Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

# Využití goniometrických funkcí ve středoškolské a vysokoškolské matematice

# Use of trigonometric functions in secondary and tertiary mathematics

Lenka Pantůčková

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

Studijní program: Specializace v pedagogice

Studijní obor: Matematika (jednooborová)

2015

**Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracovala samostatně pod vedením prof. RNDr. Jarmily Novotné, CSc., za použití uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato bakalářská práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 10. 4. 2015

Lenka Pantůčková

**Poděkování**

Ráda bych poděkovala prof. RNDr. Jarmile Novotné, CSc., za pomoc při vedení bakalářské práce. Cením si času, připomínek a poskytnutých informací, které vedly k vypracování této práce.

Dále bych chtěla poděkovat Tomáši Schwarzbacherovi Zemanovi, DiS., za cenné rady a doporučení, které mi pomohly tuto práci dokončit.

# Abstrakt

Název práce: Využití goniometrických funkcí ve středoškolské a vysokoškolské matematice

Autor: Lenka Pantůčková

Katedra: Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

Práce se zabývá goniometrií a jejím uplatnění v různých stupních škol. Cílem bakalářské práce bylo vytvořit přehled vybraných oblastí matematiky, kde se goniometrie vyskytuje, a uvést aplikační příklady v trigonometrii, komplexních číslech a diferenčních a diferenciálních rovnicích.

První část práce je zaměřena na goniometrii na středních školách. Uvádíme vybrané znalosti matematiky, s kterými by studenti již měli přijít na střední školy. Definujeme goniometrické funkce a jejich vlastnosti tak, jak jsou zařazeny ve středoškolské látce. Zabýváme se trigonometrií, z které se goniometrie postupně oddělila do dnešní podoby.

Ve druhé části práce je popsáno použití goniometrických funkcí v oblastech matematiky, ke kterým se student dostane převážně na vysokých školách. Především se jedná o využití goniometrických funkcí v komplexních číslech, cyklometrické funkce a aplikace v diferenčních a diferenciálních rovnicích.

**Klíčová slova:** goniometrie, trigonometrie, diferenční a diferenciální rovnice

# Abstract

Title: Use of trigonometric functions in secondary and tertiary mathematics

Author: Lenka Pantůčková

Department: Department of Mathametics and Mathematical Education

Supervisor: Prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

This work is engaged in goniometry and its use in schools of different levels. The aim of this bachelor thesis was to create an overview of selected fields of mathematics where goniometry occurs and to state examples of use in trigonometry, complex numbers and difference and differential equations.

The first part of the work is aimed at goniometry in secondary schools. It states selected knowledge of mathematics the secondary school students should enter the schools with. It defines circular functions and their properties as they are implied in the secondary school curriculum. It deals with trigonometry the current form of goniometry was gradually derived from.

The second part describes use of circular functions in fields of mathematics students get acquainted with mostly at universities. It is mainly the use of circular functions in complex numbers, inverse circular functions as well as the use in difference and differential equations.



**Keywords:** goniometry, trigonometry, difference and differential equations

# Obsah

# 1 Úvod

Tématem mé bakalářské práce je využití goniometrických funkcí ve středoškolské a vysokoškolské matematice. Toto téma jsem si vybrala především proto, že mě zajímá problematika goniometrie v různých typech a stupních škol. Propojují se zde znalosti a poznatky z různých oblastí matematiky a ne všichni studenti si to uvědomují.

„Goniometrické funkce je společný název pro funkce sinus (symbol sin), kosinus (symbol cos), tangens (symbol tg), kotangens (symbol cotg), sekans (symbol sec) a kosekans (symbol cosec).“ (Bartsch, 1996, str. 357)

Ve své práci se budu zabývat funkcemi sinus, kosinus, tangens a kotangens, protože především tyto funkce se využívají v aplikačních úlohách. Goniometrické funkce sekans a kosekans se v praxi používají zcela výjimečně.

Goniometrické funkce už nejsou zařazeny v Rámcovém vzdělávacím programu (dále jen RVP) pro základní vzdělání[1]. Základní školy tudíž nemají povinnost tuto oblast matematiky vyučovat. Některé školy se ale rozhodly, že tyto funkce zařadí do svých vlastních Školních vzdělávacích programů (dále jen ŠVP). Například na Základní škole Kpt. Jaroše v Třebíči se učí goniometrické funkce v 9. ročníku. Podle jejich ŠVP[2] by žáci měli umět užívat goniometrické funkce ostrého úhlu při řešení úloh z praxe a umět vyhledat hodnoty těchto funkcí v tabulkách a kalkulačkách.

Naproti tomu například Základní škola Benešova v Třebíči goniometrické funkce ve svém ŠVP nemá, takže žáci se přímo s goniometrickými funkcemi seznámí až na střední škole.

Záleží tedy konkrétně na jednotlivých základních školách, zda si goniometrické funkce zařadí do svých ŠVP a budou je vyučovat.

[1] viz http://www.vuppraha.cz/wp-content/uploads/2009/12/RVPZV_2007-07.pdf
[2] viz http://www.zsjarose.cz/cze/vyuka/ucivo-iist/3/ ve složce Matematika a její aplikace

# 2 Goniometrie na středních školách

Studenti na střední školy přicházejí s odlišnými znalostmi z goniometrie. Někteří žáci studovali na základních školách, jejichž ŠVP goniometrické funkce neobsahovaly. Jiní studenti naopak mohli studovat na školách, které si své ŠVP rozšířily o goniometrii a svým žákům tak poskytly výhodu dřívější znalosti této oblasti matematiky.

Goniometrie se ve středoškolském učivu nevyskytuje pouze při řešení úloh v ostroúhlém trojúhelníku. Studenti se postupně naučí, že goniometrické funkce zasahují i do jiných oblastí matematiky, jako jsou například rovnice a nerovnice, funkce, trigonometrie a další.

S využitím goniometrických funkcí se můžeme na středních školách setkat i ve fyzice. Používají se například při výpočtech okamžité odchylky mechanického kmitání a vlnění. Dále se ve fyzice využívají k výpočtům střídavého proudu a napětí v obvodech[3].

## 2.1 Nutné předběžné znalosti pro goniometrické funkce[4]

V této podkapitole se zaměříme na definice, které by měli studenti znát, než se seznámí s goniometrickými funkcemi a začnou s nimi na středních školách pracovat. Tyto definice by měly sloužit jako základ pro porozumění aplikačním úlohám v následujících kapitolách. Většina formulací je uváděna z knihy Vošického (2007) Matematika v kostce pro střední školy, která by měla být přehledem základních znalostí středoškolské matematiky. Text je doplněn citacemi z Bartschových (1996) Matematických vzorců, které jsou určeny pro studenty středních i vysokých škol technických.

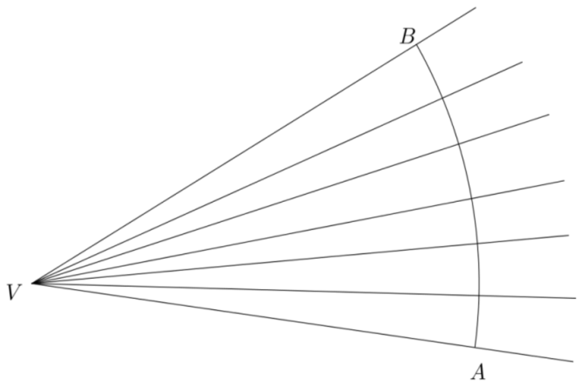
[3] zdroj: http://cs.wikipedia.org/wiki/Mechanick%C3%A9_vln%C4%9Bn%C3%AD, http://cs.wikipedia.org/wiki/St%C5%99%C3%ADdav%C3%BD_proud

[4] zpracováno podle (Jirásek & Benda, 2006) , (Vošický, 2007) a (Bartsch, 1996)

### 2.1.1 Úhel

Zavedení definice úhlu je důležité, protože jej budeme využívat ve většině kapitol. Slovo goniometrie pochází z řečtiny a v překladu znamená „měření úhlů“. V této kapitole definujeme rovinný, orientovaný a prostorový úhel. Uvedeme, jak můžeme zapsat velikost orientovaného úhlu, a definujeme typy úhlů podle jejich velikostí v intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$.

obr. 1




„Rovinným úhlem nazýváme množinu všech bodů všech polopřímek $VX$ se společným počátkem $V$, kde bod $X$ patří do daného oblouku $AB$ kružnice $k$se středem v bodě $V$. Takto definovaný úhel označujeme jako „úhel $AVB$“.“ (Bartsch, 1996, str. 286)

Bod $V$ se nazývá vrchol úhlu, polopřímky $VA, VB$ ramena úhlu.

„Orientovaným úhlem $AVB$ (stručně $\widehat{AVB}$) nazýváme uspořádanou dvojici polopřímek $VA, VB$ se společným počátkem $V$, přičemž polopřímka $VA$, resp. $VB$ se nazývá počáteční, resp. koncové rameno a bod $V$ se nazývá vrchol orientovaného úhlu $AVB$. Při $VA \neq VB$ je tedy $\widehat{AVB} \neq \widehat{BVA}$.

Prostorovým úhlem nazýváme množinu všech bodů všech polopřímek $VX$ se společným počátkem $V$, kde bod $V$ patří do daného kulového vrchlíku se středem v bodě $V$. Bod $V$ se nazývá vrchol prostorového úhlu.“ (Bartsch, 1996, str. 287)

Velikost orientovaného úhlu se může zapsat:

- ve stupňové míře - $\left|\widehat{AVB}\right| = \alpha + k \cdot 360° \ \wedge \ \alpha \in \langle 0,\ 360°), k \in \mathbb{Z}$
- v obloukové míře - $\left|\widehat{AVB}\right| = \alpha + k \cdot 2\pi\mathrm{rad} \ \wedge \ \alpha \in \langle 0,\ 2\pi), k \in \mathbb{Z}$

Dělení úhlů podle velikosti, $\alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$:

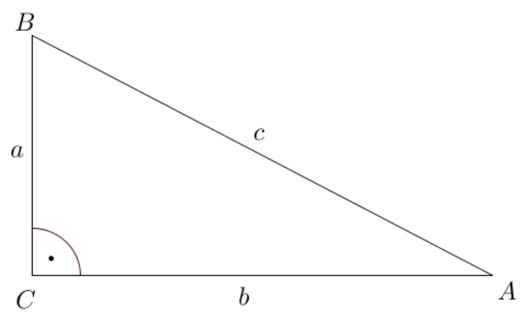
| | |
|---|---|
| Nulový úhel | $\alpha = 0$ |
| Ostrý úhel | $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ |
| Pravý úhel | $\alpha = \frac{\pi}{2}$ |
| Tupý úhel | $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ |
| Přímý úhel | $\alpha = \pi$ |
| Plný úhel | $\alpha = 2\pi$ |
| Konvexní úhel | $0 \leq \alpha \leq \pi$ |
| Nekonvexní úhel | $\pi < \alpha \leq 2\pi$ |

### 2.1.2 Pythagorova věta

Definice Pythagorovy věty se uvádí už na základních školách. Žáci se ji učí využívat při řešení různých aplikačních úloh. Například při výpočtu objemů a povrchů těles jim Pythagorova věta slouží jako nástroj k dopočítání potřebných délek stran.

„V pravoúhlém trojúhelníku platí Pythagorova věta: Součet obsahů čtverců nad oběma odvěsnami se rovná obsahu čtverce nad přeponou.“ (Eisler, 2006, str. 35)

obr. 2




V pravoúhlém trojúhelníku na obr. 2 platí:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

### 2.1.3 Funkce

V této podkapitole se zaměříme na definici funkce tak, jak se formuluje na středních školách, a řekneme, jak můžeme zavést funkční předpis pro danou funkci. Jelikož se v této bakalářské práci zabývám goniometrickými funkcemi a jejich aplikacemi, bude definice funkce jedním ze základních pojmů, který budeme potřebovat.

Jako zajímavost můžeme poukázat to, že první definici funkce formuloval Johann Bernoulli (1667–1748) v roce 1697 a na dalším rozvoji tohoto pojmu se významně podílel Leonhard Euler (1707-1783). Myšlenky o funkci se však objevily mnohem dříve a opíraly se především o sledování změn a závislostí různých jevů v každodenním životě. (viz Odvárko, 2008)

Vošický (2007) definuje pro studenty středních škol reálnou funkci jako množinu uspořádaných dvojic:

„Mějme $A$ a $B$ neprázdné množiny reálných čísel. Přiřadíme-li každému číslu $x \in A$ podle nějakého předpisu právě jedno číslo $y \in B$, které označíme $y = f(x)$, pak množina uspořádaných dvojic $[x; f(x)]$ se nazývá reálná funkce reálné proměnné $x$ (stručně funkce $f$). Zapisujeme $f\colon y = f(x)$, resp. $f\colon x \to f(x)$.

Množinu $A$ označujeme $D(f)$ a nazýváme definičním oborem funkce $f$: $x \in D(f)$ je nezávisle proměnná, čili argument funkce $f$. Číslo $y$ přiřazené číslu $x$ se nazývá funkční hodnota funkce $f$ v bodě $x$. Množinu právě těch prvků $y \in \mathbb{R}$, z nichž ke každému existuje alespoň jeden takový prvek $x \in A$, že $[x, y] \in f$ nazýváme oborem hodnot funkce $f$ a značíme $H(f)$.“ (Vošický, 2007, str. 52)

Funkce je zadána, známe-li její definiční obor a funkční předpis, který bývá určen:

- analyticky - explicitní nebo implicitní rovnicí,
- grafem - z grafu ne vždy získáme přesné hodnoty, kterých funkce nabývá,
- tabulkou – je dána výčtem prvků,
- slovním předpisem.

### 2.1.4 Vlastnosti funkcí uváděné na středních školách

Tyto vlastnosti se využívají pro popis a charakterizaci matematických funkcí (na středních školách to jsou funkce lineární, kvadratické, funkce s absolutní hodnotou, lineárně lomené, mocninné funkce s druhou odmocninou, exponenciální, logaritmické a goniometrické)[5]. Definujeme tedy vlastnosti funkcí, protože se na ně v dalším textu budeme odkazovat a využijeme je ke specifikaci goniometrických funkcí v kapitole 2.2 Goniometrické funkce na středních školách a jejích podkapitolách.

**Monotónnost**

„Funkce $f$ definovaná na množině $A \subseteq D(f)$ se nazývá funkce na $A$:

- rostoucí $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,
- klesající $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$,
- neklesající $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$,
- nerostoucí$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.“ (Vošický, 2007, str. 53)

**Parita**

„Funkce $f$, jejíž $D(f)$ je souměrný podle počátku soustavy souřadnic, tj. pro kterou platí $x \in D(f) \Rightarrow (-x) \in D(f)$, se nazývá:

- sudá funkce $\Leftrightarrow \forall\, x \in D(f): f(-x) = f(x)$,
- lichá funkce $\Leftrightarrow \forall\, x \in D(f): f(-x) = -f(x)$.“ (Vošický, 2007, str. 54)

Dále je ve Vošického knize (2007) uvedena věta o souměrnosti grafů lichých a sudých funkcí s konkrétními příklady:

„Graf sudé funkce (např. $y = \cos x$) je osově souměrný podle osy $y$. Graf liché funkce (např. $y = \sin x$) je středově souměrný podle počátku souřadnic.“ (Vošický, 2007, str. 54)

[5] RVP pro gymnázia, viz www.msmt.cz/file/10427_1_1/

## Prostá funkce

„Funkce $f$ definovaná na množině $A \subseteq D(f)$ se nazývá funkce na $A$:

- prostá $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A: x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.“ (Vošický, 2007, str. 53)

## Omezenost funkce[6]

„Je-li funkce $f$ definovaná na množině $A \subseteq D(f)$, pak se nazývá:

- na $A$ zdola omezená (ohraničená), právě když existuje takové číslo$d \in \mathbb{R}$, že pro $\forall x \in A: f(x) \geq d,$
- na $A$ shora omezená (ohraničená), právě když existuje takové číslo$h \in \mathbb{R}$, že pro $\forall x \in A: f(x) \leq h,$
- na $A$ omezená (ohraničená), právě když je na $A$ omezená shora i zdola.” (Vošický, 2007, str. 54)

## Periodicita funkce

„Funkce $f$ se nazývá periodická funkce, existuje-li takové $p > 0$, že pro každé $k \in \mathbb{Z}$ platí:

- je-li funkce definovaná v bodě $x$, pak je také definovaná v bodech $(x + kp)$,
- pro všechna $x \in D(f)$ platí: $f(x) = f(x + kp)$.“ (Vošický, 2007, str. 54)

## Maximum, minimum funkce

„Je-li funkce $f$, $A \subseteq D(f)$, $a \in A$, $b \in A$, pak funkce má na $A$:

- v bodě $a$ minimum (nejmenší hodnotu), právě když pro všechna $x \in A$ je $f(x) \geq f(a)$,
- v bodě $a$ maximum (největší hodnotu), právě když pro všechna $x \in A$ je $f(x) \leq f(a)$.“ (Vošický, 2007, str. 54)

[6] Omezenost funkce se v některé literatuře uvádí také jako ohraničenost. Vošický (2007) ve své publikaci používá oba pojmy.

**Inverzní funkce**

„Jestliže funkce $y = f(x)$ je prostá v celém definičním oboru $D(f)$ a má obor hodnot $H(f)$, pak lze na $H(f)$ definovat funkci, která každému číslu $y \in H(f)$ přiřazuje právě to číslo $x \in D(f)$, pro které je $f(x) = y$. Tato funkce se nazývá inverzní funkce k funkci $f$ a značí se $f^{-1}$.

- Platí $D(f) = H(f^{-1})$ a $D(f^{-1}) = H(f)$.
- Grafy funkcí $f$ a $f^{-1}$ jsou vzájemně souměrné podle osy $y = x$.
- Je-li původní funkce např. rostoucí (klesající), je také inverzní funkce rostoucí (klesající).
- Inverzní funkce k prosté funkci je opět prostá.“ (Vošický, 2007, str. 55)

**Spojitost funkce**

„Nechť $f$ je funkce definovaná v jistém okolí bodu $a$. Říkáme, že funkce $f$ je spojitá v bodě $a$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x$, pro která je $|x - a| < \delta$, platí $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.“ (Vošický, 2007, str. 55)

## 2.2 Goniometrické funkce na středních školách

V této podkapitole se budeme věnovat goniometrickým funkcím v takové podobě, jak se definují na středních školách. Studentům jsou tyto znalosti ukazovány bez důkazů. Jde tedy o přehled definic, vzorců, vlastností goniometrických funkcí, jejich hodnot a grafů. Nejdříve se však podíváme, jak se goniometrie vyvíjela a kdo se zasloužil o její oddělení jako samostatné matematické disciplíny.

### 2.2.1 Historie goniometrie[7]

Goniometrii, tak jak ji známe v dnešní podobě, formuloval jako první Leonhard Euler (1707-1783), švýcarský matematik a fyzik. Do té doby se goniometrie vyvíjela jako část trigonometrie. Euler se zasloužil o skutečný rozvoj goniometrických funkcí, které se do té doby využívaly pouze jako prostředky trigonometrických výpočtů. Goniometrie se

[7] Zpracováno podle http://is.muni.cz/th/44284/prif_d/Dizertace_Radka_Smykalova.pdf

tedy stala samostatnou matematickou vědou v 1. polovině 17. století. Toto oddělení goniometrie od trigonometrie přineslo vlnu uplatnění goniometrických funkcí (především při určování poloh a vzdáleností).

Euler pohlížel na goniometrické funkce z pohledu vznikající matematické analýzy. Lidé díky tomuto pohledu začali považovat goniometrické hodnoty ne jako délky úseček (což bylo především ve starověku a středověku), ale jako čísla, která vyjadřují poměry těchto délek. Ve svém díle Úvod do analýzy (1748) vytvořil Euler z trigonometrie skutečnou vědu o goniometrických funkcích a odvodil zde řadu goniometrických vztahů z několika základních vzorců.

Euler také definoval goniometrické funkce pomocí nekonečných řad a dokázal převést goniometrické funkce do analytické podoby tak, jak je známe v dnešní době.

### 2.2.2 Definice goniometrických funkcí

Jedním ze způsobů, jak definujeme goniometrické funkce, je pomocí délek stran v ostroúhlém trojúhelníku:

„V pravoúhlém trojúhelníku s přeponou $AB$, $|AB| = c$, a s odvěsnami $BC$, $|BC| = a$, a $AC$, $|AC| = b$, platí pro ostrý úhel $CAB$, $|\sphericalangle CAB| = \alpha$:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{délka protilehlé odvěsny}}{\text{délka přepony}},$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{délka přilehlé odvěsny}}{\text{délka přepony}},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{délka protilehlé odvěsny}}{\text{délka přilehlé odvěsny}},$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{délka přilehlé odvěsny}}{\text{délka protilehlé odvěsny}}.\text{“}$$

(Novotná a kol., 1997, s. 331, 332)

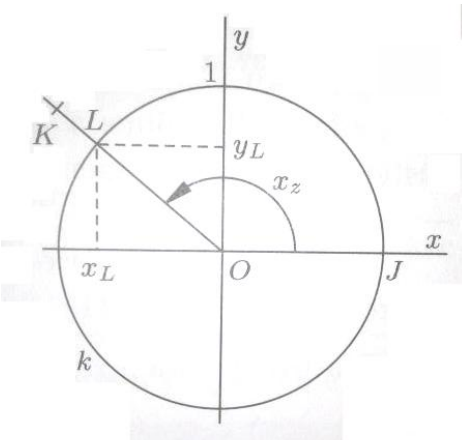
Funkce tangens a kotangens jsou definovány pomocí funkcí sinus a kosinus takto:

$$„\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \text{ pro všechna } \alpha \in \left\{\alpha \in \mathbb{R};\ \alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \text{ pro všechna } \alpha \in \{\alpha \in \mathbb{R};\ \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}“$$

(Novotná a kol.,1997,s.332)

obr. 3




V (Odvárko, 2007) je definice goniometrických funkcí rozšířena na celou množinu reálných čísel (viz obr. 3):

„Funkcí sinus se nazývá funkce na množině ℝ, kterou je každému $x \in \mathbb{R}$ přiřazeno číslo $y_L$. Funkcí kosinus se nazývá funkce na množině ℝ, kterou je každému $x \in \mathbb{R}$ přiřazeno číslo $x_L$.“[8] (Odvárko, Matematika pro gymnázia Goniometrie, 2007, str. 37)

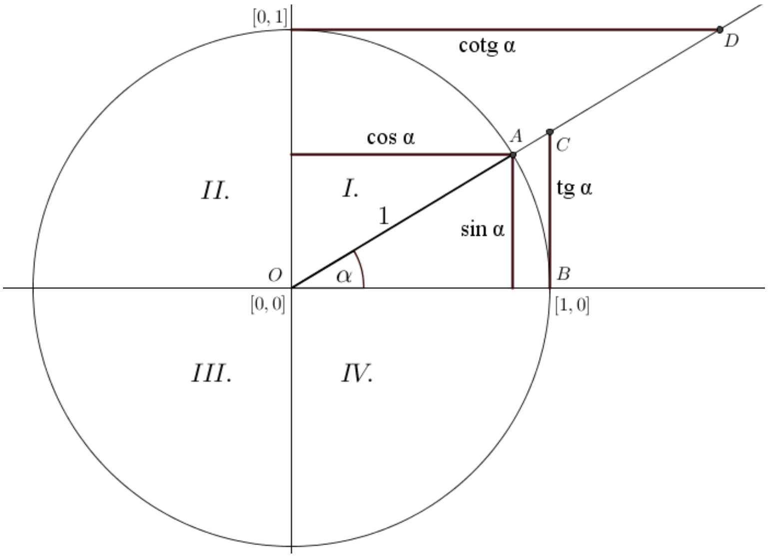
Dalším ze způsobů, jak definujeme goniometrické funkce, je pomocí jednotkové kružnice[9]. Na obr. 4 jsou znázorněny body $A, C$ a $D$, jejichž souřadnice odpovídají hodnotám goniometrických funkcí:

$$A = [\cos \alpha,\ \sin \alpha], \qquad C = [1,\ \operatorname{tg} \alpha], \qquad D = [\operatorname{cotg} \alpha,\ 1].$$

[8] Čísla $y_L$ a $x_L$ jsou hodnoty $y$-ové a $x$-ové souřadnice bodu $A$, který vznikne protnutím jednotkové kružnice a ramene úhlu $\alpha \to A = [x_L,\ y_L] = [\cos \alpha,\ \sin \alpha]$, $\alpha \in \langle 0, 2\pi)$.

[9] Poloměr jednotkové kružnice $r = 1$. Z Pythagorovy věty aplikované na konkrétní případ v jednotkové kružnici snadno dokážeme, že $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

obr. 4

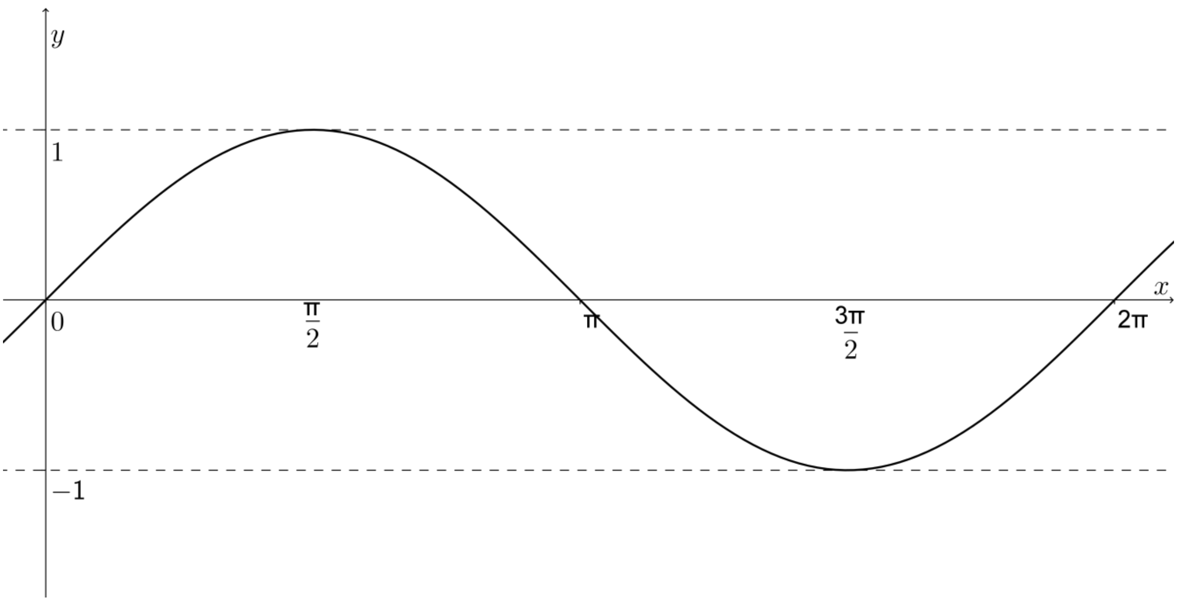



Z vlastností uvedených v podkapitole 2.1.4 Vlastnosti funkcí uváděné na středních školách mají goniometrické funkce následující vlastnosti:

- Sinus (obr. 5) je funkce, která je lichá, shora i zdola omezená, spojitá na celém svém definičním oboru[10], s periodou $2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

$$\sin x = \sin(x + 2k\pi)\ \ \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

obr. 5 - graf funkce sinus

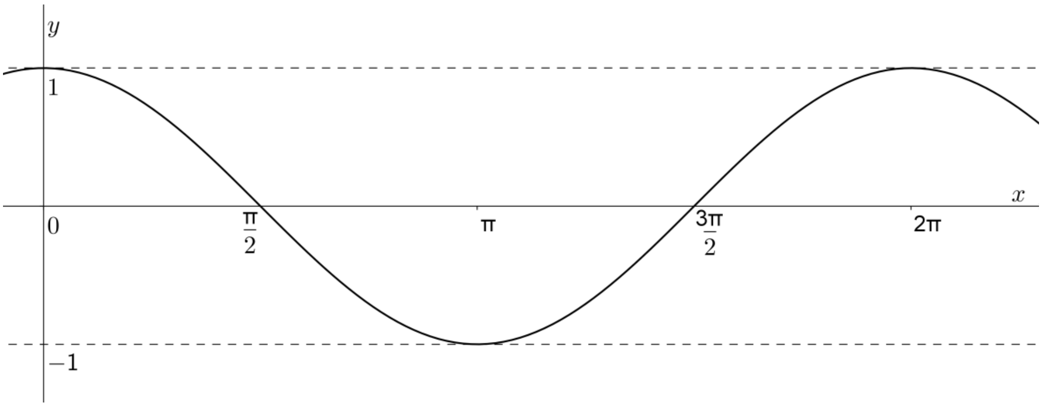



[10] $D(\sin x) = \mathbb{R}$

- Kosinus (obr. 6) je sudá funkce, shora i zdola omezená, spojitá na celém svém definičním oboru[11], s periodou $2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

$$\cos x = \cos(x + 2k\pi)\ \ \forall\ k \in \mathbb{Z}$$

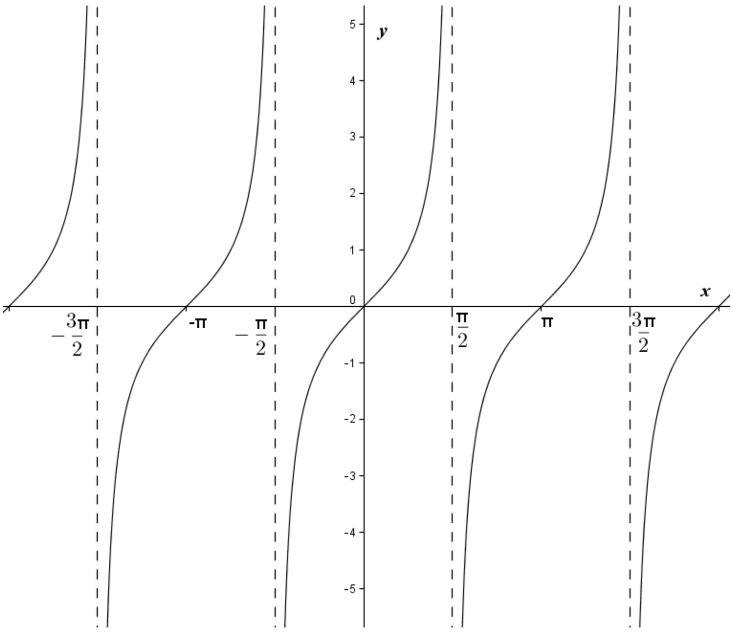
obr. 6 - graf funkce kosinus




- Tangens (obr. 7) je lichá funkce, neomezená, s periodou $k\pi$, spojitá na každém $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$.

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + k\pi)\ \ \forall\ k \in \mathbb{Z},$$

obr. 7 - graf funkce tangens

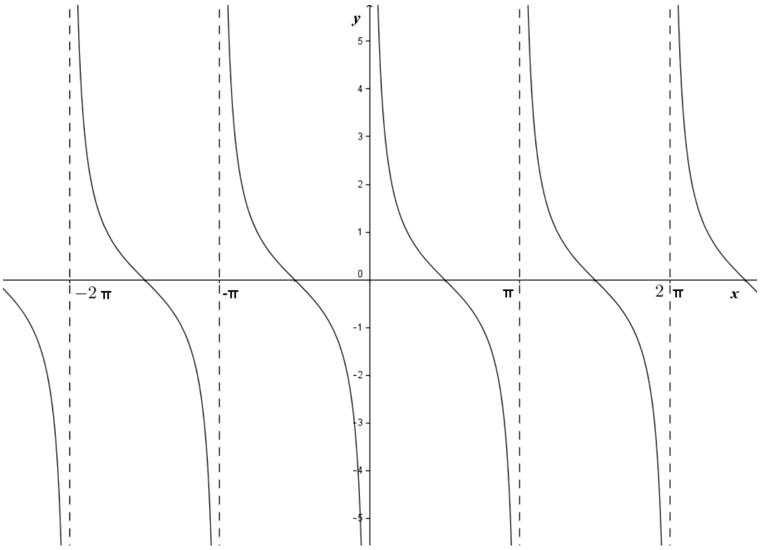



[11] $D(\cos x) = \mathbb{R}$

- Kotangens (obr. 8) je lichá funkce, neomezená, s periodou $k\pi$, spojitá na každém $(k\pi,\ \pi + k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$.

$$\operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg}(x + k\pi) \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

obr. 8 – graf funkce kotangens




### 2.2.3 Hodnoty goniometrických funkcí pro význačné úhly[12]

| | $0°$ | $\frac{\pi}{6} = 30°$ | $\frac{\pi}{4} = 45°$ | $\frac{\pi}{3} = 60°$ | $\frac{\pi}{2} = 90°$ | $\pi = 180°$ | $\frac{3\pi}{2} = 270°$ | $2\pi = 360°$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ |
| $\cos x$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
| $\operatorname{tg} x$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | $\times$ | $0$ | $\times$ | $0$ |
| $\operatorname{cotg} x$ | $\times$ | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ | $\times$ | $0$ | $\times$ |

×...funkce není v tomto bodě definovaná

[12] Zdroj: (Mikulčák, 1988)

### 2.2.4 Vlastnosti goniometrických funkcí[13]

Po uvedení definic goniometrických funkcí následuje souhrn jejich vlastností. Jedná se především o základní vlastnosti, které by studenti měli znát po dokončení střední školy.

a) $\mathrm{y} = \sin x$

- $D(\sin x) = \mathbb{R}$
- $H(\sin x) = \langle -1, 1 \rangle$
- $\sin x$ je rostoucí na $\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle,\ k \in \mathbb{Z}$
- $\sin x$ je klesající na $\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \rangle,\ k \in \mathbb{Z}$
- maximum $\sin x$ jev každém $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ f(x) = 1$
- minimum $\sin x$ je v každém $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ f(x) = -1$

b) $y = \cos x$

- $D(\cos x) = \mathbb{R}$
- $H(\cos x) = \langle -1, 1 \rangle$
- $\cos x$ je rostoucí na $\langle \pi + 2k\pi,\ 2\pi + 2k\pi \rangle,\ k \in \mathbb{Z}$
- $\cos x$ je klesající na $\langle 2k\pi,\ \pi + 2k\pi \rangle,\ k \in \mathbb{Z}$
- maximum $\cos x$ jev každém $x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ f(x) = 1$
- minimum $\cos x$ je v každém $x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ f(x) = -1$

c) $y = \mathrm{tg}\, x$

- $D(\mathrm{tg}\, x) = \left( -\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi \right),\ k \in \mathbb{Z}$
- $H(\mathrm{tg}\, x) = \mathbb{R}$

[13] Zdroj: (Bartsch, 1996).

- $\operatorname{tg} x$ je rostoucí na každém intervalu $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{tg} x$ nemá maximum ani minimum

d) $y = \operatorname{cotg} x$

- $D(\operatorname{cotg} x) = (k\pi,\ \pi + k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$
- $H(\operatorname{cotg} x) = \mathbb{R}$
- $\operatorname{cotg} x$ je klesající na každém intervalu $(k\pi,\ \pi + k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{cotg} x$ nemá maximum ani minimum

Znaménka hodnot goniometrických funkcí v jednotlivých kvadrantech[14]

| | I. | II. | III. | IV. |
|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | $+$ | $+$ | $-$ | $-$ |
| $\cos x$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $\operatorname{tg} x$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| $\operatorname{cotg} x$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ |

## 2.3 Trigonometrie[15]

Pythagorovu větu lze aplikovat pouze u úloh, v kterých se řeší pravoúhlé trojúhelníky. Pokud ale chceme počítat s obecnými trojúhelníky, nevystačíme pouze s Pythagorovou větou, ale potřebujeme vzorce, které se dají využít u obecných trojúhelníků, ať už ostroúhlých nebo tupoúhlých. K tomu se hodí věta sinová, kosinová nebo tangentová.

V této podkapitole se tedy zaměříme především na sinovou, kosinovou a tangentovou větu a jejich formulace. Dále využijeme tyto věty a aplikujeme je na konkrétní úlohy.

[14] Zpracováno podle (Bartsch, 1996)
[15] Zpracováno podle (Odvárko, Matematika pro gymnázia Goniometrie, 2007)

### 2.3.1 Historie trigonometrie[16]

Slovo trigonometrie je řeckého původu a znamená měření trojúhelníků.

Některé znalosti spojené s trigonometrií se objevují již u Egypťanů. Tyto poznatky byly známé také Babyloňanům a Chaldejcům, od kterých převzali základní vědomosti z trigonometrie starořečtí matematici. Ti zavedli dělení plného úhlu na 360° a stupně na 60 minut.

Matematici, kteří se zasloužili o rozvoj trigonometrie, byli Hipparchos z Nikaje (2. stol. před n. l.), Menelaos z Alexandrie (kolem roku 100 n. l.) a Claudius Ptolematios (100-178 n. l.). Ptolemaios používal funkce, které udávají délku celé tětivy k danému středovému úhlu.

Práce řeckých matematiků se věnovala především trigonometrii na kulové ploše, tzv. sférické trigonometrii. Rovinnou trigonometrii používali pouze jako nástroj k řešení úloh ze sférické geometrie.

Indičtí matematici Brahmagupta (7. stol.) a Bháskara (12. stol.) přispěli jiným pohledem na trigonometrii. Na rozdíl od řeckých matematiků nepoužívali při výpočtech celou délku tětivy, ale pouze její polovinu.

Syrský astronom Al Battání (10. stol. n. l.) a tádžický astronom Abu-l-Vafá (10. stol. n. l) sestavili, pomocí délky stínu vrženého vertikální a horizontální tyčí, tabulky hodnot funkce kotangens. Trigonometrií se ve 13 století zabýval azerbájdžánský matematik NásiruddínTúsí.

Do Evropy se poznatky o trigonometrii dostaly prostřednictvím západních Arabů. Mezi evropské vědce, kteří se zasloužili o rozšíření trigonometrie, patří bezpochyby německý matematik a astronom Johannese Müller (1436-1476), polský astronom Mikuláš Koperník (1473-1543) a francouzský matematik François Viète (1540-1603), který formuloval kosinovou větu. (viz Odvárko, 2007)

[16] Zpracováno podle (Odvárko, Matematika pro gymnázia Goniometrie, 2007)

### 2.3.2 Věta sinová

„Pro každý trojúhelník $ABC$, jehož vnitřní úhly mají velikost $\alpha, \beta, \gamma$ a strany délky $a, b, c$, platí

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.\text{"}$$

(Odvárko, Matematika pro gymnázia Goniometrie, 2007, str. 104)

Sinovou větu použijeme při výpočtu, jestliže v trojúhelníku známe:

- délky dvou stran a úhlu, který není sevřený mezi těmito dvěma stranami,
- délku jedné strany a dvou úhlů.

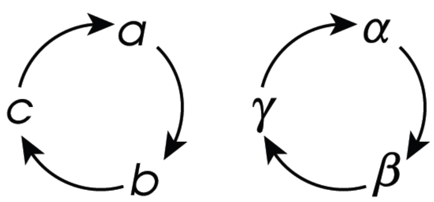
### 2.3.3 Věta kosinová

„Pro každý trojúhelník $ABC$, jehož strany mají délky $a, b, c$ a jehož vnitřní úhel proti straně $BC$ má velikost $\alpha$, platí

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.\text{"}$$

(Odvárko, Matematika pro gymnázia Goniometrie, 2007, str. 110)

obr. 9




Použitím cyklické záměny podle obr. 9, dostaneme vyjádření kosinové věty také ve tvaru:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

Kosinovou větu můžeme použít při řešení úloh, kde v trojúhelníku známe:

- délky všech tří stran,

- délky dvou stran a velikost úhlu sevřeným mezi těmito stranami.

Speciálním případem kosinové věty, kdy je v těchto rovnicích třetí člen na pravé straně rovnice roven nule (neboli úhel je roven 90°), je Pythagorova věta.

### 2.3.4 Další trigonometrické věty

„Pro poloměr $r$ kružnice opsané trojúhelníku $ABC$ platí

$$r = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma}.$$

Pro obsah $S$ každého trojúhelníku $ABC$, jehož vnitřní úhly mají velikost $\alpha, \beta, \gamma$ a strany délky $a, b, c$, platí

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta\,."$$

(Odvárko, Matematika pro gymnázia Goniometrie, 2007, stránky 116, 118)

Odvárko (2007) také na závěr uvádí další tři vzorce pro obsah trojúhelníku:

Heronův vzorec: $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$S = \rho s$$

$$S = \frac{abc}{4r}$$

$a, b, c$ jsou délky stran trojúhelníku,

$s = \dfrac{a+b+c}{2}$,

$\rho$ je poloměr kružnice trojúhelníku vepsané,

$r$ je poloměr kružnice trojúhelníku opsané.

### 2.3.5 Aplikační úlohy z trigonometrie

Nyní uvedeme dva příklady využití trigonometrických vět, konkrétně věty sinové a kosinové. Oba příklady jsou aplikací trigonometrie v úlohách z praxe. Tyto typy úloh řeší studenti na středních školách, aby si procvičili práci s trigonometrickými vzorci a naučili se je aplikovat pro konkrétní úlohy.

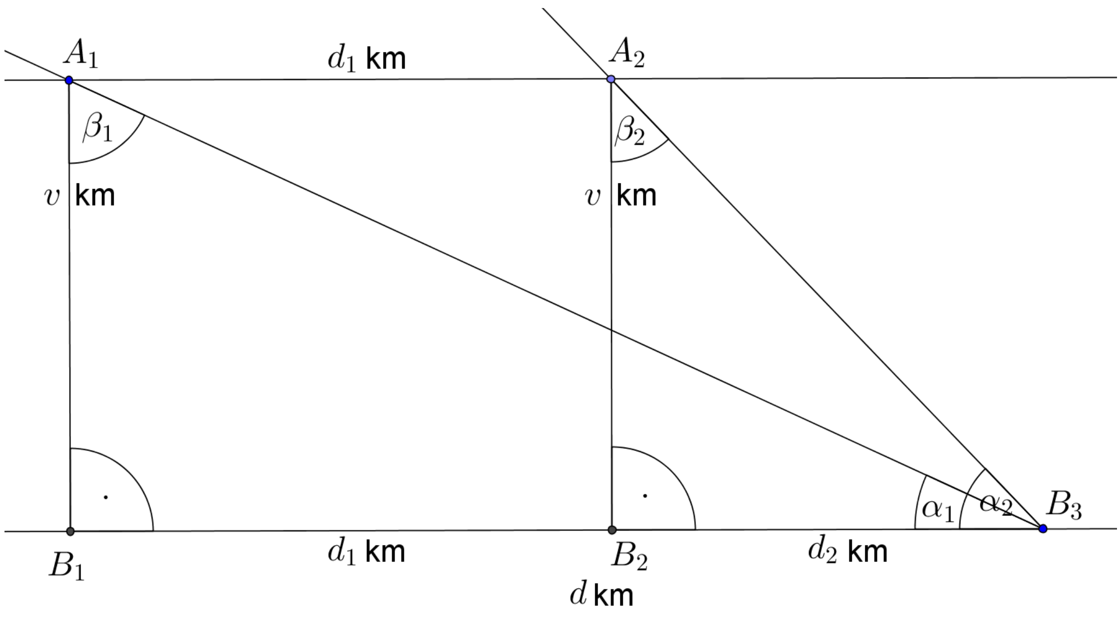
**I. Příklad:**

„Letadlo letí ve výšce 2 500 m k pozorovatelně. V okamžiku prvního měření bylo vidět pod výškovým úhlem 28°, při druhém měření pod výškovým úhlem 50°. Určete vzdálenost, kterou proletělo mezi oběma měřeními.“ (Odvárko, Matematika pro gymnázia Goniometrie, 2007, str. 128)

Řešení:

Zadání příkladu odpovídá obr. 10:

obr. 10




Popis obrázku:

$A_1$ ... poloha letadla při prvním měření

$A_2$ ... poloha letadla při druhém měření

$B_3$ ... pozorovatelna

$\alpha_1$ ... výškový úhel při prvním měření

$\alpha_2$ ... výškový úhel při druhém měření

$d_1$ km ... vzdálenost, kterou uletělo letadlo mezi oběma měřeními

$d_2$ km ... vzdálenost pozorovatelny od kolmého průmětu letadla (v poloze $A_2$) do země

$d$ km ... součet vzdáleností $d_1$ km a $d_2$ km

$v$ km ... výška, ve které letadlo letí

Výpočet:

$\alpha_1 = 28°$, dopočítáme $\beta_1$: $\beta_1 = 90° - 28° = 62°$

$\alpha_2 = 50°$, dopočítáme $\beta_2$: $\beta_2 = 90° - 50° = 40°$

Nyní využijeme sinovou větu:

$$\frac{v}{\sin\alpha_1} = \frac{d}{\sin\beta_1} \qquad \frac{v}{\sin\alpha_2} = \frac{d_2}{\sin\beta_2}$$

$$d = \frac{v\sin\beta_1}{\sin\alpha_1} \qquad d_2 = \frac{v\sin\beta_2}{\sin\alpha_2}$$

$$d = \frac{2{,}5\sin(62°)}{\sin(28°)} \qquad d_2 = \frac{2{,}5\sin(40°)}{\sin(50°)}$$

$$\underline{d \cong 4{,}7} \qquad \underline{d_2 \cong 2{,}1}$$

$$d_1 = d - d_2$$

$$d_1 = 4{,}7 - 2{,}1$$

$$\underline{d_1 = 2{,}6}$$

Vzdálenost, kterou letadlo uletělo mezi jednotlivými měřeními, je 2,6 km.

**II. Příklad:**

Ze stanice vyjedou současně dva vlaky po přímých tratích, které svírají úhel $\varphi = 156°30'$. Rychlost prvního vlaku $13\ \mathrm{ms}^{-1}$, rychlost druhého vlaku $14{,}5\ \mathrm{ms}^{-1}$. Jak daleko budou od sebe za 5,5 minuty? (viz Odvárko, 2007, s. 129)

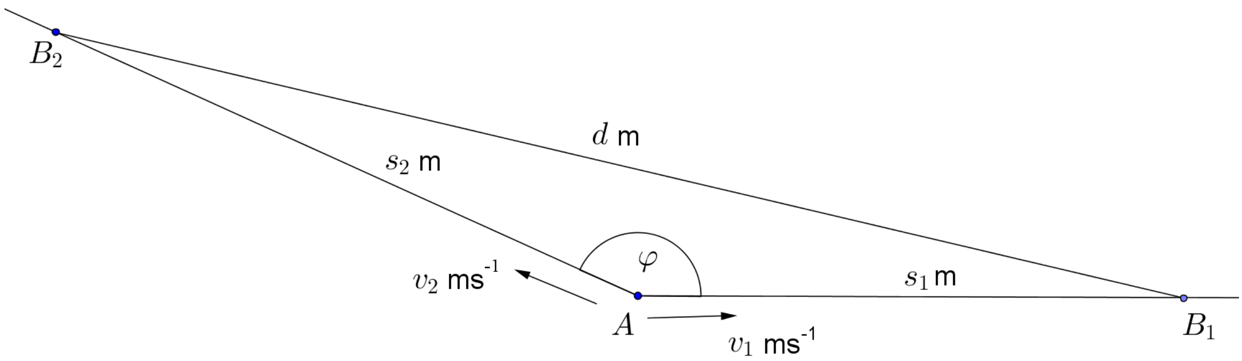
Řešení:

$5{,}5\ \mathrm{min} = 330\ \mathrm{s}$

Označme čas $t$ s $= 330$ s.

Zadání příkladu odpovídá obr. 11:

obr. 11




Popis obrázku:

$A$ ... bod, z kterého oba vlaky vyjíždí

$B_1$ ... bod, do kterého dojede první vlak za čas $t$ s

$B_2$ ... bod, do kterého dojede druhý vlak za čas $t$ s

$v_1$ $\mathrm{ms}^{-1}$ ... rychlost prvního vlaku

$v_2$ $\mathrm{ms}^{-1}$ ... rychlost druhého vlaku

$d$ m ... vzdálenost, kterou budou vlaky od sebe za čas $t$ s

$s_1$ m ... vzdálenost, kterou ujede první vlak za čas $t$ s

$s_2$ m ...vzdálenost, kterou ujede druhý vlak za čas $t$ s

Výpočet:

$$s_1 = 13 \cdot 330^{17}$$

$$\underline{s_1 = 4\,290}$$

$$s_2 = 14{,}5 \cdot 330$$

$$\underline{s_2 = 4\,785}$$

Nyní můžeme použít kosinovou větu:

$$d^2 = s_1^2 + s_2^2 - 2s_1 s_2 \cos\varphi$$

$$d = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 - 2s_1 s_2 \cos\varphi}$$

$$d = \sqrt{4\,290^2 + 4\,785^2 - 2 \cdot 4\,290 \cdot 4\,785 \cos(156°30')}$$

$$\underline{d \cong 8\,885}$$

Za 5,5 min od sebe budou vlaky vzdálené 8 885 m.

[17] Vzorec pro výpočet dráhy: $s$ m $= (v \text{ ms}^{-1}) \cdot (t \text{ s})$, kde $s$ m je dráha, $v$ ms$^{-1}$ je průměrná rychlost, $t$ s je čas. V našem příkladu $s_1$ m $= (v_1 \text{ ms}^{-1}) \cdot (t \text{ s})$ a $s_2$ m $= (v_2 \text{ ms}^{-1}) \cdot (t \text{ s})$

# 3 Goniometrie na vysokých školách

Do kapitoly goniometrické funkce na vysokých školách zařadíme oblasti matematiky, které se pojí s goniometrií, ale v RVP pro střední školy nejsou obsaženy. Jedná se především o komplexní čísla, cyklometrické funkce a aplikační úlohy v diferenčních a diferenciálních rovnicích. Tato témata už se na středních školách neučí, a proto část studentů přichází na vysoké školy bez těchto znalostí. Další část studentů má možnost se s touto látkou seznámit například v rozšiřujících seminářích v rámci přípravy k maturitě.

Cílem této kapitoly je shrnout poznatky z goniometrie na vysokých školách a poté ukázat, jak je lze využít v aplikačních úlohách.

Zaměříme se na rozšíření znalostí, s nimiž by studenti měli přicházet ze středních škol. Definujeme vlastnosti funkcí, které se na středních školách nepoužívají, ale my je aplikujeme pro další charakterizaci goniometrických funkcí. Formulujeme definice derivací, integrálů a řad, které pak využijeme při výpočtech aplikačních úloh a odvozování goniometrických vzorců.

Dále se budeme zabývat inverzními funkcemi ke goniometrickým, tzv. funkcemi cyklometrickými. Uvedeme jejich základní vlastnosti.

V další části se budeme věnovat komplexním číslům a ukážeme, jakou roli zde mají goniometrické funkce. Následně tyto znalosti využijeme při řešení několika úloh.

V poslední části se věnujeme diferenčním a diferenciálním rovnicím a ukazujeme, jak se zde dají využít goniometrické funkce.

## 3.1 Matematický aparát na vysokých školách

Základní znalosti o funkcích a jejich vlastnostech jsme uvedli už v předchozích kapitolách. Nyní se budeme zabývat rozšířením těchto poznatků, abychom s nimi mohli dále pracovat.

### 3.1.1 Vlastnosti funkcí

#### Supremum a infimum

„Pro množinu $\mathcal{M}$ může nastat případ, že existuje číslo $k$ tak, že všechny prvky množiny $\mathcal{M}$ jsou menší nebo rovny tomuto číslu $k$. Platí tedy v tomto případě implikace:

$$x \in \mathcal{M} \Rightarrow x \leq k.$$

Číslo $k$ této vlastnosti se nazývá horní závora množiny $\mathcal{M}$. Množina mající horní závoru se nazývá shora omezená.

Nejmenší horní závora množiny $\mathcal{M}$ se nazývá supremem této množiny. Značí se $\sup \mathcal{M}$." (Horský, 1973, str. 110)

Pokud existuje největší prvek množiny $\mathcal{M}$, pak se tento prvek rovná supremu množiny $\mathcal{M}$: $\sup \mathcal{M} = \max \mathcal{M}$.

„Číslo $h$ se nazývá dolní závora množiny $\mathcal{M}$, když platí implikace

$$x \in \mathcal{M} \Rightarrow x \geq h.$$

Množina mající dolní závoru se nazývá zdola omezená. Největší dolní závora množiny $\mathcal{M}$ se nazývá infimum této množiny. Značíme ji $\inf \mathcal{M}$." (Horský, 1973, stránky 111, 112)

Existuje-li nejmenší prvek množiny $\mathcal{M}$, pak se tento prvek rovná infimu množiny $\mathcal{M}$: $\inf \mathcal{M} = \min \mathcal{M}$.

#### Spojitost funkce

Na středních školách se uvádí spojitost funkce v bodě. Na vysokých školách se zavádí pojem spojitost funkce v intervalu. Abychom mohli definovat spojitost funkce v uzavřeném intervalu, nejdříve uvedeme definici spojitosti funkce v bodě zleva a zprava.

„Říkáme, že funkce $f(x)$ je spojitá zprava v bodě $c$, jestliže ke každému kladnému číslu $\varepsilon$ existuje kladné číslo $\delta$ tak, že nerovnost $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ platí pro všechna $x$, jež splňují nerovnosti $c \leq x < c + \delta$. Říkáme, že funkce $f(x)$ je spojitá zleva v bodě $c$, jestliže ke každému kladnému číslu $\varepsilon$ existuje kladné číslo $\delta$ tak, že nerovnost

$|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ platí pro všechna $x$, jež splňují nerovnosti $c - \delta < x \leq c$.“ (Jarník, Diferenciální počet (I), 1974, str. 164)

„O funkci $f$ řekneme, že je spojitá v otevřeném intervalu $(a,\ b)$, když je spojitá v každém bodě tohoto intervalu.

O funkci $f$ řekneme, že je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a,\ b\rangle$, když je spojitá v otevřeném intervalu $(a,\ b)$, spojitá zprava v bodě $a$ a spojitá zleva v bodě $b$.“ (Hradilek a Stehlík, 1990, s. 230)

## Limita funkce

„Říkáme, že funkce $f$ má v bodě $c$ limitu $A$[18] [píšeme $\lim_{x \to c} f(x) = A$], jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $\delta > 0$, že nerovnost $|f(x) - A| < \varepsilon$ platí pro všechny body $x$ pro něž je $0 < |x - c| < \delta$. Bod $c$ je ve všech dalších úvahách z definičního oboru funkce $f$.

Říkáme, že funkce $f$ má v bodě $c$ limitu zprava, resp. limitu zleva rovnou číslu $A$ [píšeme $\lim_{x \to c+} f(x) = A$, resp. $\lim_{x \to c-} f(x) = A$], jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $\delta > 0$, že nerovnost $|f(x) - A| < \varepsilon$ platí pro všechny body $x$ z intervalu $\big(c,\ c + \delta\big)$, resp. $\big(c - \delta,\ c\big)$.“ (Jirásek a Benda, 2006, s. 190)

„Říkáme, že funkce $y = f(x)$ má v bodě $a$ nevlastní limitu $+\infty$, resp. $-\infty$ [píšeme $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, resp. $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$], právě když ke každému číslu $K$ existuje takové číslo $\delta > 0$, že pro všechny body $x$, pro něž je $0 < |x - a| < \delta$, platí $f(x) > K$, resp. $f(x) < K$. Obdobně se definují nevlastní limity funkce zprava a zleva v bodě $a$:

$$\lim_{x \to a+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall K\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (a,\ a + \delta) \Rightarrow f(x) > K),$$

$$\lim_{x \to a+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall K\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (a,\ a + \delta) \Rightarrow f(x) < K),$$

$$\lim_{x \to a-} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall K\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (a - \delta,\ a) \Rightarrow f(x) > K),$$

[18] $A \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to a-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall K\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (a-\delta,\ a) \Rightarrow f(x) < K)."$$

(Bartsch, 1996, str. 487)

### 3.1.2 Posloupnost

Posloupnost zde definujeme proto, že ji budeme dále využívat v kapitole 3.4 Diferenční rovnice a objeví se i v definici řady.

„Nekonečnou posloupností reálných čísel nazýváme každé zobrazení množiny ℕ všech kladných celých čísel do množiny ℝ všech reálných čísel. Konečnou posloupností reálných čísel nazýváme každé zobrazení množiny (úseku) $U_n = \{1, 2, \dots, n\}$ do množiny ℝ všech reálných čísel (na neprázdnou podmnožinu množiny ℝ). Nekonečná posloupnost, resp. konečná posloupnost reálných čísel je tedy reálná funkce jedné reálné proměnné, jejímž definičním oborem je množina ℕ, resp. nějaký úsek $U_n$ množiny ℕ.“ (Bartsch, 1996, str. 165)

Posloupnost značíme různými způsoby, nejčastější označení jsou $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nebo $\{a_n\}$ a $(a_n)$. $n$-tý člen posloupnosti budeme značit $a_n$. Posloupnost může být zadána:

- rekurentně – je zadán první člen a předpis, jak se vypočítá $n$-tý člen na základě znalosti předchozích členů;
- analyticky – vzorcem pro $n$-tý člen;
- slovním vyjádřením.

### 3.1.3 Derivace

V této kapitole nejdříve definujeme pojem přírůstku (diference), protože tuto definici budeme potřebovat k samotné formulaci derivace. Diferenci poté ještě využijeme v kapitole 3.4 Diferenční rovnice. Definujeme derivace v bodě $x_0$[19] vlastní, vlastní zprava, vlastní zleva, nevlastní, nevlastní zprava, nevlastní zleva. Jako zajímavost se podíváme, jaký má derivace geometrický význam. Uvedeme pravidla pro derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí.

[19] V této kapitole používáme derivaci v bodě $x_0$. (Horský, 1973) používá značení derivace v bodě $x$.

## Diference

„Nechť funkce $f$ je definovaná na nějakém okolí $V_{x_0}$ bodu $x_0$ a nechť $x \in V_{x_0}$. Rozdíl $\Delta x = x - x_0$ nazýváme přírůstkem (diferencí) argumentu v bodě $x_0$. Rozdíl $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ nazýváme přírůstkem (diferencí) závisle proměnné funkce $f$ v bodě $x_0$. Podíl

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

se nazývá diferenční podíl funkce $f$ v bodě $x_0$.“ (Jirásek a Benda, 2006, s. 213)

## Derivace, derivace zprava, zleva

„Existuje-li vlastní limita, resp. vlastní limita zprava, resp. vlastní limita zleva diferenčního podílu

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

resp.

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

resp.

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

pak říkáme, že funkce $f$ má (vlastní) derivaci v bodě $x_0$, resp. (vlastní) derivaci zprava v bodě $x_0$, resp. (vlastní) derivaci zleva v bodě $x_0$.

Místo $f'(x_0)$ také píšeme

$$\frac{df}{dx}(x_0),\ y'(x_0),\ y'_{x_0},\ \frac{dy}{dx}(x_0),\ y'|_{x=x_0},\ D\big(f(x_0)\big)."\text{(Jirásek a Benda, 2006, s. 213)}$$

## Nevlastní derivace, nevlastní derivace zprava, zleva

„Jestliže

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = +\infty,$$

resp.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = -\infty,$$

říkáme, že funkce $f$ má v bodě $x_0$ nevlastní derivaci rovnou $+\infty$, resp. $-\infty$.

Jestliže

$$\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = +\infty,$$

resp.

$$\lim_{\Delta x \to 0-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = -\infty,$$

říkáme, že funkce $f$ má v bodě $x_0$ nevlastní derivaci zprava rovnou $+\infty$, resp. $-\infty$. Obdobně se definuje nevlastní derivace zleva.“ (Jirásek a Benda, 2006, s. 213, 214)

## Věta o derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí

Nyní bez důkazu formulujeme větu o derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí. Tuto větu poté využijeme při odvozování derivací funkcí tangens a kotangens.

„Nechť existují $f^{'}(x)$ a $g^{'}(x)$. Potom funkce $f \pm g, fg$ a pro $g(x) \neq 0$ i funkce $\frac{f}{g}$ mají v bodě $x$ derivaci a platí:

a) $\{f(x) \pm g(x)\}^{'} = f^{'}(x) \pm g^{'}(x),$

b) $\{f(x)g(x)\}^{'} = f^{'}(x)g(x) + f(x)g^{'}(x),$

c)

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}^{'} = \frac{f^{'}(x)g(x) - f(x)g^{'}(x)}{g^{2}(x)}.\text{" (Horský, 1973, s. 170)}$$

## Geometrická interpretace derivace

„Mějme dánu funkci $f$ spojitou v jistém okolí bodu $x_0$ (obr. 12). V tomto okolí zvolme bod $x_0 + \Delta x$ a vypočtěme směrnici $k' = \operatorname{tg} \alpha'$ přímky $AB$, $A = [x_0, f(x_0)]$, $B = [x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)]$ ve tvaru

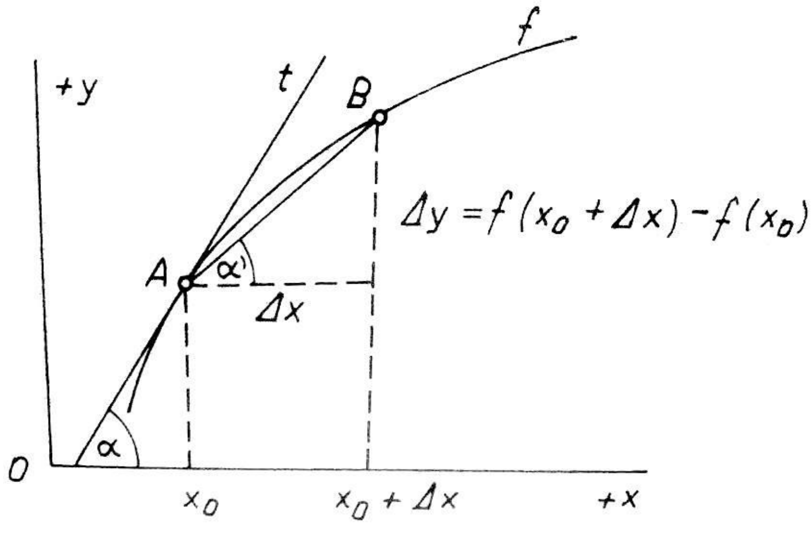
$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0}, \ \Delta x \neq 0.$$

Jestliže rozdíl $\Delta x$ hodnot nezávisle proměnné se blíží nule, bod $B$ se blíží bodu $A$ a přímka $AB$ se může blížit jisté limitní poloze $t$, kterou nazveme tečnou grafu funkce $f$ v bodě $A$. Směrnice tečny $k = \operatorname{tg} \alpha$ je pak dána ve tvaru limity

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

kterou nazýváme derivací funkcí $f$ v bodě $x_0$." (Hradilek a Stehlík, 1990, s. 242)

obr. 12



### 3.1.4 Integrály

Integrály využijeme především v definicích diferenciálních rovnic. Proto zde uvedeme základní definice určitého a neurčitého integrálu.

**Neurčitý integrál, pojem primitivní funkce**

„Nechť $F$ a $f$ jsou funkce proměnné $x$, definované na otevřeném intervalu $J$ (ohraničeném nebo neohraničeném). Jestliže pro všechna čísla $x \in J$ platí rovnice $F'(x) = f(x)$, pak říkáme, že funkce $F$ je primitivní funkcí k funkci $f$ na intervalu $J$. Množinu všech primitivních funkcí k funkci $f$ na intervalu $J$ nazýváme neurčitým integrálem funkce $f$ a označujeme ji $\int f(x)\,dx$. Funkce $f$ se nazývá integrand a symbol $\int$ integrační znak. Platí

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,\ x \in J,$$

kde $C$ je libovolné reálné číslo zvané integrační konstanta.“ (Jirásek a Benda, 2006, s. 320)

**Určitý integrál**

„Nechť $f$ je spojitá funkce v intervalu $J$ a $F$ libovolná primitivní funkce k funkci $f$ v intervalu $J$. Rozdíl $F(b) - F(a)$ funkčních hodnot funkce $F$ v libovolných bodech $a, b \in J$ nazýváme Newtonovým určitým integrálem funkce $f$ v mezích od $a$ do $b$ a píšeme ve tvaru

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Číslo $a$ se nazývá dolní mez, číslo $b$ horní mez určitého integrálu. Může platit $a < b$ i $a > b$, při $a = b$ je $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.“ (Hradilek a Stehlík, 1990, s. 300)

Využití určitého integrálu se vyskytuje hlavně v geometrii pro výpočet obsahů ploch a objemů těles. Další uplatnění integrálů je ve výpočtech délky křivky a obsahu rotační plochy. Ve fyzice se integrály využívají například pro výpočet tlakové síly kapaliny na stěnu nádoby, práce proměnné síly, statického momentu a těžiště oblouku křivky nebo momentu setrvačnosti homogenního rotačního tělesa vzhledem k rotační ose. (viz Jirásek a Benda, 2006)

### 3.1.5 Řady

Definici řady uvádíme proto, že ji budeme potřebovat v následujících podkapitolách pro definici goniometrických funkcí pomocí rozvoje nekonečné řady.

„Je-li $\{a_k\}$ číselná posloupnost, pak nakonečnou číselnou řadou (stručně číselnou řadou nebou řadou) nazýváme výraz

$$a_1 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

který často stručněji značíme $\sum_1^\infty a_k$ nebo $\sum a_k$. Sčítanec $a_m$ se nazývá $m$-tý člen řady. Výraz $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ se nazývá $n$-tý částečný součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Posloupnost

$$\{s_k\} = (s_1, s_2, s_3, \dots) = (a_1,\ a_1 + a_2,\ a_1 + a_2 + a_3, \dots)$$

se nazývá posloupnost částečných součtů řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.“ (Bartsch, 1996, str. 692)

## 3.1 Využití goniometrických funkcí v komplexních číslech

Goniometrie se využívá i v komplexních číslech. Především možnost vyjádřit komplexní čísla v goniometrickém tvaru usnadňuje vyřešení některých úloh.

V této kapitole nejdříve definujeme komplexní číslo, jeho argument a komplexně sdružené číslo. Dále se podíváme, v jakém tvaru komplexní čísla vyjadřujeme a jaké operace s nimi můžeme provádět. Bez důkazu vyslovíme Moivreovu větu, kterou poté využijeme v aplikační úloze.

„Komplexní číslo $\mathrm{i} = [0, 1]$ se nazývá imaginární jednotka; platí $\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1$, tj. $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. Pomocí i můžeme zapsat komplexní číslo $z = [a, b]$ v algebraickém tvaru $z = a + b\mathrm{i}$. Číslo $a$ je reálná část komplexního čísla $z$, číslo $b$ je imaginární část komplexního čísla $z$. Číslo $m$i, kde $m$ je reálné číslo, se nazývá ryze imaginární.“[20] (Novotná & kol., 1997, str. 324)

Reálná část komplexního čísla $z = a + \mathrm{i}b$ je obvykle značí $a = \operatorname{Re} z$, imaginární část $b = \operatorname{Im} z$. Tvar komplexního čísla$z = a + \mathrm{i}b$ označujeme jako algebraický tvar komplexního čísla.

V oboru $\mathbb{R}$ nelze určit odmocninu ze záporného čísla, nemůžeme tedy například nalézt kořeny kvadratické rovnice se záporným diskriminantem. Pokud ale množinu reálných čísel rozšíříme na množinu komplexních čísel $\mathbb{C}$, jsou tyto typy úloh řešitelné.

Dále definuje Gaussovu rovinu:

„Množinu všech komplexních čísel lze vzájemně jednoznačně zobrazit na množinu bodů roviny, ve které je zavedena kartézská soustava souřadnic. Tato rovina se nazývá rovina komplexních čísel nebo Gaussova rovina. Osa $x$ se v Gaussově rovině nazývá osa reálných čísel (reálná osa), osa $y$ je osa ryze imaginárních čísel (imaginární osa).“ (Vošický, 2007, str. 28)

Absolutní hodnota komplexního čísla vyjadřuje vzdálenost obrazu komplexního čísla od počátku Gaussovy roviny:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Rovnost dvou komplexních čísel v algebraickém tvaru takto:

$a + b\mathrm{i} = c + d\mathrm{i}$ právě tehdy, když $a = c$ a $b = d$. (viz Novotná a kol., 1997)

Dále pro komplexní čísla v algebraickém tvaru definujeme následující početní operace – sčítání, odčítání, násobení, dělení.

$$(a + b\mathrm{i}) + (c + d\mathrm{i}) = (a + c) + (b + d)\mathrm{i}$$

$$(a + b\mathrm{i}) - (c + d\mathrm{i}) = (a - c) + (b - d)\mathrm{i}$$

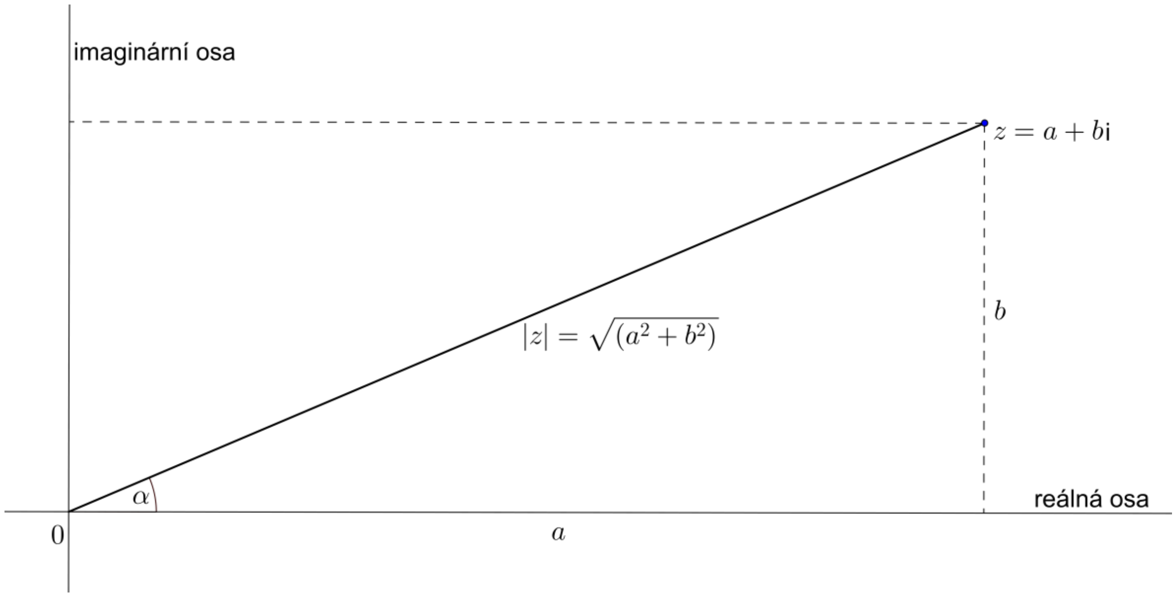
$$(a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i}) = (ac - bd) + (ad + cb)\mathrm{i}$$

[20] „Uspořádanou dvojici objektů $a$ a $b$ (v tomto pořadí) nazýváme systém $[a, b] = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ množin, kde $a$, resp. $b$ se nazývá první, resp. druhý člen uspořádané dvojice $[a, b]$. $[a, b] = [b, a] \Leftrightarrow a = b$“ (Bartsch, 1996, str. 76)

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \text{ pro } c + di \neq 0$$

„Dvě komplexní čísla, která mají stejné reálné části a jejichž imaginární části jsou opačná čísla, tj. čísla $z = a + bi$, $z = a - bi$, se nazývají čísla komplexně sdružená. Číslo komplexně sdružené k číslu $z$ označujeme $\bar{z}$.“ (Novotná a kol., 1997, s. 324)

obr. 13




Argument komplexního čísla $z = a + bi$ (viz obr. 13) je velikost orientovaného úhlu $\alpha$[21], pro který platí:

$$\cos\alpha = \frac{a}{|z|},\ \sin\alpha = \frac{b}{|z|}.$$

„Argument komplexního čísla není určen jednoznačně. Argument $\alpha$ komplexního čísla, pro který platí $\alpha \in \langle 0°; 360°)$, je určen jednoznačně a nazývá se argument komplexního čísla v základním tvaru.“ (Novotná a kol., 1997, s. 325)

[21] Orientovaný úhel $\alpha$, jehož počátečním ramene je orientovaná kladná část osy souřadnic $x$ a koncovým ramenem je orientovaná úsečka $\overrightarrow{OA}$ (kde $O$ je počátek soustavy souřadnic a $A$ je obraz komplexního čísla $z = a + bi$). (viz (Hradilek a Stehlík, 1990))

Komplexní číslo můžeme také zapsat v goniometrickém tvaru a to následujícím způsobem:

$$z = |z|(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha).$$

Stejně jako komplexní čísla v algebraickém tvaru, tak i komplexní čísla v goniometrickém tvaru můžeme porovnávat, násobit, dělit i umocňovat.

„Jestliže $a = |a|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, $b = |b|(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)$, pak $a = b$ právě tehdy, když $|a| = |b|$ a $\varphi = \psi + k \cdot 360°$, kde $k$ je celé číslo." (Novotná a kol., 1997, s. 325)

$$ab = |ab|[\cos(\varphi + \psi) + \mathrm{i}\sin(\varphi + \psi)]$$

$$a : b = \left|\frac{a}{b}\right| [\cos(\varphi - \psi) + \mathrm{i}\sin(\varphi - \psi)]$$

Pro umocňování komplexního čísla v goniometrickém tvaru platí Moivreova věta:

„Pro komplexní číslo $a = |a|(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$ a celé číslo $n$ platí

$$a^n = |a|^n(\cos n\alpha + \mathrm{i}\sin n\alpha);$$

$a^n$ je $n$-tá mocnina komplexního čísla $a$." (Novotná a kol., 1997, s. 325)

Věta o $n$-té odmocnině komplexního čísla:

„Pro nenulové komplexní číslo $a = |a|(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$, $n \in \mathbb{N}$, existuje právě $n$ různých komplexních čísel, která jsou jeho $n$-tou komplexní odmocninou:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)_c = z_k = \sqrt[n]{|a|} \cdot \left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right],$$

kde $k = 0, 1, \dots, n - 1$." (Vošický, 2007, str. 30)

Komplexní čísla se využívají i v jiných oblastech než jen v matematice:

„Běžně se komplexní čísla užívají např. k vytvoření matematického modelu střídavého proudu v elektrotechnice a funkce komplexní proměnné mají značný význam např. při matematickém vyjádření magnetických polí v užité geofyzice." (Hradilek a Stehlík, 1990, s. 52)

### 3.1.1 Aplikace goniometrie v komplexních číslech

**III. Příklad:**

Vypočítejte:

$$\left(\frac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\right)^{60}$$

(viz Calda, 2004, s. 67/2.28/d)

Řešení:

Označme

$$z=\frac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}.$$

Prvním krokem bude rozšíření zlomku, v této konkrétní úloze, imaginární jednotkou i:

$$z^{60}=\left(\frac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\right)^{60}=\left(\frac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\cdot\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\right)^{60}=\left(\frac{1+\mathrm{i}}{-1}\right)^{60}=$$

$$=(-1-\mathrm{i})^{60}=(-1)^{60}(1+\mathrm{i})^{60}=(1+\mathrm{i})^{60}$$

Dále spočítáme absolutní hodnotu komplexního čísla $z$, která určí, jak daleko od počátku soustavy se dané komplexní číslo nachází:

$$|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

Dalším krokem je vyjádření úhlu $\alpha$:

$$\sin\alpha=\frac{b}{|z|}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\alpha=\frac{a}{|z|}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Sinus je kladný v I. a II. kvadrantu, kosinus je kladný v I. a IV. kvadrantu, takže naše hledané komplexní číslo $z$ se bude nacházet v I. kvadrantu:

$$\alpha=\frac{\pi}{4}$$

Nyní aplikujeme Moiverovu větu:

$$z^{60} = \left(|z|(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)\right)^{60} = |z|^{60}(\cos(60\alpha) + \mathrm{i}\sin(60\alpha)) =$$

$$= \sqrt{2}^{60}\left(\cos\left(60\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(60\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2^{30}(\cos(15\pi) + \mathrm{i}\sin(15\pi)) =$$

$$= 2^{30}(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi) = 2^{30}(-1 + 0\mathrm{i}) = \underline{-2^{30}}$$

Goniometrický tvar komplexního čísla usnadňuje umocňování komplexních čísel.

**IV. Příklad:**

V $\mathbb{C}$ řešte rovnici a její kořeny znázorněte v Gaussově rovině:

$$x^4 + 1 = 0$$

(viz Calda, 2004, s. 84/3.7c)

Řešení:

Rovnici vyjádříme ve tvaru

$$x^4 = -1.$$

Abychom mohli číslo $z = -1$ zapsat v goniometrickém tvaru, potřebujeme vypočítat absolutní hodnotu $z$ a velikost úhlu $\alpha$:

$$|z| = \sqrt{(-1)^2} = 1$$

$$\sin\alpha = \frac{b}{|z|} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{|z|} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\sin\alpha = 0 \ \wedge\ \cos\alpha = -1 \ \Leftrightarrow\ \alpha = \pi$$

Komplexní číslo $z$ tedy zapíšeme v goniometrickém tvaru takto

$$z = (\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi)$$

Dosadíme $z$ do původní rovnice

$$x^4 - (\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi) = 0.$$

Kořeny této rovnice jsou zjevně čísla

$$x_k = (\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}) \text{ pro } k = 0, 1, 2, 3,$$

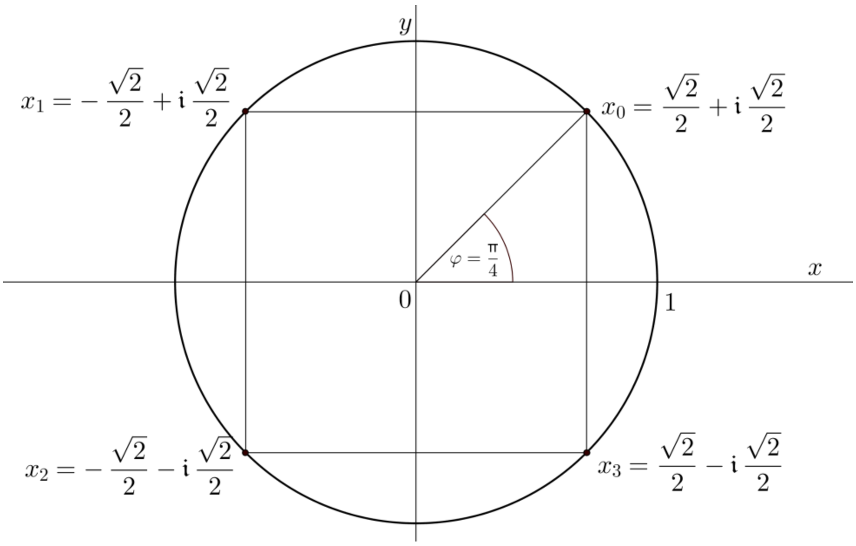
tj. čísla:

$$x_0 = \cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad x_2 = \cos\frac{5}{4}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{5}{4}\pi = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$x_1 = \cos\frac{3}{4}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{3}{4}\pi = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad x_3 = \cos\frac{7}{4}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{7}{4}\pi = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Obrazy těchto čísel $x_0, x_1, x_2, x_3$ v Gaussově rovině tvoří vrcholy čtverce a leží na kružnici s poloměrem $r = 1$ (viz obr. 14).

obr. 14



## 3.2 Goniometrické funkce

### 3.2.1 Goniometrické funkce definované pomocí rozvoje nekonečných řad[22]

„Definujeme funkce $\mathrm{e}^z, \sin z, \cos z, \operatorname{tg} z, \operatorname{cotg} z$ pro každé komplexní $z$ řadami

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \ \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}." $$

(Jarník, Diferenciální počet (II), 1984, str. 551)

„Dále také definujeme pro komplexní hodnoty $z$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} \ (\text{pokud } \cos z \neq 0), \ \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z} \ (\text{pokud } \sin z \neq 0)."$$

(Jarník, Diferenciální počet (II), 1984, str. 553)

Z předchozích tří rovnic pro každé $z$ plyne

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = 1 + \frac{\mathrm{i}z}{1!} - \frac{z^2}{2!} - \frac{\mathrm{i}z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{\mathrm{i}z^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} - \frac{\mathrm{i}z^7}{7!} + \frac{z^8}{8!} + \cdots = \cos z + \mathrm{i} \sin z.$$

Rozvoj funkce sinus

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} - \cdots$$

Rozvoj funkce cosinus

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \cdots$$

Pro každé komplexní $z$ existují následující derivace:

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^z}{\mathrm{d}z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \mathrm{e}^z,$$

[22] Zpracováno podle (Jarník, Diferenciální počet (II), 1984)

$$\frac{\mathrm{d}\sin z}{\mathrm{d}z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = \cos z\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}\cos z}{\mathrm{d}z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n-1}}{(2n-1)!} = -\sin z.$$

Pokud místo $z$napíšeme$(-z)$ a využijeme toho, že $\cos(-z) = \cos z$, $\sin(-z) =$ $= -\sin z$, dostaneme dvě důležité rovnice

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z\,, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} = \cos z - \mathrm{i}\sin z.$$

Těmto rovnicím se také říká Eulerovy vzorce. Sečtení a odečtením těchto rovnic získáme

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right),\ \sin z = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right),$$

což platí pro každé $z$.

S využitím předchozích rovnic získáme také vzorce pro tangens a kotangens

$$\operatorname{tg} z = \frac{1}{\mathrm{i}} \cdot \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} - 1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} + 1}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} \neq -1\right),\ \operatorname{cotg} z = \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} + 1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} - 1}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} \neq 1\right).$$

### 3.2.2 Odvození goniometrických vzorců

Pro lepší orientaci v textu jsou konečné odvozené vzorce zvýrazněny podtržením.

Z definice jednotkové kružnice a Pythagorovy věty snadno odvodíme vzorec:

$$\underline{1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha\ ^{23}\ (\forall\, \alpha \in \mathbb{R})}$$

Z definice funkce tangens a kotangens pomocí sinu a kosinu vypočteme vzorec pro součin těchto dvou goniometrických funkcí:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \Leftrightarrow \sin\alpha \neq 0 \wedge \cos\alpha \neq 0$$

$$\Rightarrow \underline{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\alpha = 1\ \left(\forall\, \alpha \neq k\frac{\pi}{2},\ k \in Z\right)}$$

[23] $\sin\alpha$ a $\cos\alpha$ tvoří přepony v pravoúhlém trojúhelníku, poloměr jednotkové kružnice $(r = 1)$ je přeponou tomuto trojúhelníku

Další úpravou vzorců tangens a kotangens definovaných pomocí sinu a kosinu získáme následující goniometrické vzorce:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \cos\alpha \neq 0 \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \Leftrightarrow \sin\alpha \neq 0$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} \qquad \operatorname{cotg}^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} \qquad \operatorname{cotg}^2\alpha = \frac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 \qquad \operatorname{cotg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} - 1$$

$$\underline{1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}\left(\forall\, \alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right)} \qquad \underline{1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}(\forall\, \alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z})}$$

## Vzorce pro dvojnásobný úhel

K odvození dalších goniometrických vzorců použijeme Eulerovy vzorce (viz kapitola 3.2.1, str. 46)

Pro získání vzorce dvojnásobného úhlu provedeme substituci $y = 2\alpha$ a dosazením do Eulerova vzorce $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \cos y + \mathrm{i}\sin y\right)$ získáme

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha} = \cos 2\alpha + \mathrm{i}\sin 2\alpha.$$

Poté upravíme

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right)^2 = (\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)^2 = \cos^2\alpha + 2\mathrm{i}\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha$$

a porovnáváme reálnou a imaginární část

reálná část: $\underline{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\ (\forall\, \alpha \in \mathbb{R})}$

imaginární část: $\underline{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\ (\forall\, \alpha \in \mathbb{R})}$.

Tangens dvojnásobného úhlu vyjádříme pomocí sinu a kosinu dvojnásobného úhlu a použijeme vzorce, které jsme právě odvodili. Následnou úpravou získáme požadovaný vzorec.

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1 - \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\Rightarrow \underline{\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}\left(\forall\, \alpha \neq \frac{\pi}{4}(2k+1),\ k \in \mathbb{Z}\right)}$$

## Vzorce pro součet a rozdíl úhlů

Pro odvození vzorce pro součet úhlů použijeme substituci $y = \alpha + \beta$, následně dosadíme do Eulerova vzorce $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \cos y + \mathrm{i}\sin y\right)$ a upravíme:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} = (\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta) =$$

$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + \mathrm{i}(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$

Dále budeme opět porovnávat reálnou a imaginární část:

reálná část: $\underline{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\ \left(\forall\, \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}\right)}$

imaginární část: $\underline{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\ \left(\forall\, \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}\right)}$

Pro nalezení vzorce pro rozdíl úhlů použijeme substituci $y = \alpha - \beta$ a aplikujeme vlastnosti lichosti funkce sinus a sudosti funkce kosinus.

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\beta)} = e^{\mathrm{i}\alpha}e^{-\mathrm{i}\beta} = (\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)\,[\cos\ (-\beta) + \mathrm{i}\sin\ (-\beta)] =$$

$$= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta + \mathrm{i}(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)$$

Na závěr opět porovnáváme reálnou a imaginární část:

reálná část: $\underline{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\ \left(\forall\, \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}\right)}$

imaginární část: $\underline{\sin\ (\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\ \left(\forall\, \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}\right)}$

Tangens vyjádříme pomocí sinu a kosinu a následnou úpravou dostaneme vzorec pro součet a rozdíl úhlů funkce tangens.

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\ (\alpha \pm \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta} =$$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta} \cdot \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} =$$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} \cdot \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta} =$$

$$= \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \pm \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 \mp \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\Rightarrow \underline{\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \left(\forall\ (\alpha \pm \beta) \neq \frac{\pi}{2}(2k+1),\ \ k \in \mathbb{Z}\right)}$$

Podobný postup aplikujeme na funkci kotangens.

$$\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\cos(\alpha \pm \beta)}{\sin(\alpha \pm \beta)} = \frac{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta} =$$

$$= \frac{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta} \cdot \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta} =$$

$$= \frac{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta} \cdot \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta} =$$

$$= \frac{\frac{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}{\frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}} = \frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \cdot \frac{\cos\beta}{\sin\beta} \mp 1}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \pm \frac{\cos\beta}{\sin\beta}} = \frac{\cot\alpha\cot\beta \mp 1}{\operatorname{cotg}\alpha \pm \operatorname{cotg}\beta}$$

$$\Rightarrow \underline{\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta \mp 1}{\operatorname{cotg}\alpha \pm \operatorname{cotg}\beta}\ (\forall\ (\alpha \pm \beta) \neq k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z})}$$

## Vzorce pro součet goniometrických funkcí

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

Sečtením vzorců pro sinus součtu a rozdílu úhlů získáme

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$$

Nyní provedeme substituci

$$\alpha + \beta = \gamma\ \wedge\ \alpha - \beta = \delta,$$

vyjádříme nové argumenty

$$\alpha = \frac{\gamma + \delta}{2} \wedge \beta = \frac{\gamma - \delta}{2}$$

a dosazením zpět do rovnosti $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$ získáme vzorec pro součet dvou funkcí sinus.

$$\underline{\sin \gamma + \sin \delta = 2 \sin \frac{\gamma + \delta}{2} \cos \frac{\gamma - \delta}{2} \ (\forall\, \gamma, \delta \in \mathbb{R})}$$

Podobný postup aplikujeme pro získání vzorce pro součet dvou funkcí kosinus.

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos\, (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos\, (\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$\alpha + \beta = \gamma \wedge \alpha - \beta = \delta$$

$$\alpha = \frac{\gamma + \delta}{2} \wedge \beta = \frac{\gamma - \delta}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{\cos \gamma + \cos \delta = 2 \cos \frac{\gamma + \delta}{2} \cos \frac{\gamma - \delta}{2} \ (\forall\, \gamma, \delta \in \mathbb{R})}$$

## Vzorce pro rozdíl goniometrických funkcí

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin\, (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

Vzorce pro sinus součtu a rozdílu úhlů tentokrát odečteme:

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin\, (\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$$

Opět provedeme substituci a dosadíme zpět do získané rovnice.

$$\alpha + \beta = \gamma \wedge \alpha - \beta = \delta$$

$$\alpha = \frac{\gamma + \delta}{2} \wedge \beta = \frac{\gamma - \delta}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{\sin \gamma - \sin \delta = 2 \cos \frac{\gamma + \delta}{2} \sin \frac{\gamma - \delta}{2} \ (\forall\, \gamma, \delta \in \mathbb{R})}$$

Podobný postup použijeme i pro získání vzorce pro rozdíl dvou funkcí kosinus.

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos - \sin\alpha \sin\beta$$

$$\cos\,(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos + \sin\alpha \sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos\,(\alpha - \beta) = -2\sin\alpha \sin\beta$$

$$\alpha + \beta = \gamma \;\wedge\; \alpha - \beta = \delta$$

$$\alpha = \frac{\gamma + \delta}{2} \;\wedge\; \beta = \frac{\gamma - \delta}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{\cos\gamma - \cos\delta = -2\sin\frac{\gamma + \delta}{2}\sin\frac{\gamma - \delta}{2}\,(\forall\,\gamma, \delta \in \mathbb{R})}$$

## Vzorce pro poloviční úhel

Nejdříve upravíme vzorec pro kosinus dvojnásobného úhlu. Následně použijeme vzorec $\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta$.

$$\cos 2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\beta = (1 - \sin^2\beta) - \sin^2\beta = 1 - 2\sin^2\beta$$

Další úpravou dostaneme následující vzorec, který dále upravujeme.

$$\sin^2\beta = \frac{1 - \cos 2\beta}{2}$$

$$\sqrt{\sin^2\beta} = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\beta}{2}}$$

$$|\sin\beta| = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\beta}{2}}$$

Provedeme substituci

$$\beta = \frac{\alpha}{2}$$

a získáme vzorec pro poloviční úhel.

$$\Rightarrow \underline{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}\;(\forall\,\alpha \in \mathbb{R})}$$

Pro získání vzorce pro kosinus polovičního úhlu tentokrát upravíme vzorec pro kosinus dvojnásobného úhlu za použití vzorce $\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta$.

$$\cos 2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\beta = \cos^2\beta - (1 - \cos^2\beta) = 2\cos^2\beta - 1$$

$$\cos^2\beta = \frac{\cos 2\beta + 1}{2}$$

$$\sqrt{\cos^2\beta} = \sqrt{\frac{\cos 2\beta + 1}{2}}$$

$$|\cos\beta| = \sqrt{\frac{\cos 2\beta + 1}{2}}$$

$$\text{substituce: } \beta = \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{\cos\alpha + 1}{2}} \; (\forall\, \alpha \in \mathbb{R})}$$

Vzorec pro tangens polovičního úhlu dostaneme prostým využitím předchozích vzorců pro sinus a kosinus polovičního úhlu.

$$\left|\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\right| = \frac{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}{\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|} = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{\sqrt{\frac{\cos\alpha+1}{2}}} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}\cdot\frac{2}{\cos\alpha + 1}} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

$$\Rightarrow \underline{\left|\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \; (\forall\, \alpha \neq \pi(2k+1),\ k \in \mathbb{Z})}$$

### 3.2.3 Odvození derivací goniometrických funkcí

a) odvození derivace funkce sinus z definice limity s využitím vzorců pro sinus součtu úhlů $\sin(x + \Delta x) = \sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x$ a známé limity

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \sin \Delta x}{\Delta x} = \cos x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = \cos x$$

$$\Rightarrow \underline{(\sin x)' = \cos x \ (\forall\, x \in \mathbb{R})}$$

b) odvození derivace funkce kosinus z definice limity s využitím vzorců pro kosinus součtu úhlů $\cos(x + \Delta x) = \cos x \cos \Delta x - \sin x \sin \Delta x$ a známé limity

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \cos \Delta x - \sin x \sin \Delta x - \cos x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\sin x \sin \Delta x}{\Delta x} = -\sin x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = -\sin x$$

$$\Rightarrow \underline{(\cos x)' = -\sin x \ (\forall\, x \in \mathbb{R})}$$

c) odvození derivace funkce tangens s využitím pravidla o derivaci podílu, sudosti funkce kosinus, lichosti funkce sinus a vzorců

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1,\ \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},\ (\sin x)' = \cos x,\ (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'(\cos x) - (\sin x)(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow \underline{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \left(\forall\, x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1),\ k \in \mathbb{Z}\right)}$$

d) odvození derivace funkce kotangens s využitím pravidla o derivaci podílu, sudosti funkce kosinus, lichosti funkce sinus a vzorců

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1,\ \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x},\ (\sin x)' = \cos x\,,\ (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{cotg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'(\sin x) - (\cos x)(\sin x)'}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{(-\sin x)(\sin x) - (\cos x)(\cos x)}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-(\cos^2 x + \sin^2 x)}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$\Rightarrow \underline{(\operatorname{cotg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} \quad (\forall\, x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z})}$$

### 3.2.4 Přehled dalších vlastností goniometrických funkcí

Tyto vlastnosti platí na definičních oborech jednotlivých funkcí a opírají se o již dříve uvedené definice derivací, integrálů, limit, suprema, infima a s nimi spojené formulace popsané v kapitole 2.1.4 Vlastnosti funkcí uváděné na středních školách.

a) $\sin x$

- $(\sin x)' = \cos x \ (\forall\, x \in \mathbb{R})$
- $\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + c \ (\forall\, x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R})$
- $\lim_{x\to\infty} \sin x$ neexistuje
- $\sup_{x\in\mathbb{R}}(\sin x) = \max_{x\in\mathbb{R}}(\sin x)$
- $\inf_{x\in\mathbb{R}}(\sin x) = \min_{x\in\mathbb{R}}(\sin x)$

b) $y = \cos x$

- $(\cos x)' = -\sin x \quad (\forall\, x \in \mathbb{R})$
- $\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + c \quad (\forall\, x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R})$
- $\lim_{x\to\infty} \cos x$ neexistuje
- $\sup_{x\in\mathbb{R}}(\cos x) = \max_{x\in\mathbb{R}}(\cos x)$
- $\inf_{x\in\mathbb{R}}(\cos x) = \min_{x\in\mathbb{R}}(\cos x)$

c) $y = \operatorname{tg} x$

- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \left(\forall\, x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1),\ k \in \mathbb{Z}\right)$
- $\int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + c \quad \left(\forall\, x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1),\ k \in \mathbb{Z},\ c \in \mathbb{R}\right)$
- $\lim_{x\to\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi+} \operatorname{tg} x = -\infty,\, k \in \mathbb{Z}$
- $\lim_{x\to\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi-} \operatorname{tg} x = +\infty,\, k \in \mathbb{Z}$
- $\sup_{x\in A}(\operatorname{tg} x) = +\infty$, kde množina $A = D(\operatorname{tg} x)$
- $\inf_{x\in A}(\operatorname{tg} x) = -\infty$, kde množina $A = D(\operatorname{tg} x)$

d) $y = \operatorname{cotg} x$

- $(\operatorname{cotg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} \quad (\forall\, x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$
- $\int \operatorname{cotg} x \, \mathrm{d}x = \ln|\sin x| + c \quad (\forall\, x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ c \in \mathbb{R})$
- $\lim_{x\to k\pi+} \operatorname{cotg} x = +\infty,\ k \in \mathbb{Z}$
- $\lim_{x\to k\pi-} \operatorname{cotg} x = -\infty,\ k \in \mathbb{Z}$
- $\sup_{x\in B}(\operatorname{cotg} x) = +\infty$, kde množina $B = D(\operatorname{cotg} x)$
- $\inf_{x\in B}(\operatorname{cotg} x) = -\infty$, kde množina $B = D(\operatorname{cotg} x)$

## 3.3 Cyklometrické funkce[24]

Mezi cyklometrické funkce patří arkussinus, arkuskosinus, arkustangens a arkuskotangens.

„Cyklometrickými funkcemi nazýváme inverzní funkce ke goniometrickým funkcím. Protože goniometrické funkce jsou ryze monotónní jen na určitých intervalech, existují inverzní funkce jen na těchto intervalech.“ (Bartsch, 1996, s. 376)

### 3.3.1 Arkussinus

Funkce $\sin x$ je spojitá v intervalu $(-\infty,\ \infty)$, ale není na tomto intervalu ryze monotónní. Pokud chceme k funkci $\sin x$ sestrojit inverzní funkci, musíme obor funkce $\sin x$ omezit na interval, v kterém je funkce $\sin x$ ryze monotónní. Zvolíme interval $I = \langle -\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\rangle$. Funkce $\sin x$ je na intervalu $I$ rostoucí, $\min_{x\in I} \sin x = \sin -\frac{\pi}{2} = -1$ a $\max_{x\in I} \sin x = \sin \frac{\pi}{2} = 1$.

„Funkce $\sin x$ v oboru $\langle -\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\rangle$ zobrazuje tento interval na interval $\langle -1,\ 1\rangle$. Funkci inverzní k této funkci označíme znakem $\arcsin x$.

V intervalu $\langle -1,\ 1\rangle$ je funkce $\arcsin x$ rostoucí a spojitá.“ (Jarník, Diferenciální počet (I), 1974, str. 202)

### 3.3.2 Arkuskosinus

Funkce $\cos x$ je spojitá a klesající v intervalu $J = \langle 0,\ \pi\rangle$. Dále $\min_{x\in J} \cos x =$

$= \cos \pi = -1$ a $\max_{x\in J} \cos x = \cos 0 = 1$.

„Funkce $\cos x$ v oboru $\langle 0,\ \pi\rangle$ zobrazuje interval $\langle 0,\ \pi\rangle$ na interval $\langle -1,\ 1\rangle$. Funkci inverzní k této funkci značíme znakem $\arccos x$.

V intervalu $\langle -1,\ 1\rangle$ je funkce $\arccos x$ klesající a spojitá.“ (Jarník, Diferenciální počet (I), 1974, str. 204)

[24] Zpracováno podle (Jarník, Diferenciální počet (I), 1974)

### 3.3.3 Arkustangens

Funkce $\operatorname{tg} x$ je rostoucí a spojitá v otevřeném intervalu $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$. Dále $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x = -\infty$ a $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x = \infty$.

„Funkce $\operatorname{tg} x$ v oboru $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ zobrazuje interval $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ na interval $(-\infty,\ \infty)$. Funkci inverzní k této funkci značíme $\operatorname{arctg} x$.

V intervalu $(-\infty,\ \infty)$ je funkce $\operatorname{arctg} x$ rostoucí a spojitá.“ (Jarník, Diferenciální počet (I), 1974, str. 205)

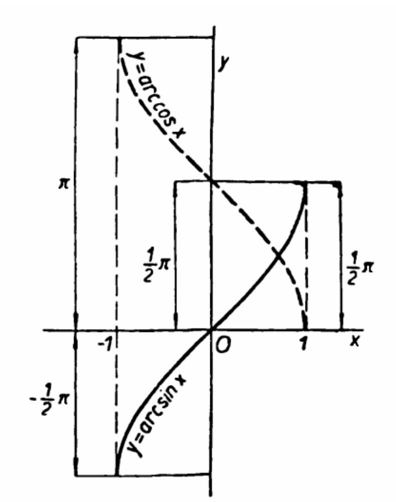
### 3.3.4 Arkuskotangens

Funkce $\operatorname{cotg} x$ je klesající a spojitá v otevřeném intervalu $(0,\ \pi)$. Dále $\lim_{x\to-0+} \operatorname{cotg} x = \infty$ a $\lim_{x\to\pi-} \operatorname{cotg} x = -\infty$.

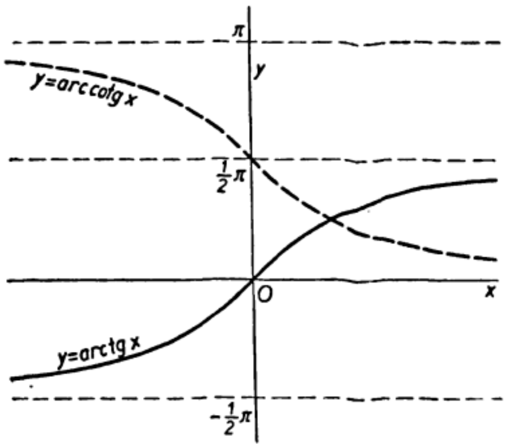
„Funkce $\operatorname{cotg} x$ v oboru $(0,\ \pi)$ zobrazuje tento interval na interval $(-\infty,\ \infty)$. Funkci inverzní k této funkci nazveme $\operatorname{arccotg} x$.

V intervalu $(-\infty,\ \infty)$ je funkce $\operatorname{arccotg} x$ klesající a spojitá.“ (Jarník, Diferenciální počet (I), 1974, str. 206)

obr. 15




obr. 16




Grafy cyklometrických funkcí (obr. 15 a obr. 16) lze sestrojit pomocí osové souměrnosti (s osou I. a III. kvadrantu) s grafy goniometrických funkcí na intervalech, kde jsou tyto funkce ryze monotónní.

## 3.4 Diferenční rovnice

Abychom se mohli zabývat využitím goniometrických funkcí v diferenčních rovnicích, uvedeme nejdříve definice, které je nutné znát. Nejdříve definujeme diferenci $k$-tého řádu, poté rozdělíme diferenční rovnice do dvou typů. Dále definujeme lineárně závislé a nezávislé funkce, lineární diferenční rovnice. První využití goniometrických funkcí nalezneme při výpočtu imaginárních kořenů charakteristické rovnice. Uvedeme postupy řešení lineárních diferenčních rovnic – metodu odhadu partikulárního řešení (kde se opět budeme zabývat aplikací goniometrických funkcí) a metodu variace konstant. Na závěr vyřešíme vybrané úlohy využívající goniometrické funkce v diferenčních rovnicích.

### 3.4.1 Diference posloupnosti

Definici diference jsme uvedli již v kapitole 3.1.3 Derivace. Diference posloupnosti je tedy rozdíl hodnot jejích dvou po sobě následujících členů.

Uvedeme větu o součtu, součinu, podílu diferencí a násobení diference reálnou konstantou:

„Nechť $(y_n)$, $(z_n)$ jsou posloupnosti, $C$ je konstanta. Pak platí:

(I) $\Delta(y_n + z_n) = \Delta y_n + \Delta z_n,$

(II) $\Delta(Cy_n) = C\Delta y_n,$

(III) $\Delta(y_n z_n) = y_n\Delta z_n + z_n\Delta y_n + \Delta y_n\Delta z_n,$

(IV)

$$\Delta\left(\frac{y_n}{z_n}\right) = \frac{(\Delta y_n)z_n - y_n(\Delta z_n)}{z_n z_{n+1}}.$$

Důkaz: Dokažme např. (IV):

$$\Delta\left(\frac{y_n}{z_n}\right) = \frac{y_{n+1}}{z_{n+1}} - \frac{y_n}{z_n} = \frac{y_{n+1}z_n - y_n z_{n+1}}{z_n z_{n+1}} = \frac{y_{n+1}z_n - y_n z_n - (y_n z_{n+1} - y_n z_n)}{z_n z_{n+1}} =$$

$$= \frac{(\Delta y_n)z_n - y_n(\Delta z_n)}{z_n z_{n+1}}."$$

(Kaňka a Henzler, 2000, s. 351)

### 3.4.2 Vyšší diference posloupnosti

„Diference $\Delta y_n$ členů posloupnosti $(y_n)$ tvoří posloupnost $(\Delta y_n)$; z členů této posloupnosti lze opět vypočítat diference, tzv. druhé diference posloupnosti $(y_n)$. Označíme je $\Delta^2 y_n$; definujeme tedy

$$\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n).$$

Zcela analogicky definujeme třetí diferenci

$$\Delta^3 y_n = \Delta(\Delta^2 y_n)$$

atd. Obecně definujeme $k$-tou diferenci:

$k$-tou diferenci posloupnosti $(y_n)$ v bodě $n \in \mathcal{N}_0$ značíme $\Delta^k y_n$ a definujeme takto:

(1) Pro $k = 0$ definujeme $\Delta^0 y_n = y_n$.

(2) Nechť jsou definovány diference až do $(k-1)$-ní včetně, pak $k$-tá diference je definována vztahem $\Delta^k y_n = \Delta(\Delta^{k-1} y_n)$.

Místo ”$k$-tá diference” též říkáme ”diference $k$-tého řádu”.“[25](Kaňka a Henzler, 2000, s. 351, 352)

### 3.4.3 Diference funkce

„Je dán bod $x_0$ a číslo $h > 0$. Nechť funkce $y = f(x)$ je definována v bodech $x_0$ a $x_0 + h$. Diference funkce $f(x)$ v bodě $x_0$ je číslo $f(x_0 + h) - f(x_0)$. Značíme

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

a čteme „delta $f(x_0)$“.

Číslu $h$ říkáme diference argumentu nebo diferenční krok. Bodu $x_0$ se říká někdy počáteční bod diference.“ (Prágerová, 1971, str. 9)

Dále se budeme zabývat diferencí funkce.

[25] $\mathcal{N}_0$ je množina všech přirozených čísel včetně 0.

### 3.4.4 Diferenční rovnice 1. typu

Prágerová (1971) dělí diferenční rovnice do dvou typů. Mezi rovnice prvního typu řadí difereční rovnice $k$-tého řádu.

„Nechť pro všechny $x \in \mathcal{M}$ je definovaná funkce $f(x, y, \Delta y, \Delta^2 y, \dots, \Delta^k y)$. Rovnici tvaru

$$f(x, y, \Delta y, \Delta^2 y, \dots, \Delta^k y) = 0,$$

ve které je neznámou funkce $y = \varphi(x)$, nazýváme diferenční rovnicí $k$-tého řádu a 1. typu definovanou v $\mathcal{M}$.

Zvláštním případem diferečních rovnic 1. typu jsou rovnice tvaru:

$$\Delta^k y = f(x),$$

kde funkce $f(x)$ na pravé straně neobsahuje neznámou funkci $y$.“[26] (Prágerová, 1971, stránky 42, 43)

Difereční rovnice $\Delta^k y = f(x)$ může mít nekonečně mnoho řešení nebo žádné řešení. Definice difereční rovnice $k$-tého řádu a 1. typu je analogická k definici diferenciální rovnice, pokud nahradíme difirence derivacemi odpovídajícího řádu.

### 3.4.5 Diferenční rovnice 2. typu

Mezi rovnice druhého typu řadí Prágerová (1971) tyto difereční rovnice:

„Nechť je pro všechna $x \in \mathcal{M}$ definovaná funkce $g(x, y_x, y_{x+1}, \dots, y_{x+k})$, kde $y_{x+j} = \varphi(x + j)$, $j = 0, 1, \dots, k$. Rovnici tvaru

$$g(x, y_x, y_{x+1}, \dots, y_{x+k}) = 0,$$

ve které je neznámou funkce $y_x = \varphi(x)$, nazýváme diferenční rovnicí 2. typu definovanou v $\mathcal{M}$. Jestliže jsou v této rovnici koeficienty u $y_x$ a $y_{x+k}$ pro všechna $x \in \mathcal{M}$ nenulové, říkáme, že rovnice je $k$-tého řádu.“ (Prágerová, 1971, str. 45)

[26] $\mathcal{M}$ je neprázdná množina, pro kterou je funkce $f(x)$ definovaná ve všech bodech $x$.

Každou funkci $y_x = \varphi(x)$, která splňuje danou rovnici $\forall\, x \in \mathcal{M}$, nazýváme řešením rovnice v $\mathcal{M}$. Definiční obor funkce $\varphi(x)$ musí obsahovat všechna $x \in \mathcal{M}$ a také body $x + 1, x + 2, \dots, x + k$.

### 3.4.6 Lineráně nezávislé funkce

„Říkáme, že funkce $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x)$, společně definované pro $x \in \mathcal{M}$, jsou lineárně závislé v $\mathcal{M}$, jestliže existuje aspoň jedna konstanta $C_i \neq 0,\ i = 1, 2, \dots, k$, tak, aby pro všechna $x \in\ \mathcal{M}$ platila rovnice:

$$C_1\varphi_1(x), +C_2\ \varphi_2(x) +\ \dots + C_n\varphi_n(x) = 0.$$

Není-li tomu tak, pak říkáme, že funkce $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x)$ jsou lineárně nezávislé v $\mathcal{M}$." (Prágerová, 1971, str. 48)

### 3.4.7 Linerární diferenční rovnice

„Diferenční rovnice tvaru

$$a_0(x)y_x + a_1(x)y_{x+1} + \dots + a_k(x)y_{x+k} = f(x),$$

kde $f(x), a_0(x), a_1(x), \dots,\ a_k(x)$ jsou libovolné funkce proměnné $x$ definované v $\mathcal{M}$, přičemž $a_0(x) \neq 0$ a $a_k(x) \neq 0$ pro $x \in\ \mathcal{M}$, nazýváme lineárními diferenčními rovnicemi $k$-tého řádu s nekonstatními koeficienty s pravou stranou; $a_0,\ a_1, \dots,\ a_k$ nazýváme koeficienty, $f(x)$ nazýváme pravou stranou.

Jestliže všechny funkce $a_0(x),\ a_1(x), \dots, a_k(x)$ jsou konstanty, říkáme, že rovnice má konstantní koeficienty; pak budeme značit $a_0(x) = a_0, \dots, a_k(x) = a_k$.

Jestliže $f(x) = 0$ pro $x \in\ \mathcal{M}$, říkáme, že rovnice je bez pravé strany, nebo že je homogenní. V opačném případě mluvíme o nehomogenních rovnicích nebo o rovnicích s pravou stranou.

V dalším označíme

$$\sum_{j=0}^{k} a_j y_{x+j} = 0 \quad \text{jako (I.)}$$

a

$$\sum_{j=0}^{k} a_j y_{x+j} = f(x) \text{jako (II.)."}$$

(Prágerová, 1971, str. 53)

Dále Prágerová (1971) uvádí obecné vlastnosti lineárních diferenčních rovnic.

**a) Existenční věta pro lineární diferenční rovnici**

Existenční větu zde uvedeme bez důkazu.

„Nechť je dáno $k$ hodnot: $y_c, y_{c+1}, \dots, y_{c+k-1}$ v $k$ po sobě jdoucích bodech z definičního oboru $\mathcal{M}$ lineární diferenční rovnice (II.) $k$-tého řádu.

Potom existuje v $\mathcal{M}$ jediné řešení rovnice (II.), které nabývá předepsaných hodnot $y_c, y_{c+1}, \dots, y_{c+k-1}$ v daných bodech $c, c+1, \dots, c+k-1$." (Prágerová, 1971, stránky 55, 56)

**b) Homogenní rovnice (I.) a fundamentální systém řešení**

„Říkáme, že funkce $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x)$, které jsou partikulárním řešením homogenní rovnice (I.) v množině $\mathcal{M} = \{x_0 + n\}_{n=0}^{\infty}$ tvoří fundamentální systém řešení, jestliže jsou funkce $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x)$ lineráně nezávislé v $\mathcal{M}$." (Prágerová, 1971, str. 58)

**c) Obecné řešení homogenní rovnice (I.)**

„Nechť funkce $\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice (I.) v $\mathcal{M}$. Nechť $\varphi(x)$ je libovolné partikulární řešení rovnice (I.) v $\mathcal{M}$. Potom existují konstanty $C_1, \dots, C_k$ tak, že

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{k} C_j \varphi_j(x)$$

pro $x \in \mathcal{M} = \{x + n\}_{n=0}^{\infty}$." (Prágerová, 1971, str. 59)

Tato věta je opět uvedena bez důkazu.

**d) Sestavení diferenční rovnice z fundamentálního systému**

V tomto bodě řešíme opačnou úlohu – je dán fundamentální systém řešení homogenní diferenční rovnice a my máme tuto rovnici sestavit.

**e) Rovnice s pravou stranou (II.)**

„Nechť $Y_x = \sum_{j=1}^{k} C_j \varphi_j(x)$ je obecné řešení homogenní rovnice (I.); nechť $Z_x = \psi(x)$ je partikulární řešení nehomogenní rovnice (II.) s pravou stranou $f(x)$. Potom obecné řešení rovnice (II.) je funkce

$$y_x = Y_x + Z_x.\text{“}$$

(Prágerová, 1971, stránky 62, 63)

Tuto větu uvádíme bez důkazu, využijeme ji ale v jedné z aplikačních úloh v kapitole 3.4.11 Aplikační úlohy v diferenčních rovnicích.

**f) Partikulární řešení určené počátečními podmínkami**

Označme $k$ po sobě jdoucích bodů z oboru rovnice $\mathcal{M}$ - $x_1, x_2, \dots, x_k$. Tyto body nabývají hodnot $y_{x_1} = Y_1, y_{x_2} = Y_2, \dots, y_{x_k} = Y_k$ – to jsou počáteční podmínky a z těch lze jednoznačně určit konstanty $C_1, \dots, C_k$. (viz (Prágerová, 1971))

### 3.4.8 Postup řešení homogenní lineární difereční rovnice s konstantními koeficienty

„Hledáme netriviální řešení rovnice:

$$a_0 y_x + a_1 y_{x+1} + \dots + a_k y_{x+k} = 0, \quad \text{(III.)}$$

kde $a_0, a_1, \dots, a_k$ jsou dané konstanty, $a_0 \neq 0, a_k \neq 0$, a to pro $x = x_0 + n, n = 0, 1, 2, \dots$. Předpokládejme, že partikulární řešení rovnice (III.) lze psát ve tvaru $y_x = \lambda^x$, kde $\lambda$ je jistá konstanta. Tuto konstantu $\lambda$ vypočítáme dosazením $y_x = \lambda^x$ do (III.):

$$a_0 \lambda^x + a_1 \lambda^{x+1} + \dots + a_k \lambda^{x+k} = 0.$$

Protože hledáme netriviální řešení, je $\lambda^x \neq 0$ a můžeme rovnici dělit funkcí $\lambda^x$. Dostaneme

$$a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_k \lambda^k = 0. \quad \text{(IV.)"}$$ (Prágerová, 1971, str. 64)

Kořeny algebraické rovnice (IV.) mohou být reálné (jednoduché nebo vícenásobné) nebo imaginární (jednoduché nebo vícenásobné).

„Rovnici

$$\sum_{j=0}^{k} a_j \lambda^j = 0$$

nazýváme charakteristickou rovnicí diferenční rovnice

$$\sum_{j=0}^{k} a_j \, y_{x+j} = 0."$$

(Prágerová, 1971, str. 65)

Ve své bakalářské práci se dále budu zabývat případy, kdy má charakteristická rovnice imaginárními kořeny. Zde nalezneme další využití goniometrických funkcí.

### 3.4.9 Imaginární kořeny charakteristické rovnice

V této kapitole budeme používat následující značení:

- algebraický tvar komplexního čísla: $z = \alpha + \mathrm{i}\beta$, kde $\alpha$ je reálnou částí a $\beta$ je imaginární částí komplexního čísla;
- goniometrický tvar kompexního čísla: $z = r(\cos\omega + \mathrm{i}\sin\omega)$, kde

  $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \geq 0$, $\alpha = r\cos\omega$, $\beta = r\sin\omega$, $\omega$ je argument komplexního čísla,

  $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha = \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha};$$
- pro $\alpha$ budeme používat hodnoty z intervalu $(-\pi, \pi)$.

„Má-li polynom

$$P_k(\lambda) = \sum_{j=0}^{k} a_j \lambda^j$$

s reálnými koeficienty komplexní kořen $\lambda_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$, pak má i kořen $\lambda_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta$ komplexně sdružený s $\lambda_1$." (Prágerová, 1971, str. 70)

Pro libovolná $\alpha, \beta$ platí

$$\mathrm{e}^{\alpha+\mathrm{i}\beta} = \mathrm{e}^{\alpha}(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta)$$

a jelikož $r = \mathrm{e}^{\ln r}$, pak dostaneme

$$z = r(\cos\omega + \mathrm{i}\sin\omega) = \mathrm{e}^{\ln r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega} = \mathrm{e}^{(\ln r)+\mathrm{i}\omega}.$$

„Nechť má charakteristická rovnice imaginární kořeny $\lambda_{1,2} = r(\cos\omega \pm \mathrm{i}\sin\omega)$. Pak má příslušná homogenní diferenční rovnice tato lineárně nezávislá partikulární řešení:

$$\varphi_1(x) = r^x \cos\omega x\,, \qquad \varphi_2(x) = r^x \sin\omega x,$$

a jejím řešením je

$$\varphi_{1,2}(x) = r^x(C_1\cos\omega x + C_2\,\mathrm{i}\sin\omega x),$$

kde $C_1, C_2$ jsou libovolné konstanty.“ (Prágerová, 1971, str. 71)

### 3.4.10 Postup řešení lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty s pravou stranou

V této kapitole se budeme zabývat rovnicemi ve tvaru

$$\sum_{j=0}^{k} a_j y_{x+j} = f(x),$$

kde $a_0, \dots, a_k$ jsou konstanty, $a_0 \neq 0$ a $a_k \neq 0$. Tyto rovnice můžeme řešit buď odhadem partikulárního řešení, nebo metodou variace konstant.

„Pro oba postupy je třeba nejprve nalézt obecné řešení příslušné diferenční rovnice bez pravé strany, které, jak již víme, je funkce tvaru

$$Y_x = \sum_{j=1}^{k} C_j\varphi_j(x).$$

Pro obecné řešení homogenní rovnice budeme nyní užívat značení $Y_x$ na rozdíl od hledaného obecného řešení rovnice s pravou stranou, které budeme značit $y_x$.“ (Prágerová, 1971, str. 79)

## Metoda odhadu partikulárního řešení

„Této metody používáme jen pro speciální pravé strany $f(x)$, a to pro funkce $f(x)$ utvořené součtem nebo součinem z funkcí $k, x^n, \sin \alpha x$, $\cos \alpha x$, jako jsou např.

$$f(x) = P_n(x),$$

kde $P_n(x)$ je polynom stupně $n$,

$$f(x) = P_n(x) q^n,$$

nebo

$$f(x) = P_n(x) \sin \alpha x,$$

nebo

$$f(x) = P_n(x) q^n \cos \alpha x$$

apod.

Protože tyto funkce mají tu vlastnost, že jejich diference $1., 2., \dots$ až $k$-tého řádu a jejich lineární kombinace jsou opět funkce téhož typu, usuzujeme z toho, že platí i obráceně; známe-li výslednou funkce $f(x)$, utvořenou součtem

$$\sum_{j=0}^{k} a_j Z_{x+j},$$

(tj. utvořenou lineární kombinací), pak funkce $Z_x$ je stejného typu jako $f(x)$.“

(Prágerová, 1971, str. 80)

Funkci $Z_x$ určíme tak, že dosadíme odhadnutý tvar $Z_x$ s neurčitými koeficienty (získané porovnáním s koeficienty pravé strany $f(x)$) do zadané diferenční rovnice. Funkce

$$y_x = Y_x + Z_x$$

je pak obecným řešením dané diferenční rovnice s pravou stranou.

„Je dána rovnice s konstantními koeficienty:

$$\sum_{j=0}^{k} a_j y_{x+j} = P_n(x) q^n \cos \alpha x,$$

kde $P_n(x)$ je polynom stupně $n \geq 0$, přičemž může být i $q = 1$ nebo $\alpha = 0$.

a) Nechť má charakteristická rovnice kořeny

$$\lambda_j \neq q(\cos \alpha + \mathrm{i} \sin \alpha).$$

Pak je partikulárním řešením dané rovnice funkce tvaru

$$Z_n = [Q_n(x) \sin \alpha x + R_n(x) \cos \alpha x] q^x,$$

kde $Q_n(x)$ a $R_n(x)$ jsou jisté polynomy stupně $n$.

b) Nechť charakteristická rovnice má některý kořen

$$\lambda_j = q(\cos \alpha + \mathrm{i} \sin \alpha),$$

a to $s$-násobný, $s \geq 1$. Pak je partikulárním řešením dané rovnice funkce tvaru

$$Z_n = x^s [Q_n(x) \sin \alpha x + R_n(x) \cos \alpha x] q^x."$$

(Prágerová, 1971, str. 84)

## Metoda variace konstant

„Nechť obecné řešení rovnice $\sum_{j=0}^{k} a_j x_{x+j} = 0$ je funkce

$$Y_x = \sum_{j=1}^{k} C_j \varphi_j(x).$$

Hledejme řešení rovnice

$$\sum_{j=0}^{k} a_j x_{x+j} = f(x)$$

s pravou stranou $f(x)$, a to ve tvaru, které se liší od obecného řešení $Y_x$ příslušné homogenní rovnice jen tím, že $C_j$ nebudou konstanty, ale jisté funkce proměnné $x$, tj.

budeme psát $C_j = C_j(x)$; této změně konstant ve funkce říkáme variace konstant.“ (Prágerová, 1971, str. 86)

### 3.4.11 Aplikační úlohy v diferenčních rovnicích

**V. Příklad:**

„Stanovte diference posloupností:

(a) $(5n^2 - 3n + 1)$

(b) $(\ln(n+1))$

(c) $(n3^n)$

(d) $\left(\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right)\right)$. "(Kaňka a Henzler, 2000, s. 369)

Řešení:

(a)
$$\Delta(5n^2 - 3n + 1) = \Delta(5n^2) - \Delta(3n) + \Delta(1) =$$
$$= 5\Delta(n^2) - 3\Delta(n) + \Delta(1) =$$
$$= 5((n+1)^2 - n^2) - 3\big((n+1) - n\big) + 0 =$$
$$= 5\big((n^2 + 2n + 1) - n^2\big) - 3 =$$
$$= 10n + 2$$

(b)
$$\Delta(\ln(n+1)) = (\ln(n+2) - \ln(n+1)) =$$
$$= \left(\ln\frac{n+2}{n+1}\right)$$

(c)
$$\Delta(n3^n) = \big((n+1)3^{n+1} - n3^n\big) =$$
$$= 3^n(3(n+1) - n) =$$
$$= 3^n(2n+3)$$

(d)
$$\Delta\left(\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(\cos\left((n+1)\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(n\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$
$$= \left(\cos\left(n\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(n\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= \left(\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6} - \sin\left(n\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6} - \cos\left(n\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(n\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(n\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(n\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

**VI. Příklad:**

„Rovnici 1. typu $\Delta^2 y - 3\Delta y = x$ s krokem $h = 1$ převeďte na rovnici 2. typu.

Řešení:

Dosadíme

$$\Delta y = y_{x+1} + y_x, \Delta^2 y = y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x$$

do dané rovnice a dostaneme

$$(y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x) - 3(y_{x+1} - y_x) = x.$$

Hledaný tvar je

$$y_{x+2} - 5y_1 + 4y_x = x.$$

Je to rovnice 2. řádu pro všechna $x \in (-\infty,\ \infty)$.“ (Prágerová, 1971, str. 45)

**VII. Příklad:**

„Převeďte danou diferenční rovnic na tvar neobsahující diference:

$$\Delta^2 y_n - 3\Delta y_n + 5y_n = 2^n.\text{" (Kaňka a Henzler, 2000, s. 369)}$$

Řešení:

Nejdřív použijeme vzorec pro výpočet $k$-té diference $\Delta^k y_n = \Delta(\Delta^{k-1} y_n)$ a poté upravíme rovnici.

$$\Delta(y_{n+1} - y_n) - 3(y_{n+1} - y_n) + 5y_n = 2^n$$

$$y_{n+2} - y_{n+1} - y_{n+1} + y_n - 3y_{n+1} - 3y_n + 5y_n = 2^n$$

$$y_{n+2} - 5y_{n+1} + 9y_n = 2^n$$

**VIII. Příklad:**

„Vypočítejte obecné řešení rovnice:

$$y_{x+2} + 4y_x = 0.$$

Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + 4 = 0,$$

$$\lambda^2 = -4,$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2\mathrm{i}.$$

Ryze imaginární číslo 2i má $r = 2, \omega = \frac{\pi}{2}$. Tedy obecné řešení je

$$y_x = 2^x \left( C_1 \cos \frac{\pi}{2} x + C_2 \sin \frac{\pi}{2} x \right). \text{"}$$

(Prágerová, 1971, str. 71)

**IX. Příklad:**

„Vypočítejte obecné řešení pro $x = x_0 + n$, kde $n = 0, 1, 2, ...$:

$$y_{x+2} + 4y_x = 2\sqrt{3} y_{x+1} \text{" (viz (Prágerová, 1971, str. 97))}$$

Hledáme obecné řešení této diferenční rovnice. Nejdříve napíšeme charakteristickou rovnici:

$$\lambda^2 + 4 = 2\sqrt{3}\lambda$$

$$\lambda^2 - 2\sqrt{3}\lambda + 4 = 0$$

Dostali jsme kvadratickou rovnici s neznámou $\lambda$, jejímiž kořeny jsou

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{3} \pm \mathrm{i}$$

Imaginární kořeny charakteristické rovnice jsou komplexní čísla $\lambda_{1,2} = \sqrt{3} \pm \mathrm{i}$. Pro výpočet absolutní hodnoty komplexního čísla dosadíme $\alpha = \sqrt{3}$ a $\beta = 1$ do vzorce $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ a získáme

$$r = 2.$$

Pro získání obecného řešení této diferenční rovnice ještě potřebujeme spočítat úhel $\omega$. Použijeme vzorce $\alpha = r\cos\omega$, $\beta = r\sin\omega$.

$$\alpha = r\cos\omega \qquad \beta = r\sin\omega$$

$$\sqrt{3} = 2\cos\omega \qquad 1 = 2\sin\omega$$

$$\cos\omega = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin\omega = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow\ \omega = \frac{\pi}{6}$$

Výsledné obecné řešení zapíšeme ve tvaru

$$y_x = 2^x\left(C_1\sin\frac{\pi}{6}x + C_2\cos\frac{\pi}{6}x\right).$$

**X. Příklad:**

Najděte obecné a partikulární řešení lineární diferenční rovnice 2. typu s konstantními koeficienty se speciální pravou stranou:

$$y_{x+1} + 2y_x = 2^x\sin\frac{\pi}{6}x \text{ viz (Prágerová, 1971, s. 97)}$$

Jelikož je pravá strana ve tvaru $P_n(x)q^n\sin\alpha x$, budeme předpokládat, že $Z_x$ je funkce téhož tvaru, tj. že

$$Z_x = \left(a\sin\frac{\pi}{6}x + b\cos\frac{\pi}{6}x\right)2^x.$$

Dosadíme do zadané diferenční rovnice

$$\left[a\sin\frac{\pi}{6}(x+1) + b\cos\frac{\pi}{6}(x+1)\right]2^{x+1} + 2\left[\left(a\sin\frac{\pi}{6}x + b\cos\frac{\pi}{6}x\right)2^x\right] = 2^x\sin\frac{\pi}{6}x$$

Rovnici vynásobíme výrazem $\frac{1}{2^x}$ a v první závorce roznásobíme argumenty u goniometrických funkcí

$$\left[a\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{6}\right) + b\cos\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{6}\right)\right]2 + 2\left[\left(a\sin\frac{\pi}{6}x + b\cos\frac{\pi}{6}x\right)\right] = \sin\frac{\pi}{6}x$$

Dále použijeme vzorce pro součet úhlů goniometrických funkcí a upravíme danou rovnici

$$2a\left(\sin\frac{\pi}{6}x\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}x\sin\frac{\pi}{6}\right)+2b\left(\cos\frac{\pi}{6}x\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}x\sin\frac{\pi}{6}\right)+$$

$$+2a\sin\frac{\pi}{6}x+2b\cos\frac{\pi}{6}x=\sin\frac{\pi}{6}x$$

Do rovnice dosadíme známé hodnoty $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ a $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

$$2a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi}{6}x+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{6}x\right)+2b\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\pi}{6}x-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}x\right)+$$

$$+2a\sin\frac{\pi}{6}x+2b\cos\frac{\pi}{6}x=\sin\frac{\pi}{6}x$$

Roznásobíme závorky

$$\sqrt{3}a\sin\frac{\pi}{6}x+a\cos\frac{\pi}{6}x+\sqrt{3}b\cos\frac{\pi}{6}x-b\sin\frac{\pi}{6}x+2a\sin\frac{\pi}{6}x+2b\cos\frac{\pi}{6}x=\sin\frac{\pi}{6}x$$

Na levé straně rovnice vytkneme $\sin\frac{\pi}{6}x$ a $\cos\frac{\pi}{6}x$

$$\left(\sqrt{3}a-b+2a\right)\sin\frac{\pi}{6}x+\left(a+\sqrt{3}b+2b\right)\cos\frac{\pi}{6}x=\sin\frac{\pi}{6}x$$

Nyní porovnáme koeficienty u $\sin\frac{\pi}{6}x$ a $\cos\frac{\pi}{6}x$ na obou stranách rovnice a dostaneme

$$\sqrt{3}a-b+2a=1\ \wedge\ a+\sqrt{3}b+2b=0$$

Z první rovnice vyjádříme $b$:

$$b=\sqrt{3}a+2a-1$$

Dosadíme $b$ do druhé rovnice:

$$a+\sqrt{3}\left(\sqrt{3}a+2a-1\right)+2\left(\sqrt{3}a+2a-1\right)=0$$

Po úpravě dostaneme

$$a=\frac{1}{4}$$

Nyní dosadíme $a$ do vyjádřeného$b$ a získáme tím hodnotu $b$:

$$b = \frac{\sqrt{3} - 2}{4}$$

Obecné řešení zapíšeme ve tvaru

$$y_x = 2^x \left( C_1 \cos\frac{\pi}{2}x + C_2 \sin\frac{\pi}{2}x \right).$$

Hledané partikulární řešení je

$$Z_x = \left[ \frac{1}{4} \sin\frac{\pi}{6}x + \left( \frac{\sqrt{3} - 2}{4} \right) \cos\frac{\pi}{6}x \right] 2^x.$$

## 3.5 Diferenciální rovnice

V této kapitole se seznámíme s diferenciálními rovnicemi, jejich typy a metodami řešení. Dále se podíváme, jaké zastoupení zde mají goniometrické funkce a jak se jich využívá v konkrétních úlohách. Budeme se zabývat diferenciálními rovnicemi prvního řádu, lineárními diferenciálními rovnicemi, rovnicemi se speciální pravou stranou. Uvedeme tři metody řešení diferenciálních rovnice – metodu separace proměnných, metodu variace konstant a metodu neurčitých koeficientů. Na závěr se budeme zabývat lineárními diferenciálními rovnicemi druhé řádu s konstantními koeficienty s nulovou pravou stranou a se speciální pravou stranou – zde opět využijeme goniometrické funkce.

### 3.5.1 Obyčejná diferenciální rovnice

„Obyčejnou diferenciální rovnicí rozumíme takovou rovnici, která obsahuje alespoň jednu derivaci neznámé funkce jedné proměnné; kromě derivací neznámé funkce může obsahovat také nederivovanou neznámou funkci a známé (tj. dané) funkce téže proměnné.“ (Hradilek a Stehlík, 1990, s. 335)

Řádem diferenciální rovnice je řád nejvyšší derivace. Řešením takového rovnice na otevřeném intervalu $I$ je každá funkce jedné proměnné a její derivace, pokud po dosazení do původní diferenciální rovnice vyjde rovnost pro všechna $x \in I$. Partikulární řešení diferenciální rovnice je takové řešení, které neobsahuje žádnou libovolnou konstantu. Obecné řešení diferenciální rovnice obsahuje $n$ libovolných a vzájemně nezávislých konstant, kde $n$ je řád této rovnice (viz Hradilek a Stehlík, 1990).

### 3.5.2 Diferenciální rovnice prvního řádu

„Budiž dána funkce $F$ tří proměnných, které označíme $x, y, y'$. Napišme rovnici

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

Hledáme-li funkci $f$ jedné proměnné definovanou pro všechna $x$ z intervalu $\mathfrak{I}$, která splňuje implikaci

$$x \in \mathfrak{I} \Longrightarrow F\big(x, f(x), f'(x)\big) = 0, \tag{2}$$

potom pravíme, že (1) je diferenciální rovnice prvního řádku. Každou funkci $f$ splňující implikaci (2) nazýváme řešením diferenciální rovnice (1) v intervalu $\mathfrak{I}$.“ (Horský, 1973, str. 287)

„Označíme-li hledanou funkci $y = y(x)$, příp. $y$, můžeme uvést jako jednoduchý příklad diferenciální rovnici

$$y' - 2x = 0,$$

tj. $y' = 2x$. Všechna její řešení jsou všechny primitivní funkce k funkci $2x$, tzn.

$$y = x^2 + c, x \in \mathbb{R},$$

pro každé $c \in \mathbb{R}$.

Je-li dána tzv. počáteční podmínka, tzn. pro danou hodnotu $x_0 \in \mathbb{R}$ je dána odpovídající funkční hodnota $y(x_0) = y_0$ funkce $y = x^2 + c$, můžeme rovnou z rovnice vypočítat speciální hodnotu konstanty $c = y_0 + x_0^2$ a po jejím dosazení do $y = x^2 + c$ vyjádřit partikulární řešení rovnice ve tvaru

$y = x^2 + y_0 - x_0^2$.“ (Hradilek a Stehlík, 1990, s. 335, 336)

### 3.5.3 Metody řešení diferenciálních rovnic

#### Metoda separace proměnných

„Nechť $\varphi$ a $\psi$ jsou spojité funkce. Mějme dále diferenciální rovnici tvaru

$$\varphi(y)y' = \psi(x). \tag{3}$$

Je-li $y = y(x)$ řešením této rovnice, potom podle věty o integraci substitucí z rovnice (3) plyne

$$\int \varphi(y)\,\mathrm{d}y = \int \psi(x)\,\mathrm{d}x + C, \tag{4}$$

kde $C$ je konstanta. Tento postup si lze snadno zapamatovat takto: Zavedeme-li do rovnice (6) diferenciály, potom z (3) plyne

$$\varphi(y)\mathrm{d}y = \psi(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

Integrováním pak dostaneme (4). Tradičně se používá slovního obratu, že v rovnici (3) a (5) jsou proměnné separovány.“ (Horský, 1973, stránky 288, 289)

#### Metoda variace konstant

„Nejprve najdeme obecné řešení $y = C\mathrm{e}^{-P(x)}, P'(x) = p(x)$ $(C \in \mathbb{R})$ příslušné homogenní lineární diferenciální rovnice

$$y' + p(x)y = 0.$$

Konstantu $C$ nahradíme neznámou funkcí $z$ a výraz

$$y = z(x)\mathrm{e}^{-P(x)}$$

dosadíme do nehomogenní rovnice

$$z'\mathrm{e}^{-P(x)} - zp(x)\mathrm{e}^{-P(x)} + zp(x)\mathrm{e}^{-P(x)} + q(x) = 0$$

neboli

$$z' = -q(x)\mathrm{e}^{P(x)}.$$

Odtud vypočteme pomocnou funkci:

$$z = -\int q(x)\,\mathrm{e}^{P(x)}\mathrm{d}x;$$

pak

$y = -\mathrm{e}^{-P(x)} \int q(x)\, \mathrm{e}^{P(x)} \mathrm{d}x.$" (Bartsch, 1996, str. 656)

### 3.5.4 Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

„Rovnice tvaru

$$y' + yp(x) = q(x) \tag{6}$$

nazýváme lineárními diferenciálními rovnicemi prvního řádu. Nahradíme-li funkci $q$, která je pravé straně této rovnice, nulovou funkcí, dostaneme rovnici

$$y' + yp(x) = 0. \tag{7}$$

Rovnici (7) nazýváme zkrácenou rovnicí příslušnou k rovnici (6).

Předpokládejme, funkce $p, q$ jsou spojité v intervalu $\mathfrak{J}$. Protože se ve výpočtu budou objevovat často výrazy typu $\mathrm{e}^{u}$, kde $u$ bude složitý výraz, zavedeme toto označení:

$$\mathrm{e}^{u} = \exp u.$$

Odtud plyne, že platí:

$$\exp(u+v) = (\exp u)(\exp v);\;\; \exp \ln u = u \;(u > 0);$$

$$\exp(-u) = \frac{1}{\exp u}.$$

Z vlastností exponenciální funkce dále plyne: Je-li $u$ funkce mající v intervalu $\mathfrak{J}$ derivaci, potom pro derivaci složené funkce $\exp[u]$[27] platí

$$\{\exp[u]\}' = u' \exp[u].$$" (Horský, 1973, str. 294)

Proměnné z rovnice (7) lze separovat následujícím způsobem:

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}y = -p(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \ln|y|\,\mathrm{d}x + C_1 \Rightarrow -\int p(x)\,\mathrm{d}x + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |y| = \exp\left(-\int p(x)\,\mathrm{d}x + C_1\right) = \exp C_1 \exp\left[-\int p\right].$$

[27] Obecně je funkce $g$ je vnitřní funkce definovaná v oboru $\mathfrak{M}$, pro každé $x \in \mathfrak{M}$ leží funkční hodnota $y = g(x)$ v množině $\mathfrak{U}$. Pak ke každému $x \in \mathfrak{M}$ lze přiřadit číslo $f(g(x))$. Horský (1973) označuje složenou funkci $f(g(x))$ jako $f[g]$. (viz Horský, 1973)

Nechť $C_2 = \exp C_1$ a $C = \pm C_2$, pak$C$ je konstanta, která může nabývat libovolné reálné nenulové hodnoty. Potom ze vzorce pro $|y|$ plyne

$$y = C \exp\left[-\int p\right]. \tag{8}$$

Dále zjišťujeme, zda existují ještě jiná řešení rovnice

$$\exp\left[-\int p\right] = v.$$

$\forall\, x \in \mathfrak{I}$ je tedy $v(x) > 0$. Derivace funkce $v$ je dána

$$v^{'} = -pv.$$

Pak existuje funkce $g$ (definovaná v intervalu $\mathfrak{I}$) taková, že platí

$$y = gv.$$

Pokud dosadíme tuto funkci do rovnice (6) získáme

$$(gv)^{'} + gvp = g^{'}v + gv^{'} + gvp = g^{'}v - gvp + gvp = q$$

$$\Rightarrow g^{'} = \frac{q}{v} = q\exp\left[\int p\right],$$

$$g = \int \left(q\exp\left[\int p\right]\right) + C,$$

kde $C$ je libovolná konstanta. Funkce $y$ je tedy ve tvaru

$$y = gv = \left[\left(q \exp\left[\int p\right]\right) + C\right] \exp\left[-\int p\right]. \tag{9}$$

(viz (Horský, 1973, stránky 294, 295))

### 3.5.5 Diferenciální rovnice vyšších řádů

„Obecný tvar diferenciální rovnice $n$-tého řádu je

$$y^{(n)} = g\left(x, y, y^{'}, \dots, y^{(n-1)}\right).$$

Stejně jako u rovnic prvního řádu mluvíme i zde o integrálu této rovnice[28] v intervalu $\mathfrak{I}$. Je to funkce $y$, která pro každé $x \in \mathfrak{I}$ splňuje rovnici

[28] Řešení diferenciální rovnice se často nazývá jejím integrálem. (viz Horský, 1973)

$$y^{(n)}(x) = g\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\right)."$$

(Horský, 1973, str. 297)

### 3.5.6 Lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty a s nulovou pravou stranou

„Mějme rovnici

$$y'' + by' + cy = 0.^{29} \tag{10}$$

Předpokládejme řešení ve tvaru

$$y = \mathrm{e}^{\lambda x} \text{ ($x$ je proměnná)}, \tag{11}$$

kde $\lambda$ je komplexní[30]. Funkce (11) je komplexní funkcí jedné reálné proměnné, v případě reálného $\lambda$ je reálnou funkcí. Podle cvičení 17.4[31] je

$$y' = \lambda \mathrm{e}^{\lambda x}, y'' = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x}.$$

Dosadíme-li funkce (11) do rovnice (10), dostaneme (po zkrácení činitelem $\mathrm{e}^{\lambda x}$) rovnici

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0. \tag{12}$$

Rovnice (12) se nazývá charakteristická rovnice příslušná k rovnici (10). Funkce (11) je integrálem rovnice (10), když a jen když konstanta $\lambda$ vyhovuje rovnici (12).“ (Horský, 1973, str. 301)

Podle hodnoty diskriminantu charakteristické rovnice rozlišujeme 3 případy:[32]

[1] $D > 0$

„Když $b^2 - 4c > 0$, potom rovnice (12) má dva reálné od sebe různé kořeny

[29] $b, c$ jsou konstanty
[30] $\lambda$ je komplexní konstanta
[31] Cvičení 17.4 Cvičení binomické rovnice v komplexním oboru (Horský, 1973, str. 276)
[32] Pro lepší přehlednost práce uvedeme konkrétní úlohy přímo u definic jednotlivých případů rozdělení podle znaménka diskriminantu.

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

Rovnice (10) má integrály

$$y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}, y_2 = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}."$$

(Horský, 1973, str. 301)

„Máme řešit rovnici

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Řešení: Příslušná charakteristická rovnice

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

má dva reálné od sebe různé kořeny $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$, které vedou ke dvěma partikulárním lineárně nezávislým integrálům $y_1 = \mathrm{e}^{2x}, y_2 = \mathrm{e}^{x}$. Obecným integrálem předložené rovnice je vzorec

$$y = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{x}."$$

(Horský, 1973, str. 302)

[2] $D = 0$

„Budiž za druhé $b^2 - 4c = 0$. Charakteristická rovnice (12) má v tomto případě dvojnásobný kořen

$$\lambda_0 = -\frac{b}{2}.$$

Rovnice (10) má integrál $y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_0 x}$. Dalším integrálem rovnice (12) je funkce $y_2 = x\mathrm{e}^{\lambda_0 x}$. Platí totiž

$$y_2'' + by_2' + cy = \mathrm{e}^{\lambda_0 x}\left(2\lambda_0 + b - \frac{x(b^2 - 4c)}{4}\right) = \mathrm{e}^{\lambda_0 x} \cdot 0 = 0."$$

(Horský, 1973, str. 301)

„Máme řešit rovnici

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Řešení: Příslušná charakteristická rovnice

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

má jediný dvojnásobný kořen $\lambda_0 = 2$, kterému odpovídají dva lineárně nezávislé partikulární integrály $y_1 = \mathrm{e}^{2x}, y_2 = x\mathrm{e}^{2x}$. Obecným integrálem předložené rovnice je vzorec

$$y = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2x\mathrm{e}^{2x}."$$

(Horský, 1973, str. 302)

[3] $D < 0$

„Budiž posléze $b^2 - 4c < 0$. V tomto případě má charakteristická rovnice (12) dva imaginární komplexně sdružené kořeny. Je-li $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta$ jedním z těchto kořenů ($\alpha, \beta$ reálná, $\beta \neq 0$), potom rovnice (10) má komplexní integrál

$$\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x} = \mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta x} = \mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x + \mathrm{i}\sin\beta x).$$

Funkce

$$y_1 = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x\,, y_2 = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$$

jsou reálné integrály rovnice (10).“ (Horský, 1973, str. 302)

Funkce $y_1$ a $y_2$ jsou lineárně nezávislé a obecným integrálem rovnice (10) je tedy vzorec

$$y = C_1y_1 + C_2y_2.$$

„Máme řešit rovnici

$$y'' - 2y' + 10y = 0.$$

Řešení: Příslušná charakteristická rovnice

$$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$$

má dva imaginární komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = 1 \pm 3\mathrm{i}$, takže $y_1 = \mathrm{e}^x\cos 3x$, $y_2 = \mathrm{e}^x\sin 3x$ jsou dva lineárně nezávislé partikulární integrály. Obecným integrálem předložené rovnice je vzorec

$y = C_1\mathrm{e}^x\cos 3x + C_2\mathrm{e}^x\sin 3x\,."$ (Horský, 1973, stránky 302, 303)

### 3.5.7 Lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou

„Lineární rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty, rozřešená podle $y''$, má tvar

$$y'' + ay' + by = R(x), \qquad (13)$$

kde $a, b$ jsou dané konstanty a $R = R(x)$ daná funkce spojitá v otevřeném intervalu $J$. Rovnici (13) lze řešit elementárními metodami tak, že vyřešíme nejprve rovnici bez pravé strany, která přísluší rovnici (14), tzn. rovnici

$$y'' + ay' + by = 0, \qquad (14)$$

a k jejímu obecnému řešení přičteme libovolné řešení rovnice (13).“ (Hradilek a Stehlík, 1990, s. 353)

Rovnici (13) lze řešit metodou neurčitých koeficientů.

## Metoda neurčitých koeficientů

„Řešení rovnice (13) metodou neurčitých koeficientů je možné, jestliže pravá strana má tvar

$$R(x) = \mathrm{e}^{hx}[P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin x\beta], \qquad (15)$$

kde $h, \beta$ jsou reálné konstanty a $P$, resp. $Q$ dané polynomy stupně $p$, resp. $q$ $(p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\})$, přičemž jedna nebo obě konstanty $h, \beta$ mohou být rovny nule a jeden z polynomů $P, Q$ může být nulový.“ (Hradilek a Stehlík, 1990, s. 357)

Využití goniometrických funkcí se zde vztahuje na případ, že pravá strana rovnice (13) má tvar (15) a $P$, resp. $Q$ jsou polynomy $p$-tého, resp. $q$-tého stupně, číslo $h + \mathrm{i}\beta$ je $k$-násobným kořenem charakteristické rovnice. Pak existuje partikulární řešení rovnice (13) ve tvaru

$$\overline{y} = x^k \mathrm{e}^{hx}[M(x)\cos\beta x + N(x)\sin\beta x].$$ [33]

[33] $\overline{y}$ je označení pro partikulární řešení

$M, N$ jsou polynomy nejvýše $r$-tého stupně, kde $r = \max(p, q)$. Pokud číslo $h + \mathrm{i}\beta$ není kořenem charakteristické rovnice, pak $k = 0$. (viz Hradilek a Stehlík, 1990, s. 357))

## Věta o obecném řešení diferenciální rovnice (13)

„Obecné řešení diferenciální rovnice (13) se rovná součtu obecného řešení odpovídající rovnice (14) a libovolného partikulárního řešení $\overline{y}$ rovnice (13).“ (Hradilek a Stehlík, 1990, s. 356)

**XI. Příklad:**

Příklad je převzat z vlastních poznámek z přednášek a cvičení Matematická analýza 3.

Řešte diferenciální rovnici

$$y'' - 3y' + 2y = 10\cos x$$

metodou neurčitých koeficientů.

Řešení:

Charakteristická rovnice diferenciální rovnice bez pravé strany má tvar $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ a její kořeny jsou $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Pravá strana dané diferenciální rovnice má tvar (15), kde $h = 0, \beta = 1, P(x) = 10, Q(x) = 0$ pro každé $x$. Protože číslo i není kořenem charakteristické rovnice, je $k = 0$ a $\overline{y}$ zvolíme ve tvaru

$$\overline{y} = A\cos x + B\sin x.$$

Pro určení neznámých koeficientů $A, B$ vypočteme derivace

$$\overline{y}' = -A\sin x + B\cos x,$$

$$\overline{y}'' = -A\cos x - B\sin x.$$

Tyto spočítané derivace dosadíme i s funkcí $\overline{y}$ do dané diferenciální rovnice a získáme rovnost

$$(3A + B)(\sin x) + (A - 3B)(\cos x) = 10\cos x \; (\forall\, x \in \mathbb{R}).$$

Dále porovnáváme koeficienty u $\sin x$ a $\cos x$ na obou stranách rovnice a tím získáme soustavu rovnic

$$3A + B = 0,$$

$$A - 3B = 10,$$

jejímž řešením jsou čísla $A = 1$ a $B = -3$.

Partikulární řešení $\overline{y}$ je tedy ve tvaru

$$\overline{y} = \cos x - 3 \sin x.$$

Obecné řešení dané diferenciální rovnice je podle Věty o obecné řešení diferenciální rovnice (13) ve tvaru

$$y = c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{2x} + \cos x - 3 \sin x \; (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

# 4 Závěr

Ve své práci jsem ukázala vybrané oblasti matematiky, ve kterých se využívá goniometrie. Jelikož rozsah této práce neumožňuje plný výčet všech oblastí, zabývala jsem se především trigonometrií, komplexními čísly a diferenčními a diferenciálními rovnicemi.

Bakalářská práce je vytvořena jako přehled vybraných znalostí o goniometrii, které studenti získávají na různých stupních škol, a je dělena do dvou hlavních částí - goniometrie na středních a na vysokých školách. Uvedeny jsou i historické zajímavosti o vzniku goniometrie.

Práce je přínosná především pro studenty středních a vysokých škol, ale i pro další čtenáře, kterým nabízí souhrnný přehled některých vybraných oblastní goniometrie a její aplikaci v některých konkrétních úlohách.

# 5 Citovaná literatura


BARTSCH, Hans-Jochen. 1996. *Matematické vzorce*. Praha: Mladá fronta. ISBN 80-204-0607-7.

CALDA, Emil. 2004. *Matematika pro gymnázia - Komplexní čísla*. Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-187-6.

EISLER, Jaroslav. 2006. *Matematika v kostce pro základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií*. Havlíčkův Brod: Nakladatelství Fragment. ISBN 80-253-0197-4.

HORSKÝ, Zdeněk. 1973. *Učebnice matematiky pro posluchače VŠE*. Praha: Nakladatelství technické literatury.

HRADILEK, Ludvík a Eduard STEHLÍK. 1990. *Matematika pro geology I*. Praha: Nakladatelství technické literatury. ISBN 80-03-00384-9.

JARNÍK, Vojtěch. 1974. *Diferenciální počet (I)*. Praha: Academia. ISBN 104-21-852.

JARNÍK, Vojtěch. 1984. *Diferenciální počet (II)*. Praha: Academia. ISBN 104-21-852.

JIRÁSEK, František a Josef BENDA. 2006. *Matematika pro bakalářské studium*. Praha: Nakladatelství Ekopress, s.r.o. ISBN 80-86929-02-7.

KAŇKA, Miloš a Jiří HENZLER. 2000. *Matematika pro ekonomické fakulty 2*. Praha: Nakladatesltví Ekopress, s.r.o. ISBN 80-86119-31-9.

MIKULČÁK, Jiří. 1988. *Matematické, fyzikální a chemické tabulky*. Praha: Prometheus. ISBN 80-85849-84-4.

NOVOTNÁ, Jarmila a KOL.. 1997. *Sbírka úloh z matematiky (nejen) pro přípravu k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Praha: Scientia. ISBN 80-7183-195-6.

ODVÁRKO, Oldřich. 2008. *Matematika pro gymnázia Funkce*. Praha: Prometheus. ISBN 978-80-7196-357-8.

ODVÁRKO, Oldřich. 2007. *Matematika pro gymnázia Goniometrie*. Praha: Prometheus. ISBN 978-80-7196-203-8.

PRÁGEROVÁ, Alena. 1971. *Diferenční rovnice*. Praha: Nakladatelství technické literatury. ISBN 04-018-71.

VOŠICKÝ, Zdeněk. 2007. *Matematika v kostce: pro střední školy*. Havlíčkův Brod: Fragment. ISBN 978-80-253-0191-3.