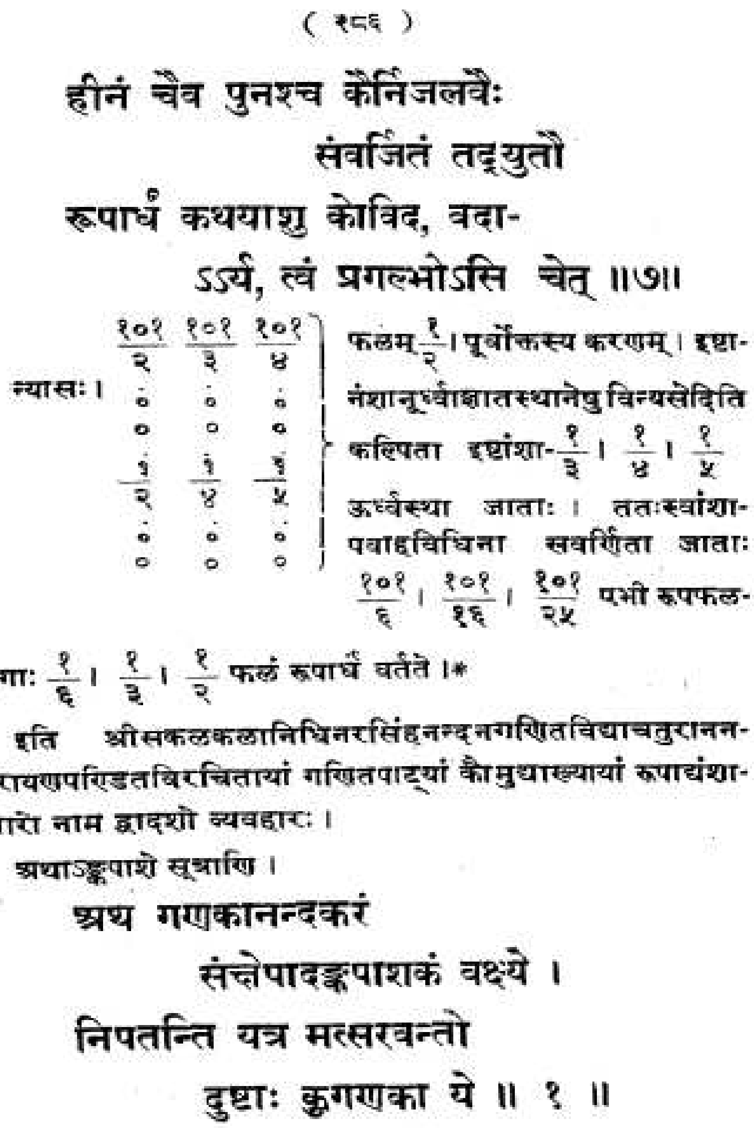
प्राग्वल्लब्धं यावत्तावन्मानं ६ अस्य वर्गेणोत्थापि
ता जातालिकुलसङ्ख्या ७२

उदाहरणं । पार्थः कर्णबधाय मार्गणगणं क्रुद्धो

Obr. 4.6 První tištěné vydání *Bījagaṇity*, převzato z [Er].

4.14. Nārāyaṇa (asi 1340 až 1400)

Mezi středověké indické matematiky patří rovněž Nārāyaṇa, někdy zvaný Nārāyaṇa Paṇḍit. Napsal aritmetickou a geometrickou práci *Gaṇita-kaumudī* (viz obr. 4.7) a algebraické pojednání *Bījagaṇitāvataṃsa.* Byl silně ovlivněn dílem Bhāskary II., snad je i autorem komentáře *Karmapradipikā* k *Līlāvatī* (viz [CR], [En10]). *Gaṇita-kaumudī* obsahuje pravidla pro provádění aritmetických operací včetně přibližného určení druhé odmocniny v souvislosti s řešením tzv. Pellovy rovnice.[15] Nārāyaṇa studoval magické čtverce a jejich vztah k aritmetickým posloupnostem (viz [CR], [DS6]).



Obr. 4.7 Jedna stránka práce *Gaṇita-kaumudī*, převzato z [DvP].

[15] Je-li x a y řešením Pellovy rovnice $ax^2 + 1 = y^2$ ($a \in \mathbb{N}$, $\sqrt{a} \notin \mathbb{N}$), pak $a \approx \frac{y}{x}$.

5. ČÍSLA

Jazyk

Krátce po skončení védského období kodifikoval jazykovědec Pāṇini (5. nebo 4. stol. př. n. l.) ve své gramatice *Āṣṭādhyāyī* (*Áštadhjájí*)[1] mluvnická pravidla *sanskrtu.*[2] Sanskrt nebyl běžnou hovorovou řečí, byl jazykem vyšších společenských vrstev, především bráhmanů. Příslušníkům kasty šúdrů a bezkastovním bylo dokonce zakázáno se mu učit. Byl to výsadní jazyk bráhmanské náboženské literatury, jazyk, kterým se dorozumívali vzdělanci, jazyk literární tvorby. V běžném životě jej však nahrazovaly hovorové jazyky z různých oblastí Indie, které se souhrnně nazývají *prákrty.* Z nich se později vyvinuly dnešní novoindické jazyky. První, kdo upřel sanskrtu jeho výsadní postavení, byl zřejmě Buddha, jenž ve svých kázáních používal některý hovorový prákrt kvůli větší dostupnosti a srozumitelnosti pro všechny vrstvy obyvatelstva. Někteří stoupenci buddhismu tvrdí, že tímto jazykem byl prákrt *pāli*, v němž bylo později zapsáno Buddhovo učení.[3]

V souboru védských textů je jen velmi málo výrazů vztahujících se ke čtení a psaní. Později se v buddhistické literatuře už zmínky o čtení a psaní objevují. Nejstarší dochované písemné doklady jsou rané nápisy a edikty panovníka Ašóky (3. stol. př. n. l.).[4] Na obrázku 5.1 je ukázka Ašókova nápisu, který je dnes uložen v Britském muzeu v Londýně.

Obr. 5.1 Fragment Ašókova nápisu na pískovcovém sloupu (asi 238 př. n. l.), převzato z [As1].

[1] Název se překládá jako *Osm kapitol o gramatice.*

[2] Sanskrt znamená vytříbený nebo dokonalý. Pánini téměř nezasáhl do fonetiky védského jazyka, jen zjednodušil tvarosloví, odstranil archaismy a setřídil gramatiku – to vše v 3976 stručných sútrových poučkách. Od té doby se už gramatická struktura jazyka téměř nezměnila.

[3] Někteří jazykovědci se však domnívají, že pálijština je odvozena spíše z některého prákrtu ze severní nebo severozápadní Indie.

[4] Ašóka byl třetím panovníkem z královské dynastie Maurjů, byl synem Bindusáry a vnukem Čandragupty. Vládl přibližně v letech 269 až 227 př. n. l., viz [FV], [Zb1].

Na obrázku 5.2 je hlavice Ašókova sloupu ze Sárnáthu poblíž města Varánásí, dnes je uložena v sárnáthském muzeu. Tato hlavice je součástí státního znaku Indie.

Obr. 5.2 Hlavice Ašókova sloupu, převzato z [As2].

Ašóka jako první sjednotil pod svou vládu do jedné říše téměř celé území Indického poloostrova. Aby obyvatelé této velké říše byli informováni o jeho vladařských záměrech, nechal tesat do skal nebo kamenných sloupů nápisy v dialektech srozumitelných všemu obyvatelstvu.[5] Dochovala se necelá stovka nápisů s různorodým obsahem. V některých Ašóka vyjadřoval politování nad tím, že na počátku své vlády vedl útočné války, zavázal se k životu v přátelských vztazích se všemi sousedy. Přihlásil se k morálním zásadám buddhismu, zároveň však slíbil podporu těm, kteří vyznávali jiné víry a nabádal svůj lid k náboženské toleranci. Vyzýval obyvatele, aby se obraceli se svými prosbami či stížnostmi přímo na něho nebo na inspektory, které rozesílal do všech částí říše. Vysvětloval, jak se hloubí studny a pěstují léčivé byliny (viz [Zb2]).

Ašóka ve svých nápisech použil prákrt *magādhī* založený na hovorové řeči ze severovýchodních částí Indie. Ašókovu snahu o srozumitelnost následovali i další panovníci, takže sanskrt se objevil v nápisech až ve druhé polovině 1. stol. př. n. l.[6]

[5] Sloupy z hlazeného pískovce byly 10 až 20 metrů vysoké, v průměru měřily přibližně jeden metr. Obsahovaly jednak delší, tzv. sloupové nápisy, nebo kratší dedikační a pamětní nápisy, viz [FV].

[6] Popis a klasifikace Ašókových nápisů jsou uvedeny například v [FV].

Písmo

Už ve staré buddhistické literatuře (kolem roku 450 př. n. l.) jsou zmínky o písmu a psaní (viz [FV]).[7] Přesto jsou nejstaršími uchovanými texty Ašókovy nápisy.

Písmo, kterým byly Ašókovy nápisy psány, se nazývá *brāhmī* (*bráhmí*). Na obrázku 5.3 je Ašókův sloup z Kotla Firoz Shah, pískovcový monolit vysoký téměř 13 metrů, s nápisem v písmu *brāhmī*. Je to jeden z prvních nápisů, které rozluštil anglický orientalista James Prinsep (1799–1840).

Obr. 5.3 Ašókův sloup, převzato z [SiV].

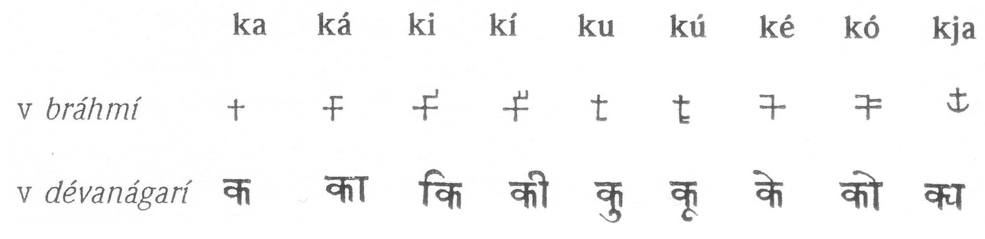
Brāhmī je písmo slabikové, ve kterém se zapisují všechny souhlásky, má však i samostatné znaky pro samohlásky na začátku slova. Pro vyjádření samohlásek uprostřed a na konci slova se používají přídavná znaménka vedle, nad nebo pod souhláskou. Některé dvojice souhlásek neoddělené samohláskou se spojují ligaturou. Čte se zleva doprava. Nápisy v písmu *brāhmī* byly nalezeny v oblasti celé Indie. Písmo *brāhmī* bylo národním písmem starověkých Indů. Toto písmo vyhovovalo fonetice indických jazyků a stalo se základem většiny indických písmových systémů, zejména písma *devanāgarī* (*dévanágarí*),[8] které

[7] Rodiče při výběru budoucího synova povolání navrhovali práci písaře. Při tomto zaměstnání bude žít v klidu a pohodlí, ale budou jej bolet prsty, viz [FV].

[8] *Devanāgarī* znamená písmo božího města. Někdy se uvádí pouze *nāgarī*.

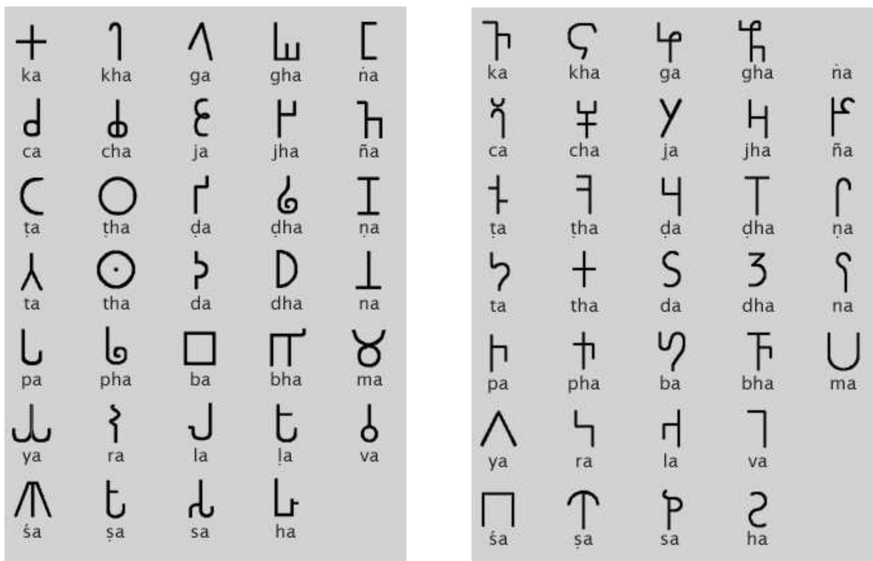
dodnes používá nejen sanskrt, ale i některé novoindické jazyky jako hindština.

Porovnání písma *brāhmī* a *devanāgarī*:[9]



Zatím není znám ani původ ani vývoj písma *brāhmī*. Někteří vědci zastávají názor, že se vyvinulo z písma, které bylo nalezeno na pečetích harappské kultury.[10] Většina indologů hledá původ písma *brāhmī* mimo Indii, přiklání se k názoru, že původ by mohl být ve starém severosemitském písmu. Stejně nejasná je i doba vzniku, snad někdy v první polovině 1. tisíciletí př. n. l. V průběhu doby se písmo zdokonalovalo, až získalo podobu známou z Ašókových nápisů.

Jiné je písmo nalezené jen na několika nápisech v severozápadní části Indického poloostrova, nazývá se *kharoṣṭhī* (*kharóští*).[11] Je aramejského původu, bylo přineseno do Indie ze západu. Nápisy pocházejí hlavně ze starověké provincie Gándhara v dnešním východním Pákistánu a severním Pandžábu. Písmo se četlo zprava doleva, bylo oblíbené zejména mezi úředníky a obchodníky. Používalo se hlavně v době mezi 4. stol. př. n. l. a 3. stol. n. l. Porovnání souhlásek *brāhmī* a *kharoṣṭhī* je na obrázku 5.4.



Obr. 5.4. Porovnání souhlásek *brāhmī* (vlevo) a *kharoṣṭhī* (vpravo), převzato z [Lo1], [Lo2].

---

[9] Podle [Zb2].

[10] Tato teorie se opírá o podobnost některých tvarů. Nemá však velkou podporu vzhledem k tomu, že písmo civilizace údolí Indu nebylo dosud rozluštěno. Není jasné, zda se jedná o písmo znakové, slabikové či zda mají dokonce jednotlivé znaky význam celých slov.

[11] *Kharoṣṭhī* znamená oslí pysk.

Z doby mezi civilizací údolí Indu (nápisy na pečetích) a Ašókovými skalními a sloupovými nápisy neexistují žádné původní písemné dokumenty. Védy byly považovány za posvátné, byly výhradním vlastnictvím bráhmanské vrstvy. Nebylo tedy žádoucí, aby písemným zaznamenáním byly zpřístupněny širším vrstvám obyvatelstva. Také Buddhovo učení bylo sepsáno asi pět století po jeho smrti v díle *Tipitaka* (*Tři koše*). Veškeré texty byly určené k učení se nazpaměť a přesnému memorování.

Zvyk uchovávat literární díla ústní tradicí existoval v Indii dlouho, nakonec však převládl písemný záznam. Neexistují žádné zprávy o tom, kdy a za jakých okolností k tomu došlo. Nejstarší rukopisy pocházejí až z prvních let našeho letopočtu. Autoři rané sanskrtské naučné literatury minimalizovali text, který si měli žáci zapamatovat. Poučky formulovali do velmi stručných zhuštěných pravidel – *súter*. Studium sútrových textů vyžadovalo výklad učitele, později byly výklady učitelů nahrazeny komentáři učenců. Délka komentářů mnohdy převyšovala délku vlastní sútry.

Nejčastěji se psalo na palmové listy nařezané na pruhy široké 5 až 10 centimetrů a dlouhé 30 až 90 centimetrů. Listy se nejdříve vysušily, pak máčely a následně uhladily hladkým kamenem nebo muší. Pak se nařezalo potřebné množství listů tak, aby měly stejnou velikost, a ve všech byl proražen otvor. Tím se protáhla šňůra, která držela rukopis pohromadě (viz [Zb2]).[12] Celé dílo často chránily dřevěné desky. V severní Indii se na palmové listy psalo perem a inkoustem, v jižní části bylo zvykem vyrývat písmena do listu rydlem a pro zvýraznění je ještě potřít inkoustem. Dalším často používaným psacím materiálem, hlavně na severu Indie, byla březová kůra. Rukopisy na březové kůře se rovněž svazovaly šňůrou. Palmové listy i březová kůra však v indickém klimatu snadno podléhají zkáze.[13] Dalším velkým nepřítelem starých rukopisů byl hmyz. Naději na delší přežití měly jen velmi oblíbené texty nebo náboženská díla, která se stále znovu opisovala. Písaři se však občas dopouštěli chyb, takže opisovaný text se někdy zcela neshodoval s původním. Jiní zase původní text doplňovali o vlastní myšlenky.

Panovníci stále nechávali tesat nápisy do kamene, protože takové nápisy měly delší životnost. Pro obzvlášť důležité texty, například o darování půdy bráhmanům, se používaly měděné desky, které byly přenosné a odolné vůči poškození.

Velkým problémem je určení autorství a stáří rukopisů. Zvyk uvádět na konci rukopisu jméno díla, jeho autora a někdy i rok zapsání se totiž rozšířil poměrně pozdě. Ani zapsané jméno autora nemuselo vždy souhlasit, někdy bylo uvedeno jméno mistra, který byl autorovi vzorem. Obtížné je i určení data vzniku. V Indii neexistovalo jednotné datování, skoro každý vladař počítal čas

[12] Viz obrázek 4.5 ve 4. kapitole.

[13] Existují některé velmi staré rukopisy, např. části Ašvaghóšových divadelních her nebo buddhistické sbírky *Dhammapada*. Ty však byly nalezeny mimo oblast Indie. Včas byly přeneseny do oblastí s příznivějším podnebím, které umožnilo jejich zachování, většinou do Nepálu nebo Střední Asie, viz [Zb2].

od svého nástupu na trůn nebo alespoň od založení své dynastie.[14]

Nejstarší čísla v indické literatuře

Čísla byla zmiňována už ve védských textech.[15] V *Rgvedě* se píše:

Dal mi tisíc krav, které měly na uchu napsáno číslo 8.

Snad tedy existoval symbol pro osmičku, který určoval majitele krav.

V Indii byla vždy tendence vyjadřovat čísla v desítkové soustavě. V sanskrtské literatuře není žádná zmínka o širším užití jiného základu číselné soustavy. První náznaky desítkového systému existovaly už v době harappské kultury (2500–1500 př. n. l.).

Pro Indii je charakteristické velmi časné užívání velkých čísel i jejich názvů. Zatímco Řekové neměli terminologii pro čísla větší než *myriada* (10^4), Římané větší než *mille* (tisíc), starověcí Indové používali názvy nejméně pro 18 mocnin deseti. Už jedna z nejstarších védských sbírek *Yajurveda* obsahuje tyto hodnoty:[16]

eka	(1),	*arbuda*	(10^7),
daśa	(10),	*nyarbuda*	(10^8),
sata	(100),	*samudra*	(10^9),
sahasra	(1000),	*madhya*	(10^{10}),
ayuta	(10 000),	*anta*	(10^{11}),
niyuta	(10^5),	*parārdha*	(10^{12}).
prayuta	(10^6),		

Stejné názvy se vyskytují na dvou místech v práci *Taittirīya-Saṃhitā*. V dalších dílech *Maitrāyaṇī-Samhitā* a *Kāṭhaka-Samhitā* je obsažen tentýž seznam jen s menšími změnami. *Pañcaviṁśa Brāhmaṇa* podobně jako *Śāṅkhyāyana Śrauta sūtra* se shodují v názvech až do *nyarbuda* včetně, ale pro vyšší hodnoty užívají jiné názvy (*nikharva, vádava, akṣiti*, resp. *nikharva, samudra, salila, antya, ananta*). Každá z těchto hodnot je desetkrát větší než předchozí, výstižně byly nazývány *daśaguṇottara saṁjñā* (desetinásobné výrazy).

Připomeňme znovu buddhistickou práci *Lalitavistara*, kde jsou uvedena velká čísla až do *tallakṣaṇa* (10^{53}).[17]

Další zajímavá řada názvů čísel, rostoucích násobků deseti, je v práci Kāccāyany *Gramatika Pali*:[18]

Dasa (10) *násobeno dasa* (10) *dává sata* (100), *sata* (100) *násobeno dasa* (10) *dává sahassa* (1000), *sahassa* (1000) *násobeno dasa* (10) *dává dasa sahassa* (10 000) atd.

[14] Hlavní éry byly: vikramovská (asi od roku 58 př. n. l.), šacká nebo skytská (asi od roku 78 n. l.), guptovská (od roku 320), Haršova (od roku 606).

[15] Výpočty potřebné pro konstrukce obětních oltářů jsou popsány v 2. kapitole.

[16] Podle [DS1], str. 9.

[17] Viz 3. kapitola, odstavec 3.2.

[18] Podle [DS1], str. 11.

Postupně následovalo: *sata sahasa*, resp. *lakṣa* (100 000), *dasa sata sahasa* (1 000 000), *koṭi* (10^7). Sto-sto-tisíc *koṭi* dává *pakoṭi*, resp. *koṭi koṭi* ($10\,000\,000^2 = 10^{14}$). Tímto způsobem se pokračovalo dál, následující čísla byla v hodnotách *koṭi-koṭi*. Sto-sto-tisíc *pakoṭi* je *koṭipakoṭi*, sto-sto-tisíc *koṭipakoṭi* je *nahuta*, dále *ninnahuta*, *akkhobhini* atd. až do *asaṅkhyeya*, tj. do $10\,000\,000^{20}$ neboli do 10^{140}.

Známá džinistická práce *Anuyogadvārasūtra* udávala celkový počet lidských bytostí na světě jako:[19]

> *Číslo, které vyjádřené výrazem v hodnotách koti-koti zabírá* 29 *míst, je to číslo, které je za* 24. *a před* 32. *místem.*

V této práci byl poprvé užit termín „místo“ pro určení hodnoty.

Džinistická časová perioda *Śīrṣaprahelikā* byla vyjádřena číslem $8\,400\,000^{28}$ a podle komentátora obsahovala 194 míst.[20]

V textech zvaných *Purāṇy* (nejstarší ze 4. stol. př. n. l.) nalezneme také příklady pozičního vyjádření čísel. V *Agni-Purāně* se říká:[21]

> *Od pozice jednotek je hodnota každé další pozice desetkrát větší než hodnota předchozí pozice.*

Ve *Viṣṇu-Purāně* je podobně:[22]

> *Od jednoho místa k následujícímu jsou místa násobky deseti. Osmnácté z nich se nazývá parárdha.*

Ve *Vāyu-Purāně* se poznamenává:[23]

> *Je osmnáct pozic (sthāna) pro počítání; moudří říkají, že takových míst mohou být stovky.*

Později, když byla více rozvinuta myšlenka pozičního zápisu čísel, se jméno čísla užívalo pro označení místa, na kterém stála jednička v desítkovém zápisu čísla. Āryabhaṭa I. nazýval jednotlivé pozice takto:[24]

> **Ar/ii.2**
> *Čísla eka* [jedna], *daśa* [deset], *śata* [sto], *sahasra* [tisíc], *ayuta* [deset tisíc], *niyuta* [sto tisíc], *prayuta* [milion], *koṭi* [deset milionů], *arbuda* [sto milionů], *vṛnda* [tisíc milionů] *jsou postupně místo po místu každé desetinásobek předchozího.*

[19] Podle [DS1], str. 12, viz též 3. kapitola, odstavec 3.3.
[20] Viz 3. kapitola, odstavec 3.2.
[21] Podle [DS1], str. 84.
[22] Podle [DS1], str. 84.
[23] Podle [DS1], str. 84.
[24] Podle [Cla], str. 21, [DS1], str. 13.

Ve většině matematických prací se hodnoty čísel nazývaly „jména míst". Bývalo jich zpravidla jmenovitě uvedeno osmnáct. Śrīdhara uvedl tato jména:[25]

> **PaGa/7–8**
> *Eka, daśa, śata, sahasra, ayuta, lakṣa, prayuta, koṭi, arbuda, abja, kharva, nikharva, mahāsaroja, śaṅku, saritā-pati, antya, madhya, parárdha.*

Mahāvīra popsal dokonce 24 pozic:[26]

> **GaSaSa/i.63–68**
> *Eka, daśa, śata, sahasra, daśa-sahasra, lakṣa, daśa-lakṣa, koṭi, daśa-koṭi, śata-koṭi, arbuda, nyarbuda, kharva, mahā-kharva, padma, mahā-padma, kṣōṇi, mahā-kṣōṇi, śaṅkha, mahā-śaṅkha, kṣityā, mahā-kṣityā, kṣōbha, mahā-kṣōbha.*

Bhāskara II. a později i Nārāyaṇa předložili podobné seznamy, jen pro některé velké hodnoty používali odlišné názvy.

Pro číslice od jedné do devíti se v sanskrtu užívala slova:

eka	(1),	*ṣat*	(6),
dvi	(2),	*sapta*	(7),
tri	(3),	*aṣṭa*	(8),
catur	(4),	*nava*	(9).
pañca	(5),		

Číslo 20 se nazývalo *vimśat*, pro číslo 30 se používal termín *trimśat*, číslu 200 se říkalo *dviśata*, název *triśata* určoval číslo 300.

Pokud číslo obsahovalo pouze jednotky a desítky, nejprve se uváděl nižší řád, tj. jednotky, tedy například číslo 29 bylo vyjádřeno jako *nava-vimśati* neboli pouhým výčtem čísel počínaje od jednotek *devět-dvacet.*[27] Když bylo číslo větší, další řády už následovaly od nejvyššího sestupně (například tisíce, stovky, jednotky, desítky). Jiný způsob, jak nazývat čísla 19, 29, 39 atd., byl založen na odčítacím principu, například číslo 29 bylo vyjádřeno jako *ekānna-trimśat* (o jednu méně než třicet). Později bylo *ekānna* změněno na *ekona* a příležitostně se dokonce předpona vynechávala a vzniklo *ūna-trimśat.*

Například v rukopisu *Bakhshālī* je číslo 54 vyjádřeno jako *catuḥ* (4) *pañca* (5).[28] Ve stejné práci je uvedeno číslo $2653296226447064994\cdots83218$, jehož název byl vytvořen až po jeho rozdělení po dvou číslicích zleva. Pojmenované je tedy takto:[29]

> *ṣaḍviṁśaśca* (26) *tripañcāśa* (53) *ekonatriṁśa* (29) *evachadvāṣa* (62)
> *ṣaḍviṁśa* (26) *catuḥcatvāriṁśa* (44) *saptati* (70) *catuḥṣaṣṭi* (64)
> *navanavati* (99) … *triraśiti* (83)*ekaviṁśa* (21) *aṣṭa* (8)

[25] Podle [Shu1], str. 2, [DS1], str. 13.
[26] Podle [Ran], str. 7–8, [DS1], str. 13.
[27] Připomíná dnešní devětadvacet.
[28] Viz folio 27 recto, podle [DS1], str. 61.
[29] Viz folio 58 recto. Tečky jsou na místě nečitelných číslic, podle [DS1], str. 61.

Kvůli nedostatku psacích potřeb a materiálu se nejstarší díla nezapisovala, byla šířena ústním podáním. Pro lepší zapamatování byla formulována ve verších. Proto bylo třeba čísla vyjadřovat tak, aby vyhovovala metrice daného verše. Z toho důvodu se hledaly různé způsoby, jak dané číslo zapsat. Často se používala aditivní metoda, někdy i multiplikativní. V různých matematických dílech byla nalezena takto vyjádřená čísla:[30]

139	*čtyřicet přidané k o jedna méně než sto*	$40 + (100 - 1)$,
297	*o tři méně než tři sta*	$300 - 3$,
27	*tři devítky*	3×9,
12	*dvě šestky*	2×6,
28 483	*osmdesát tři spojené s čtyřmi sty a čtyři tisíce násobené sedmi*	$83 + 400 + (4000 \times 7)$.

5.1. Nepoziční zápis čísel

Zpočátku byla velká čísla popisována slovně, pro malé jednotky však velmi brzy existovaly speciální symboly.

Nejstarší indické písmo bylo objeveno na pečetích z vykopávek v Mohendžodaru a Harappě. Jedná se o obrázkové písmo, které ještě nebylo zcela rozluštěno (viz obr. 5.5). Nápisy na pečetích obsahovaly i svislé čárky a skupiny svislých čárek, které pravděpodobně označovaly čísla od 1 do 13. Není jasné, zda už tehdy existovaly speciální znaky pro větší čísla jako 20, 30, 100 atd.

Obr. 5.5 Pečeť s nápisem, převzato z [KM].

Z následujícího období je málo literárních důkazů, které by ukazovaly na užití číselných symbolů.

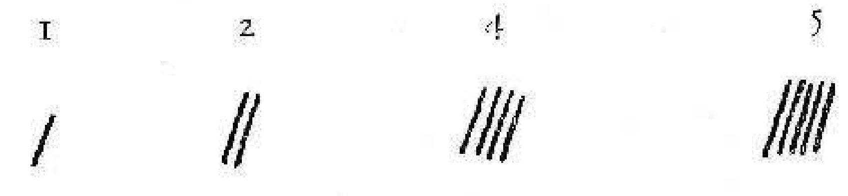
Jasné důkazy o znalosti písma i některých číselných symbolů podávají až Ašókovy nápisy. Protože byly vytesány do skal nebo kamenných sloupů, dobře

[30] Viz sloky GaSaSa/ii.4, podle [Ran], str. 10, Lila/ii.20, podle [Col], str. 9, *Trišatika*/Ex.43, podle [DS1], str. 15, GaSaSa/ii.28, podle [Ran], str. 13. O zápisu nejstarších indických čísel pojednává článek [Sy7].

se dochovaly. V té době bylo již užívání číselných symbolů zcela běžné. Změny tvarů číselných symbolů naznačují, že se užívaly již delší dobu. Většina Ašókových nápisů je psána písmem, které se nazývá *brāhmī*, některé jsou psány jiným písmem, známým jako *kharoṣṭī*. Číselné symboly v obou druzích písma jsou odlišné.

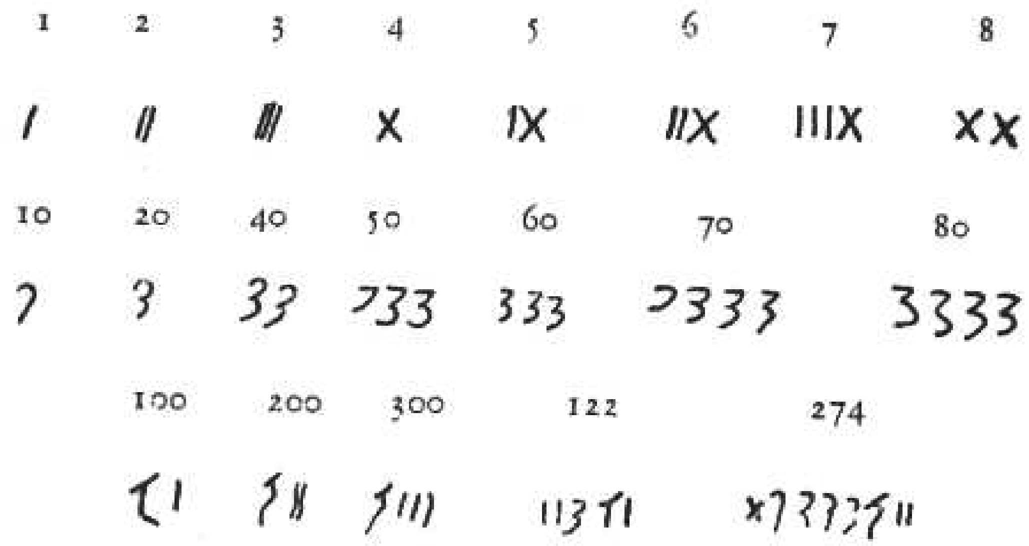
Čísla kharoṣṭī

Číslice *kharoṣṭī* se zapisovaly zprava doleva. V Ašókových nápisech byla objevena pouze čtyři čísla (viz obr. 5.6).



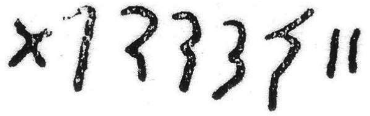
Obr. 5.6 Čísla *kharoṣṭī* z Ašókových nápisů, převzato z [DS1].

Dokonalejší tvary čísel *kharoṣṭī* byly nalezeny v nápisech Parthů, Šaků a Kušánů z počátku našeho letopočtu (viz obr. 5.7).



Obr. 5.7 Čísla *kharoṣṭī* z počátku našeho letopočtu, převzato z [DS1].

Není uspokojivě vysvětleno, proč číslo 4, které bylo dříve znázorňováno čtyřmi svislými čárkami, se později značilo křížkem. Čísla od 5 do 8 jsou vyjádřena aditivním způsobem se základem čtyři. Není jasné, jak se zapisovala devítka. Je pravděpodobné, že znakem IXX. Pro číslo 10 je použit zcela odlišný symbol, není známo, proč se nepokračovalo v aditivním způsobu, tj. IIXX, proč se upustilo od čtyřky jako základu. Staré symboly prodělaly vývoj, zvláště čísla od 4 do 19. Je pravděpodobné, že samostatné symboly pro čtyřku a desítku byly poprvé použity v Indii, možná proto, aby se zápis zjednodušil a snad i přiblížil zápisu v rozšířenějším písmu *brāhmī*. Symbol X mohl být odvozen z *brāhmī* symbolu +, který znamenal 4 v Ašókových nápisech. Symbol pro 10 se podobá písmenu *a* v abecedě *brāhmī*. Symbol pro 20 mohl vzniknout spojením dvou znaků pro 10. Způsob vyjadřování čísel 30, 40 atd. pomocí znaků pro 10 a 20 je podobný jako u Féničanů. Symbol pro 100 se podobá písmenu *ta* nebo *tra* písma *brāhmī*, k němuž je připojen symbol pro jedničku. Symboly 200, 300 atd. vznikly připsáním symbolů 2, 3 atd. zprava k číslu 100. Tento multiplikativní způsob byl nalezen u Féničanů. Vytváření dalších čísel je předvedeno na čísle 274 (viz obr. 5.8), které je zapsáno pomocí znaků pro 2, 100, 20, 10, 4 uspořádaných zprava doleva.

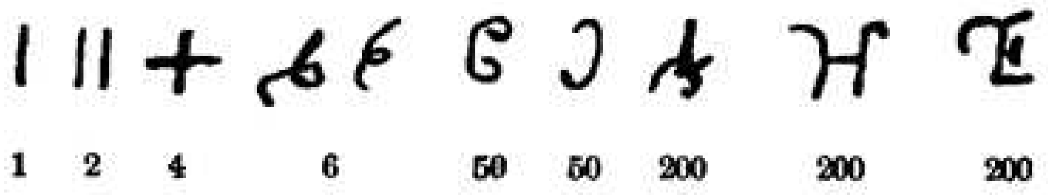


Obr. 5.8 Číslo *kharoṣṭī* 274, převzato z [DS1].

Dvojka vpravo od 100 znamená, že se násobí, zatímco čísla psaná vlevo se přičítají. Číslo 274 je tak vyjádřeno jako $2 \cdot 100 + 20 + 20 + 20 + 10 + 4$.

Čísla brāhmī

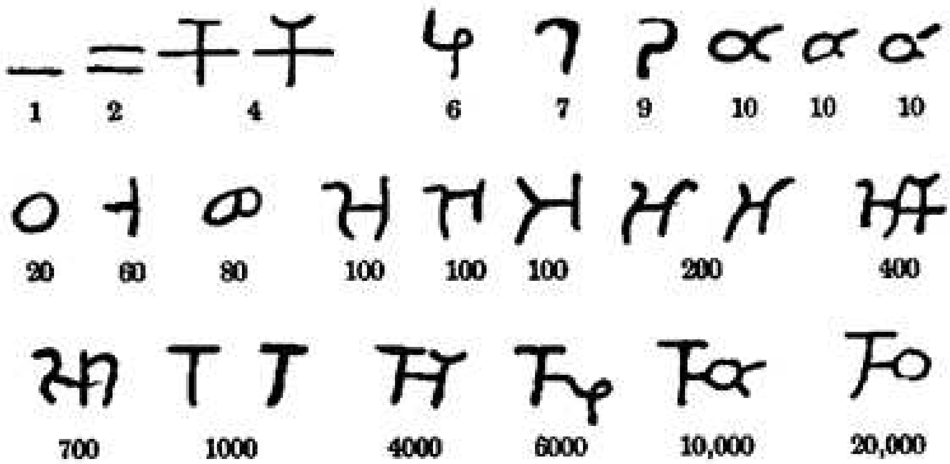
Číslice *brāhmī* jsou snad indického původu a vznikly někdy v letech 1000 až 600 př. n. l. Zapisovaly se zleva doprava. Kvůli nedostatku původních spisů se nedá přesně určit původní tvar znaků *brāhmī*. Znalosti pocházejí z doby panovníka Ašóky, jenž vládl rozsáhlému území, které zahrnovalo nejen Indii, ale zasahovalo i na sever do střední Asie. Znaky nalezené v Ašókových nápisech jsou na obrázku 5.9.



Obr. 5.9 Čísla *brāhmī* z Ašókových nápisů, převzato z [SK].

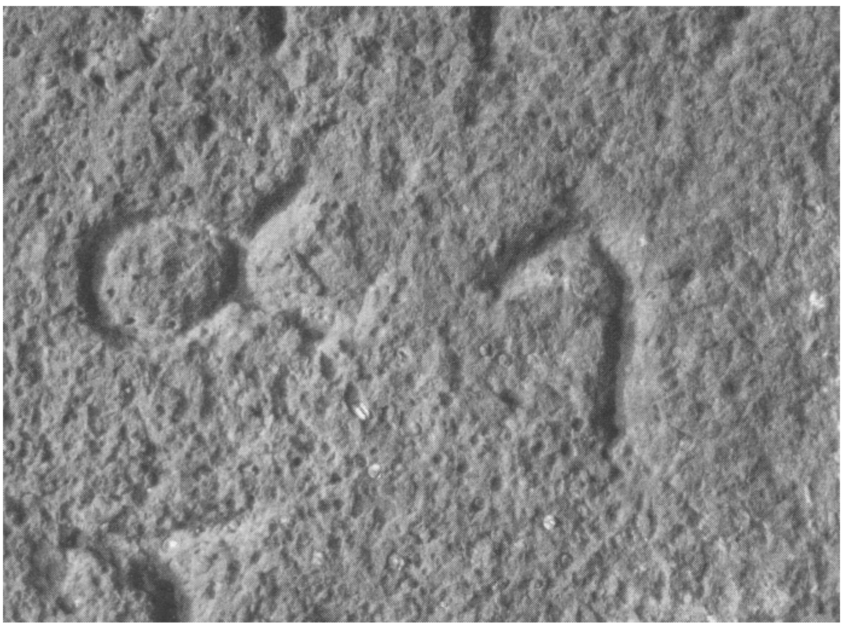
Další nápisy obsahující čísla byly nalezeny v jeskyni na vrcholku hory Nana Ghat ve střední Indii asi 120 km od Puné (viz obr. 5.10). Nápisy obsahují seznam darů pravděpodobně vyrobených u příležitosti náboženské oběti. Poprvé je rozluštil indický archeolog Pandit Bhagavanlal Indraji (1839–1888), vysvětlil i některé numerické symboly.[31]

[31] Pandit Indraji tvrdil, že Indové znali písmo už ve 4. tisíciletí př. n. l. a že používali velká čísla až do 10^9 již okolo roku 2000 př. n. l., viz [DS1].



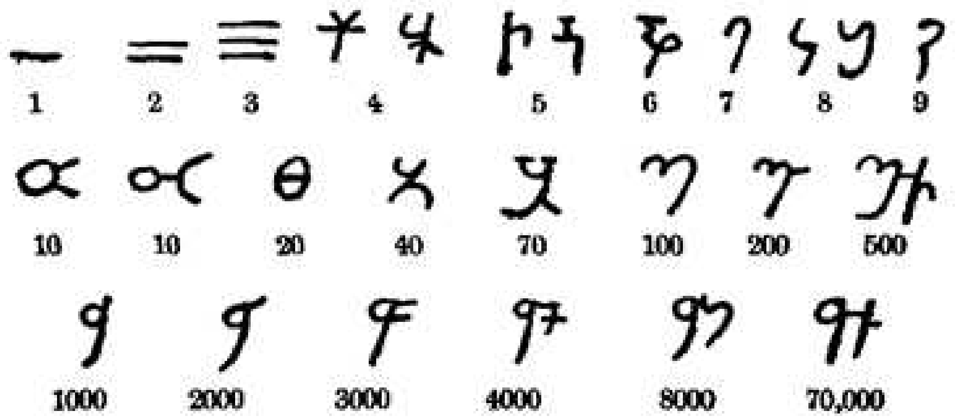
Obr. 5.10 Čísla *brāhmī*, převzato z [SK].

Na obrázku 5.11 je část nápisu z buddhistické jeskyně na Nana Ghat, kde jsou čísla 10 a 7 vyjádřená v nepozičním zápisu; zatímco znak pro desítku trochu připomíná řecké písmeno alfa, tvar sedmičky se podobá jejímu dnešnímu symbolu.



Obr. 5.11 Čísla *brāhmī* 10 a 7 v nepozičním vyjádření (2. stol. př. n. l.), nápis z jeskyně v Nana Ghat, převzato z [Pl1].

Jiné nápisy s čísly pocházející asi z 1. nebo 2. stol. n. l. byly objeveny v jeskyni v oblasti Nasik (viz obr. 5.12).



Obr. 5.12 Čísla *brāhmī* z jeskyně v oblasti Nasik, převzato z [SK].

Čísla 1, 2, 3 se v zápisu *brāhmī* značila jednou, dvěma a třemi vodorovnými čárkami umístěnými pod sebou. Tento tvar jasně odlišuje systém *brāhmī* od *kharoṣṭī*. Není jasné, proč čárky byly v *kharoṣṭī* svislé a v *brāhmī* vodorovné, ani proč se způsob zápisu zprava doleva v *kharoṣṭī* změnil na opačný, tj. zleva doprava v *brāhmī*. Zdá se, že číslice *brāhmī* a *kharoṣṭī* existovaly vedle sebe a nedá se určit, které se objevily dříve.

V systému *brāhmī* existovaly samostatné znaky pro každé číslo 1, 4 až 9 a 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 200, 300, ... , 1000, 2000 atd. V nejstarší písemné podobě *kharoṣṭī* byly znaky jen pro 1, 10, 20 a 100. Také tvoření velkých čísel bylo v obou systémech odlišné. Zatímco v *brāhmī* se nejvyšší řád psal vlevo, v *kharoṣṭī* bylo pořadí opačné. Například číslo 274 bylo zapsáno pomocí znaků pro 200, 70 a 4; v *brāhmī* bylo pořadí 200-70-4, *kharoṣṭī* řadilo 4-70-200.

Objevilo se několik teorií o původu číslic *brāhmī*. Jedna z nich považuje za pravděpodobné, že se čísla *brāhmī* vyvinula z čísel používaných v harappské kultuře, další verze pokládá za možné, že čísla *brāhmī* byla odvozena z hieratického zápisu starých Egypťanů. Hieratická a démotická čísla jsou podobná *brāhmī*, mají 19 znaků od 1 do 100, ale způsob tvoření čísel 200, 300, 400, 2000, 3000, 4000 je odlišný.[32]

Je možné, že tvar desítek byl odvozen od nějakého písmene nebo znaku abecedy, původ jednotek je nejasný. Snad mohly být také vytvořeny podle některých starších typů písmen, není pro to však dostatek důkazů. Stejné symboly pro číslice 1 až 9 se užívaly i po zavedení nuly a pozičního systému.

Odlišný způsob psaní čísel, který užíval písmena nebo slabiky, byl objeven na starých rukopisech při číslování stránek, na mincích i několika nápisech. Znaky však byly trochu upravené, aby se odlišily od symbolů pro písmena. Džinisté tyto znaky nazývali *akṣarapallī* na rozdíl od desítkového zápisu *aṅkapallī*. Číselný systém *brāhmī* byl dále rozšiřován džinisty a buddhisty.

[32] Podrobněji jsou různé možnosti diskutovány např. v [SK] a [DS1].

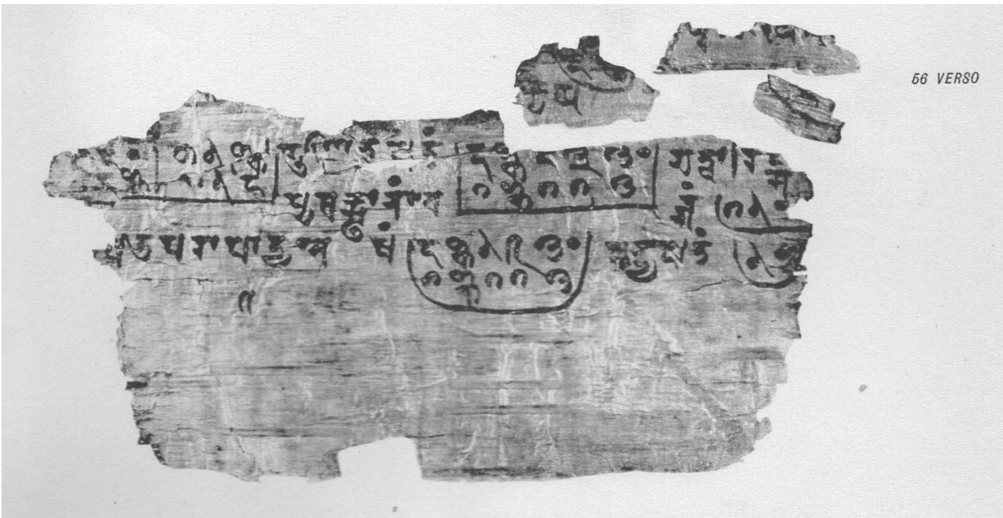
5.2. Nula

Desítkový poziční zápis by nebyl možný bez nuly. V desítkovém pozičním zápisu má nula dvojí funkci – jako číslice slouží k označení chybějícího řádu a zároveň je plnohodnotným číslem, pro které je třeba definovat aritmetické operace.

Nejstarší indické dílo, ve kterém se objevuje nula, je *Chandaḥ sūtra*.[33] Je zřejmé, že Indové znali nulu už v době kolem roku 200 př. n. l., i když v této práci ještě neměla roli plnohodnotné číslice.

Nula se nazývala *śūnya* (prázdno, nedostatek)[34] a byla považována za číslo od prvních století našeho letopočtu, ale není jasné, jaká byla její přesná podoba. Existovalo několik symbolů, kterými byla nula označována. V bakšálském rukopisu se zavádí pro nulu tečka •. Termín *bindu* (tečka) se užíval pro nulu ve slovním vyjádření i v pozdější literatuře. Někdy k označení nuly sloužil malý kroužek ∘ .

Na lístku folio 56 verso rukopisu *Bakhshālī* je nula vidět v prostředním rámečku vpravo nahoře (viz obr. 5.13).



. 880 84 | 964 168 | guṇitajātaṁ pṛithaksthānāṁva | 848320 14112 | chatvāriṅśa rgaṁ | 160 . . . [56v.]

. sha uparāpātyaśeshaṁ || | 846720 14112 | vartyajātaṁ | 60

*The lower half of this page is blank.

Obr. 5.13 Rukopis *Bakhshālī*, folio 56 verso a jeho přepis, převzato z [Kay1].

[33] Viz 3. kapitola, odstavec 3.4.

[34] G. Joseph odkazuje na podobnost se slovem *śūna*, příčestím minulým slovesa *svi* (růst), v *Ṛgvedě* však mělo jiný význam, bylo užito ve smyslu „nedostatek“. Naznačuje možnost, že termín *śūnya* mohl vzniknout spojením dvou slov s významem „nedostatek, prázdno“ s možností růstu, viz [Jo2].

Z překladu textu je zřejmé, že s nulou se počítalo jako s plnohodnotnou číslicí:[35]

880	964		848 320
84	168	*násobené dává*	14 112

Čtverec čtyřiceti, umístěný odděleně, je $\boxed{1\,600}$.

Po odečtení toho od čísla nahoře [čitatele] *je zbytek* $\left|\begin{array}{c} 846\,720 \\ 14\,112 \end{array}\right|$.

Odstraněním společného dělitele se stane $\boxed{60}$.

Na jiném místě v tomtéž rukopisu byl použit stejný symbol k označení neznámé veličiny, tedy jako neznámé, tj. nepřítomné množství.[36]

V astronomické práci Varāhamihiry *Pañca-siddhāntikā* je nula zmiňována na několika místech, objevuje se při sčítání i odčítání (viz [DS1]).

Dílo Jinabhadry Gaṇi (asi 529 až 589), současníka Varāhamihiry, podává přesvědčivé důkazy o užití nuly jako jasného číselného symbolu. Když popisuje velká čísla obsahující několik nul, uvádí jejich počet. Například číslo[37]

3 200 400 000 000 vyjádřil jako *třicet dva, dvě nuly, čtyři, osm nul.*

Na jiném místě se v jeho práci vyskytuje takováto pasáž:[38]

> *Dvě stě tisíc čtyřicet jeden tisíc devět set šedesát, po odstranění nul (apavartana) je čitatel čtyři-nula-sedm-jedna-pět a jmenovatel čtyři-osm-tři-devět-dva.*

To odpovídá úpravě

$$241\,960\frac{407\,150}{483\,920} = 241\,960\frac{40\,715}{48\,392}.$$

Termín *apavartana* znamená v dnešní terminologii krácení zlomků.

Nula se vyskytovala i mimo území dnešní Indie, například malayský nápis v Palembangu vyjadřuje rok 606 éry Śaka, to je 684 n. l. (viz obr. 5.14).

Obr. 5.14 Číslo 606 z malayského nápisu, převzato z [Mu].

[35] Viz folio 56 verso, podle [Ha1], str. 326.
[36] Například na folio 59 recto, podle [Kay2], str. 215.
[37] Podle [DS1], str. 79.
[38] Podle [DS1], str. 79.

Všechna známá indická pojednání o aritmetice a algebře obsahují část věnovanou základním operacím s nulou. Brahmagupta považoval nulu za číslo, které není ani kladné ani záporné a je součtem dvou opačných. Kompletní aritmetika byla uvedena v komentáři Bhāskary I. k práci *Āryabhaṭīya*. Dělení nulou však zpočátku působilo problémy, většinou staří Indové považovali dělení nulou za nemožné.[39]

V Mezopotámii se už ve druhém tisíciletí př. n. l. rozšířilo zapisování čísel v poziční soustavě o základu 60. V tomto zápisu však chyběl znak pro nulu. V běžných výpočtech to nebyl velký problém, protože pro zápis čísel od 1 do 100 se nula v šedesátkové soustavě vyskytuje jen jednou (zatímco v desítkové soustavě je nula potřebná jedenáctkrát.) Potřeba nuly se objevila až při sestavování astronomických tabulek. Zpočátku byl chybějící řád označován mezerou, později se objevilo nejednotné používání malých klínečků, někde jeden, jinde tři. Od 4. stol. př. n. l. se nula značila dvojitým klínkem. Tento symbol se používal hlavně v astronomických dílech, v matematických textech vyznačování nuly nebylo tak důsledné.

Mayové používali velmi úsporný systém vyjadřování čísel už ve 4. stol. př. n. l. při sestavování kalendáře nebo astronomických výpočtech. Byl založen na dvacítkovém základu a vyžadoval pouze tři symboly – jedničku, pětku a nulu.[40] Systém však byl určen pouze pro malou skupinku učenců.

Nulu znali a používali i ve staré Číně. Dodnes není zcela jasné, zda Číňané nulu převzali od Indů nebo naopak, či zda byla zavedena v obou zemích nezávisle.

V arabských zemích se nula značila podle indického vzoru tečkou nebo kroužkem. Arabové nulu nazývali *as-syfr*, italský matematik Leonardo Pisánský, známý též jako Fibonacci (asi 1170 až 1250), když zapisoval čísla podle indického vzoru, říkal nule *zephirum*. Až do 17. století se termín *as-syfr* užíval převážně ve významu „nula“, později se přenesl i na ostatní číslice ve významu *cifra*, a pro nulu se rozšířil podle italského vzoru termín *zero*. V latinských rukopisech ze 12. nebo 13. století byla nula nazývána *circulus* (kroužek), *nihil* (nic) a je možné, že už tehdy se objevil termín *nullus* (žádný), občas i v ženském rodě *nulla*, který byl běžný v 15. století. Francouzský matematik Nicolas Chuquet (asi 1445 až 1488) o nule napsal, že sama o sobě nic neznamená, ale tím, že zaujímá nějaké místo, určuje hodnotu jiných symbolů, a proto se nazývá *cifrou neboli nulou neboli symbolem o nulové hodnotě*.[41]

Tečka nad číslem znamenala v indické aritmetice záporné číslo. Asi označovala nepřítomnost znaménka plus. Podobně se někdy užívala tečka i v arabské a evropské matematice. Arabové pod indickým vlivem užívali znak nuly pro neznámou. V latinském rukopisu Gottfrieda Wolacka z university v Erfurtu (1467) se rovněž vyskytlo podobné značení (viz [DS1]).

[39] Viz 6. kapitola, odstavec 6.1.

[40] Jednička byla značena tečkou, pětka vodorovnou čárkou a nula měla tvar mušle, viz [Jo2].

[41] Podle [Ju], str. 344.

5.3. Desítková poziční soustava

Nejdůležitějším rysem indické číselné soustavy je desítkový poziční zápis. Dobrým předpokladem pro jeho vznik byla existence samostatných symbolů pro čísla 1 až 9 nazývaných *aṅka* (znak, resp. značka) a znaku pro 0 obvykle nazývaného *śūnya*. Další výhodou byl fakt, že už ve starším způsobu psaní čísel v Indii bývala číslice vyššího řádu umístěna vlevo. Z tohoto způsobu vyjádření se postupně vyvinul poziční zápis čísel.

Za nejstarší číslo v pozičním zápisu je považováno vyjádření roku 346 éry Saṁvat[42] na měděné darovací desce z roku 595 n. l., i když někdy bývá její originalita zpochybňována (viz [Pl1]).

Původní dochovaný záznam čísla vyjádřeného v desítkové poziční soustavě je na obrázku 5.15. Jde o číslo 270 v nápisu z chrámu ve Gwalioru (asi 400 km jižně od Dillí) datovaném Saṁvat 933, to odpovídá roku 876 n. l.

Obr. 5.15 Číslo *brāhmī* 270 zapsané v desítkové poziční soustavě (vlevo nahoře), nápis z chrámu, převzato z [Pl1].

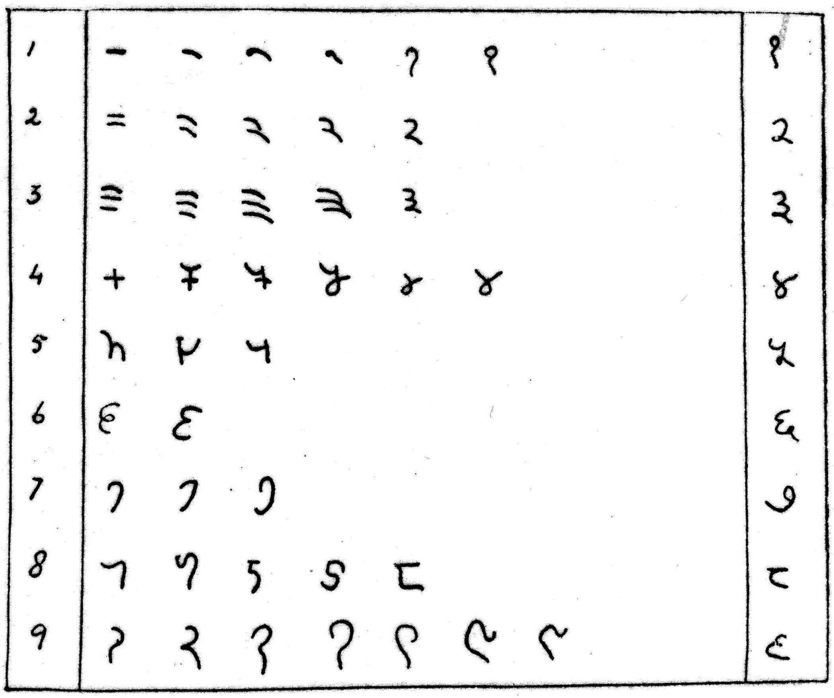
Jsou důkazy o tom, že i v indických koloniích na dálném východě byl velmi brzy užíván desítkový poziční zápis. Například nápis na kameni ze Sumatry obsahuje letopočet 605 zapsaný číslicemi.[43]

Velká čísla se dodnes v různých částech Indie liší svým tvarem, přestože všechna indická písma pocházejí ze společného zdroje – z písma *brāhmī*. Odlišné jsou i numerické znaky v různých nářečích. Nejdůležitější a nejrozšířenější

[42] Podle [DS1], str. 40, v [Pl1] je uveden rok 346 éry Kalacuri.

[43] Rok 605 éry Śaka odpovídá asi roku 683 n. l., podle [DS1], [Pl1].

symboly jsou ty, které patří písmu *devanāgarī*. Na obrázku 5.16 je znázorněn vývoj číslic *devanāgarī*.



Obr. 5.16 Vývoj číslic *devanāgarī*, převzato z [DS1].

Darovací desky byly napsány profesionálními písaři. Jejich existence je zmiňována v buddhistických textech. Poziční zápis čísel musel vzniknout dříve než první darovací desky (v 6. stol. n. l.). Jestliže už v 7. století byl poziční zápis používán v jižní a jihovýchodní Asii, kam se rozšířil z Indie, musel vzniknout dříve. Nový systém byl rozšířený v Indii v 8. stol. n. l. a soudíme-li podle vývoje v jiných zemích (Řecko, Arábie), trvalo od zavedení nového systému vždy několik století, než se začal běžně užívat.

Starý způsob zapisování čísel bez pozičního systému byl užíván v Indii do 7. stol. n. l., pak se začal rozšiřovat nový způsob s pozičním zápisem. Existuje několik darovacích desek z 8. stol., na kterých jsou data zapsána ve starém způsobu, ale nesprávně. Například rok 441 (odpovídá asi 760 n. l.) má ke 100 přidaný znak pro 40 místo znaku pro 4, místo 400 je tedy chybně uvedeno 4000 (viz [DS1]). Přestože se už více používal nový způsob – desítkový poziční zápis, někteří autoři ještě psali letopočty nebo čísla stránek na rukopisech starším způsobem bez pozičního zápisu.

V literárních a nematematických dílech se desítkový poziční zápis vyskytoval dříve než v matematických. Nově vzniklý systém byl nějakou dobu užíván pouze pro zápis velkých čísel, až po delší době bylo zavedeno provádění aritmetických operací.

V Číně se čísla o desítkovém základu vyjadřovala pomocí počítacích tyčinek, na počátku našeho letopočtu už měla poziční charakter, ovšem bez užití nuly.

5.4. Vyjádření čísel speciálními slovy

Už ve védách existovaly příklady čísel, která označovala věci. Například v *Ṛgvedě* číslo 12 znamenalo rok, v *Atharvavedě* číslo 7 označovalo skupinu sedmi věcí (sedm moří). Existovaly rovněž příklady zlomků, které byly nazvány slovy.[44] Nejstarší slovo užité k označení celého čísla bylo nalezeno v dílech *Śatapatha-Brāhmaṇa* a *Taittirīya-Brāhmaṇa* (asi 8. stol. př. n. l.), *Vedāṅga Jyotiṣa* (kolem roku 1200 př. n. l.) obsahuje také několik příkladů.[45] V raných dílech se však jednalo spíše o výjimky. Vyjádření nebylo jednoznačné, stejné slovo označovalo různá čísla.[46] Ještě nebyl znám poziční způsob zápisu čísel, slova nemohla označovat velká čísla. Velká čísla se vyjadřovala numerickými hodnotami nebo rozdělením čísla na části.

Způsob vyjadřování čísel slovy, stejně jako poziční zápis, byl rozvíjen a zdokonalován v prvních stoletích našeho letopočtu. V tomto systému byla čísla pojmenována jmény věcí nebo bytostí, které přirozeně nebo podle mytologie symbolizovaly určitý počet. Tak číslo 1 mohlo být označeno něčím, co je jedinečné, například Měsíc či Země, číslo 2 něčím, co je v páru, například oči nebo ruce. Nula byla nahrazena slovy prázdno, nebe, úplný. Tento způsob se užíval v astronomických a matematických dílech stejně jako v datech či rukopisech. Protože středověcí indičtí matematikové a astronomové psali svá díla ve verších, hledali metodu, která by jim pomohla vyjádřit velká čísla způsobem vhodným pro daný verš. Velká čísla se vyskytovala jak v astronomických dílech, tak ve formulaci matematických problémů. Vyjádření čísel speciálními slovy uspokojilo tuto potřebu a brzy se stalo populárním. Pro každou číslici existovalo mnoho slov, takže každé číslo se dalo vyjádřit různými způsoby, z nichž se mohl vybrat ten název, který byl vhodný do konkrétního verše.

Uvedeme některé termíny používané pro vyjádření čísel.[47]

0 – *śūnya* (prázdno, nebe), *kha* (otvor, díra), *gagana* (nebe, atmosféra), *ākāśa* (prázdno, nicota), *ambara* (nebe, atmosféra, éter), *randhra* (otvor, dutina), *vyoma* (nebesa, atmosféra, obloha), *pūrṇa* (úplnost), *viyat* (nebe, atmosféra), *ananta* (věčnost, nebe, atmosféra), *antarikṣa* (nebe, atmosféra), *nabha* (nebe, atmosféra).

1 – *ādi* (počátek), *bhū* (Země – jeden ze tří světů), *dharā* (Země), *bhūmi* (země), *kṣiti* (země, půda), *urvarā* (země, úrodná půda), *vasudhā* (země, vlast, království), *kṣmā* (země), *dharaṇī* (země, půda), *ilā* (země), *candra* (Měsíc, oko na ocasu páva), *soma* (soma, Měsíc) *indu* (Měsíc, oko na kostce), *vidhu* (Měsíc, osamocený), *kalādhara* (měsíc), *śītāśu* (měsíc), *mṛgāṅka* (měsíc), *śaśadhara* (měsíc), *nāyaka* (vládce, manžel).

2 – *yama* (pár, uzda, vozka), *yamala* (pár, dvojice), *yugala* (pár, dvojice), *yugma* (pár, dvojice, sudý), *dvaya* (pár, dvojnásobný), *locana* (oko),

[44] *kalā* $= \frac{1}{16}$, *kuṣṭha* $= \frac{1}{12}$, *śapha* $=\frac{1}{4}$, viz [DS1].

[45] *rūpa* = 1, *aya* = 4, *guna* = *yuga* = 12, *bhasamūha* = 27, viz [DS1].

[46] Například v práci *Aitareya-Brāhmaṇa* je slovo *virāṭ* použito k označení 10, na jiném místě ve stejné práci znamená totéž slovo 30, viz [DS1].

[47] Podle [DS1], str. 54–57.

netra (oko), *akṣi* (oko), *dṛṣti* (oko, zrak), *cakṣu* (oko), *nayana* (oko, zřítelnice), *ambaka* (oko), *kara*, (ruka, míra – šířka 24 palců), *bāhu* (paže), *oṣṭha* (rty, ústa), *pakṣa* (křídlo, peruť, rameno), *karṇa* (ucho), *aśvin* (krotitel koní).

3 – *loka* (svět – tři světy), *triguṇa* (trojnásobný), *guṇa* (násobný, struna, akord), *trikāla* (třikrát), *trinetra* (tříoký, Šiva), *haranetra* (Šivovo oko), *kāla* (Šiva), *rāma* (mytologická osoba), *agni* (oheň – tři posvátné ohně), *hutāśana* (oheň), *pāvaka* (oheň), *anala* (bůh ohně), *tapana* (žár), *ratna*[48] (drahokam, drahé kameny), *hotṛ* (obětník).

4 – *veda* (znalost – čtyři základní védské sbírky), *varṇa* (kasta – čtyři základní kasty), *samudra* (oceán – čtyři základní oceány), *ambhodhi* (oceán), *payodhi* (oceán), *sāgara* (oceán), *abdhi* (oceán), *jaladhi* (oceán), *kṛta* (strana kostky se čtyřmi oky), *aya* (hrací kostka).

5 – *bāṇa* (rákosový šíp – pět šípů boha lásky), *śara* (rákos, šíp), *sāyaka* (střela, šíp), *iṣu* (šíp), *bhūta* (živel – pět živlů), *mahābhūta* (velký živel), *prāṇa* (dech, vitalita – pět orgánů), *pavana* (vítr, dech), *artha* (objekt smyslů), *ratna* (viz číslo 3).

6 – *rasa* (šťáva, tekutina – šest základních chutí), *aṅga* (úd – šest údů véd, tzv. védangy), *śāstra* (pravidlo), *kāraka* (dělání), *dravya* (základní substance), *ekhya* (psaní, dopis).

7 – *naga* (hora – sedm základních pohoří), *aga* (hora), *bhūbhṛt* (hora), *parvata* (hora, pohoří), *śaila* (hora, skála), *acala* (hora, skála), *adri* (hora, kámen), *giri* (hora, skála), *aśva* (kůň – sedm koňů Slunce), *turaga* (kůň), *vāji* (kůň), *vāra* (den týdne), *ṛṣi* (pěvec posvátných hymnů), *muni* (Velká medvědice, tj. sedm hvězd), *atri* (jedna z hvězd Velké medvědice), *svara* (nota).

8 – *vasu* (Vasu – pozemský bůh, bylo jich 8), *diggaja* (slon – osm slonů podpíralo Zemi), *danti* (slon), *gaja* (slon), *hastin* (slon), *dvirada* (slon), *ibha* (slon), *kuñjara* (slon), *puṣkarin* (slon), *mātaṅga* (slon), *sindhura* (slon), *nāga* (had – osm hadů démonů), *sarpa* (had, hadí démon), *ahi* (had), *anuṣṭubha* (druh metriky – čtyřikrát osm slabik), *dik* (světové strany – čtyři hlavní a čtyři vedlejší).[49]

9 – *nanda* (jeden z devíti drahokamů), *nidhi* (poklad), *graha* (planeta – bylo jich devět i se Sluncem a Měsícem), *randhra* (otvor – devět otvorů v lidském těle), *dvāra* (otvor, vchod, dveře), *go* (Země).[50]

10 – *aṅguḷi* (prst), *āśā* (prostor – čtvrtina nebeské klenby), *kakubh* (prostor), *dik, diś* (viz číslo 8), *diśā* (směr, oblast), *paṅkti* (druh metriky – čtyřikrát deset slabik).

11 – *rudra* (Rudra – bůh bouře, vládce dešťů a větrů, bylo jich 11), *bharga* (jméno Rudra Siva), *īśvara* (jeden z Rudrů), *īśa* (Rudra, vládce) *bhava* (božstvo sloužící Rudrovi), *mahādeva* (velké božstvo).

12 – *sūrya* (Slunce nebo jeho božstvo), *dyumaṇi* (Slunce), *ravi* (Slunce), *ina* (Slunce), *mārtaṇḍa* (Slunce, bůh Slunce), *bhānu* (Slunce, světlo),

---

48 Vyskytuje se pouze u Mahāvīry, jiní používají tento termín pro 5, někdy i pro 9.

49 Termín *dik* se někdy užíval i pro 10, *dik* nebo *diś* také pro 4, podle [DS1].

50 Termín *go* se někdy používal i pro jedničku, podle [DS1].

divākara (Slunce, tvůrce dne), *arka* (Slunce, paprsek), *māsa* (měsíc – 12. část roku), *rāśi* (znamení zvěrokruhu).
13 – *viśva* (celek, universum), *kāma* (láska), *viśvedevāḥ* (všichni bohové), *atijagatī* (druh metriky – čtyřikrát třináct slabik).
14 – *manu* (moudrý – čtrnáct mýtických předků), *indra* (bůh – pán deště), *vidyā* (znalost), *loka* (země, svět – někdy 14 světů).
15 – *pakṣa* (polovina lunárního měsíce), *dina* (den), *ghasra* (den), *tithi* (lunární den).
16 – *bhūpa* (král, ochránce), *bhūpati* (král, pán země), *kalā* ($\frac{1}{16}$ nebo malá část), *aṣṭi* (druh metriky – čtyřikrát šestnáct slabik).
17 – *atyaṣṭi* (druh metriky čtyřikrát sedmnáct slabik)
18 – *dhṛti* (druh metriky čtyřikrát osmnáct slabik)
19 – *atidhṛti* (druh metriky čtyřikrát devatenáct slabik)
20 – *nakha* (nehet na prstu), *kṛti* (druh metriky čtyřikrát dvacet slabik)
21 – *prakṛti* (mytologická bohyně, příroda, přirozeně), *svarga* (nebesa).
27 – *nakṣatra* (lunární dům – bylo jich 27, později 28), *uḍu* (hvězda, lunární dům).
32 – *rada* (zub), *danta* (sloní kel).
33 – *deva* (božstvo – 33 bohů), *amara* (bůh, božstvo), *sura* (bůh, božstvo), *tridaśa* (božstvo).

S pomocí uvedených termínů mohlo být například číslo 1 230 vyjádřeno jako:

a) *kha* (0) – *guṇa* (3) – *kara* (2) – *ādi* (1),
b) *kha* (0) – *loka* (3) – *karṇa* (2) – *candra* (1),
c) *ākāśa* (0) – *kāla* (3) – *netra* (2) – *dharā* (1).

Je třeba poznamenat, že pořadí slov, která označovala číslice, bylo obrácené, než při vyjadřování čísel numerickými znaky. Jedno z možných vysvětlení, proč se při slovním vyjádření čísel zapisovalo zprava doleva, je, že způsob označování čísel slovy byl považován za druh aritmetické operace, které se většinou prováděly zprava doleva.

Poziční způsob je aplikován na „slovní" čísla někdy mezi 200 př. n. l. a 300 n. l. Nejstarší takto vyjádřené číslo v poziční soustavě je v práci *Agni-Purāṇa* z počátku našeho letopočtu. V komentáři k práci *Pauliśa-siddhānta* (asi 400 n. l.) je citováno číslo[51]

1 582 237 800 jako

kha (0) – *kha* (0) – *aṣṭa* (8) – *muni* (7) – *rāma* (3) – *aśvin* (2)–
– *netra* (2) – *aṣṭa* (8) – *śara* (5) – *rātripāḥ* (1).

Je zajímavé, že v tomto případě jsou speciální slova kombinovaná s termínem *aṣṭa* – běžným názvem osmičky.

[51] Podle [DS1], str. 59.

Nejstarší nápisy vyjadřující čísla speciálními slovy, byly nalezeny v indické kolonii Kambodža, jsou datovány roky 604 a 625 n. l.[52] V Indii byl objeven takový nápis z roku 813 n. l.

Poziční desítkový zápis a slovní vyjádření nevznikly ve stejné době. Desítkový zápis existoval mezi matematiky dříve, než se objevila myšlenka použít poziční princip na slova. Nevýhodou však byla značná délka, v astronomických textech slovní označení někdy způsobilo, že celý verš, někdy i víc, byl věnován pouze časovému údaji. To se nelíbilo některým indickým astronomům, kteří stručnost a výstižnost pokládali za hlavní charakteristický rys vědeckých pojednání. Proto hledali cesty, jak vyjádření velkých čísel zestručnit.

5.5. Vyjádření čísel písmeny

Myšlenkou užívání písmen k označení čísel se zabýval už v polovině prvního století př. n. l. Pāṇini (520–460 př. n. l.). Nad některá pravidla nadepsal samohlásku ($a = 1$, $i = 2$, $u = 3$ atd.), která určovala počet následujících pouček, v nichž bylo toto pravidlo využíváno.

Někteří indičtí učenci, kterým se zdálo slovní vyjádření čísel zbytečně zdlouhavé, nahrazovali slova písmeny, resp. slabikami. Někdy byly pomocí abecedního systému číslovány i stránky rukopisů. Indický abecední systém, na rozdíl od systémů užívaných Řeky a Araby, nikdy nebyl určen prostým lidem nebo pro běžné počítání. Byl to způsob, jak indičtí učenci vyjadřovali číselné údaje ve veršovaných pravidlech.

Āryabhaṭa I. zavedl abecední systém k vyjadřování numerických hodnot v astronomii. Pravidlo uvedené v první kapitole *Daśagītika* práce *Āryabhaṭīya*:[53]

Ar/i.B
Varga [lichá] *písmena začínající k* [jsou užita jen] *na lichých pozicích, avarga* [sudá] *na sudých.* [Tak] *ya je rovno ṅma* [ṅa+ma]. *Devět samohlásek* [značí] *dvakrát devět nul lichých a sudých* [míst]. *Totéž smí být* [opakováno] *na konci za devátým místem.*

Āryabhaṭova metoda ukazuje, jak vyjádřit číslo v desítkovém pozičním zápisu pomocí písmen abecedy. K tomu, abychom mu mohli lépe porozumět, je třeba znát uspořádání hlásek sanskrtské abecedy. Ve zjednodušené podobě ji vidíme v následující tabulce.[54]

---

[52] Podle [SK], str. 39.

[53] Nejednalo se ještě o pravidlo, byla to úvodní „definice“, proto není označena číslem ale písmenem B, podle [Cla], str. 2., [DS1], str. 65. Kapitola *Daśagītika* by měla, jak název napovídá, obsahovat deset částí, ale ve skutečnosti je jich třináct. První je prosba o pomoc bohů, druhá je *paribhāṣā* (definice) a poslední má charakter značky autora, podle [DS1], str. 64. Āryabhaṭova metoda je popsána rovněž v [Kak3].

[54] Za každou z krátkých samohlásek *a*, *i*, *u*, *ṛ* následovala ještě dlouhá (*ā*, *ī*, *ū*, *ṝ*), pouze k samohláskovému *ḷ* neexistovalo dlouhé. Dvojhlásky *e*, *ai*, *o*, *au* jsou v sanskrtu vždy dlouhé,

Tabulka hlásek sanskrtu:

samohlásky a dvojhlásky:

a *i* *u* *ṛ* *ḷ* *e* *ai* *o* *au*

souhlásky:

k (1)	*kh* (2)	*g* (3)	*gh* (4)	*ṅ* (5)
c (6)	*ch* (7)	*j* (8)	*jh* (9)	*ñ* (10)
ṭ (11)	*ṭh* (12)	*ḍ* (13)	*ḍh* (14)	*ṇ* (15)
t (16)	*th* (17)	*d* (18)	*dh* (19)	*n* (20)
p (21)	*ph* (22)	*b* (23)	*bh* (24)	*m* (25)
	y (3)	*r* (4)	*l* (5)	*v* (6)
	ś (7)	*ṣ* (8)	*s* (9)	
h (10)				

Termín *varga* lze přeložit jako čtverec nebo uspořádaný. Āryabhaṭa I. takto označoval skupinu 25 souhlásek *k* až *m*, které jsou uspořádány do čtverce, a říkal jim „lichá“ písmena. Druhá skupina souhlásek *y* až *h* je neuspořádaná, podle Āryabhaṭy to byla „sudá“ písmena.

Existovalo 18 pozic, které byly označeny nulami rozdělenými do devíti dvojic. Každá dvojice se skládala z lichého místa (vpravo) a sudého (vlevo). „Lichá“ písmena *k* až *m* se používala pouze na lichých místech a označovala postupně čísla 1, 2, …, 25. „Sudá“ písmena, tj. *y* až *h*, se užívala na sudých místech pro čísla 3, 4, …, 10. Každá z devíti dvojic příslušela jedné z devíti samohlásek. První dvojice, jednotky a desítky, byla určena samohláskou *a*, druhá dvojice, stovky a tisíce, byla označena pomocí samohlásky *i* atd. Nuly určovaly jednotlivá místa a neměly žádnou numerickou hodnotu. Připojená samohláska tak určovala pozici v desítkovém pozičním zápisu.

$$\overbrace{\circ\ \ \circ}^{au}\quad \overbrace{\circ\ \ \circ}^{o}\quad \overbrace{\circ\ \ \circ}^{ai}\quad \overbrace{\circ\ \ \circ}^{e}\quad \overbrace{\circ\ \ \circ}^{ḷ}\quad \overbrace{\circ\ \ \circ}^{ṛ}\quad \overbrace{\circ\ \ \circ}^{u}\quad \overbrace{\circ\ \ \circ}^{i}\quad \overbrace{\circ\ \ \circ}^{a}$$

Například když se k *a* připojilo *y* (označující „sudou“ 3), znamenalo to, že je *y* na prvním sudém místě, tj. desítkovém, proto *ya* znamenalo 30. Podobně *yi* vyjadřovalo 3 na místě tisíců, tj. 3000. Pokud se však k samohlásce *a* přidala „lichá“ 3, tj. *g*, pak stála na první liché pozici, tedy *ga* značilo 3, podobně *gi* představovalo 300.

proto se u nich délka neoznačovala. Za samohláskami následovaly souhlásky řazené foneticky podle místa výslovnosti (od zadní části patra směrem ke rtům). V každé řadě je nejprve hláska neznělá bez aspirace, po ní neznělá aspirovaná, znělá neaspirovaná, znělá aspirovaná a nakonec nosovka. Za těmito 25 souhláskami byly řazeny polovokály, tři sykavky a znělé *h*, podle [ZS].

Āryabhaṭa upozornil na další možnost, jak tímto způsobem vyjádřit číslo. Například 30 mohlo být zapsáno jako *ya* nebo jako *ṅma*. Protože *ṅa* znamenalo 5, *ma* bylo 25, pak *ṅma* značilo součet $ṅma = ṅa + ma = 5 + 25 = 30$. Při zapisování čísla byly pravděpodobně nejprve všude napsány nuly a později byly na některých místech nahrazeny potřebným symbolem, na neobsazených pozicích nuly zůstaly. Tento způsob mohl být rozšířen i na čísla, která potřebovala více než 18 míst, tak, že se celý postup opakoval se samohláskami, ke kterým byla přidána *anusvára* (samohláska se zapisuje s tečkou „nad“ a vyslovuje se s přídechem „m“). Āryabhaṭa I. takto vyjádřil počet oběhů Slunce a Měsíce:[55]

$$\begin{array}{llllll}
\text{Slunce} & \overbrace{\circ\quad gh}^{\underset{.}{r}} & \overbrace{y\quad kh}^{u} & \overbrace{\circ\quad \circ}^{i} & \overbrace{\circ\quad \circ}^{a} & \textit{khyughṛ} \\
 & \quad\ \ 4 & 3\quad\ \ 2 & 0\quad 0 & 0\quad 0 & 4\,320\,000 \\
\text{Měsíc} & \overbrace{l\quad ch}^{\underset{.}{r}} & \overbrace{\acute{s}\quad \dot{n}}^{u} & \overbrace{y\quad g}^{i} & \overbrace{y\quad c}^{a} & \textit{cayagiyiṇuśuchlṛ} \\
 & 5\quad 7 & 7\quad 5 & 3\quad 3 & 3\quad 6 & 57\,753\,336
\end{array}$$

Výhodou tohoto způsobu byla stručnost, která převažovala nad dvěma nedostatky. Pořadí souhlásek bylo dáno jejich postavením v sanskrtské abecedě, proto při vytváření slov nebylo možné zachovat libozvučnost sanskrtu. Āryabhaṭova slova působí jako shluk těžko vyslovitelných zvuků a snad kvůli lepší výslovnosti autor vynechal některé opakující se samohlásky, například *ṛ*. Další nevýhodou bylo, že tento systém nedovoloval tolik rozmanitosti a pestrosti jako ostatní systémy.

Existovaly však i jiné způsoby, jak vyjádřit čísla pomocí písmen, například různé varianty systému *kaṭapayādi* nebo *akṣarapallī*. V systému *kaṭapayādi* souhlásky sanskrtu označovaly číslice 1 až 9 a 0. Připojená samohláska neměla numerický význam. Výsledkem byly číselné údaje, které se lépe vyslovovaly a dobře zněly. Kvalifikovaní autoři dokázali pro číselný údaj vymyslet slovo, které mělo nějaký konkrétní význam. Tento způsob byl lepší než Āryabhaṭův i než vyjádření pomocí speciálních slov. V Indii byly známé čtyři varianty tohoto systému; pravděpodobně kvůli nejednotnosti zápisu se tento způsob vyjadřování čísel nestal běžným.

V první variantě systému *kaṭapayādi* různé souhlásky představovaly určité číslice, pouze souhlásky n, $\tilde{n}$ a samostatné samohlásky označovaly nuly. Ze souhlásek měla však numerickou hodnotu jen ta poslední před samohláskou. Souhláska, za kterou nenásledovala samohláska, se ignorovala. Čísla byla vyjádřena v desítkové poziční soustavě, jednotlivé číslice byly nahrazeny písmeny podle tabulky:[56]

[55] Podle [DS1], str. 69, [Pl1], str. 75.
[56] Podle [DS1], str. 70.

1	–	*k, ṭ, p, y*	6	–	*c, t, ṣ*
2	–	*kh, th, ph, r*	7	–	*ch, th, s*
3	–	*g, ḍ, b, l*	8	–	*j, d, h*
4	–	*gh, ḍh, bh, v*	9	–	*jh, dh*
5	–	*ṅ, ṇ, m, ś*	0	–	*ñ, n, samostatná samohláska*

Název *kaṭapayādi* byl odvozen z písmen *k, ṭ, p, y* značících jedničku.[57] Názorně je přiřazení písmen a čísel vidět z tabulky sanskrtských souhlásek:

k (1)	*kh* (2)	*g* (3)	*gh* (4)	*ṅ* 5)
c (6)	*ch* (7)	*j* (8)	*jh* (9)	*ñ* (0)
ṭ (1)	*ṭh* (2)	*ḍ* (3)	*ḍh* (4)	*ṇ* (5)
t (6)	*th* (7)	*d* (8)	*dh* (9)	*n* (0)
p (1)	*ph* (2)	*b* (3)	*bh* (4)	*m* (5)
	y (1)	*r* (2)	*l* (3)	*v* (4)
	ś (5)	*ṣ* (6)	*s* (7)	
h (9)				

Zapisovalo se zprava doleva, tj. jednotky stály vlevo, následovalo písmeno označující desítky atd. Uvedené příklady jsou z různých nápisů, darovacích desek a rukopisů.[58]

			rā –	*gha* –	*vā* –	*ya*		
			2	4	4	1	=	1 442
				bha –	*va* –	*ti*		
				4	4	6	=	644
			śa –	*ktyā* –	*lo* –	*ke*		
			5	1	3	1	=	1 315
			ta –	*tvā* –	*lo* –	*ke*		
			6	4	3	1	=	1 346
kha –	*go* –	*ntyā* –	*nme* –	*ṣa* –	*mā* –	*pe*		
2	3	1	5	6	5	1	=	1 565 132

Není jasné, kdy a kde systém *kaṭapayādi* vznikl, podle poznámek komentátora Sūryadevy jej znal už Āryabhaṭa I., první doložený výskyt je v díle *Laghu-Bhāskarīya* od Bhāskary I. (viz [DS1]).

Druhou variantu popsal Āryabhaṭa II. jako modifikaci předchozího způsobu.[59]

> *Číslice počínaje od jedničky jsou zvuky začínající k, ṭ, p, y podle pořadí hlásek. Obě ñ a n jsou nula.*

[57] *Kaṭapayādi* znamená začínající *k, ṭ, p* a *y*, podle [Pl1].
[58] Podle [DS1], str. 71.
[59] Podle [Pl1], str. 76.

V systému Āryabhaṭy II. měly souhlásky tentýž význam jako v první variantě. Samohlásky zapsané vedle sebe nebo ve spojení se souhláskou neměly žádný numerický význam. Na rozdíl od první varianty měla každá souhláska numerickou hodnotu. Písmena byla řazena zleva doprava tak, jak se zapisovala čísla. Rozdíl mezi první a druhou variantou je patrný na příkladu časového údaje, který uvedl Āryabhaṭa II.:[60]

dḥa –	*ja* –	*he* –	*ku* –	*na* –	*he* –	*t* –	*sa* –	*bhā*		
4	8	8	1	0	8	6	7	4	=	488 108 674
4	8	8	1	0	8		7	4	=	47 801 884

Podle Āryabhaṭy II. bylo takto vyjádřeno číslo 488 108 674, zatímco podle první varianty se jednalo o číslo 47 801 884.

Třetí varianta byla užívána v jižní Indii a je známá jako *kerala* systém. Šlo o první variantu s tím rozdílem, že se slabiky zapisovaly zleva doprava.

Čtvrtá varianta byla objevena v několika rukopisech nalezených v Barmě. Tyto rukopisy jsou v jazyce *pali*. Byla to první varianta, kde některé souhlásky měly odlišnou numerickou hodnotu: $s = 5$, $h = 6$ a $\acute{l} = 7$. Změna hodnot těchto písmen souvisí s tím, že abeceda *pali* neobsahuje sanskrtské *ś* a *ṣ*.

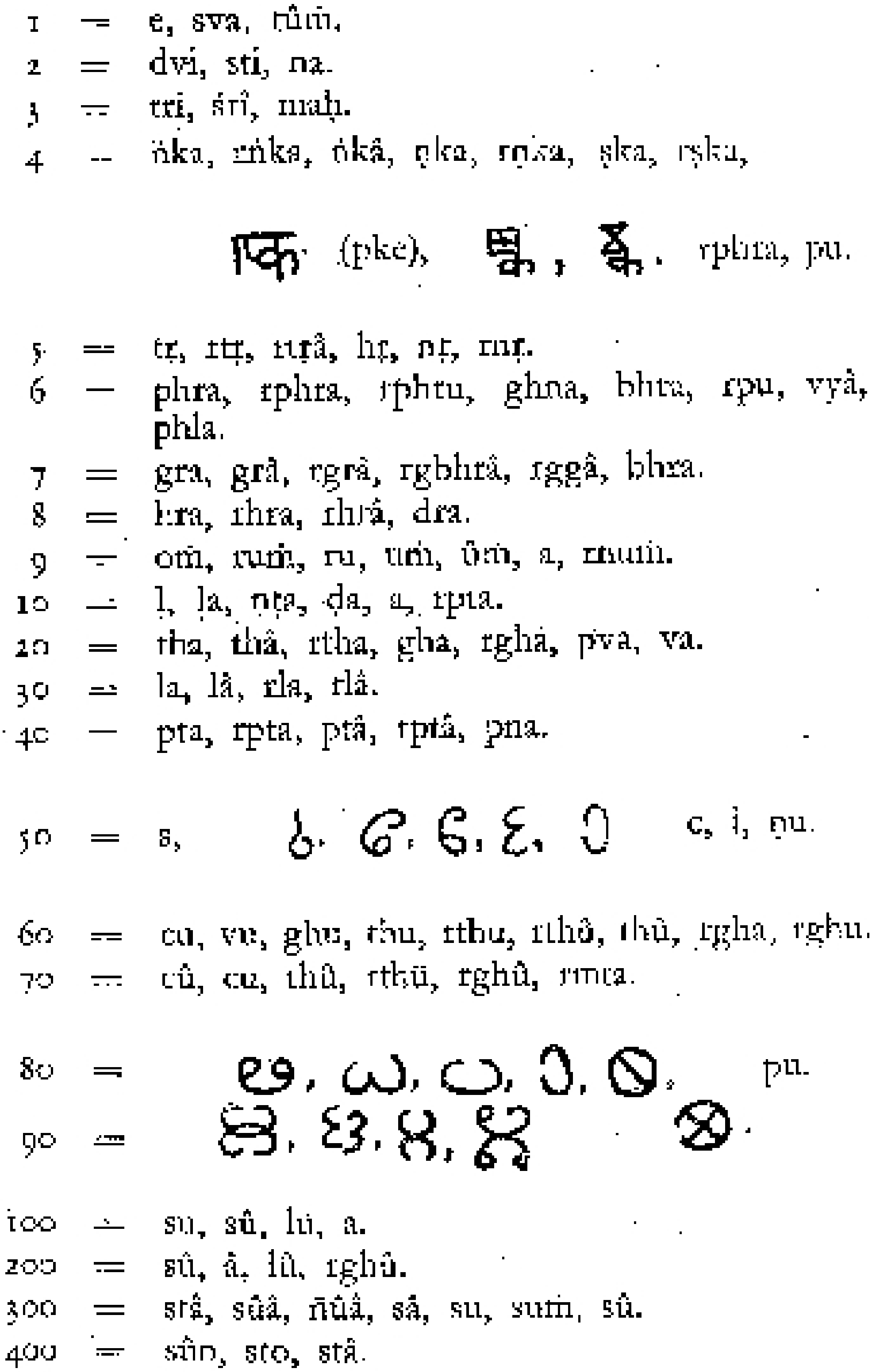
Různé zvláštnosti se vyskytovaly i v číslech, která se používala na číslování stránek starých rukopisů. Tyto symboly byly známé pod názvem *akṣarapallī*, byla to písmena nebo slabiky. V tabulce 5.1 je uveden seznam fonetických hodnot různých čísel nalezených ve starých rukopisech. Z tabulky je vidět, že jednomu číslu odpovídá několik fonetických hodnot. Rozdíly byly velmi často nepatrné a byly úmyslné, aby odlišily symbol s numerickou hodnotou od písmene. Někde jsou významnější rozdíly, které snad mohly být způsobené nesprávným čtením starých znaků nebo rozdílem ve výslovnosti v různých dialektech (viz [DS1]). Znaky se psaly na okraj každého listu, z nedostatku místa bývaly umístěny pod sebou podle čínského způsobu. Tak je tomu například v rukopisu *Bower* ze 6. stol. n. l. V pozdějších rukopisech byly stránky číslovány jak způsobem *akṣarapallī*, tak i desítkovými čísly. V džinistických rukopisech se systém *akṣarapallī* používal až do 16. století, teprve pak byl nahrazen desítkovými čísly.

Existovala i další vyjádření čísel pomocí písmen. Například způsob, který užíval 16 samohlásek a 34 souhlásek sanskrtské abecedy, nalezený na některých rukopisech z jižní Indie, Srí Lanky a Barmy. Souhlásky ve spojení se samohláskou *a* znázorňovaly čísla 1 až 34, stejné souhlásky ve spojení s *á* značily čísla 35 až 68 atd. (viz [DS1]). V jiném způsobu je 16 samohlásek se souhláskou *k* určeno pro čísla 1 až 16, se souhláskou *kh* pro čísla 17 až 32 atd. Tento zápis byl objeven na pálijském rukopisu ze Srí Lanky. V pálijském rukopisu z vídeňské císařské knihovny je podobný zápis s 12 samohláskami[61] a 34 souhláskami. Samohlásky s *k* značí čísla 1 až 12, s *kh* čísla 13 až 24 atd. Tyto systémy se

[60] Podle [DS1], str. 72.

[61] Samohlásky r͡, *ŕ*, l͡, *ĺ* byly vypuštěné.

neobjevují v severní Indii po 3. stol. n. l. Možná byly výmyslem písařů, kteří opisovali rukopisy.



1	=	e, sva, ṛūṁ.
2	=	dvi, sti, na.
3	=	tri, śrī, maḥ.
4	=	ṅka, rṅka, ṅkā, ṇka, rṇka, ṣka, rṣka, (pke), rphra, pu.
5	=	tṛ, rtṛ, rtrā, hṛ, nṛ, rnṛ.
6	=	phra, rphra, rphru, ghna, bhra, rpu, vyā, phla.
7	=	gra, grā, rgrā, rgbhrā, rggā, bhra.
8	=	hra, rhra, rhrā, dra.
9	=	oṁ, ruṁ, ru, uṁ, ūṁ, a, muṁ.
10	=	l, ḷa, nṭa, ḍa, a, rpta.
20	=	tha, thā, rtha, gha, rghā, pva, va.
30	=	la, lā, rla, rlā.
40	=	pta, rpta, ptā, rptā, pna.
50	=	s, c, i, ṇu.
60	=	cu, vu, ghu, thu, rthu, rthū, thū, rgha, rghu.
70	=	cū, cu, thū, rthū, rghū, rmra.
80	=	pu.
90	=	
100	=	su, sū, lu, a.
200	=	sū, ā, lū, rghū.
300	=	srā, sūā, nūā, sā, su, suṁ, sū.
400	=	sūṁ, sto, stā.

Tabulka 5.1: Fonetické hodnoty různých čísel, převzato z [DS1].

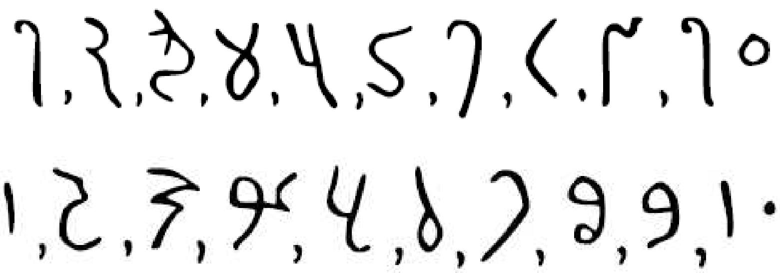
5.6. Šíření indických čísel

Za vlády chalífy al-Mansúra (745–775) přišli do Bagdádu s indickými vyslanci také učenci, kteří přinesli matematické práce včetně Brahmaguptovy *Brāhma-sphuta-siddhānty* a *Khaṇḍa-khādyaky* (viz [Sis]). Tyto texty byly přeloženy do arabštiny,[62] a značně ovlivnily arabskou matematiku. Arabové jako první přijali podobu čísel *ghubār* (*džhubár*)[63] odvozenou pravděpodobně z číslic *brāhmī*. Desítkový poziční zápis čísel včetně desítkové aritmetiky Arabové nazývali *ḥisáb al-hind* (*indické výpočty*) a rychle si jej osvojili. Do té doby se v arabském světě používal nepoziční alfanumerický zápis podobný řeckému, nebo se číselné hodnoty vyjadřovaly slovy.

Výklad indického počítání byl uveden v různých arabských textech, perský matematik a astronom al-Chwárizmí (asi 780 až 850)[64] tuto metodu vyložil v aritmetickém traktátu *Kitáb al-džám'a wa-l-tafríq bil-hisáb al-hindi* (*O výpočtech s indickými číslicemi*), kde podrobně vysvětlil zápis čísel s použitím *malého kruhu podobného písmenu o*, a popsal matematické operace podle indického vzoru (viz [Ju]). Latinský překlad se ve 12. století dostal do Evropy a pomohl prosadit používání „indických" číslic, kterým dnes říkáme arabské, resp. indo-arabské.

Arabové však záhy zjistili, že indické tvary nejsou vhodné pro jejich způsob psaní zprava doleva, a proto se pokoušeli zavést výhodnější znaky. Západní Arabové modifikované tvary východních Arabů nepřejali a stále užívali číslice *ghubār* (tzv. západoarabské), které se dostaly do Evropy. Tím se vysvětluje rozdílnost mezi moderními arabskými a evropskými tvary čísel.

Pro porovnání uvedeme na obrázku 5.17 podobu číslic *devanāgarī* (asi z roku 950 n. l.) a číslic *ghubār* (asi 1100 n. l.).



Obr. 5.17 Číslice *devanāgarī* (v horním řádku) a *ghubār* (v dolním řádku), převzato z [RB].

[62] Na překladech se podíleli například perští matematikové a astronomové Muhammad ibn Ibrahim al-Fazárí (narozen v 8. stol., zemřel pravděpodobně na počátku 9. stol., viz [Pl2]) a Jakub ibn Tárik (8. až 9. stol., viz [Pl3]), podle [DS1].

[63] Někdy též nazývané *ghobār*, tj. prachové číslice, podle indického zvyku zapisovat do prachu nebo do písku.

[64] Vlastním jménem Abú Abdalláh Muḥammad Ibn Músá al-Chwárizmí al-Mádžusí, viz [Ju].

Perský učenec al-Bírúní (973–1048)[65] navštívil na počátku 11. století Indii, kde se podrobně seznámil s indickou literaturou a s indickým způsobem zápisu čísel i aritmetikou (viz [ShAM], [Bag4]). Svoje poznatky sepsal do dvou knih *Kitāb al-arqam* (*Kniha čísel*) a *Tazkira fi al-ḥisāb w'al-madd bi al-arqam al-Sind W'al-Hind* (*Popis aritmetiky a metody počítání s čísly Indů*); k indickým číslům poznamenal:[66]

> *Jak se v různých částech Indie liší písmo, tak se liší i numerické znaky nazývané aṅka. Numerické symboly, které používáme my, jsou odvozeny z nejlepších tvarů indických znaků.*

Francouzský mnich Gerbert (asi 940 až 1003) byl patrně prvním, kdo v Evropě pracoval s číslicemi *ghubār* (viz [Gu3]). S číslicemi se mohl seznámit v maurském Španělsku, kam se číslice dostaly prostřednictvím kupců z arabských zemí. Ještě je nedocenil, a právem, protože v té době nebyl znám poziční zápis a nula. Proto symboly číslic 1 až 9, tzv. „apices“ nebo „apexy“ vyryté do jakýchsi „žetonů“ uplatňoval pouze při počítání na abaku, ve svých matematických dílech používal římské číslice (viz [BeJ1a]). V Evropě jsou první stopy pozičního zápisu z 10. nebo 11. století, ale obecně se rozšířil zápis v matematických knihách až v 17. století. Nejstarší dochovaný zápis nových číslic pochází z roku 976 (viz obr. 5.18), je z kláštera Albelda v severním Španělsku (viz [Ju]).

Obr. 5.18 Nejstarší evropské číslice z roku 976, převzato z [Sm2].

Největší vliv na rozšíření nového zápisu čísel měl Leonardo Pisánský (Fibonacci). Na svých cestách po středozemí poznal různé číselné systémy, nejvíce ho zaujal indický. Po návratu do Pisy sepsal v roce 1202 dílo *Liber Abaci* (*Kniha o abaku*).[67] V ní vysvětluje možnost užití indických číslic i pro obyčejné kupecké počítání.

Mezi další osobnosti, které pomohly šíření indických číslic v Evropě, patří například anglický vzdělanec Jan Sacrobosco (asi 1195 až 1256),[68] v jehož práci *Algoritmus vulgaris* (*Algoritmus prostý*) jsou uvedeny způsoby zápisu čísel a operace s celými čísly. Počítání s celými čísly vyložil rovněž francouzský matematik Alexandre de Villedieu (asi 1175 až 1240)[69] v *Carmen de algorismo* (*Píseň o algorismu*) asi z roku 1220.

[65] Vlastním jménem Abú'r Rajḥán Muḥammad ibn Aḥmad al-Bírúní, viz [Ju].

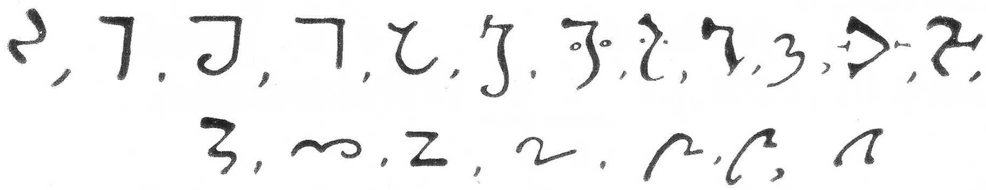
[66] Podle [Gu3].

[67] Název knihy je trochu zavádějící, protože se netýká počítání na abaku, výstižnějším názvem by mohlo být *Kniha o početním umění*, viz [BeJ1b].

[68] Známý také jako Johannes de Sacrobosco, Jan z Holywoodu nebo John z Halifaxu; studoval v Oxfordu, později přednášel v Paříži na univerzitě astronomii a matematiku, viz [Ju].

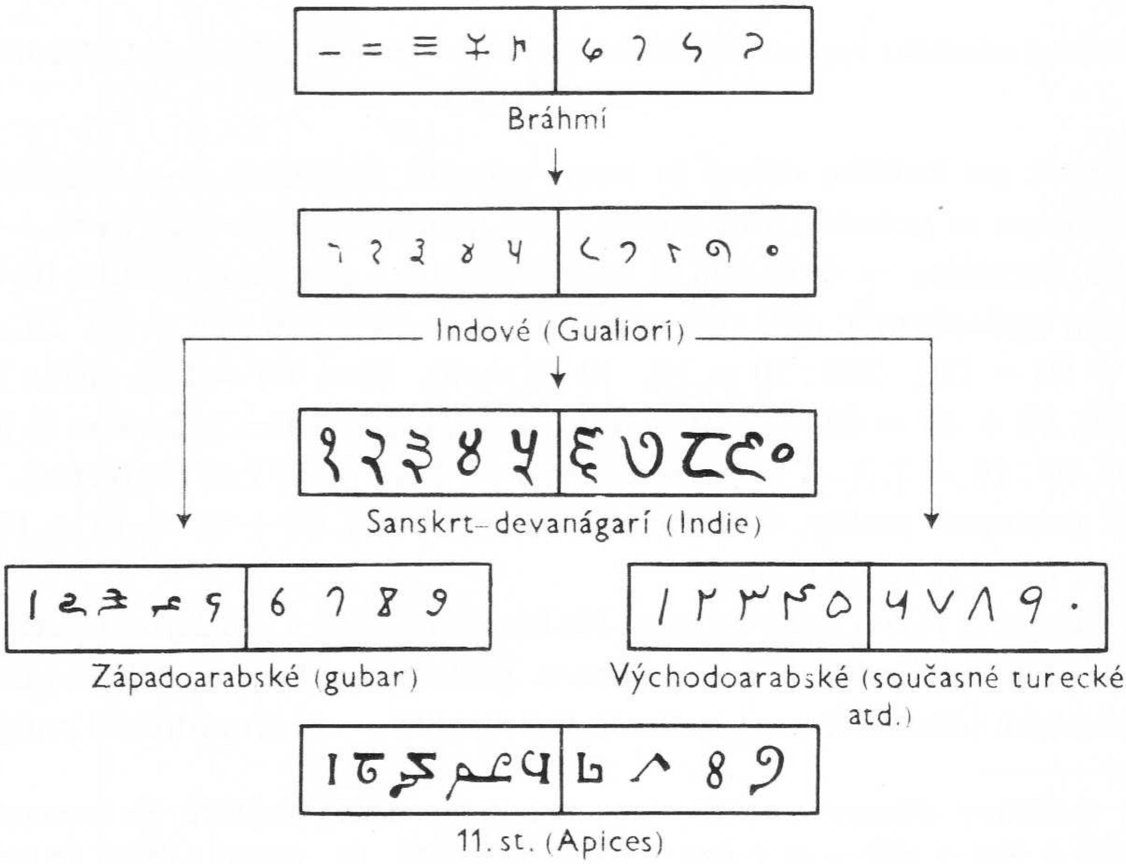
[69] Latinsky Alexander de Villa Dei.

Přesto se nový způsob zápisu čísel prosazoval velmi pomalu, zpočátku jej přijali jen učenci. Obyčejní lidé, zejména obchodníci, měli obavy z možných padělků a snadného falšování. Protože číslice se stále vyvíjely, chyběl ještě jednotný způsob zápisu číselných symbolů (viz obr. 5.19).



Obr. 5.19 Různé podoby číslice 2 ve středověkých rukopisech, převzato z [Ju].

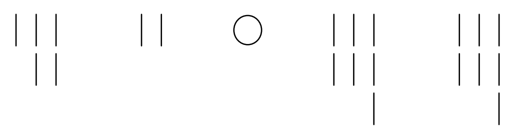
Na závěr připojíme znázornění vývoje grafické podoby číslic 1 až 9 od starých indických *brāhmī* přes arabské až k nejstarším evropským (viz obr. 5.20).



Obr. 5.20 Vývoj indo-arabských číslic, převzato z [Ju].

6. ARITMETIKA

Aritmetiku staří Indové nazývali *pāṭīgaṇita*;[1] tento termín je odvozen z *pāṭī*, což znamená deska nebo tabulka,[2] a *gaṇita* neboli věda o počítání. Název *pāṭīgaṇita* můžeme přeložit jako věda o počítání, které využívá desku pro zapisování.[3] V nejstarších dobách se však číslice používaly pouze pro zápis čísel nebo dat, počítalo se pomocí mušliček *kauri*,[4] čísla se tedy nepsala, ale „pokládala“. Podobná situace byla i ve staré Číně, kde k počítání sloužily početní tyčinky.[5] Indičtí počtáři používali mušličky dvojího druhu – podlouhlé *aṅka-rāśi* sloužily k vyjádření číslic 1 až 9, kulaté *śūnya-rāśi* označovaly nulu. Mušličky se pokládaly ve skupinkách, například číslo 52 077 bylo znázorněno následujícím způsobem, svislé čárky představují podlouhlé mušličky, kroužek kulatou:[6]



Při sčítaní dvou čísel se jeden sčítanec znázornil na počítací desce a druhého sčítance si počtář pamatoval, při výpočtu ještě musel znát doplněk každé číslice do deseti. Při vlastním výpočtu bylo nutné rozlišovat tři případy.

a) Když přičítaná číslice byla menší než doplněk odpovídající číslice znázorněné na desce, pak se na desku přidal potřebný počet mušliček.

b) Jestliže se přičítaná číslice rovnala doplňku, přidala se jedna podlouhlá mušlička do nejbližšího vyššího řádu a sčítané mušličky se odebraly a nahradily jednou kulatou.

c) Pokud byla přičítaná číslice větší než doplněk do deseti odpovídající číslice na desce, odebral se od mušliček doplněk do deseti přičítané číslice a přidala se jedna podlouhlá mušlička do nejbližšího vyššího řádu.

Podobně se provádělo i odčítání, využívaly se vzorce

$$a + b = a - (10 - b) + 10, \qquad a - b = a + (10 - b) - 10.$$

Násobení se převádělo na opakované sčítání, dělení na opakované odčítání.

[1] Původ slova není sanskrtský, ale pochází z dialektů ze severní Indie.

[2] Sanskrtský název pro tabulku je *phalaka* nebo *paṭṭa*. Slovo *pāṭī* se v sanskrtské literatuře objevuje až v 7. století.

[3] Pro počítání se používaly dřevěné tabulky ještě v 19. století, protože papír byl vzácný.

[4] *Kauri* jsou ulity různých měkkýšů z čeledi *Cypraeidae*, které se používaly také jako platidlo.

[5] Počítání pomocí čínských početních tyčinek je popsáno např. v [Hu].

[6] Podle [Ju], str. 115.

Později, když už se běžně počítalo s čísly vyjádřenými v desítkové poziční soustavě, se tato čísla zapisovala do prachu rozprostřeného na desce nebo na zemi. Proto se provádění matematických výpočtů také někdy nazývalo *dhūlī-karma* (prachová práce). Někteří pozdější autoři používali i název *vyakta-gaṇita* (věda o počítání se „známými“), na rozdíl od názvu pro algebru *avyakta-gaṇita* (věda o počítání s „neznámými“). Termíny *pāṭīgaṇita* a *dhūlī-karma* byly přeloženy do arabštiny jako *ilm-hisāb-al-takht* (věda o počítání na tabulce) a *hisāb-al-ghobār* (počítání na prachu).

Podle Brahmagupty (7. stol.) staří Indové rozlišovali dvacet aritmetických operací nazývaných *parīkarman* a k nim řadili osm tzv. určení neboli *vyavahāra*. Určení představovalo jakýsi postup či metodu, jak řešit úlohu daného typu, jak „určit“ neznámou veličinu.

Brahmagupta uvedl:[7]

> **BrSpSi/xii.1**
> *Ten, kdo jasně zná sčítání a další z dvaceti operací jednu po druhé a osm určení včetně měření pomocí stínu, je matematikem.*

Mezi dvacet aritmetických operací patřilo:[8]

1. *saṁkalita* – sčítání,
2. *vyavakalita*[9] – odčítání,
3. *guṇana* – násobení,
4. *bhāgahāra* – dělení,
5. *varga* – druhá mocnina,
6. *varga-mūla* – druhá odmocnina,
7. *ghana* – třetí mocnina,
8. *ghana-mūla* – třetí odmocnina,

9. – 13. *pañca jāti* – pět pravidel pro zlomky,

14. *trairāśika* – pravidlo tří,
15. *vyasta-trairāśika* – inverzní pravidlo tří,
16. *pañcarāśika* – pravidlo pěti,
17. *saptarāśika* – pravidlo sedmi,
18. *navarāśika* – pravidlo devíti,
19. *ekādaśarāśika* – pravidlo jedenácti,
20. *bhāṇḍa-prati-bhāṇḍa* – směna, výměnný obchod.

Osm určení zahrnovalo:

1. *miśraka* – různé (smíšené) úlohy,
2. *śreḍhi* – posloupnosti,
3. *kṣetra* – rovinné obrazce,
4. *khāta* – výkopy,
5. *citi* – zásoby (cihel),
6. *krākacika* – řezání,
7. *rāśi* – hromady (obilí),
8. *chāyā* – stíny.

[7] Podle [Col], str. 277.
[8] Podle [DS1], str. 142.
[9] Někdy také *vyutkalita*.

Prvních osm operací bylo považováno za základní. Operace zdvojování a půlení, které byly pokládány za základní v Egyptě a Řecku, se v indických pojednáních nevyskytovaly. Tyto operace byly důležité hlavně tam, kde neznali poziční zápis čísel.

Zdroje

Matematické poznatky nebyly zpočátku sepisovány do samostatných knih, ale byly součástí astronomických prací známých pod názvem *Siddhānty*, ty nejstarší však ještě matematické partie neobsahovaly.[10] Āryabhaṭa I. (6. stol.) byl první, kdo zahrnul do své astronomické práce *Āryabhaṭīya* dvě kapitoly o matematice (viz [Cla]). Následoval ho Brahmagupta (7. stol.). Později se stalo běžným zvykem zařazovat do astronomických pojednání matematické pasáže.[11] Bhāskara I. (7. stol.), je autorem komentáře k matematické části práce *Āryabhaṭīya*.

Nejstarší dostupné práce, které se téměř výhradně věnují aritmetice, jsou anonymní rukopis *Bakhshālī* (asi 7. stol.),[12] *Gaṇita-sāra-saṁgraha* (Mahāvīra, 9. stol.),[13] *Triśatikā*, *Pāṭīgaṇita* (Śrīdhara, 10. stol.),[14] částečně se aritmetikou zabývá *Brāhma-sphuta-siddhānta* (Brahmagupta, 7. stol.).[15] Pozdější aritmetická díla jsou *Gaṇita-tilaka* (Śrīpati, 11. stol.),[16] *Līlāvatī* (Bhāskara II., 12. stol.),[17], *Gaṇita-kaumudī* (Nārāyaṇa, 14. stol.).[18] Tato díla obsahují pravidla pro dvacet operací a osm určení, která jsou někdy doplněna příklady k ilustraci vyslovených pravidel.

Výklad a studium

V Indii byl výstižný a stručný výklad, zejména ve vědeckých pojednáních, vysoce ceněn. Indické práce byly psány velmi úsporně, obsahovaly jen známé vzorce a výsledky, někdy byla přílišná stručnost až na úkor srozumitelnosti. Zejména starší práce, například *Āryabhaṭīya*, jsou napsány ve velmi zhuštěné podobě, proto k nim později vznikaly různé komentáře.[19] Obliba stručného vyjadřování byla způsobena především nedostatkem psacího materiálu.

Výpočty se prováděly na desce pokryté prachem, čísla se zapisovala do prachu prstem nebo dřevěným rydlem. K psaní na desku se někdy používal i kousek

[10] *Sūrya-siddhānta*, *Vasiṣṭha-siddhānta, Pitāmaha-siddhānta, Romaka-siddhānta.*

[11] Např. *Mahā-siddhānta* (950), *Siddhānta-śekhara* (1036) nebo *Siddhānta-tattva-viveka* (1658).

[12] Sanskrtský text doplněný anglickým překladem a komentáři je v knihách [Kay1], [Kay2], [Ha1].

[13] Sanskrtský text doplněný anglickým překladem a komentáři je v knize [Ran].

[14] Sanskrtský text s anglickým překladem obsahuje [Shu1].

[15] Anglický překlad včetně starých komentářů je uveden v [Col].

[16] Sanskrtský text s anglickým překladem obsahuje [KaHR].

[17] Anglický překlad včetně starých komentářů je uveden v [Col].

[18] Sanskrtský text s anglickým překladem obsahuje [DvP].

[19] Přehled komentátorů a jejich komentářů je uveden např. v [Ke2].

křídy tzv. *pāṇḍu-lekha* nebo steatitu neboli *śvetavarṇī*.[20] Napsaných čísel se na desku vešlo málo, proto bylo běžné mazat ty části výpočtu, které už nebyly potřebné, a tím uvolnit místo na další kroky výpočtu.

Mladý člověk, který chtěl studovat aritmetiku, tj. zvládnout počítání na desce, se musel nejprve naučit nazpaměť všechna pravidla potřebná při řešení příkladů. Společně s každým krokem výpočtu opakoval příslušné pravidlo. Učitel dohlížel a pomáhal studentovi, když udělal chybu. Jakmile student získal dostatečnou zručnost a zvládl všechny příklady obsažené ve studovaném textu, předložil mu učitel další. Každý dobrý učitel měl zásoby příkladů odstupňovaných podle obtížnosti. Teprve na tomto stupni si student začínal uvědomovat podstatu každého problému a rozumět pravidlům, která se na začátku naučil. Nakonec učitel zkoušel žáka z nejobtížnějších úloh a vzorců. Výuka byla podle indické tradice založena na memorování. Student, který nedokončil celé studium, většinou neznal nic víc, než pouhé mechanické aplikování vzorců.[21] Jen málo učitelů zvládlo provést žáky všemi stupni výuky a člověk, který měl opravdový zájem o studium, musel jít do nějakého centra vzdělanosti nebo k nějakému slavnému učenci.

Studium matematiky bylo obtížné, rozumělo jí jen velmi málo lidí, přesto znalost vyšší matematiky nepřinášela materiální zisk. Jistou znalost matematiky a astronomie však vyžadovaly náboženské zvyky. Navíc vždy existovala třída lidí zvaná *gaṇaka*, totiž třída lidí, kteří se věnovali věštění. Tito astrologové potřebovali určité znalosti matematiky a astronomie, aby svými vědomostmi mohli učinit dojem na své posluchače. Občas se některý z jejich žáků začal o matematiku zajímat více, usiloval o důkladné porozumění předmětu, začal psát nezávislá pojednání nebo komentáře ke starším textům.

V době zahraničních invazí, vnitřních konfliktů, špatné vlády a z toho vyplývající nejistoty byl zájem o studium matematiky, ostatních věd i umění poměrně malý. Od 13. století vznikalo v Indii velmi málo původních prací, byly však psány komentáře ke starším spisům. Nejvýznamnější byly stále práce Bhāskary II. (12. stol.), které jako učebnice ovlivnily devět století.

Symbolika aritmetických operací

V rukopisu *Bakhshālī* neexistovaly žádné speciální symboly pro základní aritmetické operace, ty byly vyjádřeny jen zkratkami: *yu* (*yuta*, tj. přičtený), *gu* (*guṇa* nebo *guṇita*, tj. násobený), *bhā* (*bhāga* nebo *bhājita*, tj. dělený). Zvláštností rukopisu je výskyt symbolu „+“, který znamenal, že se mělo odečíst číslo stojící před tímto znaménkem.[22] Pro ilustraci uvedeme některé příklady:[23]

[20] Steatit je druh mastku.

[21] Detaily o studiu pocházejí z různých komentářů, například Ganeśova, viz [Bag3].

[22] Dr. A. Hoernle odvozoval znaménko „+“ ze starého symbolu pro *ka*, zkratku slova *kanita* (zmenšený), Diofantos pak podle obráceného písmena ψ, viz [Kay1]. B. Datta předpokládal, že symbol může být odvozen ze zkratky *kṣa* (*kṣaya*, tj. odečtený), viz [DS2].

[23] Folio 59 recto, viz [Kay2], str. 215, folio 47 recto, viz [Kay2], str. 229 a folio 13 verso, viz [Kay2], str. 204.

$$\begin{array}{ccc} 11 & yu & 5 \\ 1 & & 1 \end{array} \quad \text{znamenalo} \quad 11+5$$

$$\left|\begin{array}{ccccccccc} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 10 & gu \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \end{array}\right| \quad \text{znamenalo} \quad 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 10$$

$$\left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & bh\bar{a} & 36 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & \\ 2+ & 3 & 4+ & 5 & & 1 \end{array}\right| \quad \text{znamenalo} \quad \frac{36}{(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})(1+\frac{1}{5})}$$

Později byl symbol pro odčítání vyjádřen tečkou nebo malým kroužkem umístěným nad číslem, například $\dot{5}$ nebo $\mathring{5}$, pro ostatní operace žádné symboly neexistovaly, čísla nebo výrazy se zapisovaly vedle sebe.

6.1. Operace s nulou

V úvodu aritmetických textů bývaly definovány názvy desítkových řádů a uvedena pravidla pro operace s nulou. Nejstarší zmínka o sčítání a odčítání s nulou je v astronomické práci *Pañcasiddhāntikā* (počátek 6. stol.), většina aritmetických operací s nulou je poprvé uvedena v komentáři Bhāskary I. k *Āryabhaṭīye* (7. stol.), později je popisovali i další autoři.[24] Sčítání, odčítání a násobení bylo definováno stejně jako počítáme dnes, dělení však zpočátku působilo problémy.

$$a+0=0+a=a, \qquad a-0=a, \qquad a-a=0,$$
$$a\cdot 0=0\cdot a=0, \qquad 0:a=0.$$

Mahāvīra uvedl pro počítání s nulou toto pravidlo:[25]

GaSaSa/i.49
Číslo násobené nulou je nula, [číslo] *zůstane nezměněné, je-li dělené, sloučené nebo zmenšené nulou. Násobení a jiné operace ve spojení s nulou* [způsobí] *nulu; a při operaci sčítání nula se stane tím, co k ní je přidáno.*

Zdá se, že Mahāvīra definoval chybně $a : 0 = a$. Dělení nulou indickým učencům působilo potíže, například Brahmagupta tvrdil, že nula dělená nulou je nula,[26] většinou však považovali dělení nulou za nemožné. Bhāskara II. v práci *Līlāvatī* tvrdil, že číslo dělené nulou je veličina, která se nemění, když

[24] Podle [DS1].

[25] Podle [Ran], str. 6–7. Podobná pravidla uvedli i další autoři, např. Śrīdhara PaGa/21, podle [Shu1], str. 7, nebo Bhāskara II. Lila/ii.44–45, podle [Col], str. 19, BiGa/i.16, podle [Col], str. 136–138.

[26] Viz sloky BrSpSi/xviii.31–36, podle [Col], str. 339.

k ní přičteme nebo odečteme nějaké číslo, v práci *Bījagaṇita* své tvrzení ještě upřesnil:[27]

BiGa/i.14 (část)
Veličina dělená nulou je zlomek, jehož jmenovatelem je nula.

K tomu komentátor Kṛṣṇa připojil vyvětlující poznámku, že tak, jak se dělitel zmenšuje, tak se podíl zvětšuje, až je nedefinovaně velký, nekonečný. V tomto zdůvodnění můžeme vidět náznak limitního přechodu

$$\lim_{x\to 0} \frac{a}{x} = \infty,$$

což společně s předchozím tvrzením z *Līlāvatī* můžeme vnímat jako

$$\frac{a}{0} \pm b = \frac{a}{0}, \qquad \text{resp.} \quad \infty \pm b = \infty.$$

Problém $0:0$, resp. $\frac{0}{0}$ však nedokázali indičtí učenci uspokojivě vysvětlit.

Za základní byly považovány operace sčítání, odčítání, násobení, dělení, výpočet druhé mocniny a odmocniny, výpočet třetí mocniny a odmocniny. Ne v každém textu však byly popsány všechny. Sčítání a odčítání bylo v aritmetických dílech zmiňováno jen okrajově nebo vůbec ne, některá díla obsahovala názvy různých metod násobení, ale vlastní metody byly často popsány jen velmi stručně. Složitější operace, jako metoda dělení stejně jako metody na výpočet druhé mocniny a odmocniny i třetí mocniny a odmocniny, byly uvedeny ve většině textů.

Indičtí matematikové si velmi brzy uvědomili, že všechny matematické operace jsou odvozené ze sčítání a odčítání. Bhāskara I. tvrdil:[28]

> *Všechny aritmetické operace jsou rozdělené do dvou skupin, i když se většinou uvažují čtyři* [sčítání, odčítání, násobení, dělení]. *Dvě základní skupiny jsou zvětšování a zmenšování. Sčítání je zvětšování a odčítání je zmenšování. Tyto dva druhy operací prostupují celou matematiku. Předchozí učitelé říkali: „Násobení a umocňování jsou zvláštní druhy sčítání, dělení a odmocňování jsou zvláštní druhy odčítání. Skutečně, každá matematická operace se skládá ze zvětšování a zmenšování.“ Mělo by se vědět, že celá ta věda se opravdu skládá jen z těchto dvou skupin.*

Stará indická aritmetika počítala s nezápornými celými čísly a se zlomky. Operace se zápornými čísly a výpočty kvadratických iracionalit bývaly řazeny do algebry.

[27] Podle [Col], str. 137.
[28] Z jeho komentáře k práci *Āryabhaṭīya*, podle [DS1], str 130.

6.2. Sčítání

Indický název pro sčítání byl *saṁkalita* (dané dohromady). Další užívané termíny pro sčítání byly například *saṁkalana* (dávání dohromady), *miśraṇa* (směšování), *sammelana* (smíchání dohromady), *prakṣepaṇa* (házení dohromady), *saṁyojana* (spojování dohromady), *ekīkaraṇa* (dávání do jednoho), *yukti*, *yoga* (sčítání).[29] Někteří pozdější autoři užívali název *saṁkalita* v obecném smyslu jako součet posloupnosti. Ve všech matematických a astronomických dílech byla znalost sčítání pokládána za samozřejmost. Āryabhaṭa II. v práci *Mahāsiddhānta* definoval sčítání takto:[30]

> **MaSi/xiv.2** (část)
> *Vytváření jednoho z několika čísel je sčítání.*

Velmi stručné zmínky jsou v některých pozdějších dílech. Bhāskara II. uvedl:[31]

> **Lila/ii.12**
> *Součet čísel podle jejich míst je získán podle přímého nebo obráceného pravidla; nebo* [v případě odčítání] *jejich rozdíl.*

Přímý způsob

Při přímém způsobu, tzv. *krama*, se postupovalo zprava doleva, algoritmus sčítání tedy začínal od jednotek. Čísla se zapsala jedno pod druhé tak, aby jednotky všech čísel byly pod sebou, poslední číslo bylo podtržené linkou, pod ní se zapisoval součet, stejně jako dnes při písemném sčítání. Nejprve se pod linku zapsal součet číslic na místě jednotek, tím se získala číslice na místě jednotek celkového součtu. Pak se sečetly číslice na místě desítek, jejich součet se přičetl k číslici na místě desítek v částečném součtu pod linkou a výsledkem se tato číslice nahradila. Tak se získala číslice na místě desítek celkového součtu atd.

V jiné metodě se nahoru zapsal největší sčítanec a jeho číslice se postupně přepisovaly příslušnými číslicemi součtu.

Na příkladu $65 + 58 = 123$ jsou porovnány oba způsoby zápisu jednotlivých kroků:

$$\begin{array}{rrr} 65 & 65 & 65 \\ \underline{58} & \underline{58} & \underline{58} \\ & 13 & 123 \end{array} \qquad \text{nebo} \qquad \begin{array}{rrr} 65 & 73 & 123 \\ 58 & 58 & 58 \end{array}$$

---

[29] Poslední termín pro sčítání se uvádí pouze v dílech *Śulba*. Později vyjadřuje násobení.
[30] Podle [DS1], str. 130, [DvS], str. 14.
[31] Podle [Col], str 5.

Obrácený způsob

Obrácený způsob, tzv. *utkrama*, probíhal zleva doprava, sčítání začínalo na místě nejvyššího řádu. V tomto případě se nejprve sečetly číslice nejvyšších řádů a výsledek se zapsal pod ně, tj. pod nejvyšší řád. Postupně následoval součet dalších, nižších řádů. Když bylo potřeba, částečné součty se opravily.

Příklad $65 + 58 = 123$ je nyní řešen obráceným způsobem:

65	65	65	nebo	65	115	123
58	58	58		58	58	58
	11	123				

Komentátor Gaṅgādhara napsal:[32]

> *Podle pravidla číslice rostou* [podle hodnoty] *směrem doleva, sčítání nejprve jednotek je přímá metoda, sčítání nejprve číslic na posledním místě je obrácená metoda.*

Poznamenejme, že Arabové oddělovali jednotlivé řády svislými čarami, ale Indové nikoli.

6.3. Odčítání

Pro odčítání se užívaly názvy *vyutkalita* (oddělené), *vyutkalana* (oddělování), *śodhana* (čištění), *pātana* (způsobení poklesu), *viyoga* (rozdělení) atd. Výsledku se říkalo *śeṣa* (zbytek) nebo *antara* (rozdíl). Menšenec se nazýval *sarvadhana* nebo *viyojya* a menšiteli se říkalo *viyojaka*.

Āryabhaṭa II. podal tuto definici odčítání:[33]

> **MaSi/xiv.2** (část)
> *Odstranění* [nějakého čísla] *z sarvadhana* [celkového počtu] *je odčítání; to, co zůstane, se nazývá śeṣa* [zbytek].

Odčítat se mohlo opět přímým nebo obráceným způsobem.

Přímý způsob

Při odčítání přímým způsobem se pod menšence zapsal menšitel tak, aby jednotky obou čísel byly pod sebou. Číslice menšence se postupně mazaly a nahrazovaly číslicemi rozdílu. Odčítat se začalo tím, že se od jednotek menšence odečetly jednotky menšitele, rozdílem se přepsaly jednotky menšence. Stejně se postupovalo dál směrem k nejvyššímu řádu. Jestliže číslice menšence byla menší než odpovídající číslice menšitele, „ubrala“ se jedna desítka následujícího řádu menšence, která se „přidala“ k číslici na nižším řádu, aby odečtení mohlo být provedeno.

[32] Podle [DS1], str. 131.
[33] Podle [DS1], str. 132, [DvS], str. 14.

Obrácený způsob

Obrácený způsob byl podobný, jediný rozdíl byl v tom, že se začínalo od místa nejvyššího řádu menšitele. Pokud to bylo nutné, částečné rozdíly se opravovaly. Tento postup byl vhodný pro počítání na desce, kde se čísla snadno mazala a přepisovala. Obrácený postup se v Indii běžně používal a byl považován za snadnější než přímý.

Na příkladu $10000 - 360 = 9640$ je porovnání přímého a obráceného způsobu:

přímý způsob:	10000	9940	9640
	360	360	360
obrácený způsob:	10000	9700	9640
	360	360	360

Následující příklad je od Bhāskary II., uvádíme jej i s autorovým řešením.[34]

Lila/ii.13
Příklad. Krásná bystrá Līlāvatī, jsi-li znalá sčítání a odčítání, řekni mi součet dvou, pěti, třiceti dvou, sto devadesáti tří, osmnácti, deseti a sta daných dohromady; a zbytek, když jejich součet je odečtený od deseti tisíc.

Vyjádření, 2, 5, 32, 193, 18, 10, 100.
[Odpověď.] *Výsledek sčítání,* 360.

Vyjádření pro odčítání, 10000, 360.
[Odpověď.] *Výsledek odčítání,* 9640.

V díle *Manoranjana*, komentáři práce *Līlāvatī*, vysvětloval autor Rāma-Krišna Dēva proces sčítání podle jednotlivých řádů, což byl postup použitelný pro přímý i obrácený způsob:[35]

Součet jednotek:	2,5,2,3,8,0,0	20
Součet desítek:	3,9,1,1,0	14
Součet stovek:	1,0,0,1	2
Součet součtů:		360

Sūryadāsa ve svém komentáři k *Līlāvatī* vysvětloval odčítání na příkladu

[34] Podle [Col], str. 5.
[35] Podle [Col], str. 5.

1000 – 360:[36]

> *Proto odčítání je přímé, šest nemůže být odečteno od nuly na místě desítek, tak vezmi deset a odečti šest, zbytek* [čtyři] *se zapíše nad* [šest] *a deset se odečte od následujícího místa. Protože řády jednotky, desítky atd. jsou násobky deseti, tak číslice menšitele, která se nemůže odečíst od odpovídající pozice menšence, se odečte od deseti, vezme se zbytek a deset se odečte od následující pozice. V tomto způsobu se ta desítka bere až k poslednímu místu, dokud není vyčerpaná poslední číslice. Jinými slovy čísla do devíti zabírají jedno místo, rozlišování pozic začíná od deseti. Takže je známé, „kolik desítek je v daném čísle“, proto čísla, která se nemohou odečíst od své pozice, se odečtou od následující desítky a vezme se zbytek.*

6.4. Násobení

Běžně užívaný indický název pro násobení byl *guṇana*, tento výraz se objevil už ve védských dílech. Existovaly i další názvy, například *hanana, vadha, kṣaya*, které znamenaly zabíjení nebo ničení. Tyto názvy se objevily později se vznikem nových metod a desítkovým pozičním zápisem: činitel – násobenec se postupně „ničil“ a na jeho místa se zapisovaly číslice součinu.[37]

V *Śulbasūtrách* se užíval výraz *abhyāsa* pro sčítání i násobení. To svědčí o tom, že v té době představoval proces násobení opakované sčítání. V rukopisu *Bakhshālī* se užíval pro násobení název *parasparakṛtam* (dávání dohromady). Starověká terminologie ukazuje, že násobení bylo „opakované sčítání činitele – násobence tolikrát, kolik byl činitel – násobitel“. Násobenec se nazýval *guṇya*, násobitel *guṇaka* nebo *guṇakāra*, výsledek *guṇana-phala* (výsledek násobení) nebo *pratyutpanna* (reprodukovaný). Tyto pojmy se vyskytovaly ve všech indických dílech.

V Indii existovalo několik různých metod násobení – *kapāṭa-sandhi* (metoda dveřního pantu), *tastha* (metoda křížového násobení, násobení křížem), dále *khanda-prakāra* neboli metody, ve kterých se násobilo číslem rozděleným na části. Mezi tyto metody se řadily *sthāna-vibhāga* (násobení oddělením míst) a jí velmi podobná metoda *gomūtrikā*, dále *rūpa-vibhāga* (násobení po částech) a *iṣṭa-guṇana* (algebraická metoda).

Āryabhaṭa I. nezmiňoval žádné běžné metody násobení, pravděpodobně je považoval za příliš elementární a všeobecně dobře známé. Brahmagupta vynechal dobře známou metodu *kapāṭa-sandhi*. Śrídhara a Mahāvīra zmínili čtyři metody násobení *kapāṭa-sandhi, tastha, rūpa-vibhāga* a *sthāna-vibhāga*. Bhāskara II. kromě těchto čtyř metod uvedl ještě metodu *iṣṭa-guṇana*, Āryabhaṭa II. popsal pouze obvyklou metodu *kapāṭa-sandhi*.

---

[36] Podle [DS1], str. 133.

[37] Staré indické metody násobení jsou porovnány v článku [Sy1].

6.4.1. Metoda dveřního pantu

Sanskrtský název metody je *kapāṭa-sandhi*.[38] Tuto metodu popsali Śrīdhara, Āryabhaṭa II., Śrīpati i někteří pozdější autoři.

Šrípati v práci *Siddhānta-śekhara* uvedl:[39]

> *Umísti násobence pod násobitele jako v pantu dveří a násob postupně* [číslice násobence] *posouváním* [násobitele] *v přímém nebo obráceném pořadí.*

Přímý způsob

Tato metoda nebyla příliš oblíbená, poslední, kdo se o ní zmiňoval, byl Śrīpati v 11. století.

Postup popíšeme na příkladu $435 \cdot 12 = 5220$.[40] Výpočet trochu připomíná dnešní písemné násobení, ale za násobitele bylo považováno horní číslo. Násobenec 435 se zapsal na desku pod násobitele 12 tak, aby jednotky násobence byly pod nejvyšším řádem násobitele. První číslice násobence, tj. 5, se postupně násobila oběma číslicemi násobitele od jednotek: $5 \cdot 2 = 10$, přitom se 0 zapsala pod 2 a 1 se zapamatovala,[41] pak se násobilo $5 \cdot 1 = 5$, k součinu se přičetla zapamatovaná 1, tedy dohromady 6. A protože číslo 5 už nebylo dál potřebné, smazalo se a na uvolněné místo se zapsala 6. Nyní se násobitel posunul o jedno místo doleva a násobila se další číslice násobence, tj. 3: nejprve $3 \cdot 2 = 6$, číslo 6 se přičetlo k 6 zapsané pod 2, součet je 12. Číslo 6 se nahradilo 2 a 1 se zapamatovala, pak $3 \cdot 1 = 3$, k tomu se přičetla zapamatovaná 1, tedy $3 + 1 = 4$, číslo 3 se smazalo a na jeho místo se zapsala 4. Násobitel se opět posunul o místo doleva. Následoval poslední krok násobení $4 \cdot 2 = 8$, $8 + 4 = 12$, číslo 4 se nahradilo číslem 2 a 1 se zapamatovala, pak $4 \cdot 1 = 4$ a $4 + 1 = 5$, tato 5 se zapsala vlevo od 2. Nakonec se smazala i 12 a na desce zůstal pouze výsledek 5220. Na desce se tak postupně objevovaly tyto výpočty:

12	1**2**	**1**2	12	1**2**	**1**2	12	1**2**	**1**2	
43**5**	4350	4360	4**3**60	4320	4420	**4**420	4220	5220	5220

V předchozím postupu byla čísla 12 a 435 „zničena“ a číslo 5220 „vzniklo“ (*pratyutpanna*). Proto se termín *pratyutpanna* někdy používal pro součin.

Posun násobitele měl dva důvody:

a) Levá číslice násobitele stála nad tou číslicí násobence, která se právě násobila.

[38] Slovo *kapāṭa* znamená dveře a *sandhi* můžeme přeložit jako závěs.

[39] Podle [DS1], str. 137.

[40] Pro jednodušší popis budeme místo termínu činitel rozlišovat násobence, tj. násobené číslo, a násobitele, tj. číslo, kterým se násobilo. V příkladu $435 \cdot 12$ je 435 násobencem a 12 násobitelem.

[41] Začátečníci si pravděpodobně poznamenávali tato čísla na jiné místo desky.

b) Dílčí součin se přičítal k číslici násobence umístěné pod číslicí násobitele, kterou se právě násobilo.

Někdy součin přesahoval za poslední číslici násobitele. V takovém případě se poslední číslice částečného součinu zapsala samostatně. Začátečníci se často dopouštěli chyb v tom, že špatně přičetli stranou poznačená čísla nebo smazali nesprávnou číslici násobence. Proto dostával přednost obrácený způsob.

Obrácený způsob

Existovaly dva typy obráceného způsobu.

V prvním typu byla čísla zapsána pod sebou tak, že nejvyšší řád násobence byl pod jednotkami násobitele. Číslice násobence se začínaly násobit zleva číslicemi násobitele zprava, tedy ve stejném příkladu $435 \cdot 12$ se nejprve vynásobilo $4 \cdot 2 = 8$, číslo 4 se smazalo a nahradilo 8, pak $4 \cdot 1 = 4$, číslo 4 se zapsalo pod jedničku. Násobitel 12 se posunul o jedno místo doprava, aby se mohla násobit další číslice násobence – trojka. Tedy $3 \cdot 2 = 6$, číslo 3 se smazalo a na jeho místo se zapsala 6, pak $3 \cdot 1 = 3$ a tato 3 se musela přičíst k číslici pod jedničkou: $3 + 8 = 11$, proto ještě $4 + 1 = 5$. Číslo 48 se tedy nahradilo číslem 51 a opět následoval posun násobitele. Nakonec se násobila zbývající číslice násobence, tj. pětka. Tedy $5 \cdot 2 = 10$, číslo 5 se nahradilo číslem 0, 1 se zapamatovala, pak $5 \cdot 1 = 5$, $5 + 1 = 6$ a $6 + 16 = 22$, číslo 16 se nahradilo číslem 22. Tím se získal výsledek 5220. Jednotlivé mezivýpočty za sebou následovaly takto:

12	1**2**	**1**2	12	1**2**	**1**2	12	1**2**	**1**2	
435	835	4835	48**3**5	4865	5165	516**5**	5160	5220	5220

Druhý způsob se lišil tím, že se začínalo násobit číslicemi násobitele zprava. Čísla se zapsala pod sebe stejně jako v minulém příkladu a násobilo se nejprve $4 \cdot 1 = 4$, součin se zapsal pod 1, potom $4 \cdot 2 = 8$, číslo 8 nahradilo původní 4 a násobitel se posunul o pozici vpravo. Dál se násobila trojka $3 \cdot 1 = 3$ a $3 + 48 = 51$, číslo 48 se smazalo a nahradilo číslem 51, pak $3 \cdot 2 = 6$, číslo 3 v násobenci bylo nahrazeno číslem 6 a znovu se posunul násobitel. Jako poslední se násobila pětka, $5 \cdot 1 = 5$, $5 + 16 = 21$, číslo 16 se nahradilo číslem 21, nakonec $5 \cdot 2 = 10$, místo čísla 5 se zapsala 0 a ještě se musela k řádu desítek přičíst 1. Tak se vypočítal výsledek 5220. Sled jednotlivých kroků je v tabulce:

12	**1**2	1**2**	12	**1**2	1**2**	12	**1**2	1**2**	
435	4435	4835	48**3**5	5135	5165	516**5**	5215	5220	5220

Protože číslice násobence se postupně přepisovaly, násobitel se na konci výpočtu smazal, zůstal na desce jen výsledek. Při násobení s postupným mazáním mezivýsledků byla kontrola výpočtu velmi obtížná.

Takovéto násobení převzali Arabové, kteří se učili desítkovou aritmetiku od Indů. Popisoval ji například al-Chvárizmí nebo perský matematik al-Nasawi (asi 1010 až 1075).[42] Protože však psali na papír, číslice místo mazání škrtali.

[42] Vlastním jménem Ali ibn Aḥmad al-Nasawi, viz [Ju].

Následující příklad je z práce al-Nasawiho, který metodu nazýval *al-amal al-hihdī* a *tārik al-hihdī* (indická metoda).[43]

Příklad. Násob $435 \cdot 12$.

$$
\begin{array}{c}
2 \\
2\cancel{1} \\
5\cancel{1}\cancel{5}0 \\
\cancel{4}\cancel{3}\underline{\cancel{1}\cancel{2}} \\
\underline{\cancel{4}\cancel{3}\cancel{5}}\cancel{5} \\
\cancel{4}\cancel{3}
\end{array}
$$

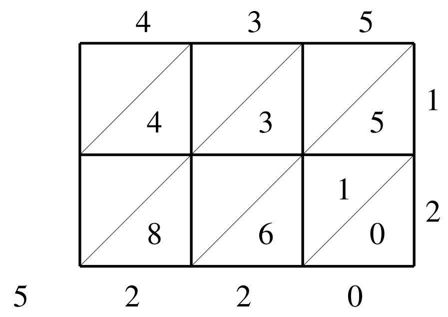
Součin je 5220.

K metodě *kapāṭa-sandhi* přiřadil Gaṇeśa ve své práci *Gaṇita-majñarī* ze 16. století ještě další postup násobení.[44] Postup výpočtu byl popsán takto:[45]

> [Sestav] *tolik přihrádek, kolik míst má násobenec a pod sebou tolikrát, kolik míst má násobitel. Šikmo rozděl první, spodní a všechny ostatní* [přihrádky]. *Násob každé místo násobence místy násobitele* [která jsou] *jedno pod druhým a polož výsledky do přihrádek. Součet, který se vezme šikmo po obou stranách šikmých čar, je součin. To je kapāṭa-sandhi.*

Metoda spočívala v tom, že se nakreslila obdélníková tabulka, ve které počet sloupců byl roven počtu číslic násobence a počet řádků byl stejný jako počet číslic násobitele. Každé políčko se navíc rozdělilo úhlopříčkou. Nad tabulku se zleva doprava zapsal násobenec, vpravo svisle shora dolů násobitel. Násobila se každá číslice násobence s každou číslicí násobitele a výsledky se zapisovaly do příslušných políček (do pravé dolní poloviny jednotky, do levé horní desítky). Nakonec se sečetla čísla v šikmých sloupcích (podél úhlopříček) a zapsala dolů pod tabulku. Pokud byl součet v šikmém sloupci větší než deset, příslušný počet desítek se připočetl k následujícímu sloupci. Číslo pod tabulkou dávalo výsledný součin.

Výpočet $435 \cdot 12 = 5220$ je dobře vidět z obrázku.



---

[43] Podle [DS1], str. 143.

[44] Existují však jisté pochybnosti, zda uvedený způsob výpočtu pochází skutečně z Indie, protože už ve 13. stol. jej používali Arabové.

[45] Podle [DS1], str. 145.

Násobení podle tohoto postupu bylo jednoduché a názorné. Vzhledem k přehlednosti celého zápisu byla i kontrola výpočtu snadná. Ve středověké Itálii byl tento algoritmus známý pod názvem *gelosia* (žárlivost) nebo jako násobení ve čtvercích (viz [BeM1]).

6.4.2. Metoda křížového násobení

Tento postup popsali Śrídhara, Mahāvīra, Śrīpati i někteří pozdější autoři jako metodu *tastha*. Je to metoda, v níž násobitel i násobenec zůstávali na místě, neposunovali se. Násobitel se zapsal pod násobence tak, aby jednotky obou čísel byly nad sebou. Jako první se násobily jednotky násobitele a násobence a součin se zapsal pod ně, resp. se zapsaly jen jednotky součinu a desítky se přenesly. Pak se násobily jednotky násobence desítkami násobitele a desítky násobence jednotkami násobitele, výsledky se sečetly a zapsaly dolů. Dále se násobily stovky jednotkami, desítky desítkami, jednotky stovkami, sečetly se a zapsaly do řádku dole. Takto se pokračovalo i se zbývajícími číslicemi. Ve spodním řádku pak byl uveden součin.

násobí se:		435
		12
jednotky:	$5 \cdot 2 = 10$	0
desítky:	$3 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 1 = 12$	2
stovky:	$4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 = 12$	2
tisíce:	$4 \cdot 1 + 1 = 5$	5
výsledek:		5220

Tuto metodu znali indičtí učenci už v 8. století. Přes Arábii se dostala do Evropy, kde se objevila například ve známé knize *Suma*, kterou sepsal italský matematik Luca Pacioli (1445–1517). Byla považována za důmyslnější a lepší než ostatní metody.

6.4.3. Násobení oddělením míst

Tato metoda je známá jako metoda *sthāna-vibhāga* nebo *sthāna-khaṇḍa*. Objevovala se ve všech dílech od 7. stol. n. l.

Metoda spočívala v tom, že se jeden z činitelů (násobenec nebo násobitel) rozdělil na jednotlivé číslice. Každá z nich se pak násobila druhým činitelem a vzniklé dílčí součiny se nakonec sečetly.

Používaly se různé způsoby zápisu, uvedeme tři:[46]

[46] Podle Gagādharova komentáře k *Līlāvatī*, viz [Col], str. 7, [DS1], str. 147.

$$\begin{array}{l} \ \ 435 \\ 12 \\ \hline 48 \\ \ \ 36 \\ \ \ \ \ 60 \\ \hline 5220 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} 12\ \ 12\ \ 12 \\ 4\ \ \ 3\ \ \ 5 \\ \hline 4860 \\ 36 \\ \hline 5220 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} 435\ \ \ 435 \\ 1\ \ \ 2 \\ \hline 870 \\ 435 \\ \hline 5220 \end{array}$$

6.4.4. Metoda cikcak

Tato metoda se ve středověké Indii nazývala *gomūtrikā*. Je velmi podobná metodě *sthāna-khaṇḍa*. Brahmagupta ve svém dodatku k matematické části práce *Brāhma-sphuta-siddhānta* napsal:[47]

> **BrSpSi/xii.55**
> *Násobenec se opakuje tak dlouho, dokud jsou číslice v násobiteli, jedna po druhé se násobí a* [výsledky] *sečtou dohromady* [podle pozic]; *to dává součin. Nebo se násobenec opakuje tolikrát, kolik částí je v násobiteli.*

Komentátor Pṛthūdakasvāmin-Caturveda vysvětlil popsanou metodu na příkladu $235 \cdot 288 = 67\,680$. Násobenec 235 se zapsal pod sebou tolikrát, kolik pozic měl násobitel, v našem příkladě třikrát. Do každého řádku se vedle násobence zapsala jedna číslice násobitele vždy posunutá podle řádu. Číslo v prvním řádku se násobilo dvěma, začínalo se na místě jednotek: $5 \cdot 2 = 10$, číslo 0 se zapsalo, dále $3 \cdot 2 = 6$ a $6 + 1 = 7$, zapsala se 7, nakonec $2 \cdot 2 = 4$, zapsala se 4. Pak se stejným způsobem násobilo v dalších řádcích. Čísla v posledním sloupci pod sebou se nakonec sečetla.

$$\begin{array}{l|l|l} 235 & 2 & 470 \\ 235 & \ \ 8 & 1880 \\ 235 & \ \ \ \ 8 & \underline{\ \ 1880} \\ & & 67680 \end{array}$$

Trochu jiný zápis je uveden v [DS1]. Čísla se zapsala pod sebe podobným způsobem. Tentokrát se však pod sebe do prvního sloupce umístily jednotlivé číslice násobitele. Ke každé číslici se do druhého sloupce připojil násobenec, který byl v každém řádku posunutý o řád doprava. Čísla v každém řádku se násobila stejně jako v předchozím případě, ale dílčím součinem se přepsal násobenec. Nakonec se součiny v posledním sloupci sečetly:

$$\begin{array}{ll} 2 & 235 \\ 8 & \ \ 235 \\ 8 & \ \ \ \ 235 \end{array} \qquad\qquad\qquad \begin{array}{ll} 2 & 470 \\ 8 & 1880 \\ 8 & \underline{\ \ 1880} \\ & 67680 \end{array}$$

[47] Podle [Col], str. 319.

Metody *sthāna-khaṇḍa* a *gomūtrikā* se podobají moderním metodám násobení.

6.4.5. Metoda násobení po částech

Této metodě se říkalo *rūpa-vibhāga*, zmiňovaly se o ní všechny práce od 7. stol. n. l.

Existovaly dva způsoby:

a) Násobitel se rozdělil na součet dvou nebo více částí. Násobencem se pak násobila každá z nich zvlášť a výsledky se sečetly:

$$135 \cdot 12 = 135 \cdot (4 + 8) = (135 \cdot 4) + (135 \cdot 8) = 540 + 1\,080 = 1\,620.$$

Násobitel se však mohl rozdělit i na více částí. Například násobitel v součinu $235 \cdot 288$ se vyjádří jako $9 + 8 + 151 + 120$:[48]

$$\begin{array}{rrr} 235 & 9 & 2\,115 \\ 235 & 8 & 1\,880 \\ 235 & 151 & 35\,485 \\ 235 & 120 & \underline{28\,200} \\ & & 67\,680 \end{array}$$

b) Násobitel se rozdělil na součin dvou nebo více částí. Násobencem se násobila jedna z nich, získaný součin se pak násobil další částí atd., dokud se nevyčerpaly všechny:

$$135 \cdot 12 = 135 \cdot (4 \cdot 3) = (135 \cdot 4) \cdot 3 = 540 \cdot 3 = 1\,620$$

$$235 \cdot 288 = 235 \cdot (9 \cdot 8 \cdot 4) = (235 \cdot 9) \cdot 8 \cdot 4 = (2\,115 \cdot 8) \cdot 4 = 16\,920 \cdot 4 = 67\,680.$$

Z uvedených algoritmů je patrné, že si Indové uvědomovali asociativitu násobení a distributivitu násobení vůči sčítání a využívali je.

Tuto metodu od Indů převzali Arabové a později i Italové. Italové ji nazývali *scapezzo* nebo *repiego* (viz [BeM1]).

6.4.6. Algebraická metoda

Tato metoda byla známá jako *iṣṭa-guṇana*. Popsal ji například Brahmagupta nebo Bhāskara II. Uvedeme popis Brahmagupty.[49]

BrSpSi/x.56:
Násobenec se násobí součtem nebo rozdílem násobitele a libovolné hodnoty a od výsledku se součin té libovolné hodnoty a násobence odečte nebo přičte.

---

[48] Viz komentář Pṛthūdakasvāmina-Caturvedy, podle [Col], str. 319.

[49] Podle [Col], str. 156.

Existovaly dva způsoby podle toho, zda se vhodné číslo přičítalo nebo odčítalo. To vhodné číslo se volilo tak, aby násobení bylo jednodušší.

Oba způsoby jsou ukázány v následujícím příkladu $135 \cdot 12 = 1\,620$.

a) Násobitel se zvětšil:

$$135 \cdot 12 = 135 \cdot (12 + 8) - 135 \cdot 8 = 2\,700 - 1\,080 = 1\,620,$$

b) násobitel se zmenšil:

$$135 \cdot 12 = 135 \cdot (12 - 2) + 135 \cdot 2 = 1\,350 + 270 = 1\,620.$$

Tuto metodu také převzali Arabové, rozšířila se i do Evropy.

Bhāskara II. ve své práci *Līlāvatī* věnoval násobení dvě a půl sloky:[50]

Lila/ii.14–15
Pravidlo násobení; dvě a půl sloky.
Násob poslední číslici [nejvyšší řád] *násobence násobitelem a pak předposlední a pak zbytek opakováním stejného. Nebo ať násobenec opakovaný podle různých částí násobitele se násobí těmi částmi: a součiny se sečtou dohromady. Nebo násobitele vyděl nějakým číslem, které je jeho dělitelem, vynásob násobence tímto číslem a pak podílem, výsledek je součinem. Toto jsou dvě metody rozdělení podle typu. Nebo vynásob odděleně podle pozic číslic a sečti součiny dohromady. Nebo vynásob násobitelem zmenšeným nebo zvětšeným o libovolně vybranou hodnotu; přičti nebo odečti součin násobence vynásobený tou hodnotou.*

Hned za pravidlo autor připojil následující vyřešený příklad:[51]

Lila/ii.16
Příklad. Krásná a drahá Līlāvatī, která máš oči jako koloušek, řekni mi, co jsou výsledná čísla ze sto třiceti pěti násobených dvanácti? Jsi-li znalá násobení celkem nebo po částech, zda rozdělením podle typu nebo oddělením číslic. Řekni mi, nadějná ženo, co je podíl dělený stejným násobitelem?

Vyjádření, Násobenec 135, *Násobitel* 12.
Součin (násobením číslic násobence postupně násobitelem) 1 620.
Nebo rozdělením násobitele na části, jako 8 *a* 4*; a jednotlivým násobením násobence; sečtením součinů dohromady: výsledek je stejný* 1 620.
Nebo násobitele 12 *vyděl třemi, podíl je* 4*; tím a* 3 *postupně násob násobence, poslední součin je stejný* 1 620.
Nebo vezmi číslice po částech, jmenovitě 1 *a* 2*; násobence násob jimi odděleně, a součiny sečti dohromady, podle pozic číslic, výsledek je stejný* 1 620.

[50] Podle [Col], str. 5–6.
[51] Podle [Col], str. 6–7.

Nebo násobence násob násobitelem zmenšeným o dva, jmenovitě 10,
a přičti dvojnásobek násobence, výsledek je stejný 1 620.
Nebo násobence násob násobitelem zvětšeným o osm, jmenovitě 20,
a osmkrát násobence odečti, výsledek je stejný 1 620.

První postup popisuje metodu *kapāṭa-sandhi* (metodu dveřního pantu). Neuvádělo se, zda se má užít přímý nebo obrácený způsob. Druhý a třetí návod je pro metodu *rūpa-vibhāga* (násobení po částech). Čtvrté řešení je podle metody *sthāna-vibhāga* (násobení oddělením míst). Pátý a šestý způsob se týká metody *iṣṭa-guṇana* (algebraické metoda).

Na ukázku připojíme ještě dva příklady na násobení, které uvádí Mahāvīra.[52]

GaSaSa/ii.4
Sto třicet devět drahokamů musí být věnováno při obřadu v jednom džinistickém chrámu. Řekni, kolik drahokamů [musí být tak darováno] *ve* 109 *chrámech.*

GaSaSa/ii.9
V tomto [problému] *zapiš číslo* 157 683 *a násob je devíti a pak mi řekni, příteli, hodnotu* [výsledného] *množství.*

Výše popsané algoritmy násobení převzali Arabové, kteří se naučili od Indů desítkovou aritmetiku. Arabské rukopisy byly později studovány v Evropě a staré indické metody se v různých modifikacích objevily v dílech středověkých matematiků.

6.5. Dělení

Indické názvy pro operaci dělení byly *bhājana*, *bhāgahāra*, *haraṇa*, *chedana*. Všechny tyto výrazy znamenají „rozdělit na části“. Někdy se užíval i název *haraṇa*, jehož význam je „odebrat“. Z názvů je patrná i podobnost dělení a odčítání. Dělenec se nazýval *bhājya* nebo *hārya*. Dělitel byl *bhājaka*, *bhāgahara* nebo krátce *hara*. Podílu se říkalo *labdhi* (to, co dostaneme) nebo *labdha*.

Evropští učenci ještě v 15. a 16. století považovali dělení za obtížné, únavné a pracné, ale v Indii tuto operaci nepokládali za těžkou. Āryabhaṭa I. ve své práci *Āryabhaṭīya* nezmiňoval žádnou metodu dělení, přestože uváděl postupy na výpočet druhé a třetí odmocniny, které dělení využívaly. Dělení zřejmě považoval za elementární.

V Indii zpočátku používali metodu odstraňování společných činitelů, dnešní krácení, která je popsána už v džinistických dílech. Popsal ji i Mahāvīra, a to pravděpodobně pro srovnání, protože již znal modernější metody.[53]

[52] Podle [Ran], str. 10. Číslo 139 je v prvním příkladu vyjádřeno jako $40 + (100 - 1)$. Více o tom, jak se ve staré Indii vyjadřovala čísla, je v 5. kapitole.
[53] Podle [Ran], str. 12.

GaSaSa/ii.18
Napiš dělence a pod něj dělitele a pak, při provádění dělení metodou odstraňování společných činitelů, dostaneš výsledek [podíl].

Moderní metoda dělení nebyla v rukopisu *Bakhshālī* nalezena, i když se jméno operace vyskytuje na několika místech. To může být dáno tím, že většina textu byla zničena. Je pravděpodobné, že metoda dělení už v této době (asi 7. stol.) byla známá.

6.5.1. Metoda dlouhého dělení

V Indii se běžně používala tzv. metoda dlouhého dělení. Před tím, než se operace začala provádět, bylo zvykem čísla zkrátit. Metoda dlouhého dělení odpovídá naší metodě písemného dělení, jen grafická úprava byla trochu odlišná. Moderní metoda dělení byla vysvětlena v mnoha dílech o aritmetice. Mahāvīra dělení popsal stručně:[54]

GaSaSa/ii.19
Dělenec by měl být dělen [obráceným způsobem] *dělitelem umístěným pod ním, po provedení operace odstranění společných činitelů, je-li to možné.*

Bhāskara II. uvedl podobné tvrzení.[55]

Lila/ii.17
Pravidlo dělení. Jedna sloka.
Číslo, kterým vynásobený dělitel vyrovná poslední číslici dělence [a tak dál], *je podílem při dělení: nebo pokud je možné, nejprve zkrať oba, dělitele a dělence, stejným číslem a přikroč k dělení.*

[Příklad.] *Vyjádření čísla vytvořeného násobením v předchozím příkladu a jeho násobitele pro dělitele: Dělenec* 1 620. [Dělitel 12.] *Podíl* 135*; shodný s původním násobencem.*

Nebo oba, dělenec a dělitel, zkrácené do nejmenšího tvaru společnou mírou tři, jsou 540 *a* 4*; nebo společnou mírou čtyři, se stanou* 405 *a* 3*. Dělení příslušnými zkrácenými děliteli, výsledek je stejný,* 135.

Bhāskara II. si byl dobře vědom toho, že násobení a dělení jsou navzájem inverzní operace, v uvedeném příkladu na to upozornil a využil stejné numerické hodnoty jako v předchozí úloze na násobení.

Podrobněji popsal metodu Āryabhaṭa II. v práci *Mahā-siddhānta*:[56]

[54] Podle [Ran], str. 12.
[55] Podle [Col], str. 8.
[56] Podle [DS1], str. 152, [DvS], str. 14.

MSi/xiv.4–5

Dělení prováděj tak, že položíš dělitele pod dělence; odečteš [od posledních číslic dělence] *vhodný násobek dělitele; ten* [násobek] *je částí podílu, pak posuň dělitele, děl, co zbývá atd.*

Metodu popíšeme na Bhāskarově příkladu, 1 620 : 12 = 135.[57] Dělitel se zapsal pod dělence tak, aby pod sebou byly levé číslice. Dělení začínalo od číslic dělence, která byla nad dělitelem, tj. číslo 16 se dělilo dělitelem 12. Podíl 1 se zapsal na zvláštní linku, tzv. „linku podílu“, číslo 16 se smazalo a nahradilo zbytkem 4. Pak se dělitel posunul o jedno místo doprava a celý proces se opakoval, postupně se na desce vyskytovaly následující mezivýsledky. Citované části Bhāskarova pravidla jsou zapsány italikou.

____	1620	*položíš dělitele pod dělence* tak,
	12	aby levé číslice byly pod sebou
1	1620	[16 : 12 = 1 (zb. 4)]
	12	podíl 1 se zapsal na linku podílu
1	420	*odečteš vhodný násobek dělitele*
	12	číslo 16 se nahradilo zbytkem dělení
1	420	*posuň dělitele*
	12	
13	420	[42 : 12 = 3 (zb. 6)]
	12	podíl 3 se zapsal na linku podílu
13	60	*odečteš vhodný násobek dělitele*
	12	číslo 42 se nahradilo zbytkem dělení
13	60	*posuň dělitele*
	12	
135	60	[60 : 12 = 5 (zb. 0)]
	12	podíl 5 se zapsal na linku podílu
135		*odečteš vhodný násobek dělitele*
	12	číslo 60 se smazalo, dělilo se beze zbytku

Za zmínku stojí i Bhāskarova poznámka o krácení – upozornil na fakt, že místo 1 620 : 12 se může dělit 540 : 4 nebo 405 : 3.

Tato metoda se objevila v Indii asi ve 4. století n. l., možná i dříve. Z Indie se rozšířila do arabského světa, vyskytuje se v arabských dílech z 9. století.

[57] Viz sloka Lila/ii.17 a připojený komentář *Manoranjana* (15. stol.), podle [Col], str. 8, [MaVM].

Odtud se dostala do Evropy, kde byla známá jako metoda *galea* nebo *batello*. V evropské variantě se čísla získaná z jednotlivých kroků postupně zapisovala a škrtala, protože se psalo na papír, kde se nemohlo snadno mazat. Tato metoda byla v Evropě velmi oblíbená v 15. až 18. století.

Předchozí příklad by podle metody *galea* vypadal takto:

$$
\begin{array}{llllll}
 & & \cancel{1} & & \cancel{1}\cancel{1} & \\
4 & & \cancel{4}6 & & \cancel{4}\cancel{6} & \\
\cancel{1}\cancel{6}20 & 1 & \cancel{1}\cancel{6}\cancel{2}0 & 13 & \cancel{1}\cancel{6}\cancel{2}\cancel{0} & 135 \\
\cancel{1}\cancel{2}2 & & \cancel{1}\cancel{2}\cancel{2}2 & & \cancel{1}\cancel{2}\cancel{2}\cancel{2} & \\
1 & & \cancel{1}1 & & \cancel{1}\cancel{1} &
\end{array}
$$

Pro zajímavost uvedeme ještě dva příklady na dělení, které předložil Mahāvīra.[58]

> **GaSaSa/ii.21**
> *Řekni mi podíl jedné osoby, když* 2 701 *kusů zlata je rozděleno mezi* 37 *osob.*
>
> **GaSaSa/ii.26**
> *Drahokamy v množství* 36 261 *jsou darovány* 9 *osobám* [stejným dílem]. *Kolik dostane jedna osoba?*

Dělení bývalo ve starověku a středověku považováno za velmi obtížnou operaci, například mezopotámští počtáři složitější dělení $a : b$ nahrazovali násobením převrácenou hodnotou $a \cdot \frac{1}{b}$ a používali k tomu tabulky s uvedenými převrácenými hodnotami. Staří Egypťané si uvědomovali, že dělení a násobení jsou inverzní operace, a dělení prováděli postupným zdvojnásobováním dělitele, dokud z vhodných násobků nesložili dělence.

Dělení posouváním dělitele se vyskytuje rovněž v dílech al-Chwárizmího, al-Nasawiho a dalších. Ve středověkých latinských dílech se tento způsob nazýval *antirioratio*.

V Evropě popsal základní operace s celými čísly například Jordanus Nemorarius (asi 1225 až 1260)[59] a Jan Sacrobosco.

6.6. Druhá mocnina

Sanskrtský název druhé mocniny je *varga* nebo *kṛti*. Slovo *varga* znamená „řady“ nebo „vojsko“. Význam slova *varga* je jasný z grafického znázornění čtverce $n \times n$, který může být rozdělen do n řad, z nichž každá obsahuje n

[58] Ve druhém příkladu bylo číslo 36 261 vyjádřeno jako 30 000 + 1 + (60 + 200 + 6 000), podle [Ran], str. 12.

[59] Známý také jako Jordanus de Nemore.

jednotkových čtverců. Slovo *kṛti* znamená „činnost, vytváření, akce“ a souvisí s představou přesného provedení, pravděpodobně geometrické konstrukce.

V matematice byla tímto termínem označována druhá mocnina nebo čtverec jako geometrický obrazec i jeho plocha. Āryabhaṭa I. napsal:[60]

> **Ar/ii.3** (část)
> *Čtverec a jeho plocha se nazývají varga. Součin dvou stejných veličin je také varga.*

V matematických pojednáních se užívaly oba termíny *varga* i *kṛti*, ale přednost se dávala termínu *varga*.

Výpočet druhé mocniny byl základní operací v indické aritmetice, a to přesto, že tato metoda není jednodušší než přímé násobení. Pravděpodobně její důležitost souvisela s tím, že výpočet druhé odmocniny je inverzní operací k výpočtu druhé mocniny. Brahmagupta popsal metodu velmi stručně, nikoli však v kapitole o aritmetice, ale až v dodatku.

Před vysvětlením postupu umocňování připomeneme, že jednotlivé číslice v daném čísle se „počítaly“ zprava doleva; poslední číslice byla ta, která stála co nejvíc vlevo, tedy číslice na místě nejvyššího řádu.

Mahāvīra popsal umocňování takto:[61]

> **GaSaSa/ii.31**
> *Vezmi čtverec poslední číslice a pak násob tu poslední* [číslici], *potom co je zdvojnásobená a posunutá* [doprava o jedno místo], *zbývajícími místy. Každou ze zbývajících číslic posuň* [o jedno místo] *a zacházej s ní podobně. To je metoda umocňování.*

Bhāskara II. uvedl:[62]

> **Lila/ii.18–19** (část)
> *Pravidlo pro druhou mocninu veličiny: dvě sloky. Násobení dvou stejných čísel je druhá mocnina. Umísti čtverec poslední* [číslice] *nad ni a pak součin dvojnásobku poslední* [číslice] *a ostatních* [tj. zbývajících] *nad ně. Pak posuň číslo bez poslední číslice a opakuj postup.*

Postup výpočtu vycházel ze vzorce

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$\text{resp.} \qquad [a+(b+c)]^2 = a^2 + 2a(b+c) + (b+c)^2$$

[60] Podle [Cla], str. 21.
[61] Podle [Ran], str. 14.
[62] Podle [Col], str. 8–9.

$$\text{nebo} \qquad [(a+b)+c]^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2. \tag{6.1}$$

Výpočet druhé mocniny předvedeme na příkladu $125^2 = 15\,625$.[63] Důsledné zapisování odpovídajících řádů pod sebou umožňovalo vynechávat nuly, které by se v dalších krocích výpočtu stejně nahrazovaly jinými číslicemi. Citované části Bhāskarova pravidla jsou zapsány italikou.

125	zapiš číslo
1	$[1^2 = 1]$
125	*umísti čtverec poslední číslice nad ni*
1	
25	číslice 1 se smazala, její dvojnásobek se zapsal pod zbývající
2	$[2 \cdot 1 = 2]$
150	$[2 \cdot 25 = 50, \quad 100 + 50 = 150]$
25	*součin dvojnásobku poslední číslice a ostatních*
150	
25	*posuň číslo bez poslední číslice*

Tím bylo dokončeno první kolo operací, dál se pokračovalo stejným způsobem.

154	$[2^2 = 4, \quad 150 + 4 = 154]$
25	*umísti čtverec poslední číslice nad ni*
154	
5	číslice 2 se smazala, její dvojnásobek se zapsal pod zbývající
4	$[2 \cdot 2 = 4]$
1560	$[4 \cdot 5 = 20, \quad 1\,540 + 20 = 1\,560]$
5	*součin dvojnásobku poslední číslice a ostatních*
1560	
5	*posuň číslo bez poslední číslice*

Skončilo druhé kolo operací, dál se postupovalo stejně.

15625	$[5^2 = 25, \quad 15\,600 + 25 = 15\,625]$
5	*umísti čtverec poslední číslice nad ni*

Protože už nezbývaly žádné číslice, výpočet skončil. Nakonec se smazala i poslední číslice 5 a na desce zůstala pouze hledaná druhá mocnina: 15 625.

Podle Brahmagupty bylo možné začínat umocňování na místě jednotek, celý proces tak probíhal „odzadu“. Celý postup popíšeme na stejném příkladu. Myš-

[63] Podle [DS1], str. 157–159.

lenka je stejná, jednotlivé kroky uvedeme stručněji. Jednotlivé kroky prvního kola operací můžeme zapsat vedle sebe do řádku:

	25	25	1225	1225
125	125	12	12	12
		10		

Stejným způsobem se výpočet dokončil:

1625	1625	5625	5625	15625
12	1	1	1	
	4			

Další metody umocňování

a) Někteří autoři základní vzorec $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$ zobecnili pro více sčítanců, při výpočtu tedy využívali vztah

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} 2\, a_i\, a_j\,.$$

Mahāvīra popisuje umocňování takto:[64]

GaSaSa/ii.30
Součet čtverců dvou nebo více částí čísla dohromady s jejich součiny každého s ostatními násobenými dvěma dává čtverec.

V originále je uvedeno slovo *sthāna*, které bývalo užíváno ve smyslu „pozice zápisu“ při vyjádření čísla v poziční desítkové soustavě. Pozdější komentátor je přeložil jako „část“. Například číslo 125 může být rozděleno na části jako $125 = 100 + 20 + 5$ nebo jako $125 = 50 + 40 + 35$ a v obou případech lze aplikovat uvedené pravidlo. Platí:

$$\begin{aligned}125^2 &= 100^2 + 20^2 + 5^2 + 2\cdot 100\cdot 20 + 2\cdot 100\cdot 5 + 2\cdot 20\cdot 5 =\\ &= 10\,000 + 400 + 25 + 4\,000 + 1\,000 + 200 = 15\,625\end{aligned}$$

stejně jako

$$\begin{aligned}125^2 &= 50^2 + 40^2 + 35^2 + 2\cdot 50\cdot 40 + 2\cdot 50\cdot 35 + 2\cdot 40\cdot 35 =\\ &= 2\,500 + 1\,600 + 1\,225 + 4\,000 + 3\,500 + 2\,800 = 15\,625.\end{aligned}$$

Není tedy podstatné, zda je slovo *sthāna* chápáno jako „pozice“ nebo jako „část“.[65]

[64] Podle [Ran], str. 13.
[65] Podle [DS1], str. 161.

b) Někdy indičtí matematikové nabízeli k umocňování ještě další metodu založenou na identitě

$$n^2 = (n-a)(n+a) + a^2.$$

Brahmagupta popsal postup takto:[66]

BrSpSi/xii.63 (část)
Nebo libovolné číslo přičti a odečti od množství, součin součtu a rozdílu přidaný ke čtverci toho libovolného čísla je požadovaný čtverec.

Libovolné číslo se zvolilo tak šikovně, aby se součin $(n-a)(n+a)$ snadno vypočítal. Například 25^2 je možné počítat tak, že se zvolí číslo 5 a podle uvedeného postupu se počítá $25^2 = (25+5)\cdot(25-5)+5^2 = 30\cdot 20 + 25 = 625$.

Uvedeme ještě jeden Bhāskarův vyřešený příklad:[67]

Lila/ii.20
Příklad. Řekni mi, drahá ženo, druhé mocniny devíti, čtrnácti, tří set bez tří a deset tisíc zvětšených o pět, znáš-li metodu počítání druhé mocniny.

Vyjádření: 9, 14, 297, 10 005.

[Odpověď.] *Postup přímý, druhé mocniny jsou nalezeny:* 81, 196, 88 209, 100 100 025.

Nebo vezmi 4 *a* 5*, části devíti. Jejich zdvojnásobený součin* 40*, sečtený s jejich druhými mocninami* 41*, vytvoří* 81.

Tak vezmi 10 *a* 4*, části čtrnácti. Jejich součin je* 40*, zdvojnásobený je* 80*; což, přičtené k* 116*, součtu druhých mocnin* 100 *a* 16*, vytvoří celou druhou mocninu* 196.

Nebo vezmi 6 *a* 8*. Jejich součin je* 48*, zdvojnásobený je* 96*; což přičtené k součtu druhých mocnin* 36 *a* 64*, jmenovitě* 100*, vytvoří totéž* 196.

Opět, 297*, zmenšené o tři je* 294 *a na jiném místě zvětšené o totéž je* 300*. Jejich součin je* 88 200*; k němu přičtená druhá mocnina tří, tj.* 9*, součet je stejný jako před tím druhá mocnina* 88 209.

Kromě přímého umocňování použil autor při řešení i další dříve uvedené metody:

$$9^2 = (4+5)^2 = 4^2 + 5^2 + 2\cdot 4\cdot 5 = 16 + 25 + 40 = 41 + 40 = 81,$$
$$14^2 = (10+4)^2 = 10^2 + 4^2 + 2\cdot 10\cdot 4 = 100 + 16 + 80 = 196,$$
$$14^2 = (6+8)^2 = 6^2 + 8^2 + 2\cdot 6\cdot 8 = 36 + 64 + 96 = 196,$$
$$297^2 = (297-3)(297+3) + 3^2 = 294\cdot 300 + 9 = 88\,200 + 9 = 88\,209.$$

[66] Podle [Col], str. 363.
[67] Podle [Col], str. 9.

c) Mahāvīra a Śrīdhara popsali také výpočet n^2 pomocí součtu prvních n lichých čísel

$$n^2 = 1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = \sum_{i=1}^{n} (2i - 1).$$

Jejich tvrzení byla velmi podobná, uvedeme jen Mahāvīrovo:[68]

GaSaSa/ii.29 (část)
Nebo součet aritmetické posloupnosti, ve které jednička je první člen a dvojka je diference, a počet členů je tolik [co se umocňuje] *dává požadovaný čtverec.*

d) Nārāyaṇa pro nalezení druhé mocniny čísla A ještě přidal vyjádření pomocí vzorce[69]

$$A^2 = (a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab.$$

Tyto postupy byly používány pouze pro výpočet druhých mocnin přirozených čísel. Metody na umocňování zlomků byly popsány v kapitolách věnovaných počítání se zlomky.

6.7. Druhá odmocnina

Indové odmocninu nazývali *mūla* nebo *pada*. Běžný význam slova *mūla* je kořen rostliny nebo stromu, přeneseně se užívalo ve smyslu spodek, základ, příčina, počátek. Slovo *pada* znamená dolní část nohy, spodek, základ, část, příčina. Společný význam obou je tedy spodek nebo základ, příčina, počátek. Je zřejmé, že Indové termínem *varga-mūla* (druhá odmocnina) označovali „příčinu“ či „původ“ druhé mocniny nebo geometricky stranu uvažovaného čtverce.

Nejstarší výraz pro kořen je *mūla*, který se vyskytoval už v díle *Anuyogadvārasūtra*. Termín *pada* se objevil později, asi v 7. stol. n. l., poprvé v díle Brahmagupty. V *Śulbasūtrách* se pro druhou odmocninu užíval výraz *karaṇī*, který v geometrii znamenal „strana“. Později se tento termín vyhradil pro označení iracionality, tj. druhé odmocniny, která „nemůže být vyčíslena“, ale lze ji vyjádřit úsečkou.

Při výpočtu druhé odmocniny se jednotlivé číslice daného čísla rozdělily podle pozic na *varga* (liché) a *avarga* (sudé). Rozdělení probíhalo zprava doleva; jednotky byly vždy na liché pozici. Āryabhaṭa formuloval výpočet velmi stručně:[70]

Ar/ii.4
Vždy vyděl avarga [sudé místo] *dvojnásobkem druhé odmocniny* [až k sudému místu]*; po odečtení čtverce* [podílu] *od varga* [lichého místa]*, podíl zapsaný na jiném místě* [na lince kořene] *dává kořen.*

[68] Podle [Ran], str. 13.
[69] Podle [DS1], str. 162.
[70] Podle [Cla], str. 22.

Výpočet druhé odmocniny popisovali Mahāvīra, Śrīdhara a Śrīpati. Bhāskara II. uvedl:[71]

Lila/ii.21

Pravidlo pro druhou odmocninu: jedna sloka.

Odečti od posledního lichého místa největší čtverec. Zapiš dvojnásobek jeho kořene [na linku kořene] *a po vydělení dalšího sudého místa tímto odečti čtverec podílu od dalšího lichého místa a zapiš dvojnásobek podílu na linku. Vyděl* [číslem na lince] *další sudé místo a odečti čtverec podílu od následujícího lichého a zapiš dvojnásobek podílu na linku. Takto opakuj operace* [dokud číslice nebudou vyčerpané]. *Polovina* [čísla na lince] *je kořen.*

Na příkladu $\sqrt{54\,756} = 234$ ukážeme postup výpočtu.

		$\vert$	–	$\vert$	–	$\vert$	
		5	4	7	5	6	zapsalo se číslo, označily sudé (–) a liché ($\vert$) pozice
	–	4					*odečti od posledního lichého místa největší čtverec*
		1					tj. největší čtverec menší než 5 [$5 - 2^2 = 1$]
4							*zapiš dvojnásobek jeho kořene na linku* [$2 \cdot 2 = 4$]
		1	4				*vyděl další sudé místo tímto* [14 : 4 = 3 (zb. 2)]
	–	1	2				odečetl se součin [$4 \cdot 3 = 12$]
			2				tj. číslo 14 se nahradilo zbytkem dělení 2
							podíl 3 se poznamenal na jiném místě tabulky
			2	7			připojila se číslice na další liché pozici
		–		9			*odečti čtverec podílu od dalšího lichého místa*
			1	8			[$27 - 3^2 = 18$]
46							*zapiš dvojnásobek podílu na linku* [$2 \cdot 3 = 6$]
							dokončeno první kolo operací
			1	8	5		*vyděl další sudé místo tímto* [185 : 46 = 4 (zb. 1)]
		–	1	8	4		odečetl se součin [$4 \cdot 46 = 184$]
					1		tj. číslo 185 se nahradilo zbytkem dělení 1
							podíl 4 se poznamenal na jiném místě tabulky
					1	6	připojila se číslice na další liché pozici
				–	1	6	*odečti čtverec podílu od dalšího lichého místa*
						0	[$16 - 4^2 = 0$]
468							*zapiš dvojnásobek podílu na linku* [$2 \cdot 4 = 8$]

Nakonec se vzala polovina čísla na lince, to byl hledaný kořen: $468 : 2 = 234$.

Tento způsob odmocňování je založen na vzorci (6.1), konkrétně v našem příkladu

$$\begin{aligned}234^2 &= [(200+30)+4]^2 = (200+30)^2 + 2\cdot(200+30)\cdot 4 + 4^2 = \\ &= 200^2 + 2\cdot 200\cdot 30 + 30^2 + 2\cdot 230\cdot 4 + 4^2 = \\ &= 40\,000 + 12\,000 + 900 + 1\,840 + 16.\end{aligned}$$

[71] Podle [Col], str. 9–10. Na lince je podle Bhāskary dvojnásobek kořene, zatímco podle Āryabhaṭova mírně modifikovaného postupu je tam přímo kořen.

V některých případech může algoritmus selhat – když je zbytek po dělení malý, může vycházet rozdíl záporný. Potom je nutné počítat znovu a při „problematickém“ dělení vzít menší podíl a větší zbytek. Problém se ukáže například při výpočtu $\sqrt{61\,504} = 248$.

$$
\begin{array}{lcccccccl}
 & & \vert & - & \vert & - & \vert & & \\
 & & 6 & 1 & 5 & 0 & 4 & & \text{zapsalo se číslo, označily sudé } (-) \text{ a liché } (\vert) \text{ pozice} \\
 & - & 4 & & & & & & \textit{odečti od posledního lichého místa největší čtverec} \\
 & & 2 & & & & & & [6-2^2=2] \\
\underline{4\quad} & & & & & & & & \textit{zapiš dvojnásobek jeho kořene na linku } [2\cdot 2=4] \\
 & & 2 & 1 & & & & & \textit{vyděl další sudé místo tímto } [21:4=5 \text{ (zb. 1)}] \\
 & & & 1 & & & & & \text{číslo 21 se nahradilo zbytkem dělení 1} \\
 & & & 1 & 5 & & & & \text{připojila se číslice na další liché pozici} \\
 & & - & 2 & 5 & & & & \textit{odečti čtverec podílu od dalšího lichého místa}
\end{array}
$$

Rozdíl je záporný, podíl 5 byl příliš velký, proto je potřeba se vrátit k dělení a uvažovat $21 : 4 = 4$ (zb. 5).

$$
\begin{array}{lcccccccl}
 & & \vert & - & \vert & - & \vert & & \\
 & & 6 & 1 & 5 & 0 & 4 & & \text{zapsalo se číslo, označily sudé } (-) \text{ a liché } (\vert) \text{ pozice} \\
 & - & 4 & & & & & & \textit{odečti od posledního lichého místa největší čtverec} \\
 & & 2 & & & & & & [6-2^2=2] \\
\underline{4\quad} & & & & & & & & \textit{zapiš dvojnásobek jeho kořene na linku } [2\cdot 2=4] \\
 & & 2 & 1 & & & & & \textit{vyděl další sudé místo tímto } [21:4=4 \text{ (zb. 5)}] \\
 & & & 5 & & & & & \text{číslo 21 se nahradilo zbytkem dělení 5} \\
 & & & 5 & 5 & & & & \text{připojila se číslice na další liché pozici} \\
 & & - & 1 & 6 & & & & \textit{odečti čtverec podílu od dalšího lichého místa} \\
 & & & 3 & 9 & & & & [55-4^2=39] \\
\underline{48\quad} & & & & & & & & \textit{zapiš dvojnásobek podílu na linku } [2\cdot 4=8] \\
 & & & & & & & & \text{dokončeno první kolo operací} \\
 & & & 3 & 9 & 0 & & & \textit{vyděl další sudé místo tímto } [390:48=8 \text{ (zb. 6)}] \\
 & & & & & 6 & & & \text{číslo 390 se nahradilo zbytkem dělení 6} \\
 & & & & & 6 & 4 & & \text{připojila se číslice na další liché pozici} \\
 & & & & - & 6 & 4 & & \textit{odečti čtverec podílu od dalšího lichého místa} \\
 & & & & & & 0 & & [64-8^2=0] \\
\underline{496\quad} & & & & & & & & \textit{zapiš dvojnásobek podílu na linku } [2\cdot 8=16]
\end{array}
$$

Hledaná odmocnina byla polovinou čísla na lince, tj. $496 : 2 = 248$.

Nejstarším historicky doloženým algoritmem výpočtu druhé odmocniny je čínská metoda, která je popsána například ve 4. kapitole textu *Matematika v devíti kapitolách* (viz [Hu]). Úloha byla chápána geometricky, prováděl se „rozklad čtverce“, tj. hledala se strana čtverce, jehož obsah byl znám. Metoda byla založena na vzorci $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, při výpočtu se však používala lineární substituce a využíval se vztah $ax^2 + bx = (ax+b)x$, který byl později využíván v tzv. Hornerově schematu. Podobným způsobem popsal výpočet odmocnin i al-Káší. V řecké literatuře je výpočet druhé odmocniny popsán v komentáři Theóna z Alexandrie (asi 335 až 405) k Ptolemaiově astronomické práci *Almagest*.

V Evropě se objevil výpočet druhé odmocniny v podobné podobě jako indický, například v dílech rakouského matematika Georga von Peuerbacha (1423–1461) a francouzských matematiků N. Chuqueta a Estienna de La Roche (1470–1530). Ještě ve 20. století se takto učilo odmocňovat na základních školách.

6.8. Třetí mocnina

Indický název třetí mocniny je *ghana*. Původně slovo *ghana* znamenalo těleso, tento termín se vyskytoval ve všech matematických dílech. Používal se v geometrickém i aritmetickém smyslu, tj. sloužil k označení tělesa – krychle, stejně jako součinu čísla, které se násobí třikrát samo sebou. Někdy se pro třetí mocninu užíval i výraz *bṛnda*.

Āryabhaṭa I. definoval:[72]

Ar/ii.3 (část)
Součin tří stejných veličin a těleso mající dvanáct [stejných] *hran se nazývá ghana.*

Metoda na výpočet třetí mocniny byla známá v Indii už v 5. stol. n. l. Āryabhaṭa I. tuto metodu znal, i když ji nepovažoval za tak důležitou jako inverzní operaci, tj. výpočet třetí odmocniny.

Pro výpočet se používaly vzorce

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$[a+(b+c)]^3 = a^3 + 3a^2(b+c) + 3a(b+c)^2 + (b+c)^3$$

$$\text{nebo} \qquad [(a+b)+c]^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3. \tag{6.2}$$

Mahāvīra pro výpočet třetí mocniny uvedl:[73]

GaSaSa/ii.47
Třetí mocnina poslední [levé] *číslice a trojnásobek čtverce* [té číslice] *musí být posunutý* [o jedno místo doprava] *a násobený zbývajícími* [místy]*; pak čtverec zbývajících* [míst] *se musí posunout a násobit trojnásobkem poslední číslice. Tyto* [tři veličiny] *se musí umístit na pozice* [a sečíst]*. Takové je pravidlo.*

[72] Podle [Cla], str. 21.
[73] Podle [Ran], str. 17.

Bhāskara II. popsal výpočet třetí mocniny trochu podrobněji:[74]

Lila/ii.23–25
Pravidlo pro třetí mocninu: tři sloky.
Postupné násobení tří stejných veličin je třetí mocnina. Třetí mocnina poslední [číslice] *se musí zapsat a dále čtverec poslední* [číslice] *násobený trojnásobkem první* [číslice] *a pak čtverec první* [číslice] *se vynásobí poslední ztrojnásobenou a nakonec třetí mocnina první* [číslice]; *toto se vždy posune o jedno místo a sečtené dává třetí mocninu.*
Dané číslo [mající více než dvě číslice] *se rozdělí na dvě části, jedna z nich se pak bere jako poslední* [ta druhá jako první] *a tímto způsobem opakovaně* [pokud je příležitost].
Nebo stejný proces pro nalezení třetí mocniny může začít od prvního místa čísla buď pro třetí mocninu nebo pro druhou.

Metodu výpočtu třetí mocniny popíšeme na příkladu $1\,234^3 = 1\,879\,080\,904$.[75]

Dané číslo má čtyři číslice. Algoritmus se aplikoval nejprve na dvě levé číslice, tedy v prvním kroku se počítalo pouze s číslicí 1 („poslední“) a číslicí 2 („první“) a umocňovalo se 12^3.

1	*třetí mocnina poslední číslice* [$1^3 = 1$]
6	*čtverec poslední číslice násobený trojnásobkem první* [$1^2 \cdot 3 \cdot 2 = 6$] zapsal se na následující pozici, tj. jednotky byly posunuté o 1 místo doprava
12	*čtverec první číslice se vynásobí poslední ztrojnásobenou* [$2^2 \cdot 3 \cdot 1 = 12$] zapsal se o jedno místo vpravo
8	*třetí mocnina první číslice* [$2^3 = 8$] zapsala se o jedno místo vpravo
1728	součet je $12^3 = 1\,728$

Nyní se připojila další číslice, tj. 3. Celkem se počítalo s číslem 123, kde 12 představovalo *poslední* číslo a 3 *první*. Umocňovalo se 123^3 stejným postupem jako v prvním kroku.

1728	*třetí mocnina poslední číslice* [$12^3 = 1\,728$] využil se výsledek z prvního kroku
1296	*čtverec poslední číslice násobený trojnásobkem první* [$12^2 \cdot 3 \cdot 3 = 1\,296$] zapsal se o jedno místo vpravo
324	*čtverec první číslice se vynásobí poslední ztrojnásobenou* [$3^2 \cdot 3 \cdot 12 = 324$] zapsal se o jedno místo vpravo
27	*třetí mocnina první číslice* [$3^3 = 27$] zapsala se o jedno místo vpravo
1860867	součet je $123^3 = 1\,860\,867$

Nakonec se přidala zbývající číslice, tj. 4. Opět se opakoval stejný postup, v němž 123 bylo *poslední* číslo a 4 *první*.

[74] Podle [Col], str. 10.
[75] Podle [DS1], str. 165–166.

1860867	*třetí mocnina poslední číslice* $[123^3 = 1\,860\,867]$ využil se výsledek z druhého kroku
181548	*čtverec poslední číslice násobený trojnásobkem první* $[123^2 \cdot 3 \cdot 4 = 181\,548]$ zapsal se o jedno místo vpravo
5904	*čtverec první číslice se vynásobí poslední ztrojnásobenou* $[4^2 \cdot 3 \cdot 123 = 5\,904]$ zapsal se o jedno místo vpravo
64	*třetí mocnina první číslice* $[4^3 = 64]$ zapsala se vpravo
1879080904	součet je $1234^3 = 1\,879\,080\,904$

Kromě tohoto přímého postupu se mohl použít i postup obrácený, kdy výpočet začínal od jednotek.

Další metody na výpočet třetí mocniny

a) Bhāskara II. zmínil ještě další variantu výpočtu:[76]

Lila/ii.23–25 (část)
Nebo trojnásobek daného čísla násobený svými dvěma částmi přičtený k součtu třetích mocnin těch částí dává třetí mocninu.

Jednalo se pouze o jiné vyjádření základního vzorce

$$A^3 = (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 3ab(a+b) + a^3 + b^3 = 3abA + a^3 + b^3.$$

b) K předchozím postupům ještě Bhāskara II. připojil:[77]

Lila/ii.23–25 (část)
Nebo druhá odmocnina daného čísla umocněná na třetí a násobená sama sebou dá třetí mocninu daného čísla.

$$(\sqrt{a})^3 \cdot (\sqrt{a})^3 = a^3.$$

V následujícím příkladu vysvětlil výpočet $9^3 = 729$ takto:[78]

Lila/ii.26 (část)
Dané číslo devět, jeho druhá odmocnina 3, *umocněná na třetí* 27. *Čtverec toho, tj.* 729, *je třetí mocninou devíti. Krátce: druhá odmocnina z třetí mocniny je totéž jako třetí mocnina druhé odmocniny.*

Bhāskara tímto vysvětlil, že při umocňování a odmocňování je možno pořadí operací zaměnit, tj.

$$(\sqrt{9})^3 = 27 = \sqrt{9^3}, \qquad \sqrt{a^3} = (\sqrt{a})^3.$$

[76] Podle [Col], str. 10.
[77] Komentátor Ganeśa zmínil, že takto je možné zavést i vyšší mocniny než třetí. Podrobněji bude uvedeno v kapitole o algebře.
[78] Podle [Col], str. 11.

c) Další možnosti výpočtu třetí mocniny uvedl Mahāvīra. Jeho metody můžeme vyjádřit vzorci[79]

$$n^3 = n(n+a)(n-a) + a^2(n-a) + a^3,$$
$$n^3 = n + 3n + 5n + \cdots + (2n-1)n = n\sum_{i=1}^{n}(2i-1),$$
$$n^3 = n^2 + (n-1)[1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)].$$

d) Vyjádření n^3 jako součet konečné posloupnosti popsali například Śrīdhara Mahāvīra a Nārāyaṇa. Mahāvīra vyjádřil slovy vzorec[80]

$$n^3 = 3\sum_{i=2}^{n} i(i-1) + n.$$

6.9. Třetí odmocnina

Pro třetí odmocninu se používal název *ghana-mūla* nebo *ghana-pada*. První vysvětlení výpočtu třetí odmocniny se vyskytuje v práci *Āryabhaṭīya*. Jednotlivé číslice čísla, jehož třetí odmocnina se hledala, byly rozděleny do trojic (vždy jedno místo *ghana* a dvě *aghana*). Při popisu se tedy pozice jednotek daného čísla označovala jako *ghana*, pozice desítek byla *první aghana*, pozice stovek byla *druhé aghana*, pozice tisíců byla *ghana*, pozice desetitisíců byla *první aghana*, pozice stotisíců byla *druhé aghana* atd. Vyjádření Āryabhaṭy I. bylo velmi stručné:[81]

Ar/ii.5
Vyděl druhé místo aghana trojnásobkem čtverce třetí odmocniny [předchozí] *ghana. Čtverec podílu násobeného trojnásobkem předchozího* [třetí odmocniny] *odečti od prvního místa aghana a třetí mocninu* [podílu] *odečti od místa ghana;* [podíl zapsaný na jiném místě (na lince kořene) dává třetí odmocninu].

Stejná metoda na výpočet třetí odmocniny se vyskytovala ve všech matematických dílech, Brahmagupta ji popsal takto:[82]

BrSpSi/xii.7
Dělitel druhého místa aghana je trojnásobek čtverce třetí odmocniny; čtverec podílu vynásobený třemi a předchozím [kořenem] *musí být odečten od následujícího* [místa aghana vpravo] *a třetí mocnina* [podílu] *od místa ghana;* [opakovaný postup dává] *třetí odmocninu.*

[79] Viz sloky GaSaSa/ii.43 a GaSaSa/ii.44, podle [Ran], str. 16.
[80] Viz sloka GaSaSa/ii.45, podle [Ran], str. 17.
[81] Podle [Cla], str. 24.
[82] Podle [Col], str. 280.

Podobně zformulovali pravidla Śrīdhara a Āryabhaṭa II. Postup předvedeme na příkladu $\sqrt[3]{1\,860\,867} = 123$. Jednotlivé číslice daného čísla byly nejprve rozděleny do trojic – jedno místo *ghana* a dvě *aghana*. Číslice až k poslednímu místu *ghana* (zleva doprava) tvořily první číslo třetí odmocniny atd. Během práce na desce se nejprve označily číslice jako *ghana* (budeme značit $|$), a *aghana* (budeme značit $-$).

		$\vert$	$-$	$-$	$\vert$	$-$	$-$	$\vert$	
		1	8	6	0	8	6	7	zapsalo se číslo a označily číslice
	$-$	1							od posledního místa *ghana* se odečetla
		0							největší třetí mocnina $[1 - 1^3 = 0]$
1									kořen se zapsal na linku
			8						*dělitel druhého místa aghana je trojnásobek*
									čtverce třetí odmocniny $[3 \cdot 1^2 = 3]$
									$[8 : 3 = 2$ (zb. 2)$]$
		$-$	6						odečetl se součin $[3 \cdot 1^2 \cdot 2 = 6]$
			2						tj. číslo 8 se nahradilo zbytkem dělení 2,
12									podíl 2 se zapsal na na linku
			2	6					připojila se první číslice *aghana*
									čtverec podílu vynásobený třemi a kořenem
		$-$	1	2					$[2^2 \cdot 3 \cdot 1 = 12]$ *musí být odečten*
			1	4					$[26 - 12 = 14]$
			1	4	0				*musí být odečtena třetí mocnina*
		$-$			8				*podílu* $[2^3 = 8]$ *od místa ghana*
			1	3	2				$[140 - 8 = 132]$
									dokončeno první kolo operací
			1	3	2	8			*dělitel druhého místa aghana je trojnásobek*
									čtverce třetí odmocniny $[3 \cdot 12^2 = 432]$
									$[1\,328 : 432 = 3$ (zb. 32)$]$
		$-$	1	2	9	6			odečetl se součin $[3 \cdot 12^2 \cdot 3 = 1\,296]$
					3	2			tj. číslo 1 328 se nahradilo zbytkem dělení 32,
123									podíl 3 se zapsal na na linku
					3	2	6		připojila se první číslice *aghana*
									čtverec podílu vynásobený třemi a kořenem
				$-$	3	2	4		$[3^2 \cdot 3 \cdot 12 = 324]$ *musí být odečten*
							2		$[326 - 234 = 2]$
							2	7	*musí být odečtena třetí mocnina*
						$-$	2	7	*podílu* $[3^3 = 27]$ *od místa ghana*
								0	$[27 - 27 = 0]$

Výpočet skončil, protože všechny číslice byly vyčerpány. Třetí odmocninou bylo číslo na lince, tj. 123. Protože nezůstal žádný zbytek, výsledek byl přesný. Výpočet vycházel ze vzorce (6.2):

$$
\begin{aligned}
123^3 &= [(100+20)+3]^3 = (100+20)^3 + 3 \cdot 120^2 \cdot 3 + 3 \cdot 120 \cdot 3^2 + 3^3 = \\
&= 100^3 + 3 \cdot 100^2 \cdot 20 + 3 \cdot 100 \cdot 20^2 + 20^3 + 129\,600 + 3\,240 + 27 = \\
&= 1\,000\,000 + 600\,000 + 120\,000 + 8\,000 + 129\,600 + 3\,240 + 27.
\end{aligned}
$$

Kvůli nedostatku místa na desce bylo nutné během počítání některé číslice mazat. Tři číslice, které tvořily skupinu (jedno místo *ghana* a dvě *aghana*), se považovaly za celek. Číslice až k dalšímu druhému místu *aghana* se musely přepsat dolů a dělení se provádělo odděleně, protože se podíl získával zkusmo. Mohlo se stát, podobně jako při výpočtu druhé odmocniny, že metoda selhala, když byl zbytek dělení malý. V tom případě bylo nutné dělení opakovat a vzít menší podíl s větším zbytkem.

Třetí odmocninu zručně počítali v Číně, jejich metoda byla analogická jako pro druhou odmocninu, při výpočtu koeficientů se práce zjednodušila využitím vztahu $ax^3 + bx^2 + cx = ((ax + b)x + c)x$.

6.10. Zlomky

V Indii byly zlomky známé velmi dávno. Zmínky o zlomcích můžeme najít už v nejstarších védských textech, například *Ṛgveda* (asi 1000 př. n. l.) obsahuje termíny *ardha* ($\frac{1}{2}$) a *tri-pāda* ($\frac{3}{4}$). V díle *Maitrāyaṇi Saṁhitā* byly zmíněny zlomky *kalā* ($\frac{1}{16}$), *kuṣṭha* ($\frac{1}{12}$), *śapha* ($\frac{1}{8}$), *pāda* ($\frac{1}{4}$). V nejstarších indických dílech o geometrii, tzv. *Śulbasūtrách* (asi 500 př. n. l.), se vyskytují zlomky při popisu řešení úloh.[83]

Na rozdíl od starých Egypťanů, kteří používali pouze zlomky s čitatelem rovným jedné (tzv. kmenné zlomky),[84] v Indii počítali i se zlomky s čitatelem větším než jedna. Zlomek $\frac{3}{4}$ (*tri-pāda*, tj. tři stopy) zmiňovaný v *Ṛgvedě* je pravděpodobně nejstarším známým zlomkem s větším čitatelem, který je dochovaný v indické literatuře.

Zlomky byly potřebné zejména při vyjadřování jednotek času, délky, váhy, objemu atd. Staré práce o aritmetice začínaly uvedením různých jednotek a obsahovaly speciální pravidla na zjednodušení zápisu série měr pomocí vhodných zlomků. Systémy měr byly popsány názvy, které se v jednotlivých oblastech i obdobích lišily.

Váhy a míry

V každé společnosti existovalo dělení jednotek délky, váhy, peněz atd. na menší jednotky kvůli tomu, aby se mohlo lépe vyjádřit i velmi malé množství. V práci *Śatapatha-Brāhmaṇa* (asi 8. stol. př. n. l.) je popsáno přesné dělení času:[85]

$$\begin{aligned} 1 \text{ den} &= 30 \textit{ muhūrta} & 1 \textit{ itarhi} &= 15 \textit{ iānī} \\ 1 \textit{ muhūrta} &= 15 \textit{ kṣipra} & 1 \textit{ iānī} &= 15 \textit{ prāṇa}. \\ 1 \textit{ kṣipra} &= 15 \textit{ itarhi} \end{aligned}$$

[83] Zápisy zlomků ve staré Indii a operace se zlomky jsou popsány v článku [Sy2].

[84] Ve Staré říši byly používány i zlomky $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$; později se pracovalo pouze s kmennými zlomky, ke kterým se ještě přidával zlomek $\frac{2}{3}$, viz např. [BBV].

[85] Podle [DS1], str. 186.

Jednotka *prāṇa* tak odpovídala asi $\frac{1}{17}$ vteřiny.

$$\frac{1}{30 \cdot 15^4} \approx 6,5843621 \cdot 10^{-7}, \qquad \frac{1}{24 \cdot 3600 \cdot 17} \approx 6.80827887 \cdot 10^{-7}.$$

Je pravděpodobné, že tak jemné dělení mělo význam asi jen pro filozofické otázky. Musela však už existovat pravidla pro počítání s takovými čísly. Různé práce obsahovaly další jednotky, například v díle *Lalitavistara* jsou uvedeny tyto jednotky délkové míry:[86]

$$\begin{aligned}
1\ \textit{yojana} &= 4\ \textit{krośa}\\
1\ \textit{krośa} &= 1000\ \textit{dhanu}\\
1\ \textit{dhanu} &= 4\ \textit{hasta}\\
1\ \textit{hasta}\ \text{(loket)} &= 2\ \textit{vitasti}\\
1\ \textit{vitasti} &= 12\ \textit{angulī parva}\\
1\ \textit{angulī parva}\ \text{(šířka prstu na ruce, tj. palec)} &= 7\ \textit{yava}\\
1\ \textit{yava}\ \text{(šířka ječmene)} &= 7\ \textit{sarṣapa}\\
1\ \textit{sarṣapa} &= 7\ \textit{likṣā raja}\\
1\ \textit{likṣā raja} &= 7\ \textit{go raja}\\
1\ \textit{go raja} &= 7\ \textit{eḍaka raja}\\
1\ \textit{eḍaka raja} &= 7\ \textit{śaśa raja}\\
1\ \textit{śaśa raja} &= 7\ \textit{vātāyana raja}\\
1\ \textit{vātāyana raja} &= 7\ \textit{truṭi}\\
1\ \textit{truṭi} &= 7\ \textit{reṇu}\\
1\ \textit{reṇu} &= 7\ \textit{paramāṇu raja}
\end{aligned}$$

Paramāṇu byla nejmenší částice látky, podle starých Indů to byl průměr „molekuly“.

Terminologie

Indové zlomek nazývali *bhinna*, což znamená zlomený. Další výrazy používané pro zlomek byly *bhāga*, *aṃśa* (část, díl), později se používal i termín *kalā*, který původně, ve védském období, znamenal jednu šestnáctinu. Ganeśa, komentátor*Līlāvatī*, nazýval čitatele zlomku (to, co se mělo dělit) *bhāga*, *amśa*, *vibhāga* nebo *lava*, pro jmenovatele (to, čím se dělilo) uváděl názvy *hara*, *hāra* nebo *chheda*.

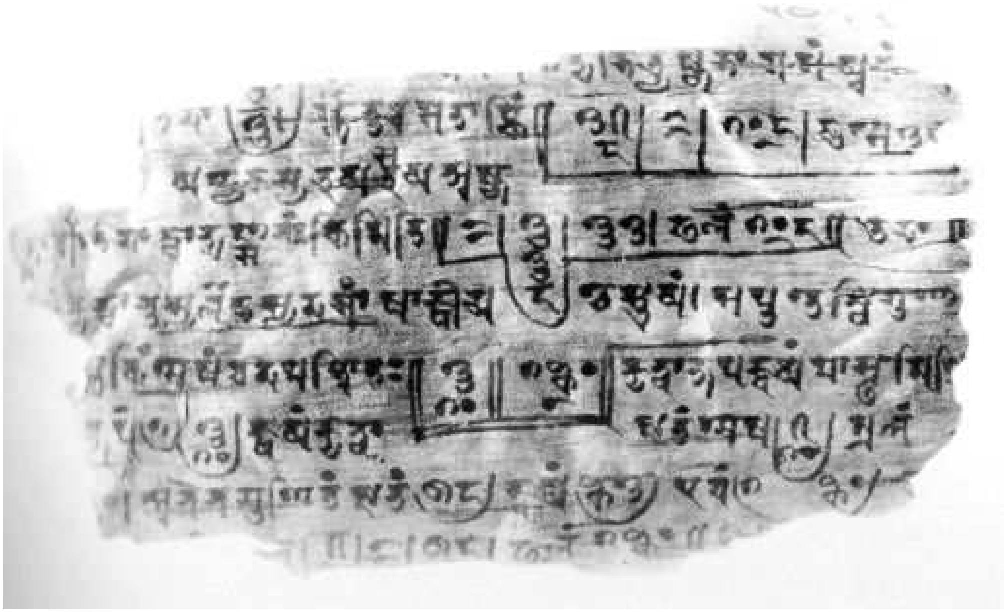
Ve védských dílech *Śulbasūtrách* se kmenné zlomky označovaly základními číslovkami ve spojení se slovem *bhāga* nebo *aṃśa* (část, díl), například *pañcadaśa-bhāga* (patnáct dílů) znamenalo jednu patnáctinu ($\frac{1}{15}$). Často byly se slovy *bhāga* nebo *aṁśa* spojovány i řadové číslovky *pañcama-bhāga* (pátý díl) neboli jedna pětina ($\frac{1}{5}$). Dokonce i slovo *bhāga* se někdy vynechávalo, patrně kvůli metrice verše, tedy například *ṣaṣṭa* (šestý) označovalo jednu šestinu ($\frac{1}{6}$). Zlomky $\frac{3}{8}$ nebo $\frac{2}{7}$ se nazývaly tři osmé nebo dva sedmé. V rukopisu Bakhshālī se zlomek $\frac{3}{8}$ nazývá *trayaṣṭa* (tři osmé) a číslo $3\frac{3}{8}$ je *trayastrayaṣṭha* (tři-tři-osmé).

[86] Další jednotky měr a vah jsou uvedeny například v [Do].

Zápis zlomků

Asi od 2. stol. př. n. l. se zlomky zapisovaly přibližně stejným způsobem jako dnes – čitatel nad jmenovatelem, ale bez zlomkové čáry. Smíšená čísla měla celé číslo umístěné nad čitatelem zlomku. Pokud se v jednom problému vyskytovalo několik zlomků, oddělovaly se vzájemně vodorovnými a svislými čarami.

Na obrázku 6.1 je uprostřed číslo $3\frac{3}{8}$ znázorněno jako $\left|\begin{matrix}3\\3\\8\end{matrix}\right|$.[87]



. . . . pra*tyayaṁ*

. . . . tṛibhitryashṭabhāgasaṁyutaṁ .

. . . . tadā $\begin{matrix}3+\\1\\3+\end{matrix}$ | shṭottaraśatā χ kiṁ | $\begin{matrix}27\\8\end{matrix}$ | $\begin{matrix}1\\1\end{matrix}$ | $\begin{matrix}108\\1\end{matrix}$ | pha śe .

. . . . yadyekasyatrayastraya ashṭha

bhāgātadādvātṛiṅśānāṁkimiti | $\begin{matrix}1\\1\end{matrix}$ | $\begin{matrix}3\\3\\8\end{matrix}$ | 32 | phalaṁ $\begin{matrix}108\\1\end{matrix}$ | udā ||

. . kriddhāntasyalohasyadaśāṁshākshīya | testrayaṁ | saptatedviguṇa

. . śchakiṁśeshaṁvadapaṇḍitaḥ | $\begin{matrix}3\\10\end{matrix}$ | $\begin{matrix}140\\1\end{matrix}$ | kṛitvārūpakshayaṁpāsthamiti

. . rūpaṁ 1 | $\begin{matrix}3\\10\end{matrix}$ | kshayaṁkṛitvā | jātaṁśesha | $\begin{matrix}7\\10\end{matrix}$ | mūlaṁ

40 | anenaguṇitaṁjātaṁ | 98 | kshayaṁ | 42 | evaṁ | 140 | *pra* . .

. . . . na | $\begin{matrix}7\\..\end{matrix}$ | $\begin{matrix}1\\1\end{matrix}$ | $\begin{matrix}98\\.\end{matrix}$ | phalaṁ 140 | . . . .

Obr. 6.1. Rukopis *Bakhshālī*, folio 10 verso a jeho přepis, převzato z [Kay1].

Protože neexistovala vhodná symbolika k tomu, aby bylo možné vyjadřovat

[87] Podle [Kay1], str. 113, folio 10 verso.

aritmetické operace se zlomky, rozdělovaly se výrazy se zlomky do několika tříd, kterým se říkalo *jāti*. Existovala pravidla, podle nichž bylo možné tyto třídy vyjádřit pomocí vhodných zlomků. Jediným používaným symbolem byla tečka, která značila záporné číslo, resp. číslo, které se má odečíst. Někdy bylo slovo *bhinna* užíváno i pro celou třídu zlomků.

Krácení zlomků

Před prováděním operací se zlomky se pokládalo za samozřejmé zlomky zkrátit. Tento proces se nazýval *apavartana*, ale sám nebyl považován za operaci. Nikde není popsán jako pravidlo, zřejmě se znalost předávala ústně. Určitě byl rozšířen v Indii již na počátku našeho letopočtu, zmiňuje se o něm například i nematematická práce *Tattvārthādhigama-sūtra-bhāṣya*, jejímž autorem je Umāsvāti (kolem roku 150). Jedná se o přirovnání ve filozofické diskusi.[88]

> *Nebo, jako když odborník matematik z důvodu zjednodušení operací odstraní společného dělitele čitatele i jmenovatele zlomku, zlomek se nezmění, tak ...*

Převedení na společného jmenovatele

Tato operace se nazývala *kalā-savarṇama*, *savarṇana* nebo *samachheda-vidhi*. Používala se, když bylo potřeba sečíst nebo odečíst zlomky. Tato úprava byla důležitá a vždy se připomínala spolu se sčítáním a odčítáním. Brahmagupta popsal tuto situaci takto:[89]

> **BrSpSi/xii.2**
> *Veličiny, stejně jako čitatelé a jmenovatelé, násobením ostatními jmenovateli se převedou na společného jmenovatele. Při sčítání čitatelé jsou sloučené. Při odečítání se vezme jejich rozdíl.*

K lepšímu pochopení Brahmaguptova pravidla připojil komentátor Pṛthūdakasvāmin-Caturvēda tento příklad:[90]

> *Příklad sčítání. Kolik je součet jedna a jedna třetina, jedna a jedna polovina, jedna a jedna šestina a číslo tři dané dohromady?*
>
> *Vyjádření:* $1\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{6}$, 3. *Neboli* $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{3}{1}$.
>
> *Vynásobením čitatele a jmenovatele prvního členu jmenovatelem druhého, 2, a čitatele a jmenovatele druhého jmenovatelem prvního, 3, jsou převedeny na společného jmenovatele (*$\frac{8}{6}$, $\frac{9}{6}$*, sloučením čitatelů* $\frac{17}{6}$*). Se třetím členem se nemusí provádět žádná operace, protože jeho jmenovatel je stejný, musí se jen sloučit čitatelé,* $\frac{24}{6}$*, což je po zkrácení 4. Zbývá přičíst čtvrtý člen, 3, a sčítání je dokončeno, výsledek je 7.*

---

[88] Podle [DS1], str. 190.
[89] Podle [Col], str. 277.
[90] Podle [Col], str. 278.

Mahāvīra byl prvním z indických matematiků, který užíval pojem *nirudddha* (nejmenší společný násobek), aby zjednodušil počítání se zlomky.[91]

GaSaSa/iii.56
Niruddha [nejmenší společný násobek] *se získá pomocí násobení* [všech] *společných činitelů jmenovatelů a* [všech] *jejich* [maximálních] *podílů. V případě, že* [všichni] *jmenovatelé a čitatelé* [daných zlomků] *jsou získány jejich násobením pomocí podílů niruddha děleného jmenovatelem, jmenovatelé budou stejné.*

Pokud se měly například zlomky $\frac{a}{xy}$ a $\frac{b}{yz}$ (předpokládáme, že x, y a z jsou prvočísla) převést na společného jmenovatele, znamenalo to nalézt společné činitele všech jmenovatelů, v našem případě y, a pak vzít podíl každého jmenovatele s tímto činitelem; pro první zlomek se dostalo $\frac{xy}{y} = x$, pro druhý $\frac{yz}{y} = z$. Tedy nejmenším společným násobkem byl součin xyz. První zlomek pak bylo třeba rozšířit číslem $\frac{xyz}{xy} = z$, tím se dostalo $\frac{az}{xyz}$, druhý zlomek se rozšířil číslem $\frac{xyz}{yz} = x$, tím se získalo $\frac{bx}{xyz}$. Tyto zlomky $\frac{az}{xyz}$ a $\frac{bx}{xyz}$ mají stejné jmenovatele, jmenovatel je nejmenším společným násobkem původních jmenovatelů.

Bhāskara II. nepoužíval pojem *nirudddha*, společného jmenovatele získal jako součin jmenovatelů. Existenci nejmenšího společného násobku zmínil takto:[92]

Lila/ii.29
Čitatel a jmenovatel vynásobené jmenovateli jsou tak převedené na společného jmenovatele. Nebo oba, čitatel a jmenovatel, mohou být šikovným počtářem násobené jiným jmenovatelem, který je zkrácený společným dělitelem.

Bhāskara II. v jednom příkladu[93] převáděl na společného jmenovatele zlomky $\frac{3}{1}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$. Jmenovatelé 1, 5, 3 jsou čísla nesoudělná, společného jmenovatele vypočítal jako jejich součin $1 \cdot 5 \cdot 3 = 15$, zlomky pak vyjádřil jako $\frac{45}{15}$, $\frac{3}{15}$, $\frac{5}{15}$. Když však hledal společného jmenovatele zlomků $\frac{1}{63}$, $\frac{1}{14}$, postupoval trochu jinak, protože jmenovatelé 63 a 14 mají společného dělitele 7, a tedy jejich součin není nejmenším společným násobkem. Proto, podle druhé části předchozího pravidla, nejprve jmenovatele vydělil sedmi $63 : 7 = 9$, $14 : 7 = 2$. Nejmenší společný násobek získal jako součin $7 \cdot 9 \cdot 2 = 126$ a zlomky zapsal jako $\frac{2}{126}$, $\frac{9}{126}$.

V Evropě většina matematiků při převádění na společného jmenovatele používala součin všech jmenovatelů, až Leonardo Pisánský (Fibonacci) začal prosazovat nejmenší společný násobek jmenovatelů (viz [BeM2]).

Operace se zlomky byly v Indii známé už dávno a prováděly se téměř stejně jako dnes. Āryabhaṭa I. se o elementárních operacích přímo nezmiňoval, ale

---

[91] Podle [Ran], str. 51.

[92] Podle [Col], str. 13.

[93] Viz sloka Lila/ii.30, podle [Col], str. 13.

z jeho textu je evidentní, že znal metodu dělení zlomkem jako násobení převrácenou hodnotou.

Smíšená čísla se před vlastním počítáním převedla na nepravé zlomky, a když to bylo možné, zlomky se zkrátily. Převedení smíšeného čísla na zlomek popsal Brahmagupta:[94]

> **BrSpSi/xii.3** (část)
> *Celá čísla se násobí jmenovateli a mají přičtené čitatele.*

6.10.1. Sčítání a odčítání

Sčítání zlomků se nazývalo *bhinna-saṅkalita*, odčítání *bhinna-vyutkalita*. Tyto operace se prováděly až po převedení zlomků na společného jmenovatele. Pokud se sčítaly nebo odčítaly zlomky společně s celými čísly, bylo celé číslo považováno za zlomek se jmenovatelem rovným jedné. Vyjádření dnešní symbolikou odpovídá běžně užívaným vzorcům:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}, \qquad z \pm \frac{a}{b} = \frac{zb \pm a}{b}.$$

Bhāskara II. tuto situaci popsal takto:[95]

> **Lila/ii.36**
> *Pravidlo pro sčítání a odčítání zlomků. Půl sloky.*
> [Vezmi] *Součet nebo rozdíl zlomků majících společného jmenovatele. Jedničkou je vyjádřený jmenovatel celého čísla.*
>
> **Lila/ii.37**
> *Příklad. Řekni mi, drahá ženo, rychle, kolik je pětina, čtvrtina, třetina, polovina a šestina když se sečtou dohromady? Řekni okamžitě, co je zbytek, když se tyto zlomky odečtou od tří.*
>
> *Vyjádření:* $\frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{6}$.
>
> *Odpověď. Sečteno dohromady, součet je* $\frac{29}{20}$
>
> *Odečtením těchto zlomků od tří, zbytek je* $\frac{31}{20}$.

Při výpočtu se použilo pravidlo převedení na společného jmenovatele, tím byl pravděpodobně nejmenší společný násobek jmenovatelů, tj. 60, pak se zlomky sečetly a výsledek se zkrátil. Výpočet tedy mohl vypadat takto:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{12}{60} + \frac{15}{60} + \frac{20}{60} + \frac{30}{60} + \frac{10}{60} = \frac{87}{60} = \frac{29}{20}.$$

---

[94] Podle [Col], str. 278.
[95] Podle [Col], str. 16–17.

Odčítání se provádělo podobně:

$$3 - \frac{29}{20} = \frac{3}{1} - \frac{29}{20} = \frac{60}{20} - \frac{29}{20} = \frac{31}{20}.$$

6.10.2. Násobení

Výraz *bhinna-guñana* se užíval pro násobení zlomků. Před vlastním násobením se nejprve smíšená čísla převedla na zlomky; Brahmagupta tento proces popsal následujícím způsobem:[96]

> **BrSpSi/xii.3** (část)
> *Součin čitatelů dělený součinem jmenovatelů je* [výsledkem] *násobení dvou nebo více zlomků.*

Násobení odpovídá současnému vzorci

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Postup ukážeme na následujícím příkladu, který patrně připojil komentátor Caturvéda:[97]

> *Příklad. Řekni rychle, jaký je obsah obdélníka, ve kterém strana je deset a půl a výška sedmdesát šestin.*
>
> *Vyjádření.* $10\frac{1}{2}$ $11\frac{4}{6}$.
>
> *Vynásobením celých čísel jmenovateli a přičtením čitatelů, ve druhém případě ještě zkrácením, dostaneme* $\frac{21}{2}$ *a* $\frac{35}{3}$. *Součin čitatelů* 735 *vydělený součinem jmenovatelů* 6 *dává podíl* $122\frac{1}{2}$. *To je obsah obdélníka.*

Ostatní autoři popisovali tyto operace podobným způsobem, jen Mahāvīra ještě odkazoval na krácení křížem, aby se zjednodušil výpočet.[98]

> **GaSaSa/iii.2**
> *Při násobení zlomků se čitatelé násobí čitateli a jmenovatelé jmenovateli poté, co se provede křížové krácení, je-li to možné.*

Při krácení křížem, pokud je to možné, se krátí čitatel prvního zlomku se jmenovatelem druhého nebo čitatel druhého zlomku se jmenovatelem prvního.

[96] Podle [Col], str. 278.
[97] Podle [Col], str. 278.
[98] Podle [Ran], str. 38.

6.10.3. Dělení

Bhinna-bhāga-hara byl název užívaný pro dělení zlomků. V práci *Āryabhaṭīya* nebyly zmiňovány elementární operace, násobení zlomků bylo popsáno v části pojednávající o pravidle tří.

Brahmagupta popsal dělení zlomků takto:[99]

> **BrSpSi/xii.4**
> *Jmenovatel a čitatel dělitele se vymění, pak jmenovatel dělence se násobí* [novým] *jmenovatelem a čitatel* [novým] *čitatelem. Tak je dělení zlomků provedeno.*

Dělení zlomků se provádělo stejně jako dnes – první zlomek se násobil převrácenou hodnotou druhého

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Podobným způsobem popisovali dělení zlomků i další autoři. V [Col] je připojen podobný příklad jako u násobení, autorem je komentátor Pṛthūdakasvāmin.[100]

> *Příklad. V obdélníku, jehož obsah je daný, sto dvacet dva a půl, a strana deset a půl. Řekni výšku.*
>
> *Vyjádření:* $122\frac{1}{2}$ $10\frac{1}{2}$. *Převedeno na* $\frac{245}{2}$ $\frac{21}{2}$.
>
> *Zde je strana dělitelem. Její čitatel a jmenovatel jsou prohozené* $\frac{2}{21}$. *Čitatel dělence násobený tímto čitatelem se stává* 490*; a jmenovatel dělence násobený jmenovatelem vytváří* 42. *Jedno dělené druhým dává podíl* $11\frac{2}{3}$. *To je výška.*

6.10.4. Druhá mocnina a druhá odmocnina

Pravidla pro umocňování a odmocňování zlomků nebývala uvedena v kapitolách o umocňování a odmocňování, ale v kapitolách o počítání se zlomky. Výpočet druhé odmocniny zlomků byl nazýván *bhinna-varga*. Brahmagupta jej vyjádřil takto:[101]

> **BrSpSi/xii.5**
> *Čtverec čitatele zlomku dělený čtvercem jmenovetele dává čtverec. Druhá odmocnina čitatele zlomku dělená druhou odmocninou jmenovatele dává druhou odmocninu.*

[99] Podle [Col], str. 278–279.
[100] Podle [Col], str. 279.
[101] Podle [Col], str. 279.

Ostatní autoři uváděli podobná vyjádření. V dnešní symbolice lze výše uvedené poznatky zapsat pomocí vzorců

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}, \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Následující příklady, které připojil komentátor Pṛthūdakasvāmin, sloužily k objasnění výpočtu.[102]

> *Příklad. Řekni mi obsah rovnostranného čtyřúhelníku* [čtverce] *jehož strana a výška jsou stejné sedm polovin.*
>
> *Vyjádření: Strana* $\frac{7}{2}$. *Výška* $\frac{7}{2}$. *Součin čitatelů* 49. *Součin jmenovatelů* 4. *Tyto součiny jsou druhé mocniny, protože strana a výška jsou stejné.*
>
> *Čtverec čitatele* 49 *dělený čtvercem jmenovatele* 4, *podíl* $12\frac{1}{4}$ *je plocha čtyřúhelníka.*

> *Příklad. Řekni stejnou stranu a výšku rovnostranného čtyřúhelníku* [čtverce] *jehož obsah je daný dvanáct a jedna čtvrtina.*
>
> *Vyjádření po převedení:* $\frac{49}{4}$. *Odmocnina z čitatele* 49 *je* 7, *totéž pro jmenovatele* 4 *je* 2. *Po dělení odmocniny čitatele tímto dá podíl druhou odmocninu* $\frac{7}{2}$. *To je délka výšky a strany.*

6.10.5. Třetí mocnina a třetí odmocnina

Výpočet třetí odmocniny zlomků byl nazýván *bhinna-ghana*. Śrīdhara formuloval pravidlo takto:[103]

> **PaGa/35**
> *Třetí mocnina čitatele dělená třetí mocninou jmenovatele dává třetí mocninu a třetí odmocnina čitatele dělená třetí odmocninou jmenovatele dává třetí odmocninu.*

Ostatní autoři popisovali výpočet třetí mocniny a odmocniny podobným způsobem. V dnešní symbolice zapíšeme vzorci

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}, \qquad \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}.$$

6.10.6. Třídy výrazů se zlomky

Protože neexistovala vhodná symbolika, zápis výrazů se zlomky byl nejednoznačný. Indové dělili výrazy se zlomky do několika tříd a příslušnost k určité třídě pomohla pochopit správný význam zápisu.

---

[102] Podle [Col], str. 279.
[103] Podle [Shu1], str. 16–17.

1. *Bhāga* („jednoduché zlomky“) neboli výraz se dvěma zlomky $\left(\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d}\right)$ nebo se třemi zlomky $\left(\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} \pm \frac{e}{f}\right)$, případně i pro větší počet zlomků $\left(\frac{a_1}{b_1} \pm \frac{a_2}{b_2} \pm \frac{a_3}{b_3} \pm \cdots \pm \frac{a_n}{b_n}\right)$, který se obvykle

zapisoval jako $\begin{array}{|c|c|}\hline \mathrm{a} & \mathrm{c} \\ \mathrm{b} & \mathrm{d} \\ \hline \end{array}$ nebo $\begin{array}{|c|c|}\hline \mathrm{a} & \bullet\mathrm{c} \\ \mathrm{b} & \mathrm{d} \\ \hline \end{array}$, kde tečkou je naznačeno odčítání.

Výraz se třemi zlomky se vyjadřoval jako $\begin{array}{|c|c|c|}\hline \mathrm{a} & \mathrm{c} & \mathrm{e} \\ \mathrm{b} & \mathrm{d} & \mathrm{f} \\ \hline \end{array}$

nebo $\begin{array}{|c|c|c|}\hline \mathrm{a} & \bullet\mathrm{c} & \bullet\mathrm{e} \\ \mathrm{b} & \mathrm{d} & \mathrm{f} \\ \hline \end{array}$.

2. *Prabhāga* („zlomky ze zlomků“) neboli součin $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)$, resp. $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right)$ se obvykle zapisoval jako $\begin{array}{|c|c|}\hline \mathrm{a} & \mathrm{c} \\ \mathrm{b} & \mathrm{d} \\ \hline \end{array}$, resp. $\begin{array}{|c|c|c|}\hline \mathrm{a} & \mathrm{c} & \mathrm{e} \\ \mathrm{b} & \mathrm{d} & \mathrm{f} \\ \hline \end{array}$.

3. *Bhāgānubandha* („spojení zlomků“) znamenalo buď

a) *rūpa-bhāgānubandha* („spojení přirozeného čísla a zlomku“),

tj. $\left(a + \frac{b}{c}\right)$ v zápisu $\begin{array}{|c|}\hline \mathrm{a} \\ \mathrm{b} \\ \mathrm{c} \\ \hline \end{array}$ nebo

b) *bhāga-bhāgānubandha* („spojení dvou nebo více zlomků“),

tj. $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}\right)$, případně $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} + \frac{e}{f} \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}\right)\right)$, které se zapisovaly $\begin{array}{|c|}\hline \mathrm{a} \\ \mathrm{b} \\ \hline \mathrm{c} \\ \mathrm{d} \\ \hline \end{array}$ nebo $\begin{array}{|c|}\hline \mathrm{a} \\ \mathrm{b} \\ \hline \mathrm{c} \\ \mathrm{d} \\ \hline \mathrm{e} \\ \mathrm{f} \\ \hline \end{array}$.

4. *Bhāgāpavāha* („oddělení zlomků“) mohlo znamenat

a) *rūpa-bhāgāpavāha* („oddělení přirozeného čísla a zlomku“), tj. $\left(a - \frac{b}{c}\right)$

v zápisu $\begin{array}{|c|}\hline \mathrm{a} \\ \bullet\mathrm{b} \\ \mathrm{c} \\ \hline \end{array}$ nebo

b) *bhāga-bhāgāpavāha* („oddělení dvou nebo více zlomků“),

tj. $\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}\right)$, případně $\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} - \frac{e}{f} \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}\right)\right)$, které se zapisovaly $\begin{array}{|c|}\hline a\\ b\\ \hline c\\ d\\ \hline\end{array}$ nebo $\begin{array}{|c|}\hline a\\ b\\ \hline \bullet c\\ d\\ \hline \bullet e\\ f\\ \hline\end{array}$.

Kromě těchto tříd uváděli někteří autoři ještě další dva typy.

5. *Bhāga-bhāga* („složené zlomky“) neboli výrazy $\left(a : \frac{b}{c}\right)$ nebo $\left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right)$.

Zápis byl stejný jako pro třídu *bhāga-bhāgānubandha*,

tedy $\begin{array}{|c|}\hline a\\ b\\ c\\ \hline\end{array}$ nebo $\begin{array}{|c|}\hline a\\ b\\ \hline c\\ d\\ \hline\end{array}$.

Je zajímavé, že v zápisu se nikde neobjevoval symbol pro dělení. To, že se má dělit, vyplývalo ze zadání problému.[104]

6. *Bhāga-mātṛ* neboli kombinace tvarů uvedených výše. Mahāvīra poznamenal, že těchto kombinací může být 26. Zřejmě tedy už byly známé postupy na výpočet kombinací. Jestliže bylo 5 základních tříd, pak celkový počet kombinací je 26, neboť

$$C_2(5)+C_3(5)+C_4(5)+C_5(5) = \binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5} = 10+10+5+1 = 26.$$

Pravidla pro zjednodušení prvních dvou tříd jsou pravidly pro sčítání nebo odčítání a násobení zlomků, úpravy výrazů *rūpa-bhāgānubandha* a *rūpa-bhāgāpavāha* odpovídaly přičítání nebo odčítání zlomku od celého čísla. Pravidla pro zjednodušení třídy *bhāga-bhāgānubandha* a *bhāga-bhāgāpavāha* popsal Brahmagupta takto:[105]

BrSpSi/xii.9
Horní jmenovatel se vynásobí jmenovatelem a horní čitatel tím stejným [jmenovatelem] *zvětšeným nebo zmenšeným o svého vlastního čitatele.*

---

[104] Pouze v rukopisu *Bakhshālī* se někdy před příslušnou veličinu nebo za ni uváděl výraz *bhā* (zkratka vytvořená ze slova *bhājana* nebo *bhāgahāra*, což byly výrazy pro dělení).
[105] Podle [Col], str. 282.

Tedy $\begin{array}{|c|}\hline a \\ b \\ \hline c \\ d \\ \hline\end{array}$ nebo $\begin{array}{|c|}\hline a \\ b \\ \hline \bullet c \\ d \\ \hline\end{array}$ v dnešní symbolice znamená:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot (d \pm c)}{b \cdot d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d \pm c}{d}$$

Podobná pravidla zformuloval také Śrīdhara,[106] který uvedl následující příklady:[107]

PaGa/Ex.19
Jaký je součet $3\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 3\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \left(3\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 3\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\right)$?

Toto bylo zapsáno jako $\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 \\ 4 & 3 \\ \hline 1 & 1 \\ 6 & 4 \\ \hline\end{array}$.

Převedením smíšeného čísla na zlomek a přičtením jmenovatelů k čitatelům zlomků ve dvou dolních řádcích, tj. vyjádřením výrazu $\frac{d+c}{d}$ z pravidla, se dostalo

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 7 & 1 \\ 2 & 2 \\ \hline 5 & 4 \\ 4 & 3 \\ \hline 7 & 5 \\ 6 & 4 \\ \hline\end{array}.$$

Nyní se vypočítaly součiny zlomků v každém sloupci:

$\frac{7}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} = \frac{245}{48}$ (v levém sloupci) a $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{20}{24}$ (v pravém sloupci),

které se zapsaly vedle sebe $\begin{array}{|c|c|}\hline 245 & 20 \\ 48 & 24 \\ \hline\end{array}$

a převedly na společného jmenovatele, tj. provedla se operace *savarṇama*, tedy

$\begin{array}{|c|c|}\hline 245 & 40 \\ 48 & 48 \\ \hline\end{array}$.

Nakonec se zlomky sečetly a tím se získal výsledek $\frac{285}{48}$ neboli $5\frac{15}{16}$.

---

106 Viz sloky PaGa/39–40, podle [Shu1], str. 19.

107 Podle [Shu1], str. 20, 22.

PaGa/Ex.23
Kolik je výsledek, jestliže jedna polovina, jedna čtvrtina z jedné čtvrtiny, jedna dělená jednou třetinou, polovina plus polovina ze sebe, jedna třetina zmenšená o jednu polovinu ze sebe, se dá dohromady?

Problém, který bychom dnes zapsali jako

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}\right) + \left(1 : \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right),$$

byl v indické symbolice vyjádřen takto:[108]

1	1	1	1	1	1
2	4	4	1	2	3
			3	1	•1
				2	2

Při zápisu výrazů se zlomky je zřejmá nejednoznačnost: Zápis

1	1
4	4

mohl být interpretován jako $(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4})$ stejně jako $(\frac{1}{4} + \frac{1}{4})$, podobně vyjádření

1
1
3

mohlo znamenat $(1 : \frac{1}{3})$, ale také $(1\frac{1}{3})$. Správný význam zápisu bylo nutno poznat z kontextu podle formulace problému.

Kmenné zlomky

Mahāvīra popsal několik pravidel, v nichž počítal s kmennými zlomky. Tato pravidla se nevyskytovala v žádné jiné práci, snad proto, že je ostatní autoři nepovažovali za užitečná a důležitá.

a) Vyjádření jedničky jako součtu n kmenných zlomků.[109]

GaSaSa/iii.75
Když součet různých veličin, jejichž čitatelé jsou 1, *je roven* 1, [požadovaní] *jmenovatelé jsou takoví, že počínaje jedničkou jsou postupně násobené* 3, *první a poslední se vynásobí ještě* 2 *a* $\frac{2}{3}$.

Tedy

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^{n-2}} + \frac{1}{\frac{2}{3} \cdot 3^{n-1}} = \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^{n-2}} + \frac{1}{2 \cdot 3^{n-2}} = \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3^{n-2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - (\frac{1}{3})^{n-2}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3^{n-2} + 1}{2 \cdot 3^{n-2}} + \frac{3^{n-2} - 1}{2 \cdot 3^{n-2}} = \frac{2 \cdot 3^{n-2}}{2 \cdot 3^{n-2}}.
\end{aligned}$$

[108] Podle [DS1], str 192.
[109] Podle [Ran], str. 54.

Při úpravě byl použit vzorec pro součet $n-2$ členů (prostřední sčítanci v rozepsaném součtu) geometrické posloupnosti s prvním členem rovným $\frac{1}{3}$ a kvocientem také $\frac{1}{3}$.

b) Vyjádření jedničky jako součtu lichého počtu kmenných zlomků. Metoda má smysl, pokud jsou zlomky alespoň tři ($2n-1$ pro $n \geq 2$), přičemž poslední z nich musí být roven $\frac{1}{n}$, i když se o tom pravidlo nezmiňuje.[110]

GaSaSa/iii.77
Když součet veličin [zlomků], *jejichž čitatelé jsou* 1, *je roven* 1, *jmenovatelé jsou takoví, že počínaje dvojkou pokračuje se zvyšováním o jednu, každý se násobí tím, co* [bezprostředně] *následuje, a* $\frac{1}{2}$.

Jednoduchou úpravou se můžeme snadno přesvědčit o platnosti vzorce:

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{2\cdot 3\cdot \frac{1}{2}} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot \frac{1}{2}} + \frac{1}{4\cdot 5\cdot \frac{1}{2}} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\cdot 2n\cdot \frac{1}{2}} + \frac{1}{2n\cdot \frac{1}{2}} = \\
&= 2\left(\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\cdot 2n} + \frac{1}{2n}\right) = \\
&= 2\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2n}\right] = 2\cdot\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

c) Vyjádření kmenného zlomku jako součtu několika zlomků, jejichž čitatelé jsou daní.[111]

GaSaSa/iii.78
Když součet [určitých zlomků] *má jedničku jako čitatele, pak jmenovatel prvního* [z daných sčítanců] *je jmenovatelem součtu, jmenovatel následujícího je tento* [jmenovatel] *sloučený se svým čitatelem a tak dále; a pak se násobí* [každý jmenovatel] *následujícím, poslední je násobený svým vlastním čitatelem.* [To dává požadované jmenovatele.]

Zlomek $\frac{1}{n}$ tedy vyjádříme jako součet p zlomků, přičemž jejich čitatelé jsou dané hodnoty $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_p$.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n} =& \frac{a_1}{n(n+a_1)} + \frac{a_2}{(n+a_1)(n+a_1+a_2)} + \frac{a_3}{(n+a_1+a_2)(n+a_1+a_2+a_3)} + \\
&+ \cdots + \frac{a_{p-1}}{(n+a_1+a_2+\cdots+a_{p-2})(n+a_1+a_2+\cdots+a_{p-1})} + \\
&+ \frac{a_p}{(n+a_1+a_2+\cdots+a_{p-1})a_p}.
\end{aligned}
$$

---

110 Podle [Ran], str. 55.
111 Podle [Ran], str. 56.

Pro speciální volbu $a_1 = a_2 = \cdots = a_p = 1$ dostáváme součet kmenných zlomků.

d) Vyjádření libovolného zlomku jako součtu kmenných zlomků. Pravidlo zní:[112]

GaSaSa/iii.80
Jmenovatel [daného zlomku] *když se sloučí s vhodně vybraným číslem, vydělí se čitatelem beze zbytku,* [podíl] *se stává jmenovatelem prvního čitatele,* [který je 1] *vhodně zvolená veličina, když se dělí tím* [podílem] *a jmenovatelem součtu, je zbytek. Na zbytek se aplikuje stejný postup.*

Označíme-li daný zlomek $\frac{a}{b}$ a i je číslo vybrané tak, aby platilo $\frac{b+i}{a} = n$, kde n je celé číslo, pravidlo říká:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{n} + \frac{i}{n \cdot b} = \frac{b+i}{n \cdot b} = \frac{b+i}{n} \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}.$$

První zlomek je kmenný $(\frac{1}{n})$, podobný postup se použije na zbytek $(\frac{i}{n \cdot b})$, tím se získá další kmenný zlomek. Výsledek závisí na tom, jak byla zvolena konstanta i.

e) Vyjádření kmenného zlomku jako součtu dvou jiných kmenných zlomků. Pravidlo zní:[113]

GaSaSa/iii.85
(i) *Jmenovatel daného kmenného zlomku násobený vhodně vybraným číslem je* [prvním] *jmenovatelem a tento dělený dříve vybraným číslem zmenšeným o* 1 *dává dalšího; nebo*
(ii) *dva jmenovatelé jsou dělitelé jmenovatele daného kmenného zlomku, každý násobený jejich součtem.*

Pravidla můžeme zapsat takto:

(i) $$\frac{1}{n} = \frac{1}{p \cdot n} + \frac{1}{\frac{p \cdot n}{p-1}}.$$

Přirozené číslo p je zvolené tak, aby n bylo dělitelné číslem $p - 1$.

(ii) $$\frac{1}{a \cdot b} = \frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(a+b)}.$$

Mahāvīra ve čtvrté kapitole práce *Gaṇita-sāra-saṁgraha* ještě klasifikoval různé typy úloh, které obsahovaly zlomky, a popsal algoritmy jejich řešení. Tyto úlohy bychom dnes řadili do algebry, protože vedly na řešení rovnic s jednou

[112] Podle [Ran], str. 57.
[113] Podle [Ran], str. 58.

neznámou. Jednalo se například o úlohy typu: Každá z n různých částí celku má nějakou určitou vlastnost a ještě zbývá c. Kolik prvků tvořilo celek? Úloha může být vyjádřena rovnicí

$$\left(1 - \frac{a}{b}\right) x = c, \qquad \text{odtud} \qquad x = \frac{c}{1 - \frac{a}{b}},$$

kde zlomek $\frac{a}{b}$ je součtem všech n částí s uvedenou vlastností. Tímto způsobem také Mahāvīra řešení vyjadřoval.

Zlomky měly v indické matematice důležité místo, pravidla pro počítání se zlomky byla pečlivě roztříděna, podrobně popsána a demonstrována na příkladech.

Se zlomky počítala i egyptská matematika, jak už bylo řečeno, egyptští počtáři používali kmenné zlomky, k nimž se připojoval ještě zlomek $\frac{2}{3}$. V Mezopotámii se používaly šedesátinné zlomky, tj. zlomky, jejichž jmenovatelé byly ve tvaru 60^n, kde $n \in \mathbb{N}$. Dochovaly se tabulky reciprokých hodnot, v nichž byly uvedeny některé kmenné zlomky (viz [BBV]).

Dobře propracovanou teorii počítání se zlomky měli staří Číňané, kteří používali zlomky typu $\frac{p}{q}$, kde p, $q \in \mathbb{N}$. Speciální názvy a znaky měli jen pro nejčastěji používané zlomky $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, tj. „malá polovina“, $\frac{2}{3}$, tj. „velká polovina“, jinak zlomek zapisovali jako „p z q dílů“ (viz [Hu], [Ju]). Operace se zlomky se prováděly na počitadle a přitom se využívalo krácení zlomků.

Ve starém Řecku se pracovalo se zlomky $\frac{p}{q}$, kde p, $q \in \mathbb{N}$, k jejich zápisu se používala, stejně jako u přirozených čísel, písmena abecedy. K odlišení sloužil většinou apostrof, například γ, tj. třetí písmeno řecké abecedy znamenalo 3, γ' značilo $\frac{1}{3}$, někdy se zapisoval jmenovatel nad čitatele (viz např. [Hea]).

V arabských zemích se používaly kmenné zlomky; pro ty, jejichž jmenovatel byl menší nebo roven deseti, existovaly speciální názvy, proto se jim někdy říkalo „vyslovitelné“, zatímco ostatní zlomky byly „nevyslovitelné“, neboť jejich hodnota byla opsána (např. $\frac{1}{13}$ byla vyjádřena jako „jedna část ze třinácti“, $\frac{3}{17}$ jako „tři části ze sedmnácti“). Zlomky typu $\frac{p}{q}$ se vyjadřovaly, asi podle egyptského vzoru, jako součty kmenných zlomků. Al-Chwárizmí počítal především se šedesátinnými zlomky, které zapisoval, stejně jako v Indii, pod sebou – nahoru stupně, pod ně minuty, dolů vteřiny (viz [Ju]).

Společně s desítkovou poziční soustavou se do Evropy dostaly i šedesátinné zlomky, které se používaly zejména při astronomických výpočtech. V Evropě se však příliš neujaly, kromě astronomických a trigonometrických výpočtů se používaly převážně zlomky kmenné. K prosazení desetinných zlomků v Evropě napomohla snaha o určení přibližné hodnoty iracionálních čísel, např. $\sqrt{2}$, a trigonometrické výpočty. Desetinné zlomky jako první uvedl německý astronom a matematik Johannes Müller zvaný Regiomontanus (1436–1476) ve svých trigonometrických tabulkách. O systematické zavedení desetinných zlomků se zasloužil holandský kupec, matematik a inženýr Simon Stevin (1548–1620), který vydal v roce 1585 vlámsky psanou brožurku *Desetina*. Název zlomek se objevil v Evropě jako překlad arabského slova *kasr* (rozbitý, zlomený), v překladu al-Chwárizmího spisu je uveden termín *fractio* (viz [Sis]).[114] Zlomky se většinou zapisovaly pomocí velké tečky, například zlomek $\frac{3}{4}$ byl vyjádřen jako $\frac{3}{4}\bullet$. Zlomková čára se poprvé objevila u Leonarda Pisánského v roce 1202 (viz [BeM2]). Desetinné zlomky ve tvaru desetinných čísel zavedl al-Káší, používal přitom několik způsobů, například oddělil celou část svislou čarou nebo zapisoval desetinná místa jinou barvou (viz [Ju]).

6.11. Pravidlo tří

Indický název pro pravidlo tří byl *trairāśika* (tři členy), toto pravidlo bylo řazeno mezi aritmetické operace. O původu jeho názvu napsal Bhāskara I.:[115]

> *Zde jsou nutné tři veličiny (ve tvrzení a počítání), proto se metoda nazývá trairāśika (pravidlo tří členů).*

Problém řeší úlohy na přímou úměrnost: jestliže P dává F, kolik dá I? Dnes se podobné úlohy vyjádří rovností poměrů

$$x : F = I : P, \qquad \text{odtud} \qquad x = \frac{F \cdot I}{P}. \tag{6.3}$$

Tři dané členy jsou P (zkratka slova *pramāṇa*, tj. důvod), F (zkratka slova *phala*, tj. výsledek) a I (zkratka slova *icchā*, tj. požadavek). Tyto názvy se vyskytovaly ve všech matematických dílech, někdy se jim však říkalo jen první, druhý a třetí, protože v tomto pořadí se dané veličiny zapisovaly do řádku: $P - F - I$. Úměru (6.3) snadno upravíme do tvaru $P : F = I : x$, kde pořadí známých veličin odpovídá indickému vyjádření. Pouze Āryabhaṭa II. na rozdíl od ostatních používal názvy *māna*, *vinimaya* a *icchā*. Většina autorů při popisu pravidla upozorňovala na to, že první a třetí člen jsou stejného typu. Například Mahāvīra uvedl:[116]

> **GaSaSa/v.2** (část)
> *V pravidle tří se součin členů phala a icchā dělený členem pramāna stává* [hledaným] *řešením, když icchā a pramāṇa jsou podobné* [tj. přímo úměrné.]

Pravidlo tří bylo ve staré Indii velmi ceněné, protože bylo snadné a bylo možné je jednoduchým způsobem použít při řešení běžných problémů. Varāhamihira napsal:[117]

> *Jestliže Slunce vykoná jednu otáčku za rok, kolik vykoná za daný počet dní? Copak i nevzdělaný člověk nevypočítá takové problémy jednoduchým čmáráním kouskem křídy?*

---

114 Z latinského *frangere*, tj. lámat, rozbíjet, drobit.
115 Ve svém komentáři k práci *Āryabhaṭīya*, podle [DS1], str. 204.
116 Podle [Ran], str. 86.
117 Podle [DS1], str. 209.

Za pravidlem tří bývalo uvedeno několik příkladů na procvičení, například komentátor práce *Brāhma-sphuta-siddhānta* uvedl:[118]

> *Člověk daruje sto osm krav za tři dny, kolik dobytka věnuje za rok a měsíc?*
>
> *Vyjádření: Dny* 3, *krávy* 108, *dny* 390.
>
> *Odpověď:* 14 040.

Podle vyjádření je $P = 3$, $F = 108$, $I = 390$ a podle uvedeného postupu se hledaný počet krav x počítal ze vzorce

$$x = \frac{108 \cdot 390}{3} = 14\,040.$$

Před vlastním výpočtem bylo často potřeba převádět jednotky, aby první a třetí člen (P a I) byly vyjádřeny ve stejných jednotkách. V tomto příkladě byl rok (360 dní) a měsíc (30 dní) vyjádřen jako 390 dní.

6.12. Obrácené pravidlo tří

Toto pravidlo se nazývalo *vyasta-trairāśika* nebo *vylōma-trairāśika* (obrácené pravidlo tří členů). Za pravidlem tří byla většinou uvedena poznámka, že tato operace by měla být obrácená, jestliže úměrnost je nepřímá. Mahāvīra napsal:[119]

> **GaSaSa/v.2** (část)
> *V případě, že* [úměrnost] *je nepřímá, tato operace* [zahrnující násobení a dělení] *je obrácená,* [tak aby dělení bylo místo násobení a násobení místo dělení.]

Výsledek F se musí násobit důvodem P a dělit požadavkem I. Obrácené pravidlo tří řeší úlohy na nepřímou úměrnost, hledalo se číslo x z rovnice

$$x : F = P : I, \qquad \text{odtud} \qquad x = \frac{F \cdot P}{I}.$$

Následující příklad předložil Bhāskara II.:[120]

> **Lila/iii.78**
> *Hromada pšenice byla měřena měrkou o obsahu sedm ādhaca. Jestliže jich bylo nalezeno sto, jaký bude výsledek s měrkou o obsahu pět ādhaca.*
>
> *Vyjádření:* 7 100 5. *Odpověď* 140.

[118] Podle [Col], str. 283. V příkladu se předpokládalo, že rok má 360 a měsíc 30 dní.
[119] Podle [Ran], str. 86.
[120] Podle [Col], str. 35.

V komentáři bylo vysvětleno, že když se zvětší měrka, jejich počet je menší, a naopak budou-li se měrky zmenšovat, bude ji potřeba více. Tím byla zdůvodněna metoda obráceného pravidla tří, protože mezi počtem měrek a jejich obsahem je nepřímá úměra. Výpočet probíhal podle popsaného pravidla s danými hodnotami $P = 7$, $F = 100$, $I = 5$, proto se vypočítalo

$$x = \frac{100 \cdot 7}{5} = 140.$$

6.13. Pravidlo pěti, sedmi, devíti, jedenácti

Složené úměry byly řešeny pomocí dvojitého pravidla tří, tj. pravidla pěti, kterému se říkalo *pañca-rāśika*, případně pravidla sedmi nazvaného *sapta-rāśika*, pravidla devíti neboli *nava-rāśika* či pravidla jedenácti, tzv. *ēkādaśa-rāśika*, podle toho, kolika členů se problém týkal. Tyto metody se někdy sdružovaly pod obecným názvem pravidlo lichých členů. V takových úlohách byly dány dvě skupiny členů. První, která byla kompletní, se nazývala *pramāṇa pakṣa* (strana důvodu), druhé, v níž jeden člen chyběl, se říkalo *icchā pakṣa* (strana požadavku).

Problémy řešené pravidlem pěti by se mohly řešit dvojnásobným užitím pravidla tří, které pravidlo pěti slučovalo do jednoho vztahu. Jednalo se o úlohy typu: Jestliže P_1 dává F_1 za P_2, kolik dá I_1 za I_2? Dnes bychom členy zapsali do řádku a řešili složenou trojčlenkou, indický postup byl podobný, jen se odpovídající členy zapisovaly do sloupců, v prvním byly všechny hodnoty známé (strana důvodu), ve druhém se musel jeden člen dopočítat (strana požadavku). V indickém zápisu tedy sloupce obsahovaly tyto veličiny:

$$\begin{array}{cc} P_1 & I_1 \\ P_2 & I_2 \\ F_1 & x \end{array}$$

Pro větší přehlednost se hodnoty někdy ještě oddělovaly čarami.

Podle indického pravidla se vyměnily členy v posledním řádku a neznámá se vypočítala jako podíl součinů ve sloupcích

$$\begin{array}{cc} P_1 & I_1 \\ P_2 & I_2 \\ x & F_1 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{I_1 I_2 F_1}{P_1 P_2}.$$

Bhāskara II. metodu vyjádřil takto:[121]

> **Lila/iii.79**
> *V pravidlech pěti, sedmi, devíti nebo více členů přemísti phala* [výsledek] *a jmenovatele* [existuje-li] *na druhou stranu, součin větší skupiny členů dělený součinem menší skupiny dává výsledek* [nebo vytvoří požadavek].

---

[121] Podle [Col], str. 35.

Postup výpočtu dokresluje příklad převzatý z *Līlāvatī*:[122]

Lila/iii.80
Jestliže úrok ze sta za jeden měsíc je pět, jaký bude úrok ze šestnácti za dvanáct měsíců?

První skupina členů (strana důvodu – *pramāṇa pakṣa*) obsahovala hodnoty

$$100, \qquad 1 \text{ (měsíc)}, \qquad 5.$$

Druhá skupina členů (strana požadavku – *icchā pakṣa*) byla

$$16, \qquad 12 \text{ (měsíců)}, \qquad x.$$

Nyní se členy zapsaly do buněk[123]

100	16
1	12
5	○

Zde je 5 „výsledek“ první strany a na druhé straně je výsledek neznámý, jejich záměnou se dostalo

100	16
1	12
○	5

Skupina s větším počtem členů byla ve druhém sloupci, součin těchto členů se vydělil součinem členů menší skupiny v prvním sloupci a tím se získalo řešení, které autor upravil a vyjádřil smíšeným číslem

$$x = \frac{16 \cdot 12 \cdot 5}{1 \cdot 100} = \frac{960}{100} = \frac{48}{5} = 9\frac{3}{5}.$$

Pravidlo tří, resp. pravidlo pěti se často užívalo při řešení úloh o úrocích. Úvodní část příkladu (*úrok ze sta za jeden měsíc je pět*) udává vlastně dnešní úrokovou míru.[124]

Pravidlo tří se z Indie rozšířilo na západ, vyskytovalo se v arabských dílech, používali je autoři ve středověké Evropě, kteří přijali indický název pravidlo tří i stejný způsob zápisu členů do řádku. Pro svoji praktičnost bylo jedním z oblíbených témat středověké matematiky, protože v běžném životě se vyskytuje mnoho úloh založených na přímé nebo nepřímé úměrnosti.

V čínské *Matematice v devíti kapitolách* je uvedena řada praktických příkladů řešných pomocí pravidla tří.

[122] Podle [Col], str. 36.

[123] Neznámá byla označena kroužkem, podle [DS1], str. 213, v některých komentářích zůstávalo místo prázdné.

[124] Ve starých indických úlohách bývala úroková míra vyjádřena pomocí míry kapitálu K, míry doby úročení T a míry úroku U, tomu odpovídala úroková míra vyjádřená desetinným číslem $i = \frac{U}{KT}$ nebo v procentech $p = \frac{U}{KT} \cdot 100$. Více je v části o úrocích.

Al-Bírúní věnoval pravidlu tří samostatnou práci *Fí rášíkát al-Hind* (*O indických rášíkátech*), v níž vysvětloval, že pravidlo je možné provést s libovolným lichým počtem členů. Při výkladu se odvolával na Eukleida a jeho komentátory, jejichž poznatky se snažil uplatnit při dokazování (viz [Ju]).

6.14. Výměnný obchod

Indický název směny byl *bhāṇḍa-prati-bhāṇḍa* (zboží za zboží). Všechny aritmetické práce obsahovaly problémy týkající se výměny zboží, tj. hledalo se řešení úloh tohoto typu: Jestliže můžeme koupit n_1 kusů určitého zboží za částku p_1 a n_2 kusů jiného zboží za částku p_2, kolik kusů x druhého zboží můžeme vyměnit za m_1 kusů zboží prvního druhu? Dnes bychom řešili rovnici

$$x\frac{p_2}{n_2} = m_1\frac{p_1}{n_1} \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{p_1 n_2 m_1}{p_2 n_1}.$$

Autoři upozorňovali, že problémy výměnného obchodu mohou být řešeny pravidlem tří, pěti atd. Platí zde ovšem úměra nepřímá – za stejnou cenu se dražšího zboží pořídí méně, proto bylo nutné pravidlo upravit. Brahmagupta to formuloval takto:[125]

BrSpSi/xii.13
Při výměně zboží se nejprve vymění ceny na prvním místě a další postup je stejný jako předchozí přímý [pro pravidlo tří nebo více členů].

Příklady, které sloužily k procvičení pravidla, jsou podobné, uvedeme například ten, který předložil Bhāskara II.:[126]

Lila/iii.86
Kdyby bylo tři sta kusů manga na tomto trhu za jedno dramma a třicet zralých granátových jablek za paṇa. Řekni rychle, příteli, kolik granátových jablek by mělo být směněno za 10 kusů manga.

Před vlastním výpočtem se nejprve musely ceny převést na stejnou jednotku podle vztahu 1 *dramma* = 16 *paṇa*. Potom se odpovídající členy zapsaly pod sebe tak, že v prvním řádku byly ceny

16	1
300	30
10	○

a jejich pořadí se vyměnilo

1	16
300	30
10	○

. Tím byla tabulka připravená pro provedení pravidla pěti, tj. vyměnily se výsledky

1	16
300	30
○	10

a vypočítal se součin členů

[125] Podle [Col], str. 285.
[126] Podle [Col], str. 38.

větší skupiny, který se vydělil součinem členů menší skupiny. Hledaný počet granátových jablek se tedy počítal ze vztahu

$$x = \frac{16 \cdot 30 \cdot 10}{1 \cdot 300} = \frac{4800}{300} = 16.$$

Pravidlo bylo oblíbené, protože mělo praktické uplatnění v běžném životě, v aritmetických textech najdeme mnoho podobných příkladů. V Evropě Leonardo Pisánský (Fibonacci) v knize *Liber abaci* formuloval různé úlohy kupeckých počtů založené na stejném principu jen s tím rozdílem, že veličiny příslušné jednomu druhu zboží zapisoval do řádku místo do sloupce (viz [BeJ1b]).

6.15. Určení

Indické aritmetické práce obsahovaly kromě aritmetických operací také osm určení, z nichž první část obsahovala úlohy různých typů. Mezi takové úlohy patřily příklady týkající se úroků, dělení v daném poměru, nákupu a prodeje, jemnosti zlata.[127] Některé úlohy vyžadovaly řešení kvadratických rovnic, proto byla v této části uvedena některá pravidla na jejich řešení. Na rozdíl od algebry, kde byla pravidla zformulována obecně, v aritmetických kapitolách bylo uvedeno pravidlo pro řešení daného konkrétního problému. Bhāskara II. mezi určení zařadil i permutace a kombinace. Druhé určení se týkalo posloupností, zbývajících šest řešilo různé problémy z geometriie – měření obvodu a velikosti plochy (tj. obsahy) základních rovinných útvarů, výpočty objemů výkopů, hromad cihel, hromad písku, práce při řezání dřeva a měření pomocí stínů.

6.16. Různé úlohy

Indické aritmetické práce obvykle obsahovaly část, ve které byly uvedeny úlohy týkající se různých témat. V této části byla popsána i některá další pravidla, která byla k jejich řešení potřebná, i když bychom je považovali spíš za algebraická. Jde hlavně o metodu chybného předpokladu.

6.16.1. Metoda chybného předpokladu

Metoda chybného (falešného) předpokladu, kterou znali už ve 2. tis. př. n. l. ve starém Egyptě a Mezopotámii (viz např. [BBV]), byla popsána ve všech starých indických matematických knihách. Většinou se užívala k řešení rovnice typu

$$ax = b, \tag{6.4}$$

kde se s její pomocí obcházelo přímé dělení. Rovnice (6.4) se podle metody chybného předpokladu řešila tak, že se zvolilo za x libovolné číslo x^*, vypočítal

[127] Jemnost zlata vyjadřovala jeho kvalitu, viz odstavec 6.16.6.

se součin $ax^* = b^*$ a pokud $b^* \neq b$, řešení původní rovnice se vyjádřilo ze vztahu

$$x = \frac{b \cdot x^*}{b^*}. \tag{6.5}$$

Při vhodné volbě hodnoty x^* byl výpočet neznámé ze vztahu (6.5) jednodušší než ze vztahu $x = \frac{b}{a}$.

Bhāskara II. metodu chybného předpokladu nazýval *iṣṭa karma* (pravidlo předpokladu) a považoval ji za důležitou. Napsal o ní toto:[128]

Lila/iii.50
S jakýmkoli číslem zvoleným podle libosti se zachází, jak bylo stanoveno v konkrétním problému, násobí se a dělí, zvětšuje nebo zmenšuje o zlomek [sebe], *pak daná veličina násobená zvoleným číslem a dělená tím* [co bylo nalezeno] *dává hledané číslo. Toto se nazývá metoda předpokladu.*

K uvedenému pravidlu komentátor Ganeśa připojil poznámku, že metoda používá pouze násobení, dělení a zlomky.

Metodou chybného předpokladu se řešila například následující úloha.[129]

Lila/iii.52
Z hromady pravých lotosových květů byly třetina, pětina a šestina obětovány pro bohy Śivu, Viṣṇu a Sūryu a čtvrtinu dostal darem Bhavānī. Zbývajících šest bylo darováno ctihodnému učiteli. Řekni rychle počet lotosů.

Vyjádření: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$, *známo* 6.

Zvolí se jedno libovolné číslo a podle procesu popsaného dříve je nalezeno množství 120.

Daný problém můžeme vyjádřit rovnicí

$$\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right) x = 6, \qquad \text{odtud} \qquad \frac{x}{20} = 6 \qquad \text{a} \qquad x = 120.$$

Podle původního postupu se zvolilo číslo $x^* = 60$, tím byl patrně nejmenší společný násobek jmenovatelů.

$$x - \frac{x}{3} - \frac{x}{5} - \frac{x}{6} - \frac{x}{4} = 6, \qquad x^* = 60,$$

po dosazení

$$60 - 20 - 12 - 10 - 15 = 3, \qquad b^* = 3,$$

128 Podle [Col], str. 23.
129 Podle [Col], str. 24.

a tedy podle (6.5)

$$x = \frac{6 \cdot 60}{3} = 120.$$

V rukopisu *Bakhshālī* byla metoda chybného předpokladu využita i při řešení rovnice

$$ax + b = c.$$

Libovolně zvolená hodnota x^* se dosadila za x do rovnice a stanovila se pravá strana

$$ax^* + b = c^*.$$

Pokud $c^* \neq c$, což bylo pravděpodobné, bylo potřeba provést „opravu". Správná hodnota x se vypočítala ze soustavy rovnic

$$\begin{aligned} ax + b &= c, \\ ax^* + b &= c^*. \end{aligned}$$

Odečtením rovnic a snadnou úpravou se získalo

$$x = x^* + \frac{c - c^*}{a}. \tag{6.6}$$

Na listu s označením folio 29 recto (viz obr. 6.2) je příklad řešený metodou chybného předpokladu. Lístek je však silně poškozen, proto je úloha čitelná jen zčásti, snad by se dala vyjádřit takto:[130]

> **BMs/29R**
> [Tři lidé mají určité bohatství.] *Bohatství prvního a druhého dá dohromady množství* 13, *bohatství druhého a třetího dohromady je* 14 *a bohatství prvního a třetího společně je* 15. *Řekni bohatství každého.*

Měla se tedy vyřešit soustava lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 13, \\ x_2 + x_3 &= 14, \\ x_3 + x_1 &= 15. \end{aligned}$$

Pokud se od druhé rovnice odečte první, dostaneme $x_3 - x_1 = 1$. Z této rovnice pak můžeme vyjádřit x_3 a dosadit do třetí rovnice. Tím získáme

$$2x_1 + 1 = 15.$$

Tato rovnice je jednoduchá, mohla by se řešit přímo. Příklad však měl pravděpodobně sloužit jako „demonstrační", proto se pro řešení této rovnice užila metoda chybného předpokladu.

[130] Podle [DS2], str. 47.

Zvolilo se $x_1^* = 5$ a postupným dosazením do první a druhé rovnice se dopočítalo $x_2^* = 8$ a $x_3^* = 6$. Pak by však třetí rovnice byla $5 + 6 = 11$ ($\neq 15$). Nyní se užitím metody chybného předpokladu vypočítala správná hodnota podle vzorce (6.6)

$$x_1 = 5 + \frac{15 - 11}{2} = 7,$$

z dalších rovnic se získaly správné hodnoty zbývajících neznámých $x_2 = 6$ a $x_3 = 8$.

(a)* . . ✣ || sūtraṁ || *guṇau* . . . . . [29r.]

. . . kadhanaṁ || guṇanyāsorūpahīnaṁlabdhaṁrūpaṁ

(b) prathamaṇyasya | tatrechchhāpaṁchaḥ | 5 | tatprathamacha . .

. 4 | 15 | tadādīśśodhayetkramāt *ādina* . . . *paṁchaśadv* .

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 . \end{matrix}$ . . . . . . kr . . . t . i . ch . ś .

*eta*chaturdaśabhiśoddhyaśeshaṁ | 6 | e . *npaṁcha*

(d) . . diset || udā || dhanā . . . .

. syadvitīyayonmiśraṁdhanaṁtatrattrayodashaḥ dvitīyatṛitīyayonmi .

. . . *śa* | ādyatṛitīyayonmiśraṁdhanaṁpaṁchadaśasmṛitaḥ ekaikasyadh*a*

. . . . . . chchhichekatthyatāṁmamaḥ | 13 / 1 | 14 / 1 | 15 / 1 |

Obr. 6.2. Rukopis *Bakhshālī*, folio 29 recto, převzato z [Kay1].

Ve staré Číně se dokonce používalo pravidlo dvou chybných předpokladů. Při řešení rovnice $ax = b$ se za neznámou x postupně dosadila libovolná čísla x_1, x_2, tím se pravé strany změnily o určité chyby r_1, r_2:

$$ax_1 = b + r_1, \qquad ax_2 = b + r_2,$$

odtud se snadnou úpravou vyjádřilo řešení původní rovnice $x = \dfrac{x_1 r_2 - x_2 r_1}{r_2 - r_1}$. Podobný postup se prováděl u rovnice $ax + b = c$ a rovněž při řešení soustavy lineárních rovnic

$$a_1x + b_1y = c_1,$$
$$a_2x + b_2y = c_2.$$

V *Matematice v devíti kapitolách* jsou takto řešeny pouze úlohy, kde chyby r_1, r_2 mají různá znaménka.[131]

Metoda dvou chybných předpokladů byla známá i v arabských zemích. V latinském překladu arabského rukopisu je odvolání na indický původ (viz [Ju]), přestože v indické matematice užívání pravidla dvou chybných předpokladů není doloženo.

6.16.2. Metoda inverze

Tato metoda se nazývala *vilomagati* (prováděná pozpátku) a v Indii byla užívána už na počátku našeho letopočtu. Nalezneme ji v dílech různých autorů, například Bhāskara II. uvedl:[132]

Lila/iii.47–48
Pravidlo inverze: dvě sloky.

K vyšetření veličiny, která je daná, udělej dělitele násobitelem, násobitele dělitelem; čtverec druhou odmocninou a druhou odmocninu čtvercem; sčítání odčítáním a odčítání sčítáním.

Jestliže se veličina měla zvětšit nebo zmenšit o svou část, ať jmenovatel zvětšený nebo zmenšený o čitatele se stane [správným] *jmenovatelem a čitatel zůstane nezměněn; a pak postupuj s ostatními operacemi obráceně, jak bylo doporučeno.*

Druhá část pravidla vyjadřuje násobení hledaného čísla zlomkem, tedy

$$x\left(1 \pm \frac{a}{b}\right) = c, \qquad x\,\frac{b \pm a}{b} = c,$$

operace k ní inverzní je násobení převrácenou hodnotou

$$x = c\,\frac{b}{b \pm a}.$$

[131] Například úlohy (7.9) až (7.20), podle [Hu], str. 175–184.
[132] Podle [Col], str. 21.

Tímto způsobem se řešila například úloha:[133]

Lila/iii.49
Příklad. Krásná dívko s rozechvělýma očima, znáš-li správnou metodu inverze, řekni mi, které číslo násobené 3 *a pak zvětšené o své* $\frac{3}{4}$ *a dělené* 7 *a zmenšené o svou* $\frac{1}{3}$ *a pak násobené samo sebou a pak z toho součinu zmenšeného o* 52 *je získána druhá odmocnina a přičteno* 8 *a součet dělený* 10 *dává dva?*

Vyjádření: Násobitel 3. *Přídavek* $\frac{3}{4}$. *Dělitel* 7. *Úbytek* $\frac{1}{3}$. *Čtverec. Odečteno* 52. *Druhá odmocnina. Přičteno* 8. *Dělitel* 10. *Dané číslo* 2.

Odpověď. Doporučeným postupem je výsledek 28, *číslo je nalezeno.*

Bylo třeba nalézt řešení rovnice

$$\frac{\sqrt{\left[\frac{3x\,(1+\frac{3}{4})}{7}(1-\frac{1}{3})\right]^2 - 52} + 8}{10} = 2.$$

Podle pravidla se postupovalo „odzadu" a jednotlivé operace se nahradily „inverzními":

$$x = \frac{\sqrt{(2\cdot 10 - 8)^2 + 52}\cdot\frac{3}{2}\cdot 7\cdot\frac{4}{7}}{3} = 28.$$

Pravidlo inverze dokládá, že autoři znali dvojice navzájem inverzních aritmetických operací a uměli je využít.

6.16.3. Operace saṅkramaṇa

Bhāskara II. uvedl pravidlo pro operaci *saṅkramaṇa*,[134] tedy pravidlo pro (souběžné) nalezení dvou čísel, známe-li jejich součet a rozdíl.[135]

Lila/iii.55
Pravidlo souběhu: polovina sloky.
Součet a rozdíl sečtený a odečtený a rozpůlený dává ty dvě veličiny.
Toto se nazývá souběh.

Čísla a, b jsou daná a hledají se čísla x a y, pro která platí

$$x + y = a,$$
$$x - y = b.$$

[133] Podle [Col], str. 23.
[134] Název je možno volně přeložit jako operace souběhu.
[135] Podle [Col], str. 26. Brahmagupta však podobná pravidla řadil do algebry, viz sloka BrSpSi/xiii.37, podle [Col], str. 340.

Řešení získáme sečtením, resp. odečtením rovnic

$$x = \frac{a+b}{2}, \qquad y = \frac{a-b}{2}.$$

Provedení operace *saṅkramaṇa* s „a ve spojení s b“ znamenalo vypočítat čísla $x = \frac{1}{2}(a+b)$ a $y = \frac{1}{2}(a-b)$. Operace byla využívána v mnoha úlohách a její znalost byla pokládána za samozřejmou.

Podobné pravidlo, ve kterém se místo součtu vyskytuje rozdíl druhých mocnin, Bhāskara II. nazval *viśama-karma* a popsal takto:[136]

> **Lila/iii.57**
> *Pravidlo odlišných operací: polovina sloky.*
> *Rozdíl čtverců dělený rozdílem čísel dává jejich součet: odkud jsou veličiny nalezeny způsobem dříve doporučeným.*

Hledá se tedy řešení soustavy, kde a a b jsou daná čísla

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= a, \\ x - y &= b. \end{aligned}$$

Platí

$$\frac{x^2 - y^2}{x - y} = \frac{a}{b}, \qquad \text{tedy} \qquad x + y = \frac{a}{b}$$

a použije-li se předchozí pravidlo, tj. provede-li se operace *saṅkramaṇa*, dostaneme

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + b\right), \qquad y = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} - b\right).$$

6.16.4. Úroky

Půjčování peněz bylo v Indii běžné už v dávných dobách, dokonce indický gramatik Pāṇini (kolem 500 př. n. l.) ve své *Gramatice* používal termíny úrok, zisk a daň. Úroková míra se v průběhu času, v různých lokalitách a mezi různými vrstvami lidí lišila, ale úrok 15 procent za rok byl považován za přiměřený.[137] Úrok byl měsíční a úroková míra byla obvykle daná ze sta, i když to nebylo pravidlem.[138]

V mnoha úlohách byla úroková míra popsána pomocí míry kapitálu K, míry doby úročení T a míry úroku U. Tomu odpovídá úroková míra vyjádřená desetinným číslem $i = \frac{U}{KT}$ nebo v procentech $p = \frac{U}{KT} \cdot 100$. Pro výpočet úroku u z kapitálu k za dobu úročení t se používal vzorec

$$u = k \cdot t \cdot i = k \cdot t \cdot \frac{U}{KT},$$

[136] Podle [Col], str. 26

[137] Podle [DS1].

[138] Některé staré indické úlohy z finanční matematiky jsou uvedeny v článku [Sy5].

podobným způsobem byl vyjádřen kapitál k, známe-li dobu úročení t a úrok u

$$k = \frac{u}{t \cdot i} = \frac{u}{t} \cdot \frac{KT}{U}$$

i doba úročení t, je-li dán kapitál k a úrok u

$$t = \frac{u}{k \cdot i} = \frac{u}{k} \cdot \frac{KT}{U}.$$

Pravidla pro řešení různých problémů týkajících se úroků bývala v knihách zařazena do oddílu nazvaného *miśraka-vyavahāra* (smíšené úlohy). Obtížnost a počet úloh, které autoři tematice úroků věnovali, se však lišil. *Āryabhaṭīya* obsahovala jen jedno pravidlo vztahující se k úrokům, zatímco Mahāvīra v díle *Gaṇita-sāra-saṁgraha* zformuloval 19 pravidel a doplnil je 35 příklady.

Jednoduché úlohy byly řešeny pomocí pravidla tří nebo pravidla pěti, některé složitější příklady vedly na kvadratické rovnice. Mahávíra v 6. kapitole výše zmíněné práce řešil i některé speciální teoretické problémy.

Brahmagupta popsal například pravidlo na výpočet doby úročení t, je-li dána míra úroku U z kapitálu k (zde platilo $K = k$) za míru doby úročení T, když se požaduje, aby výsledný kapitál byl n-násobkem původního, tj. aby součet kapitálu a úroku byl roven nk, tzn. $k + u = nk$, neboli hledala se doba úročení, za kterou je úrok roven $u = (n-1)k$.[139]

BrSpSi/xii.14 (část)
Kapitál se svým časem dělený úrokem a násobený násobkem zmenšeným o jedna je čas.

Uvedené pravidlo popisuje vzorec získaný pravidlem tří

$$t = (n-1)\,\frac{kT}{U}.$$

To odpovídá vzorci $t = \frac{u}{ki}$, kde k je kapitál, i je úroková míra (v úloze zadaná jako $i = \frac{U}{kT}$) a u je úrok (pro který platí $u = (n-1)k$). Tedy

$$t = \frac{u}{ki} = \frac{(n-1)\,k}{k\frac{U}{kT}} = (n-1)\frac{kT}{U}.$$

Pro lepší pochopení pravidla připojil komentátor Pṛthūdakasvāmin následující příklad:[140]

Jestliže úrok ze dvou set za měsíc je šest dramma, kdy se stejná částka ztrojnásobí?

[139] Podle [Col], str. 287.
[140] Podle [Col], str. 287.

Z uvedeného pravidla je zřejmé, že se počítalo podle vzorce

$$t = (3-1)\,\frac{200\cdot 1}{6} = \frac{400}{6} = 66\frac{2}{3} \quad \text{(měsíce)}.$$

Jiné Brahmaguptovo pravidlo řešilo tento problém: Částka zapůjčená se stejnou úrokovou mírou, která dává úrok U z kapitálu K za dobu úročení T, činí za t měsíců $m = k + u$. Kolik bylo zapůjčeno?[141]

BrSpSi/xii.14 (část)
Součet kapitálu a úroku dělený jedničkou přičtenou ke svému zisku je kapitál.

Podle pravidla se počítalo

$$k = \frac{m}{1 + t\frac{U}{KT}}.$$

Úroková míra je $i = \frac{U}{KT}$, pak úrok u, který se získá z neznámého kapitálu k je $u = kti = kt\frac{U}{KT}$ a celkový majetek, tj. součet kapitálu a úroku

$$m = k + u = k + kt\frac{U}{KT} = k\left(1 + t\frac{U}{KT}\right),$$

a odtud snadno vyjádříme k.

Výpočet bylo možné procvičit na příkladu:[142]

Částka zapůjčená s úrokem pět ze sta za měsíc činila šest krát šest za deset měsíců. Jaká částka byla v tomto případě půjčena?

Počítalo se podle postupu popsaného v pravidle, tedy

$$k = \frac{6\cdot 6}{1 + 10\frac{5}{100\cdot 1}} = \frac{36\cdot 100}{150} = 24.$$

Podobné příklady, jen s jinými hodnotami, najdeme i v dílech jiných autorů, například u Mahāvīry[143] nebo Bhāskary II.,[144] který zadal hodnoty: $U = 5$, $K = 100$, $T = 1$ (měsíc), $t = 12$ (měsíců, v zadání je 1 rok), $m = 1000$. V odpovědi je uvedeno, že kapitál $k = 625$. K tomu Bhāskara připojil poznámku, že tento příklad je možné řešit i pomocí metody chybného předpokladu. Do rovnice

$$k\left(1 + 12\frac{5}{100}\right) = m$$

[141] Podle [Col], str. 287.
[142] Podle [Col], str. 287.
[143] Viz sloka GaSaSa/vi.24, podle [Ran], str. 97.
[144] Viz sloka Lila/iv.89, podle [Col], str. 39.

nejprve dosadil $k_0 = 1$, z toho stanovil $m_0 = \frac{8}{5}$, a tedy $k = \frac{1000}{\frac{8}{5}} \cdot 1 = 625$.

Mnohé problémy vyžadovaly znalost řešení kvadratických rovnic.

Pravidlo uvedené v *Āryabhaṭīye* bylo určeno k řešení následujícího problému. Základní kapitál k je zapůjčen na jeden měsíc s neznámým úrokem u. Tento neznámý úrok je pak zapůjčen se stejnou úrokovou mírou na t měsíců. Za tuto dobu původní úrok spolu s úrokem z úroku činí a. Požaduje se úrok u základního kapitálu k.

Tato úloha vede na řešení kvadratické rovnice

$$tu^2 + ku - ak = 0,$$

jejíž řešení popsal Āryabhaṭa takto:[145]

> **Ar/ii.25**
> *Násob součet úroku z kapitálu a z úroku časem a kapitálem. K tomu přičti druhou mocninu poloviny kapitálu. Z toho vezmi druhou odmocninu. Odečti polovinu kapitálu a zbytek vyděl časem. Výsledkem bude úrok základního jmění.*

Tento postup odpovídá dnešnímu řešení kvadratické rovnice

$$u = \frac{-\frac{k}{2} \pm \sqrt{akt + \left(\frac{k}{2}\right)^2}}{t}.$$

Protože se však uvažovala pouze kladná řešení, výsledkem bylo

$$u = \frac{\sqrt{akt + \left(\frac{k}{2}\right)^2} - \frac{k}{2}}{t}.$$

Āryabhaṭa předložil příklad s hodnotami $k = 100$, $t = 6$, $a = 16$, kde hledaný úrok byl $u = 10$. Je zřejmé, že autor musel znát kvadratické rovnice a jejich řešení, i když se o nich obecně ve své práci *Āryabhaṭīya* vůbec nezmínil.

Brahmagupta a Mahāvīra řešili podobný problém ještě obecněji.[146] Kapitál k je zapůjčen na t_1 měsíců a z toho neznámý úrok u je zapůjčen na t_2 měsíců se stejnou úrokovou mírou a získá se a. Najdi u. Řešila se tedy kvadratická rovnice

$$u^2 + \frac{kt_1}{t_2}u - \frac{akt_1}{t_2} = 0,$$

jejíž řešení bylo počítáno jako

$$u = \sqrt{\frac{akt_1}{t_2} + \left(\frac{kt_1}{2t_2}\right)^2} - \frac{kt_1}{2t_2}.$$

---

[145] Podle [Cla], str. 38.

[146] Viz sloky BrSpSi/xii.15, podle [Col], str. 287–288, GaSaSa/vi.44, podle [Ran], str 102.

Opět se uvažovalo pouze jedno řešení s kladným znaménkem u odmocniny. Brahmagupta řešil příklad s hodnotami $k = 500$, $t_1 = 4$ (měsíce), $t_2 = 10$ (měsíců), $a = 78$ a řešením $u = 60$.[147]

Brahmagupta úlohy o úrocích a posloupnosti řadil do aritmetiky a postup řešení nepopisoval obecně, ale pouze pro daný typ úlohy.

Mahāvīra řešil i několik úloh, kde byl dán součet dvou veličin a nějaká další podmínka. Tyto příklady však byly pravděpodobně vytvořeny uměle a sloužily pouze k procvičování výpočtů, neboť například součet kapitálu a doby úročení nemá praktický význam. Na ukázku uvedeme jen některé.

Pravidlo na separaci kapitálu a doby úročení z jejich „smíšeného“ součtu řešilo úlohu, kde byl dán součet kapitálu a času $m = k+t$, byl znám úrok $u = kti$ s úrokovou mírou i popsanou mírou úroku U, mírou kapitálu K a mírou doby úročení T, tedy $u = kt\frac{U}{KT}$, a úkolem bylo určit kapitál k a dobu úročení t.[148]

> **GaSaSa/vi.29**
> *Od čtverce daného smíšeného součtu* [kapitálu a času] *se odečte míra kapitálu dělená mírou úroku a násobená mírou doby úročení a čtyřnásobkem daného úroku. Druhá odmocnina toho* [výsledného rozdílu] *je použita ve spojení s daným smíšeným součtem tak, aby mohla být provedena operace saṅkramaṇa.*

Podle pravidla se nejprve určilo

$$m^2 - 4u\frac{TK}{U} = (k+t)^2 - 4kt\frac{U}{KT}\frac{TK}{U} = (k+t)^2 - 4kt = (k-t)^2,$$

a pak[149]

$$\sqrt{(k-t)^2} = k - t.$$

Dále se provedla operace *saṅkramaṇa* s m ve spojení s $\sqrt{m^2 - 4u\frac{TK}{U}}$, tj. hledalo se řešení soustavy

$$\begin{aligned} k + t &= m, \\ k - t &= \sqrt{m^2 - 4u\frac{TK}{U}}, \end{aligned}$$

odkud $\quad k = \frac{1}{2}\left(m + \sqrt{m^2 - 4u\frac{TK}{U}}\right) \quad$ a $\quad t = \frac{1}{2}\left(m - \sqrt{m^2 - 4u\frac{TK}{U}}\right).$

Za pravidlem byly připojeny příklady k procvičování, jeden z nich obsahuje tyto hodnoty: míra úroku $U = 2\frac{1}{2}$, míra kapitálu $K = 60$, míra doby úročení $T = 1\frac{1}{2}$ (měsíce), úrok $u = 24$, součet doby úročení s kapitálem $m = k+t = 60$.

[147] Podle [Col], str. 288.

[148] Podle [Ran], str. 98, a [Er], str. 108.

[149] Uvažovali pouze $\sqrt{a^2} = a$, nikoli $\sqrt{a^2} = |a|$.

Mahāvīrovo řešení je $k = 36$, $t = 24$ (měsíců).[150] Podobné pravidlo uvedl Mahāvīra i pro smíšený součet doby úročení a míry úroku $m = t + U$.[151]

Mahāvīra také uvedl pravidlo k oddělení různých úroků z různých kapitálů úročených po různé doby úročení ze smíšeného součtu úroků, tj. řešil úlohu, v níž byl znám součet úroků $m = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, kde $u_j = k_j t_j i$. I když to nebylo přímo uvedeno, předpokládalo se, že úroková míra je ve všech případech stejná:[152]

GaSaSa/vi.37
Nechť každé množství kapitálu násobené [odpovídající] *dobou úročení a násobené* [daným] *celkovým úrokem je samostatně vydělené součtem součinů získaných vynásobením každého kapitálu odpovídající dobou úročení a nechť úrok* [z kapitálu, se kterým se zacházelo] *je tak vyjádřen.*

Označíme-li postupně kapitály $k_1, k_2, \ldots, k_n$ a odpovídající doby úročení $t_1, t_2, \ldots, t_n$ a úroky $u_1, u_2, \ldots, u_n$, pak platí:

$$\begin{aligned} u_1 &= k_1 t_1 i, \\ u_2 &= k_2 t_2 i, \\ &\vdots \\ u_n &= k_n t_n i, \\ u_1 + u_2 + \cdots + u_n &= m. \end{aligned}$$

Sečtením prvních n rovnic dostaneme

$$m = i(k_1 t_1 + k_2 t_2 + \cdots + k_n t_n).$$

Odtud se vyjádří úroková míra

$$i = \frac{m}{k_1 t_1 + k_2 t_2 + \cdots + k_n t_n},$$

a pak se každý z úroků vypočítá podle vzorce

$$u_j = k_j t_j i = \frac{k_j t_j m}{k_1 t_1 + k_2 t_2 + \cdots + k_n t_n}.$$

Následoval příklad, kde byly jednotlivé kapitály $k_1 = 40$, $k_2 = 30$, $k_3 = 20$ a $k_4 = 50$, příslušné doby úročení $t_1 = 5$, $t_2 = 4$, $t_3 = 3$ a $t_4 = 6$ měsíců. Součet úroků je $m = 34$. Hledané úroky jsou $u_1 = 10$, $u_2 = 6$, $u_3 = 3$ a $u_4 = 15$.[153]

[150] Viz sloka GaSaSa/vi.32, podle [Ran], str. 98–99. Druhé řešení $k = 24$, $t = 36$ (měsíců) autor nezmínil.

[151] Viz sloka GaSaSa/vi.33, podle [Ran], str. 99.

[152] Podle [Ran], str. 100.

[153] Viz sloka GaSaSa/vi.38, podle [Ran], str. 100.

Podobné pravidlo sloužilo k separaci různých kapitálů úročených s různými úroky po různé doby úročení ze smíšeného součtu kapitálů. Byl dán součet $m = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$, kde $k_j = \frac{u_j}{t_j i}$, jednotlivé kapitály se počítaly jako

$$k_j = \frac{m}{\frac{u_1}{t_1} + \frac{u_2}{t_2} + \cdots + \frac{u_n}{t_n}} \cdot \frac{u_j}{t_j}.$$

Jiné Mahāvīrovo pravidlo sloužilo k oddělení kapitálu a úroku z jejich smíšeného součtu, přičemž kapitál byl ve všech případech stejný a úrok byl získán při různých dobách úročení:[154]

> **GaSaSa/vi.47**
> *Věz, že když se rozdíl mezi* [libovolnými dvěma danými] *smíšenými součty násobenými vždy dobou* [úročení] *toho druhého, vydělí rozdílem těchto časů, to, co je podíl, je požadovaný kapitál vzhledem ke* [všem] *těmto* [daným smíšeným součtům].

V takovýchto úlohách byly dány součty

$$\begin{aligned} m_1 &= k + u_1 = k + kit_1, \\ m_2 &= k + u_2 = k + kit_2, \\ &\vdots \\ m_n &= k + u_n = k + kit_n. \end{aligned}$$

K určení kapitálu k stačí libovolné dvě rovnice, pro $n > 2$ má úloha větší počet rovnic než neznámých (kromě kapitálu k je neznámou ještě úroková míra i). Uvažujeme-li například první dvě rovnice, pak podle Mahāvīrova pravidla se kapitál počítá postupem odpovídajícím vzorci

$$k = \frac{m_1 t_2 - m_2 t_1}{t_2 - t_1},$$

protože

$$\frac{m_1 t_2 - m_2 t_1}{t_2 - t_1} = \frac{(k + kit_1)t_2 - (k + kit_2)t_1}{t_2 - t_1} = \frac{kt_2 - kt_1}{t_2 - t_1}.$$

Další pravidlo uvádělo, jak určit kapitál k, který byl zapůjčen dvakrát s různou dobou úročení t_1, t_2 a různou úrokovou mírou $i_1 = \frac{U_1}{K_1 T_1}$ a $i_2 = \frac{U_2}{K_2 T_2}$, když byl znám rozdíl zisků (úroků) $u_1 - u_2$.[155] Hledaný kapitál se počítal postupem odpovídajícím vzorci

$$k = \frac{u_1 - u_2}{\frac{t_1 U_1}{T_1 K_1} - \frac{t_2 U_2}{T_2 K_2}}.$$

[154] Podle [Ran], str. 102, 103.
[155] Viz sloka GaSaSa/vi.54, podle [Ran], str. 104.

Ve většině příkladů indických autorů převládalo jednoduché úrokování, náznak složeného úrokování pro dvě období je v úlohách vedoucích na kvadratické rovnice.

Poznamenejme, že úlohy týkající se úrokového počtu včetně složeného úrokování se dochovaly na mezopotámských tabulkách z 2. tisíciletí př. n. l.

6.16.5. Rozdělování v daném poměru

Na ukázku ještě uvedeme některá pravidla a příklady týkající se rozdělování v daném poměru a úlohy související s počítáním jemnosti zlata. Přestože většina těchto problémů je algebraická, bývaly zahrnuty do aritmetiky. Nejprve bylo popsáno pravidlo pro řešení každého typu, pak následovaly příklady.

Rozdělování v daném poměru se nazývalo *prakṣēpa*. Mahāvīra k tomu uvedl pravidlo:[156]

> **GaSaSa/vi.79$\frac{1}{2}$**
> *Operace úměrného dělení je ta, ve které se* [dané] *společné množství* [které se má rozdělit] *nejprve dělí součtem čitatelů zlomků se společným jmenovatelem,* [vyjadřující různé úměrné části] *jejich jmenovatelé jsou vyloučeni z úvahy; a* [pak] *se musí násobit* [jednotlivě] *těmi úměrnými čitateli. Toto učenci nazývají kuṭṭīkāra.*

Má-li se rozdělit množství m na n dílů v poměru $p_1 : p_2 : \cdots : p_n$, podle tohoto pravidla se velikost d_i každého dílu vypočítá podle vzorce

$$d_i = \frac{m}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}\, p_i.$$

Celý postup je patrný z příkladu:[157]

> **GaSaSa/vi.80$\frac{1}{2}$**
> *Zde* [v tomto problému] 120 *zlatých kusů je rozděleno mezi* 4 *služebníky v poměrných dílech $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{6}$. Ó, počtáři, řekni mi rychle, kolik dostanou.*

Poměr $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{6}$ se vyjádřil pomocí zlomků se stejnými jmenovateli $\frac{6}{12} : \frac{4}{12} : \frac{3}{12} : \frac{2}{12}$ a v dalším výpočtu se počítalo pouze s čitateli. Takový čitatel se nazýval úměrný čitatel nebo *prakṣēpa* (stejně jako byl název operace dělení v daném poměru). Počet kousků zlata, které získal každý ze služebníků, se pak vypočítal podle pravidla

$$d_1 = \tfrac{120}{6+4+3+2}\,6 = 48, \qquad d_2 = \tfrac{120}{15}\,4 = 32,$$
$$d_3 = \tfrac{120}{15}\,3 = 24, \qquad d_4 = \tfrac{120}{15}\,2 = 16.$$

---

[156] Podle [Ran], str. 110.
[157] Podle [Ran], str. 110.

6.16.6. Počítání jemnosti zlata

Pro počítání zlata, tzv. *suverṅa-gaṅita*, se uváděla jemnost zlata pomocí čísla zvaného *varṇa*. Stupeň jemnosti byl tím vyšší, čím bylo zlato čistší. Pravidla pro počítání uváděla většina autorů, například Mahāvīra formuloval jedno z nich takto:[158]

> **GaSaSa/vi.169**
> *Musí být známo, že* [součet různých] *výrobků zlata násobených* [svými] *varṇa, když se vydělí smíšeným zlatem* [celkovým počtem kusů] *způsobí* [výsledné] *varṇa.* [Původní *varṇa* každého dílu] *když je vydělené výsledným varṇa* [smíšeného celku] *a násobené množstvím zlata* [v tom dílu] *způsobí odpovídající množství* [smíšeného] *zlata.*

Vytvoří se směs zlata z n dílů, i-tý díl obsahuje k_i kusů s jemností zlata v_i *varṇa*, pak jemnost smíšeného zlata je

$$v = \frac{k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_n v_n}{k_1 + k_2 + \cdots + k_n}.$$

Množství smíšeného zlata, které má hodnotu stejnou jako i-tý díl, se vypočítá podle vzorce

$$s_i = \frac{v_i}{v} k_i.$$

Za pravidlem byl uveden příklad:[159]

> **GaSaSa/vi.170–171$\frac{1}{2}$**
> *Je* 1 *kus* [zlata] 1 *varṇa,* 1 *kus* 2 *varṇa,* 1 *kus* 3 *varṇa,* 2 *kusy* 4 *varṇa,* 4 *kusy* 5 *varṇa,* 7 *kusů* 14 *varṇa a* 8 *kusů* 15 *varṇa. Hoď tyto do ohně, udělej ze všech jednu* [hmotu] *a pak řekni, jaká je varṇa smíšeného zlata. Toto smíšené zlato je rozděleno mezi vlastníky výše uvedených kusů. Co každý z nich dostane?*

6.16.7. Kombinatorika

Ve staré Indii byla známa a využívána pravidla k výpočtu kombinací a variací. Variace se uplatnily v prozodii, při výpočtu různých možností střídání dlouhých a krátkých slabik, kombinace ve farmacii při míchání směsí z různých přísad atd.

Používání kombinací mělo v Indii dlouhou tradici, už v 5. stol. př. n. l. byla v medicínské práci *Suśruta-Saṁhitā* řešena úloha, kolik různých chutí lze vytvořit ze šesti základních – sladké, kyselé, slané, ostré, hořké a trpké.[160]

---

[158] Podle [Ran], str. 138-139.
[159] Podle [Ran], str. 139.
[160] Viz 3. kapitola, odstavec 3.4, podle [DS5].

Pravidla na výpočet kombinací k-té třídy z n prvků uvedli Mahāvīra, Śrīdhara i Bhāskara II. Jejich metody odpovídají současným vzorcům, jen formulace se u různých autorů mírně lišila.

Bhāskara II. pravidlo vyjádřil takto:[161]

Lila/iv.110–112 (část)
Nechť čísla od jedničky po jedné nahoru řazená v obráceném pořadí jsou dělená těmi stejnými v přímém pořadí; a nechť následný je násobený předchozím a další předcházejícím [výsledkem]. *Několik výsledků jsou změny, jedné, dvou, tří atd. Toto se nazývá obecné pravidlo.*

Tímto způsobem Bhāskara definoval kombinační číslo pro výpočet kombinací k-té třídy z n prvků

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{k},$$

využíval také vztah

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

V následujícím příkladu je uveden postup nalezení počtu všech možností střídání dlouhých a krátkých slabik v šestislabičném verši.[162]

Lila/iv.113
Jednoduchý příklad z prozodie: V permutacích metra gāyatrī, řekni rychle, příteli, kolik je možných změn ve verši? A řekni zvlášť, kolik je kombinací s jednou [dvěma, třemi] *atd. dlouhými slabikami.*

Verš sloky *gāyatrī* se skládal ze šesti slabik, proto se zapsala čísla od jedné do šesti v přímém i obráceném pořadí.

6	5	4	3	2	1
1	2	3	4	5	6

Podle postupu uvedeného v pravidle se počítalo takto:

a) pro jednu dlouhou slabiku se uvažoval pouze první sloupec tabulky a horní číslo se dělilo dolním, tedy $6 : 1 = 6$ možných změn ve verši,

b) pro dvě dlouhé slabiky se vzala čísla ve druhém sloupci tabulky, vydělila se stejným způsobem a vynásobila předchozím výsledkem, tedy $6 \cdot \frac{5}{2} = 15$ možných změn ve verši,

[161] Podle [Col], str. 49.

[162] Podle [Col], str. 49. Metrum *gāyatrī* popisovalo sloky skládající se z 24 slabik. Ve védské posvátné prozodii byly uspořádané do tří veršů po osmi slabikách, zatímco světský text se stejnou metrikou měl sloky tvořené šestislabičnými čtveřicemi.

c) dál se postupovalo stejně. Ve verši se třemi dlouhými slabikami bylo možné provést $15 \cdot \frac{4}{3} = 20$ změn, pro čtyři dlouhé slabiky to bylo $20 \cdot \frac{3}{4} = 15$ změn, pro pět dlouhých slabik bylo $15 \cdot \frac{2}{5} = 6$ změn a ve verši se šesti dlouhými slabikami byla pouze jedna možnost $6 \cdot \frac{1}{6} = 1$. Součet těchto všech možných změn je $1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64\,(= 2^6)$.

K výpočtu Bhāskara ještě přidal poznámku, že stejným způsobem by se určil i počet všech možností střídání dlouhých a krátkých slabik v celé sloce, tj. ve čtveřici šestislabičných veršů. Šlo o výpočet $2^{24} = 16\,777\,216$.

Kombinatorice věnoval Bhāskara II. i dvanáctou kapitolu *Līlāvatī*, kde uvedl pravidla na počítání počtu čísel, která mohou být vytvořena z daného počtu číslic, i když se některé číslice opakovaly. Zformuloval tak pravidla pro výpočet permutací bez opakování i s opakováním.[163]

> **Lila/xii.267** (část)
> *Pravidlo. Součin* [členů] *aritmetické posloupnosti začínající jedničkou, po jedné rostoucí až k počtu míst budou permutace čísla se stanovenými číslicemi.*

Pravidlo vyjadřuje známý vzorec

$$P(n) = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$$

K procvičení pravidla bylo uvedeno několik příkladů, jedním z nich je tento:[164]

> **Lila/vii.268** (část)
> *Příklad. Kolik může být variací čísla s trojkou, devítkou a osmičkou?*
>
> *Vyjádření:* 3, 9, 8.
> *Aritmetická posloupnost je* 1, 2, 3, *její součin je* 6 *a tolik je variací čísla.*

Následovala pravidla pro počet permutací s opakováním, variací i variací s opakováním. Jejich formulace nejsou na první pohled příliš srozumitelné, ale odpovídají dnes používaným vzorcům:[165]

$$P'_{k_1,k_2,\ldots,k_j}(n) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_j!}, \qquad \text{kde} \quad \sum_{i=1}^{j} k_i = n,$$

$$V_k(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1), \qquad V'_k(n) = n^k.$$

[163] Podle [Col], str. 123.
[164] Podle [Col], str. 123.
[165] Viz sloky Lila/xii.270, 272, 274, podle [Col], str. 125–126.

Kromě běžných výpočtů variací a kombinací zformuloval Bhāskara II. speciální pravidlo, jak nalézt počet všech m-ciferných čísel, jestliže je dán jejich ciferný součet n:[166]

$$\frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-m+1}{m-1},$$

za předpokladu, že součet $n < m+9$. Pro lepší pochopení následoval příklad:[167]

> **Lila/xiii.275**
> *Příklad. Kolik je různých čísel s číslicemi na pěti místech, jejichž součet je třináct? Jestli to víš, prozraď je.*

Dosazením do vzorce odpovídajícího pravidla vypočítal počet čísel

$$\frac{12}{1} \cdot \frac{11}{2} \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{11880}{24} = 495.$$

Kombinatorika ve starých indických textech je podrobně popsána v článku [DS5].

6.16.8. Úlohy o pohybu

Āryabhaṭa I. popsal pravidlo na výpočet okamžiku setkání dvou planet, kde vysvětloval, že v případě pohybu stejným směrem se musí vzdálenost dělit rozdílem rychlostí obou planet; pohybují-li se proti sobě, je třeba dělit vzdálenost součtem rychlostí. Označíme-li neznámý čas x, vzdálenost d a rychlosti v_1 a v_2, jde o řešení rovnic:

$$\begin{aligned} xv_1 - xv_2 = d \quad &\Rightarrow \quad x = \frac{d}{v_1 - v_2} \qquad \text{(pohyb stejným směrem)}, \\ xv_1 + xv_2 = d \quad &\Rightarrow \quad x = \frac{d}{v_1 + v_2} \qquad \text{(pohyb proti sobě)}. \end{aligned}$$

K tomu ještě Āryabhaṭa poznamenal, že v případě záporného výsledku se setkání uskutečnilo v minulosti.[168]

Podobné úlohy se později v různých obměnách vyskytovaly jako „úlohy o poslech“. Zařadili je do své práce například Mahāvīra a Śrīdhara. Řešení některých takových úloh vyžadovalo znalost řešení kvadratických rovnic, rukopis *Bakhshālī* například obsahuje několik úloh typu:[169]

---

[166] Viz sloka Lila/xiii.274, podle [Col], str. 126.
[167] Podle [Col], str. 126.
[168] Viz Ar/ii.31, podle [Cla], str. 41.
[169] Podle [DS2], str. 60.

Jistý člověk cestuje rychlostí v_1 *yojana* první den a každý následující den má rychlost o d *yojana* větší. Jiná osoba cestující stejnoměrnou rychlostí v_2 *yojana* za den vyrazila o t dní dříve. Kdy první člověk dostihne druhého?

Kdybychom řešili stejný problém dnes, sestavili bychom kvadratickou rovnici. Označíme-li x hledaný počet dní, pak pro dráhy s_1, s_1, které ujde první a druhý člověk, platí

$$s_1 = \frac{x}{2}\left[2v_1 + (x-1)d\right], \qquad s_2 = v_2(t+x).$$

Protože oba ujdou stejnou vzdálenost, z rovnosti drah získame kvadratickou rovnici pro neznámou x

$$dx^2 - [2(v_2 - v_1) + d]x - 2tv_2 = 0,$$

jejíž řešení lze vyjádřit ve tvaru

$$x = \frac{\sqrt{[2(v_2 - v_1) + d]^2 + 8dtv_2} + [2(v_2 - v_1) + d]}{2d}. \tag{6.7}$$

Výrazu $2(v_2 - v_1) + d$ se říkalo *pratinihita* (odložené stranou), jeho druhá mocnina $[2(v_2 - v_1) + d]^2$ se nazývala *kṣepa*. Vzorci (6.7) odpovídá i postup výpočtu uvedený v rukopisu, i když žádnou rovnici nezmiňuje:[170]

BMs/5r – Pravidlo 19
Denní cesta $[v_2]$ *je zmenšená o chůzi za první den* $[v_1]$, *zdvojnásobená a zvětšená o přírůstek* $[d]$. [Výsledek se nazývá] *pratinihita, který když se násobí sám sebou, dostane se množství kṣepa. Když je přičteno množství kṣepa k součinu denní cesty a začátku* $[t]$ *vynásobenému osminásobkem přírůstku, z toho druhá odmocnina zvětšená o pratinihita* [odložené množství] *a dělená dvojnásobkem přírůstku dá požadovaný počet dnů.*

Na lístku folio 5 verso (viz obr. 6.3) se zachoval celý postup řešení, který je detailně vysvětlen na konkrétním příkladu pro $v_2 = 5$, $t = 6$, $v_1 = 3$, $d = 4$. Jednotlivé kroky výpočtu byly řazené takto:

denní cesta zmenšená o chůzi za první den $[v_2 - v_1]$	$5 - 3 = 2$,
je zdvojnásobená $[2(v_2 - v_1)]$	$2 \cdot 2 = 4$,
a zvětšená o přírůstek (odložené stranou) $[2(v_2 - v_1) + d]$	$4 + 4 = 8$,
tento násobený sám sebou je určen	
(jako množství kṣepa) $[(2(v_2 - v_1) + d)^2]$	$8 \cdot 8 = 64$,
součin denní cesty a začátku $[v_2 t]$	$5 \cdot 6 = 30$,
vynásobený osmi $[8v_2 t]$	$8 \cdot 30 = 240$,
vynásobený přírůstkem $[8v_2 td]$	$240 \cdot 4 = 960$,
je přičten k množství kṣepa	$64 + 960 = 1024$,
z toho druhá odmocnina	$\sqrt{1024} = 32$,
zvětšená o odložené množství	$32 + 8 = 40$,
dělená dvojnásobkem přírůstku	
dá požadovaný počet dnů $[40 : (2d)]$	$[40 : 8 = 5 = x]$.

[170] Podle [Ha1], str. 293.

. . . . hataṁ | 30 | [5v.]

. . . dinagamanamādirahitaṁdinagamanayojana ϕ pañcha | 5 | ādi .

. . . 3 | rahitaṁjātaṁ | 2 | dviguṇaṁ | 4 | tachchottareṇasaṁyutaṁ | 8 |

. .*ātma*guṇaṁ | 64 | eśakshepasaṁjñakorāsi | ashṭottarasaṁgu . i . .

. *la*bdharāshi | 30 | ashṭaguṇaṁ | 240 | uttareṇaguṇaṁ uttaraṁ | 4 | .

. . guṇitaṁjātaṁ | 960 | kshepasaṁjñakodatvā | tatrakshepasaṁjñ . .

4 | yutaṁjātaṁ | 1024 | asyamūlaṁ | 32 | pratinahi*ta* . . . .

i . m | *8* | y*u*taṁjātaṁ | 40 | u . . . . ṁ . . . .

Obr. 6.3 Rukopis *Bakhshālī*, folio 5 verso a jeho přepis, převzato z [Kay1].

6.17. Posloupnosti

Indické práce obsahovaly kapitolu věnovanou posloupnostem, hlavně aritmetické, někdy i geometrické. Posloupnost se nazývala *śreḍhi*[171] a termín *śreḍhi-vyavahāra* znamenal „určování“ posloupností.

Pro člen posloupnosti byl obecně užíván název *dhana*, první člen byl *ādi-dhana*, jakýkoli další člen se nazýval *iṣṭa-dhana* (hledaný člen). Pokud byla posloupnost konečná, zmiňoval se ještě střední člen *madhya-dhana* a poslední člen *antya-dhana*. Druhá část názvu (*dhana*) se často vynechávala a místo složeného názvu se používalo pouze *ādi*, *iṣṭa*, *madhya* a *antya*. Prvnímu členu aritmetické posloupnosti se někdy říkalo *prabhava* (počáteční člen), *mukha* nebo *vadana* či *vaktra* (výrazy pro „čelo“), diference se nazývala *caya*, *pracaya* (přídavek, zvýšení) nebo *uttara* (přebytek). Pro kvocient geometrické posloupnosti

[171] Někdy též *śreṇī* nebo *śreṇi*; tyto termíny vyjadřovaly linku, řádek, řadu, posloupnost, podle [DS6].

se užíval název *guṇa* či *guṇaka* (násobitel). Když se chtělo zdůraznit, že jde o geometrickou posloupnost, použil se termín *guṇa-śreḍhi.*

Počet členů posloupnosti se nazýval *pada* (stopa, krok) nebo *gaccha* (doba, perioda). Pro součet posloupnosti byl užíván název *sarva-dhana* (souhrn všech členů), *śreḍhi-phala* (výsledek posloupnosti), *śreḍhi-gaṇita* nebo krátce *gaṇita*, tj. stejný název jako pro „počítání“, protože součet byl nalezen pomocí výpočtu.

6.17.1. Aritmetická posloupnost

Samotný pojem aritmetická posloupnost však nebyl nikde definován. Pravidla byla popsána slovy bez matematické symboliky a odpovídala vzorcům, které dnes používáme.

Všichni autoři uváděli pravidlo pro stanovení součtu prvních n členů aritmetické posloupnosti, které v současné symbolice můžeme vyjádřit vzorcem[172]

$$s_n = n\left(a_1 + \frac{n-1}{2}d\right),$$

kde a_1 je první člen, d diference, n počet členů, nebo

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n\frac{a_1 + a_n}{2},$$

kde $\frac{a_1+a_n}{2}$ je „průměr“ posloupnosti.

Āryabhaṭa I. definoval také průměr m_k libovolných k po sobě jdoucích členů $a_{p+1}, \ldots, a_{p+k}$ a jejich součet[173]

$$m_k = a_1 + \left(\frac{k-1}{2} + p\right)\cdot d, \qquad s_k^* = m_k \cdot k.$$

Indičtí autoři uváděli též pravidlo na výpočet prvního členu posloupnosti a_1, je-li znám součet s_n, diference d a počet členů n[174]

$$a_1 = \frac{s_n}{n} - \frac{(n-1)d}{2}$$

i pravidlo pro určení diference d, je-li znám součet s_n, první člen a_1 a počet členů n[175]

$$d = \left(\frac{s_n}{n} - a_1\right) : \frac{(n-1)}{2}.$$

[172] Viz sloky BrSpSi/xii.17, podle [Col], str. GaSaSa/vi.290, 290, podle [Ran], str. 168.
[173] Viz sloka Ar/ii.19, podle [Cla], str. 35.
[174] Viz sloky Lila/v.122, podle [Col], str. 53, GaSaSa/vi.292, podle [Ran], str. 168.
[175] Viz sloky Lila/v.123, podle [Col], str. 54, GaSaSa/vi.292, podle [Ran], str. 168.

Existovaly úlohy, kde bylo úkolem stanovit počet členů n, je-li znám součet s_n, první člen a_1 a diference d. Úpravou vzorce

$$s_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

pro součet prvních n členů se získá kvadratická rovnice

$$n^2 d + (2a_1 - d)n - 2s_n = 0$$

s neznámou n, odtud

$$n = \frac{\sqrt{(2a_1 - d)^2 + 8ds_n} - (2a_1 - d)}{2d}. \tag{6.8}$$

Tyto problémy vyžadovaly znalost řešení kvadratických rovnic, přesto bývaly zařazovány do aritmetiky, protože při jejich řešení se rovnice nevytvářela; algoritmus popisoval jednotlivé kroky výpočtu neznámé veličiny pomocí známých, byl však vytvořen pouze pro jeden konkrétní typ úlohy. Například Brahmagupta k postupu řešení uvedl:[176]

> **BrSpSi/xii.18**
> *Přičti čtverec rozdílu mezi dvojnásobkem prvního členu a společného přírůstku* [diference] *k součtu posloupnosti vynásobenému osminásobkem přírůstku. Odmocnina zmenšená o předchozí zbytek dělená dvojnásobkem přírůstku je doba* [počet členů].

Brahmaguptův postup odpovídá vzorci (6.8). Podobné pravidlo znal i Āryabhaṭa I., jehož výpočet odpovídá vztahu[177]

$$n = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{(2a_1 - d)^2 + 8s_n d} - 2a_1}{d} + 1\right).$$

Bhāskara II. totéž vyjádřil ve tvaru[178]

$$n = \frac{\sqrt{2s_n d + (a_1 - \frac{d}{2})^2} - a_1 + \frac{d}{2}}{d}.$$

Na ukázku uvedeme příklad z *Līlāvatī*:[179]

> **Lila/v.126**
> *Příklad. Člověk dal první den tři dramma a pokračoval v rozdělování almužny zvětšované o dvě* [denně] *a tak věnoval kněžím tři sta šedesát dramma. Řekni rychle za kolik dní?*
>
> *Vyjádření: První člen* 3*, diference* 2*, doba ?, součet* 360*.*
> *Odpověď: Doba* 18*.*

[176] Podle [Col], str. 291.
[177] Viz sloka Ar/ii.20, podle [Cla], str. 35.
[178] Viz sloka Lila/v.125, podle [Col], str. 54.
[179] Podle [Col], str. 54.

Výsledek se získal výpočtem podle posledního vzorce

$$n = \frac{\sqrt{2 \cdot 360 \cdot 2 + (3 - \frac{2}{2})^2} - 3 + \frac{2}{2}}{2} = \frac{\sqrt{1440 + 4} - 2}{2} = \frac{36}{2} = 18.$$

V rukopisu *Bakhshālī* na listech folio 65 verso, 56 verso, 56 recto, 64 recto je řešení příkladu, v němž se má určit počet členů n aritmetické posloupnosti, kde první člen je $a_1 = 1$, diference $d = 1$ a součet prvních n členů $s_n = 60$.[180] Počítalo se postupem odpovídajícím výše uvedenému vzorci (6.8), tedy

$$n = \frac{\sqrt{(2-1)^2 + 8 \cdot 1 \cdot 60} - (2-1)}{2} = \frac{\sqrt{481} - 1}{2}.$$

V tomto příkladě však číslo 481 není čtvercem a jeho hodnota byla určena pouze přibližně, ve výpočtu je uvedena první i druhá aproximace čísla $\sqrt{481}$:

$$\sqrt{481} \approx \frac{922}{42} = q_1, \qquad \sqrt{481} \approx \frac{424\,642}{19\,362} = q_2.$$

Tyto aproximace se určovaly tak, že místo čísla $\sqrt{Q} = \sqrt{A^2 + B} = q$ se uvažovala hodnota q_1, resp. q_2[181]

$$q_1 = A + \frac{B}{2A}, \qquad \text{resp.} \qquad q_2 = A + \frac{B}{2A} - \frac{\left(\frac{B}{2A}\right)^2}{2(A + \frac{B}{2A})}.$$

Ve zmiňovaném rukopisu byl také řešen problém, kde se vyskytovala úloha o poslech, jejichž rychlosti tvořily aritmetickou posloupnost:[182]

Dvě osoby vyrazí různými počátečními rychlostmi v_1 a v_2. Každý následující den se jejich rychlost zvětší o d_1, resp. d_2. Za jakou dobu ujdou stejnou vzdálenost?

Pokud cesty obou osob trvají stejnou dobu, urazí stejnou vzdálenost tehdy, až budou mít stejné celkové rychlosti, tj. stejný součet rychlostí za stejný počet dnů. Označíme-li počet dnů x, pak rychlost první osoby tvoří aritmetickou posloupnost, kde první člen je v_1 a diference d_1

$$v_1,\ v_1 + d_1,\ v_1 + 2d_1,\ \ldots,\ v_1 + (n-1)d_1,\ \ldots$$

podobně i pro druhou osobu, první člen je v_2 a diference d_2

$$v_2,\ v_2 + d_2,\ v_2 + 2d_2,\ \ldots\ v_2 + (n-1)d_2,\ \ldots$$

[180] Podle [Kay2], str. 179.

[181] O výpočtu přibližných hodnot druhých odmocnin je více informací uvedeno v 7. kapitole, v odstavci 7.3.

[182] Podle Podle [DS2], str. 43.

Součet rychlostí každé osoby vypočítáme pomocí metody *rūponā* – vzorce pro součet prvních x členů aritmetické posloupnosti, tj.

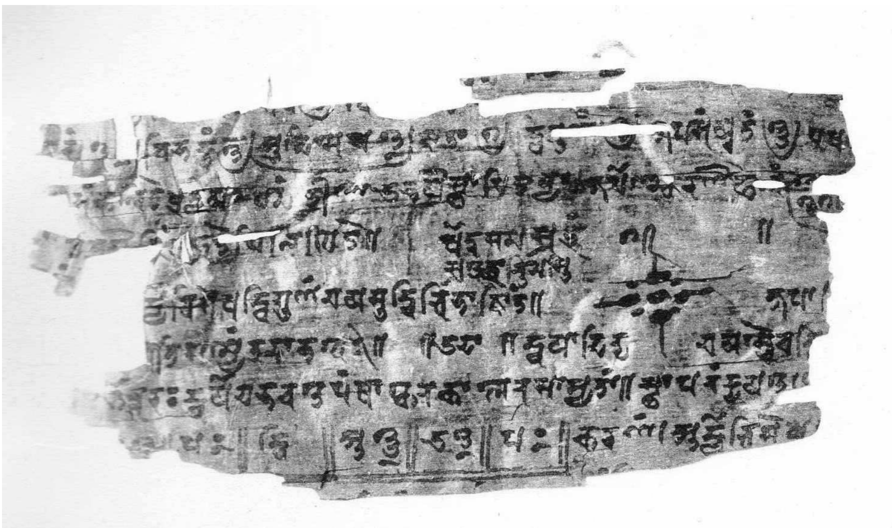
$$s_1 = \left[\frac{(x-1)\,d_1}{2} + v_1\right] x, \qquad \text{resp.} \qquad s_2 = \left[\frac{(x-1)\,d_2}{2} + v_2\right] x,$$

tedy

$$\frac{(x-1)\,d_1}{2} + v_1 = \frac{(x-1)\,d_2}{2} + v_2 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{2(v_2 - v_1)}{d_1 - d_2} + 1.$$

Pravidlo uvedené v rukopisu na folio 4 verso (viz obr. 6.4) uvádí výpočet podle následujícího vzorce:[183]

> **BMs/4v – Pravidlo 17**
> *Dvojnásobek rozdílu původních* [prvních] *členů dělený rozdílem diferencí je zvětšen o jedna. To bude čas* [počet členů x], *kdy ušlé vzdálenosti* [dvou cestujících] *budou stejné.*



[4v.] . . . .

. . taraṁ | 2 | vibhaktaṁ | $\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$ | ādiśesha $\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}$ | jātā | $\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}$ | dviguṇaṁ | 2 | rūpasaṁyutaṁ | 3 | esh

. . . saṁkalitepratyayāpadaṁhīnā ubhayesthāpitavyā rūpoṇākaraṇephalaṁ | 21 . 217

. . . . . . kiṁprabhūtepilikhite ‖ shoḍaśamasūtraṁ 17 ‖

sūtrebhrāntimasti

. . . . *ā*dyorviśeshad viguṇaṁchayaśuddhirvibhājitaṁ rūpā . i

. . . . . *g*atisāśyaṁtadābhavet ‖ ‖ udā ‖ dvayāditṛi chayaschaivadvi . .

. dikottaraḥ dvayochabhavatepaṁthākenakālenasāsyatāṁ ‖ sthāpanaṁkṛiyate | e . .

$\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}$ | pa $\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}$ | dvi | ā $\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}$ | u $\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}$ | pa $\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}$ | karaṇaṁ | ādyorviśesha . .

. . . . i . . . . . .

Obr. 6.4 Rukopis *Bakhshālī*, folio 4 verso a jeho přepis, převzato z [Kay1].

[183] Podle [DS2], str. 43 a [Kay2], str. 176.

6.17.2. Geometrická posloupnost

Geometrické posloupnosti bylo věnováno méně prostoru než aritmetické, uvádělo se hlavně pravidlo pro výpočet součtu prvních n členů geometrické posloupnosti, která byla určená prvním členem a_1 a kvocientem q. Mahāvīra používal termín *guṇadhana* pro „první člen posloupnosti vynásobený kvocientem tolikrát, co je počet členů“, tj. $a_1 q^n$, neboli $(n+1)$-ní člen a_{n+1}.

Bhāskara II. pravidlo o součtu geometrické posloupnosti formuloval takto:[184]

Lila/v.127
Pravidlo: dvojverší a půl. Je-li doba [počet členů] *liché číslo, odečti jedna a poznamenej si „násobení“, je-li sudá, vyděl dvěma a poznamenej si „druhá mocnina“, dokud se doba nevyčerpá. Pak výsledek vzniklý násobením a umocňováním* [kvocientu] *v obráceném pořadí od posledního* [poznamenaného] *zmenšený o jedna, ten rozdíl vydělený kvocientem méně jedna a násobený počátečním členem bude součtem posloupnosti zvětšující se společným násobkem.*

Tímto je vyjádřen vzorec pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti,

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

kde výpočet q^n se prováděl pomocí druhé mocniny a násobení číslem q. Například q^{10} se vypočítá jako $\left(\left(q^2\right)^2 \cdot q\right)^2 = \left(q^{4+1}\right)^2 = q^{10}$, protože (podle uvedeného pravidla):

10	sudé,	rozpůlí se,	poznamená:	„druhá mocnina“
5	liché,	odečte se 1,	poznamená:	„násobení“
4	sudé,	rozpůlí se,	poznamená:	„druhá mocnina“
2	sudé,	rozpůlí se,	poznamená:	„druhá mocnina“
1	liché,	odečte se 1,	poznamená:	„násobení“
0				

Pak se vezme 1 a počítá se od konce:

je-li poznamenáno:	„násobení“	$1 \cdot q = q$
je-li poznamenáno:	„druhá mocnina“	$(q)^2 = q^2$
je-li poznamenáno:	„druhá mocnina“	$(q^2)^2 = q^4$
je-li poznamenáno:	„násobení“	$q^4 \cdot q = q^5$
je-li poznamenáno:	„druhá mocnina“	$(q^5)^2 = q^{10}$

Ta část pravidla, která popisuje výpočet q^n, se využívala i v úlohách, kde bylo úkolem určit počet variací n-slabičného verše, ve kterém se střídají dlouhé a krátké slabiky.[185] Jednalo se o výpočet variací s opakováním n-té třídy ze

[184] Podle [Col], str. 55.
[185] Viz [Col], str. 56, 57, [Ran], str. 180–183.

dvou prvků, tj. $V_n'(2) = 2^n$. Stejný problém byl řešen i v kapitole o kombinatorice.

Následující příklad uvedl Mahāvīra[186]

GaSaSa/ii.96
Poté, co získal 2 zlaté mince v jistém městě, muž jde od města k městu a vydělává všude třikrát více, než kolik vydělal bezprostředně předtím. Řekni, kolik získá osmý den.

Mahāvīra zformuloval pravidla na výpočet prvního členu, kvocientu, počtu členů geometrické posloupnosti, je-li znám její součet.[187]

6.17.3. Jiné posloupnosti

Pro posloupnost přirozených čísel od jedné do n znali staří Indové metodu pro součet prvních n čísel a vyjádřili dokonce pravidlo pro součet prvních n částečných součtů.[188] V současné symbolice můžeme postup výpočtu vyjádřit vzorci:

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2},$$
$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} i = s_1 + s_2 + \cdots + s_n = s_n \frac{n+2}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Navíc hledali pravidla pro součet druhých mocnin, resp. třetích mocnin prvních n členů posloupnosti přirozených čísel,[189] která odpovídají dnešním

$$D_n = \sum_{i=1}^{n} i^2 = s_n \frac{2n+1}{3} = \frac{(n+1)(2n+1)n}{6},$$
$$T_n = \sum_{i=1}^{n} i^3 = s_n^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Poznamenejme ještě, že výpočet součtu druhých mocnin prvních n přirozených čísel se vyskytoval už v mezopotámské matematice a odpovídal indickému postupu.

Jednoduché příklady vedoucí na aritmetickou a geometrickou posloupnost obsahuje egyptský Rhindův papyrus i některé starobabylonské tabulky (viz [BBV]). Nejstarší dochovaná čínská matematická práce *Matematika v devíti kapitolách* (asi 3. stol. př. n. l.) obsahuje rovněž některé úlohy, které bychom

[186] Podle [Ran], str. 31, [SiAN].
[187] Viz sloky GaSaSa/ii.101, 103, podle [Ran], str. 33–34.
[188] Viz sloky Lila/v.115, podle [Col], str. 51, BrSpSi/xii.19, podle [Col], str. 292–293.
[189] Viz sloky Lila/v.115, podle [Col], str. 52, BrSpSi/xii.20, podle [Col], str. 293–294.

dnes mohli vyjádřit aritmetickou posloupností.[190] Čínští učenci však k výpočtu používali aritmetické průměry součtu členů. Hlubší znalosti o sčítání aritmetických posloupností uvedl čínský astronom a matematik Šen Kuo (11. stol.). Součty některých posloupností popsal též al-Karadží v algebraickém traktátu *Al-Fachrí* (viz [Ju]).

6.18. Devítková zkouška

Ve staré Indii bylo zvykem kvůli nedostatku místa mazat v průběhu výpočtu nepotřebné číslice, proto byla kontrola výsledku velmi obtížná. Snad proto našla u počtářů oblibu *devítková zkouška*, která sloužila k ověření správnosti výsledků aritmetických operací. První se o ní zmínil Āryabhaṭa II.[191] Zkouška je založena na dělitelnosti devíti; nazveme-li zbytek po dělení devíti daného čísla zkouškou čísla, pak například při násobení dvou čísel musí platit, že zkouška součinu je rovna součinu zkoušek. Jsou-li tedy r_1, r_2 a r zkoušky čísel n_1, n_2 a součinu $n_1 \cdot n_2$, pak musí platit $r_1 \cdot r_2 = r$. Podobné vlastnosti mají i ostatní aritmetické operace. Výhodou devítkové zkoušky je to, že zbytky po dělení devíti daného přirozeného čísla a jeho ciferného součtu jsou stejné, takže dělení devíti nebylo nutné provádět, stačilo pouze zjistit ciferný součet.

Je třeba ovšem poznamenat, že devítková zkouška je jen podmínkou nutnou nikoli postačující. O tom se staří Indové nezmiňovali, není tedy jasné, zda si tuto vlastnost vůbec uvědomovali. Mohlo to být způsobeno i tím, že případy, kdy devítková zkouška selhává, jsou „málo pravděpodobné“.

Devítkovou zkoušku znali arabští matematikové, doporučoval ji například al-Chvárizmí, později se rozšířila i do Evropy, kde ji používal například Leonardo Pisánský (Fibonacci).

6.19. Magické čtverce

Obliba magických čtverců má v Indii dlouhou tradici, původně měly význam zejména v astrologii. Džinisté i hinduisté jim přikládali zázračné vlastnosti, nehledali však spojitost s aritmetikou. Systematickému studiu matematických vlastností magických čtverců se věnoval zejména Nārāyaṇa, který ve čtrnácté kapitole své práce *Gaṇita Kaumudī* popsal pravidla pro konstrukci magických čtverců lichého i sudého řádu (viz např. obr. 6.5).

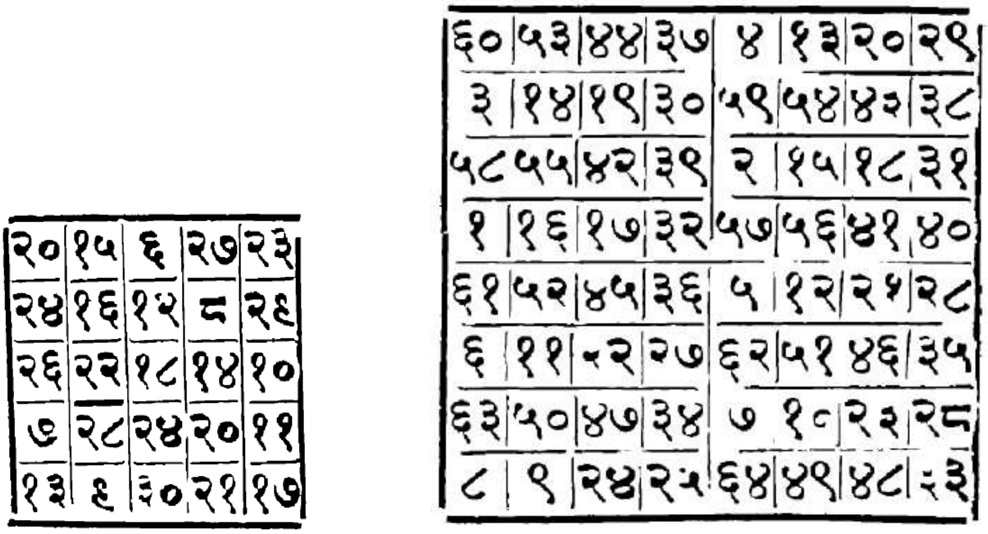
Nārāyaṇa rozdělil magické čtverce do tří skupin:

(i) čtverce řádu $4n$, tzv. *samagarbha*,
(ii) čtverce řádu $4n + 2$, tzv.*viṣamagarbha*,
(iii) čtverce lichého řádu, tzv. *viṣama*.

Za základní považoval normální čtverce vytvořené přirozenými čísly 1 až $m = n^2$. Věděl, že magický součet je dán vztahem $S = \frac{1}{\sqrt{m}} s$, kde s je celkový součet všech prvků ve čtverci, tj. $s = \frac{m+m^2}{2}$. Z normálních čtverců pak

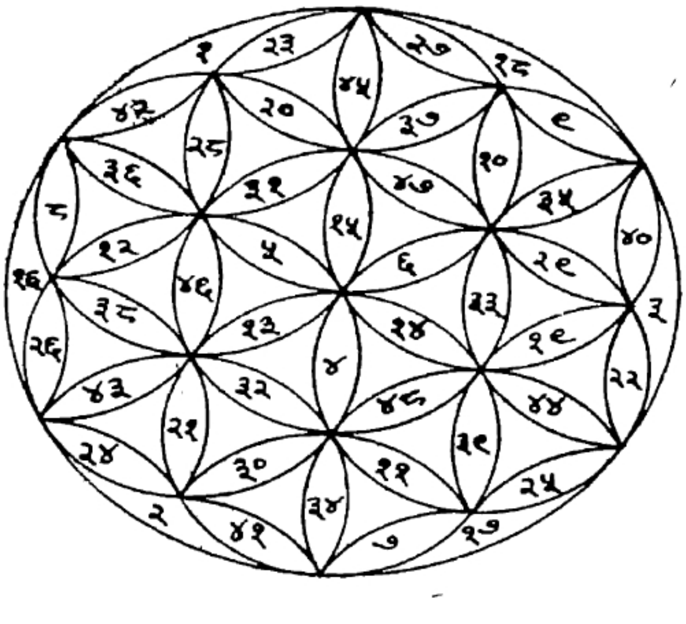
[190] Například příklad (6.19), podle [Hu], str. 162, [Ju], str. 84.
[191] Viz sloky MaSi/xviii.67–70, podle [DvS], str. 20–22.

odvozoval konstrukce obecných čtverců, u nichž znal řád a magický součet. Přitom využíval aritmetickou posloupnost, kde první člen a diference byly stanoveny podle řádu čtverce a součtu, počet členů posloupnosti byl dán počtem políček ve čtverci. Nārāyaṇovy metody včetně několika příkladů jsou popsány a komentovány například v [SiP2], [DS4], [SS].

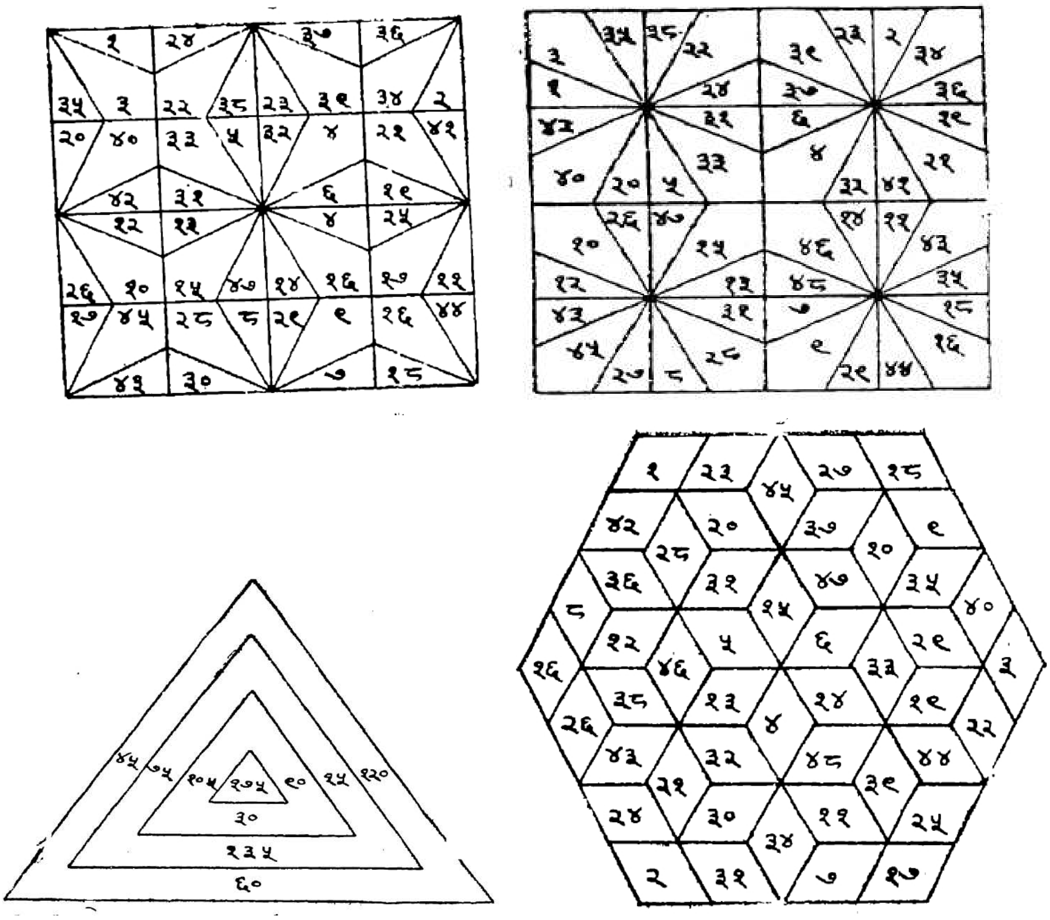


Obr. 6.5 Nārāyaṇovy magické čtverce, převzato z [DvP].

Ve studiu magických útvarů však došel ještě dál, kromě magických čtverců popsal i konstrukci magických obdélníků, trojúhelníků, kruhů a jiných obrazců. Na obrázku 6.6 je tzv. magický lotos, kde uvnitř velkého kruhu je sedm malých a v každém z nich je dvanáct čísel dávajících magický součet (viz [Pl1]). Další Nārāyaṇovy magické obrazce jsou na obrázku 6.7.



Obr. 6.6 Nārāyaṇův magický lotos, převzato z [DvP].



Obr. 6.7 Nārāyaṇovy magické obrazce, převzato z [DvP].

První písemná zmínka o magických čvercích byla nalezena v čínské legendě o *Lo Shu* ze 7. stol. př. n. l. Pythagorejci vzájemným vztahům mezi čísly přikládali mnohdy až magické vlastnosti a studovali čísla *trojúhelníková*, *čtvercová* atd., přesto stará řecká matematika k magickým čtvercům nedospěla.

V Evropě se o těchto útvarech poprvé zmínil Řek Manuel Moschopoulus na počátku 14. stol., své znalosti čerpal z arabské literatury. Zhruba o sto let později pak Luca Pacioli popisoval magické čtverce jako objekty „rekreační" matematiky. Z dalších evropských matematiků se studiu magických čtverců věnovali například němečtí matematikové Adam Ries (1492–1559) a Michael Stifel (1487–1567), kteří uvedli některé originální konstrukce, magickými čtverci se zabýval i švýcarský matematik a fyzik Leonhard Euler (1707–1783).

Také v Evropě sehrávaly magické čtverce nematematickou roli, například německý lékař, filozof, přírodovědec i astrolog Philippus Aureolus Theophrastus Bombastus von Hohenheim (1493–1541) známý pod jménem Paracelsus užíval magické čtverce k léčebným účelům.

Magické čtverce však přitahovaly i umělce, německý malíř Albrecht Dűrer (1471–1528) na rytinu *Melencolia I* umístil různé matematické objekty, mezi nimi též magický čtverec (viz [Fu]).

Shrnutí

Zápis čísel v desítkové poziční soustavě silně ovlivnil provádění aritmetických operací. Vzhledem k tomu, že dnes čísla vyjadřujeme na stejném principu, většina současných operací se podobá indickým.

Staří Indové však obratně počítali nejen s celými čísly, ale i se zlomky. Pouze z nedostatku vhodné symboliky některé složitější výrazy se zlomky rozdělovali do tříd, podle toho, jaké operace s danými zlomky chtěli provést.

Indická aritmetika byla rozdělena na operace a určení. Kromě základních operací s celými čísly a zlomky patřilo mezi operace i ve středověku oblíbené pravidlo tří, zatímco další metody, například metoda chybného předpokladu, ale i jiné výpočty týkající se úroků nebo posloupností spadaly mezi určení. Některá z určení se však zabývala i geometrickými výpočty.

7. ALGEBRA

Indové nazývali algebru *bījagaṇita*,[1] což můžeme volně přeložit jako věda o počítání s prvky, resp. věda o počítání s pomocí analýzy. Brahmagupta používal pro algebru termín *kuṭṭaka-gaṇita* nebo jen *kuṭṭaka*.[2] Někdy se algebře říkalo také *avyakta-gaṇita* neboli věda o počítání s neznámými na rozdíl od pojmu *vyakta-gaṇita*, tj. věda o počítání se známými, neboli aritmetika včetně geometrie a měřictví.

Ze středověkých indických algebraických prací je nejdůležitější *Bījagaṇita* (Bhāskara II., 12. stol.),[3] o algebře pojednává *Bīja-Gaṇitāvataṃsa* (Nārāyaṇa, 14. stol.), částečně je algebře věnována *Brāhma-sphuta-siddhānta* (Brahmagupta, 7. stol.), *Āryabhaṭīya* (Āryabhaṭa, 6. stol.).[4]

Bhāskara II. definoval algebru takto:[5]

> *Analýza (bīja) je rozhodně přirozený rozum, kterému pomáhají různé symboly (varṇa).*

Staří Indové tak algebru chápali jako vědu, kde se počítá s čísly vyjádřenými pomocí symbolů a k tomu je potřeba znát chytré triky a důmyslné metody. Algebře se ve staré Indii přikládal větší význam než aritmetice. Podle Bhāskary II. je věda o počítání s neznámými zdrojem vědy o počítání se známými. Charakteristickým rysem indické algebry je obecná formulace pravidel a pokusy o důkaz.

Důkazy

Staří Indové svá aritmetická pravidla nedokazovali, dokonce ani neuváděli žádná jejich odvození. V algebře však nějaké důkazy nalezneme. Bhāskara II. chápal aritmetiku jako souhrn pravidel bez důkazů, zatímco v algebře se v některých případech snažil svá tvrzení zdůvodnit. Důkazy byly většinou geometrické, k pravidlu nebo příkladu byl připojen obrázek s velmi stručným komentářem. Například identitu

$$2ab + (a-b)^2 = a^2 + b^2$$

uvedl v aritmetické *Līlāvatī* bez důkazu,[6] zatímco v algebraické *Bījagaṇitě* za pravidlo doplnil obrázek se slovy: *položením stejných dílů obrazce do jiného tvaru, viz.*[7]

---

[1] Název je složen ze slov *bīja* – prvek či analýza a *gaṇita* – věda o počítání.

[2] Slovem *kuṭṭaka-gaṇita* byla původně nazývána ta část algebry, která se zabývá řešením neurčitých rovnic prvního stupně, která byla v Indii považována za velmi významnou.

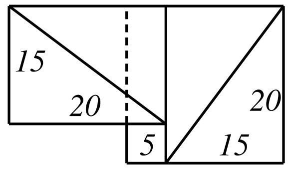
[3] Anglický překlad včetně starých komentářů je uveden v [Col].

[4] Komenovaný anglický překlad je v [Cla].

[5] Podle [DS2], str. 1.

[6] Viz sloka Lila/vi.135, podle [Col], str. 59.

[7] Viz sloka BiGa/v.147, podle [Col], str. 222–223.

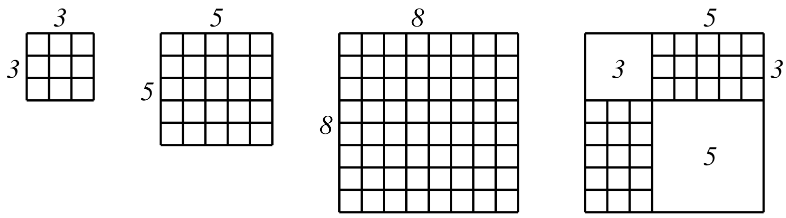


Důkaz je proveden pouze pro konkrétní hodnoty $a = 20$, $b = 15$, stejnou myšlenku však lze použít pro libovolná a, b.

Podobně dokazoval vztah[8]

$$(a + b)^2 - (a^2 + b^2) = 2ab$$

K důkazu si autor zvolil hodnoty $a = 5$, $b = 3$, pak určil jejich čtverce $a^2 = 25$, $b^2 = 9$ a čtverec jejich součtu $(a + b)^2 = 64$. Bhāskara II. vysvětlil: *odebráním součtu čtverců je zbytek* 30, toto své tvrzení doložil náčrtky.

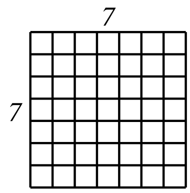


V průběhu řešení jistého příkladu se Bhāskara II. opíral o identitu

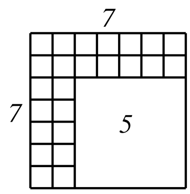
$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

s konkrétními hodnotami $a = 7$, $b = 5$ a svoje úvahy podpořil geometricky:[9]

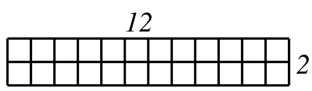
Čtverec sedmi, 49.



Po odečtení čtverce pěti je zbytek 24. *Viz.*



Zde je rozdíl dva a součet je dvanáct: a součin součtu a rozdílu se skládá z 24 *stejných částí.*



[8] Viz sloka BiGa/v.149, podle [Col], str. 224.

[9] Viz sloka BiGa/v.148, podle [Col], str. 223–224. Stejný vzorec popisoval už ve sloce Lila/vi.135, podle [Col], str. 59, ovšem bez vysvětlujících obrázků.

Bhāskara II. svá trvzení nedokazoval systematicky, tyto snahy jsou ojedinělé a svou formou připomínají některé důkazy z řecké matematiky.

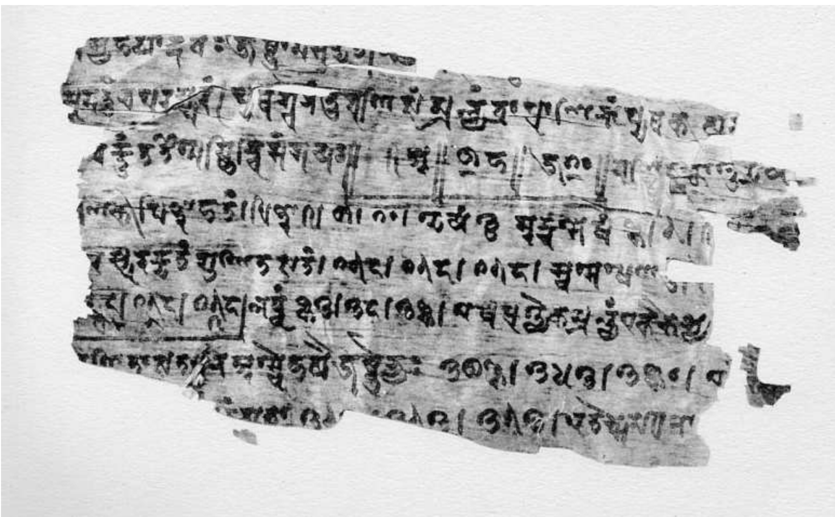
7.1. Terminologie a symbolika

Neznámé

Neznámá byla nazývána *yāvat-tāvat* (tolik-kolik) a označována zkratkou *yā*. Pokud bylo potřeba pojmenovat více neznámých, termín *yāvat-tāvat* označoval první z nich a pro ostatní se užívaly zpravidla zkratky barev nebo písmena abecedy.[10]

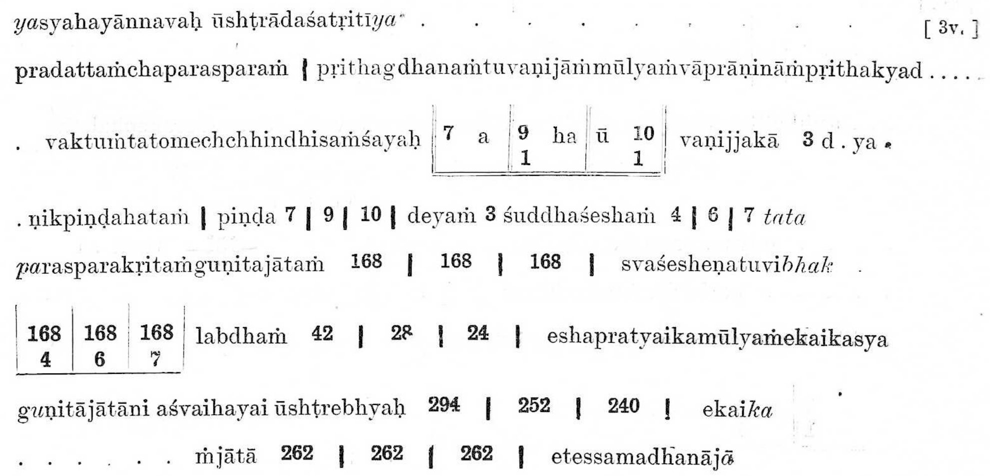
Název	**Zkratka**	**Význam**
yāvat-tāvat	*yā*	první neznámá
kālaka (černá)	*kā*	druhá neznámá
nīlaka (modrá)	*nī*	třetí neznámá
pītaka (žlutá)	*pī*	čtvrtá neznámá
lohitaka (červená)	*lō*	pátá neznámá
harītaka (zelená)	*ha*	šestá neznámá

Bhāskara II. uvedl ještě další termíny pro označení neznámých, například *śvetaka* (bílá), *citraka* (pestrá), *kapilaka* (žlutohnědá), *piṅgalaka* (červenohnědá), *dhūmraka* (šedá), *pātalaka* (růžová), *śavalaka* (tečkovaná), *śyāmalaka* (načernalá), *mecaka* (tmavomodrá) atd.[11]



[10] Pojmenování neznámých podle barev pochází pravděpodobně z jejich původního značení barevnými kuličkami při počítání. Existuje domněnka, že i termín *yāvat-tāvat* původně označoval barvu, mohl snad být odvozen ze slova *yāvakastāvat*, kde *yāvaka* znamená červená, podle [Ju], str. 128.

[11] Podle [DS2], str. 18–19.



*ya*syahayānnavaḥ ūshṭrādaśatṛitī*ya* . . . . [3v.]
pradattaṁchaparasparaṁ | pṛithagdhanaṁtuvaṇijāṁmūlyaṁvāprāṇināṁpṛithakyad . . . .
. vaktuṁtatomechchhindhisaṁśayaḥ | 7 a | 9 over 1 ha | ū 10 over 1 | vaṇijjakā 3 d . ya .
. ṇikpiṇḍahataṁ | piṇḍa 7 | 9 | 10 | deyaṁ 3 śuddhaśeshaṁ 4 | 6 | 7 *tata*
*pa*rasparakṛitaṁguṇitajātaṁ 168 | 168 | 168 | svaśesheṇatuvi*bhak* .
| 168 over 4 | 168 over 6 | 168 over 7 | labdhaṁ 42 | 28 | 24 | eshapratyaikamūlyaṁekaikasya
g*u*ṇitājātāni aśvaihayai ūshṭrebhyaḥ 294 | 252 | 240 | ekai*ka*
. . . . . . ṁjātā 262 | 262 | 262 | etessamadhanājā

Obr. 7.1 Rukopis *Bakhshālī*, folio 3 verso a jeho přepis, převzato z [Kay1].

Jiné značení neznámých bylo v rukopisu *Bakhshālī*, kde pro neznámou byl použit stejný symbol jako pro nulu,[12] tj. tečka • či kroužek ∘,[13] v jiné úloze na folio 27 verso jsou neznámé označeny zkratkami *pra, dvi, tṛ, ca, paṁ*,[14] na lístku folio 3 verso jsou pro neznámé zvoleny zkratky slov z textu zadání problému *a*, *ha*, *ū* (viz obr. 7.1).[15]

Mocniny a odmocniny

Druhá mocnina se nazývala *varga* (čtverec), třetí mocnina *ghana* (krychle, těleso). Výrazy pro další mocniny byly tvořeny pomocí těchto slov multiplikativním způsobem, tj. *varga-varga* byla čtvrtá mocnina, *varga-ghana* značilo šestou mocninu, *ghana-ghana* devátou mocninu, *ghana-varga-varga* byl výraz pro dvanáctou mocninu atd.[16] Mocniny, jejichž exponent není násobkem dvou nebo tří, se vyjadřovaly pomocí termínu *ghāta*, který označoval sčítání exponentů. Tedy například pátá mocnina byla vyjádřena *varga-ghana-ghāta*, sedmá jako *varga-varga-ghana-ghāta*.

Název	**Zkratka**	**Význam**
varga	*va*	druhá mocnina
ghana	*gha*	třetí mocnina
varga-varga	*va-va*	čtvrtá mocnina
varga-ghana-ghāta	*va-gha-ghā*	pátá mocnina
varga-ghana	*va-gha*	šestá mocnina
varga-varga-ghana-ghāta	*va-va-gha-ghā*	sedmá mocnina
varga-varga-varga	*va-va-va*	osmá mocnina
ghana-ghana	*gha-gha*	devátá mocnina

[12] Jako neznámé, nepřítomné množství.
[13] Např. na folio 59 recto, podle [Kay2], str. 215.
[14] Jde o zkratky slov *prathama* (první), *dvitīya* (druhý), *tṛtīya* (třetí), *caturtha* (čtvrtý) a *pañcama* (pátý), podle [Kay2], str. 167.
[15] Zkratky slov *aśva*, *haya* (druhy koní), *ūshṭra* (velbloud), podle [Kay2], str. 170.
[16] Podobně vyjádřené mocniny najdeme v Diofantově *Aritmetice*, viz [Baš].

Tyto symboly se zapisovaly až za neznámou, například *yā va* (*yāvat varga*) znamenalo x^2, *yā va-gha-ghā* (*yāvat varga-ghana-ghāta*) značilo x^5. V případě, kdy bylo potřeba vyjádřit součin mocnin více neznámých, následovala za celým výrazem ještě zkratka *bhā* (*bhāvita*, tj. součin), například x^3y^2 bylo zapsáno jako *yā gha kā va bhā* (*yāvat ghana kālaka varga bhāvita*).

Absolutní člen v rovnici se nazýval *rūpa* (viditelný),[17] pouze v rukopisu *Bakhshālī* se užíval termín *dṛśya* (to, co je uvnitř).[18]

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \circ & 2 & 3 & 4 & d\d{r}\acute{s}ya & 200 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 \\ \hline \end{array} \quad \text{znamenalo} \quad x + 2x + 3x + 4x = 200.$$

Brahmagupta používal jiný systém značení mocnin neznámé s exponentem větším než čtyři pomocí číslovky a termínu *gata*. Pátou mocninu tedy nazýval *pañca-gata* (povýšený, umocněný na pátou).

Pro druhou odmocninu se v rukopisu *Bakhshālī* používala zkratka *mū* (*mūla*, tj. kořen), *yu* (zkratka slova *yuta*) označovalo sčítání, například zápis[19]

$$\begin{array}{|ccccc|} 11 & yu & 5 & m\bar{u} & 4 \\ 1 & & 1 & & 1 \\ \hline \end{array} \quad \text{vyjadřoval} \quad \sqrt{11+5} = 4.$$

V ostatních dílech se druhá odmocnina označovala pomocí zkratky *ka* (*karaṇī*, tj. kořen nebo iracionalita) uvedené před příslušnou veličinou, tedy[20]

$$ka9\ ka450\ ka75\ ka54 \quad \text{znamenalo} \quad \sqrt{9} + \sqrt{450} + \sqrt{75} + \sqrt{54}.$$

V tomto příkladě symbol pro sčítaní chyběl, ve většině případů se žádné symboly pro aritmetické operace neuváděly, výrazy se pouze zapsaly vedle sebe. Jaký druh operace se má provést vyplynulo za zadání nebo bylo uvedeno slovy.

Koeficienty

V indické algebře neexistovaly žádné speciální názvy pro koeficienty u neznámých. Brahmagupta nazýval koeficient *saṁkhyā* (číslo) nebo *guṇaka* či *guṇakāra* (násobitel). Pṛthūdakasvāmin, komentátor Brahmaguptova díla, používal termíny *aṅka* (číslo) nebo *prakṛti* (násobitel). Tyto názvy se vyskytují i u jiných autorů jako je Śrīpati nebo Bhāskara II. Obvykle byl připojen i název stupně neznámé při odkazu na její koeficient. Koeficienty byly tvořeny pouze číselnými hodnotami.

[17] Absolutní člen byl známý, tj. viditelný, na rozdíl od neznámých, tj. neviditelných.
[18] Např. na folio 22 verso, podle [Kay2], str. 193.
[19] Folio 59 recto, viz [Kay2], str. 215, viz odstavec 7.12.
[20] Podle [Ju], str. 129.

7.2. Operace se zápornými čísly

Není jasné, kdy se v Indii objevila záporná čísla, první zmínky nalezneme v díle Brahmagupty. Je však pravděpodobné, že Indové mohli převzít znalosti o záporných číslech od Číňanů, kteří používali záporné hodnoty při řešení soustav lineárních rovnic.[21] V Indii se kladná čísla nazývala *dhana* nebo *sva* (majetek), záporným číslům se říkalo *riṅa* nebo *kṣaya* (dluh, snížení). Pravidla pro počítání se zápornými čísly a s nulou nalezneme například v Brahmaguptově práci *Brāhma-sphuta-siddhānta*:[22]

> **BrSpSi/xviii.31–36**
> *Pravidlo pro součet. Součet dvou kladných veličin je kladný; dvou záporných je záporný; kladné a záporné je jejich rozdíl nebo jsou-li stejné nula. Součet nuly a záporného je záporný, kladného a nuly je kladný, dvou nul je nula.*
>
> *Pravidlo pro rozdíl. Menší se musí odečíst od většího;* [výsledek] *je kladný, jestliže odčítáme kladné od kladného, záporné od záporného. Když je větší odečtené od menšího, rozdíl je opačný. Záporné odečtené od nuly se stane kladným, kladné záporným. Záporné mínus nula je záporné, kladné je kladné, nula je nula. Když se kladné má odečíst od záporného a záporné od kladného, je nutné je sečíst.*
>
> *Pravidlo pro násobení. Součin záporné veličiny a kladné je záporný, dvou záporných kladný, dvou kladných kladný. Součin nuly a záporného nebo nuly a kladného je nula, dvou nul je nula.*
>
> *Pravidlo pro dělení. Kladné dělené kladným nebo záporné dělené záporným je kladné. Nula dělená nulou je nula. Kladné dělené záporným je záporné. Záporné dělené kladným je záporné. Kladné nebo záporné dělené nulou je zlomek s nulou ve jmenovateli.*
>
> *Čtverec záporného nebo kladného je kladný, nuly je nula. Druhá odmocnina čtverce je taková, jako to, z čeho byl čtverec získán.*

V případě součtu kladného a záporného čísla Brahmagupta nespecifikoval znaménko rozdílu. K pravidlu pro odčítání je třeba připomenout, že čísla byla uspořádána podle absolutních hodnot.[23]

Operace se zápornými čísly uvedli i další autoři, například Mahāvīra je definoval tak, jak je známe dnes.[24]

a) Součin a podíl dvou kladných, resp. záporných čísel je kladný, je-li jedno číslo kladné a druhé záporné, je záporný.

---

[21] Čínská metoda nazývaná *fang čcheng* se podobá dnešní Gaussově eliminační metodě. Staří Číňané čísla vyjadřovali pomocí počítacích tyčinek; kladná čísla byla znázorněna červenými tyčinkami, záporná černými, podle [Hu], str. 186–208.

[22] Podle [Col], str. 339.

[23] Dnešní uspořádání čísel bylo zavedeno v Evropě až v 17. stol.

[24] Viz sloky GaSaSa/i.50–52, podle [Ran], str. 7.

b) Součet dvou kladných, resp. záporných čísel je kladný, resp. záporný. Rozdíl záporného a kladného čísla je záporný, rozdíl kladného a záporného čísla je kladný.

c) Druhá mocnina kladného i záporného čísla je kladná. Odmocnina kladného čísla je kladná nebo záporná.[25] Záporné číslo není čtvercem, proto ho nelze odmocnit.

Později Bhāskara II. doplnil ještě operace se zápornými čísly a nulou.[26]

d) Jestliže se ke kladnému, resp. zápornému číslu přičte nebo odečte nula, číslo zůstane stejné kladné, resp. záporné. Ale když se odčítá od nuly, stane se opačným.

Ke znaménku u druhé odmocniny poznamenal Pṛthūdakasvāmin:[27]

> *Druhá odmocnina se může vzít kladná nebo záporná, podle toho, co lépe vyhovuje dalším operacím.*

V Číně jsou záporná čísla poprvé doložena v 8. kapitole knihy *Matematika v devíti kapitolách*, kde byla potřebná při řešení soustav lineárních rovnic metodou *fang čcheng*.

7.3. Operace s iracionalitami

Indové neznali imaginární čísla, soudili, že odmocnina ze záporného čísla neexistuje, protože takové číslo nemůže být čtvercem. Znali ovšem kvadratické iracionality, nazývané *karaṇī*, se kterými počítali velmi zručně. Výpočet iracionalit a počítání s nimi patřily do algebry.

Už v 1. tisíciletí před naším letopočtem v textech zvaných *Śulbasūtry* jsou uvedeny přibližné hodnoty některých odmocnin, například $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ a dalších.[28] V raném džinistickém díle *Jambūdvīpaprajñapti* (4. stol. př. n. l) byla druhá odmocnina počítána podle vztahu[29]

$$\sqrt{Q} = \sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a},$$

kde a^2 byl největší čtverec menší než Q, a tento odhad byl používán po mnoho století až do středověku.[30]

Velmi podrobně byl popsán výpočet první a druhé aproximace v rukopisu *Bakhshālī*, nezachovalo se však obecné pravidlo, postup je rekonstruován z čitelných příkladů.[31]

---

[25] Staří Indové druhou odmocninu chápali jako inverzní operací k druhé mocnině, pokud tedy nějaké číslo vzniklo jako druhá mocnina záporného, po odmocnění byl výsledek záporný.

[26] Viz sloka BiGa/i.12, podle [Col], str. 136. Operace s nulou a kladnými čísly Bhāskara II. uvedl i v aritmetické *Līlāvatī*, viz sloka Lila/ii.44–45, podle [Col], str. 20.

[27] Podle [Col], str. 340.

[28] Viz 2. kapitola, odstavec 2.9.

[29] Podle [DS8], str. 266.

[30] Viz 3. kapitola, odstavec 3.1.

[31] Výkladem metody se zabývá [Cha].

Místo $\sqrt{Q} = \sqrt{a^2+b} = q$ se uvažovala hodnota

$$q_1 = a + \frac{b}{2a} \qquad \text{nebo přesnější} \qquad q_2 = a + \frac{b}{2a} - \frac{\left(\frac{b}{2a}\right)^2}{2(a+\frac{b}{2a})}. \tag{7.1}$$

Platí totiž

$$\sqrt{Q} = \sqrt{a^2+b} < \sqrt{a^2+b+\left(\frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\left(a+\frac{b}{2a}\right)^2} = a + \frac{b}{2a} = q_1.$$

Takto získaná aproximace q_1 je větší než správná hodnota $\sqrt{Q}$. Proto se často počítala ještě druhá aproximace, která dávala lepší výsledek.

Podobný postup je použit v rukopise *Bakhshālī* i pro výpočet druhé aproximace hledané odmocniny. Při označení $r_1 = q_1^2 - Q = \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ je

$$\sqrt{Q} = \sqrt{q_1^2 - r_1} \approx q_1 - \frac{r_1}{2q_1} = a + \frac{b}{2a} - \frac{\left(\frac{b}{2a}\right)^2}{2(a+\frac{b}{2a})} = q_2,$$

protože

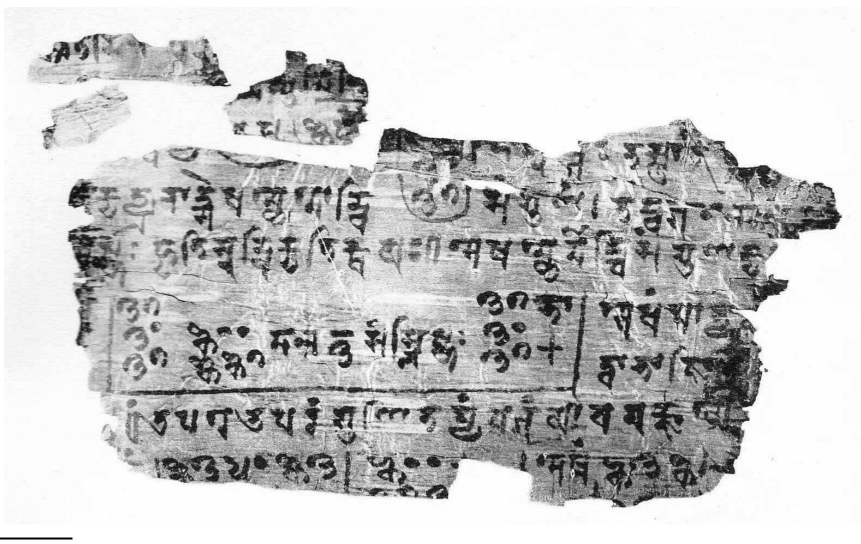
$$\sqrt{Q} = \sqrt{q_1^2 - r_1} < \sqrt{q_1^2 - r_1 + \left(\frac{r_1}{2q_1}\right)^2} = \sqrt{\left(q_1 - \frac{r_1}{2q_1}\right)^2} = q_1 - \frac{r_1}{2q_1}.$$

Na zachovaných lístcích rukopisu je uvedeno řešení úlohy,[32] kde bylo třeba stanovit hodnotu $\sqrt{481}$. Na lístku s označením folio 65 verso je výpočet první aproximace

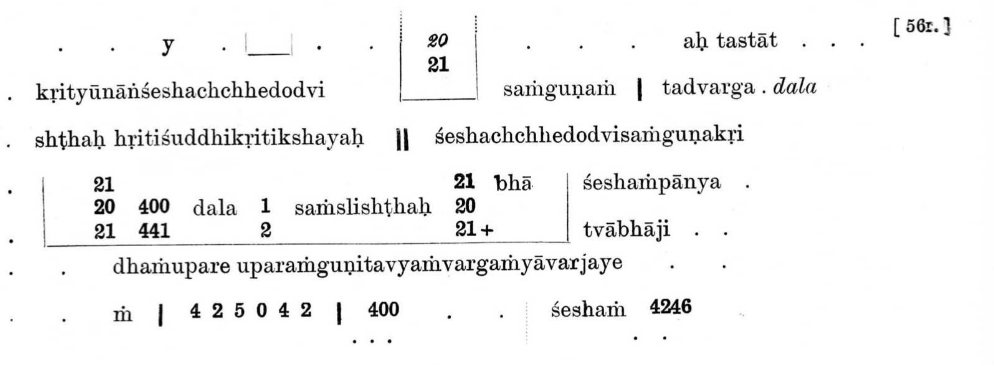
$$\sqrt{481} = \sqrt{441+40} \approx 21 + \frac{40}{42} = \frac{882+40}{42} = \frac{922}{42},$$

na lístku folio 56 recto (viz obr. 7.2), je ještě čitelná část výpočtu druhé aproximace

$$q_2 = 21\frac{20}{21} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{20}{21}\right)^2}{21\frac{20}{21}} = \frac{461}{21} - \frac{400}{441}\cdot\frac{21}{2\cdot 461} = \frac{425\,042}{19\,362} - \frac{400}{19\,362} = \frac{424\,642}{19\,362}.$$



[32] Šlo o problém určit počet členů aritmetické posloupnosti, když byl znám první člen, diference a součet prvních n členů, viz 6. kapitola, odstavec 6.17.1.



Obr. 7.2 Rukopis *Bakhshālī*, folio 56 recto a jeho přepis, převzato z [Kay1].

Pro zajímavost ještě uvedeme porovnání přesnosti jednotlivých aproximací čísla $\sqrt{481}$ s jeho přesnou hodnotou:

$$\sqrt{481} \approx q_1 = \frac{922}{42} = 21{,}95238\ldots,$$
$$\sqrt{481} \approx q_2 = \frac{424\,642}{19\,362} = 21{,}93172\ldots,$$
$$\sqrt{481} = 21{,}9317121\ldots$$

Je vidět, že výpočet odmocniny pomocí druhé aproximace je poměrně přesný, vypočítaná hodnota se liší až na pátém místě za desetinnou čárkou.

Iterační algoritmus na výpočet druhé odmocniny uvedený v rukopisu byl znám už ve staré Mezopotámii, používal jej Hérón a později al-Hassár (12. stol.)[33] a Leonardo Pisánský (viz [BBV], [BeJ1b]). Čínský matematik Liu Hui (asi 220 až 280) vyjádřil odhad přibližné hodnoty nerovnostmi $a + \frac{b}{2a+1} < \sqrt{a^2+b} < a + \frac{b}{2a}$ (viz [Hu]). Perští učenci al-Nasawi a al-Káší počítali s přibližnou hodnotou $\sqrt{a^2+b} \approx a + \frac{b}{2a+1}$ (viz [Ju]).[34]

V Indii se pro zlepšení přesnosti někdy doporučovalo vynásobit odmocňované číslo čtvercem nějakého velkého čísla, často sudé mocniny deseti. Například Śrīdhara uvedl:[35]

PaGa/118
Číslo, které není čtvercem, se vynásobí nějakým velkým čtvercovým číslem, odmocní, a přitom se zanedbá zbytek; pak se tato odmocnina vydělí druhou odmocninou násobitele [čtvercového čísla].

Podle Śrīdhary bylo výhodné počítat

$$\sqrt{Q} = \frac{\sqrt{Qm^2}}{m} \approx \frac{R}{m},$$

[33] Vlastním jménem Abú Zakárijá Muḥammad ibn Abdalláh al-Hassár, viz [Ju].
[34] Dá se ukázat, že $\frac{b}{2a+1}$ je dolním odhadem $\sqrt{Q}$, tj. že platí $a+\frac{b}{2a+1} < \sqrt{a^2+b} < a+\frac{b}{2a}$, viz [BeJ4].
[35] Podle [Shu1], str. 91.

kde m je vhodně zvolené velké číslo, a přitom odmocninu $\sqrt{Qm^2} \approx R$ vypočítat podle algebraického pravidla se zanedbáním zbytku. Tímto způsobem vypočítal $\sqrt{3}$, když volil „velké číslo“ $m = 1\,000$:

$$\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3 \cdot 1\,000\,000}}{1\,000} = \frac{\sqrt{3\,000\,000}}{1\,000} \approx \frac{1\,732}{1\,000} = 1,732,$$

přičemž výpočet podle (7.1) ze vztahu pro druhou aproximaci dává $\sqrt{3} \approx 1,75$.

Podobnou metodu, kterou sám označil jako přibližnou, využil rovněž Bhāskara II. při řešení příkladu,[36] kde potřeboval určit $\sqrt{\frac{169}{8}}$. Zlomek šikovně rozšířil jmenovatelem a pro zvýšení přesnosti ještě *velkým čtvercovým číslem*. Obecnému vzorci

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{abm^2}{b^2m^2}} = \frac{\sqrt{abm^2}}{bm} \approx \frac{R}{bm}$$

odpovídal výpočet s volbou $m^2 = 10\,000$

$$\sqrt{\frac{169}{8}} = \frac{\sqrt{169 \cdot 8 \cdot 10\,000}}{8 \cdot 100} \approx \frac{3\,677}{800} = 4\frac{477}{800}.$$

Sčítání a odčítání

Brahmagupta (a po něm i další autoři) uvedl několik pravidel pro počítání s iracionalitami. Cílem patrně bylo co nejvíc omezit počítání s přibližnými hodnotami.[37] Pravidlo pro součet, resp. rozdíl iracionalit bychom mohli vyjádřit vzorcem[38]

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{a}{n}} \pm \sqrt{\frac{b}{n}}\right)^2 \cdot n},$$

kde $\sqrt{a}$ a $\sqrt{b}$ byly dané iracionality a n bylo libovolné číslo, které bylo vhodně zvoleno tak, aby odmocniny $\sqrt{\frac{a}{n}}$ a $\sqrt{\frac{b}{n}}$ byly celočíselné. V zadání příkladů volil Brahmagupta takové hodnoty, aby tento postup bylo možno použít; například v úloze, kde bylo třeba vypočítat součet $\sqrt{2} + \sqrt{8}$, volil $n = 2$. Jednotlivé kroky šly za sebou takto:[39]

dělení číslem $n = 2$	$\sqrt{\frac{2}{2}} + \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{1} + \sqrt{4} = 1 + 2,$
druhá mocnina toho	$(1+2)^2 = 9,$
vynásobení číslem $n = 2$	$9 \cdot 2 = 18,$
z toho druhá odmocnina	$\sqrt{18}\ (= \sqrt{2} + \sqrt{8}).$

[36] Jde o výpočet délky přepony pravoúhlého trojúhelníku, sloka Lila/vi.137, podle [Col], str. 760.

[37] Operace s iracionalitami jsou podrobně popsány v článku [DS7].

[38] Viz sloka BrSpSi/xviii.39, podle [Col], str. 340, podobné pravidlo popsal Mahāvīra ve sloce GaSaSa/vii.88$\frac{1}{2}$.

[39] Podle [Col], str. 341.

Místo výpočtu dvou přibližných hodnot a jejich součtu stačilo stanovit jen jednu odmocninu.

Bhāskara II. doporučoval ještě jinou metodu,[40] která odpovídá vzorci

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{b\left(\sqrt{\frac{a}{b}} \pm 1\right)^2}.$$

Násobení a dělení

Při násobení výrazů s iracionalitami se využívaly vztahy

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{c}+\sqrt{d}) = \sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}, \qquad \sqrt{a}\cdot(\sqrt{b}\pm c) = \sqrt{ab}\pm\sqrt{ac^2}.$$

Od Brahmagupty pochází i tento příklad, autor však uvedl jen zadání a výsledek:[41]

$$(5+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{12}-5) = \sqrt{75}+\sqrt{300}-25+\sqrt{9}+\sqrt{36}-\sqrt{75} = -16+\sqrt{300}.$$

Při dělení se uplatňovala identita $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a-b$, úpravu výrazu s iracionalitami ve jmenovateli bychom mohli vyjádřit vzorcem[42]

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{c}+\sqrt{d}} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{c}-\sqrt{d})}{(\sqrt{c}+\sqrt{d})(\sqrt{c}-\sqrt{d})} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{c}-\sqrt{d})}{c-d}.$$

I následující příklad uvedl Brahmagupta; při výpočtu doporučoval rozšířit výrazem $(\sqrt{18}-\sqrt{3})$, pak uvedl jen výsledek:[43]

$$\frac{3+\sqrt{450}+\sqrt{75}+\sqrt{54}}{\sqrt{18}+\sqrt{3}} = \frac{(3+\sqrt{450}+\sqrt{75}+\sqrt{54})\cdot(\sqrt{18}-\sqrt{3})}{(\sqrt{18}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{18}-\sqrt{3})} =$$

$$= \frac{75+\sqrt{675}}{15} = 5+\sqrt{\frac{675}{225}} = 5+\sqrt{3}.$$

Numerické hodnoty v zadání jistě nebyly náhodné, autor měl příklad pečlivě připraven, aby dostal „hezký“ výsledek.

Druhá mocnina a odmocnina

Při výpočtu druhé mocniny součtu iracionalit se postupovalo podle vzorce

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a+b+\sqrt{4ab},$$

[40] Viz sloka BiGa/i.30, podle [Col], str. 145–146.
[41] Podle [Col], str. 341.
[42] Viz sloka BrSpSi/xviii.40, podle [Col], str. 341.
[43] Podle [Col], str. 342.

resp.

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i\neq j}\sqrt{4a_ia_j}.$$

Výpočet druhé odmocniny součtu s iracionalitami odpovídá dnešnímu vzorci[44]

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Pokud rozdíl a^2-b byl čtvercem, tedy pro $a^2-b=c^2$, bylo možné vyjádřit vzorec v jednodušším tvaru

$$\sqrt{a\pm\sqrt{a^2-c^2}}=\sqrt{\frac{a+c}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-c}{2}}.$$

Pro ilustraci uvedeme ještě jeden příklad i s řešením tak, jak jej popsal Bhāskara II.[45]

> **BiGa/i.39–40** (část)
> *Vyjádření odmocniny:*
> *ru*10 *ka*24 *ka*40 *ka*60 $\left[\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}\right]$.
> *Od čtverce racionálního čísla* [10] 100 *odečti čísla rovná dvěma iracionalitám* [jejich čtvercům] 24 *a* 40, *zbytek je* 36 [100 − 24 − 40] *a z toho odmocnina* 6; *odečtená od přirozeného čísla* 10 *a přičtená k němu vytvoří* 4 *a* 16, *jejich poloviny* 2 *a* 8. *První se odmocní ka*2 $[\sqrt{2}]$, *druhá se považuje za racionální číslo a stejné operace se provádějí se zbytkem iracionalit. Od čtverce racionálního čísla* [8], 64 *se odečte číslo* 60, *rozdíl je* 4 [64 − 60], *z toho odmocnina* 2, *která odečtená od toho racionálního čísla a přičtená k němu vytvoří* 6 *a* 10, *z čehož poloviny jsou* 3 *a* 5. *Z nich odmocniny jsou iracionality ka*3 *ka*5 $[\sqrt{3},\sqrt{5}]$. *Vyjádření celé odmocniny nalezeno: ka*2 *ka*3 *ka*5 $[\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}]$.

Je třeba poznamenat, že před tímto příkladem Bhāskara uvedl výpočet $(\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$. Dobře si uvědomoval vztah mezi druhou mocninou a druhou odmocninou a věděl tedy, jaký dostane výsledek.

Bhāskara II. ještě upozornil na souvislost počtu iracionalit $\sqrt{q_i}$ v odmocňovaném výrazu typu

$$\sqrt{p_1+\sum_{i=1}^{m}\sqrt{q_i}}=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}, \tag{7.2}$$

[44] Viz sloka BrSpSi/xviii.41, podle [Col], str. 342.
[45] Podle [Col], str. 150.

s počtem sčítanců n na pravé straně.[46] Počet iracionalit q_i v součtu na levé straně v (7.2), tj. číslo m, je vždy roven $(n-1)$-nímu částečnému součtu členů posloupnosti přirozených čísel, tj. $m = s_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} i$. Pro $m = 1$ vznikl výraz (7.2) umocněním dvou sčítanců ($n = 2$), pro pro $m = 3$ umocněním tří sčítanců ($n = 3$), pro $m = 6$ umocněním čtyř sčítanců ($n = 4$) atd. Při výpočtu druhé odmocniny byl tedy znám počet sčítanců, z nichž se skládal výsledek.

Ve výrazu

$$p_1 + \sqrt{q_1} + \sqrt{q_2} + \sqrt{q_3}$$

jsou obsaženy tři odmocniny (m), hledal se tedy výsledek ve tvaru součtu tří sčítanců (n)

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

Protože číslo $p_1 + \sqrt{q_1} + \sqrt{q_2} + \sqrt{q_3}$ vzniklo umocněním,

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 = x + y + z + \sqrt{4xy} + \sqrt{4xz} + \sqrt{4yz},$$

platí $p_1 = x + y + z$, $\sqrt{q_1} = \sqrt{4xy}$, $\sqrt{q_2} = \sqrt{4xz}$, $\sqrt{q_3} = \sqrt{4yz}$.

Vlastní výpočet probíhal v $n-1$ krocích. V prvním kroku se nejprve od druhé mocniny čísla p_1 odečetlo $n-1$ čtverců iracionalit $\sqrt{q_i}$ (v našem případě dva), tedy

$$p_1^2 - q_1 - q_2 = (x + y + z)^2 - 4xy - 4xz = (-x + y + z)^2,$$

a odmocněním se získala hodnota $y + z - x$. Součet $y + z + x$ byl určen podle zadání. Při označení $u = y + z$, $v = x$ tak byly známé hodnoty součtu $u + v$ a rozdílu $u - v$ a mohla se provést operace *saṅkramaṇa*[47] pro $u + v = p_1$ a $u - v = \sqrt{p_1^2 - q_1 - q_2}$:

$$\begin{aligned} y + z + x &= p_1 \\ y + z - x &= \sqrt{p_1^2 - q_1 - q_2} \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(p_1 - \sqrt{p_1^2 - q_1 - q_2}) \\ y + z &= \frac{1}{2}(p_1 + \sqrt{p_1^2 - q_1 - q_2}). \end{aligned}$$

Odmocněním prvního se získal první sčítanec hledaného výrazu, tj. $\sqrt{x}$, k součtu $y + z = p_2$ se přičetl „vhodný“ počet zbývajících iracionalit $(n-2)$ a celý postup se opakoval, dokud všechny členy nebyly vyčerpány.

Ve druhém (v tomto případě posledním) kroku se tedy počítalo s výrazem

$$p_2 + \sqrt{q_3} = y + z + \sqrt{4yz}.$$

[46] Viz sloka BiGa/i.44–47, podle [Col], str. 152–153.

[47] Pomocí operace *saṅkramaṇa* s „a ve spojení s b“ se počítala čísla u, v ze soustavy $u+v = a$, $u-v = b$ podle vztahu $u = \frac{1}{2}(a+b)$ a $v = \frac{1}{2}(a-b)$, viz 6. kapitola, odstavec 6.16.3.

Nejprve se vypočítalo $(y+z)^2 - 4yz = (z-y)^2$, z toho se vzala odmocnina a následně se podle operace *saṅkramaṇa* dopočítaly hodnoty y a z, které se pak odmocnily:

$$\begin{aligned} z + y &= p_2 \\ z - y &= \sqrt{p_2^2 - q_3} \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} y &= \frac{1}{2}(p_2 - \sqrt{p_2^2 - q_3}) \\ z &= \frac{1}{2}(p_2 + \sqrt{p_2^2 - q_3}). \end{aligned}$$

Nakonec se všechny odmocniny sečetly a tím se získal hledaný výsledek, tj. $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$.

Bhāskara ilustroval na vhodných příkladech, že ne každý výraz typu

$$p_1 + \sum_{i=1}^{m} \sqrt{q_i}$$

může být po odmocnění vyjádřen ve tvaru $\sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}$ a takové příklady označoval za chybné.[48]

V řecké matematice začaly být iracionality zkoumány po objevu nesouměřitelnosti, tj. asi v 5. stol. př. n. l. Podrobnějšímu studiu se věnoval Theaitétos, který provedl jejich klasifikaci (viz [BeJ3]). Úpravami výrazů s odmocninami i vyšších řádů se více zabývali arabští matematikové, například al-Karadži (asi 953 až 1029)[49] a al-Bírúní.

7.4. Operace s mnohočleny

V indických algebraických dílech byla uvedena také pravidla pro počítání s mnohočleny. Mnohočleny se vyjadřovaly tak, že nejvyšší mocnina byla zapsána vlevo, mocniny klesaly směrem doprava a koeficient byl uveden až za příslušnou mocninou, přičemž se vždy zapisovaly i nulové koeficienty:

$$\textit{yā va } 3 \ \textit{yā } \dot{5} \ \textit{rū} \ \circ \quad \text{označovalo} \quad 3x^2 - 5x.$$

Při sčítání a odčítání se mnohočleny zapisovaly pod sebe a sčítaly, resp. odčítaly se jen členy stejného typu, například výpočet

$$\begin{array}{lll} \textit{yā } 1 \ \textit{rū } 1 & & \\ \textit{yā } \dot{2} \ \textit{rū } 8 & \qquad \text{součet je:} & \textit{yā } \dot{1} \ \textit{rū } 9 \end{array}$$

znamenal

$$(x+1) + (-2x+8) = -x + 9.$$

48 Viz sloky BiGa/i.48, BiGa/i.49, BiGa/i.50, podle [Col], str. 153–154.

49 Vlastním jménem Abú Bakr Muḥammad ibn al-Ḥasan al-Karadži, viz [Ju].

Součet a rozdíl mnohočlenů s více proměnnými[50]

$$\begin{array}{lrl} y\bar{a}\,3\ \ k\bar{a}\,5\ \ n\bar{\imath}\,7 & \text{Odpověď: součet} & y\bar{a}\,1\ \ k\bar{a}\,2\ \ n\bar{\imath}\,6 \\ y\bar{a}\,\dot{2}\ \ k\bar{a}\,\dot{3}\ \ n\bar{\imath}\,\dot{1} & \text{rozdíl} & y\bar{a}\,5\ \ k\bar{a}\,8\ \ n\bar{\imath}\,8 \end{array}$$

vyjádříme dnes

$$(3x + 5y + 7z) + (-2x - 3y - z) = x + 2y + 6z,$$
$$(3x + 5y + 7z) - (-2x - 3y - z) = 5x + 8y + 8z.$$

Násobení mnohočlenů se provádělo stejným způsobem jako dnes, jen zápis se lišil; například součin

$$(5x - 1)(3x + 2) = 15x^2 + 7x - 2$$

byl počítán tak, že se druhý činitel rozdělil na jednotlivé členy, každým z nich se vynásobil první činitel a nakonec se dílčí součiny sečetly:[51]

$$\begin{array}{lll} y\bar{a}\,5\ \ r\bar{u}\,\dot{1} & y\bar{a}\,3 & y\bar{a}\ va\ 15\ \ y\bar{a}\ \ \dot{3} \\ y\bar{a}\,5\ \ r\bar{u}\,\dot{1} & r\bar{u}\,2 & \qquad\quad\ \ y\bar{a}\,10\ \ r\bar{u}\,\dot{2} \\ \cline{3-3} & & y\bar{a}\ va\ 15\ \ y\bar{a}\ \ 7\ \ r\bar{u}\,\dot{2} \end{array}$$

Při násobení mnohočlenů s více proměnnými se u smíšených součinů uváděla ještě zkratka *bhā* (*bhāvita*), tedy výsledek násobení

$$(-3x-2y+z+1)(-6x-4y+2z+2) = 18x^2+8y^2+2z^2+24xy-12xz-8yz+2$$

byl zapsán[52]

$$y\bar{a}\ va\ 18\ \ \ k\bar{a}\ va\ 8\ \ \ n\bar{\imath}\ va\ 2\ \ \ y\bar{a}\ k\bar{a}\ bh\bar{a}\ 24\ \ \ y\bar{a}\ n\bar{\imath}\ bh\bar{a}\ \dot{1}2\ \ \ k\bar{a}\ n\bar{\imath}\ bh\bar{a}\ \dot{8}\ \ \ r\bar{u}\ 2.$$

Bhāskara předložil i příklady na dělení mnohočlenů, po zadání však uvedl hned výsledek, takže postup výpočtu není jasný. V pravidle zmínil, že dělení mnohočlenů se provádí stejně jako dělení čísel.

Při výpočtu druhé mocniny mnohočlenů se postupovalo podle dnešních vzorců

$$(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab,$$

resp.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i \neq j} 2a_i a_j.$$

---

[50] Viz sloka BiGa/i.27, podle [Col], str. 144.

[51] Podle Krišnova komentáře, viz [Col], str. 142.

[52] Podle [Col], str. 144.

Druhá mocnina výrazu

$$y\bar{a}\ 4\ r\bar{u}\ \dot{6} \qquad \text{je} \qquad y\bar{a}\ va\ 16\ \ y\bar{a}\ \dot{48}\ \ r\bar{u}\ 36\,.$$

V současné symbolice

$$(4x-6)^2 = 16x^2 - 48x + 36.$$

7.5. Rovnice

Hlavním tématem středověké algebry bylo řešení rovnic. Řešení nějakého konkrétního problému probíhalo ve třech krocích. Nejprve bylo třeba sestavit rovnici nazývanou *sami-karaṇa*[53] nebo jen *sama* (rovnice). Někdy se rovnici říkalo také *sāmya* (rovnost) nebo *sadṛśi-karaṇa* (shodující). Rovnice měla dvě strany, kterým se říkalo *pakṣa*. Rovnost byla někdy vyjádřena zkratkou *pha* (*phalah*, tj. rovný), někdy však nebyl uveden žádný symbol. K vytvoření rovnice Bhāskara II. napsal:[54]

> **BiGa/iv.100**
> *Nechť yāvat-tāvat označuje neznámou. Pak přesným provedením operací předložených v úloze sčítání, odčítání, násobení nebo dělení nechť jsou pečlivě sestaveny dvě stejné strany.*

K tomu byly ještě uvedeny metody, které bylo možno při vytváření rovnice použít, například pravidlo tří, součet členů posloupnosti, vlastnosti obrazců.

Poté, co byla rovnice zformulována, následovalo její zapsání, tzv. *nyāsa*. Strany rovnice se zapisovaly pod sebe; v prvním řádku byla levá strana, ve druhém pravá, v každém řádku mocniny neznámých klesaly zleva doprava, odpovídající členy byly pod sebou, chybějící členy označeny nulovým koeficientem.

Zápis[55] याव २ या ९̇ रू ०
याव ० या ० रू १८

v přepisu

$$\begin{array}{lcc} y\bar{a}\ va\ \ 2\ y\bar{a}\ \ \dot{9}\ r\bar{u}\ \circ & & \\ y\bar{a}\ va\ \circ\ y\bar{a}\ \circ\ r\bar{u}\ 18 & \quad\text{znamenal}\quad & 2x^2 - 9x = 18. \end{array}$$

Nebo v případě více neznámých

$$\begin{array}{lcc} y\bar{a}\ 197\ k\bar{a}\ \dot{1644}\ \ n\bar{\imath}\ \dot{1}\ \ r\bar{u}\ \circ & & \\ y\bar{a}\ \ \circ\ \ k\bar{a}\ \ \circ\ \ \ n\bar{\imath}\ \circ\ r\bar{u}\ 6302 & \quad\text{znamenalo}\quad & 197x - 1644y - z = 6302. \end{array}$$

[53] Název je složen ze slov *sama* (rovnost) a *kṛ* (dělat).
[54] Podle [Col], str. 185.
[55] Z prvního tištěného vydání Bhāskarovy *Bījagaṇity*, převzato z [Sm2].

Nakonec následovala příprava rovnice k řešení neboli *samaśodhana*,[56] či jen *śodhana*, což představovalo převedení neznámých na jednu stranu a absolutních členů na druhou.

Rozdělení rovnic

Rovnice se rozdělovaly do několika tříd. Tato klasifikace se u jednotlivých autorů mírně lišila, uvedeme rozdělení podle Bhāskary II.:[57]

(1) rovnice s jednou neznámou, tzv. *eka-varṇa-samīkaraṇa*,
  a) lineární,
  b) kvadratické a vyšších stupňů,
(2) rovnice s více neznámými, tzv. *aneka-varṇa-samīkaraṇa*,
  a) lineární,
  b) kvadratické a vyšších stupňů,
  c) rovnice obsahující smíšený součin neznámých, tzv *bhāvita*.

Někteří učenci nazývali rovnice kvadratické a vyšších stupňů *madhyamāharaṇa* (eliminace středního členu) a už je dál nerozdělovali do dvou skupin podle počtu neznámých.

7.6. Rovnice s jednou neznámou

7.6.1. Lineární rovnice s jednou neznámou

Při řešení lineárních rovnic se někdy užívala metoda chybného předpokladu.[58] Tento postup se objevuje už v rukopisu *Bakhshālī*, například na folio 23 recto nalezneme tuto úlohu (viz obr. 7.3).[59]

BMs/23r
Množství dané prvnímu je neznámé. Druhý dostal dvakrát tolik co první, třetí třikrát tolik co druhý a čtvrtý čtyřikrát víc než třetí. Celkové rozdělené množství je 132. *Jaké je množství prvního?*

Zadání odpovídá výpočet vyjádřený současnou symbolikou

$$x + 2x + 3 \cdot 2x + 4 \cdot 3 \cdot 2x = 132 \quad \Rightarrow \quad 33x = 132 \quad \Rightarrow \quad x = 4.$$

Řešení je popsáno takto:[60]

Polož libovolnou hodnotu na prázdné místo, libovolná hodnota je 1, *pak vytvoř řadu* $1,\ 2,\ 2 \cdot 3,\ 6 \cdot 4$, *vynásobené* $1,\ 2,\ 6,\ 24$, *sečtené* 33, [tím] *vyděl množství, co vidíš* [absolutní člen] $\frac{132}{33}$, *po zkrácení* 4. [To je] *Množství dané* [prvnímu].

---

[56] Odvozeno ze slov *sama* (rovnost) a *śodhana* (odstranění).

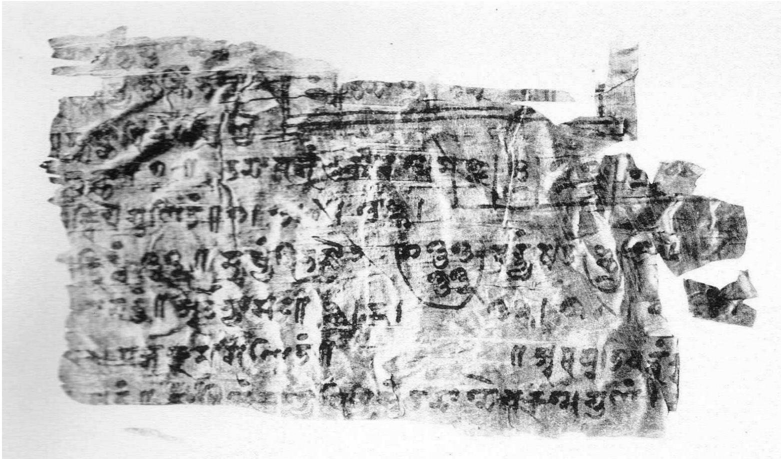
[57] Podle [Col], str. 186.

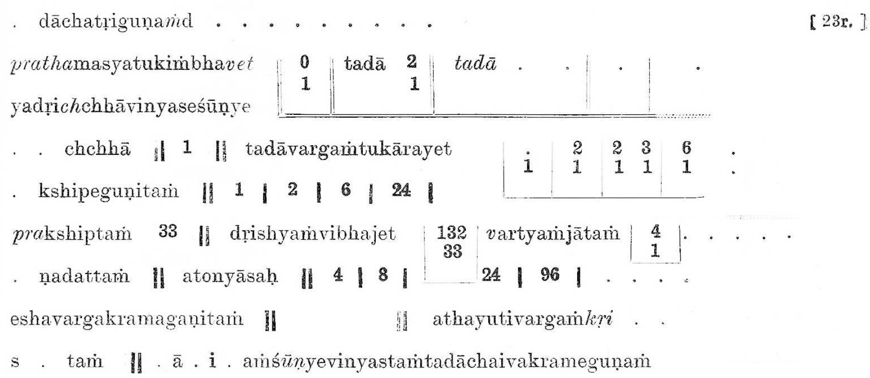
[58] Metoda chybného předpokladu je podrobněji vysvětlena v 6. kapitole, odstavci 6.16.1.

[59] Podle [Kay2], str. 193, a [DS2], str. 36.

[60] Podle [DS2], str. 37. V řešení se uvádí „prázdné místo“. To je proto, že neznámá byla označena malým kroužkem, stejný symbol se používal i pro nulu. Význam tohoto symbolu můžeme vysvětlit jako neznámé, tj. nepřítomné množství.

Na závěr byla ještě připojena zkouška $4 + 8 + 24 + 96 = 132$.





. dāchatṛiguṇa*ṁ*d . . . . [23r.]

*pratha*masyatukiṁbha*vet* | 0/1 | tadā 2/1 | *tadā* . . | . | .

yadṛi*ch*chhāvinyaseśūṇye

. . chchhā || 1 || tadāvargaṁtukārayet | ./1 | 2/1 | 2/1 3/1 | 6/1 | .

. kshipeguṇitaṁ || 1 | 2 | 6 | 24 |

*pra*kshiptaṁ 33 || dṛishyaṁvibhajet | 132/33 | *v*artyaṁjātaṁ | 4/1 | . . . . .

. ṇadattaṁ || atonyāsaḥ || 4 | 8 | 24 | 96 | . . . .

eshavargakramagaṇitaṁ || || athayutivargaṁ*kṛi* . .

s . taṁ || . ā . i . aṁś*ūn*yevinyastaṁtadāchaivakrameguṇaṁ

Obr. 7.3 Rukopis *Bakhshālī*, folio 23 recto a jeho přepis, převzato z [Kay1].

Metoda chybného předpokladu původně pomáhala překonat nedostatek vhodné symboliky, kdy ještě neexistoval symbol pro neznámou. V pozdějších indických algebraických dílech se už tato metoda nevyskytuje, nalezneme ji však v aritmetice.

Ve všech pracích o algebře byly úlohy vedoucí na rovnici ($a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Q}$)

$$a_1 x + b_1 = a_2 x + b_2$$

a pravidlo na její řešení, které můžeme vyjádřit vzorcem

$$x = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}.$$

Bhāskara II. uvedl tento příklad:[61]

BiGa/iv.103–104
Jeden člověk má tři sta mincí a šest koní. Druhý má deset koní stejné hodnoty, ale má dluh sto mincí. Jejich majetky jsou stejné. Jaká je cena koně?

[61] Podle [Col], str. 188.

Problém bychom dnes vyřešili pomocí jednoduché rovnice

$$6x + 300 = 10x - 100, \qquad \text{odkud} \qquad x = 100.$$

Bhāskara označil jako neznámou *yāvat-tāvat* cenu koně. Pomocí pravidla tří[62] pak řešil problém: jestliže cena jednoho koně je *yā* 1 (*yāvat-tāvat*), jaká je cena šesti koní? Vyjádření: 1 | *yā* 1 | 6. Cenu šesti koní stanovil *yā* 6. K tomu přičetl mince a tím získal majetek první osoby: *yā* 6 *rū* 300. Podobným způsobem určil cenu 10 koní *yā* 10, k tomu přičetl záporných 100 mincí (dluh), majetek druhé osoby byl: *yā* 10 *rū* $1\dot{0}0$. Protože majetky obou osob byly stejné, byly to dvě strany rovnice. Vyjádření rovnice tedy bylo

$$\begin{array}{ll} y\bar{a}\ \ 6 & r\bar{u}\ 300 \\ y\bar{a}\ 10 & r\bar{u}\ 1\dot{0}0 \end{array}$$

Bhāskara převedl absolutní členy na pravou stranu a odečtením neznámých na levé straně dostal *yā* 4, odečtením absolutních členů na pravé straně získal 400. Po vydělení tohoto čísla koeficientem u neznámé dostal hodnotu neznámé $400 : 4 = 100$. Nakonec ještě provedl zkoušku dosazením, první člověk měl $600 + 300 = 900$, druhý $1000 - 100 = 900$.

Úlohy vedoucí na lineární rovnice byly řešeny už ve starém Egyptě, k výpočtu se používala metoda chybného předpokladu i přímé dělení. Zachované mezopotámské texty obsahují také několik příkladů, které bychom dnes vyjádřili lineární rovnicí. Chyběla však symbolika, neznámé se většinou označovaly geometrickými termíny *délka*, *šířka*, *výška*. Je pravděpodobné, že úlohy byly řešeny pomocí substituce nebo metody chybného předpokladu.

7.6.2. Kvadratické rovnice s jednou neznámou

Už v džinistických dílech nalezneme úlohy, z nichž je zřejmé, že staří indičtí učenci uměli řešit kvadratické rovnice, například Umāsvātī (kolem 150 př. n. l.) v práci *Tattvārthasūtra* vyjádřil výšku kruhové úseče h ze vztahu[63]

$$4h^2 - 4dh = -c^2 \qquad \text{jako} \qquad h = \frac{1}{2}(d - \sqrt{d^2 - c^2}).$$

Na kvadratickou rovnici vedly i některé příklady týkající se úroků[64] nebo poslů,[65] znalost řešení kvadratických rovnic byla potřebná i pro určení počtu n členů aritmetické posloupnosti, ve které byl dán první člen a, diference d a součet s_n prvních n členů.[66] Takové úlohy však patřily do aritmetiky, protože řešení kvadratické rovnice zde nebývalo popsáno obecně. Pravidlo se vždy

[62] Pravidlo tří je podrobněji vysvětleno v 6. kapitole, odstavci 6.11.
[63] Viz 3. kapitola, odstavec 3.1.
[64] Viz 6. kapitola, odstavec 6.16.4.
[65] Viz 6. kapitola, odstavec 6.16.8.
[66] Viz 6. kapitola, odstavec 6.17.1.

týkalo pouze konkrétního problému a popisovalo, jak nalézt hledanou veličinu pomocí určitých zadaných hodnot. Z dnešního pohledu postup odpovídá řešení kvadratické rovnice, rovnice se však nesestavovala.

V osmnácté kapitole knihy *Brāhma-sphuta-siddhānta*, která je věnována algebře, Brahmagupta uvedl dvě pravidla pro řešení obecné kvadratické rovnice s kladným koeficientem u kvadratického členu ($a \in \mathbb{Q}^+$, b, $c \in \mathbb{Q}$)

$$ax^2 + bx = c.$$

Tím se lišil od dřívějších matematiků, kteří neznali záporná čísla, a proto kvadratické rovnice rozdělovali do tří typů (a, b, $c \in \mathbb{Q}^+$):

$$ax^2 + bx = c, \qquad ax^2 + c = bx, \qquad ax^2 = bx + c.$$

Brahmagupta postup řešení kvadratické rovnice nazýval *madhyamāharaṇa* (eliminace středního členu),[67] patrně proto, že neznámá v první mocnině byla zapsána uprostřed každé strany rovnice

$$ax^2 + bx + 0 = 0x^2 + 0x + c.$$

První pravidlo zformuloval takto:[68]

> **BrSpSi/xviii.48**
> *K absolutnímu členu* [c] *vynásobenému čtyřnásobkem čtverce* [a] *přičti čtverec středního členu* [b], *z toho odmocnina zmenšená o střední člen, dělená dvojnásobkem čtverce je střední člen.*

V dnešní symbolice můžeme pravidlo vyjádřit vzorcem

$$x = \frac{\sqrt{4ac + b^2} - b}{2a}.$$

K tomuto vyjádření mohl Brahmagupta dospět tak, že nejprve rovnici vynásobil $4a$, pak k oběma stranám přičetl b^2, aby levou stranu doplnil na čtverec, a pak odmocnil:

$$ax^2 + bx = c \;\Rightarrow\; 4a^2x^2 + 4abx = 4ac \;\Rightarrow\; 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = 4ac + b^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; (2ax + b)^2 = 4ac + b^2 \;\Rightarrow\; 2ax + b = \sqrt{4ac + b^2} \;\Rightarrow\; x = \frac{\sqrt{4ac + b^2} - b}{2a}.$$

Druhé Brahmaguptovo pravidlo je podobné,[69] neznámou x lze vypočítat postupem odpovídajícím vzorci

$$x = \frac{\sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}}{a},$$

[67] Termín *madhyama* znamená prostřední, *āharaṇa* odstranění.

[68] Podle [Col], str. 346. Stejné pravidlo popsal Śrīdhara v nějakém nedochovaném algebraickém pojednání. Śrīdharovo pravidlo později citoval Bhāskara II., viz [Col], str. 209–210.

[69] Viz sloka BrSpSi/xviii.50, podle [Col], str. 347. Obě pravidla uvedl také Śrīpati.

což odpovídalo násobení rovnice koeficientem a a přičtení $\left(\frac{b}{2}\right)^2$.

Bhāskara II. popsal způsob řešení kvadratické rovnice takto:[70]

> **BiGa/v.128–130**
> *Když čtverec a další* [člen] *s neznámou je spojen se zbytkem, pak po vynásobení obou stran rovnice vhodnou veličinou se k nim něco přidá tak, že strana* [obsahující neznámou] *se dá odmocnit. Odmocnina absolutního členu se pak rovná odmocnině* [strany] *s neznámou. Hodnota neznámé je nalezena z této rovnice.*

Tímto svým tvrzením, i když velmi obecným, popsal odvození postupu výpočtu neznámé z kvadratické rovnice.

Počet kořenů kvadratické rovnice

Brahmagupta ve své práci existenci dvou (kladných) kořenů nezmiňoval, ale komentátor Pṛthūdakasvāmin upozornil na to, že dvě různé Brahmaguptovy úlohy se dají vyjádřit stejnou kvadratickou rovnicí

$$x^2 - 10x = -9,$$

která má kořeny $x = 9$ a $x = 1$. Jako řešení prvního příkladu Brahmagupta uvažoval hodnotu $x = 9$, ve druhém bylo řešením $x = 1$. Autor nejspíš vždy vybral ten kořen, který lépe odpovídal zadání problému.[71]

Existenci dvou kořenů si zcela jasně uvědomoval Mahāvīra, který to uvedl přímo v pravidle na řešení kvadratické rovnice ve tvaru (a, b, $c \in \mathbb{N}$)

$$\frac{a}{b}x^2 + c = x, \qquad \text{resp.} \qquad \frac{a}{b}x^2 - x + c = 0.$$

Řešení takové rovnice se počítalo ze vztahu[72]

$$x = \frac{\frac{b}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{a} - 4c\right)\frac{b}{a}}}{2}$$

a Mahāvīra v pravidle výslovně uvedl, že *odmocnina se může přičíst stejně tak jako odečíst*. V následujícím příkladu[73] se měla vypočítat velikost (objem) hromady rýže. Problém vedl na rovnici

$$\frac{x}{8} \cdot \frac{x}{16} + 24 = x, \qquad \text{tj.} \qquad \frac{x^2}{128} - x + 24 = 0,$$

[70] Podle [Col], str. 207–208.
[71] Obě úlohy se týkaly astronomie, jejich formulace však není příliš srozumitelná.
[72] Viz sloka GaSaSa/iv.57, podle [Ran], str. 81 a [DS2], str. 73.
[73] Viz sloka GaSaSa/iv.58, podle [Ran], str. 81–82.

kde Mahāvīra uvedl už jen výsledek 96 nebo 32.

Bhāskara II. zformuloval podmínku existence dvou kladných kořenů kvadratické rovnice ($p,\ q \in \mathbb{Q}$)

$$x^2 + px = q \qquad \text{upravené do tvaru} \qquad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q,$$

takto:[74]

BiGa/v.130
Jestliže druhá odmocnina absolutní strany rovnice $[\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}]$ *je menší než číslo mající záporné znaménko obsažené v odmocnině strany obsahující neznámou* $[\frac{p}{2}]$*, pak vezme-li se kladná nebo záporná, dvě hodnoty neznámé budou nalezeny. To se v některých případech stává.*

Bhāskara věděl, že má-li rovnice

$$x^2 + px = q \qquad \text{pro} \qquad p, q < 0$$

řešení, pak jsou oba kořeny kladné. Ostatní typy kvadratických rovnic, pokud jsou řešitelné, mají aspoň jeden kořen záporný a záporná čísla se jako řešení neuvažovala. Podrobnou klasifikací a řešením kvadratických rovnic se zabýval už al-Chwárizmí asi tři sta let před Bhāskarou.[75]

V připojených příkladech Bhāskara vysvětloval, že je potřeba ještě zkusit, zda oba kořeny úloze vyhovují.[76]

BiGa/v.139
Příklad: Druhá mocnina osminy stáda opic nadšeně skákala v lesíku. Dvanáct zbývajících bylo vidět na kopci rozveselených společným pokřikováním. Kolik jich bylo dohromady?

Problém lze vyjádřit rovnicí

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x \qquad \text{neboli} \qquad x^2 - 64x = -64 \cdot 12,$$

po úpravě:

$$(x - 32)^2 = 256, \qquad \text{tedy} \qquad x - 32 = \pm 16.$$

Úloha má dvě řešení, opic ve stádě bylo $x = 48$ nebo $x = 16$.

[74] Podle [Col], str. 208.
[75] Podle [Ju], str. 203.
[76] Podle [Col], str. 215–216.

Další podobná úloha je tato:[77]

BiGa/v.140
Příklad: Druhá mocnina pětiny stáda opic zmenšené o tři byla schovaná v jeskyni. A jedna [zbývající] *opice byla viděna, jak šplhá na větvi. Řekni, kolik jich bylo?*

Rovnice odpovídající zadání

$$\left(\frac{x}{5}-3\right)^2+1=x \qquad \text{neboli} \qquad x^2-55x=-250,$$

po úpravě:

$$\left(x-\frac{55}{2}\right)^2=\frac{2025}{4}, \qquad \text{tedy} \qquad x-\frac{55}{2}=\pm\frac{45}{2}.$$

Tato rovnice má dvě řešení $x = 50$, $x = 5$. Bhāskara však upozornil na to, že druhé řešení je nevhodné, protože počet opic v jeskyni by pak byl záporný $\frac{5}{5}-3=-2$. Později komentátor Kriśna vysvětlil, že pokud by v zadání úlohy bylo „pětina stáda odečtená od tří", hodnota $x = 5$ by vyhovovala. V tomto případě by se však muselo odmítnout řešení $x = 50$, neboť tomu odpovídá záporný počet opic v jeskyni $3-\frac{50}{5}=-7$.

Kvadratické rovnice byly známé už v mezopotámské matematice, i když tehdejší učenci ještě nedokázali zformulovat postup pro řešení obecné kvadratické rovnice. Zabývali se pouze některými speciálními typy kvadratických rovnic s přirozenými koeficienty, a podobně jako staří Indové, uznávali pouze kladná řešení. Ve starém Řecku se pomocí geometrické algebry hledala kladná řešení rovnic s kladnými koeficienty $x^2 = ab$, $ax \pm x^2 = b^2$, $x^2 - ax = b^2$.

Al-Chwárizmí i arabský matematik žijící v Egyptě Abú Kámil (asi 850 až 930)[78] uvažovali pouze kladné koeficienty, proto kvadratické (a lineární) rovnice rozdělovali do šesti typů. Na rozdíl od Indů, kteří pravidla nijak nezdůvodňovali, se pokoušeli o geometrické důkazy, pravděpodobně pod vlivem řecké matematiky. Al-Chwárizmí při úpravě rovnic používal, kromě jiných, operaci *al-džabr* (přičtení stejného členu k oběma stranám rovnice). Název této operace se brzy rozšířil a sloužil k označení celé nauky o rovnicích, tj. algebry (viz [Sis]).

7.6.3. Rovnice vyšších stupňů

Řešením rovnic vyšších stupňů se indičtí učenci příliš nezabývali. Bhāskara II. se pokusil aplikovat pravidlo pro eliminaci středního členu i na kubické a bikvadratické rovnice. Postup řešení je uveden v následujícím příkladu.[79]

BiGa/v.137
Příklad: Jaké je to číslo, vzdělaný muži, které vynásobené dvanácti a zvětšené a svou třetí mocninu je rovno šestinásobku svého čtverce přičteného k třiceti pěti.

[77] Podle [Col], str. 216–217.
[78] Vlastním jménem Abú Kámil Šudžá' ibn Muḥammad al-Hásib al-Misrí, viz [Ju].
[79] Podle [Col], str. 214.

Autor popsal řešení tak, že číslo označil jako neznámou a sestavil rovnici, kterou můžeme zapsat jako

$$x^3 + 12x = 6x^2 + 35.$$

Nejprve členy obsahující neznámou převedl na jednu stranu: $x^3 - 6x^2 + 12x = 35$, dále k oběma stranám rovnice přičetl (-8)

$$\begin{aligned} x^3 - 6x^2 + 12x - 8 &= 35 - 8, \\ (x-2)^3 &= 27, \end{aligned}$$

vypočítal třetí odmocninu $x - 2 = 3$ a odtud nalezl neznámé číslo $x = 5$. Bhāskara II. dobře věděl, jak volit zadání, aby rovnice byla snadno řešitelná s využitím vzorce $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Podobným způsobem Bhāskara II. řešil i úlohu vedoucí na bikvadratickou rovnici[80]

$$x^4 - 2x^2 - 400x = 9999.$$

Nejprve k oběma stranám rovnice přičetl $400x + 1$, tím rovnici upravil do tvaru

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 400x + 10\,000.$$

Tento tvar označil za nevhodný, protože levá strana byla druhou mocninou $(x^2 - 1)^2$, pravá však nikoli, a proto se takto nedalo nalézt řešení. Podle autora bylo nutné použít „chytrost a důvtip“ a původní rovnici upravit jinak, přičtením $4x^2 + 400x + 1$ k oběma stranám rovnice. Pak byla rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^2 + 1 &= 4x^2 + 400x + 10\,000, \\ (x^2+1)^2 &= (2x+100)^2. \end{aligned}$$

Odmocněním získal kvadratickou rovnici, jejíž řešení už bylo popsáno dříve:

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= 2x + 100, \\ x^2 - 2x &= 99, \\ x^2 - 2x + 1 &= 100, \\ (x-1)^2 &= 10^2, \\ x - 1 &= 10, \\ x &= 11. \end{aligned}$$

Nakonec zopakoval, že v takových příkladech se k řešení musí použít bystrost.

---

[80] Viz sloka BiGa/v.138, podle [Col], str. 215.

7.7. Soustavy rovnic

7.7.1. Soustavy lineárních rovnic se dvěma neznámými

Pro řešení jednoduchých soustav lineárních rovnic o dvou neznámých se používala metoda *saṅkramaṇa* známá už z aritmetiky.[81] Řešení soustavy (a, b $\in$ $\mathbb{Q}^+$)

$$\begin{aligned} x + y &= a, \\ x - y &= b \end{aligned} \qquad \text{bylo ve tvaru} \qquad x = \frac{1}{2}(a+b), \quad y = \frac{1}{2}(a-b).$$

Obecnější soustavou se zabýval Mahāvīra. Řešení soustavy (a, b, p_1, $p_2 \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} ax + by &= p_1, \\ bx + ay &= p_2 \end{aligned}$$

vyjádřil jako[82]

$$x = \frac{ap_1 - bp_2}{a^2 - b^2}, \qquad y = \frac{ap_2 - bp_1}{a^2 - b^2}.$$

Uvedeme ještě jeden příklad a dva různé způsoby řešení, které předložil Bhāskara II.[83]

BiGa/iv.106
Jeden říká: dej mi sto a budu mít dvakrát tolik, co ty. Druhý odpoví: když mi dáš deset, budu mít šestkrát víc než ty. Řekni, kolik má každý?

Zadání odpovídá soustava, kde x je majetek prvního, y majetek druhého:

$$\begin{aligned} x + 100 &= 2(y - 100), \\ y + \ \ 10 &= 6(x - 10). \end{aligned}$$

V prvním způsobu řešení autor vyjádřil x z první i ze druhé rovnice

$$x = 2y - 300, \qquad x = \frac{1}{6}(y + 70),$$

porovnáním pravých stran vypočítal y

$$2y - 300 = \frac{1}{6}(y+70) \quad \Rightarrow \quad 12y - 1800 = y + 70 \quad \Rightarrow \quad y = 170$$

[81] Viz 6. kapitola, odstavec 6.16.3.
[82] Viz sloka GaSaSa/vi.139$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 130.
[83] Podle [Col], str. 191, 231.

a dosazením této hodnoty do jednoho z výrazů pro x dopočítal

$$x = 2 \cdot 170 - 300 \qquad \text{nebo} \qquad x = \frac{1}{6}(170 + 70) \quad \Rightarrow \quad x = 40.$$

Ve druhém způsobu řešení použil Bhāskara substituci. Majetek prvního označil $2z - 100\,(= x)$, pak podle první podmínky vyjádřil majetek druhého $z + 100\,(= y)$ a podle druhé podmínky vytvořil rovnici

$$z + 110 = 6(2z - 110),$$

odkud snadno dopočítal nejprve $z = 70$, pak $x = 40$ a $y = 170$. Vhodnou substitucí $z = \frac{1}{2}(x + 100)$ tak řešil úlohu pouze jednou rovnicí o jedné neznámé. Tento postup řešení uvedl v kapitole o rovnicích s jednou neznámou, zatímco první způsob zařadil do kapitoly o rovnicích s více neznámými.

Úlohy „o předávání" byly ve středověku poměrně oblíbené, řešili je například al-Káší nebo Leonardo Pisánský (Fibonacci).

7.7.2. Soustavy lineárních rovnic s více neznámými

Indičtí matematikové neznali obecnou metodu řešení soustav lineárních rovnic, postup řešení vždy závisel na typu soustavy.

Rukopis *Bakhshālī* obsahuje řešení soustav n lineárních rovnic o n neznámých, kde číslo n bylo vždy liché a koeficienty přirozená čísla. Dnes bychom takovou soustavu zapsali ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= p_1, \\ x_2 + x_3 &= p_2, \\ &\vdots \\ x_{n-1} + x_n &= p_{n-1}, \\ x_n + x_1 &= p_n. \end{aligned}$$

Tato soustava se řešila postupným odčítáním prvních $(n-1)$ rovnic od sebe, tím se získalo

$$x_n - x_1 = p_{n-1} - p_{n-2} + \cdots + p_2 - p_1.$$

Odtud se vyjádřilo x_n a dosadilo do poslední rovnice, která pak byla ve tvaru

$$2x_1 + (p_{n-1} - p_{n-2} + \cdots + p_2 - p_1) = p_n, \qquad \text{resp.} \quad 2x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i p_i = p_n.$$

Označíme-li $b = \sum\limits_{i=1}^{n-1} (-1)^i p_i$, poslední rovnice je ve tvaru

$$2x_1 + b = p_n.$$

Tato rovnice se řešila pomocí metody chybného předpokladu.[84]

Āryabhaṭa uvedl pravidlo,[85] podle něhož bylo možné řešit soustavu lineár-

[84] Viz 6. kapitola, odstavec 6.16.1.

[85] Viz sloka Ar/ii.29, podle [Cla], str. 40.

ních rovnic ($p_i \in \mathbb{N}$)

$$\sum_{i=1}^{n} x_i - x_1 = p_1,$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i - x_2 = p_2,$$
$$\vdots$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i - x_n = p_n.$$

Nejprve se vyjádřil součet $\sum_{i=1}^{n} x_i$. Sečtením všech rovnic a jednoduchou úpravou se získalo

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{n-1}$$

a dosazením do původních rovnic se nakonec vypočítaly hodnoty neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ve tvaru

$$x_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{n-1} - p_i.$$

Podobné pravidlo zformuloval i Mahāvīra.[86] K procvičení uvedl příklad:[87]

GaSaSa/vi.160–162
Celník se ptal postupně čtyř kupců, kteří nakupovali společně, jaká je celková cena jejich zboží. První kupec, když vynechal svůj vklad, tvrdil, že 22. Druhý tvrdil, že 23, třetí řekl 24 a čtvrtý řekl, že 27. Každý z nich vždy odečetl svůj vklad. Ó příteli, řekni mi samostatnou cenu zboží každého z nich.

Problém se vyjádřil pomocí soustavy lineárních rovnic. Označíme-li x_1, x_2, x_3 a x_4 postupně cenu zboží jednotlivých kupců, můžeme soustavu současnou symbolikou zapsat takto:

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + x_4 &= 22, \\ x_1 + x_3 + x_4 &= 23, \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 24, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 27 \end{aligned} \qquad \text{neboli} \qquad \begin{aligned} (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) - x_1 &= 22, \\ (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) - x_2 &= 23, \\ (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) - x_3 &= 24, \\ (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) - x_4 &= 27. \end{aligned}$$

Sečtením všech rovnic se dostalo $3(x_1+x_2+x_3+x_4) = 22+23+24+27 = 96$, odtud $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = \frac{96}{3} = 32$, a dosazením do jednotlivých rovnic se dopočítaly hodnoty $x_1 = 10$, $x_2 = 9$, $x_3 = 8$ a $x_4 = 5$.

[86] Viz sloka GaSaSa/vi.159, podle [Ran], str. 136.
[87] Viz sloka [Ran], str. 136–137.

Obecnější byl další typ soustavy lineárních rovnic ($a_i,\ p_i \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i - a_1 x_1 &= p_1, \\ b_2 \sum_{i=1}^{n} x_i - a_2 x_2 &= p_2, \\ &\vdots \\ b_n \sum_{i=1}^{n} x_i - a_n x_n &= p_n. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Podobně jako u předchozího typu soustavy se nejprve vyjádřil součet neznámých

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{a_i}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a_i} - 1} \qquad \Rightarrow \qquad x_i = \frac{b_i}{a_i} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{a_i}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a_i} - 1} - \frac{p_i}{a_i}.$$

Následující příklad je od Mahāvīry:[88]

> **GaSaSa/vi.253$\frac{1}{2}$–255$\frac{1}{2}$**
> *Tři kupci si vzájemně předávali peníze. Kdyby první dostal* 4 *od druhého a* 5 *od třetího, stal by se dvakrát bohatší než ostatní dohromady. Kdyby druhý vyprosil* 4 *od prvního a* 6 *od třetího, tak by měl třikrát víc peněz než ostatní dohromady. Kdyby třetí dostal* 5 *od prvního a* 6 *od druhého, byl by pětkrát bohatší než ostatní dohromady. Ó, matematiku, znáš-li postup citra-kuṭṭīkāra-miśra, řekni mi rychle, kolik peněz měl každý.*

Problém můžeme vyjádřit soustavou lineárních rovnic typu (7.3)

$$\begin{aligned} x + 4 + 5 &= 2(y + z - 4 - 5), & & & 2(x + y + z) - 3x &= 27, \\ y + 4 + 6 &= 3(x + z - 4 - 6), & &\Rightarrow & 3(x + y + z) - 4y &= 40, \\ z + 5 + 6 &= 5(x + y - 5 - 6), & & & 5(x + y + z) - 6z &= 66, \end{aligned}$$

jejímž řešením je $x = 7$, $y = 8$, $z = 9$.

V indických textech byla i pravidla na řešení soustavy ($a_i,\ b_i,\ p \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} a_1 x_1 = a_2 x_2 = \cdots &= a_n x_n, \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_n x_n &= p, \end{aligned}$$

[88] Podle [Ran], str. 159. Termínem *citra-kuṭṭīkāra-miśra* nazýval Mahāvīra problémy vedoucí na výše uvedený typ soustavy (7.3).

kterou lze zapsat ve tvaru (s neznámými $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$)

$$\begin{aligned} a_1x_1 &= y, \\ a_2x_2 &= y, \\ &\vdots \\ a_nx_n &= y, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n &= p. \end{aligned}$$

Podle indických matematiků se taková soustava nejlépe řešila tak, že se nejprve za jedinou neznámou považovalo y, a to se vypočítalo dosazením z prvních n rovnic do poslední, která už pak obsahovala jen jednu neznámou:

$$x_1 = \frac{y}{a_1}, \quad x_2 = \frac{y}{a_2}, \ \ldots, \quad x_n = \frac{y}{a_n},$$
$$\frac{b_1}{a_1}y + \frac{b_2}{a_2}y + \cdots + \frac{b_n}{a_n}y = p.$$

Odtud se vypočítalo y:

$$y = \frac{p}{\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a_i}}$$

a zpětným dosazením i ostatní neznámé $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Postup ukážeme na příkladu, který zformuloval Bhāskara II.[89]

BiGa/iv.107
Osm rubínů, deset smaragdů a sto perel, které jsou na tvé náušnici, jsem pro tebe nakoupil za stejnou cenu. Součet cen těchto tří druhů drahokamů je o tři menší než polovina ze sta. Řekni mi cenu každého, znáš-li tento výpočet, nadějná dámo.

Označíme-li ceny rubínů, smaragdů a perel postupně x, y, z, můžeme úlohu vyjádřit rovnicemi

$$8x = 10y = 100z,$$
$$x + y + z = 47.$$

Bhāskara za neznámou *yāvat-tāvat* volil stejnou cenu drahokamů, v současném značení $t = 8x = 10y = 100z$. Odtud pomocí pravidla tří vyjádřil ceny drahokamů $\frac{t}{8}\,(= x)$, $\frac{t}{10}\,(= y)$, $\frac{t}{100}\,(= z)$, sečetl je a sestavil jednoduchou rovnici, ze které snadno vypočítal t

$$\frac{t}{8} + \frac{t}{10} + \frac{t}{100} = \frac{47}{200}t = 47, \qquad \text{odtud} \qquad t = 200.$$

[89] Podle [Col], str. 191.

Pak vypočítal hledanou cenu rubínu $25\,(=\frac{200}{8})$, smaragdu $20\,(=\frac{200}{10})$ a perly $2\,(=\frac{200}{100})$. K tomu ještě navíc určil, že celková cena drahokamů na náušnici je $600\,(=3\cdot 200)$. Vhodnou volbou neznámé tak Bhāskara řešil jen jednu rovnici s jednou neznámou.

7.7.3. Soustavy nelineárních rovnic

Středověcí indičtí matematikové se věnovali studiu následujících soustav rovnic ($a,\ b\in\mathbb{Q}^+$):

$$\begin{aligned} x-y&=a, \quad &\text{(i)} \qquad\qquad x+y&=a, \quad &\text{(ii)}\\ xy&=b, & xy&=b, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2+y^2&=a, \quad &\text{(iii)} \qquad\qquad x^2+y^2&=a, \quad &\text{(iv)}\\ xy&=b, & x+y&=b, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2+y^2&=a, \quad &\text{(v)} \qquad\qquad x^2-y^2&=a, \quad &\text{(vi)}\\ x-y&=b, & xy&=b. \end{aligned}$$

Podle pravidel, která popsal například Āryabhaṭa I.[90] či Brahmagupta,[91] byla řešením rovnice (i) čísla

$$x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+4b}+a\right), \qquad y=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+4b}-a\right).$$

Řešení vychází z identity

$$(x+y)^2=(x-y)^2+4xy \qquad \text{neboli} \qquad (x+y)^2=a^2+4b.$$

Odtud $x+y=\sqrt{a^2+4b}$ a bylo možné provést operaci *saṅkramaṇa* s čísly $\sqrt{a^2+4b}$ ve spojení s a, tj. vyřešit soustavu $x+y=\sqrt{a^2+4b}\ \wedge\ x-y=a$.[92]

Podobným způsobem se řešila soustava (ii), pravidlo uvedl například Mahāvīra.[93] Podle něho se z předchozí identity nejprve vyjádřil rozdíl neznámých $x-y=\sqrt{(x+y)^2-4xy}$, tj. $x-y=\sqrt{a^2-4b}$, pak se opět provedla operace *saṅkramaṇa*, tentokrát s čísly a ve spojení s $\sqrt{a^2-4b}$, tedy

$$x=\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2-4b}\right), \qquad y=\frac{1}{2}\left(a-\sqrt{a^2-4b}\right).$$

---

[90] Viz sloka Ar/ii.24, podle [Cla], str. 38.
[91] Viz sloka BrSpSi/xviii.100, podle [Col], str. 377.
[92] Operace *saṅkramaṇa* je popsána v 6. kapitole, odstavci 6.16.3.
[93] Viz sloka GaSaSa/vii.129$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 224.

Pravidlo pro řešení soustavy (iii) popsal například Mahāvīra,[94] přitom vycházel ze vztahů

$$(x+y)^2 = (x^2+y^2) + 2xy \qquad \text{neboli} \qquad x+y = \sqrt{a+2b},$$
$$(x-y)^2 = (x^2+y^2) - 2xy \qquad \text{neboli} \qquad x-y = \sqrt{a-2b}.$$

Nakonec podle operace *saṅkramaṇa* s čísly $\sqrt{a+2b}$ ve spojení s $\sqrt{a-2b}$ dostal řešení

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a+2b} + \sqrt{a-2b}\right), \qquad y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a+2b} - \sqrt{a-2b}\right).$$

Soustava (iv) se řešila podle pravidel uvedených například v díle Āryabhaṭy I.[95] nebo Brahmagupty.[96] Pravidla se opírala o vztah

$$(x-y)^2 = 2(x^2+y^2) - (x+y)^2 \qquad \text{neboli} \qquad x-y = \sqrt{2a-b^2}$$

a podle operace *saṅkramaṇa* s čísly b ve spojení s $\sqrt{2a-b^2}$ se získalo řešení

$$x = \frac{1}{2}\left(b + \sqrt{2a-b^2}\right), \qquad y = \frac{1}{2}\left(b - \sqrt{2a-b^2}\right).$$

Pravidla, podle nichž se řešily soustavy (v) a (vi), uvedl například Nārāyaṇa.[97] Pro řešení soustavy (v) vyjádřil

$$(x+y)^2 = 2(x^2+y^2) - (x-y)^2 \qquad \text{neboli} \qquad x+y = \sqrt{2a-b^2},$$

pak užitím operace *saṅkramaṇa* s čísly $\sqrt{2a-b^2}$ ve spojení s b získal řešení

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2a-b^2} + b\right), \qquad y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2a-b^2} - b\right).$$

Soustavu (vi) převedl na soustavu (i) tím, že umocnil druhou rovnici. Pak

$$x^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+4b^2} + a\right), \qquad y^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+4b^2} - a\right)$$

a odmocněním získal (kladné) hodnoty x a y.

Podobné soustavy byly řešeny ve staré Mezopotámii, většinou se dosazením získala kvadratická rovnice vhodného tvaru, pro jejíž řešení mezopotámští matematikové znali algoritmus. Někdy pro zjednodušení výpočtu šikovně použili

[94] Viz sloka GaSaSa/vii.127$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 224.
[95] Viz sloka Ar/ii.23, podle [Cla], str. 38.
[96] Viz sloka BrSpSi/xviii.99, podle [Col], str. 377.
[97] Podle [DS2], str. 84.

substituci. Studiem soustav se zabýval rovněž Diofantos (3. stol.) v knize I *Aritmetiky*.

Pravidlo odlišných operací

Pro další dva typy soustav rovnic ($a,\ b \in \mathbb{Q}^+$) se používal název *viṣama-karma* (odlišná operace):[98]

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= a, \qquad \text{(vii)} \\ x - y &= b, \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x^2 - y^2 &= a, \qquad \text{(viii)} \\ x + y &= b. \end{aligned}$$

Obě soustavy se řešily podobným způsobem, nejprve se vyjádřil součet, resp. rozdíl neznámých, pak se výsledek dopočítal pomocí operace *saṅkramaṇa*.

$$\begin{aligned} x + y &= \frac{x^2 - y^2}{x - y} \qquad \text{neboli} \qquad x + y = \frac{a}{b}, \\ x - y &= \frac{x^2 - y^2}{x + y} \qquad \text{neboli} \qquad x - y = \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

Podle pravidel, která popsal např. Brahmagupta[99] nebo Mahāvīra,[100] je řešením soustav (vii), resp. (viii)

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + b\right), \qquad y = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} - b\right),$$

resp.

$$x = \frac{1}{2}\left(b + \frac{a}{b}\right), \qquad y = \frac{1}{2}\left(b - \frac{a}{b}\right).$$

7.8. Neurčité lineární rovnice

Prvním indickým matematikem, který se zabýval řešením neurčitých rovnic, byl Āryabhaṭa I. Popsal metodu řešení rovnice ($a,\ b,\ c \in \mathbb{N}$)

$$ax + c = by, \tag{7.4}$$

kde řešení hledal v oboru přirozených čísel.[101] Jeho následovník Bhāskara I. ukázal, že stejná metoda může být použita i pro řešení rovnice[102]

$$ax - c = by$$

[98] Název vznikl zřejmě k rozlišení od termínu *saṅkramaṇa*, protože bylo potřeba provést ještě „odlišnou operaci“, totiž dělení. Mahāvīra dokonce uváděl termín *viṣama-saṅkramaṇa* (odlišná *saṅkramaṇa*).

[99] Viz sloka BrSpSi/xviii.98, podle [Col], str. 376.

[100] Viz sloka GaSaSa/vi.2, podle [Ran], str. 93.

[101] Āryabhaṭově metodě jsou věnovány publikace [Bag2], [Kak1], [BaSh], [Beh].

[102] Metodou Bhāskary I. se zabývá [Maj1].

a navíc, že řešení této rovnice vyplývá z řešení rovnice $ax - 1 = by$.

Jejich metody přejali a rozvinuli i další autoři, v polovině 10. století Āryabhaṭa II. ukázal, že v některých případech lze řešení zjednodušit, a upozornil na případy, kdy metody selhávají.[103]

Většina autorů při popisu rovnice ještě zdůraznila, že koeficienty a, b, c musí být nesoudělné, jinak by je bylo možné zkrátit.[104] Proto se v indických pravidlech často předpokládalo, že a, b a c jsou navzájem různá prvočísla.[105]

Jedním typem úloh, které vedly na neurčitou rovnici prvního stupně, bylo nalezení přirozeného čísla n, které po vydělení danými celými čísly a_1, a_2 dává zbytky r_1, r_2. Tedy

$$n = a_1 x + r_1 = a_2 y + r_2$$

neboli

$$a_2 y - a_1 x = r_1 - r_2, \qquad \text{tj.} \quad a_2 y - a_1 x = \pm c.$$

Jiným úkolem, kde se řešila neurčitá rovnice prvního stupně, byl problém nalezení takového celého čísla x, které vynásobené daným celým číslem a a zvětšené či zmenšené o jiné dané celé číslo c je dělitelné třetím daným celým číslem b beze zbytku, tedy hledala se přirozená řešení rovnice $(a,\ b,\ c \in \mathbb{Z})$

$$\frac{ax \pm c}{b} = y.$$

Terminologie

Analýza neurčitých rovnic prvního stupně se nazývala *kuṭṭaka*, *kuṭṭākāra*, *kuṭṭīkāra* nebo krátce *kuṭṭa*.[106] O tom, jak významné místo v indické algebře tato rovnice měla, svědčí i fakt, že termínem *kuṭṭaka* či *kuṭṭaka-gaṇita* byla někdy označována celá algebra, například v Brahmaguptově práci *Brāhmasphuta-siddhānta* se 18. kapitola věnovaná algebře jmenuje *Kuṭṭaka*.

V úloze prvního typu se koeficientům a_1, a_2 říkalo *bhāgahāra*, *bhājak* či *cheda* (dělitelé), čísla r_1, r_2 se nazývala *agra* nebo *śeṣa* (zbytky).

V úlohách druhého typu se konstantě b říkalo *bhājaka* (dělitel), konstanta c byla označena jako *kṣepa* či *kṣepaka* (přidané číslo) a konstanta a byla pojmenována *bhājya* (dělenec). Neznámá x se nazývala *guṇaka* nebo *guṇakāra* (násobitel), neznámá y byla *phala* (podíl). Mahāvīra někdy označoval neznámou x jako *rāśi* (číslo), ve smyslu neznámé číslo (viz [DS2]).

---

[103] Metody Āryabhaṭy II. jsou podrobně popsány v [Jha].

[104] Rovnice $ax+c = by$ má celočíselné řešení právě tehdy, když číslo c je dělitelné největším společným dělitelem čísel a, b.

[105] Ve starých textech jsou uvedeny termíny *dṛḍha* (pevná), *niccheda* (nemající dělitele), *nirapavarta* (nerozložitelná), podle [DS1].

[106] Kořen těchto slov *kuṭṭ* znamená rozdrtit, rozmělnit či rozdrobit.

Indický způsob řešení odpovídá metodě využívající řetězové zlomky, protože platí ($q_0 \in \mathbb{Z}$, $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1} \in \mathbb{N}$)

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots\, q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}} = [q_0; q_1, q_2, \ldots, q_n].$$

Čísla q_k lze získat pomocí Eukleidova algoritmu pro hledání největšího společného dělitele čísel a a b.

Zlomek $\frac{a_k}{b_k} = [q_0; q_1, q_2, \ldots, q_k]$ se nazývá k-tý konvergent nebo k-tý sblížený zlomek a přitom platí $\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$. Libovolné řešení rovnice (7.4) s kladnými nesoudělnými koeficienty může být vyjádřeno ve tvaru:[107]

$$\begin{aligned} x &= (-1)^n b_{n-1} c + bt, \\ y &= (-1)^n a_{n-1} c + at, \qquad t \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Je vidět, že obecné řešení rovnice (7.4) je vyjádřeno pomocí čitatele a jmenovatele $(n-1)$-ního sblíženého zlomku $\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$.[108]

Rovnice s kladnými koeficienty

Āryabhaṭa I. řešil úlohu prvního typu: nalézt číslo n, které po vydělení danými čísly a_1, a_2 dává zbytky r_1, r_2. Hledal řešení rovnice (7.4), kde $c > 0$, jeho formulace však není příliš srozumitelná.[109] Později se řešením úlohy $ax + c = by$ zabývali i další indičtí matematikové, například Bhāskara I (7. stol.), Brahmagupta (7. stol.), Mahāvīra (9. stol.), Govindasvāmī (9. stol.), Śrīpati (11. stol.), Bhāskara II. (12. stol.), Nārāyaṇa (14. stol.),[110] kteří se věnovali i některým speciálním případům, zejména rovnicím $ax - c = by$ a $ax \pm 1 = by$.[111]

Staří Indové při řešení rovnice (7.4) využívali postup odpovídající Eukleidovu algoritmu pro hledání největšího společného dělitele čísel a a b. Jejich metoda počítala s celými čísly q_k, která byla vypočítána postupným dělením pro $a > b$:

$$\begin{aligned} a &= bq_0 + r_1, \\ b &= r_1 q_1 + r_2, \\ &\ \vdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1} q_{n-1} + r_n, \\ r_{n-1} &= r_n q_n. \end{aligned}$$

---

107 Důkaz je možné nalézt například v [Chi].

108 Řešení rovnice $ax + c = by$ je popsáno rovněž v článku [Sy6].

109 Viz sloky Ar/ii.32–33, podle [Cla], str. 43.

110 Podle [Maj2], [Bag2], [MS2].

111 Například sloky BrSpSi/xviii.3–6, podle [Col], str. 325–326, GaSaSa/vi.115$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 117–121, MaSi/xviii.1–20, podle [DvS], str. 21.

Jestliže $b > a$, pak $q_0 = 0$ a $r_1 = a$. Podíly, kterých je $n+1$, můžeme zapsat ve tvaru $[q_0; q_1, q_2, \ldots, q_n]$ a platí $\frac{a}{b} = [q_0; q_1, q_2, \ldots, q_n]$. Ve staré Indii pro další výpočet uvažovali jen prvních n podílů, tj.

$$\frac{a}{b} \approx \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = [q_0; q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}]. \tag{7.6}$$

Uvedeme středověké pravidlo pro nalezení nejmenšího přirozeného řešení rovnice $ax + c = by$ s kladnými koeficienty a, b, c, které popsal Bhāskara II.:[112]

BiGa/ii.55–57
Děl vzájemně dělenec [a], *a dělitel* [b], *které jsou již nesoudělné, dokud není zbytek dělení jednička. Zapiš postupně pod sebou podíly, pod nimi přidané číslo* [c] *a dolů nulu. Vynásob předposlední* [číslo] *číslem přímo nad ním a přičti poslední. Pak vynech poslední a opakuj tento postup, dokud nezůstane pouze dvojice čísel. Jestliže horní z nich vydělíme dělencem, zbytek je podíl. Jestliže dolní vydělíme dělitelem, zbytek je násobitel. Tento postup platí, jestliže počet podílů je sudý. Když je lichý, pak se nalezená čísla* [podíl a násobitel] *musí odečíst od dělence nebo dělitele. Tyto rozdíly budou skutečným podílem* [y] *a násobitelem* [x].

Další Bhāskarovo pravidlo ukazuje, jak je možné z jednoho řešení rovnice $ax + c = by$ nalézt další řešení této rovnice:[113]

BiGa/ii.64
Násobitel [x] *a podíl* [y], *když se přičtou ke svým dělitelům vynásobeným libovolnými čísly, stanou se jinými* [řešeními].

Je-li (x_1, y_1) řešením rovnice $ax + c = by$, pak další řešení této rovnice se nalezne podle vzorců:

$$x = x_1 + bt, \qquad y = y_1 + at, \qquad \text{kde} \quad t \in \mathbb{Z}. \tag{7.7}$$

Podle uvedené metody pak Bhāskara řešil několik úloh, například:[114]

BiGa/ii.66
Jsi-li znalý zkoumání takových otázek, řekni mi přesně násobitele, kterým je sto vynásobeno, k součinu přičteno devadesát a ten součet bude dělitelný šedesáti třemi beze zbytku.

Bhāskara požadoval řešení rovnice

$$\frac{100x + 90}{63} = y, \qquad \text{resp.} \qquad 100x + 90 = 63y.$$

[112] Podle [Col], str. 156–159, [Ju], str. 145–146.
[113] Podle [Col], str. 161–162.
[114] Podle [Col], str. 162–163, [Ju], str. 146–147.

Podle zadání byl dělenec $a = 100$, dělitel $b = 63$ a přidané číslo $c = 90$. Postupným dělením, tj. Eukleidovým algoritmem, vypočítal Bhāskara sedm čísel, z nichž podle (7.6) pro další kroky použil jen prvních šest ($n = 6$ je sudé)

$$\frac{a}{b} = \frac{100}{63} = [1; 1, 1, 2, 2, 1, 3], \qquad \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = \frac{a_5}{b_5} = [1; 1, 1, 2, 2, 1].$$

Získaná čísla Bhāskara II. zapsal pod sebe, pod ně připojil ještě přidané číslo ($c = 90 = z_{-1}$) a nulu ($0 = z_{-2}$), pak je postupně zdola nahrazoval čísly vypočítanými podle vztahu uvedeného v pravidle

$$z_j = q_{n-1-j} z_{j-1} + z_{j-2} \qquad \text{pro} \quad j = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{7.8}$$

Jednotlivé kroky jsou uvedeny ve sloupcích následující tabulky. Ve staré Indii bylo zvykem čísla nepotřebná k dalšímu výpočtu mazat, proto na konci výpočtu zbyla pouze dvě.

z_5	$q_0 = 1$	1	1	1	1	1	2 430
z_4	$q_1 = 1$	1	1	1	1	1 530	1 530
z_3	$q_2 = 1$	1	1	1	900	900	
z_2	$q_3 = 2$	2	2	630	630		
z_1	$q_4 = 2$	2	270	270			
z_0	$q_5 = 1$	90	90				
z_{-1}	$c = 90$	90					
z_{-2}	0						

Nejmenší kladné řešení nalezl jako zbytky dělení – *horní* číslo 2 430 vydělil dělencem 100 a *dolní* číslo 1 530 vydělil dělitelem 63:

$$\begin{aligned} 2\,430 : 100 &= 24\,(\text{zbytek } 30) \qquad \Rightarrow \qquad y = 30, \\ 1\,530 : 63 &= 24\,(\text{zbytek } 18) \qquad \Rightarrow \qquad x = 18. \end{aligned}$$

Tím stanovil nejmenší přirozené řešení $(18, 30)$. K tomu poznamenal, že další řešení vypočítaná podle vztahu (7.7), tj.

$$x = 18 + 63t, \qquad y = 30 + 100t, \qquad t \in \mathbb{Z}, \tag{7.9}$$

jsou například $(81, 130)$ nebo $(14, 230)$.

Bhāskara navíc ukázal, že je možné postup zjednodušit, pokud čísla a a c nebo b a c mají společného dělitele, protože po zkrácení se dostane rovnice s menšími koeficienty:

(i) původní rovnici

$$\frac{100x + 90}{63} = y, \qquad \text{resp.} \qquad 100x + 90 = 63y$$

bylo možné zkrácením společným dělitelem koeficientů a a c převést na rovnici

$$\frac{10x+9}{63} = u, \qquad \text{resp.} \qquad 10x + 9 = 63u,$$

to byla úprava odpovídající substituci $y = 10u$.

Nyní podle postupu uvedeného v pravidle vydělil a získal pouze čtyři čísla ($n = 3$ je liché)

$$\frac{10}{63} = [0; 6, 3, 3], \qquad \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = \frac{a_2}{b_2} = [0; 6, 3]$$

a odpovídající výpočet byl rychlejší

$$\begin{array}{c|rrrr}
z_2 & q_0 = 0 & 0 & 0 & 27 \\
z_1 & q_1 = 6 & 6 & 171 & 171 \\
z_0 & q_2 = 3 & 27 & 27 & \\
z_{-1} & c = 9 & 9 & & \\
z_{-2} & 0 & & &
\end{array}$$

Po vydělení 27 : 10 a 171 : 63 dostal zbytky 7 a 45. Protože n bylo liché, bylo nutné ještě tyto zbytky odečíst od odpovídajících dělenců, tj. $10 - 7 = 3$ a $63 - 45 = 18$. V tomto případě je $u = \frac{y}{10} = 3$, tedy $y = 30$ a $x = 18$.

(ii) Jinou možnou úpravou rovnice bylo zkrácení společným dělitelem koeficientů b a c. Původní rovnice

$$\frac{100x+90}{63} = y, \qquad \text{resp.} \qquad 100x + 90 = 63y$$

se tak převedla na rovnici

$$\frac{100v+10}{7} = y, \qquad \text{resp.} \qquad 100v + 10 = 7y$$

užitím substituce $x = 9v$. Pak vydělením vznikla jen tři čísla ($n = 2$)

$$\frac{100}{7} = [14; 3, 2], \qquad \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = \frac{a_1}{b_1} = [14; 3]$$

a další výpočet byl snadný

$$\begin{array}{c|rrr}
z_1 & q_0 = 14 & 14 & 430 \\
z_0 & q_1 = \ 3 & 30 & 30 \\
z_{-1} & c = 10 & 10 & \\
z_{-2} & 0 & &
\end{array}$$

Po dělení 430 : 100 a 30 : 7 byly zbytky 30 a 2, tedy $y = 30$ a $v = \frac{x}{9} = 2$, proto $x = 18$.

(iii) Další způsob byl kombinací předchozích dvou. Nejprve se původní rovnice

$$\frac{100x+90}{63} = y, \qquad \text{resp.} \qquad 100x+90 = 63y$$

upravila zkrácením společným dělitelem koeficientů a a c

$$\frac{10x+9}{63} = u, \qquad \text{resp.} \qquad 10x+9 = 63u,$$

a pak se ještě zkrátilo společným dělitelem koeficientů b a c, tj. uvažovala se rovnice

$$\frac{10v+1}{7} = u, \qquad \text{resp.} \qquad 10v+1 = 7u,$$

kde $x = 9v$ a $y = 10u$. Dělením se získala tři čísla ($n = 2$)

$$\frac{10}{7} = [1; 2, 3] \qquad \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = \frac{a_1}{b_1} = [1; 2]$$

a pokračovalo se jako v předchozích případech

$$\begin{array}{c|ccc}
z_1 & q_0 = 1 & 1 & 3 \\
z_0 & q_1 = 2 & 2 & 2 \\
z_{-1} & c = 1 & 1 & \\
z_{-2} & 0 & &
\end{array}$$

Vypočítané hodnoty 3, resp. 2 jsou rovnou zbytky po dělení 10, resp. 7, tedy $u = 3$ a $v = 2$, a proto $y = 10u = 30$ a $x = 9v = 18$.

Pomocí tohoto nejmenšího řešení bylo možné nalézt obecné řešení původní rovnice $100x + 90 = 63y$ ve tvaru (7.9).

Obecné odvození těchto metod podal až v 16. století komentátor Kr̥ṣṇa (viz [DS2]):

(i) Mají-li koeficienty a a c společného dělitele k, platí $a = ka_1$, $c = kc_1$ a rovnici

$$ax + c = by \qquad \text{můžeme zapsat ve tvaru} \qquad ka_1x + kc_1 = by,$$

užitím substituce $y = ku$ dostaneme

$$ka_1x + kc_1 = bku, \qquad \text{po zkrácení} \qquad a_1x + c_1 = bu.$$

(ii) Analogicky se postupuje, pokud společného dělitele k mají koeficienty b a c. Pak platí $b = kb_1$, $c = kc_1$ a rovnici

$$ax + c = by \qquad \text{můžeme zapsat ve tvaru} \qquad ax + kc_1 = kb_1y,$$

pomocí substituce $x = kv$ dostaneme

$$akv + kc_1 = kb_1y, \qquad \text{po zkrácení} \qquad av + c_1 = b_1y.$$

(iii) Ve třetím případě mají koeficienty a a c společného dělitele k_1, tedy $a = k_1a_1$, $c = k_1c_1$, a navíc ještě koeficienty b a c_1 společného dělitele k_2, tedy $b = k_2b_1$, $c_2 = k_2c_1$. Použijeme-li ještě substituci $y = k_1u$, upravíme nejprve původní rovnici

$$ax + c = by \qquad \text{do tvaru} \qquad a_1x + c_1 = bu,$$

potom zvolíme $x = k_2v$, tím dostaneme tvar

$$a_1v + c_2 = b_1u.$$

Rovnice s některými zápornými koeficienty

Bhāskara II. také studoval rovnici (7.4) s některými zápornými koeficienty a uvedl pravidlo, podle něhož řešení rovnic (a, b, $c \in \mathbb{N}$)

$$ax - c = by, \qquad \text{resp.} \qquad -ax + c = by$$

určil pomocí řešení rovnice $ax + c = by$:[115]

> **BiGa/ii.59**
> *Násobitel* [x] *a podíl* [y], *nalezené pro kladné přidané číslo* [c] *když se odečtou od příslušných veličin, odpovídají stejné* [rovnici] *se záporným přidaným číslem. Když se s těmi odvozenými pro kladného dělence zachází stejným způsobem, dostanou se výsledky pro záporného dělence.*

Jinými slovy, je-li (x_1, y_1) nejmenší přirozené řešení rovnice $ax+c = by$, pak

$$(b - x_1, a - y_1) \tag{7.10}$$

je řešením rovnice $ax - c = by$. To se snadno ověří dosazením

$$a(b - x_1) - c = b(a - y_1) \quad \Leftrightarrow \quad ax_1 + c = by_1.$$

Takto vypočítaná čísla $x_2 = b-x_1$, $y_2 = a-y_1$ však obecně nemusí být kladná, nejmenší přirozené řešení lze získat podle pravidla uvedeného ve sloce 64, tj. podle vzorců (7.7) vhodnou volbou parametru.

[115] Podle [Col], str. 160.

Druhá část pravidla tvrdí, že dvojice

$$(b - x_1, y_1 - a) \tag{7.11}$$

je řešením rovnice $-ax + c = by$. To je evidentní, neboť

$$-a(b - x_1) + c = b(y_1 - a) \iff ax_1 + c = by_1.$$

Tento typ rovnice však nemusel mít kladná řešení, v tom případě indičtí matematikové připouštěli i řešení záporná; Bhāskara II. například řešil úlohy vedoucí na rovnice[116]

$$-60x + 3 = 13y \qquad \text{a} \qquad -60x - 3 = 13y.$$

Nejprve nalezl řešení $(x_1, y_1) = (11, 51)$ rovnice $60x + 3 = 13y$ se všemi koeficienty kladnými, pak určil řešení rovnice $-60x + 3 = 13y$ podle vztahu (7.11), tj. $(x_3, y_3) = (b - x_1, y_1 - a) = (13 - 11, 51 - 60) = (2, -9)$. Nakonec podle (7.10) vyjádřil řešení $(x_2, y_2) = (b - x_3, a - y_3) = (13 - 2, -60 + 9) = (11, -51)$ poslední rovnice $-60x - 3 = 13y$.

To, že přirozené řešení rovnice se záporným koeficientem a nebo b nemusí existovat, autor patrně věděl, protože připojil poznámku, že pro záporné hodnoty koeficientů a nebo b není možné najít řešení podle pravidla ze sloky 64.[117]

> *Když dělitel* [b] *nebo dělenec* [a] *je záporný, podíl* [y] *musí vždy být záporný, což je samozřejmě problém. Kdyby to tak bylo, jeden (buď dělenec nebo dělitel) by byl záporný, nastala by chyba v podílu a násobiteli podle posledního pravidla.* [tj. BiGa/ii.64]

Bhāskarův způsob řešení rovnice (7.4) připomíná metodu využívající řetězové zlomky. Máme-li řetězový zlomek $\frac{a}{b} = [q_0; q_1, \ldots, q_n]$, pak čitatele a jmenovatele k-tého sblíženého zlomku $\frac{a_k}{b_k}$ můžeme vypočítat rekurentně:[118]

$$\begin{aligned} a_0 = q_0,\ a_1 = q_0 q_1 + 1, \quad a_j &= q_j a_{j-1} + a_{j-2} \quad \text{pro } j = 2, 3, \ldots, k, \\ b_0 = 1,\ b_1 = q_1, \qquad\quad b_j &= q_j b_{j-1} + b_{j-2} \quad \text{pro } j = 2, 3, \ldots, k. \end{aligned} \tag{7.12}$$

Bhāskara podle svého postupu vyjádřeného rekurentním vzorcem (7.8), tj.

$$z_{-2} = 0,\ z_{-1} = c, \quad z_j = q_{n-1-j} z_{j-1} + z_{j-2}, \qquad \text{pro } j = 0, 1, \ldots, n-1$$

vypočítal *dolní* číslo $z_{n-2} = b_{n-1}c$ a *horní* číslo $z_{n-1} = a_{n-1}c$, to jsou hodnoty ze vztahů (7.5) pro sudé n:

$$\begin{aligned} x &= b_{n-1}c + bt, \\ y &= a_{n-1}c + at, \qquad t \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

[116] Viz příklad sloka BiGa/ii.67, podle [Col], str. 164.
[117] Podle [Col], str. 164–165.
[118] Odvození je možné nalézt např. v [Chi] nebo [BhMu].

Protože však hledal nejmenší přirozené řešení dané rovnice, musel ještě stanovit zbytky po dělení $a_{n-1}c : a = s$ (zb. y_1) a $b_{n-1}c : b = s$ (zb. x_1), pak obecné řešení mohlo být vyjádřeno jako

$$\begin{aligned} x &= x_1 + bs + bt = x_1 + b(t+s), \\ y &= y_1 + as + at = y_1 + a(t+s), \qquad t \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Pokud je lichý počet podílů n v řetězovém zlomku $\frac{a}{b} = [q_0; q_1, q_2, \ldots, q_n]$, je řešení podle (7.5):

$$\begin{aligned} x &= -b_{n-1}c + bt, \\ y &= -a_{n-1}c + at, \qquad t \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Protože v takovém případě byl zbytek po dělení rovněž záporný, bylo třeba ještě tyto hodnoty *odečíst od dělence nebo dělitele*, a tím Bhāskara II. získal nejmenší kladné hodnoty x_2, y_2:

$$\begin{aligned} x &= -x_1 - bs + bt = -x_1 + b + b(s-1) + bt = x_2 + b(t-s-1), \\ y &= -y_1 - as + at = -y_1 + a + a(s-1) + at = y_2 + a(t-s-1), \quad t \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Výhoda indické metody je v tom, že stačilo užít pouze jeden rekurentní vzorec (7.8), zatímco výpočet hodnot a_{n-1} a b_{n-1} podle vztahů (7.12) vyžaduje rekurence dvě.

Je pravděpodobné, že uvedený postup výpočtu byl založen na následující úvaze. Máme-li rovnici (7.4), pak platí

$$y = \frac{ax+c}{b} = \left(q_0 + \frac{r_1}{b}\right)x + \frac{c}{b} = q_0x + \frac{r_1x+c}{b}.$$

Protože se hledalo celočíselné řešení, muselo být také $u_1 = \frac{r_1x+c}{b}$ celé číslo. Uvažovalo se podobným způsobem, tedy

$$x = \frac{bu_1 - c}{r_1} = q_1u_1 + \frac{r_2u_1 - c}{r_1},$$

kde $u_2 = \frac{r_2u_1-c}{r_1}$ bylo celé, a takto se pokračovalo dál, až se dospělo ke jmenovateli $r_n = 1$, tj. získal se výraz

$$u_{n-1} = q_nu_n + (-1)^nc,$$

kde se zvolilo nějaké celé číslo u_n (Bhāskara II. volil $u_n = 0$), a zpětným dosazováním se pak vypočítaly neznámé x, y. Možná, že i původní název metody *kuṭṭaka* – rozdrobení souvisí s tímto postupným dělením, zmenšováním koeficientů.

Bhāskara II. studoval i některé speciální případy, kde postup podle pravidla uvedeného ve slokách 55–57 mohl vést k potížím. Při řešení rovnice, kde platilo $c > b$, upozornil:[119]

BiGa/ii.61
Násobitel [x] a podíl [y] mohou být nalezené jako dříve po vydělení přidaného čísla [c] dělitelem [b], podíl však musí být zvětšen o příslušný podíl $[\frac{c}{b}]$ v případě, že přidané číslo je kladné, nebo když je záporné, příslušný podíl musí být odečten.

Postup předvedl na řešení rovnic[120]

$$5x + 23 = 3y, \qquad 5x - 23 = 3y.$$

První rovnici nejprve řešil „klasicky“:

$$\frac{5}{3} = [1; 1, 2] \qquad \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = \frac{a_1}{b_1} = [1; 1]$$

pak

$$\begin{array}{c|rrr} z_1 & q_0 = 1 & 1 & 46 \\ z_0 & q_1 = 1 & 23 & 23 \\ z_{-1} & c = 23 & 23 & \\ z_{-2} & 0 & & \end{array}$$

a vypočítal zbytky po dělení $23 : 3 = 7$ (zb. 2), $46 : 5 = 9$ (zb. 1). Poté hned upozornil, že toto není přípustné, protože podíly musí být stejné, tedy musí se uvažovat $46 : 5 = 7$ (zb. 11), tak vypočítal řešení $(x_1, y_1) = (2, 11)$. Pro srovnání uvedl další způsob řešení podle předchozího pravidla neboli nejprve uvažoval rovnici se zkráceným absolutním členem

$$5x + 2 = 3y, \qquad \text{protože} \qquad 23 : 3 = 7 \text{ (zb. 2)}$$

a nalezl její řešení $(x_0, y_0) = (2, 4)$. Nakonec stanovil řešení původní rovnice $(x_1, y_1) = (x_0, y_0 + 7) = (2, 11)$.

Pak řešil rovnici se záporným zkráceným absolutním členem

$$5x - 2 = 3y$$

podle vzorců (7.10), tedy $(x_2, y_2) = (b - x_0, a - y_0) = (3 - 2, 5 - 4) = (1, 1)$, a konečně podle pravidla ze sloky 61 nalezl řešení rovnice $5x - 23 = 3y$ ve tvaru $(x_3, y_3) = (x_2, y_2 - 7) = (1, -6)$. Kladné řešení bylo možné získat ze vztahů (7.7)

$$x = 1 + 3t, \qquad y = -6 + 5t$$

[119] Podle [Col], str. 161.

[120] Viz příklad 1 ve sloce BiGa/ii.69, podle [Col], str. 165–166.

volbou $t = 2$, tedy jako nejmenší řešení určil dvojici $(7, 4)$.

Zdůvodnění uvedeného postupu je snadné, pro $c > b$, je možné dělit $c : b$, pak $c = bp + r$, po dosazení do rovnice $ax + c = by$ a po jednoduché úpravě se dostane

$$ax + r = b(y - p).$$

Bhāskarova metoda tak odpovídá substituci $y = z + p$, kde p je podíl a r zbytek při dělení $c : b$.

Rovnice s absolutním členem rovným jedné

Indičtí učenci věnovali speciální pozornost rovnici

$$ax \pm 1 = by, \tag{7.13}$$

která se často používala v astronomických výpočtech. Rovnici (7.13) nazývali *sthira-kuṭṭaka*. Gaṇeśa (16. stol.) vysvětlil, že v astronomických úlohách vedoucích na rovnici (7.4) jsou fyzikální podmínky často takové, že koeficienty a a b jsou neměnné a rovnice se liší pouze absolutním členem c. Pomocí řešení rovnice (7.13) bylo možné snadno získat řešení několika rovnic s různými absolutními členy a nebylo nutné každou z nich řešit zvlášť.

Je-li (x_1, y_1) řešení rovnice $ax \pm 1 = by$, pak $(x_2, y_2) = (cx_1, cy_1)$ je řešením rovnice $ax \pm c = by$. Nejmenší celočíselné řešení se pak získalo jako zbytek dělení $x_2 : b$ a $y_2 : a$, tj.[121]

$$\begin{aligned} x &= x_2 + bt = bp + x_0 + bt = x_0 + b(p + t), \\ u &= y_2 + at = ap + y_0 + at = y_0 + a(p + t). \end{aligned}$$

Lineární rovnice s více neznámými

Staří Indové řešili i úlohy vedoucí na lineární rovnici s více neznámými. V tom případě postupovali tak, že si zvolili vhodné hodnoty za všechny neznámé kromě dvou a rovnici se dvěma zbývajícími neznámými řešili metodou rozdrobení.

Brahmagupta předložil jeden astronomický problém, který vedl na rovnici[122]

$$197x - 1\,644y - z = 6\,302.$$

Odtud nejprve vyjádřil

$$x = \frac{1\,644y + z + 6\,302}{197},$$

[121] Pravidla na řešení rovnice s absolutním členem rovným jedné jsou popsána například ve slokách BrSpSi/xviii.11–13, podle [Col], str. 330–331, BiGa/ii.71, podle [Col], str. 166–167.

[122] Viz sloka BrSpSi/xviii. 55, podle [Col], str. 352–353.

pak zvolil $z = 131$ s komentářem, že „z může být zvoleno libovolně tak, aby nezpůsobilo chybu“. Tím získal rovnici jen se dvěma neznámými

$$x = \frac{1644y + 6433}{197},$$

jejíž řešení $x = 41$, $y = 1$ už snadno získal metodou *kuṭṭaka*.

Soustavy neurčitých lineárních rovnic

Mnoho úloh vedlo na soustavu lineárních rovnic, která obsahovala více neznámých než rovnic. Postupným sčítáním či odčítáním rovnic se eliminovaly neznámé, až se dospělo k jediné rovnici se dvěma nebo více neznámými. Pokud zbyly jen dvě neznámé, bylo možné užít metodu *kuṭṭaka*; v případě, že rovnice obsahovala více neznámých, nejprve se zvolila libovolná vhodná čísla za všechny z nich kromě dvou.

Bhāskara II. řešil například následující úlohu:[123]

> **BiGa/vi.157**
> *Čtyři osoby postupně vlastní pět, tři, šest a osm koní, dva, sedm, čtyři a jednoho velblouda, jejich mul je osm, dvě, jedna a tři, a volů sedm, jeden, dva a jeden. Všichni jsou stejně bohatí. Řekni mi okamžitě, příteli, cenu koně a ostatního dobytka.*

Označíme-li postupně ceny koně, velblouda, muly a vola x, y, z, w a celkový majetek každé osoby p, dostaneme soustavu:

$$5x + 2y + 8z + 7w = p, \tag{A}$$
$$3x + 7y + 2z + w = p, \tag{B}$$
$$6x + 4y + z + 2w = p, \tag{C}$$
$$8x + y + 3z + w = p. \tag{D}$$

Bhāskara II. rovnice po dvou odečetl, (A) – (B), (C) – (B), (D) – (C), a vyjádřil x:

$$x = \frac{1}{2}(5y - 6z - 6w), \tag{E}$$
$$x = \frac{1}{3}(3y + z - w), \tag{F}$$
$$x = \frac{1}{2}(3y - 2z + w). \tag{G}$$

Stejným způsobem pokračoval dál, odečetl (E) – (F), (G) – (F) a vyjádřil y:

$$y = \frac{1}{9}(20z + 16w),$$
$$y = \frac{1}{3}(8z - 5w).$$

[123] Podle [Col], str. 232–233.

Z rovnosti pravých stran vyjádřil z:

$$z = \frac{31w}{4}.$$

Rovnice nemá absolutní člen, stačilo proto zvolit $w = 4t$ a potom dopočítat $z = 31t$, $y = 76t$, $x = 85t$. Autor upozornil, že různou volbou t je možné nalézt nekonečně mnoho řešení, sám uvedl $(85, 76, 31, 4)$ pro $t = 1$, $(170, 152, 62, 8)$ pro $t = 2$, $(255, 228, 93, 12)$ pro $t = 3$.

Na podobné typy soustav vedly ve středověku oblíbené úlohy o ptácích či domácích zvířatech, například Bhāskara II. předložil následující s odvoláním, že se jedná o příklad starých autorů:[124]

> **BiGa/vi.158–159**
> *Holubů se prodá pět za tři* [dramma], *jeřábů sedm za pět, labutí devět za sedm a tři pávi jsou za devět. Přines* 100 *těchto ptáků za* 100 *dramma pro potěšení prince.*

Autor jako neznámé označil počet holubů *ya*, jeřábů *kā*, labutí *nī* a pávů *pī*. Pro větší přehlednost vyjádříme řešení současnou symbolikou, tj. počet holubů x, jeřábů y, labutí z a pávů w, pak porovnáním jejich počtu a cen dostaneme dvě rovnice o čtyřech neznámých:

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 100, \\ \frac{3}{5}x + \frac{5}{7}y + \frac{7}{9}z + 3w &= 100. \end{aligned}$$

Protože se hledalo celočíselné řešení, musí platit $x = 5a$, $y = 7b$, $z = 9c$, a navíc podle ceny pávů se předpokládalo, že jejich počet je násobkem tří, tj. $w = 3d$, pak mohla být soustava zapsána ve tvaru

$$\begin{aligned} 5a + 7b + 9c + 3d &= 100, \\ 3a + 5b + 7c + 9d &= 100. \end{aligned}$$

Bhāskara II. z každé rovnice osamostatnil první neznámou a

$$a = \frac{100 - 7b - 9c - 3d}{5}, \qquad a = \frac{100 - 5b - 7c - 9d}{3},$$

z rovnosti pravých stran pak vyjádřil druhou neznámou b

$$b = 50 - 2c - 9d.$$

[124] Podle [Col], str. 233–235. Úplně stejný příklad uvedl i Śrīdhara s označením PaGa/Ex.78–79, podle [Shu1], str. 50–51, a rovněž Mahāvīra ve slokách GaSaSa/vi.152–153, podle [Ran], str. 134–135. Postup řešení komentátorů se však mírně liší.

Dále prohlásil, že d může být libovolné číslo, a zvolil $d = 4$, tím rovnici upravil do tvaru $b = -2c + 14$. Za c zvolil novou neznámou – parametr $t \in \mathbb{N}$ a pomocí tohoto parametru vyjádřil ostatní neznámé

$$(a, b, c, d) = (t - 2, -2t + 14, t, 4).$$

Aby řešení bylo kladné, postupně volil $t = 3$, $t = 4$, $t = 5$, odkud dopočítal tři řešení dané úlohy.

(a, b, c, d)	$(1, 8, 3, 4)$	$(2, 6, 4, 4)$	$(3, 4, 5, 4)$
počty (x, y, z, w)	$(5, 56, 27, 12)$	$(10, 42, 36, 12)$	$(15, 28, 45, 12)$
ceny	$(3, 40, 21, 36)$	$(6, 30, 28, 36)$	$(9, 20, 35, 36)$

Úlohy tohoto typu byly populární i v Číně, v arabských zemích, později též v Evropě; anglický filozof Alkuin (asi 735 až 804) je zařadil do sbírky *Úlohy na bystření rozumu mladíků*, Abú Kámil do *Knihy aritmetických kuriozit*, řešil je Leonardo Pisánský (Fibonacci).

Velmi rozšířené byly obecné úlohy o zbytcích, kde úkolem bylo nalézt přirozené číslo n, které postupně dělené celými čísly a_1, a_2, … , a_m dává zbytky r_1, r_2, … , r_m, tj. hledalo se řešení soustavy s neznámými x_1, x_2, … , x_m, n (a_i, $r_i \in \mathbb{Q}^+$, $n \in \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned} a_1x_1 + r_1 &= n, \\ a_2x_2 + r_2 &= n, \\ &\vdots \\ a_mx_m + r_m &= n. \end{aligned}$$

Podobnými úlohami se zabývali i staří Číňané. Jsou-li čísla $a_1, a_2, \dots, a_m$ po dvou nesoudělná, lze pomocí čínské věty o zbytcích vyjádřit řešení explicitně vzorečkem (viz [KSS]). Staří Indové úlohu řešili postupně metodou *kuṭṭaka*; nejprve se uvažovaly pouze první dvě rovnice

$$n = a_1x_1 + r_1 = a_2x_2 + r_2,$$

odkud se vypočítala nejmenší hodnota $x_1 = X_1$, obecně $x_1 = X_1 + a_2t_1$, tedy

$$n = a_1(X_1 + a_2t_1) + r_1 = (a_1X_1 + r_1) + a_1a_2t_1.$$

Pak se připojila třetí rovnice

$$n = a_1a_2t_1 + (a_1X_1 + r_1) = a_3x_3 + r_3,$$

ze které se opět metodou *kuṭṭaka* určila hodnota $t_1 = X_2 + a_3t_2$ a dostala se rovnice

$$n = a_1a_2a_3t_2 + (a_1a_2X_2 + a_1X_1 + r_1).$$

Pak se přidala další rovnice a celý postup se opakoval do té doby, než byly všechny rovnice vyčerpány.

Bhāskara I. takto hledal číslo, které po vydělení čísly 2, 3, 4, 5, 6 vždy dá zbytek 1 a navíc je ještě dělitelné 7.[125] Bhāskarovo řešení 721 však není nejmenším číslem vyhovujícím podmínkám, protože autor nevzal v úvahu, že mezi děliteli jsou dvojice soudělných čísel. Problému se soudělnými děliteli se věnoval Pṛthūdakasvāmin v komentáři Brahmaguptova díla. Jestliže například d je společným dělitelem čísel a_1, a_2 a rozdíl $r_2 - r_1$ je také dělitelný číslem d, pak se musí vzít[126]

$$n = a_1X_1 + r_1 = (a_1X_1 + r_1) + \frac{a_1a_2}{d}t_1.$$

Nejmenším číslem vyhovujícím Bhāskarově úloze je tak 301. Arabský vědec ibn al-Hajtham (asi 965 až 1039)[127] a Leonardo Pisánský (Fibonacci) se později zabývali podobným problémem (viz [Di]).

Další typ soustavy s neznámými x, y_1, y_2, $\ldots$, y_m a racionálními koeficienty se vyskytoval v astronomii (a_i, $b \in \mathbb{Q}^+$, $c_i \in \mathbb{Q}$):

$$\begin{aligned} by_1 &= a_1x + c_1, \\ by_2 &= a_2x + c_2, \\ &\vdots \\ by_m &= a_mx + c_m. \end{aligned} \tag{7.14}$$

Soustava (7.14) se nazývala *saṁśliṣṭakuṭṭaka*. Řešila se tak, že se všechny rovnice sečetly, čímž se dostala rovnice[128]

$$b(y_1 + y_2 + \cdots + y_m) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_m)x + (c_1 + c_2 + \cdots + c_m)$$

s neznámými x a $z = y_1 + y_2 + \cdots + y_m$, odkud se metodou *kuṭṭaka* vypočítala neznámá x. Dosazením do původních rovnic se určily hodnoty zbývajících neznámých.

Takovou soustavu řešil například Bhāskara II.:[129]

BiGa/vi.74
Jaké je to číslo, které násobené pěti a vydělené šedesáti třemi dá zbytek sedm a násobené deseti a vydělené šedesáti třemi dá zbytek čtrnáct?

Zadání bylo možno vyjádřit soustavou

$$\begin{aligned} 5x &= 63y_1 + 7, \\ 10x &= 63y_2 + 14 \end{aligned} \qquad \text{neboli} \qquad \begin{aligned} 63y_1 &= 5x - 7, \\ 63y_2 &= 10x - 14. \end{aligned}$$

Autor nejprve rovnice sečetl a tím získal rovnici $63z = 15x - 21$, kde $z = y_1 + y_2$, podle pravidel ještě zkrátil třemi $21z = 5x - 7$ a pomocí metody *kuṭṭaka* nalezl nejmenší číslo x vyhovující podmínkám, totiž $x = 14$.

[125] Podle [DS2], str. 133.
[126] Podle [Col], str. 327.
[127] Vlastním jménem Muhammad ibn al-Hasan ibn al-Hajtham, zvaný též Alhazen.
[128] Viz sloka BiGa/vi.73, podle [Col], str. 168–169.
[129] Podle [Col], str. 169.

7.9. Pellova rovnice

Pellova rovnice je neurčitá rovnice

$$ax^2 + 1 = y^2, \tag{7.15}$$

kde a je přirozené číslo, které není druhou mocninou. Řešení $(x,\, y)$ hledáme v oboru celých čísel. Tato rovnice má nekonečně mnoho řešení, zřejmá jsou tzv. triviální řešení $(0, 1)$ a $(0, -1)$. Zobecněnou Pellovou rovnicí rozumíme rovnici

$$ax^2 + b = y^2, \tag{7.16}$$

kde $a \in \mathbb{N}$, $\sqrt{a} \notin \mathbb{N}$ a $b \in \mathbb{Z}$.

Pellova rovnice ve tvaru

$$2x^2 + 1 = y^2 \tag{7.17}$$

se používala v řecké matematice, kde se pomocí zlomku $\frac{y}{x}$ hledala racionální aproximace $\sqrt{2}$. Dokonce už v 8. stol. př. n. l. indický učenec Baudhāyana vyjádřil $\sqrt{2} \approx \frac{577}{408}$, kde je správných pět desetinných míst 1,41421.[130] I když Baudhāyana pravděpodobně k výsledku dospěl jinou cestou, je zajímavé, že čísla $x = 408$ a $y = 577$ jsou řešením rovnice (7.17).

Také Archimédova úloha o dobytku vede na rovnici $y^2 = 4\,729\,494\ x^2 + 1$, což je Pellova rovnice. Nejmenším celočíselným řešením tohoto problému jsou čísla mající více než 200 000 cifer.[131] Pellově rovnici a její historii bylo věnováno mnoho publikací, například [Whi], [Len], indické metody jsou popsány mimo jiné v [SiP1], [Wa2].

V Indii se řešením Pellovy rovnice zabývali zejména v 7. století Brahmagupta a ve 12. století Bhāskara II. Přestože indičtí matematikové počítali i se zápornými čísly, řešení rovnice (7.15), resp. (7.16) hledali v oboru přirozených čísel.[132]

Indové nazývali rovnici (7.16) *varga-prakṛti* nebo *kṛti-prakṛti*.[133] Většina indických matematiků užívala termín *prakṛti* k označení přirozeného koeficientu a, někdy tomuto koeficientu říkali *guṇaka* (násobitel) či zkráceně *guṇa*, pro absolutní člen b byly používány názvy *kṣepa*, *prakṣepa* či *kṣipti*; pokud byl absolutní člen záporný, říkalo se mu *śodhaka* (odčítací prvek). Číslo x nazývali *ādya-mūla* (první kořen) a číslu y říkali *antya-mūla* (druhý kořen). Někdy se objevily také výrazy *kaniṣṭha-pada* nebo *hrasva-mūla* (menší kořen) pro x a *jyeṣṭha-pada* nebo *jyeṣṭha-mūla* (větší kořen) pro y, i když ne vždy muselo platit $x < y$. Při popisu rovnice označovali postupně koeficienty a, b a neznámé x, y zkratkami *pra*, *kṣe*, *ka*, *jye*.

---

[130] Viz 2. kapitola, odstavec 2.9.

[131] Více o řešení Archimédovy úlohy lze nalézt např. v [BS], [BaT], [Sti], [WGZ].

[132] Staré indické metody řešení Pellovy rovnice jsou shrnuty v článku [Sy4].

[133] *Varga* nebo *kṛti* je výraz, kterým Indové označovali druhou mocninu, *prakṛti* znamená podstata či základ.

Brahmaguptovo řešení

První významné výsledky ve studiu rovnice (7.16) získal indický matematik Brahmagupta téměř o tisíc let dříve, než se jí věnovali matematikové v Evropě. Brahmagupta ve své knize *Brāhma-sphuta-siddhānta* uvedl některá pravidla, která pak využil při řešení. Pravidlo pro řešení rovnice formuloval takto:[134]

> **BrSpSi/xviii.65–66**
> *Kořen* [urči] *dvakrát a* [další] *z vhodného čtverce násobeného násobitelem* [koeficientem *a*] *zvětšeným nebo zmenšeným o vhodnou konstantu. Součin prvních násobený násobitelem s přičteným součinem druhých je druhý kořen. Součet součinů křížem je první kořen. Součin přičtených nebo odečtených veličin je přičtený. Kořeny* [takto nalezené] *vydělené* [původní] *přičtenou nebo odečtenou veličinou jsou* [kořeny] *pro přičtenou jedničku.*

Původní formulace nejsou příliš srozumitelné, vyjádříme je současnou řečí a symbolikou. První část pravidla je obsažena v následujícím lemmatu.

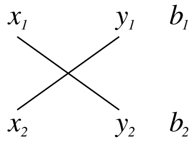
Lemma 1: *Nechť* (x_1, y_1) *je řešením rovnice* $ax^2 + b_1 = y^2$ *a* (x_2, y_2) *je řešením rovnice* $ax^2 + b_2 = y^2$. *Pak* (x, y), *kde*

$$x = x_1y_2 + x_2y_1 \qquad \text{a} \qquad y = ax_1x_2 + y_1y_2, \tag{7.18}$$

je řešením rovnice

$$ax^2 + b_1b_2 = y^2.$$

Při popisu řešení indičtí autoři zapisovali kořeny a absolutní člen první rovnice, kořeny a absolutní člen druhé rovnice do řádků po sebou. Pak je i názornější „součin křížem“ uvedený v Brahmguptově pravidle.[135]



Brahmagupta tvrzení nedokazoval, jen je doplnil několika příklady. Důkaz provedl až v 16. století komentátor Brahmaguptova díla Kṛṣṇa:[136]

Důkaz: Označíme-li jako (x_1, y_1) a (x_2, y_2) postupně řešení rovnic $ax^2+b_1 = y^2$, $ax^2 + b_2 = y^2$, pak platí

$$ax_1^2 + b_1 = y_1^2 \qquad \text{a} \qquad ax_2^2 + b_2 = y_2^2.$$

---

[134] Podle [Col], str. 363.

[135] Podle [Sr], str. 110.

[136] Podle [DS2], str. 148–149. V Evropě dokázal tzv. Brahmaguptovo lemma anglický matematik John Wallis (1616–1703).

Jestliže se první rovnice vynásobí y_2^2, dostaneme

$$ax_1^2y_2^2 + b_1y_2^2 = y_1^2y_2^2,$$

kde se za y_2^2 ve druhém členu dosadí z druhé rovnice

$$ax_1^2y_2^2 + b_1(ax_2^2 + b_2) = y_1^2y_2^2,$$

po roznásobení

$$ax_1^2y_2^2 + ab_1x_2^2 + b_1b_2 = y_1^2y_2^2.$$

Nyní se b_1 ve druhém členu nahradí rozdílem $y_1^2 - ax_1^2$, tedy

$$ax_1^2y_2^2 + a(y_1^2 - ax_1^2)x_2^2 + b_1b_2 = y_1^2y_2^2,$$

po úpravě

$$a(x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2) + b_1b_2 = y_1^2y_2^2 + a^2x_1^2x_2^2.$$

Když se k oběma stranám rovnice přičte $2ax_1x_2y_1y_2$, lze rovnici vyjádřit ve tvaru

$$a(x_1y_2 + x_2y_1)^2 + b_1b_2 = (y_1y_2 + ax_1x_2)^2,$$

tedy $(x_1y_2 + x_2y_1, ax_1x_2 + y_1y_2)$ je řešením rovnice $ax^2 + b_1b_2 = y^2$. $\square$

Indičtí matematikové nazývali tuto metodu *bhāvanā* (princip skládání), někdy též *samāsa bhāvanā*, resp. *antara bhāvanā*. Jestliže takto „složili“ dvě stejné rovnice se stejnými kořeny, užili termín *tulya bhāvanā* (skládání stejných) na rozdíl od *atulya bhāvanā* (skládání nestejných).

Důsledek 1: Je-li (x_1, y_1) řešením rovnice $ax^2 + b = y^2$, pak (x, y), kde

$$x = 2x_1y_1 \qquad \text{a} \qquad y = ax_1^2 + y_1^2, \tag{7.19}$$

je řešením rovnice $ax^2 + b^2 = y^2$.

V případě, že $b = 1$, jde o Pellovu rovnici (7.15). Pokud známe jedno její celočíselné řešení (x_1, y_1), můžeme pomocí důsledku 1 nalézt další celočíselné řešení. I když tímto postupem lze nalézt nekonečně mnoho řešení, Brahmagupta sám uvedl vždy jen jedno. Poznámka o nekonečném počtu řešení se objevuje až později u Śrīpatiho, Bhāskary, Nārāyaṇy.

Druhá část Brahmaguptova pravidla popisuje postup, podle nějž se řešení Pellovy rovnice $ax^2 + 1 = y^2$ získá pomocí řešení zobecněné Pellovy rovnice $ax^2 + b = y^2$; zformulujeme ji jako lemma 2.

Lemma 2: *Nechť (x_1, y_1) je řešením rovnice $ax^2 + b = y^2$. Pak (x, y), kde*

$$x = \frac{2x_1y_1}{b} \qquad \text{a} \qquad y = \frac{ax_1^2 + y_1^2}{b}, \tag{7.20}$$

je řešením rovnice $ax^2 + 1 = y^2$.

Důkaz: Tvrzení plyne z lemmatu 1 a jeho důsledku. Dvojice čísel $x = 2x_1y_1$ a $y = ax_1^2 + y_1^2$ je řešením rovnice $ax^2 + b^2 = y^2$. Pak jen stačí vydělit tuto rovnici b^2 a $(\frac{x}{b}, \frac{y}{b})$ je řešením rovnice $ax^2 + 1 = y^2$. $\square$

Brahmagupta předvedl popsaný postup na řešení úloh, které byly vyjádřeny rovnicemi $92x^2 + 1 = y^2$ a $83x^2 + 1 = y^2$.[137]

V prvním příkladě místo rovnice

$$92x^2 + 1 = y^2$$

uvažoval pomocnou rovnici

$$92x^2 + 8 = y^2,$$

kde změnil pouze absolutní člen b tak, aby snadno našel celočíselné řešení $(x_1, y_1) = (1, 10)$. Užitím důsledku 1 nejprve získal

$$(x_2, y_2) = (2x_1y_1, 92x_1^2 + y_1^2) = (20, 192) \quad \text{jako řešení rovnice} \quad 92x^2 + 64 = y^2.$$

Pak podle lemmatu 2 dopočítal

$$(x_3, y_3) = \left(\frac{2x_1y_1}{8}, \frac{92x_1^2 + y_1^2}{8}\right) = \left(\frac{5}{2}, 24\right) \text{ jako řešení rovnice } 92x^2 + 1 = y^2.$$

Protože však toto řešení nebylo celočíselné, použil ještě jednou důsledek 1 a tím získal celočíselné řešení původní rovnice

$$(x, y) = (2x_3y_3, 92x_3^2 + y_3^2) = (120, 1\,151).$$

Při řešení druhé rovnice

$$83x^2 + 1 = y^2$$

nejdřív uvažoval $(x_1, y_1) = (1, 9)$ jako řešení pomocné rovnice $83x^2 - 2 = y^2$. Podle důsledku 1 platí, že dvojice čísel

$$(x_2, y_2) = (2x_1y_1, 83x_1^2 + y_1^2) = (18, 164) \quad \text{je řešením rovnice} \quad 83x^2 + 4 = y^2.$$

Pak užitím lemmatu 2 nalezl řešení původní rovnice

$$(x, y) = \left(\frac{2x_1y_1}{2}, \frac{83x_1^2 + y_1^2}{2}\right) = \left(\frac{18}{2}, \frac{164}{2}\right) = (9, 82).$$

Při řešení Brahmaguptovy rovnice nebylo nutné využívat lemma 1, resp. důsledek 1, mohlo se přímo aplikovat lemma 2 na pomocnou rovnici, jejíž řešení známe. Brahmagupta však neodděloval jednotlivé části pravidla, procházel vždy všemi kroky.

[137] Podle [Col], str. 364.

Rovnice $ax^2 + b = y^2$ je zajímavá zejména pro $b \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$. V tomto případě lze totiž pomocí lemmatu 2 nalézt celočíselné řešení Pellovy rovnice $ax^2 + 1 = y^2$, jak je ukázáno dále.

Pro $b = 1$ jde přímo o Pellovu rovnici (7.15). Je-li $b = -1$ a dvojice přirozených čísel (x_1, y_1) je řešením rovnice $ax^2 - 1 = y^2$, pak podle (7.20) získáme řešení Pellovy rovnice ve tvaru (7.19). Znaménko se zanedbávalo, staří indičtí matematikové uvažovali jen kladná řešení.

Je-li $b = 2$ a dvojice přirozených čísel (x_1, y_1) je řešením rovnice $ax^2+2 = y^2$, pak podle (7.20) a s využitím vztahu $ax_1^2 = y_1^2 - 2$ platí

$$x = \frac{2x_1y_1}{2} = x_1y_1 \qquad \text{a} \qquad y = \frac{ax_1^2 + y_1^2}{2} = \frac{2y_1^2 - 2}{2} = y_1^2 - 1,$$

tedy dvojice přirozených čísel $(x_1y_1, y_1^2 - 1)$ je řešením Pellovy rovnice (7.15).

Podobná úvaha pro $b = -2$ vede k přirozenému řešení ve tvaru (x_1y_1, y_1^2+1).

Trochu složitější je případ $b = \pm 4$. Je-li $b = 4$ a dvojice přirozených čísel (x_1, y_1) je řešením rovnice $ax^2 + 4 = y^2$, tj. $ax_1^2 = y_1^2 - 4$, pak čísla

$$x = \frac{2x_1y_1}{4} = \frac{x_1y_1}{2} \qquad \text{a} \qquad y = \frac{ax_1^2 + y_1^2}{4} = \frac{y_1^2 - 4 + y_1^2}{4} = \frac{y_1^2 - 2}{2}$$

jsou řešením Pellovy rovnice (7.15). Čísla x a y jsou obě přirozená právě tehdy, když y_1 je sudé. Když y_1 je liché, x_1 musí být také liché, jinak by nemohlo platit $y_1 = ax_1^2 + 4$. Pro obě čísla x_1 a y_1 lichá se aplikuje lemma 1 na dvě řešení $(\frac{x_1y_1}{2}, \frac{y_1^2-2}{2})$ a $(\frac{x_1}{2}, \frac{y_1}{2})$ rovnice (7.15). Pak podle (7.18) získáme řešení (x, y), kde

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1y_1}{2} \cdot \frac{y_1}{2} + \frac{x_1}{2} \cdot \frac{y_1^2 - 2}{2} = \frac{x_1y_1^2 + x_1y_1^2 - 2x_1}{4} = \frac{x_1(y_1^2 - 1)}{2}, \\ y &= a\,\frac{x_1y_1}{2} \cdot \frac{x_1}{2} + \frac{y_1^2 - 2}{2} \cdot \frac{y_1}{2} = \frac{(y_1^2 - 4)y_1}{4} + \frac{(y_1^2 - 2)y_1}{4} = \frac{y_1(y_1^2 - 3)}{2}, \end{aligned} \tag{7.21}$$

což jsou obě přirozená čísla, protože y_1 je liché.

Pro $b = -4$ a (x_1, y_1) jako celočíselné řešení rovnice $ax^2 - 4 = y^2$ je (x, y), kde

$$x = \frac{2x_1y_1}{4} = \frac{x_1y_1}{2} \qquad \text{a} \qquad y = \frac{ax_1^2 + y_1^2}{4} = \frac{y_1^2 + 4 + y_1^2}{4} = \frac{y_1^2 + 2}{2},$$

řešením Pellovy rovnice (7.15). Opět platí, podobně jako v předchozím případě, že čísla x a y jsou obě přirozená právě tehdy, když y_1 je sudé. Když y_1 a x_1 jsou obě lichá, aplikuje se důsledek 1 na $(\frac{x_1y_1}{2}, \frac{y_1^2+2}{2})$ a podle (7.19) dostaneme

$$x = 2\frac{x_1y_1}{2} \cdot \frac{y_1^2 + 2}{2} = \frac{x_1y_1(y_1^2 + 2)}{2},$$

$$y = a\cdot\left(\frac{x_1y_1}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1^2+2}{2}\right)^2=\left(\frac{y_1^2+2}{2}\right)^2-1+\frac{y_1^4+4y_1^2+4}{4}=\frac{y_1^4+4y_1^2+2}{2}.$$

Pak podle lemmatu 1 s hodnotami $\left(\frac{x_1y_1}{2}, \frac{y_1^2+2}{2}\right)$ a $\left(\frac{x_1y_1(y_1^2+2)}{2}, \frac{y_1^4+4y_1^2+2}{2}\right)$ dostaneme řešení (x, y), kde

$$x=\frac{x_1y_1(y_1^2+1)(y_1^2+3)}{2}, \qquad y=(y_1^2+2)\frac{(y_1^2+1)(y_1^2+3)-2}{2}, \tag{7.22}$$

a to jsou přirozená čísla pro y_1 liché i sudé.

Výše uvedené vztahy Brahmagupta znal, například vzorce (7.21) a (7.22) jsou popsány slovy ve slokách BrSpSi/xviii.69 a BrSpSi/xviii.71.[138] Nepodal však žádné odvození ani jakékoli zdůvodnění svých návodů.

Brahmagupta tedy řešil Pellovu rovnici $ax^2+1=y^2$ tak, že nejprve nalezl přirozená řešení pomocné rovnice

$$ax^2+b=y^2, \qquad \text{kde} \quad b\in\{\pm1,\pm2,\pm4\}, \tag{7.23}$$

pak podle lemmatu 2 mohl nalézt nejen jedno, ale nekonečně mnoho řešení. Brahmagupta však nedokázal vysvětlit obecně, jak zvolit pomocnou rovnici (7.23).

Śrīpatiho řešení

Dalším indickým matematikem, který se zabýval řešením Pellovy rovnice, byl Śrīpati, který ve své práci *Siddhānta-śekhara* uvedl jednoduché pravidlo, podle nějž nalezl racionální řešení Pellovy rovnice. Přitom využíval identity

$$a\cdot 1^2+(m^2-a)=m^2 \qquad \text{nebo} \quad a\cdot 1^2-(a-m^2)=m^2,$$

kde m je libovolné číslo. Pak rovnice

$$ax^2+(m^2-a)=y^2$$

má řešení $(1, m)$. Podle Brahmaguptova lemmatu 2 pak nalezl řešení Pellovy rovnice ve tvaru

$$\left(\frac{2m}{m^2-a}, \frac{m^2+a}{m^2-a}\right).$$

V některých případech lze tímto způsobem získat i řešení z oboru přirozených čísel.

[138] Podle [Col], str. 365–366.

Bhāskarovo řešení

Na Brahmaguptovu práci navázal Bhāskara II., který popsal cyklickou metodu *cakravāla*;[139] to je algoritmus, podle nějž se postupně hledala celočíselná řešení rovnic $ax^2 + b_1 = y^2$, $ax^2 + b_2 = y^2$ atd., až se získala rovnice, v níž byl absolutní člen b_k roven ± 1, ± 2 nebo ± 4. Pomocí celočíselného řešení rovnice (7.23) se potom užitím Brahmaguptova principu skládání získalo celočíselné řešení Pellovy rovnice $ax^2 + 1 = y^2$.

Pravidlo můžeme dnes vyjádřit takto:[140]

Lemma 3: *Nechť (x_1, y_1) je celočíselné řešení rovnice $ax^2 + b_1 = y^2$, kde b_1 je celé číslo. Pak dvojice (x, y), kde*

$$x = \frac{x_1 m + y_1}{b_1}, \qquad y = \frac{ax_1 + y_1 m}{b_1}, \tag{7.24}$$

je celočíselným řešením rovnice

$$ax^2 + b_2 = y^2, \qquad \textit{kde} \quad b_2 = \frac{m^2 - a}{b_1}$$

pro vhodné celé číslo m.

Bhāskara II. uvedl pravidlo bez důkazu. Je však vidět, že výrazy (7.24) získáme podle Brahmaguptových lemmat. Použijeme-li lemma 1 na řešení (x_1, y_1) rovnice $ax^2 + b_1 = y^2$ a řešení $(1, m)$ rovnice $ax^2 + (m^2 - a) = y^2$, dostaneme, že

$$(x_1 m + y_1, ax_1 + y_1 m) \qquad \text{řeší rovnici} \quad ax^2 + (m^2 - a)\, b_1 = y^2.$$

Pak podle lemmatu 2 plyne, že dvojice (x_2, y_2), kde

$$x_2 = \frac{x_1 m + y_1}{b_1}, \qquad y_2 = \frac{ax_1 + y_1 m}{b_1}, \tag{7.25}$$

je řešením rovnice $ax^2 + \frac{m^2 - a}{b_1} = y^2$.

Bhāskara ještě poznamenal, že číslo m je třeba volit tak, aby $x_2 = \frac{x_1 m + y_1}{b_1}$ bylo celé číslo[141] a rozdíl $|m^2 - a|$ byl co nejmenší. Můžeme tedy ještě předpokládat, že čísla x_1, y_1 a b_1 jsou nesoudělná, protože po zkrácení bychom dostali rovnici s menší hodnotou b_1. Pak čísla

$$y_2 = \frac{ax_1 + y_1 m}{b_1}, \qquad b_2 = \frac{m^2 - a}{b_1}$$

jsou také celá.

[139] Slovo *cakravāla* v sanskrtu znamená kruh.
[140] Viz sloky BiGa/iii.83–86, podle [Col], str. 175–176.
[141] Při řešení použil metodu *kuṭṭaka*, viz odstavec 7.8.

Vyjádříme-li y_1 ze vztahu pro x_2 ve vzorci (7.25) a dosadíme do vztahu pro y_2, dostaneme

$$y_2 = \frac{ax_1 + y_1 m}{b_1} = \frac{ax_1 + (x_2 b_1 - x_1 m)\, m}{b_1} = mx_2 - \left(\frac{m^2 - a}{b_1}\right) x_1 = \\ = m\, x_2 - b_2\, x_1.$$

Nyní stačí ukázat, že b_2 je celé. Pak musí i y_2 být celé číslo. Vyjádříme y_1 ze vzorců (7.25) a porovnáme

$$y_1 = b_1\, x_2 - x_1 m, \qquad\qquad y_1 = \frac{b_1\, y_2 - a\, x_1}{m},$$

tedy

$$\begin{aligned} m\, b_1\, x_2 - x_1 m^2 &= b_1\, y_2 - a\, x_1, \\ b_1(m\, x_2 - y_2) &= x_1(m^2 - a), \\ \frac{b_1}{x_1}(m\, x_2 - y_2) &= m^2 - a. \end{aligned}$$

Číslo na pravé straně je celé, tedy i výraz na levé straně musí byt celočíselný. Protože čísla b_1 a x_1 jsou nesoudělná, musí být celé $\frac{m\, x_2 - y_2}{x_1}$, tedy i $\frac{m^2 - a}{b_1} = b_2$.

Toto Bhāskara II. věděl, ale v jeho práci žádný důkaz není.

Bhāskarova cyklická metoda spočívala v tom, že se nejprve místo dané rovnice $ax^2 + 1 = y^2$ hledalo celočíselné řešení (x_1, y_1) rovnice $ax^2 + b_1 = y^2$, kde b_1 bylo co nejmenší. Možná volba je taková, že $\frac{y_1}{x_1} \approx \sqrt{a}$. Pokud $b_1 \notin \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$, nalezlo se podle lemmatu 3 celočíselné řešení (x_2, y_2) rovnice $ax^2 + b_2 = y^2$. Tento proces se opakoval tak dlouho, dokud se nedošlo k takové rovnici, kde $b_k \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$. Dál se pokračovalo podle Brahmaguptova principu skládání. Bhāskara II. věděl, i když asi jen na základě zkušeností, že postup popsaný jeho metodou jednou skončí. Po konečném počtu kroků se tedy získá taková rovnice $ax^2 + b_k = y^2$, kde $b_k \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$. Ve své práci popsal řešení několika takových příkladů.

Ve sloce BiGa/iii.87[142] je uvedena úloha, která vede na problém nalézt celočíselné řešení rovnice

$$67x^2 + 1 = y^2.$$

Bhāskara nejprve uvažoval čísla

$$(x_1, y_1) = (1, 8) \qquad \text{jako řešení rovnice} \qquad 67x^2 - 3 = y^2 \quad (b_1 = -3).$$

Podle lemmatu 3 pak hledal takové číslo m_1, pro které je řešení rovnice

$$67x^2 + \frac{m_1^2 - 67}{-3} = y^2$$

[142] Podle [Col], str. 176–178.

celočíselné. Řešení je ve tvaru

$$(x_2, y_2) = \left(\frac{1 \cdot m_1 + 8}{-3}, \frac{8m_1 + 67 \cdot 1}{-3} \right). \tag{7.26}$$

Aby číslo x_2 bylo celé, hledal m_1 ve tvaru $m_1 = -3t + 1$. Zároveň se požadovalo, aby rozdíl $|m_1^2 - 67|$ byl minimální, proto volil $m_1 = 7$ $(t = -2)$. Dosazením do (7.26) dostal

$$(x_2, y_2) = (5, 41) \qquad \text{jako řešení rovnice} \qquad 67x^2 + 6 = y^2 \quad (b_2 = 6).$$

Opět podle lemmatu 3 hledal číslo m_2 tak, aby rovnice

$$67x^2 + \frac{m_2^2 - 67}{6} = y^2$$

měla celočíselné řešení. Protože řešení je ve tvaru

$$(x_3, y_3) = \left(\frac{5m_2 + 41}{6}, \frac{41m_2 + 67 \cdot 5}{6} \right), \tag{7.27}$$

číslo m_2 muselo vyhovovat podmínce $m_2 = 6t + 5$ s minimálním rozdílem $|m_2^2 - 67|$, a tedy $m_2 = 5$ $(t = 0)$. Podle vztahů (7.27) získal hodnoty

$$(x_3, y_3) = (11, 90) \qquad \text{jako řešení rovnice} \qquad 67x^2 - 7 = y^2 \quad (b_3 = -7).$$

Nyní znovu podle lemmatu 3 hledal číslo m_3 tak, aby rovnice

$$67x^2 + \frac{m_3^2 - 67}{-7} = y^2$$

měla celočíselné řešení. Řešení je ve tvaru

$$(x_4, y_4) = \left(\frac{11m_3 + 90}{-7}, \frac{90m_3 + 67 \cdot 11}{-7} \right). \tag{7.28}$$

Pro číslo m_3 platilo, že $m_3 = -7t + 2$ a rozdíl $|m_3^2 - 67|$ je minimální, a tedy $m_3 = 9$ $(t = -1)$. Z vyjádření (7.28) pak plyne, že

$$(x_4, y_4) = (27, 221) \qquad \text{je řešením rovnice} \qquad 67x^2 - 2 = y^2 \quad (b_4 = -2).$$

V dalším kroku hledal celočíselné řešení rovnice

$$67x^2 - 2 = y^2,$$

a to je rovnice s absolutním členem $b_4 = -2$, proto dál postupoval podle Brahmaguptova principu skládání. Řešením původní rovnice $67x^2 + 1 = y^2$ byla tedy čísla (x, y), kde

$$x = \frac{2 \cdot 27 \cdot 221}{2} = 5\,967 \qquad \text{a} \qquad y = \frac{67 \cdot 27^2 + 221^2}{2} = 48\,842.$$

Bhāskara II. popsal postup řešení rovnice[143]

$$61x^2 + 1 = y^2.$$

Nejprve uvažoval rovnici

$$61x^2 + 3 = y^2 \qquad \text{s řešením} \quad x_1 = 1\,,\ y_1 = 8 \quad (b_1 = 3).$$

Užitím lemmatu 3 hledal takové číslo m_1, pro které má rovnice

$$61x^2 + \frac{m_1^2 - 61}{3} = y^2$$

celočíselné řešení. Toto řešení je ve tvaru

$$x_2 = \frac{1 \cdot m_1 + 8}{3}, \qquad y_2 = \frac{8m_1 + 61 \cdot 1}{3}. \tag{7.29}$$

Pak hledal m_1 tak, aby x_2 bylo celočíselné a rozdíl $|m_1^2 - 61|$ byl minimální. To nastane pro $m_1 = 7$. Dosazením do (7.29) dostal

$$x_2 = 5\,,\ y_2 = 39 \qquad \text{jako řešení rovnice} \quad 61x^2 - 4 = y^2 \quad (b_2 = -4).$$

Pak podle Brahmaguptova principu skládání nalezl nejmenší celočíselné řešení rovnice $61x^2 + 1 = y^2$, tedy $x = 226\,153\,980$ a $y = 1\,766\,319\,049$.

Uvedené příklady ukazují i značnou početní zručnost indických matematiků a jejich jistotu při počítání s velkými čísly.

Na Bhāskarovu práci navázal další indický matematik Nārāyaṇa, který předložil další příklady. Ve své knize *Bījaganita* pomocí Bhāskarovy cyklické metody nalezl například řešení $x = 22\,419$, $y = 227\,528$ rovnice $103\,x^2 + 1 = y^2$ (viz [Du]).

Speciální tvary Pellovy rovnice

Indičtí učenci věnovali pozornost i některým speciálním tvarům Pellovy rovnice, pro něž zformulovali samostatná pravidla. Brahmagupta i Bhāskara II. studovali rovnici, kde koeficient a byl čtvercem, tedy rovnici ($n \in \mathbb{N},\ b \in \mathbb{Z}$)

$$n^2x^2 + b = y^2. \tag{7.30}$$

Řešením takové rovnice bylo (x, y), kde

$$x = \frac{1}{2n}\left(\frac{b}{m} - m\right), \qquad y = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{m} + m\right),$$

[143] Viz sloka BiGa/iii.87, podle [Col], str. 178.

a m bylo libovolné číslo.[144] Rovnici (7.30) je možné upravit

$$b = y^2 - n^2x^2 \qquad \text{neboli} \qquad b = (y - nx)(y + nx)$$

a substitucí $m = y - nx$ převést na soustavu

$$\begin{aligned} y - nx &= m, \\ y + nx &= \frac{b}{m}, \end{aligned}$$

odkud se řešení snadno vypočítá podle pravidla *saṅkramaṇa*.

Řešení rovnice, kde koeficient a byl násobkem čtverce, tj. $a = cn^2$, popsal Brahmagupta. Místo rovnice ($c,\ n \in \mathbb{N},\ b \in \mathbb{Z}$)

$$cn^2x^2 + b = y^2 \tag{7.31}$$

uvažoval nejprve rovnici s menším koeficientem, a to rovnici $cx^2 + b = y^2$ a její řešení (x_1, y_1). Rovnice (7.31) pak měla řešení $(\frac{x_1}{n}, y_1)$.[145]

Podobným způsobem řešil Brahmagupta rovnici, v níž byl absolutní člen násobkem čtverce ($a,\ n \in \mathbb{N},\ c \in \mathbb{Z}$):

$$ax^2 + cn^2 = y^2. \tag{7.32}$$

Nejprve nalezl řešení (x_1, y_1) rovnice $ax^2 + c = y^2$; rovnice (7.32) pak měla řešení (nx_1, ny_1).[146]

Bhāskara II. věnoval rovněž pozornost rovnici ($m,\ n,\ k \in \mathbb{N}$)

$$(m^2 + n^2)x^2 - k^2 = y^2,$$

jejíž racionální řešení hledal ve tvaru $\left(\frac{k}{m},\ \frac{kn}{m}\right)$ nebo $\left(\frac{k}{n},\ \frac{km}{n}\right)$.[147]

V Evropě vzbudil zájem o Pellovu rovnici francouzský matematik Pierre de Fermat (1601–1665), jenž v roce 1657 zveřejnil výzvu na nalezení nejmenšího celočíselného řešení rovnice $61x^2 + 1 = y^2$, stejné rovnice, jejíž řešení popsal Bhāskara (viz např. [CR]). Na tuto výzvu reagovali mimo jiné francouzský matematik Bernard Frénicle de Bessy (1605–1675), anglický matematik John Wallis (1616–1703) a irský matematik William Brouncker (1620–1684), jehož metoda řešení je v podstatě stejná jako ta, kterou později přesně popsal Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) a která využívala řetězové zlomky.

Leonhard Euler dokázal Brahmaguptovo lemma a položil základ řešení Pellovy rovnice pomocí řetězových zlomků. Kompletní teorii řešení vypracoval a publikoval v roce 1771 J. L. Lagrange. Dokázal, že Pellova rovnice má

[144] Viz sloky BrSpSi/xviii.73, podle [Col], str. 366 a BiGa/iii.95, podle [Col], str. 182.
[145] Viz sloka BrSpSi/xviii.75, podle [Col], str. 367.
[146] Viz sloka BrSpSi/xviii.76, podle [Col], str. 368.
[147] Viz sloka BiGa/iii.88–89, podle [Col], str. 179–180.

nekonečně mnoho řešení pro každé a ($a \in \mathbb{N}$, $\sqrt{a} \notin \mathbb{N}$), rovnici řešil pomocí vyjádření čísla $\sqrt{a}$ řetězovými zlomky. Více o historii Pellovy rovnice v Evropě lze nalézt například v [BuDM].

Pellova rovnice dostala své jméno omylem. Zasloužil se o to L. Euler, který ji chybně přisoudil anglickému matematikovi Johnu Pellovi (1611–1685), přestože není prokázáno, že by se J. Pell řešením této rovnice podrobněji zabýval (viz [Di] a [Bar]).

7.10. Neurčité rovnice vyšších stupňů

Neurčité rovnice vyšších stupňů staří Indové příliš nestudovali, některé zajímavé příklady však najdeme v díle Mahāvīry, Bhāskary II., Nārāyaṇy. Mnohé z nich po úpravě vedly na Pellovu rovnici. Například Bhāskara II. řešil problém:[148]

BiGa/vii.178
Příklad od starých autorů. Čtverec součtu dvou čísel přidaný ke třetí mocnině jejich součtu je roven dvojnásobku součtu jejich třetích mocnin. Řekni čísla, matematiku!

V dnešní symbolice úlohu zapíšeme rovnicí (pro zajímavost uvedeme v závorkách autorovo značení)

$$(x+y)^2 + (x+y)^3 = 2(x^3+y^3).$$

Bhāskara doporučoval, aby výpočet nebyl příliš zdlouhavý, vyjádřit neznámé ve tvaru $x = u+v$, $y = u-v$ (autor je značil: *yā* 1 *kā* 1, *yā* 1 *kā* $\dot{1}$). Pak čtverec součtu neznámých byl $(x+y)^2 = 4u^2$ (*yā va* 4), třetí mocnina $(x+y)^3 = 8u^3$ (*yā gha* 8) a dvojnásobek součtu třetích mocnin $2(x^3+y^3) = 4u^3 + 12uv^2$ (*yā gha* 4 *kā va yā bhā* 12). Z těchto členů sestavil rovnici

$$8u^3 + 4u^2 = 4u^3 + 12uv^2,$$

yā gha 8 *yā va* 4 *kā va yā bhā* 0
yā gha 4 *yā va* 0 *kā va yā bhā* 12.

Odečtením $4u^3$ rovnici zjednodušil, pak vydělil u,

$$4u^2 + 4u = 12v^2,$$

nakonec k oběma stranám přičetl 1,

$$(2u+1)^2 = 12v^2 + 1.$$

To už je Pellova rovnice, pro kterou stanovil dvě řešení, $(v, 2u+1) = (2,7)$, resp. $(v, 2u+1) = (28, 97)$, odkud dopočítal $u = 3$, resp. $u = 48$, nakonec určil hledaná čísla $(x,y) = (5,1)$, resp. $(x,y) = (76,20)$.

[148] Podle [Col], str. 248.

Bhāskara zformuloval pravidlo,[149] podle nějž rovnici ($n \in \mathbb{N}$, a, $b \in \mathbb{Z}$)

$$ax^{2n+2} + bx^{2n} = y^2$$

zkrácením bikvadratickým členem x^{2n} převedl na Pellovu rovnici $ax^2 + b = z^2$. V následujícím příkladu[150] takto nalezl dvě řešení $(10, 200)$, $(170, 64\,600)$ rovnice $5x^4 - 100x^2 = y^2$.

Nārāyaṇa uvedl několik typů neurčitých rovnic a pravidlo k jejich řešení, které dnes můžeme zapsat takto (m, $n \in \mathbb{Q}^+$):[151]

$$\begin{aligned}
x^3 + y^3 &= x^2 + y^2, & x &= \frac{(m^2+n^2)m}{m^3+n^3}, & y &= \frac{(m^2+n^2)n}{m^3+n^3},\\
x^3 + y^3 &= (x+y)^2, & x &= \frac{(m+n)^2 m}{m^3+n^3}, & y &= \frac{(m+n)^2 n}{m^3+n^3},\\
x^3 + y^3 &= xy, & x &= \frac{m^2 n}{m^3+n^3}, & y &= \frac{mn^2}{m^3+n^3},\\
(x+y)^3 &= x^2 + y^2, & x &= \frac{(m^2+n^2)m}{(m+n)^3}, & y &= \frac{(m^2+n^2)n}{(m+n)^3},\\
(x+y)^3 &= (x+y)^2, & x &= \frac{(m+n)^2 m}{(m+n)^3}, & y &= \frac{(m+n)^2 n}{(m+n)^3},\\
(x+y)^3 &= xy, & x &= \frac{m^2 n}{(m+n)^3}, & y &= \frac{mn^2}{(m+n)^3}.
\end{aligned}$$

7.11. Rovnice se součinem neznámých

V indických matematických textech byla rovněž řešena neurčitá rovnice se dvěma neznámými obsahující součin neznámých. Takovou rovnici můžeme obecně zapsat ($a, b, c, d \in \mathbb{Q}$) ve tvaru

$$axy = bx + cy + d. \tag{7.33}$$

Na značně poškozeném lístku folio 27 recto (viz obr. 7.4), se podle [DS2] zachovala rovnice

$$xy = 3x + 4y - 1, \qquad \text{resp.} \qquad xy = 3x + 4y + 1.$$

Zadání úlohy je nečitelné, patrná je jen část výpočtu řešení

$$(x, y) = \left(\tfrac{3\cdot 4 - 1}{1} + 4, 1 + 3\right) = (15, 4),$$

[149] Viz sloky BiGa/vii.179–180, podle [Col], str. 248.
[150] Viz sloka BiGa/vii.181, podle [Col], str. 249.
[151] Podle [DS2], str. 248.

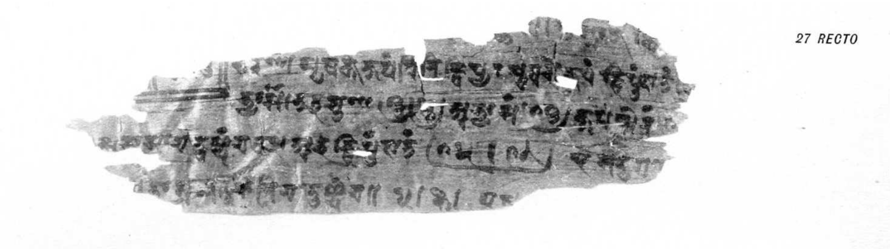
resp.

$$(x, y) = \left(1 + 4, \tfrac{3 \cdot 4 + 1}{1} + 3,\right) = (5, 16).$$

Překlad T. Hayashiho[152] by však spíš naznačoval, že je na lístku uveden postup řešení rovnice bez absolutního členu, tj. rovnice

$$xy = 3x + 4y,$$

kde se nejprve každý koeficient na levé straně zvětšil o jedničku $x_1 = 4+1 = 5$, $y_2 = 3+1 = 4$. Pak se vypočítal součin koeficientů, od nějž se jednička odečetla $3 \cdot 4 - 1 = 11$. K této hodnotě se postupně přičetla dříve vypočítaná čísla x_1, y_2, a tím se určily hodnoty $y_1 = 11 + y_2 = 15$ a $x_2 = 11 + x_1 = 16$. Tak byla stanovena dvě řešení $(x_1, y_1) = (5, 15)$ a $(x_2, y_2) = (16, 4)$.



[27r.] . . . . chh . y . *tas*mātki . .

. . . ‖ karaṇaṁ | pṛithakrūpaṁvinikshipya | pṛithak rūpaṁ kshiptaṁjātaṁ .

. ‖ 63 ‖ bhyāso | tatraguṇa | 3 | 4 | abhyāsaṁ | 12 | rūpahīnaṁ | 1 . .

*abhāgā*chatuϕpaṁcha *45* | atrakshiptaṁjātaṁ | 15 | 16 | eśatṛiguṇ .

. . . tāmūla . . nichatuϕpaṁcha ‖ 5 | 4 | esha

Obr. 7.4 Rukopis *Bakhshālī*, folio 27 recto a jeho přepis, převzato z [Kay1].

Brahmagupta uvedl dva návody, podle nichž bylo možné rovnici se smíšeným součinem vyřešit. První z nich přisoudil neznámému autorovi.[153]

BrSpSi/xviii.61

Pravidlo. Součin koeficientů smíšeného součinu a absolutního čísla přičtený k součinu [koeficientů] *neznámých je vydělen libovolně zvoleným množstvím. Z libovolného dělitele a podílu cokoli je větší je přičteno k menšímu* [koeficientu] *a menší k většímu a tyto dva* [součty] *vydělené smíšeným součinem* [koeficientem] *jsou zaměnitelné.*

V komentáři je uvedeno, že takto může být rovnice řešena až poté, co byla upravena tak, že smíšený součin se osamostatnil na jedné straně. Potom pro $p \in \mathbb{Q}$ za předpokladu $b > c$ a $p > \frac{ad+bc}{p}$ je řešením rovnice

$$x = \frac{1}{a}(p + c), \qquad y = \frac{1}{a}\left(\frac{ad + bc}{p} + b\right).$$

[152] Podle [Ha1], str. 325.

[153] Podle [Col], str. 361. Prakticky stejné pravidlo uvedl i Śrīpati, viz [DS2].

Toto vyjádření mohlo být výsledkem následujících úvah. Rovnice se vynásobila koeficientem a a přededla do tvaru

$$a^2xy - abx - acy = ad,$$

kde se levá strana vyjádřila jako součin

$$(ax - c)(ay - b) = ad + bc.$$

Substituce $p = ax - c$ vedla k uvedenému tvaru řešení. Substituce $p = ay - b$ by pak směřovala ke druhému vyjádření naznačenému v závěru pravidla

$$x = \frac{1}{a}\left(\frac{ad + bc}{p} + c\right), \qquad y = \frac{1}{a}(p + b).$$

Tímto postupem Brahmagupta řešil úlohu,[154] kterou dnes můžeme zapsat rovnicí

$$xy - 3x - 4y = 90.$$

Po osamostatnění součinu neznámých dostal rovnici $xy = 3x + 4y + 90$, kde $b < c$, vypočítal $ad + bc = 102$ a volil $p = 17$. Podíl $\frac{ad+bc}{p} = 6$ je menší než p, proto podle druhé části pravidla určil neznámé $x = 10$, $y = 20$.

Jako další možnost uvedl Brahmagupta postup, kdy si zvolil jednu neznámou libovolně a druhou dopočítal.[155]

Dva způsoby řešení rovnice (7.33) uvedl Bhāskara II. v práci *Bījagaṇita*. V prvním,[156] stejně jako jeho předchůdce Brahmagupta, navrhoval zvolit jednu z neznámých a druhou dopočítat podle pravidla pro řešení rovnice s jednou neznámou, přičemž *prostřednictvím různých předpokladů může být získáno nekonečně mnoho odpovědí.*

Výpočet podle druhého pravidla[157] můžeme vyjádřit vzorci, kde q je libovolné číslo a $p = \frac{1}{p}\left(\frac{bc}{a^2} + \frac{d}{a}\right)$:

$$x = \frac{c}{a} \pm q, \quad y = \frac{b}{a} \pm p, \qquad \text{resp.} \qquad x = \frac{c}{a} \pm p, \quad y = \frac{b}{a} \pm q.$$

Své pravidlo Bhāskara II. ilustroval na příkladu, kde se pokusil podat dva důkazy – *kṣetragata* (geometrický) a *rāśigata* (algebraický).[158]

> **BiGa/viii.212–214** (část)
> *Příklad. Řekni dvě čísla taková, že součet čtyřnásobku a trojnásobku přičtený ke dvěma je roven součinu čísel.*

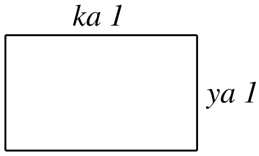
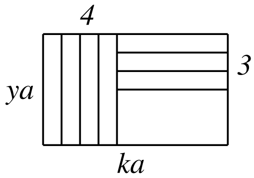
---

[154] Viz sloka BrSpSi/xviii.62, podle [Col], str. 361.
[155] Viz sloky BrSpSi/xviii.63–64, podle [Col], str. 362.
[156] Viz sloka BiGa/viii.208, podle [Col], str. 268.
[157] Viz sloky BiGa/viii.212–214, podle [Col], str. 270–272.
[158] Podle [Col], str. 271–272.

Hledalo se řešení rovnice

$$xy = 4x + 3y + 2,$$

v níž první neznámou x autor nazýval *yāvat-tāvat* a značil *yā*, druhá neznámá y se jmenovala *kālaka* s označením *kā*, absolutnímu členu se říkalo *rūpa*, ve zkratce *rū*, smíšený součin neznámých byl *bhāvita*, zkráceně *bhā*. Uvedeme celé Bhāskarovo řešení.

> *Zde to, co je přímo dáno, dvě strany rovnice jsou*
>
> *yā* 4 *kā* 3 *rū* 2
> *yā kā bhā* 1.
>
> *Součet součinu koeficientů s absolutním číslem je* 14. *Toto, dělené jedničkou postavenou jako předpokládané číslo, dá* 1 *a* 14 *jako předpokládané číslo a podíl. Tyto, se dvěma koeficienty postupně přidanými podle volby, zařídí hodnoty yā a kā, buď* 4 *a* 18 *nebo* 17 *a* 5. *S předpokladem dva vyjdou* 5 *a* 11 *nebo* 10 *a* 6.
>
> *Předvedení následuje. Je v každém případě dvojnásobné; jedno geometrické, druhé algebraické. Geometrické odvození je předáno zde. Druhá strana rovnice je rovna smíšenému součinu veličin. Ale ten součin je plocha obdélníkového útvaru. Dvě barvy* [neznámé] *jsou strana a výška.*
>
> 
>
>
> *Uvnitř rovinného obrazce je obsaženo čtyřikrát yā, třikrát kā a dvakrát jednotka. Z obrazce pak se odebere čtyřikrát yā, stejně jako kā minus čtyři vynásobené svým koeficientem* [tj. 3], *stane se*
>
> 
>
>
> *. A druhá strana rovnice, s níž se takto zachází, má výsledek* 14. *To je plocha zbylého obdélníku v rohu uvnitř obdélníku představujícího smíšený součin. A to je součin strany a kolmice. Ale ty jsou neznámé. Proto je za stranu dáno zvolené číslo; a když jím je plocha vydělena, podíl je kolmice. Jedna z těch dvou* [strana nebo kolmice] *s přidaným číslem rovným koeficientu u yā je kolmicí obdélníku představujícího smíšený součin, protože ta kolmice byla o tolik zmenšená, když čtyřikrát yā bylo z obdélníku odebráno. Stejným způsobem ta druhá přičtením čísla rovného koeficientu u kā je strana. To jsou přesně hodnoty yā a kā.*
>
> *Nyní bude vysvětlen algebraický důkaz. Ten je také založen na obrázku. Nechť jsou položeny další barvy nī* 1, *pī* 1 [q, p] *za délku strany a výšky malého obdélníku uvnitř velkého, který odpovídá straně a výšce představované yā a kā.*

Pak kterákoli z nich přičtená k číslu rovnému koeficientu u yā je hodnotou yā strany obdélníku [druhá zvětšená o koeficient u *kā* bude druhou stranou]*: viz nī* 1 *rū* 4 *a pī* 1 *rū* 3*. Nahrazením yā, kā těmito* [$x = q + 4$, $y = p + 3$] *v obou stranách rovnice horní strana bude pī* 4 *nī* 3 *rū* 26*; a ta obsahující součin se přemění na nī pī bhā* 1 *nī* 3 *pī* 4 *rū* 12 [$4p + 3q + 26 = qp + 3q + 4p + 12$].

Po odečtení je dolní strana rovnice nī pī bhā 1*, a ta horní je rū* 14 [$14 = qp$]*. To je plocha vnitřního obdélníku a ta je rovna součinu koeficientů přidanému k absolutnímu číslu. Jak hodnoty barev odtud vyvodit, už bylo ukázáno.*

Právě tato operace byla předána ve stručném tvaru starověkými učiteli. Algebraické předvedení musí být vystaveno těm, kdo nepochopili geometrické. Matematikové prohlásili, že algebra je počítání spojené s předvedením: jinak by nebylo rozdílu mezi aritmetikou a algebrou. Proto bylo vysvětlení podstaty řešení ukázáno dvěma různými způsoby.

Bhāskarův důkaz předpokládá rovnici upravenou tak, že koeficient u součinu neznámých je roven jedné, tj.

$$xy = \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}y + \frac{d}{a}.$$

Převedením členů s neznámými na druhou stranu a jejím upravením na součin se dostane

$$\left(x - \frac{c}{a}\right)\left(y - \frac{b}{a}\right) = \frac{d}{a} + \frac{bc}{a^2},$$

kde se i pravá strana hledá ve tvaru součinu $\frac{d}{a} + \frac{bc}{a^2} = np$. Když se zvolí

$$x - \frac{c}{a} = n, \qquad \text{pak je} \qquad y - \frac{b}{a} = \frac{1}{n}\left(\frac{d}{a} + \frac{bc}{a^2}\right),$$

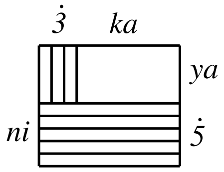
nebo pro obrácenou volbu

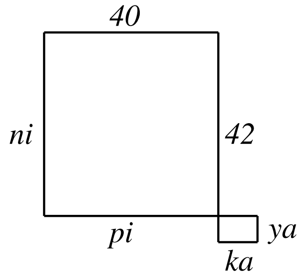
$$y - \frac{b}{a} = n \qquad \text{je} \qquad x - \frac{c}{a} = \frac{1}{n}\left(\frac{d}{a} + \frac{bc}{a^2}\right),$$

což jsou vzorce popsané v Bhāskarově pravidle.

Autor však ve výkladu pokračoval a vysvětloval, jak je možné si úlohu představit, pokud jsou koeficienty $\frac{b}{a}$, resp. $\frac{c}{a}$ záporné, nebo když koeficienty u neznámých jsou větší než strany obdélníku a jsou kladné.

Jak bylo výše řečeno, součin koeficientů přičtený k absolutnímu číslu je plocha jiného malého obdélníku ležícího v rohu uvnitř toho, který představuje součin neznámých. Někdy je to však jinak. Když jsou koeficienty záporné, obdélník představující součin bude uvnitř v rohu toho druhého. Když jsou koeficienty větší než strana a kolmice obdélníku představujícího součin a jsou kladné, nový obdélník bude stát vně v rohu toho představujícího součin, viz.





Když je to tak, koeficienty zmenšené odečtením předpokládaného čísla a podílu jsou hodnoty yā a kā.

7.12. Dvojité rovnice

Dvojité rovnice prvního stupně

Dvojitými rovnicemi prvního stupně rozumíme soustavu (a, b, c, $d \in \mathbb{Q}$)

$$\begin{aligned} ax + b &= u^2, \\ cx + d &= v^2, \end{aligned} \tag{7.34}$$

která se v indické matematice vyskytuje poměrně často.

Jedna z prvních úloh vyžadující řešení soustavy (7.34) (pro $a = c = 1$) se dochovala na dobře čitelném lístku 59 recto rukopisu *Bakhshālī* (viz obr. 7.5).[159]

BMs/59R
Nějaké číslo zvětšené o 5 se dá odmocnit, stejné číslo zmenšené o 7 se také dá odmocnit. Jaké je to číslo, to je otázka.

Problém můžeme vyjádřit rovnicemi

$$\begin{aligned} x + 5 &= u^2, \\ x - 7 &= v^2. \end{aligned}$$

V rukopisu byl popsán postup výpočtu:[160]

Součet přičteného a odečteného je 12, *z toho polovina* [je] 6, *mínus dva* [jsou] 4, *z toho polovina je* 2, *umocněno* 4. *Mělo by být zvětšeno odečítaným.* [Odečítané je] 7, *přičtením toho dostaneme* 11. *To je* [požadované] *číslo.*

159 Podle [Kay2], str. 215.
160 Podle [DS2], str. 258 a [Er].

Tomu odpovídá vyjádření neznámé x v současné symbolice

$$x = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{5+7}{2} - 2\right)\right]^2 + 7 = 11.$$

Postup byl pravděpodobně odvozen tak, že se druhá rovnice odečetla od první, $b - d = u^2 - v^2$, a pak se obě strany vyjádřily ve tvaru součinu

$$\frac{b-d}{p} p = (u+v)(u-v),$$

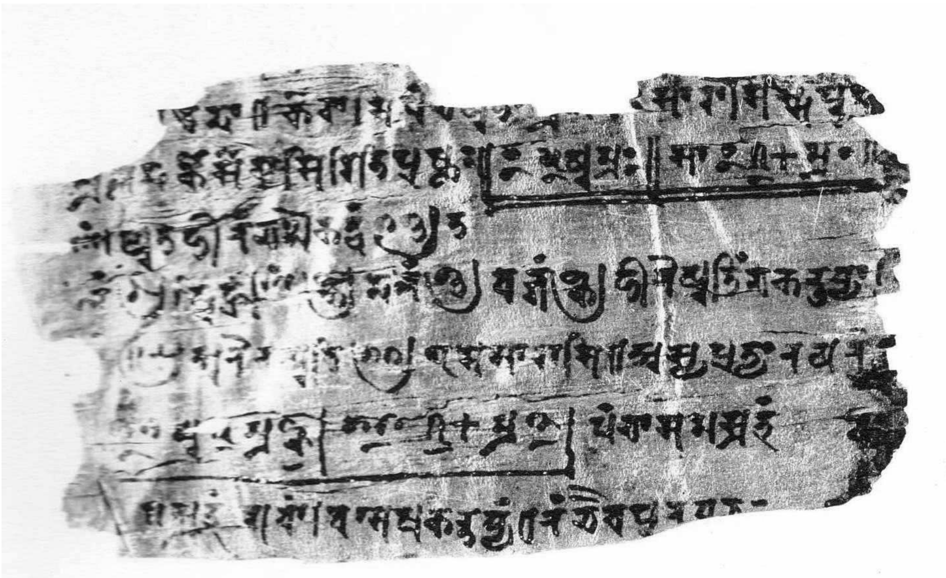
kde p byla nějaká vhodně zvolená nenulová konstanta. Nejprve se vypočítalo v. Porovnáním činitelů

$$u + v = \frac{b-d}{p}, \qquad u - v = p$$

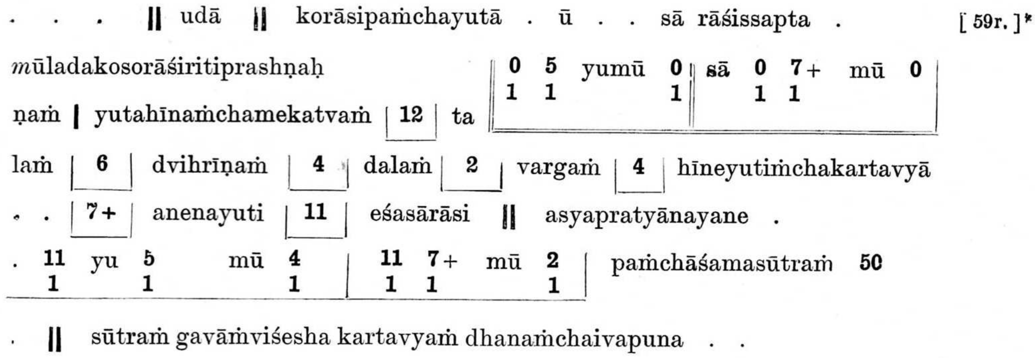
a odtud odečtením druhé rovnice od první se dostalo $v = \frac{1}{2}\left(\frac{b-d}{p} - p\right)$, pak se vypočítalo x dosazením do druhé rovnice původní soustavy:[161]

$$x = v^2 + d = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{b-d}{p} - p\right)\right]^2 + d.$$

Metoda popsaná v rukopisu počítala s hodnotou parametru $p = 2$. V rukopisu byla provedena zkouška dosazením do původních rovnic, tedy $\sqrt{11+5} = 4$ a $\sqrt{11-7} = 2$.



[161] Podobné pravidlo uvedl i Brahmagupta, viz BrSpSi/xviii.82, podle [Col], str. 370.



. . . || udā || korāsipaṁchayutā . ū . . sā rāśissapta . [59r.]*
mūladakosorāśiritiprashṇaḥ | 0 5 / 1 1 yumū 0 / 1 | sā 0 7+ / 1 1 mū 0 |
ṇaṁ | yutahīnaṁchamekatvaṁ | 12 | ta
laṁ | 6 | dvihrīṇaṁ | 4 | dalaṁ | 2 | vargaṁ | 4 | hīneyutiṁchakartavyā
. . | 7+ | anenayuti | 11 | eśasārāsi || asyapratyānayane .
. 11 / 1 yu 5 / 1 mū 4 / 1 | 11 7+ / 1 1 mū 2 / 1 | paṁchāśamasūtraṁ 50
. || sūtraṁ gavāṁviśesha kartavyaṁ dhanaṁchaivapuna . .

Obr. 7.5 Rukopis *Bakhshālī*, folio 59 recto a jeho přepis, převzato z [Kay1].

Brahmagupta řešil soustavu (7.34) pro $b = d = 1$ převedením na Pellovu rovnici.[162] Ze soustavy

$$ax + 1 = u^2,$$
$$cx + 1 = v^2$$

eliminoval x a dostal rovnici $cu^2 + a - c = av^2$, kterou vynásobil a, tím získal Pellovu rovnici s neznámými (u, av)

$$acu^2 + a(a - c) = (av)^2.$$

Šikovným užitím lemmat, viz odstavec 7.9, vyjádřil řešení ve tvaru[163]

$$x = \frac{8(a+c)}{(a-c)^2}, \qquad u = \frac{3a+c}{a-c}, \qquad v = \frac{a+3c}{a-c}.$$

Stejným způsobem se mohla řešit i soustava, kde bylo $b = p^2$, $d = q^2$, protože dělením první rovnice p^2 a druhé q^2 se získala soustava předchozího typu.

Obecným případem soustavy

$$ax + b = u^2,$$
$$cx + d = v^2$$

se zabýval Bhāskara II. Uvedl dosti složité pravidlo,[164] jak vhodnou substitucí soustavu převést na Pellovu rovnici. Předpokládal, že $u = my + 1$, pak z první rovnice soustavy vyjádřil x

$$ax + b = (my+1)^2 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{a}[(my+1)^2 - b]$$

[162] Viz sloka BrSpSi/xviii.78, podle [Col], str. 368–369.
[163] Odvození je například v [Er], str. 103.
[164] Viz sloky BiGa/vii.195–196, podle [Col], str. 368–369.

a dosazením do druhé rovnice dostal Pellovu rovnici

$$c\frac{1}{a}[(my+1)^2-b]+d=v^2.$$

K objasnění pravidla přispěla tato úloha:[165]

> **BiGa/vii.197**
> *Příklad. Jsi-li odborník na metodu vyloučení středního členu, řekni mi číslo, které když se zvlášť vynásobí třemi a pěti a pak přidá jednička stane se čtvercem.*

Jinými slovy, hledalo se číslo x vyhovující soustavě

$$3x+1=u^2,$$
$$5x+1=v^2.$$

Bhāskara podle předchozího pravidla zvolil $u=3y+1$, pak měla první rovnice tvar

$$3x+1=(3y+1)^2,$$

odtud vyjádřil x

$$x=3y^2+2y$$

a dosadil do druhé rovnice

$$15y^2+10y+1=v^2,$$

kterou vynásobil patnácti a přičetl deset, tím doplnil levou stranu na čtverec

$$(15y+5)^2=15v^2+10.$$

Tak vyjádřil úlohu Pellovou rovnicí s neznámými $(v, 15y+5)$. Postupem uvedeným dříve vypočítal dvě řešení

$$\begin{array}{llll} v=9, & 15y+5=35, \ \Rightarrow & y=2, & x=16, \\ v=71, & 15y+5=275, \ \Rightarrow & y=18, & x=1\,008. \end{array}$$

Bhāskara ukázal ještě další způsob, jak soustavu převést na Pellovu rovnici. Vyjádřil x z první rovnice, $x=\frac{1}{3}(u^2-1)$, a dosadil do druhé

$$\frac{5}{3}u^2-\frac{2}{3}=v^2,$$

pro niž našel řešení $u=7$, $v=9$, a tedy $x=16$.

[165] Podle [Col], str. 259–260, [DS2], str. 265. Stejným typem soustav se zabýval Nārāyaṇa v první kapitole práce *Gaṇita-kaumudī*.

Dvojité rovnice druhého stupně

V indické algebře se vyskytovaly dvojité rovnice druhého stupně dvou typů, které se lišily tím, že jeden obsahoval smíšený součin neznámých. Obecně tak můžeme tyto soustavy vyjádřit $(a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2 \in \mathbb{Q})$ ve tvaru

$$\begin{aligned} a_1x^2 + b_1y^2 + c_1 &= u^2, \\ a_2x^2 + b_2y^2 + c_2 &= v^2, \end{aligned} \qquad \text{(i)} \qquad \begin{aligned} a_1x^2 + d_1xy + b_1y^2 + c_1 &= u^2, \\ a_2x^2 + d_2xy + b_2y^2 + c_2 &= v^2. \end{aligned} \qquad \text{(ii)}$$

Studiem takových rovnic se zabýval především Bhāskara II., vyšetřoval však jen určité speciální kombinace koeficientů. Nejpodrobněji rozebíral typ (i) s koeficienty $b_1 = 1$, $b_2 = -1$, $c_1 = c_2 = \pm 1$.[166]

BiGa/vii.194
Příklad od prastarého autora. Vypočítej a řekni, jestli víš, dvě čísla, jejichž součet a rozdíl čtverců s jedničkou přičtenou ke každému jsou čtverce, nebo která jsou taková s tímtéž odečteným.

V příkladu autor řešil dvě soustavy, z nichž první byla

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 1 &= u^2, \\ x^2 - y^2 + 1 &= v^2. \end{aligned}$$

Cílem bylo, jako v mnoha jiných úlohách, při řešení uplatnit znalost Pellovy rovnice. Bhāskara II. volil $x^2 = 5z^2 - 1$, $y^2 = 4z^2$, protože *součet a rozdíl těchto s přidanou jedničkou dovolují odmocnění*

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 1 &= (3z)^2, \\ x^2 - y^2 + 1 &= z^2, \end{aligned}$$

problém tak vyjádřil pomocí jedné neznámé z. Tu vypočítal z Pellovy rovnice $5z^2 - 1 = x^2$, pro niž nalezl dvě řešení $(z, x) = (1, 2)$, $(z, x) = (17, 38)$, nakonec ze druhé substituční rovnice dopočítal y. Podmínkám zadání vyhovovala čísla $x = 2$, $y = 2$, resp. $x = 38$, $y = 34$.

Druhou část příkladu můžeme vyjádřit soustavou[167]

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 1 &= u^2, \\ x^2 - y^2 - 1 &= v^2. \end{aligned} \tag{7.35}$$

Řešení autor hledal stejným způsobem jako u předchozí soustavy, zde volil $x^2 = 5z^2 + 1$, $y^2 = 4z^2$. Pro Pellovu rovnici $5z^2 + 1 = x^2$ stanovil dvě řešení

[166] Podle [Col], str. 257–258, [DS2], str. 267.

[167] Stejný typ soustavy byl řešen i v *Līlāvatī* ve slokách Lila/iii.59–60, Lila/iii.61, viz [Col], str. 27–28. Tam se však nemluvilo o řešení Pellovy rovnice.

$(z, x) = (4, 9)$, $(z, x) = (72, 161)$, odtud určil, že zadání vyhovují čísla $x = 9$, $y = 8$, resp. $x = 161$, $y = 144$.

V závěru ještě naznačil další možnosti, jak takové úlohy řešit. V první z nich předpokládal, že menší čtverec je čtyři, tj. $y^2 = 4$, pak odečtením druhé rovnice od první a využitím identity $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ dostal

$$2y^2 = (u - v)(u + v),$$

kde položil $u - v = 2$, pak $u + v = y^2 = 4$ a podle metody uvedené v *Līlāvatī*, dopočítal $u = 3$, $v = 1$. Dosazením do první rovnice dopočítal $x = 2$. Přitom upozornil, že *hodnota menšího čtverce musí být navržena tak, aby druhý byl celočíselný*, a připojil poznámku že k cíli vede ještě volba $y^2 = 36$.

Druhý způsob je zobecněním metody, kterou použil při výpočtu. Bhāskara vycházel z identit $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ a čísla x, y hledal ve tvaru

$$x^2 = (a^2 + b^2)z^2 - 1, \qquad y^2 = 2abz^2, \tag{7.36}$$

protože

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 1 &= (a^2 + b^2)z^2 - 1 + 2abz^2 + 1 = z^2(a + b)^2 = u^2, \\ x^2 - y^2 + 1 &= (a^2 + b^2)z^2 - 1 - 2abz^2 + 1 = z^2(a - b)^2 = v^2. \end{aligned}$$

K tomu ovšem musel zajistit, aby součin $2ab$ byl čtvercem. To Bhāskara zařídil tak, že za a zvolil čtverec $a = p^2$ a za b polovinu čtverce $b = \frac{q^2}{2}$, tím dostal $2ab = p^2q^2$. Vyjádření x^2 v (7.36) představuje zobecněnou Pellovu rovnici $(a^2 + b^2)z^2 - 1 = x^2$, resp. $(p^4 + \frac{q^4}{4})z^2 - 1 = x^2$, jejíž řešení (z, x) Bhāskara uměl vypočítat. Pomocí z pak podle (7.36) dopočítal $y = \sqrt{2ab}z = pqz$. Na závěr navrhl hodnoty $a = 1$, $b = 2$, pak $2ab = 4$, $a^2 + b^2 = 5$, nebo $a = 9$, $b = 2$, pak $2ab = 36$, $a^2 + b^2 = 85$.

Pro srovnání uvedeme další předpisy pro řešení soustavy (7.35), jak byly uvedeny v aritmetické *Līlāvatī*.[168] Pro libovolné číslo p může být řešením

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{8p^2 - 1}{2p}\right)^2 + 1, \quad y = \frac{8p^2 - 1}{2p}, \quad u = \frac{64p^4 - 1}{8p^2}, \quad v = \frac{1}{2}\left(\frac{8p^2 - 1}{2p}\right)^2$$

nebo

$$x = p + \frac{1}{2p}, \qquad y = 1, \qquad u = p + \frac{1}{2p}, \qquad v = p - \frac{1}{2p},$$

případně

$$x = 8p^4 + 1, \qquad y = 8p^3, \qquad u = 4p^2(2p^2 + 1), \qquad v = 4p^2(2p^2 - 1).$$

[168] Podle [Col], str. 27–28, [Er], str. 132.

Poslední vztahy uvedl i Nārāyaṇa s tím rozdílem, že místo p uvažoval $\frac{q}{2}$ (viz [DS2], [DvP]).

Na jinou dvojitou rovnici druhého stupně, opět ve speciálním tvaru, vede příklad,[169] kde Bhāskara II. hledal řešení soustavy

$$\begin{aligned} 2(x^2 - y^2) + 3 &= u^2, \\ 3(x^2 - y^2) + 3 &= v^2. \end{aligned}$$

Substitucí $p = x^2 - y^2$ dvojitou rovnici druhého stupně převedl na dvojitou rovnici prvního stupně

$$\begin{aligned} 2p + 3 &= u^2, \\ 3p + 3 &= v^2, \end{aligned}$$

kterou podle metod popsaných dříve řešil tak, že z první rovnice vyjádřil p a dosadil do druhé, po úpravách vznikla Pellova rovnice $6v^2 + 9 = (3u)^2$. Jejím nejmenším řešením bylo $v = 6$, $u = 5$, a odtud vypočítal $p = 11$, tj. $x^2 - y^2 = 11$. Obě strany vyjádřil ve tvaru součinu $(x-y)(x+y) = 1 \cdot 11$ a nakonec metodou *saṅkramaṇa* vypočítal $x = 6$, $y = 5$.

Uvedeme ještě jednu soustavu druhého typu se smíšeným součinem.[170]

BiGa/vii.189
Příklad. Řekni mi rovnou dvě čísla taková, že součet jejich čtverců přidaný k jejich součinu dovolí odmocnění a jejich součet vynásobený tou odmocninou a přidaný k jedničce může být také čtvercem.

Zadání vede na soustavu

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + xy &= u^2, \\ (x+y)u + 1 &= v^2. \end{aligned}$$

Bhāskara nejprve první rovnici vynásobil číslem 36, levou stranu doplnil na čtverec,

$$(6x + 3y)^2 + 27y^2 = (6u)^2,$$

a výraz $27y^2$ vyjádřil jako rozdíl čtverců, který upravil s využitím identity $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:

$$27y^2 = \big[6u - (6x + 3y)\big]\big[6u + (6x + 3y)\big].$$

Označil $p = 6u - (6x + 3y)$, pak $6u + (6x + 3y) = \frac{27y^2}{p}$, odtud podle metody *saṅkramaṇa* plyne

$$\begin{aligned} 6u &= \frac{1}{2}\left(\frac{27y^2}{p} + p\right), \\ 6x + 3y &= \frac{1}{2}\left(\frac{27y^2}{p} - p\right). \end{aligned}$$

[169] Viz sloka BiGa/vii.199, podle [Col], str. 261.
[170] Podle [Col], str. 254–255, [DS2], str. 267.

Bhāskara zvolil $p = y$, pak $u = \frac{7}{3}y$, $x = \frac{5}{3}y$ a dosazením do druhé rovnice dostal Pellovu rovnici

$$\left(\frac{5}{3}y + y\right)\frac{7}{3}y + 1 = v^2, \qquad \text{tj.} \qquad 56y^2 + 9 = 9v^2,$$

nalezl její řešení $y = 6$, resp. $y = 180$, pak dopočítal $x = 10$, resp. $x = 300$.

Pro řešení obecné dvojité rovnice druhého stupně předložil pouze velmi stručný návod, ale neuvedl žádný příklad.

Dvojité rovnice vyšších stupňů

Bhāskara II. počítal několik úloh, které vyžadovaly znalost řešení dvojité rovnice vyššího stupně. Zadání i postup řešení připomíná některé úlohy Diofantovy. Soustavu[171]

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= u^2, \\ x^2 + y^2 &= v^3 \end{aligned}$$

řešil Bhāskara substitucí $x = p^2$, $y = 2p^2$, tak soustavu upravil do tvaru

$$9p^6 = u^2, \qquad\qquad 5p^4 = v^3.$$

První rovnice je splněná pro $u = 3p^3$ zbývalo ještě zvolit p tak, aby $5p^4$ bylo třetí mocninou. Proto Bhāskara hledal v jako nějaký násobek $5p$. Po dosazení do druhé rovnice dostal $5p^4 = (q \cdot 5p)^3$, odtud $p = 25q$. Volba $q = 1$ pak vedla k řešení $x = 625$, $y = 1\,250$.

Stejnou soustavu řešil Nārāyaṇa. V první kapitole práce *Gaṇita-kaumudī* uvedl obecný tvar neznámých ($q \in \mathbb{Q}^+$)

$$x = \frac{q^6}{25}, \qquad\qquad y = \frac{2q^6}{25}.$$

K tomuto vyjádření mohl dospět zobecněním Bhāskarovy metody. Po substituci $x = mp^2$, $y = np^2$ byla první rovnice $(m^3 + n^3)p^6 = u^2$. Aby levá strana byla čtvercem, volil čísla m, n tak, aby součet jejich třetích mocnin $m^3 + n^3$ byl čtvercem. Dosazením do druhé rovnice dostal $(m^2+n^2)p^4 = v^3$, kde volil $v = qp$. Rovnici upravil a vyjádřil $p = \frac{q^3}{m^2+n^2}$, odtud $x = \frac{mq^6}{(m^2+n^2)^2}$, $y = \frac{nq^6}{(m^2+n^2)^2}$. Volbou $m = 1$, $n = 2$ dostal výše uvedená vyjádření.

Jiná Bhāskarova úloha vyžadovala řešení soustavy[172]

$$\begin{aligned} x - y &= u^2, \\ x^2 + y^2 &= v^3. \end{aligned}$$

[171] Viz sloka BiGa/iv.122, podle [Col], str. 202.

[172] Viz sloka BiGa/vii.182, podle [Col], str. 249.

I když mohl Bhāskara soustavu vyřešit stejnou metodou jako předchozí, postupoval jinak. Dosazením $x = u^2 + y$ do druhé rovnice dostal

$$2y^2 + 2yu^2 = v^3 - u^4.$$

Dále položil $v = u^2$, obě strany vynásobil dvěma, přičetl u^4 a levou stranu doplnil na čtverec

$$(2y + u^2)^2 = u^4(2u^2 - 1).$$

Pravá strana je čtvercem, pokud $2u^2 - 1$ je čtvercem, neboli zbývalo nalézt řešení Pellovy rovnice

$$2u^2 - 1 = w^2.$$

Jedním řešením bylo $u = 5$, $w = 7$, pak $y = 75$, $x = 100$.

Jako poslední příklad uvedeme soustavu, která je zajímavá tím, že ji Bhāskara řešil dvěma způsoby:[173]

$$\begin{aligned} x^3 + y^2 &= u^2, \\ x + y &= v^2. \end{aligned}$$

První metoda spočívala v tom, že si x^3 z první rovnice vyjádřil jako rozdíl čtverců $u^2 - y^2$, a ten si ještě představil jako součin součtu a rozdílu

$$x^3 = (u - y)(u + y).$$

Pak zvolil $u - y = p$, pak $u + y = \frac{x^3}{p}$, a dostal vyjádření $u = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{p} + p\right)$, $y = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{p} - p\right)$. Nyní položil $p = x$ a dosadil y do druhé rovnice

$$x + \frac{1}{2}\left(x^2 - x\right) = v^2, \qquad \text{tj.} \qquad x^2 + x = 2v^2.$$

Vynásobením čtyřmi a přičtením jedničky doplnil levou stranu na čtverec

$$(2x + 1)^2 = 8v^2 + 1,$$

a to už byl tvar Pellovy rovnice, pro niž určil dvě řešení $(v, 2x + 1) = (6, 17)$, resp. $(v, 2x + 1) = (35, 99)$. Z nich nakonec určil neznámé $(x, y) = (8, 28)$, resp. $(x, y) = (49, 1\,176)$.

Ve druhém případě použil substituci $x = 2p^2$, $y = 7p^2$, pak byla splněna druhá rovnice, první přešla do tvaru

$$8p^6 + 49p^4 = u^2 \qquad \text{tj.} \qquad p^4(8p^2 + 49) = u^2.$$

Aby součin na levé straně byl čtvercem, musel být výraz v závorce také čtvercem, to platí pro $p = 2$, $p = 3$, $p = 7$ atd., a pomocí těchto hodnot dospěl k řešení $(x, y) = (8, 28)$, $(x, y) = (18, 63)$, $(x, y) = (98, 343)$ atd.

[173] Viz sloka BiGa/vii.188, podle [Col], str. 253–254.

Soustavy tří a více rovnic

V Bhāskarově *Bījagaṇitě* nalezneme několik zajímavých příkladů, v nichž si autor musel poradit s řešením soustavy s více než dvěma rovnicemi. Byly to úlohy, kde se hledala většinou dvě přirozená čísla, jejichž součet, rozdíl, součin apod. byl druhou nebo třetí mocninou nějakého přirozeného čísla.

Jedna z takových úloh[174] vedla na soustavu

$$\begin{aligned} x + y &= u^2, \\ x - y &= v^2, \\ xy &= w^3. \end{aligned}$$

Bhāskara vhodně zvolenou substitucí $x = 5p^2$, $y = 4p^2$ zajistil splnění prvních dvou rovnic a zbývalo mu vyřešit třetí, tj. $20p^4 = w^3$. Pomocí volby $w = 10p$ dospěl po zkrácení k rovnici $20p = 1\,000$, odkud snadno vypočítal $p = 50$, potom $x = 12\,500$, $y = 10\,000$.

Bhāskarovu substituci můžeme vyjádřit obecně

$$x = (m^2 + n^2)p^2, \qquad y = 2mnp^2,$$

kde čísla x, y jsou zvolena v takovém tvaru, aby $x + y$ i $x - y$ byly čtverce. Pak třetí rovnice má tvar $2mn(m^2 + n^2)p^4 = w^3$, kde se w hledá jako $w = qp$, neboli

$$2mn(m^2 + n^2)p^4 = q^3p^3.$$

Odtud se vyjádří (pro libovolná m, n, $q \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} p &= \frac{q^3}{2mn(m^2 + n^2)}, \\ x &= (m^2 + n^2)\frac{(q^3)^2}{[2mn(m^2 + n^2)]^2}, \\ y &= 2mn\frac{(q^3)^2}{[2mn(m^2 + n^2)]^2}. \end{aligned}$$

Takto popsal řešení Nārāyaṇa:[175]

> **GaKa/i.5** (část)
> *Jak bylo výše uvedeno, dvě čísla, když se vynásobí podílem čtverce třetí mocniny libovolného čísla a čtverce jejich součinu, jsou čísly požadovanými.*

---

174 Viz sloka BiGa/iv.121, podle [Col], str. 201–202.
175 Podle [DS2], str. 286, [DvP], str. x–xi.

Při řešení následující úlohy využil Bhāskara aritmetickou posloupnost.[176]

BiGa/v.143–144
Příklad. Jaká jsou čtyři množství, příteli, z nichž každé po přičtení dvou umožňuje odmocnění; a jejichž součiny po dvou sousedících stanou se také čtvercovými čísly, když se k nim přidá osmnáct; a která jsou taková, že odmocnina ze součtu všech odmocnin přidaného k jedenácti je třináct? Řekni mi je, algebraiku.

Podmínky ze zadání můžeme vyjádřit rovnicemi

$$\begin{aligned}
&x_1 + 2 = u_1^2, && x_1x_2 + 18 = v_1^2,\\
&x_2 + 2 = u_2^2, && x_2x_3 + 18 = v_2^2,\\
&x_3 + 2 = u_3^2, && x_3x_4 + 18 = v_3^2,\\
&x_4 + 2 = u_4^2, && \sqrt{u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + v_1 + v_2 + v_3 + 11} = 13.
\end{aligned}$$

Konstantu 2, která se přičítá k hledaným číslům, nazýval Bhāskara *rāśi-kṣepa*, konstantě 18 přičítané k součinům říklal *vadha-kṣepa*. Bhāskara patrně z prvních dvou rovnic dosadil do páté

$$(u_1^2 - 2)(u_2^2 - 2) + 18 = v_1^2,$$

po úpravě

$$(u_1u_2 - 2)^2 - 2(u_2 - u_1)^2 + 18 = v_1^2.$$

Levá strana bude čtvercem, pokud $2(u_2 - u_1)^2 = 18$, neboli

$$u_2 - u_1 = \sqrt{\frac{18}{2}}, \qquad v_1 = u_1u_2 - 2.$$

Stejně mohl dosadit ze druhé a třetí rovnice do šesté, tím obdržel

$$u_3 - u_2 = 3, \qquad v_2 = u_2u_3 - 2,$$

a také ze třetí a čtvrté rovnice do sedmé

$$u_4 - u_3 = 3, \qquad v_3 = u_3u_4 - 2.$$

Rozdíly mezi u_1, u_2, u_3, u_4 byly konstantní, proto je autor považoval za členy aritmetické posloupnosti s prvním členem u_1 a diferencí $d = \sqrt{\frac{18}{2}} = 3$ (v popisu řešení je označil *yā*, *yā*+3, *yā*+6, *yā*+9). Při této volbě u_i, v_i byla pátá, šestá a sedmá rovnost splněná, hodnotu neznámé u_1 (*yā*) vypočítal z poslední rovnice. Předtím si ještě vyjádřil

$$v_1 = u_1^2 + 3u_1 - 2, \quad v_2 = u_1^2 + 9u_1 + 16, \quad v_3 = u_1^2 + 15u_1 + 52,$$

[176] Podle [Col], str. 218–219.

a určil jejich součet dohromady se součtem členů posloupnosti

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + v_1 + v_2 + v_3 = 3u_1^2 + 31u_1 + 84.$$

Umocněním poslední rovnice dostal

$$3u_1^2 + 31u_1 + 84 + 11 = 13^2.$$

Rovnici vynásobil dvanácti a přičetl 31^2, tak mohl levou stranu vyjádřit jako čtverec

$$(6u_1 + 31)^2 = 43^2,$$

odkud stanovil $u_1 = 2$, pak dopočítal $(u_1, u_2, u_3, u_4) = (2, 5, 8, 11)$ a nakonec neznámá množství $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 23, 62, 119)$.

Na podobné úvaze byla založena také řešení úloh ve slokách BiGa/v.190 a BiGa/v.193, substituce však vedla na Pellovu rovnici.

Shrnutí

Indové algebru stavěli vysoko, považovali ji za důležitější než aritmetiku, dokonce podle Bhāskary II. byla algebra zdrojem pro aritmetiku. Indická algebra obsahovala dvě základní větve – algebraické výpočty a řešení rovnic, resp. jejich soustav.

Algebraické výpočty od aritmetických neodlišovalo jen dokazování, jak tvrdil Bhāskara II., ale také symbolika. Indičtí učenci jako první začali systematicky označovat neznámé písmeny, zavedli zkratky k vyjádření mocniny neznámých a pro součiny těchto mocnin. K odlišení záporných čísel sloužila tečka umístěná nad číslem, proto bylo možno zapsat rovnici i se zápornými koeficienty, což výrazně zjednodušilo klasifikaci rovnic.

Indičti matematikové dospěli k velmi zajímavým výsledkům při řešení neurčitých rovnic, zejména rovnice, které dnes říkáme Pellova. Některé úlohy a metody jejich řešení připomínají Diofantovu *Aritmetiku*, podstatným rozdílem je však obor neznámých. Indové až na výjimky hledali řešení pouze v oboru přirozených čísel.

Řada algebraických metod se z Indie šířila do arabského světa a zprostředkovatelně tak ovlivnila matematiku evropskou.

8. GEOMETRIE

Geometrii bylo v indické matematice věnováno mnohem méně pozornosti než aritmetice a algebře. Neexistovaly samostatné geometrické práce, základní poznatky z geometrie jsou obsaženy v šesti z osmi určení;[1] ta byla ovšem zpravidla součástí aritmetiky. Tato určení se týkala rovinné geometrie (zejména měření obvodu a obsahu základních rovinných útvarů), prostorové geometrie (výpočty objemů výkopů, hromad cihel, hromad písku) a měření pomocí stínů.

Geometrie se původně nazývala *śulba* nebo *rajju.*[2] Později se geometrii říkalo *kṣetra-gaṇita* nebo *kṣetra-vyavahāra.*[3]

8.1. Rovinné obrazce

Určení věnované rovinným obrazcům, tzv. *kṣetra*, zahrnovalo měření trojúhelníku, čtyřúhelníku, kruhu, kruhového oblouku, mezikruží a elipsy.

V úlohách byla uvedena pravidla pro výpočet obsahu rovinných obrazců. Někteří autoři, například Mahāvīra a Brahmagupta, rozlišovali přibližnou velikost plochy (postačující pro praktické účely) a přesnou velikost plochy. Základní vzorec pro přibližný výpočet obsahu čtyřúhelníku i trojúhelníku byl součin polovičních součtů protilehlých stran, kde u trojúhelníku byla strana protilehlá základně nulová.

8.1.1. Trojúhelník

Pro trojúhelník se používal název *triāśra* nebo *tribhuya.*[4] Indičtí matematikové rozlišovali trojúhelníky rovnostranné, nazývané *sama-tribhuya*, rovnoramenné, označené jako *dvisama-tribhuya*, i obecné neboli *viṣama-tribhuya.* Základna trojúhelníku se nazývala *bhujā* nebo *bhu* (země), stranám se říkalo *pārśva* nebo *karṇa*, pod názvem *avalambaka* (výška) nebo *lamba* (kolmice) se vždy rozuměla výška k základně. Podle toho, zda výška k základně ležela uvnitř či vně trojúhelníku, rozlišovaly se trojúhelníky ostroúhlé, tzv. *antar-lamba* (vnitřní kolmice) či tupoúhlé neboli *bahir-lamba* (vnější kolmice).[5]

Bhāskara II. stanovil podmínku existence trojúhelníku či mnohoúhelníku:[6] *když součet všech stran kromě jedné je menší nebo roven zbývající straně, není to žádný útvar.*

---

[1] Dvacet operací a osm určení byly základními tématy aritmetiky, viz 6. kapitola. Určení představovala jakési návody, početní postupy, jak vyřešit daný problém.

[2] Oba termíny se používaly i pro provaz nebo šňůru, pomocí nichž se v nejstarších dobách prováděly geometrické konstrukce.

[3] *Kṣetra* byl termín označující rovinné útvary, *kṣetra-gaṇita* a *kṣetra-vyavahāra* lze přeložit jako počítání či zacházení s rovinnými útvary, i když se geometrie zabývala i tělesy.

[4] Slovo *bhuya* označovalo rameno či stranu, *tribhuya* znamená „mající tři strany", podobně čtyřúhelník – *catur-bhuya*, pětiúhelník – *pañca-bhuya*, šestiúhelník – *ṣaḍ-bhuya*, podle [DS3]. *Triāśra* lze přeložit jako „mající tři hrany", podle [Ke1].

[5] Klasifikace je uvedena např. v [DS3].

[6] Viz sloka Lila/vi.161, podle [Col], str. 69.

Pravoúhlý trojúhelník, Pythagorova věta

Speciálním případem byly pravoúhlé trojúhelníky, pro které Brahmagupta i někteří další autoři používali termín *jātya-triaśra*. Nejdelší straně pravoúhlého trojúhelníku se říkalo *karṇa* (přepona), dvě odvěsny se nazývaly *bhujā* (základna) a *koṭi* (svislá strana).[7]

V indické literatuře se už ve védském období objevily některé formulace Pythagorovy věty a příklady pythagorejských trojic.[8] Středověcí učenci připojili ještě další vyjádření.

Pro konstrukci pravoúhlých trojúhelníků s celými nebo racionálními stranami uvedl Brahmagupta obecné vyjádření délek stran[9] $(m, n \in \mathbb{N})$

$$(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2), \qquad \left(m, \frac{1}{2}\Big(\frac{m^2}{n} - n\Big), \frac{1}{2}\Big(\frac{m^2}{n} + n\Big)\right).$$

Podobná tvrzení uvedli i další autoři, například Bhāskara II. vyjádřil strany pravoúhlého trojúhelníku ve tvaru[10]

$$\left(m, \frac{2mn}{n^2 - 1}, \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1}m\right)$$

a počítal i s iracionálními stranami. Indičtí učenci věděli, že celočíselné násobky stran dávají opět strany pravoúhlého trojúhelníku $(k, m, n \in \mathbb{N})$

$$\Big(k(m^2 - n^2),\ 2kmn,\ k(m^2 + n^2)\Big).$$

V jednom příkladu algebraické práce *Bījagaṇita* vysvětlil Bhāskara II. Pythagorovu větu geometricky.[11] Ze čtyř stejných pravoúhlých trojúhelníků se stranami a, b a přeponou c sestrojil čtverec o straně c (viz obr. 8.1 vlevo), uprostřed zbyl ještě malý čtverec o straně $a - b$. Obsah velkého čtverce byl součtem obsahů čtyř trojúhelníků a malého čtverce

$$S = c^2 = 4\frac{ab}{2} + (a - b)^2 = a^2 + b^2.$$

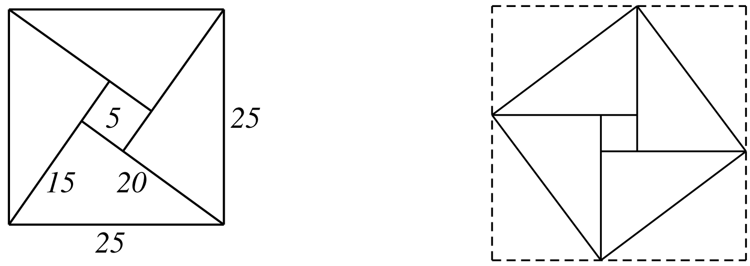
Poznamenejme ještě, že Bhāskara II. uvažoval pravoúhlý trojúhelník se stranami 15, 20, 25.

Podobný důkaz se objevuje v čínské matematice, kde se doplnily ještě čtyři trojúhelníky (viz obr. 8.1 vpravo); to odpovídalo zdvojení čtverce nad přeponou

[7] Terminologie je uvedena např. v [Ke1].
[8] Viz 2. kapitola, odstavec 2.3.
[9] Viz sloky BrSpSi/xii.33, BrSpSi/xii.35, podle [Col], str. 306.
[10] Viz sloka Lila/vi.139, podle [Col], str. 61.
[11] Podle [Col], str. 221–222.

s odečtením vnitřního čtverečku. Označíme-li odvěsny a, b, přeponu c, pak platí:[12]

$$(a+b)^2 = 2c^2 - (a-b)^2.$$



Obr. 8.1 Důkaz Pythagorovy věty – indický a čínský.

Al-Chwárizmí předložil důkaz Pythagorovy věty, známý z řecké matematiky, pouze pro rovnoramenný trojúhelník (viz [Ju]).

Mahāvīra užíval termín *bīja* (prvek) k označení konstant, zpravidla přirozených čísel, z nichž bylo možné odvodit prvky trojúhelníku, obdélníku či obecného čtyřúhelníku. Například A a B jsou *bīja* ve vztahu k pravoúhlému trojúhelníku, protože jeho strany lze vyjádřit pomocí vztahů $a = A^2 - B^2$, $b = 2AB$, $c = A^2 + B^2$. Operace *janya* pak představuje algoritmus výpočtu těchto prvků, tj. stran, základen, výšek, úhlopříček a ramen. V obrácené operaci *janya* bylo úkolem vypočítat konstanty *bīja* ze zadaných rozměrů geometrického útvaru.

Pomocí konstant *bīja* Mahāvīra stanovil strany a úhlopříčku obdélníku,[13] nejde o nic jiného než o vyjádření pythagorejské trojice

$$a = A^2 - B^2, \qquad b = 2AB, \qquad u = A^2 + B^2.$$

Tento procesu nazýval Diofantos vytváření pravoúhlého trojúhelníku z A, B, Mahāvīra mu říkal vytváření podlouhlého čtyřúhelníku (obdélníku) z A, B (viz [DS2]).

Obrácená operace *janya* představovala opačný proces, v obdélníku byly dány délky stran a, b, úhlopříčky u a hledaly se konstanty A, B. Podle Mahāvīrova pravidla[14] se vypočítaly podle vztahů

$$B = \sqrt{\frac{1}{2}(u-a)}, \qquad A = \sqrt{u - \frac{1}{2}(u-a)}.$$

K určení dvou konstant byly k dispozici tři rovnice, z vyjádření je zřejmé, že autor použil jen první a třetí.

Už ve védských textech *Śulbasūtrách* byly popisovány konstrukce lichoběžníků, které vznikly z pravoúhlých trojúhelníků přiložených k sobě stranou stejné

[12] Podle [Hu], str. 216.
[13] Viz sloka GaSaSa/vii.90$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 209.
[14] Viz sloka GaSaSa/vii.120$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 222.

délky. Snaha o obecné vyjádření stran pravoúhlého trojúhelníku s předem danou délkou jedné strany se znovu objevuje ve středověkých dílech. Například podle Mahāvīrových pravidel[15] má-li jedna odvěsna délku a, pak jsou délky stran popsány trojicemi

$$\left(a,\ \frac{1}{2}\Big(\frac{a^2}{p^2}-p^2\Big),\ \frac{1}{2}\Big(\frac{a^2}{p^2}+p^2\Big)\right) \qquad \text{nebo} \qquad \left(\frac{a^2}{4p^2}-p^2,\ a,\ \frac{a^2}{4p^2}+p^2\right),$$

kde p, q jsou libovolně zvolená čísla. Byla tak provedena operace *janya* s prvky $A=\frac{1}{2}(\frac{a}{p}+p)$, $B=\frac{1}{2}(\frac{a}{p}-p)$, resp. $A=\frac{a}{2p}$, $B=p$.

Stejný problém řešil rovněž Bhāskara II. a dospěl k vyjádření[16]

$$\left(a,\ \frac{2ap}{p^2-1},\ p\frac{2ap}{p^2-1}-a\right) \qquad \text{nebo} \qquad \left(a,\ \frac{1}{2}\Big(\frac{a^2}{p}-p\Big),\ \frac{1}{2}\Big(\frac{a^2}{p}+p\Big)\right)$$

k tomu v příkladech určil strany čtyř pravoúhlých trojúhelníků s jednou odvěsnou $a=12$, a to $(12,16,20)$, $(12,9,15)$, $(12,5,13)$ užitím prvního vztahu volbou $p=2$, $p=3$, $p=5$, a $(12,35,37)$ podle druhého vzorce s parametrem $p=2$.[17]

Podobná pravidla uváděla, jak vyjádřit strany pravoúhlého trojúhelníku, je-li dána délka přepony[18]

$$\Big(\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}c,\ \frac{2mn}{m^2+n^2}c,\ c\Big), \qquad \text{resp.} \qquad \left(\frac{2cp}{p^2+1}p-c,\ \frac{2cp}{p^2+1},\ c\right).$$

Znalost Pythagorovy věty byla procvičována v mnoha různých příkladech. Některé indické úlohy byly téměř shodné s čínskými. Uveďme na ukázku některé z nich. V indických textech se s mírnými obměnami objevila úloha o zlomeném bambusu či sloupu.[19]

> **GaSaSa/vii.192$\frac{1}{2}$**
> *Výška rostoucího bambusu je* 49 *hasta. Je zlomen někde mezi* [horním a dolním koncem]. *Rozdíl mezi vrškem* [spadlým na zem] *a dolním koncem je* 21 *hasta. Jak vysoko od země je zlomen?*

Mahāvīrovy úvahy vyjádříme současnou symbolikou. Označíme-li x, y jako dolní a horní část zlomeného bambusu, jejich součtem je výška bambusu b. Poté, co vršek dopadne na zem, stane se horní část y přeponou a dolní část x odvěsnou pravoúhlého trojúhelníku, druhou odvěsnou je vzdálenost a spadlého vršku od paty bambusu (viz obr. 8.2).

---

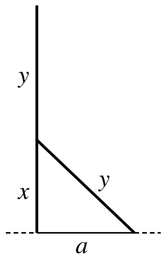
[15] Viz sloky GaSaSa/vii.95$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 210, GaSaSa/vii.97$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 211.

[16] Viz sloky Lila/vi.139 a Lila/vi.140, podle [Col], str. 61.

[17] Volil ještě $p=4$ a $p=6$, tím však získal znovu trojice $(12,16,20)$ a $(12,9,15)$.

[18] Viz sloky GaSaSa/vii.122$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 223, Lila/vi.123, podle [Col], str. 62.

[19] Podle [Ran], str. 247. Jednotka délky *hasta* je míra od lokte ke špičce prostředníku, tj. loket, asi 45 cm.



Obr. 8.2 Úloha o zlomeném bambusu.

Řešila se tedy soustava

$$y^2 - x^2 = a^2,$$
$$x + y = b,$$

kde $a = 21$, $b = 49$. Podle pravidla, které úloze předcházelo, se hledaná výška x vypočítala podle vztahu[20]

$$x = \frac{\frac{1}{2}(b^2 - a^2)}{b} = \frac{\frac{1}{2}(49^2 - 21^2)}{49} = \frac{980}{49} = 20.$$

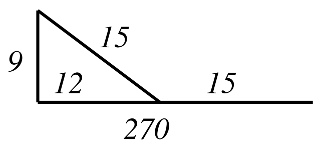
Podobnou úlohu uvedl i Bhāskara II., a dokonce dvakrát,[21] nalezneme ji s jinými numerickými hodnotami v komentáři k Brahmaguptově práci, kde byla řešena pomocí tětivy kružnice.[22] Téměř stejný problém byl řešen v čínské matematice,[23] výpočet se lišil od Mahāvīry jen pořadím prováděných operací $y = \frac{1}{2}\left(b - \frac{a^2}{b}\right)$.

Na stejném principu je založena i úloha o hadovi a pávovi:[24]

Lila/vi.150
U paty sloupu je hadí nora, na vrcholu sloupu sedí páv. Když ve vzdálenosti trojnásobku výšky sloupu uvidí hada, jak se plazí směrem ke své noře, vrhne se šikmo na něj. Řekni rychle kolik loktů od nory se potkají, když oba urazí stejnou vzdálenost.

Vyjádření: Sloup 9. *To je výška. Vzdálenost hada od nory je* 27. *To je součet přepony a strany. Doporučeným postupem setkání je nalezeno v loktech:* 12.

Viz obrázek.



[20] Pravidlo na výpočet je ve sloce GaSaSa/vii.190$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 246, postup odpovídá dosazení y z druhé rovnice do první.

[21] Viz sloky Lila/vi.148, podle [Col], str. 64–65, BiGa/iv.124, podle [Col], str. 203.

[22] Viz odstavec 8.1.4.

[23] V *Matematice v devíti kapitolách* je zařazen v deváté kapitole jako (9.11), podle [Hu], str. 218.

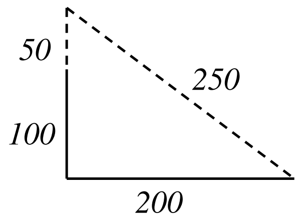
[24] Podle [Col], str. 65. V komentáři k práci *Brāhma-sphuta-siddhānta* je analogický příklad s kočkou a krysou, podle [Col], str 310.

Známá je Bhāskarova úloha o opicích; byla zařazena jak do aritmetické *Līlāvatī*, tak do algebraické *Bījagaṇity*. Při řešení se opět využívala Pythagorova věta.[25]

Lila/vi.155
Ze stromu vysokého sto loktů slezla opice a šla k rybníku vzdáleném dvě stě loktů; zatímco jiná opice vyskočila do nějaké výšky nad strom a s rychlostí pokračovala šikmo ke stejnému místu. Jestliže obě urazily stejný úsek, řekni mi, rychle, vzdělaný muži, výšku skoku, jestli jsi pilně studoval počítání.

Vyjádření: Strom 100 *loktů. Jeho vzdálenost od rybníka* 200. *Doporučeným postupem výška skoku vychází* 50.

Viz.



Bhāskarův doporučený postup představoval výpočet, který bychom dnes vyjádřili vzorcem

$$x = \frac{vd}{2v + d},$$

kde v je výška stromu, d je vzdálenost rybníka od stromu a x je hledaná výška skoku. K tomu se dá snadno dospět s využitím Pythagorovy věty. V pravoúhlém trojúhelníku mají odvěsny délky d a $v + x$, tudíž přepona je $\sqrt{d^2 + (v + x)^2}$. Podle zadání se musí rovnat cesty obou opic, tj.

$$d + v = x + \sqrt{d^2 + (v + x)^2}.$$

Odtud umocněním a jednoduchou úpravou se vyjádří

$$x = \frac{vd}{2v + d}.$$

Bhāskara II. žádné odvozování neprováděl, pouze uvedl pravidlo, které tento vzorec popisuje slovy.

Komentátor Brahmaguptovy práce *Brāhma-sphuta-siddhānta* uvedl stejný problém s jinými numerickými hodnotami jako úlohu o asketech.[26]

Na obrázku 8.3 je ukázka rukopisu *Līlāvatī* s ilustrovanou úlohou o hadovi a pávovi a problémem se dvěma opicemi; rukopis je uložen v Muzeu indologie v Džajpuru (SRC Museum Of Indology, Jaipur).

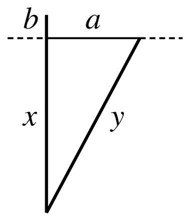
[25] Podle [Col], str. 67. Stejná úloha je BiGa/iv.126, podle [Col], str. 204–205.
[26] Podle [Col], str 308.

Obr. 8.3 Rukopis *Līlāvatī*, převzato z [Kat].

Následující Bhāskarův problém s lotosovým květem[27] má svůj ekvivalent v čínské úloze o rákosu na rybníku,[28] al-Karadži v knize *Kitáb al-káfí fi 'l-hisáb* (*Dostatečná kniha o vědě aritmetické*) rovněž uvedl podobný příklad (viz [Ju]).

BiGa/iv.125
Na jistém jezeře plném červených hus a jeřábů byla spatřena špička poupětě lotosového květu půl lokte nad hladinou vody. Vlivem větru se postupně pohybovala a ponořila se ve vzdálenosti dvou loktů. Vypočítej rychle, matematiku, hloubku vody.

Autor využil Pythagorovu větu (viz obr. 8.4), kde y je výška celé rostliny, x označuje část pod vodou, jejich rozdílem je výška nad hladinou b. Když se lotos odkloní, až květ zmizí pod hladinou, stane se výška rostliny y přeponou pravoúhlého trojúhelníku, jehož odvěsnami jsou dolní část x a vzdálenost a, kde se květ potopil.



Obr. 8.4 Problém lotosového květu.

[27] Podle [Col], str. 204, podobně i sloka Lila/vi.153, podle [Col], str. 66.

[28] V čínské *Matematice v devíti kapitolách* najdeme obdobný příklad s označením (9.5), podle [Hu], str. 213.

Bhāskara nejprve vyjádřil neznámou výšku rostliny $x + \frac{1}{2}(= y)$, pak podle Pythagorovy věty sestavil rovnici $(x + \frac{1}{2})^2 = x^2 + 2^2$, po umocnění dostal $x + \frac{1}{4} = 4$, odkud určil hloubku vody $x = \frac{15}{4}$ a výšku rostliny $y = \frac{17}{4}$.

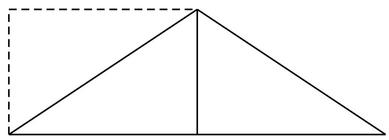
Pythagorova věta a pythagorejské trojice byly známé už v Mezopotámii, soupis několika z nich je doložen na tabulce Plimpton 322 (19. až 17. stol. př. n. l.). Čínský tvar obecných pythagorejských trojic můžeme vyjádřit vztahem podobným tomu, který uvedl Brahmagupta $\left(\frac{m^2+n^2}{2}, mn, m^2 - \frac{m^2+n^2}{2}\right)$ pro $m, n \in \mathbb{N}$ (viz [Hu]).

Rovnoramenný trojúhelník

Indičtí učenci nehledali pouze pythagorejské trojice, podobným způsobem vyjadřovali například strany rovnoramenného trojúhelníku[29]

$$\Big(m^2 + n^2, m^2 + n^2, 2(m^2 - n^2)\Big), \qquad \text{resp.} \qquad \Big(m^2 + n^2, m^2 + n^2, 4mn\Big).$$

Mahāvīra rozdělil obdélník úhlopříčkou[30] a vzniklé pravoúhlé trojúhelníky přiložil k sobě stejnou odvěsnou (viz obr. 8.5).



Obr. 8.5 Rovnoramenný trojúhelník.

Brahmagupta určil racionální strany rovnoramenného trojúhelníku s danou výškou v, p je libovolné racionální číslo[31]

$$\left(\frac{1}{2}\Big(\frac{v^2}{p} + p\Big), \frac{1}{2}\Big(\frac{v^2}{p} + p\Big), \frac{v^2}{p} - p\right)$$

s komentářem, že pro výšku $v = 8$ a $p = 4$ mají odvěsny délku 10, základna 12.

Taková odvození silně připomínají transformace prováděné při konstrukcích védských oltářů.

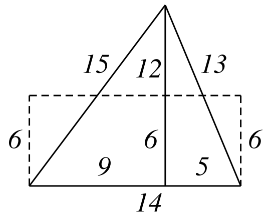
Obvod a obsah

Āryabhaṭa I. věnoval geometrii několik slok, například popsal pravidlo na výpočet obsahu trojúhelníku: *součin výšky a poloviny základny*[32]

$$S = v\frac{c}{2}. \tag{8.1}$$

[29] Viz sloky GaSaSa/vii.108$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 218, BrSpSi/xii.33, podle [Col], str. 306.
[30] Obecné délky stran a úhlopříčky obdélníku byly $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $u = m^2 + n^2$.
[31] Viz sloka BrSpSi/xviii.38, podle [Col], str. 340.
[32] Viz sloka Ar/ii.6, podle [Cla], str. 26. Āryabhaṭova pravidla i s komentáři jsou podrobně uvedena například v [Gu2].

Stejné pravidlo uvedl Brahmagupta v *Līlāvatī*,[33] komentátor Ganeśa je dokázal pomocí tohoto obrázku:



Pro praktické potřeby mnohdy stačilo počítat s nepřesným obsahem trojúhelníku, který byl v pravidlech Brahmagupty, Mahāvīry a dalších popsán jako[34]

$$S_p = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{c}{2}.$$

Protože poloviční součet stran a a b je vždy větší než výška v_c, je takto vypočítaná hodnota pouze přibližná.

Pro přesný výpočet obsahu trojúhelníku existovaly dvě metody,[35] z nichž první odpovídá vzorci (8.1) a druhou můžeme vyjádřit vzorcem[36]

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \qquad \text{kde} \quad s = \frac{1}{2}(a+b+c).$$

Na konci geometrické kapitoly práce *Gaṇita-sāra-saṁgraha* přidal Mahāvīra část nazvanou *Paiśācika* (ďábelsky těžké úlohy), kde byla uvedena pravidla pro řešení různých geometrických problémů, přičemž se počítalo jak s přesnými, tak s přibližnými vzorci. Z této části je i následující příklad týkající se rovnoramenného trojúhelníku.[37]

GaSaSa/vii.172$\frac{1}{2}$
Zdůrazňuje se zde, že v tomto případě je přesná velikost plochy 60 *a přibližná velikost je* 65. *Řekni mi, ó příteli, po výpočtu numerickou velikost stran* [hledaného] *rovnoramenného trojúhelníku.*

Označíme-li základnu hledaného trojúhelníku c, rameno a, výšku k základně v, pak

přesná velikost plochy:	$S = \frac{1}{2}cv = 60,$
přibližná velikost plochy:	$S_p = \frac{1}{2}c\,a = 65,$
Pythagorova věta:	$\left(\frac{1}{2}c\right)^2 = a^2 - v^2.$

Dnes bychom patrně z prvních dvou rovnic vyjádřili a, v a dosazením do třetí bychom z rovnice $c^4 = 16(S_p^2 - S^2)$ dopočítali c.

[33] Viz část sloky Lila/vi.164, podle [Col], str. 70.
[34] Viz sloky BrSpSi/xii.21, podle [Col], str. 295–296, GaSaSa/vii.7, podle [Ran], str. 187.
[35] Viz sloky BrSpSi/xii.21, podle [Col], str. 295–296, GaSaSa/vii.50, podle [Ran], str. 198.
[36] Autorem tohoto vzorce je Hérón Alexandrijský (1. stol. n. l.).
[37] Podle [Ran], str. 239, [Er], str. 109–110.

Podle pravidla, které je před příkladem uvedeno, se dá usoudit, že Mahāvīra postupoval jinak. Nejprve uvažoval trojúhelník $\left(\frac{c}{2} = \sqrt[4]{S_p^2 - S^2}\right)$-krát větší než hledaný. Protože

$$\sqrt{S_p^2 - S^2} = \sqrt{\frac{1}{4}c^2a^2 - \frac{1}{4}c^2v^2} = \frac{1}{2}c\sqrt{a^2 - v^2} = \frac{1}{2}c\frac{1}{2}c,$$

základna C a rameno A většího trojúhelníku měly délku

$$C = c\frac{1}{2}c = 2\sqrt{S_p^2 - S^2}, \qquad A = a\frac{1}{2}c = S_p.$$

Je-li $C = c\frac{1}{2}c$, pak $\frac{1}{2}C = \left(\frac{1}{2}c\right)^2$, a tedy $\frac{1}{2}c = \sqrt{\frac{1}{2}C}$. Odtud se pak snadno odvodily vztahy pro délku základny a strany hledaného trojúhelníku

$$c = \frac{C}{\frac{1}{2}c} = \frac{C}{\sqrt{\frac{1}{2}C}} = \frac{2\sqrt{S_p^2 - S^2}}{\sqrt{\sqrt{S_p^2 - S^2}}}, \qquad a = \frac{A}{\frac{1}{2}c} = \frac{A}{\sqrt{\frac{1}{2}C}} = \frac{S_p}{\sqrt{\sqrt{S_p^2 - S^2}}}.$$

V uvedeném příkladu tedy základna a strana hledaného trojúhelníku měly délku

$$c = \frac{2\sqrt{65^2 - 60^2}}{\sqrt{\sqrt{65^2 - 60^2}}} = \frac{2 \cdot 25}{5} = 10, \qquad a = \frac{65}{\sqrt{\sqrt{65^2 - 60^2}}} = \frac{65}{5} = 13.$$

Bhāskara II. uvedl několik úloh, kde pro strany pravoúhlého trojúhelníku byla předepsána určitá svazující podmínka. Takové problémy nebyly určené jednoznačně, čehož si byl autor dobře vědom. Příklad byl zařazen do algebraické *Bījagaṇity* a byl řešen algebraicky pomocí neznámé *yāvat-tāvat*.[38]

BiGa/iv.120 část
Příklad: Řekni [strany] *trojúhelníku, jehož plochu lze měřit stejným číslem jako přeponu.*

Zadání vede na soustavu dvou rovnic o třech neznámých

$$a^2 + b^2 = c^2,$$
$$\frac{1}{2}ab = c.$$

Jako základ Bhāskara II. zvolil pravoúhlý trojúhelník $(3, 4, 5)$ a přepokládal, že řešením je nějaký jeho násobek, tj. trojúhelník se stranami $(3p, 4p, 5p)$. Koeficient p představoval neznámou *yāvat-tāvat*. Bhāskara vypočítal obsah $\frac{1}{2} \cdot 3p \cdot 4p = 6p^2$, a protože měl být roven přeponě, muselo platit $6p^2 = 5p$.

[38] Podle [Col], str. 201.

Rovnici vydělil p, doslova *snížením obou stran společnou mírou*, $6p = 5$, odkud už snadno dopočítal $p = \frac{5}{6}$, $a = \frac{5}{2}$, $b = \frac{10}{3}$, $c = \frac{25}{6}$. V závěru připomněl, že *podobně na základě jiných předpokladů mohou být nalezeny další hodnoty.*

Neurčité úlohy týkající se pravoúhlého trojúhelníku řešil Hérón (např. úloha 24.5 v práci *Geometrica*) i Diofantos v knize VI *Aritmetiky* (viz [Wa1]).

Výška

Pro stanovení výšky v k základně c uvedl Mahāvīra:[39]

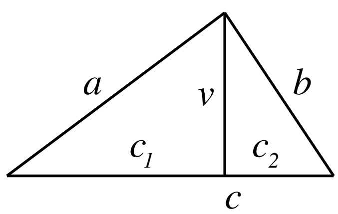
> **GaSaSa/vii.49**
> *Metoda saṅkramaṇa provedená se základnou a rozdílem čtverců stran děleným základnou dává hodnoty dvou úseků* [základny] *trojúhelníku. Vzdělaní učitelé říkají, že čverec rozdílu čtverců strany a* [odpovídajícího] *úseku dává míru kolmice* [výšky].

Platí $v^2 = a^2 - c_1^2 = b^2 - c_2^2$, tedy $a^2 - b^2 = c_1^2 - c_2^2 = (c_1 + c_2)(c_1 - c_2)$. Metoda *saṅkramaṇa* řešila soustavu dvou lineárních rovnic, kde je znám součet a rozdíl neznámých:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= c, \\ c_1 - c_2 &= \frac{a^2 - b^2}{c}, \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2}\left(c + \frac{a^2 - b^2}{c}\right), \\ c_2 &= \frac{1}{2}\left(c - \frac{a^2 - b^2}{c}\right). \end{aligned}$$

Pro druhou část tvrzení stačilo užít Pythagorovu větu (viz obr. 8.6)

$$v = \sqrt{a^2 - c_1^2} \qquad \text{nebo} \qquad v = \sqrt{b^2 - c_2^2}.$$



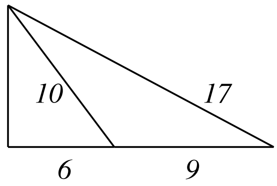
Obr. 8.6 Výška a úseky základny trojúhelníku.

K procvičení sloužil příklad trojúhelníku se základnou délky 14 a stranami 13 a 15, na stejném trojúhelníku demonstroval výpočet i Bhāskara II.[40] Tentýž trojúhelník se objevil rovněž u al-Chwárizmího.

[39] Podle [Ran], str. 197. Podobné vztahy však popisovali i Bhāskara I., Brahmagupta, Bhāskara II. a další, viz např. sloky Lila/vi.163–164, podle [Col], str. 69–70.

[40] Viz sloka GaSaSa/vii.53, podle [Ran], str. 199, a sloka Lila/vi.165, podle [Col], str. 71.

Bhāskara II. připojil výpočet pro trojúhelník, jehož výška leží vně.[41] V takovém případě byl rozdíl $c - \frac{a^2-b^2}{c}$ záporný, a to znamenalo, že příslušný díl leží od vrcholu v opačném směru. Konkrétně počítal s délkami stran 10 a 17, základnou 9, vypočítané úseky měly délku 6 a 15. Výpočet doplnil obrázkem.



Bhāskara II. dokonce počítal výšku tupoúhlého trojúhelníku s iracionálními délkami stran $a = \sqrt{10} - \sqrt{5}$, $b = \sqrt{6}$, $c = \sqrt{18} - 1$.[42] Příklad byl zařazen do algebraické práce *Bījagaṇita*, hlavním důvodem patrně bylo procvičení výpočtů s iracionalitami.

Podobnost

Vlastnosti podobných trojúhelníků Indové znali, pojem podobnosti však nedefinovali. Bhāskara II. podobnost využil při řešení příkladu:[43]

> **Lila/vi.160**
> *Řekni mi kolmici táhnoucí se od průsečíku provazů natažených vzájemně od kořenů k vrcholům dvou bambusů patnáct a deset loktů vysokých stojících na zemi v neznámé vzdálenosti.*

Úloze předcházelo pravidlo, kde Bhāskara podal návod, jak počítat. Označíme-li výšky bambusů h_1, h_2, jejich vzdálenost n, pak *kolmice z uzlu nití vedoucích od kořenů* [jednoho] *ke špičce* [druhého] se určila podle vztahu

$$v = \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2}$$

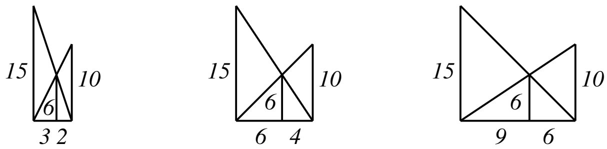
a rozdělila vzdálenost bambusů n na úseky délky

$$a_1 = \frac{h_1 n}{h_1 + h_2}, \qquad a_2 = \frac{h_2 n}{h_1 + h_2}.$$

[41] Viz sloka Lila/vi.166, podle [Col], str. 71–72.
[42] Viz sloka BiGa/iv.118, podle [Col], str. 199–200, komentář k úloze je též v [Er].
[43] Podle [Col], str. 68.

Na ukázku předložíme autorovo řešení.

Vyjádření: Bambus 15, 10. *Kolmice je nalezena 6.* $\left[v = \frac{15 \cdot 10}{15+10} = 6\right]$
Dále pro nalezení úseků na základně: nechť je vzdálenost předpokládána 5*; úseky vyjdou* 3, 2. $\left[n = 5,\ a_1 = \frac{15 \cdot 5}{15+10} = 3,\ a_2 = \frac{10 \cdot 5}{15+10} = 2\right]$
Nebo položením 10*, budou* 6 *a* 4. $\left[n = 10,\ a_1 = 6,\ a_2 = 4\right]$
Nebo uvažováním 15*, budou* 9 *a* 6. $\left[n = 15,\ a_1 = 9,\ a_2 = 6\right]$
Viz obrázky.



V každé situaci je kolmice stejná: totiž 6. *Důkaz je v každém případě pomocí pravidla tří: jestliže je strana rovná základně, bambus je výška, potom jaká bude výška pro* [daný] *úsek na základně?*

Kružnice opsaná a vepsaná

S kružnicí opsanou a vepsanou trojúhelníku se v indických textech často nesetkáváme. Brahmagupta počítal poloměr kružnice opsané danému trojúhelníku podle vztahu[44]

$$r = \frac{ab}{2v},$$

kde v je výška ke straně c. Není jasné, jakým způsobem byl vztah odvozen, důkaz založený na podobnosti trojúhelníků provedl až komentátor Pṛthūdakasvāmin.[45]

Mahāvīra uvedl pravidlo,[46] podle kterého bylo možné stanovit průměr kružnice vepsané danému trojúhelníku

$$d = \frac{S}{\frac{o}{4}},$$

kde o byl obvod a S byl obsah trojúhelníku.

8.1.2. Čtyřúhelník

Staří Indové rozlišovali pět různých druhů čtyřúhelníků, kterým říkali *caturaśra*:[47] čtverec nazývaný *sama-caturaśra*, obdélník neboli *āyata-caturaśra*,

[44] Viz sloka BrSpSi/xii.27, podle [Col], str. 299–300, stejné pravidlo uvedl Mahāvīra, viz sloka GaSaSa/vii.213$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 252.
[45] Důkaz je uveden např. v [DS3], str. 139.
[46] Viz sloka GaSaSa/vii.223$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 254.
[47] Někdy se pro čtyřúhelník užíval termín *caturbhuya*, podle [DS3], [MA].

rovnoramenný lichoběžník, tzv. *dvisama-caturaśra* (doslova čtyřúhelník se dvěma stranami stejnými), rovnoramenný lichoběžník se třemi stranami stejnými označený jako *trisama-caturaśra* a obecný čtyřúhelník *viṣama-caturaśra* (doslova čtyřúhelník s různými stranami). Strany obdélníku byly označeny jako *vistāra* (šířka) a *āyāma* (délka, resp. výška). Rovnoběžným stranám lichoběžníku se říkalo *bhū, bhūmi* (země), *mukha, vadana* (ústa), boční strany Āryabhaṭa I. nazýval *pārśva* (boky).Výška byla nazývána *avalambaka*, někdy *āyāma* (kolmice).[48]

V indických pravidlech se čtverec vyskytuje velmi zřídka, častěji se hovoří o obdélníku. Mahāvīra obdélník nazýval podlouhlý čtyřúhelník; jeho strany a úhlopříčku určoval pomocí prvků *bīja* (m, $n \in \mathbb{N}$) jako pythagorejskou trojici $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$. V tomto smyslu byly obdélník a pravoúhlý trojúhelník definovány stejně. Více pozornosti věnovali indičtí učenci lichoběžníkům. Připomeňme, že rovnoramenné lichoběžníky měly významné postavení při konstrukci védských oltářů.

Rovnoramenný lichoběžník

Jak už bylo řečeno, Brahmagupta uvažoval strany pravoúhlého trojúhelníku ve tvaru $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$. Podobným způsobem hledal vyjádření pro strany, úhlopříčky a výšku lichoběžníku, který vznikl připojením takových pravoúhlých trojúhelníků k obdélníku. Brahmagupta u rovnoramenného lichoběžníku stanovil (viz obr. 8.7):[49]

délku dolní základny $|AB| = \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{p} - p\right) + a = \frac{1}{2}\left(\frac{4m^2n^2}{p} - p\right) + (m^2 - n^2)$,

délku horní základny $|CD| = \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{p} - p\right) - a = \frac{1}{2}\left(\frac{4m^2n^2}{p} - p\right) - (m^2 - n^2)$,

délku ramen $|AD| = |BC| = c = m^2 + n^2$,

z konstrukce je zřejmé, že výška $|ED| = b = 2mn$.

Brahmagupta zřejmě jako základní uvažoval trojúhelník AED se stranami a, b, c, z něhož vytvořil obdélník $AEDH$ se stranami a, b. Jako druhý vzal obdélník $AFCH$ o stranách b, $d = \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{p} - p\right)$ s libovolně zvolenou hodnotou p, a přesunutím trojúhelníku ADH do polohy CBF dostal rovnoramenný lichoběžník $ABCD$. Z tohoto odvození snadno stanovil ještě

délku úhlopříčky $|AC| = |BD| = \sqrt{d^2 + b^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{4m^2n^2}{p} + p\right)$,

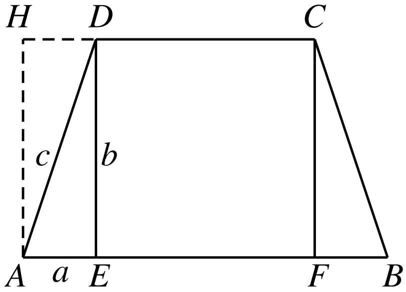
úseky dolní základny $|AE| = a = m^2 - n^2$,

$|EB| = d = \frac{1}{2}\left(\frac{4m^2n^2}{p} - p\right)$,

obsah $bd = mn\left(\frac{4m^2n^2}{p} - p\right)$.

[48] Terminologie je uvedena např. v [Ke1].

[49] Viz sloka BrSpSi/xii.36, podle [Col], str. 307.



Obr. 8.7 Rovnoramenný lichoběžník.

Vhodnou volbou konstant m, n, p bylo možné takto nalézt rovnoramenné lichoběžníky s celočíselnými stranami. Komentátor Pṛthūdakasvāmin ukázal, že pro trojici $(5, 12, 13)$ a zvolený parametr $p = 6$ má rovnoramenný lichoběžník delší základnu délky 14, kratší 4, strany 13 a výšku 12. Podobné pravidlo nalezneme také u Mahāvīry.[50]

Brahmagupta zformuloval pravidlo,[51] jak z pravoúhlého trojúhelníku se stranami $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$ odvodit délky stran rovnoramenného lichoběžníku se třemi stranami stejnými

$$\begin{aligned} & |BC| = |CD| = |DA| = c^2 = (m^2 + n^2)^2, \\ & |AB| = 3b^2 - a^2 = 3(2mn)^2 - (m^2 - n^2)^2 \\ \text{nebo} \qquad & |AB| = 3a^2 - b^2 = 3(m^2 - n^2)^2 - (2mn)^2, \end{aligned}$$

s tím, že čtvrtá strana může být jak delší základnou, tak kratší. V komentáři je uveden výpočet odvozený z trojúhelníku $(3, 4, 5)$, který vedl k hodnotám $(25, 25, 25, 39)$, resp. $(25, 25, 25, 11)$.

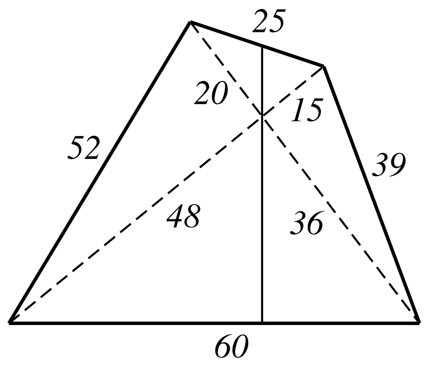
Brahmaguptovy čtyřúhelníky

Kromě lichoběžníků sestavoval Brahmagupta z pravoúhlých trojúhelníků s celočíselnými stranami ještě tětivové čtyřúhelníky s kolmými úhlopříčkami, tzv. „Brahmaguptovy“ čtyřúhelníky.

Uvažoval dva pravoúhlé trojúhelníky, například se stranami $(a,\ b,\ c)$, resp. $(x,\ y,\ z)$, strany každého z nich vynásobil postupně odvěsnami druhého, tím získal čtyři pravoúhlé trojúhelníky (xa, xb, xc), (ya, yb, yc), (ax, ay, az) a (bx, by, bz). Stejně dlouhé odvěsny těchto trojúhelníků přiložil k sobě, a tak sestrojil čtyřúhelník, jehož stranami byly přepony čtyř výše zmíněných trojúhelníků; nejdelší tvořila základnu, nejkratší horní stranu, a prostřední byly bočními stranami. Takto sestrojený čtyřúhelník je tětivový a délky jeho úhlopříček jsou celočíselné. Brahmagupta uvedl příklad, kde vycházel z trojúhelníků $(3, 4, 5)$ a $(5, 12, 13)$, po vynásobení $(15, 20, 25)$, $(36, 48, 60)$, $(15, 36, 39)$ a $(20, 48, 52)$,

[50] Viz sloka BrSpSi/xiii.99$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 213–214.
[51] Viz sloka BrSpSi/xii.37, podle [Col], str. 307.

hledaný čtyřúhelník měl základnu délky 60, horní stranu 25 a boční strany měly délky 39 a 52 (viz obr. 8.8).[52]



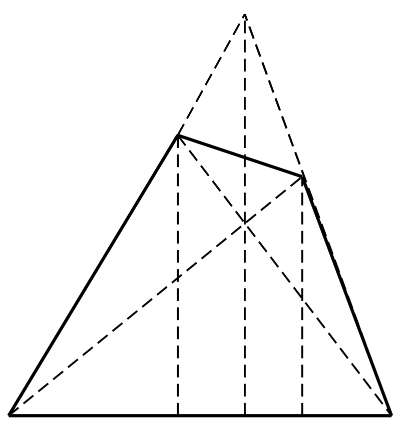
Obr. 8.8 Brahmaguptův čtyřúhelník.

Pro tento typ čtyřúhelníků platí Brahmaguptova věta, i když ji autor vyslovil bez předpokladů:[53]

BrSpSi/xii.31
Dolní [části] *úhlopříček jsou dvě strany trojúhelníku, základna* [čtyřúhelníku je základnou trojúhelníku]. *Jeho kolmice* [výška] *je dolním úsekem* [střední] *kolmice; horní úsek* [střední] *kolmice je polovinou součtu* [bočních] *kolmic zmenšených o dolní úsek* [střední kolmice].

Brahmaguptova věta říká, že kolmice k libovolné straně Brahmaguptova čtyřúhelníku procházející průsečíkem úhlopříček půlí protilehlou stranu.

Brahmagupta počítal i s tzv. „jehlovým“ útvarem – trojúhelníkem, který vznikl prodloužením bočních stran čtyřúhelníku až k jejich průsečíku, pak se využilo podobnosti a pomocí pravidla tří se určovaly délky různých příček a výšek (viz obr. 8.9).

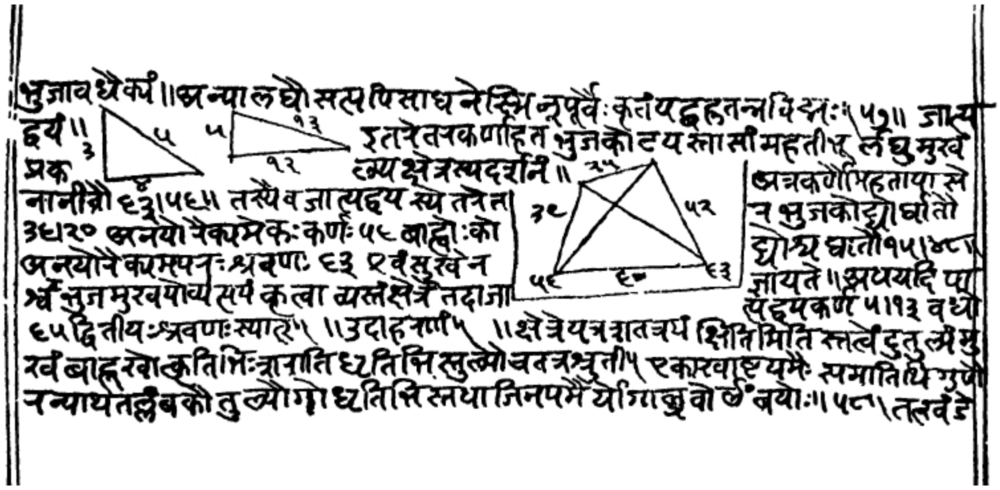


Obr. 8.9 „Jehlový“ útvar.

[52] Podle [Col], str. 300–301. Takové čtyřúhelníky později studovali Śrīdhara a Bhāskara II., kteří uvedli další příklady. Bhāskara II. z trojúhelníků $(3, 4, 5)$ a $(15, 8, 17)$ vytvořil čtyřúhelník se stranami $(68, 51, 40, 75)$, jehož úhlopříčky měly délky 77 a 85.

[53] Podle [Col], str. 302–303.

Bhāskara II. z pravoúhlých trojúhelníků skládal i tětivové čtyřúhelníky, jejichž úlopříčky nebyly kolmé.



Obr. 8.10 Rukopis *Līlāvatī* (kolem roku 1600), převzato z [Sm1].

Nārāyaṇa ve své práci *Gaṇi-takaumudī* uvedl tvrzení, že čtyřúhelník se stranami daných délek vepsaný do kružnice může mít právě tři různé délky úhlopříček. Uvedl i pravidlo odpovídající Thaletově větě a větě o obvodovém úhlu.[54]

Obvod a obsah

Pro výpočet obvodu a obsahu čtyřúhelníku existovaly metody přesné a přibližné. Označíme-li strany čtyřúhelníku a, b, c a d, pak jeho přibližný obsah byl dán vztahem[55]

$$S_p = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}. \tag{8.2}$$

Pro čtverec a obdélník dává pravidlo přesný výsledek, pro ostatní čtyřúhelníky jen přibližný. Stejným způsobem se počítal obsah i ve starém Egyptě (viz např. [BBV]).

Za přesnou metodu považoval Brahmagupta výpočet obsahu čtyřúhelníku podle algoritmu,[56] který mohl vzniknout zobecněním Hérónova vzorce

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}, \qquad \text{kde} \quad s = \frac{1}{2}(a+b+c+d).$$

Vzorec dává přesný výsledek jen pro tětivové čtyřúhelníky, Bhāskara II. uvedl, že čtyřúhelník není určen jen délkou stran, je třeba znát i diagonály. Přesné i přibližné vzorce pro obsah trojúhelníku byly speciálním případem odpovídajících vzorců pro čtyřúhelník, kde $d = 0$.

[54] Podle [SaTA], str. 67.

[55] Viz sloky BrSpSi/xii.21, podle [Col], str. 295–296, nebo GaSaSa/vii.50, podle [Ran], str. 187.

[56] Viz sloka BrSpSi/xii.21, podle [Col], str. 295–296.

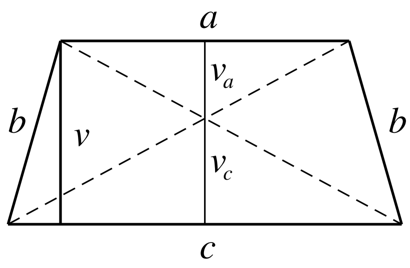
Pro obsah rovnoramenného lichoběžníku používal Āryabhaṭa I. pravidlo, kde a, c byly základny, v výška:[57]

$$S = v\frac{a+c}{2}. \tag{8.3}$$

Bhāskara II. upřesnil, že takto lze počítat obsah každého čtyřúhelníku se stejně dlouhými úhlopříčkami.[58]

Pro úseky výšky rozdělené průsečíkem úhlopříček platilo (viz obr. 8.11)[59]

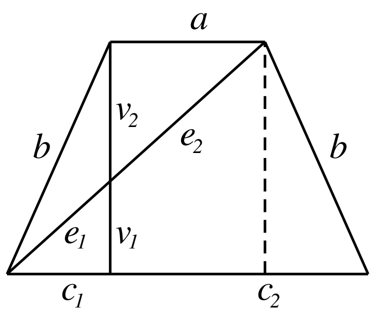
$$v_a = \frac{av}{a+c}, \qquad v_c = \frac{cv}{a+c}.$$



Obr. 8.11 Výška lichoběžníku.

Āryabhaṭovo pravidlo o úsecích výšky zobecnil Brahmagupta; v rovnoramenném lichoběžníku průsečík výšky v a úhlopříčky e dělí tyto úsečky na díly v_1, v_2, e_1, e_2 (viz obr. 8.12), pro něž platí:[60]

$$v_1 = \frac{c_1}{c_1+a}v, \qquad v_2 = \frac{a}{c_1+a}v, \qquad e_1 = \frac{c_1}{c_1+a}e, \qquad e_2 = \frac{a}{c_1+a}e.$$



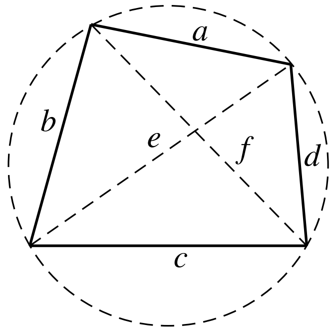
Obr. 8.12 Výška a úhlopříčka lichoběžníku.

Úhlopříčky obecného čtyřúhelníku vyjádřil Brahmagupta takto:[61]

$$e = \sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}} \qquad \text{nebo} \qquad f = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}.$$

[57] Viz sloka Ar/ii.8, podle [Cla], str. 27.
[58] Viz sloka Lila/vi.175, podle [Col], str. 74.
[59] Viz sloka Ar/ii.8, podle [Cla], str. 27.
[60] Viz sloka BrSpSi/xii.25, podle [Col], str. 298.
[61] Viz sloka BrSpSi/xii.28, podle [Col], str. 300.

Tyto vzorce jsou však správné pouze pro tětivové čtyřúhelníky (viz obr. 8.13).[62]



Obr. 8.13 Úhlopříčky obecného tětivového čtyřúhelníku.

Z uvedených vztahů pro úhlopříčky plyne Ptolemaiova věta, tj.

$$ef = ac + bd.$$

K určení poloměru kružnice opsané čtyřúhelníku užíval Brahmagupta následující vztahy:[63]

$$r = \frac{ae}{2v} \qquad \text{pro rovnoramenný lichoběžník,}$$

$$r = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{2} = \frac{\sqrt{b^2 + d^2}}{2} \qquad \text{pro obecný čtyřúhelník.}$$

Poslední vzorec však platí pouze pro takové tětivové čtyřúhelníky, jejichž úhlopříčky jsou kolmé – Brahmaguptovy čtyřúhelníky.[64]

Mahāvīra počítal s přesnými a přibližnými obsahy nejen u trojúhelníků, ale i u lichoběžníků; například u rovnoramenného lichoběžníku se základnami a, c, rameny b a výškou c znal přesný i přibližný obsah a hledal délky všech stran, přitom vycházel ze vztahů (8.2) a (8.3), tj.

$$S_p = \frac{a + c}{2} \cdot b, \qquad S = \frac{a + c}{2} \cdot v.$$

Podle pravidla[65] stanovil délky s libovolně zvolenou hodnotou p

$$a = \frac{p + \sqrt{S_p^2 - S^2}}{\sqrt{p}}, \qquad c = \frac{p - \sqrt{S_p^2 - S^2}}{\sqrt{p}}, \qquad b = \frac{S_p}{\sqrt{p}}. \tag{8.4}$$

K tomuto vyjádření mohl dospět tak, že uvažoval rozdíl čtverců přibližného a přesného obsahu, kde rozdíl čtverců ramena a výšky nahradil podle Pythagorovy věty

$$S_p^2 - S^2 = \left(\frac{a + c}{2}\right)^2 (b^2 - v^2) = \left(\frac{a + c}{2}\right)^2 \left(\frac{a - c}{2}\right)^2.$$

[62] Vlastnostem tětivových čtyřúhelníků je věnován článek [MA].

[63] Viz sloka BrSpSi/xii.26, podle [Col], str. 299.

[64] Podle [Pl1], str. 146–147.

[65] Viz sloka GaSaSa/vii.165$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 237.

Rozdíl obsahů si mohl představit jako součin $p\frac{S_p^2-S^2}{p}$ a porovnáním činitelů dostal

$$\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = p, \qquad \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 = \frac{S_p^2 - S^2}{p},$$

odkud odmocněním a jednoduchou úpravou dostal vztahy pro strany lichoběžníku (8.4). V příkladu[66] volil hodnoty $S = 5$, $S_p = 13$, $p = 16$, které vedly k výsledku $a = 7$, $b = \frac{13}{4}$, $c = 1$.

Dvojice útvarů

Mahāvīra řešil úlohy, kde hledal strany dvou obdélníků, jejichž obvody a obsahy byly v daném poměru, pravidlo se týkalo těchto případů:[67]

(1) Obdélníky mají stejné obvody a obsah prvního je dvojnásobkem obsahu druhého, tj. $o_1 = o_2$, $S_1 = 2S_2$.
(2) Obsahy obdélníků jsou si rovny a obvod druhého je dvojnásobkem obvodu prvního, tj. $2o_1 = o_2$, $S_1 = S_2$.
(3) Obvod druhého obdélníku je dvojnásobkem obvodu prvního a obsah prvního je dvojnásobkem obsahu druhého, tj. $2o_1 = o_2$, $S_1 = 2S_2$.

Takové problémy vedly na soustavu dvou rovnic o čtyřech neznámých, v pravidle se mluví o *libovolně zvoleném násobiteli*, jehož hodnota byla volena tak, aby řešení vyšlo celočíselné.

Analogické pravidlo uvedl i pro rovnoramenné trojúhelníky, kde bylo třeba vyřešit soustavu čtyř rovnic o šesti neznámých – dvě rovnice se týkaly daných poměrů mezi obvody a obsahy, k nim byly přidány další dvě vyplývající z Pythagorovy věty pro polovinu základny, výšku a rameno.[68] Podobné úlohy řešil Hérón v knize *Geometrica*.

Mnohoúhelníky

Kromě trojúhelníků a čtyřúhelníků se objevily i vztahy týkající se mnohoúhelníků. Bhāskara II. uvedl pravidlo na výpočet délky strany pravidelného mnohoúhelníku vepsaného do kružnice s poloměrem r.[69]

Mahāvīra počítal přibližný obsah plochy konvexního n-úhelníku vepsaného do kružnice,[70] došel k výsledku, který lze vyjádřit vzorcem

$$S_p = (n-1)\frac{r^2}{3n}.$$

Poznamenejme, že v první knize *Metrica* se výpočtem obsahů pravidelných n-úhelníků (pro $n = 5, 6, \ldots, 12$) zabýval Hérón.

[66] Viz sloka GaSaSa/vii.166$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 238.
[67] Viz sloky GaSaSa/vii.131$\frac{1}{2}$–133, podle [Ran], str. 225–226.
[68] Viz sloka GaSaSa/vii.137, podle [Ran], str. 227.
[69] Viz sloky Lila/vi.209–211, podle [Col], str. 91.
[70] Viz sloka GaSaSa/vii.39, podle [Ran], str. 194–195.

8.1.3. Měření stínů

Měření stínů neboli *chāyā*, přesněji měření pomocí stínů gnómonu, bylo ve staré Indii užíváno k určení výšky, vzdálenosti nebo k měření času. Často bývalo popisováno v aritmetických dílech.

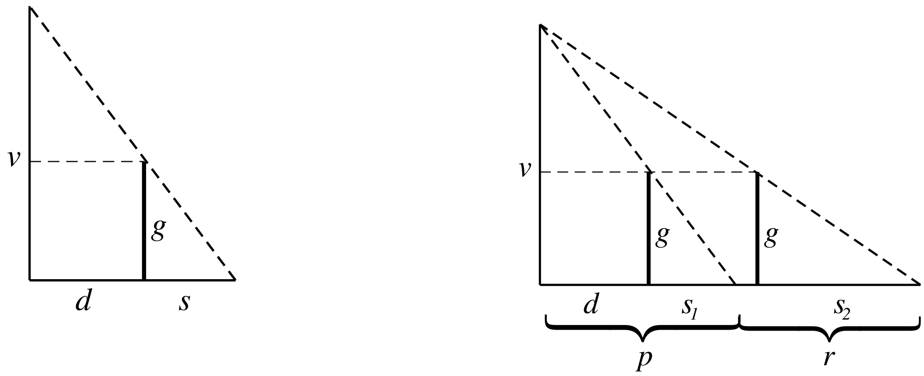
Āryabhaṭa I. uvedl, jak vypočítat délku stínu gnómonu[71]

$$s = g\frac{d}{v-g},$$

kde g byla výška gnómonu, v výška světelného zdroje, d vzdálenost gnómonu od světla (viz obr. 8.14 vlevo).[72]

K určení výšky a vzdálenosti velmi vzdáleného objektu (světelného zdroje) se používaly dva stejně vysoké gnómony umístěné v různých vzdálenostech. Pak platily vztahy:[73]

$$p = \frac{s_1 r}{s_2 - s_1}, \qquad v = \frac{pg}{s_1}.$$



Obr. 8.14 Měření pomocí stínů gnómonu.

Analogické vzorce uvedli i Brahmagupta a Bhāskara II. Brahmagupta ukázal, jak se dá pomocí stínu přibližně určit denní čas. Jestliže v daný den je doba mezi východem a západem slunce d, výška gnómonu je g, délka stínu s, pak čas t uplynulý od východu Slunce (ráno) nebo zbývající do západu Slunce (odpoledne) je[74]

$$t = \frac{d}{2(\frac{s}{g}+1)}.$$

Metoda není příliš přesná, pokud jsou ráno a večer stíny hodně dlouhé, a v poledne, když Slunce nestojí přímo nad hlavou.

[71] Viz sloka Ar/ii.15, podle [Cla], str. 31.

[72] Výšku světelného zdroje v nazýval *bhujā* a vzdálenost $d+s$ *koṭī*, tyto výrazy používal pro odvěsny pravoúhlého trojúhelníku.

[73] Viz sloka Ar/ii.16, podle [Cla], str. 32.

[74] Viz sloka BrSpSi/xii.52, podle [Col], str. 317.

Podobné problémy týkající se určování vzdáleností a výšky nepřístupných předmětů byly řešeny v čínské *Matematické klasice mořského ostrova.*[75]

8.1.4. Kruh, kružnice

Nejstarší název pro kruh je *maṇḍala* nebo *pari-maṇḍala*, obvodu kružnice se říkalo *pariṇāha* (někdy *samapariṇāha* nebo *samaparidhi*), průměr byl *viṣkambha* nebo *vyāsa* (šířka), střed se nazýval *madhya*. Později byl termín *pari-maṇḍala* určen pro elipsu, kružnice byla *vṛtta* a střed *kendra*, poloměr byl označován slovy *vyāsārdha* nebo *viṣkambhārdha.*[76]

Pro výpočet obsahu kruhu uvedl Āryabhaṭa I. pravidlo, které můžeme vyjádřit vzorcem[77]

$$S = \frac{o}{2} \cdot \frac{d}{2}, \quad \text{kde } o \text{ byla délka kružnice}, d \text{ její průměr.}$$

Zajímavé je Āryabhaṭovo tvrzení, že kružnice o průměru 20 000 má délku 62 832,[78] odkud plyne velmi přesná hodnota $\pi = 3,1416$.

Pozdější autoři, například Brahmagupta, Mahāvīra a Śrīdhara, formulovali pravidla pro přibližný a přesný výpočet obvodu a obsahu kruhu vyjádřená v závislosti na průměru d:[79]

$$o_p = 3d, \qquad S_p = 3\left(\frac{d}{2}\right)^2,$$

$$o = \sqrt{10}d, \qquad S = o\frac{d}{4} = \sqrt{10}\,\frac{d^2}{4}.$$

Pro hrubé výpočty se zpravidla volila hodnota $\pi = 3$, „přesné“ vztahy počítaly s $\pi = \sqrt{10}$. Hodnota $\sqrt{10}$ pro π se používala v Číně a je možné, že odtud ji staří Indové převzali.

Bhāskara II. pro přibližný a přesný obvod kruhu užíval vzorce[80]

$$o_p = \frac{22}{7}d, \qquad o = \frac{3\,927}{1\,250}d.$$

75 Komentátor *Matematiky v devíti kapitolách* Liu Hui ji původně zařadil jako desátou kapitolu, viz [Hu], [Ju].

76 Podle [DS3]. V [Ke1] jsou uvedeny termíny *samavṛtta* pro kružnici a *āyatavṛtta* pro elipsu, H. T. Colebrooke zmiňoval ještě názvy *vartula* (kružnice), *vistāra* (průměr), *paridhi*, *nēmi* (obvod), viz [Col].

77 Viz sloka Ar/ii.7, podle [Cla], str. 27.

78 Viz sloka Ar/ii.10, podle [Cla], str. 28.

79 Například sloky BrSpSi/xii.40, podle [Col], str. 308, GaSaSa/vii.19, podle [Ran], str. 189.

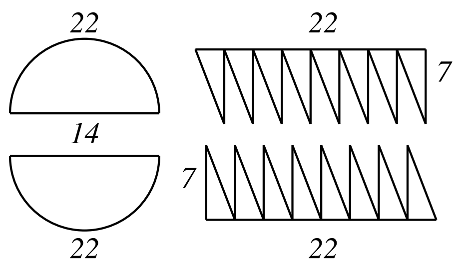
80 Viz sloka Lila/vi.201, podle [Col], str. 87.

Vztah pro přesný obvod kruhu je zkrácená podoba vyjádření Āryabhaṭy. B. L. van der Waerden se domníval (viz [Wa1]), že tyto hodnoty mohly být převzaty od Apollónia z Pergy (asi 262 až 190 př. n. l.).

Pomocí obvodu stanovil Bhāskara II. obsah kruhu vzorcem[81]

$$S = \frac{d}{4} o.$$

Komentátor Ganeśa (16. stol.) vysvětlil, že číslo $\frac{3\,927}{1\,250}$ udávající poměr mezi obvodem kruhu a jeho průměrem bylo vypočítáno tak, že se do kružnice vepsal pravidelný šestiúhelník a postupně se zdvojnásoboval počet stran až se získal pravidelný $6 \cdot 2^6 = 384$-úhelník. Vzorec pro výpočet obsahu kruhu zdůvodnil geometricky, obsah kruhu je stejný jako obsah obdélníku, jehož jedna strana je $\frac{d}{2}$ a druhá $\frac{o}{2}$ (viz obrázek):[82]



Podobné úvahy najdeme i v Archimédově spisu *Měření kruhu.*[83] Archimédés však nejen do kruhu vepisoval mnohoúhelníky, ale i opisoval, proto získal pro hodnotu π velmi přesný dolní i horní odhad $\frac{25\,344}{8\,069} < \pi < \frac{29\,376}{9\,347}$.

Komentátor čínského textu *Matematika v devíti kapitolách* Liu Hui rovněž vepisoval kruhu pravidelné n-úhelníky, na rozdíl od Archiméda však porovnával obsahy (viz [Hu]). Obsah kruhu S je totiž větší než obsah vepsaného n-úhelníku S_n a zároveň menší než obsah útvaru vytvořeného z n-úhelníku s připojenými obdélníky sestrojenými nad stranami a opsanými zbývajícím kruhovým úsečím $S_n < S < S_{n/2} + 2(S_n - S_{n/2})$. Pomocí 96-úhelníku tak dospěl k odhadu $314\frac{64}{625} < 100\pi < 314\frac{169}{625}$.

Mahāvīra uvedl i příklad, kde byl znám součet k průměru kruhu, jeho obvodu a obsahu, a úkolem bylo stanovit hodnotu každé z těchto veličin.[84]

Pokud označíme obvod kruhu x, pak průměr je $\frac{x}{3}$ a obsah $\frac{x^2}{12}$. Bylo třeba nalézt řešení rovnice

$$\frac{x^2}{12} + \frac{x}{3} + x = k, \qquad \text{tj.} \qquad x^2 + 16x - 12k = 0.$$

[81] Viz sloka Lila/vi.203, podle [Col], str. 88.

[82] Podle [Col], str. 88.

[83] Text přeložil Miloslav Valouch a byl publikován česky ve výroční zprávě gymnázia v Litomyšli z roku 1903, viz [BS].

[84] Viz sloka GaSaSa/vii.30, podle [Ran], str. 192, v příkladu uvažuje přibližné hodnoty obvodu a obsahu.

Podle Mahāvīry bylo řešením

$$x = \sqrt{12k + 64} - 8.$$

Výpočtem obsahu kruhu se zabývali už ve starém Egyptě, jejich postup můžeme dnes vyjádřit vzorcem $S = (d - \frac{1}{9}d)^2 = \frac{64}{81}d^2$, kde d je průměr. V Mezopotámii k výpočtu obsahu kruhu sloužil vztah $S = \frac{1}{12}o^2$, přičemž pro obvod kruhu platilo $o = \pi d$, kde za π byla nejčastěji brána hodnota 3, tedy $S = \frac{1}{12}(\pi d)^2 = \frac{3}{4}d^2$ (viz [BBV]). V první kapitole čínské *Matematiky v devíti kapitolách* jsou uvedena čtyři pravidla pro výpočet obsahu kruhu:[85]

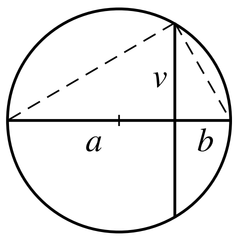
$$S = \frac{o}{2}\frac{d}{2} = \frac{o\,d}{4} = 3\frac{d\,d}{4} = \frac{o\,o}{12}.$$

Kruhová úseč, tětiva

Indičtí učenci také studovali kruhovou úseč; její výšce říkali *śara* (šíp) a tětivu, která tuto úseč vymezuje, nazývali *jyā* nebo *jīvā*. Příslušný kruhový oblouk byl označen jako *dhanuḥṛṣṭha* (luk).[86] Āryabhaṭa I. uvedl, že *tětiva šestiny obvodu je rovna poloměru.*[87] Popsal také vztah mezi průměrem kružnice a tětivou na něj kolmou, dnes známý jako Eukleidova věta o výšce (viz obr. 8.15)[88]

$$v^2 = ab, \tag{8.5}$$

kde v je polovina tětivy, tzv. *ardhajyā*, a, b jsou úseky průměru rozděleného tětivou.

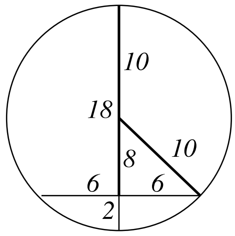


Obr. 8.15 Eukleidova věta o výšce.

Pṛthūdakasvāmin, komentátor Brahmaguptovy práce *Brāhma-sphuta-siddhānta*, vysvětloval příklad o zlomeném bambusu (viz odstavec 8.1.1). K řešení však přistupoval jinak než Mahāvīra a Bhāskara II., výšku počítal s využitím tětivy kružnice. Bambus byl vysoký $a = 18$ loktů, po zlomení dopadl vršek do vzdálenosti $v = 6$ loktů od kořenů, úkolem bylo určit délku obou dílů zlomeného

[85] Pravidla (1.XIV), (1.XIVa), (1.XIVb), (1.XIVc), podle [Hu], str. 65–71.
[86] Podle [SA], podobnou terminologii používal al-Chwárizmí.
[87] Viz sloka Ar/ii.9, podle [Cla], str. 27.
[88] Viz sloka Ar/ii.17, podle [Cla], str. 34.

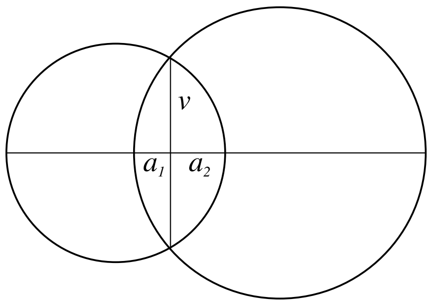
bambusu.[89] Autor si při výpočtu uvědomil, že zlomená část opíše kužnici, pro niž je spojnice spadlého vrcholu s dolním koncem bambusu, tj. vzdálenost v, polovinou tětivy. Tato tětiva rozdělí průměr kružnice na dva úseky, z nichž jeden přestavuje výšku bambusu a a druhý výšku h kruhové úseče pod bambusem (viz obr. 8.16). Proto mohl využít vztah (8.5), v našem značení $v^2 = ah$, a vypočítat $h = \frac{v^2}{a} = \frac{6^2}{18} = 2$. Přičtením k výšce bambusu pak dostal průměr kružnice $d = a + h = 18 + 2 = 20$, polovinou byla zlomená část bambusu $y = \frac{1}{2}d = 10$, dolní část pak získal rozdílem $x = 18 - y = 8$. Komentátor výpočet doplnil obrázkem.



Obr. 8.16 Úloha o zlomeném bambusu.

Āryabhaṭa I. uvažoval dvě kružnice s různými průměry, které mají společnou tětivu, a počítal délky úseků, na něž tato tětiva rozdělí společnou část průměrů $a = a_1 + a_2$ (viz obr. 8.17). Bez jakéhokoliv odvození uvedl tyto vztahy, kde d_1 je průměr menší kružnice, d_2 větší[90]

$$a_1 = \frac{(d_2 - a)a}{(d_1 - a) + (d_2 - a)}, \qquad a_2 = \frac{(d_1 - a)a}{(d_1 - a) + (d_2 - a)}.$$



Obr. 8.17 Tětiva společná dvěma kružnicím.

Zřejmě využil předchozí vztah pro výšku

$$a_1(d_1 - a_1) = a_2(d_2 - a_2) = v^2,$$

kde za a_2 dosadil $a_2 = a - a_1$,

$$a_1(d_1 - a_1) = (a - a_1)(d_2 - a + a_1),$$

[89] Podle [Col], str. 309.

[90] Viz sloka Ar/ii.18, podle [Cla], str. 34–35. Podobné vyjádření se vyskytuje i u Mahāvīry, sloka GaSaSa/vii.231$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 256–257.

po úpravě

$$a_1 d_1 - a_1^2 = a d_2 - a^2 + a a_1 - a_1 d_2 + a_1 a - a_1^2,$$
$$a_1(d_1 - a + d_2 - a) = a d_2 - a^2,$$
$$a_1 = \frac{(d_2 - a)a}{(d_1 - a) + (d_2 - a)}.$$

Mahāvīra uvedl přesné i přibližné hodnoty k měření kruhové úseče.[91] Výška úseče je označena v, resp. v_p (přibližná hodnota), délka tětivy t, resp. t_p, délka oblouku l, resp. l_p. V dnešní symbolice odpovídají vzorcům:

$$S_p = (t_p + v_p)\frac{v_p}{2}, \qquad t_p = \sqrt{l_p^2 - 5v_p^2}, \qquad v_p = \sqrt{\frac{l_p^2 - t_p^2}{5}}, \qquad l_p = \sqrt{5v_p^2 + t_p^2},$$

$$S = t\frac{v}{4}\sqrt{10}, \qquad t = \sqrt{l^2 - 6v^2}, \qquad v = \sqrt{\frac{l^2 - t^2}{6}}, \qquad l = \sqrt{6v^2 + t^2}.$$

Vztah $S_p = (t_p + v_p)\frac{v_p}{2}$ zmiňoval už Hérón v *Metrice* a byl též uveden v čínské *Matematice v devíti kapitolách*. Výpočty týkající se kruhové úseče jsou rovněž zachovány na babylónské tabulce BM 85184 (viz [BBV], [Wa1]).

Podobné, o něco přesnější vztahy uvedli i Śrīdhara a Āryabhaṭa II.:[92]

$$S = \frac{\sqrt{10}}{3} \cdot \frac{t+v}{2} v, \qquad S = \frac{1}{3} \cdot \frac{22}{7} \cdot \frac{t+v}{2} v.$$

Mahāvīra popsal i postupy, podle nichž se počítal obsah mezikruží s vnitřním průměrem d a vnějším D podle vzorců[93]

$$S_p = \frac{1}{2}(o + O)\frac{D-d}{2}, \qquad S = \frac{1}{6}(o + O)\frac{m}{2}\sqrt{10},$$

kde o a O jsou obvody vnitřní a vnější kružnice. Stejný přibližný vzorec pro obsah mezikruží se používal i v čínské matematice.

Mahāvīra ještě zkoumal obsahy útvarů ve tvaru čočky (konvexní i konkávní), ulity, tvaru sloního klu i různé kombinace kruhových a trojúhelníkových či čtyřúhelníkových útvarů. Ulitou rozuměl útvar složený ze dvou půlkruhů (viz obr. 8.18), z nichž menší průměr označíme d a větší D. Délku $m = D - d$ Mahāvīra nazýval „ústa“, rozdíl $D - \frac{m}{2} = D - \frac{D-d}{2} = \frac{D+d}{2}$ pak představoval „průměrný“ průměr. Pro výpočet obvodu a obsahu ulity uvedl přibližný a přesný vztah:[94]

$$o_p = 3\left(D - \frac{m}{2}\right), \qquad o = \sqrt{10}\left(D - \frac{m}{2}\right),$$

[91] Viz sloky GaSaSa/vii.43, GaSaSa/vii.45, GaSaSa/vii.73$\frac{1}{2}$, GaSaSa/vii.74$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 195–196, 203–204.

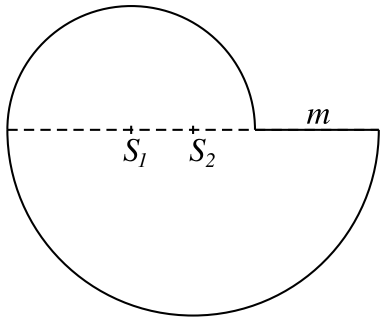
[92] Podle [Ju], str. 163.

[93] Viz sloky GaSaSa/vii.28, GaSaSa/vii.80$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 191, 205.

[94] Viz sloky GaSaSa/vii.23, GaSaSa/vii.65$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 190, 201.

$$S_p = \frac{1}{3}\left(\frac{o_p}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{m}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\left(D - \frac{m}{2}\right)\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{m}{2}\right)^2,$$

$$S = \sqrt{10}\left[\left(\frac{1}{2}\left(D - \frac{m}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{m}{4}\right)^2\right].$$



Obr. 8.18 Ulita.

8.1.5. Elipsa

Mahāvīra popsal pravidla pro výpočet obvodu a obsahu elipsy. Dnes jsme zvyklí značit hlavní poloosu a a vedlejší b, Mahāvīra však užíval termíny *delší* a *kratší průměr* ($D = 2a$, $d = 2b$). Obvod a obsah počítal podle přibližných nebo přesných vzorců[95]

$$o_p = 2\left(D + \frac{d}{2}\right), \qquad S_p = \frac{d}{4}o_p = \frac{d}{4}2\left(D + \frac{d}{2}\right),$$

$$o = \sqrt{6d^2 + 4D^2}, \qquad S = \frac{d}{4}o = \frac{d}{4}\sqrt{6d^2 + 4D^2}.$$

I vzorce, které Mahāvīra pokládal za přesné, jsou jen přibližné.

8.2. Tělesa, objemy těles

V indických aritmetických textech byla rovněž obsažena část pojednávající o tělesech – byla to určení o výkopech, zásobách cihel a hromadách obilí. Výkopy byly zpravidla ve tvaru komolého jehlanu, hromady cihel měly tvar kvádru, jehlanu nebo komolého jehlanu, odlišnost byla v tom, že u výkopů se udávala hloubka, u zásob cihel výška, hromady obilí měly tvar kužele. Uvedené vzorce jsou často pouze přibližné, ale dostatečné pro praktické potřeby.

Pro objem hranolu a válce existoval už v *Śulbasūtrách* základní vzorec: „objem je roven součinu základny a výšky“. Staří Indové nerozlišovali jehlan a kužel, pro oba typy používali obecný název *sūci* (špička).[96]

[95] Viz sloky GaSaSa/vii.21, GaSaSa/vii.63$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 189, 201.

[96] Stejný termín byl běžný i v Číně – *čtvercová špička* nebo *kruhová špička*, podle [Hu].

Āryabhaṭa dospěl k výpočtu objemu čtyřstěnu[97] zobecněním pravidla pro obsah trojúhelníku (8.1). Byl-li obsah podstavy S, pak objem jehlanu počítal analogicky jako u trojúhelníku: *poloviční součin plochy základny (trojúhelníku) a výšky*[98]

$$V = \frac{Sh}{2}, \quad \text{kde } h \text{ byla výška.}$$

Tento vzorec je chybný, Brahmagupta už uvedl správný vzorec:[99]

$$V = \frac{1}{3} Sh.$$

8.2.1. Výkopy

Část o výkopech neboli *khāta* se zabývala výpočtem objemu výkopů. Výkop býval ve tvaru hranolu nebo komolého jehlanu s obdélníkovou nebo čtvercovou podstavou, nahoře větší, směrem dolů se zužoval. Při výpočtu objemu byly zadány *dairghya* (délka), *vistāra* (šířka obou podstav) a *bēdha* nebo *bēdhana* (hloubka). Různí autoři používali různé postupy, například pro objem komolého jehlanu s obdélníkovými podstavami $a \times b$ a $A \times B$ najdeme výpočty podle vzorců[100]

$$V_1 = h\left(\frac{a+A}{2}\right)\left(\frac{b+B}{2}\right), \qquad V_2 = h\frac{ab+AB}{2}, \qquad V = V_1 + \frac{1}{3}(V_2 - V_1),$$

objem V_1 byl označován jako praktický, V_2 hrubý a V přesný.

Bhāskara II. popsal přibližný výpočet objemu tak, že z dané délky a šířky v různých hloubkách vypočítal průměrnou délku, průměrnou šířku a průměrnou hloubku, hledaný objem pak byl součinem těchto průměrných rozměrů. Tedy jestliže v hloubkách $h_1, h_2, \dots, h_n$ byly naměřeny délky $a_1, a_2, \dots, a_n$ a šířky $b_1, b_2, \dots, b_n$, pak přibližný („průměrný") objem byl

$$V = \frac{h_1 + h_2 + \dots + h_n}{n} \cdot \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}.$$

Za pravidlem uvedl tento příklad:[101]

Lila/vii.219–220
Příklad: dvě sloky. Kde délka dutiny mající zešikmené stěny je naměřená deset, jedenáct a dvanáct loktů na třech různých místech, její šířka je šest, pět a sedm a její hloubka dva, čtyři a tři. Řekni mi, příteli, kolik prostorových loktů je obsaženo v tomto výkopu.

---

[97] Jehlan s trojúhelníkovou podstavou byl nazýván šestihranné těleso, tzv. *ghana ṣaḍasri* nebo jen *ṣaḍasri*), podle [DS3].

[98] Viz sloka Ar/ii.6, podle [Cla], str. 26.

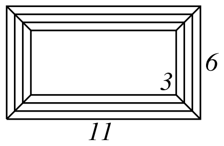
[99] Viz sloka BrSpSi/xii.44, podle [Col], str. 312.

[100] Viz sloky BrSpSi/xii.45–46, podle [Col], str. 312–313. Brahmagupta však tvar podstavy nespecifikoval, uváděl jen *plocha základny* a *plocha čela*.

[101] Podle [Col], str. 97–98.

Vyjádření:	12	11	10	*délka*
	7	5	6	*šířka*
	3	4	2	*hloubka*

Zde nalezení průměrné míry, šířka je 6 *loktů, délka* 11 *a hloubka* 3, *viz.*



Odpověď: Počet prostorových loktů je nalezen 198.

K výpočtu přesného objemu komolého jehlanu formuloval jiné pravidlo,[102] které počítá s délkou A a šířkou B horní základny, délkou a a šířkou b dolní základny a hloubkou h. Objem se pak vypočítal postupem, který můžeme vyjádřit vzorcem

$$V = \frac{AB + ab + (A + a)(B + b)}{6} \cdot h.$$

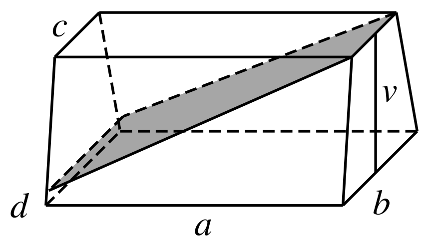
Pro objem jehlanu uvedl: *třetina objemu pravidelného tělesa je objemem špičatého.*

Přibližné „průměrné" vzorce byly postačující k tomu, aby se podle objemu vykopané zeminy stanovil potřebný počet dělníků. Objemy pravidelných i nepravidelných hranolů se počítaly i v Mezopotámii, kde se pomocí přibližných vzorců určoval počet pracovníků nutný k vykopání koryta či postavení hráze (viz [BBV]).

8.2.2. Zásoby cihel

U výpočtů týkajících se zásob cihel, tzv. *citi*, se kromě objemu určoval i celkový počet cihel nebo počet jejich vrstev. Často se musely ještě převádět jednotky, rozměry cihly byly totiž dány v menších jednotkách než rozměry hromady. Mahāvīra předložil příklad, kdy horní část zdi pevnosti byla zbořená vichřicí a počítal objem stojící a zbořené části (viz obr. 8.19), kde a je délka zdi, b a c dolní a horní šířka, d a v výšky nezbořené zdi:[103]

$$V_s = \frac{av}{6}(2c + b + d), \qquad V_z = \frac{av}{6}(2c + b - d).$$



Obr. 8.19 Zeď zničená vichřicí.

[102] Viz sloka Lila/vii.221, podle [Col], str. 97–98.

[103] Viz sloka GaSaSa/viii.54$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 271.

8.2.3. Hromady obilí

Určení týkající se hromad obilí se nazývalo *rāśi*. Hromada obilí měla tvar kužele, pro výpočet jejího objemu se používaly většinou jen přibližné vzorce, kde se předpokládalo, že výška v je rovna obvodu kruhové základny dělenému 9, 10 nebo 11 podle toho, o jaký typ obilí se jednalo. Brahmagupta rozlišoval obilí „vousaté“, hrubé a jemné. Objem pak počítal jako[104]

$$V = v\left(\frac{o}{6}\right)^2,$$

což odpovídá vzorci $V = \frac{1}{3}v\pi r^2$, kde se uvažuje $\pi = 3$, neboť podle přibližného vzorce pro obvod kružnice platilo $o = 3d = 6r$.

Śrīdhara uvedl pravidlo na výpočet objemu komolého kužele[105]

$$V = \frac{v}{24}\sqrt{10(d^2 + D^2 + (d+D)^2)^2} \quad \text{neboli} \quad V = \frac{\sqrt{10}}{3}(r^2 + R^2 + rR)v,$$

kde v je výška a d, D, r, R jsou průměry, resp. poloměry podstav. Zde je $\pi = \sqrt{10}$.

8.2.4. Koule

Nejstarší vzorec pro povrch koule byl uveden ve ztracené práci, jejímž autorem byl Lalla. Jeho vzorec $S = \pi r^2 \cdot 2\pi r = 2\pi^2 r^3$ byl velmi nepřesný a Bhāskara II. jej s kritikou odmítl. Sám předložil správný vzorec: *čtyřnásobek obsahu největšího kruhu*, což můžeme vyjádřit vzorcem[106]

$$S = 4\frac{do}{4} = do.$$

Āryabhaṭa I. počítal objem koule jako

$$V = S\sqrt{S}.$$

I v tomto případě se jednalo jen o přibližnou hodnotu.

Mahāvīra později stanovil pro objem koule přibližný i „přesný“ vztah:[107]

$$V_p = \left(\frac{d}{2}\right)^3 \frac{9}{2}, \qquad V = \left(\frac{d}{2}\right)^3 \frac{9}{2} \cdot \frac{9}{10}.$$

[104] Viz sloka BrSpSi/xii.50, podle [Col], str. 316.
[105] Podle [DS3], str. 175.
[106] Viz sloka Lila/vi.203, podle [Col], str. 88.
[107] Viz sloka GaSaSa/viii.28$\frac{1}{2}$, podle [Ran], str. 265.

Bhāskara II. k objemu koule uvedl:[108]

$$V = \frac{1}{6}Sd, \qquad V = \left(1 + \frac{1}{21}\right)\frac{d^3}{2}.$$

Druhý vzorec se snadno odvodí z prvního, pokud se uvažuje $\pi = \frac{22}{7}$. Pak obvod hlavní kružnice je $o = \frac{22}{7}d$, povrch koule $S = 4 \cdot \frac{1}{4}od = od$, tedy

$$V = \frac{1}{6}Sd = \frac{1}{6}od^2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{22}{7}d^3 = \frac{22}{42}d^3 = \left(1 + \frac{1}{21}\right)\frac{d^3}{2}.$$

Hodnotu $\pi = \frac{22}{7}$ doporučoval Bhāskara II. pro praktické výpočty, zatímco pro přesnější volil $\pi = \frac{3\,927}{1\,250}$ (viz odstavec 8.1.4).

Vzorec pro objem koule $V = \frac{9}{16}d^3 = \frac{9}{2}r^3$ byl znám i ve staré Číně, dokonce byl chybně interpretován jako $V = \frac{\pi^2}{2}r^3$, protože pro praktické účely bylo zvykem počítat s hodnotou $\pi = 3$ (viz [Gu6]).

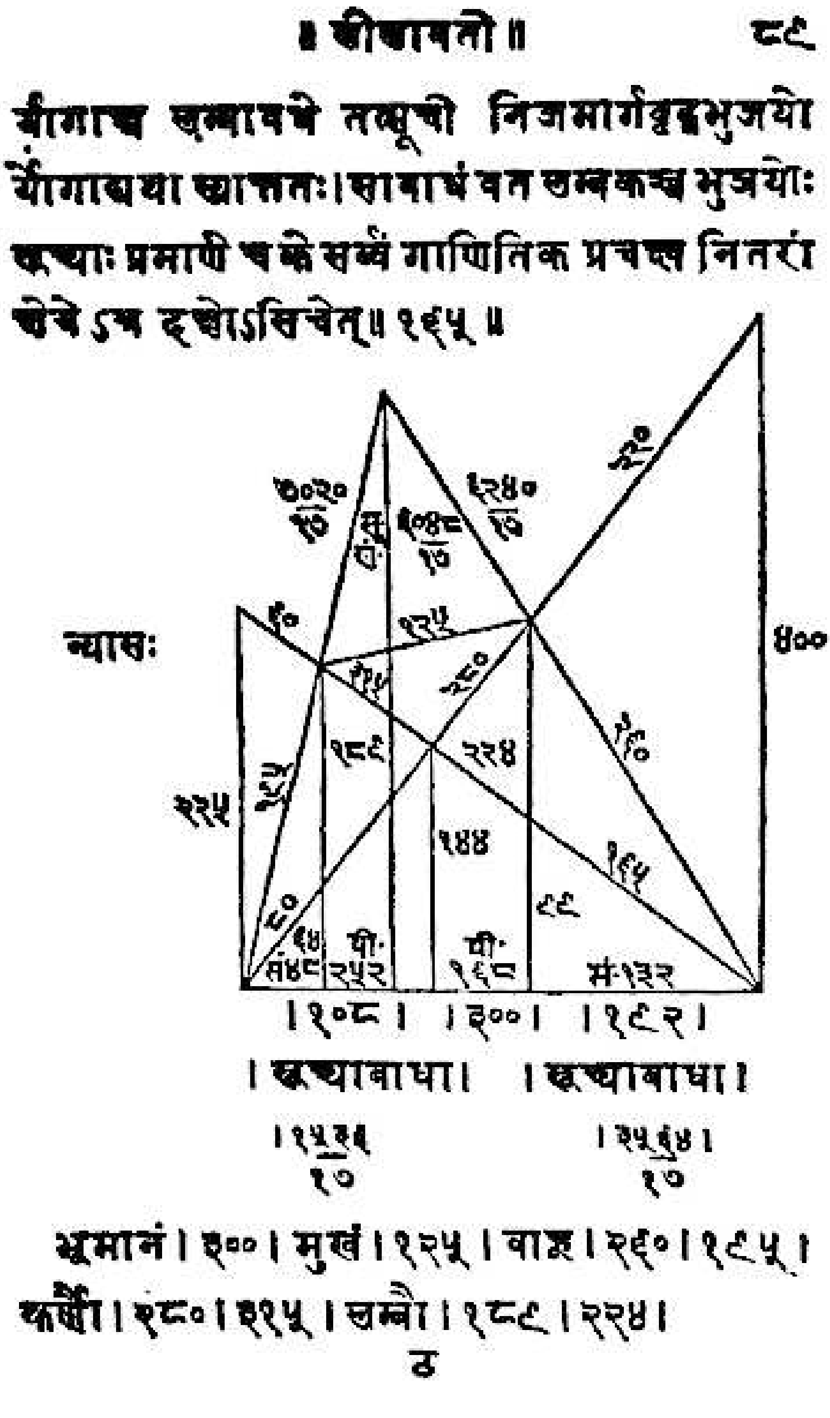
Shrnutí

Středověký indický přístup ke geometrii, podobně jako egyptský, mezopotámský a čínský, byl odlišný od řeckého. Zatímco ve starém Řecku byla geometrie brána jako základ myšlení, byla vybudována na základě axiomatické teorie pomocí základních prvků – bodů a základních principů – konstrukcí pravítkem a kružítkem (viz [Eu], [BeM1], [BeJ2]) popsaných v Eukleidových *Základech* (4. až 3. stol. př. n. l.), indický pohled byl více aritmetický. Není proto překvapivé, že geometrické úlohy byly řazeny k aritmetice. Geometrie často sloužila praktickým potřebám – výpočet velikosti pozemku, odměna za vykopaný příkop, a k tomu leckdy stačily jen přibližné hodnoty. O praktickém významu geometrie svědčí i fakt, že při řezání dřeva se uvažoval nejen počet a velikost řezů, ale také tvrdost. Například Brahmagupta podle druhu zpracovávaného dřeva násobil řezy různými koeficienty, aby lépe vystihl náročnost práce (viz [Col]).

Rovněž ve staré Číně byla geometrie zaměřená na potřeby běžného života, určovala se velikost pravoúhlých, kruhových i nepravidelných polí, „průměrné“ vzorce byly využívány při výpočtu nepravidelného hranolu (hradby, hráze, vodního příkopu apod.). Při ohodnocení práce na výkopu se přihlíželo k tomu, zda zemina je hutná nebo kyprá.

Arabská geometrie byla silně ovlivněna Eukleidovými *Základy* a Hérónem. Al-Chwárizmí provedl klasifikaci trojúhelníků a čtyřúhelníků podle *Základů*. Některé al-Chwárizmího úlohy jsou shodné s Hérónovými včetně numerických hodnot, například výpočet obsahu rovnostranného trojúhelníku o straně délky 10 (viz [Ju]). Pravidla týkající se kruhové úseče včetně terminologie vznikla patrně podle indických.

[108] Viz sloky Lila/vi.203, Lila/vi.205–206, podle [Col], str. 88–89.



Obr. 8.20 První tištěné vydání *Līlāvatī* z roku 1832, převzato z [Sm1].

LITERATURA

[ArV] Archimedes, *Počet pískový*, přeložil M. Valouch, Výroční zpráva gymnázia v Litomyšli 1905/06, reprint, Praha: Matice technická, 1993.

[As1] *Edicts of Ashoka*, Wikipedia, [online], 2013, [cit. 12.8.2013], <`http://en.wikipedia.org/wiki/Edicts_of_Ashoka`>.

[As2] *Pillars of Ashoka*, Wikipedia, [online], 2008, [cit. 1.9.2013], <`http://en.wikipedia.org/wiki/Pillars_of_Ashoka?oldid=212428864`>.

[BaMi] Babuāji Miśra M., *The Siddhānta-śekhara of Śrīpati. A Sanskrit Astronomical Work of the 11th Century*, Calcutta: Calcutta University Press, 1932.

[Bag1] Bag A. K., *Binomial Theorem in Ancient India*, Indian Journal of History of Science **1(1)** (1966), 68–74.

[Bag2] ———, *The Method of Integral Solution of Indeterminate Equations of the Type: $by = ax \pm c$ in Ancient and Medieval India*, Indian Journal of History of Science **12(1)** (1977), 1–16.

[Bag3] ———, *Ritual Geometry in India and Its Parallelism in Other Cultural Areas*, Indian Journal of History of Science **25(1–4)** (1990), 4–19.

[Bag4] ———, *Al-Biruni on Indian Arithmetic*, Indian Journal of History of Science **10(2)** (1975), 174–184.

[BaSh] Bag A. K., Shen K. S., *Kuṭṭaka and Qiuyishu*, Indian Journal of History of Science **19(4)** (1984), 397–405.

[Bar] Barbeau E. J., *Pells Equation*, New York: Springer, 2003.

[BaT] Bártlová T., *Archimédova úloha o dobytku*, in Z. Halas (ed.): Archimédés. Několik pohledů do jeho života a díla. Dějiny matematiky, svazek 54, Praha: Matfyzpress, 2012, 99–107.

[Baš] Bašmakova I. G., *Diofant i diofantovy uravněnija*, Moskva: Nauka, 1972.

[BBV] Bečvář J., Bečvářová M., Vymazalová H., *Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie*, Dějiny matematiky, svazek 23, Praha: Prometheus, 2003.

[BS] Bečvář J., Štoll I., *Archimedes. Největší vědec starověku*, Velké postavy vědeckého nebe, svazek 11, Praha: Prometheus, 2005.

[BeJ1a] Bečvář J., *Gerbert z Aurillacu – Silvestr II*, in J. Bečvář (ed.): Matematika ve středověké Evropě. Dějiny matematiky, svazek 19, Praha: Prometheus, 2001, 185–230.

[BeJ1b] ———, *Leonardo Pisánský – Fibonacci*, in J. Bečvář (ed.): Matematika ve středověké Evropě. Dějiny matematiky, svazek 19, Praha: Prometheus, 2001, 265–340.

[BeJ2] ———, *Hrdinský věk řecké matematiky*, in J. Bečvář, E. Fuchs (ed.): Historie matematiky I, Seminář pro vyučující na středních školách, Jevíčko 19. 8.–22. 8. 1993, Dějiny matematiky, svazek 1, Brno: Prometheus, 1994, 21–101.

[BeJ3] ———, *Hrdinský věk řecké matematiky II*, in J. Bečvář, E. Fuchs (ed.): Historie matematiky II, Seminář pro vyučující na středních školách, Jevíčko 21. 8.–24. 8. 1995, Dějiny matematiky, svazek 7, Praha: Prometheus, 1997, 7–28.

[BeJ4] ———, *Výpočty odmocnin ve starověku*, in Z. Halas (ed.): Archimédés. Několik pohledů do jeho života a díla. Dějiny matematiky, svazek 54, Praha: Matfyzpress, 2012, 111–123.

[BeM1] Bečvářová M., *Eukleidovy Základy, jejich vydání a překlady*, Dějiny matematiky, svazek 20, Praha: Prometheus, 2002.

[BeM2] ———, *Středověké početní algoritmy*, in Bečvář J. (ed.): Matematika ve středověké Evropě. Dějiny matematiky, svazek 19, Praha: Prometheus, 2001, 231–364.

[Beh] Behari R., *Āryabhata as a Mathematician*, Indian Journal of History of Science **12(2)** (1977), 147–149.

[BhMu] Bhanu Murthy T. S., *A Modern Introduction to Ancient Indian Mathematics*, New Delhi: New Age International Publishers, 1992.

[BhRK] Bhattacharyya R. K., *Brahmagupta: The Ancient Indian Mathematician*, in B. S. Yadav, M. Mohan (ed.): Ancient Indian Leaps Into Mathematics, New York: Springer, 2011, 185–192.

[Bo] Boyer C. B., *A History of Mathematics*, New York: John Wiley & sons, 1968.

[BuA1] Bürk A., *Das Āpastamba-Śulba-Sūtra*, Zeitschrift D.M.G **55** (1901), 543–591.

[BuA2] ———, *Das Āpastamba-Śulba-Sūtra*, Zeitschrift D.M.G **56** (1902), 327–391.

[BuDM] Burton D. M., *Elementary Number Theory*, fourth edition, New York: McGraw-Hill, 1998.

[Cal] Caland W., *The Baudhāyana Śrauta Sūtra Belonging to the Taittirīya Saṃhitā*, Calcutta: The Baptist Mission Press, 1904.

[Cla] Clark W. E., *The Āryabhaṭīya of Āryabhaṭa*, Chicago, Illinois: The University of Chicago Press, 1930.

[Col] Colebrooke H. T., *Algebra, with Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhascara*, London: John Murray, 1817.

[CR] O'Connor J., Robertson E., *Index of Ancient Indian Mathematics*, [online], 2005, [cit. 7.9.2006], <`http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Indexes/Indians.html`>.

[Dan] Dani S. G., *On the Pythagorean Triples in the Śulvasūtras*, Current Science **85(2)** (2003), 219–224.

[Dat] Datta B., *Ancient Hindu Geometry: The Science of the Sulba*, New Delhi: Cosmo publications, 1993.

[DS1] Datta B., Singh A. N., *History of Hindu Mathematics (part I)*, Lahore: Molital Banarsidass, 1935.

[DS2] ———, *History of Hindu Mathematics (part II)*, Lahore: Molital Banarsidass, 1938.

[DS3] ———, *Hindu Geometry (revised by Kripa Shankar Shukla)*, Indian Journal of History of Science **15(2)** (1980), 121–188.

[DS4] ———, *Magic Squares in India*, Indian Journal of History of Science **27(1)** (1992), 51–70.

[DS5] ———, *Use of Permutations and Combinations in India*, Indian Journal of History of Science **27(3)** (1992), 231–249.

[DS6] ———, *Use of Series in India*, Indian Journal of History of Science **28(2)** (1993), 103–129.

[DS7] ———, *Surds in Hindu Mathematics*, Indian Journal of History of Science **28(3)** (1993), 253–264.

[DS8] ———, *Approximate Values of Surds in Hindu Mathematics*, Indian Journal of History of Science **28(3)** (1993), 265–275.

[Di] Dickson L. E., *History of the Theory of Numbers. Vol. II Diophantine Analysis*, Providence, Rhode Island: AMS Chelsea Publishing, 1992.

[Do] Dongre N. G., *Metrology and Coinage in Ancient India and Contemporary World*, Indian Journal of History of Science **29(3)** (1994), 361–373.

[Du] Dutta A. K., *Nārāyaṇa's Treatment on Varga-prakṛti*, Indian Journal of History of Science **47(4)** (2012), 633–677.

[DvP] Dvivedi P., *The Gaṇita-kaumudī by Nārāyaṇa Paṇḍita (Part II)*, Benares: Government Sanskrit College, 1942.

[DvS] Dvivedi S., *Mahásiddhánta, a Treatise on Astronomy by Áryabhat*, Benares: Chandraprabha Press, 1910.

[En1] *Āryabhaṭa I*, Complete Dictionary of Scientific Biography, Encyclopedia.com, [online], 2008, [cit. 23.1.2012], <`http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830900173.html`>.

[En2] *Brahmagupta*, Complete Dictionary of Scientific Biography, Encyclopedia.com, [online], 2008, [cit. 17.1.2012], <`http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830900597.html`>.

[En3] *Bhāskara I*, Complete Dictionary of Scientific Biography, Encyclopedia.com, [online], 2008, [cit. 17.1.2012], <`http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830900438.html`>.

[En4] *Lalla*, Complete Dictionary of Scientific Biography, Encyclopedia.com, [online], 2008, [cit. 17.1.2012], <`http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830902431.html`>.

[En5] *Mahāvīra*, Complete Dictionary of Scientific Biography, Encyclopedia.com, [online], 2008, [cit. 17.1.2012], <`http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830902766.html`>.

[En6] *Śrīdhara*, Complete Dictionary of Scientific Biography, Encyclopedia.com, [online], 2008, [cit. 23.1.2012], <`http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830904113.html`>.

[En7] *Āryabhaṭa II*, Complete Dictionary of Scientific Biography, Encyclopedia.com, [online], 2008, [cit. 23.1.2012], <`http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830900174.html`>.

[En8] *Śrīpati*, Complete Dictionary of Scientific Biography, Encyclopedia.com, [online], 2008, [cit. 23.1.2012], <`http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830904114.html`>.

[En9] *Bhāskara II*, Complete Dictionary of Scientific Biography, Encyclopedia.com, [online], 2008, [cit. 17.1.2012], <`http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830900439.html`>.

[En10] *Nārāyana*, Complete Dictionary of Scientific Biography, Encyclopedia.com, [online], 2008, [cit. 23.1.2012], <`http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830903108.html`>.

[Er] Ernestová M., *Soustavy algebraických rovnic a jejich řešení ve starověku a středověku*, disertační práce, Praha: Universita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, 2005.

[Eu] *Eukleidovy Základy (Elementa)*, přeložil F. Servít, Praha: Nákladem Jednoty českých mathematiků, 1907.

[FSW] Farmer S., Sproat R., Witzel M., *The Collapse of the Indus-Script Thesis: The Myth of a Literate Harappan Civilization*, Electronic Journal of Vedic Studies **11(2)** (2004), [online], 19–57, [cit. 2.9.2013], <`http://www.ejvs.laurasianacademy.com/ejvs1102/ejvs1102article.pdf`>.

[Fi] Filipský J., *Indie*, Praha: Libri, 2008.

[FV] Filipský J., Vacek J., *Ašóka*, Praha: Svoboda, 1970.

[Fu] Fuchs E., *Magické čtverce aneb Od knihy I-ťing k internetové současnosti*, in Matematika, fyzika a vzdělávání, Brno: VUTIUM, 2004, 29–63.

[Gu1] Gupta R. C., *Circumference of the Jambudvipa in Jaina Cosmography*, Indian Journal of History of Science **10(1)** (1975), 38–46.

[Gu2] ______, *On Some Mathematical Rules from the Aryabhatiya*, Indian Journal of History of Science **12(2)** (1977), 200–206.

[Gu3] ______, *Spread and Triumph of Indian Numerals*, Indian Journal of History of Science **18(1)** (1983), 23–38.

[Gu4] ______, *Some Equalization Problems from the Bakhshali Manuscript*, Indian Journal of History of Science **21(1)** (1986), 51–61.

[Gu5] ______, *Sundaraja's Improvements of Vedic Circle-square Conversion*, Indian Journal of History of Science **28(2)** (1993), 81–101.

[Gu6] ______, *India's Contributions to Chinese Mathematics Through the Eighth Century C.E.*, in B. S. Yadav, M. Mohan (ed.): Ancient Indian Leaps Into Mathematics, New York: Springer, 2011, 33–44.

[HaT1] Hayashi T., *The Bakhshali Manuscript: An Ancient Indian Mathematical Treatise*, Groningen: Egbert Forsten, 1995.

[HaT2] ______, *Govindasvāmin's Arithmetic Rules Cited in the Kriyākramakarī of Śaṅkara and Nārāyaṇa*, Indian Journal of History of Science **35(3)** (2000), 181–223.

[HaJ] Hays J., *Fact and Details: Indus Civilization and Culture*, [online], 2012, [cit. 12.8.2013], <`http://factsanddetails.com/Asian.php?itemid=2575`>.

[Hea] Heath T., *A History of Greek Mathematics, Volume I, From Thales to Euclid*, Oxford: Clarendon Press, 1921.

[Hen] Henderson D. W., *Square Roots in the Sulbasutra*, in C. A. Gorini (ed.): Geometry at Work, Papers in Applied Geometry, MAA Notes Number 53, 2000, 39–45.

[HI] *History of India*, [online], 2008, [cit. 2.9.2013], <`http://www.indohistory.com/geography.html`>.

[Hoe] Hoernle R., *On the Bakhshālī Manuscript*, Vienna: Alfred Hölder, 1887.

[Hu] Hudeček J., *Matematika v devíti kapitolách. Překlad, vysvětlivky a úvod*, Dějiny matematiky, svazek 37, Praha: Matfyzpress, 2008.

[Cha] Channabasappa M. N., *On the Square Root Formula in the Bakhshali Manuscript*, Indian Journal of History of Science **11(2)** (1976), 112–124.

[Chi] Chinčin A. J., *Řetězové zlomky*, Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952.

[JaBS] Jain B. S., *On the Ganita-sara-sangraha of Mahavira (c. 850 A. D.)*, Indian Journal of History of Science **12(1)** (1977), 17–32.

[JaLC] Jain L. C., *On Certain Mathematical Topics of the Dhavala Texts (the Jaina School of Mathematics)*, Indian Journal of History of Science **11(2)** (1976), 85–111.

[JaP] Jain P., *Jaina Mathematicians and their Treatise: with Reference to Indian Mathematics*, International Journal of Physical and Mathematical Sciences **2(1)** (2011), 57–63.

[Jha] Jha V. N., *Indeterminate Analysis in the Context of the Mahāsiddhānta of Āryabhaṭa II*, Indian Journal of History of Science **29(4)** (1994), 565–578.

[Jo1] Joseph G. G., *The Crest of the Peacock*, London: Penguin Books, 1990.

[Jo2] ———, *A Brief History of Zero*, Iranian Journal for the History of Science **6** (2008), 37–48.

[Ju] Juškevič A. P., *Dějiny matematiky ve středověku*, Praha: Academia, 1977.

[Kak1] Kak S. C., *Computational Aspects of the Aryabhata Algoritm*, Indian Journal of History of Science **21(1)** (1986), 62–71.

[Kak2] ———, *On the Chronology in Ancient India*, Indian Journal of History of Science **22(3)** (1987), 222–234.

[Kak3] ———, *Some Early Codes and Ciphers*, Indian Journal of History of Science **24(1)** (1989), 1–7.

[Kak4] ———, *Three Old Indian Values of* π, Indian Journal of History of Science **32(4)** (1997), 307–314.

[Kak5] ———, *yamātārājabhānasalagām: An Interesting Combinatoric Sūtra*, Indian Journal of History of Science **35** (2000), 123–127.

[KakS] Kak S., *The Golden Mean and the Physics of Aesthetics*, in B. S. Yadav, M. Mohan (ed.): Ancient Indian Leaps Into Mathematics, New York: Springer, 2011, 111–120.

[KaHR] Kāpadīā H. R., *Gaṇita Tilaka by Śrīpati*, Baroda: Oriental Istitute, 1937.

[Kap] Kapur K., *History of Ancient India (Portraits of a Nation)*, New Delhi: Sterling Publishers Pvt. Ltd, 2010.

[Kat] Katz V., *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam*, Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 2007.

[Kay1] Kaye G. R., *The Bakhshali manuscript: a study in medieval mathematics (parts 1-2)*, Calcutta: Government of India Central Publication Branch, 1927.

[Kay2] ———, *The Bakhshali manuscript: a study in medieval mathematics (part 3)*, Calcutta: Government of India Central Publication Branch, 1933.

[Ke1] Keller A., *Expounding the Mathematical Seed: A Translation of Bhāskara I, on the Mathematical Chapter of the Āryabhatīya*, Basel: Birkhäuser, 2006.

[Ke2] ———, *On Sanskrit Commentaries Dealing with Mathematics (Fifth-Twelfth Century)*, in F. Bretelle-Establet (ed.): New corpuses in the History of Science, Boston: Springer, 2010.

[Ke3] ———, *Making Diagrams Speak, in Bāskara I's Commentary on the Āryabhatīya*, Historia Mathematica **32(3)** (2005), 275–302.

[KM] Kenoyer J. M., Meadow R. H., *Harappa*, [online], 1996–2008, [cit. 12.8.2013], <`http://www.harappa.com/`>.

[Ken] Kenoyer J. M., *Mohenjo-Daro!*, [online], 2005–2009, [cit. 12.8.2013], <`http://www.mohenjodaro.net/`>.

[Kn] Knudsen T. L., *On the Application of Areas in the Śulbasūtras*, in B. S. Yadav, M. Mohan (ed.): Ancient Indian Leaps Into Mathematics, New York: Springer, 2011, 63–73.

[KSS] Křížek M., Somer L., Šolcová A., *Kouzlo čísel: od velkých objevů k aplikacím*, Praha: Academia, 2011.

[Ku1] Kulkarni R. P., *Value of π Known to Śulbasūtrakāras*, Indian Journal of History of Science **13(1)** (1978), 32–41.

[Ku2] ———, *Geometry as Known to the People of Indus Civilization*, Indian Journal of History of Science **13(2)** (1978), 117–124.

[Len] Lenstra H. W., Jr., *Solving the Pell Equation*, Notices Amer. Math. Soc. **49(2)** (2002), 182–192.

[Lo1] Lo L., *Brahmi*, Ancientscripts.com, [online], 1996–2012, [cit. 23.1.2012], <`http://www.ancientscripts.com/brahmi.html`>.

[Lo2] Lo L., *Kharosthi*, Ancientscripts.com, [online], 1996–2012, [cit. 23.1.2012], <`http://www.ancientscripts.com/kharosthi.html`>.

[Maj1] Majumdar P. K., *A Rationale of Brāskara I's Method of Solving $ax \pm c = by$*, Indian Journal of History of Science **13(1)** (1978), 11–17.

[Maj2] ———, *A Rationale of Brahmagupta's Method of Solving $ax + c = by$*, Indian Journal of History of Science **16(2)** (1981), 111–117.

[MaJ] Malina J. a kol., *Antropologický slovník*, Ústav antropologie, Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity, [online], 2009, [cit. 12.1.2012], <`http://is.muni.cz/do/1431/UAntrBiol/el/antropos/slovnik.html`>.

[MaVM] Mallayya V. M., *Arithmetic Operation of Division with Special Reference to Bhaskaras Lilavati and its Commentators*, Indian Journal of History of Science **32(4)** (1997), 315–324.

[Man] *Mānava-Kalpa-Sūtra; Being a Portion of this Ancient Work on Vaidic Rites, together with the Commentary of Kumārila-Swāmin*, London: N. Trübner and Co, 1861.

[MS1] Mishra V., Singh S. L., *Theorem of Square on the Diagonal in Vedic Geometry and its Application*, Indian Journal of History of Science **31(2)** (1996), 157–166.

[MS2] ———, *First Degree Indeterminate Analysis in Ancient India and its Application by Vīrasena*, Indian Journal of History of Science **32(2)** (1997), 127–133.

[MW] Monier Williams M. Sir, *Sanskrit-English Dictionary*, University of Cologne, [online], 2008, [cit. 15.8.2013], <`http://www.sanskrit-lexicon.uni-koeln.de/monier/`>.

[Mu] Mukherjee R. N., *Background to the Discovery of the Symbol for Zero*, Indian Journal of History of Science **12(2)** (1977), 225–231.

[MA] Mukhopadhyay A., Adhikari M. R., *The Concept of Cyclic Quadrilaterals: its Origin and Development in India (from the Age of Sulba Sutras to Bhaskara I.)*, Indian Journal of History of Science **32(1)** (1997), 53–68.

[MFM] Müller F. M., *Anthropological Religion*, New Delhi: J. Jetley for Asian Educational services, 1986.

[Ne] Nene P. G. S., *The Śulbasūtra of Kātyāyana: with the bhashya of Karka and Vritti of Mahidhara*, Benares: Jaya Krishnadas-haridas gupta, 1936.

[Pa] Parahmans S. A., *Units of Measurements in Medieval India and their Modern Equivalents*, Indian Journal of History of Science **19(1)** (1984), 27–36.

[Pl1] Plofker K., *Mathematics in India*, Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 2009.

[Pl2] ——, *Fazārī: Muḥammad ibn Ibrāhīm al-Fazārī*, in T. Hockey et al. (ed.): The Biographical Encyclopedia of Astronomers, New York: Springer, 2007, 362–363.

[Pl3] ——, *Ya'qūb ibn Ṭāariq*, in T. Hockey et al. (ed.): The Biographical Encyclopedia of Astronomers, New York: Springer, 2007, 1250–1251.

[Pra] Kolektiv autorů, *Prameny života*, Praha: Vyšehrad, 1982.

[Pri] Price J. F., *Applied Geometry of the Śulba Sūtras*, in C. A. Gorini (ed.): Geometry at Work, Papers in Applied Geometry, MAA Notes Number 53, 2000, 46–55.

[Ran] Rangacarya M., *Ganita-sara-sangraha of Mahaviracarya with English Translation and Notes*, Madras: Government Press, 1912.

[RB] Rouse Ball W. W., *A Short Account of the History of Mathematics, Vol. 2, Special Topics of Elementary Mathematics*, New York: Dover Publications Inc., 1960.

[SA] Sarasvati Amma T. A., *Geometry in Ancient and Medieval India*, Delhi: Molital Banarsidass, 1979.

[SaTA] Saraswathi T. A., *Development of Mathematical Ideas in India*, Indian Journal of History of Science **4(1–2)** (1969), 59–78.

[SaKV] Sarma K. V., *Āryabhaṭa: his Name, Time and Provenance*, Indian Journal of History of Science **36(3–4)** (2001), 105–115.

[Se] Sengupta R., *Influence of Certain Harappan Architectural Features on Some Texts of Early-historic Period*, Indian Journal of History of Science **6(1)** (1971), 23–26.

[ShRS] Shah R. S., *Jaina Mathematics: Lore of Large Numbers*, Bulletin of the Marathwada Mathematical Society **10(1)** (2009), 43–61.

[ShAM] Shastri A. M., *Sanskrit Literature Known to Al-Biruni*, Indian Journal of History of Science **10(2)** (1975), 111–138.

[Shu1] Shukla K. S., *The Pāṭīgaṇita of Śrīdharācarya*, Lucknow: Lucknow University, 1959.

[Shu2] Shukla K. S., *Mahābhāskarīya, Edited and Translated into English, with Explanatory and Critical Notes, and Comments*, Lucknow: University, Department of Mathematics Lucknow, 1960.

[SiAN] Singh A. N., *On the Use of Series in Hindu Mathematics*, Osiris **1** (1936), 606–628.

[SiP1] Singh P., *Varga-prakṛti – the Cakravāla Method of its Solution and the Regular Continued-fractions*, Indian Journal of History of Science **19(1)** (1984), 1–17.

[SiP2] ——, *Nārāyaṇa's Treatment of Magic Squares*, Indian Journal of History of Science **21(2)** (1986), 123–130.

[SiSL] Singh S. L., *Piṅgala Binary Numbers*, in B. S. Yadav, M. Mohan (ed.): Ancient Indian Leaps Into Mathematics, New York: Springer, 2011, 121–134.

[SiV] Singh V., *Ashokan Pillar (Feroz Shah Kotla)*, [online], 2010, [cit. 10.9.2013], <`http://competentauthoritydelhi.co.in/MonumentViewer.aspx?ID=159`>.

[SK] Smith D. E., Karpinski L. Ch., *The Hindu-Arabic Numerals*, Boston: Ginn and Company Publishers, 1911.

[Sm1] Smith D. E., *History of Mathematics, Vol. 1, General Survey of The History of Elementary Mathematics*, Boston: Ginn and Company, 1923.

[Sm2] ———, *History of Mathematics, Vol. 2, Special Topics of Elementary Mathematics*, New York: Dover Publications Inc., 1958.

[SS] Sridharan R., Srinivas M. D., *Folding Method of Nārāyaṇa Paṇḍita for the Construction of Samagarbha and Viṣama Magic Squares*, Indian Journal of History of Science **47(4)** (2012), 589–605.

[Sr] Srinivasiengar C. N., *The History of Ancient Indian Mathematics*, Calcutta: The World Press Private LTD, 1967.

[Sti] Stillwell J., *Mathematics and its History*, New York: Springer, 1994.

[SMK] Strnad J., Marková D., Kostič S., Svobodová R., *Hindsko-český slovník*, Praha: Dar Ibn Rushd, 1998.

[Sy1] Sýkorová I., *Násobení ve středověké Indii.*, in J. Bečvář, M. Bečvářová (ed.): Historie matematiky, Velké Meziříčí 22.8.2008 – 26.8.2008, Praha: Matfyzpress, 2008, 161–166.

[Sy2] ———, *Zlomky ve staré Indii*, in J. Bečvář, M. Bečvářová (ed.): Historie matematiky, Jevíčko 21.8.2009 – 25.8.2009, Praha: Matfyzpress, 2009, 213–216.

[Sy3] ———, *Rukopis Bakhšhálí*, in J. Bečvář, M. Bečvářová (ed.): Historie matematiky, Velké Meziříčí 18.8.2010 – 22.8.2010, Praha: Matfyzpress, 2010, 231–238.

[Sy4] ———, *Pellova rovnice v indické matematice*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie **56(1)** (2011), 35–44.

[Sy5] ———, *Finanční matematika ve staré Indii*, in J. Bečvář, M. Bečvářová (ed.): Historie matematiky, Velké Meziříčí 24.8.2012 – 28.8.2012, Praha: Matfyzpress, 2012, 255–258.

[Sy6] ———, *Znali staří Indové řetězové zlomky?*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie **57(4)** (2012), 296–306.

[Sy7] ———, *Zápisy čísel ve starověké Indii*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie **59(1)** (2014), 17–26.

[Sis] Šišma P., *Arabská matematika*, in J. Bečvář (ed.): Matematika ve středověké Evropě. Dějiny matematiky, svazek 19, Praha: Prometheus, 2001, 150–183.

[Th] Thibaut G., *The Sulvasutras*, Calcutta: Printed by C. B. Lewis, Baptist mission press, 1875.

[TD] Thibaut G., Dvivedi M. S., *Pańchasiddhāntikā: The Astronomical Work of Varāha Mihira*, Benares: E. J. Lazaeues and co., 1889.

[Ul] Úlehla J., *Dějiny mathematiky I*, Praha: Dědictví Komenského, 1901.

[Vi] Vij B. B., *Linear Standard in the Indus Civilization*, in B. B. Lal, S .P. Gupta (ed.): Frontiers of the Indus Civilization, New Delhi: Books and Books, [online], 1984, 153–156, [cit. 12.8.2013], <`http://www.brijvij.com/indusEvidence.doc`>.

[Vol] Volodarsky A., *Mathematical Achievements of Āryabhaṭa*, Indian Journal of History of Science **12(2)** (1977), 167–172.

[Wa1] van der Waerden B. L., *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Berlin: Springer, 1983.

[Wa2] van der Waerden B. L., *Uravnenije Pella v matematike Grekov i Indijcev*, Uspechy matematičeskich nauk **XXXI** (1976), 57–70.

[Whe] Wheeler R. E. M., *Dávná civilizace v údolí Indu*, Praha: Mladá fronta, 1973.

[Whi] Whitford E. E., *The Pell Equation*, Ann Arbor, Michigan: University of Michigan Library, [online], 2005, [cit. 7.1.2011], <`http://name.umdl.umich.edu/ABV2773.0001.001`>.

[WGZ] Williams H. C., German R. A., Zarnke C. R., *Solution of the Cattle Problem of Archimedes*, Mathematics of Computation **19** (1965), 671–674.

[Zb1] Zbavitel D., *Starověká Indie*, Praha: Panorama, 1985.

[Zb2] ———, *Otazníky starověké Indie*, Praha: Lidové noviny, 1997.

[ZS] Zbavitel D., Strnad J., *Učebnice sanskrtu*, Praha: Nakladatelství Karolinum, Univerzita Karlova, 2006.