Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Michal Schovánek
Úlohy matematické olympiády
Katedra didaktiky matematiky
Vedoucí diplomové práce: *Doc. RNDr. Leo Boček, CSc.*
Studijní program: *Fyzika*, obor: *Učitelství matematika - fyzika pro SŠ*

Děkuji vedoucímu své diplomové práce *Doc. RNDr. Leo Bočkovi, CSc.* za zajímavé téma a věcné připomínky k tématu matematické olympiády a všem, kdo se podíleli na korektuře textu.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 11.srpna 2006

Michal Schovánek

Michal Schovánek

OBSAH

Název práce: *Úlohy matematické olympiády*
Autor: *Michal Schovánek*
Katedra: *Katedra didaktiky matematiky*
Vedoucí diplomové práce: *Doc. RNDr. Leo Boček, CSc.*
E-mail vedoucího: *Leo.Bocek@mff.cuni.cz*
Abstrakt: *Hlavní náplní práce Úlohy matematické olympiády je analýza úloh právě skončeného 55. ročníku předmětové soutěže pro studenty středních škol, jejich posouzení z hlediska obtížnosti pro určenou věkovou kategorii a návaznosti na úlohy předchozích kol nebo na látku obvykle probíranou na gymnáziích. Práce poukazuje na nejčastěji využívané poznatky z oblastí a témat středoškolské matematiky, kterými jsou elementární teorie čísel, algebraické a goniometrické rovnice a nerovnice a jejich soustavy, rovinná geometrie a posloupnosti, ze kterých je při tvorbě úloh zejména čerpáno. Tato práce přináší také některá nová řešení nebo zajímavá řešení pocházející od studentů a shrnuje jejich úspěšnost zejména na krajské úrovni a zabývá se i srovnáním jednotlivých krajů mezi sebou. Pozornost je věnována také několika úlohám odpovídajících soutěží v zahraničí, které řeší studenti jinde ve světě, a úlohám Mezinárodní matematické olympiády, které se nejúspěšnější řešitelé účastní. Na závěr je uvedeno ještě několik hodnotících myšlenek a kritických názorů od učitelů matematiky z praxe.*
Klíčová slova: *matematika na střední škole, matematické soutěže*

Title: *Problems of mathematical olympiad*
Author: *Michal Schovánek*
Department: *Department of Mathematics Education*
Supervisor: *Doc. RNDr. Leo Boček, CSc.*
Supervisor's e-mail address: *Leo.Bocek@mff.cuni.cz*
Abstract: *The main goal of the Problems of mathematical olympiad thesis is to analyze the recently ended 55th annual championship for high school students, to compare the tasks by their difficulty for relevant age category and by their relationship to the tasks of previous rounds or to subjects usually taught on secondary grammar schools. This thesis also points out the most used pieces of knowledge and topics of high-school math, which are used the most in the tasks, especially: elementary theory of numbers, algebraic and goniometric equations and inequalities and the systems of them, plane geometry and sequences. Additionally, some new problem solutions created by author and students are introduced and their rate of success is analysed, especially on the regional level. Regions are also compared with each other. Tasks solved by students in similar competitions in foreign countries are also mentioned, as well as the tasks of the International Mathematical Olympiad, which is the competition of the most successfull students from regional competitions. Finally, some evaluative thoughts and oppinions from teachers' work experience are mentioned.*
Keywords: *mathematics on secondary grammar schools, mathematical championships*

1. Úvod

Matematická olympiáda je nejstarší česká předmětová soutěž určená žákům základních a studentům středních škol. První ročník proběhl již roku 1951. Podle organizačního řádu je jejím cílem objevování nadaných mladých lidí a rozvíjení jejich schopností a zájemcům z jejich řad nabízí řešení složitých matematických problémů. Je jednotná pro celé území České republiky a probíhá v souladu s Mezinárodní matematickou olympiádou. Jejím vyhlašovatelem je Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy, které určilo zodpovědnou za uskutečnění na ústřední úrovni Jednotu českých matematiků a fyziků. Na odborném zajištění se podílí Matematický ústav Akademie věd ČR.

Členěna je soutěž do řady různých kategorií a kol. Kategorie Z5 až Z9 jsou určeny žákům 5. až 9. ročníků základních škol nebo odpovídajících ročníků víceletých gymnázií. Kategorie C je určená studentům prvních ročníků středních škol, kategorie B pro studenty 2. ročníků středních škol a úlohy v kategorii A řeší studenti třetích a čtvrtých ročníků středních škol. Úkolem řešitelů je samostatně vyřešit dané úlohy a podat o tom písemný protokol tak, aby z něj byly patrné jejich myšlenkové pochody, které budou předmětem bodového ohodnocení.

Nejnižší úrovně soutěže v kategoriích A, B a C, kterým je věnována tato práce, probíhají přímo na školách pod dohledem pověřeného učitele. Jeho úkolem je nejen seznámit žáky se soutěží a úlohami určenými k první, domácí práci, ale pomáhat jim odbornými radami, doporučovat literaturu a případně dokonce zprostředkovávat kontakty s odborníky nebo pracovníky škol vyšších stupňů. Úlohami z domácí části školního kola, se kterými se žáci a učitelé seznámí prostřednictvím informačních letáků Ústřední komise Matematické olympiády nebo Jednoty českých matematiků a fyziků, je zpravidla nastaveno tématické zaměření kategorie pro daný ročník. Zmíněných domácích úloh je v každé kategorii šest. V případě dobrých výsledků a zájmu žáka nebo žáků, je škola povinna uspořádat školní tzv. klauzurní část školního kola. V něm jsou řešeny tři příklady, zpravidla související s domácími úlohami. Učitel musí poté řešitele seznámit se vzorovým řešením a rozebrat žákovské chyby. Dále pak stanoví pořadí, vyhlásí výsledky a navrhne příslušné Okresní nebo Krajské komisi matematické olympiády úspěšné řešitele na postup do krajského kola, jejichž řešení spolu se jmény a výsledky všech ostatních studentů komisi zašle. Ta vybere dle jednotného hodnocení nejúspěšnější řešitele a ty pozve k účasti v krajském kole, které spočívá v řešení čtyř úloh. Komisí stanovená porota vyhodnotí žákovská řešení, seznámí opět soutěžící se vzorovým řešením a sestaví pořadník podle bodových zisků. Tři nejúspěšnější řešitelé obdrží diplom a věcné ceny. Ostatní obdrží diplomy za účast. Nejvýše padesát nejlepší soutěžících v kategorii A, které určí Ústřední komise Matematické olympiády, je pak pozváno k účasti v ústředním celostátním kole. Toto kolo má podobný průběh i způsob hodnocení jako kolo krajské. Trvá čtyři dny. Pro úspěšné účastníky všech kategorií jsou pořádána různá přípravná soustředění.

Šest soutěžících z ústředního kola kategorie A pak tvoří tým reprezentující Česko v Mezinárodní matematické olympiádě. Tato šestice je vybrána na základě výsledků v ústředním i krajském kole.

Termíny konání všech kol v kategoriích určených pro studenty středních škol jsou pro 55. ročník uvedeny v následující tabulce. Termín domácího kola je datem, do kdy musejí žáci odevzdat svá řešení učitelům matematiky.

kategorie	domácí kolo	školní kolo	krajské kolo	ústřední kolo
A	26.listopad 2005	6.prosinec 2005	24.leden 2006	26. až 29.březen 2006
B	17.leden 2006	26.leden 2006	21.březen 2006	-
C	17.leden 2006	26.leden 2006	21.březen 2006	-

2. ÚLOHY 55. ROČNÍKU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

2.1 Kategorie C

2.1.1 Domácí kolo

Úloha 1.

a) Dokažte, že pro každé přirozené číslo m je rozdíl $m^6 - m^2$ dělitelný číslem 60.

b) Určete všechna přirozená čísla m, pro která je rozdíl $m^6 - m^2$ dělitelný číslem 120.

Po absolvování elementární teorie čísel, algebry a po seznámení se se základními typy důkazů na středních školách by každého žáka gymnázia měla při pohledu na výraz $m^6 - m^2$ měla napadnout úprava podle známých vztahů

$$m^6 - m^2 = m^2(m^4 - 1) = m^2(m^2 + 1)(m^2 - 1) = m^2(m^2 + 1)(m - 1)(m + 1).$$

Pro naše úvahy budeme potřebovat oba dva poslední tvary.

Pro dělitelnost číslem 60 je nutné dokázat dělitelnost čísly 3, 4, 5. Na konci minulého řádku se v součinu vyskytují činitelé $(m-1)$, m, $(m+1)$, z nichž právě jeden je dělitelný třemi. Je-li číslo m sudé, pak je číslo m^2 dělitelné čtyřmi. Je-li číslo m liché, pak jsou čísla $(m-1)$, $(m+1)$ obě dělitelná dvěma, právě jedno z nich dokonce čtyřmi. Jejich součin je dělitelný osmi. Dá se dokázat, že umocňuji-li libovolné přirozené číslo na druhou, je poslední číslicí získané mocniny právě jedna z číslic 0, 1, 4, 5, 6, 9. To znamená, že právě jedno číslo z čísel $(m^2 - 1)$, m^2, $(m^2 + 1)$ je dělitelné pěti. To je možné nahlédnout i takto: Je-li m dělitelné pěti, pak je m^2 také dělitelné pěti, dokonce dvaceti pěti. Pokud není m dělitelné pěti, potom ho lze zapsat ve tvaru $m = 5k + r$, kde k je přirozené číslo nebo 0 a r je číslo 1, 2, 3 nebo 4. Pak je m^2 rovno $25k^2 + 10kr + r^2$, kde k^2 je číslo 1, 4, 9 nebo 16. Je-li $k = 1$ nebo 4, je potom $(m-1)$ dělitelné pěti. Je-li $k = 2$ nebo 3, je pěti dělitelné číslo $(m+1)$. Dokázal jsem tedy, že zkoumané číslo $m^6 - m^2$ je dělitelné nesoudělnými čísly 3, 4, 5, tedy i jejich součinem, tj. číslem 60.

Již o několik řádků výše jsem dokázal, že je-li číslo m liché, jsou čísla $(m-1)$, $(m+1)$ sudá, právě jedno z nich dělitelné čtyřmi, tudíž jejich součin dělitelný osmi. Je-li naopak číslo m sudé, je sudé i číslo m^2 a čísla $(m-1)$, $(m+1)$ jsou tedy obě lichá. Součin $m^2(m^2+1)(m^2-1)$ je pak dělitelný osmi právě tehdy, když je m^2 dělitelné osmi, tj. m dělitelné čtyřmi. Pak je ale m^2 dělitelné dokonce šestnácti. Číslo $m^6 - m^2$ je pak dělitelné čísly 3, 5, 16, tedy i jejich součinem, tj. číslem 240, tím spíše číslem 120. Rozdíl $m^6 - m^2$ je tedy dělitelný číslem 120 právě tehdy, když číslo m je liché nebo dělitelné čtyřmi.

První úloha kategorie C, určené pro studenty prvních ročníků, je podle mého názoru velmi vhodná pro své místo. Podobné, i když zpravidla často jednodušší, úlohy jsou řešeny v běžných hodinách matematiky na gymnáziích, a to obvykle hned zkraje školního roku, kdy se žáci se zadáními soutěže seznamují. Návodné úlohy učebnicového typu z informačního letáku soutěže tak můžou nové středoškoláky motivovat k účasti. Menší problémy mohou nastat při zkoumání dělitelnosti číslem 5 nebo 120, ale při dalším bádání ve volném čase, pro který jsou tyto příklady připravovány, úlohu vyřeší každý gymnazista s kladným přístupem k matematice.

Úloha 2.

Kružnice k, l, m se po dvou vně dotýkají a všechny tři mají společnou tečnu. Poloměry kružnic k, l jsou 3 cm a 12 cm. Vypočtěte poloměr kružnice m. Najděte všechna řešení.

Nejprve uvedu vzorové řešení. Označme po řadě nejprve R, S, T středy a A, B, C body dotyku kružnic k, l, m na jejich společné tečně a $r = 3$, $s = 12$ a t jejich poloměry. Výpočty jsou prováděny pro jednodušší dosazování bez jednotek, budu se tedy i já toho ve svých dalších výpočtech držet. V lichoběžníku $ARTC$ (který by byl v případě $r = t$ obdélníkem) je $|RT| = r + t$. Označíme-li U průsečík přímky AR a rovnoběžky s přímkou AC vedenou bodem T, je $|RU| = |r - t|$. Z pravoúhlého trojúhelníku RUT dostáváme

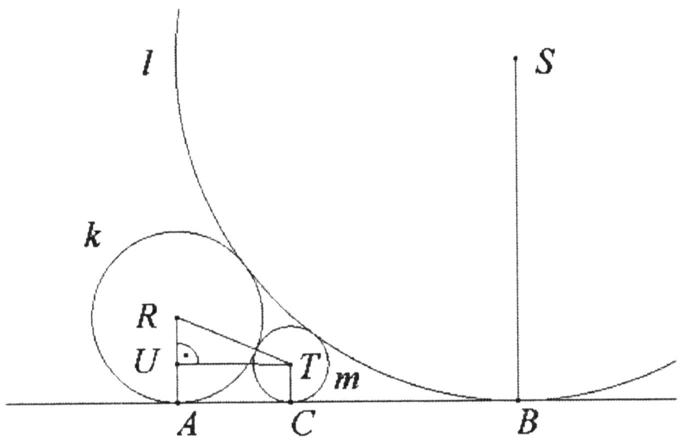
$$|UT| = |AC| = \sqrt{(r+t)^2 - (r-t)^2} =$$

$$= 2\sqrt{rt} = 2\sqrt{3t}.$$

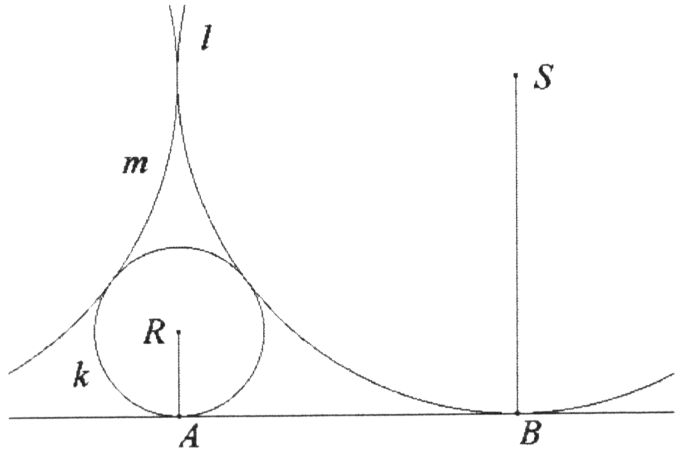
Analogicky bychom z lichoběžníků $CTSB$ a $ARSB$ získali

$$|BC| = 2\sqrt{st} = 4\sqrt{3t}$$

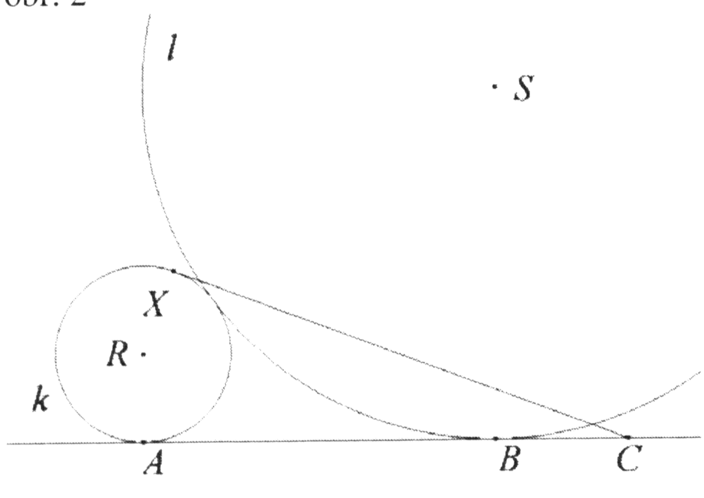
$$\text{a } |AB| = 2\sqrt{rs} = 2\sqrt{3.12} = 6.$$



obr. 1



obr. 2



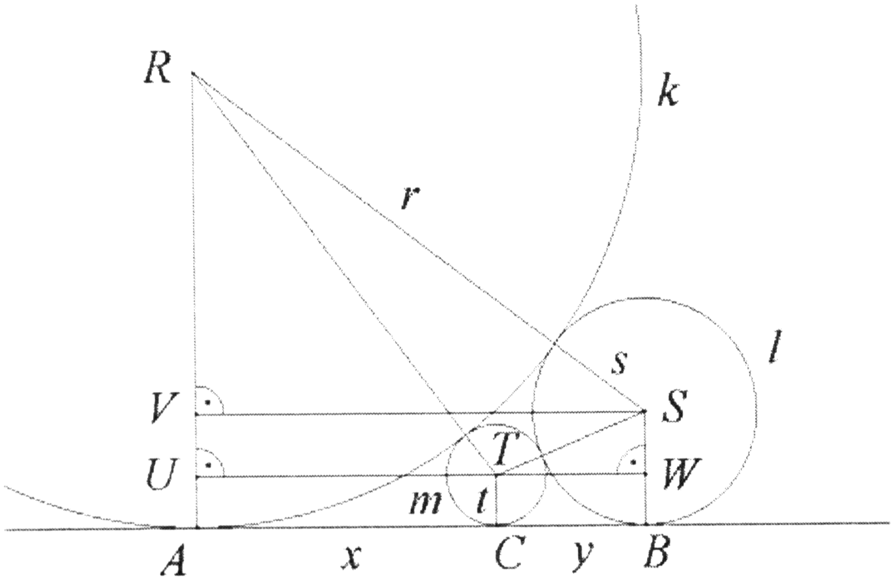
obr. 3

Uvědomme si, že existují dvě řešení, znázorněná na obr. 1 a obr. 2. Uvažujme nejdříve případ, kdy bod C leží mezi body A a B. Je pak $2\sqrt{3t} + 4\sqrt{3t} = 12$, odkud dostáváme $t = \frac{4}{3}$.

Jestliže bod A leží mezi body B a C, dostaneme podobně rovnici $2\sqrt{3t} + 12 = 4\sqrt{3t}$, odkud získáváme $t = 12$.

Kdybychom uvažovali polohu bodu B mezi body A a C, dostali bychom rovnici $12 + 4\sqrt{3t} = 2\sqrt{3t}$. Ta však nemá zřejmě žádné řešení. Že taková situace nemůže nastat, je vidět i z obr. 3, protože každá kružnice, která se dotýká kružnice k v bodě X různém od A a přitom obsahuje bod C polopřímky opačné k polopřímce BA, musí ve svém vnitřku obsahovat i tětivu kružnice l, takže se jí nemůže dotýkat.

Daný problém tří kružnic se společnou tečnou bych mohl také řešit ve větší obecnosti třeba následovně. I když se liší oba postupy jen formálně, odhalím snáze všechna řešení.



obr. 4

Poloměry kružnic k, l, m bez ohledu na předchozí značení označím nyní po řadě r, s, t, přičemž nerozlišuji, který poloměr znám a který hledám. Proto vyjdu ze situace na obrázku 4 a označím si délky úseček $|AC|$ a $|BC|$ po řadě x a y, přičemž A, B, C jsou body dotyku tří uvažovaných kružnic s jejich společnou tečnou. Pro pravoúhlé trojúhelníky RUT, SWT a RVS pak můžu ve vší obecnosti psát tyto z Pythagorovy věty plynoucí rovnice:

$$(r-t)^2 + x^2 = (r+t)^2$$

$$(s-t)^2 + y^2 = (s+t)^2$$

$$(r-s)^2 + (x+y)^2 = (r+s)^2$$

a dále běžnými algebraickými úpravami zjednodušuji až na tvar

$$x^2 = 4rt$$

$$y^2 = 4st$$

$$(x+y)^2 = 4rs.$$

Dále již rozlišuji následující dva případy (bez ohledu na obrázek, který sloužil jen k sestavení rovnic).

a) Znám poloměry krajních kružnic k a l. Nechť tedy například $r = 3$ a $s = 12$, případněobráceně. Soustava po záměně neznámých x a y dává stejné řešení.

$$x^2 = 12t$$

$$y^2 = 48t$$

$$(x+y)^2 = 144,$$

odkud získávám $t = \frac{4}{3}$.

b) Znám poloměry kružnic k a m, tedy prostřední a jedné krajní. Nechť tedy například $r = 12$ a $t = 3$. Přičemž z výše uvedené soustavy vyplývá, že je tento případ ekvivalentní se situací, kdybychom znali poloměry s a t.

$$x^2 = 144$$

$$y^2 = 48s$$

$$(x+y)^2 = 12s,$$

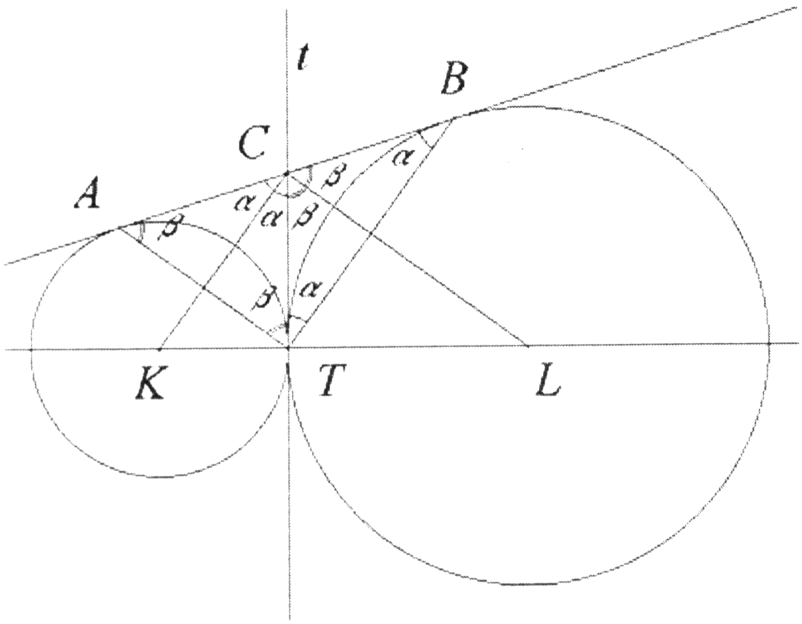
odkud získávám s = 12.

Daná úloha má právě dvě řešení, a těmi je poloměr roven $\frac{4}{3}$ cm nebo 12 cm.

Tato úloha s kružnicemi je také pěkným exemplářem přiměřeně náročné úlohy, se kterou by neměl mít čerstvý středoškolák nadšený matematikou problém. Jako ve všech geometrických úlohách, základem úspěchu je vždy obrázek a správné uvědomění si všech souvislostí. Pythagorova věta, která mi dopomůže k sestavení požadovaných rovnic, je navíc známa již žákům základních škol. Problémy mohou ale nastat právě se získanou soustavou. To je právě místo pro případný zásah vyučujícího. Ne že by žák neměl mít potřebné znalosti, ale může se při takovém počtu druhých mocnin dopustit numerické nebo chyby z nepozornosti. Soustavy tří rovnic jsou řešeny obvykle totiž až zjara, a to pouze lineární. Soustavy kvadratické a lineární nebo dvou kvadratických rovnic se v prvním ročníku řeší jen do počtu dvou.

Jako návodná úloha z planimetrie je doporučena následující z 50.ročníku soutěže:

Kružnice k, l se středy K, L a poloměry r, s mají vnější dotyk v bodě T a kromě společné tečny t v tomto bodě se dotýkají ještě další společné tečny: kružnice k v bodě A a kružnice l v bodě B. Bod C je průsečíkem přímek AB a t.
a) Dokažte, že trojúhelníky KCL a ATB jsou pravoúhlé,
b) Vyjádřete obsah trojúhelníka KCL pomocí r a s.



obr. 5

Při řešení vyjdu z obrázku 5 vlevo. Ze souměrnosti podle přímky CK vyplývá, že $|\angle ACK| = |\angle TCK|$. Označím si ji α. Obdobně ze souměrnosti podle přímky CL vyplývá, že $|\angle BCL| = |\angle TCL|$. Označím ji β. Přímý úhel ACB pak má velikost $2\alpha + 2\beta = 180°$. To oboje potom znamená, že $|\angle KCL| = \alpha + \beta = 90°$, čímž jsem dokázal, že trojúhelník KCL je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu C.

Protože jsou trojúhelníky ACT a BCT rovnoramenné a $2\alpha + 2\beta = 180$, platí dále, že $|\angle CAT| = |\angle CTA| = \beta$ a $|\angle CBT| = |\angle CTB| = \alpha$. Proto je i $|\angle ATB| = \alpha + \beta = 90°$, čímž jsem dokázal, že i trojúhelník ATB je pravoúhlý, a to s pravým úhlem u vrcholu T.

K výpočtu obsahu trojúhelníku KCL budu potřebovat vyjádření výšky $|CT|$ pomocí poloměrů r a s. To získám jednoduše z Euklidovy věty o výšce jako $\sqrt{rs}$. Proto se obsah daného trojúhelníku rovná $\frac{r+s}{2}\sqrt{rs}$.

V případě neznalosti Euklidovy věty začátkem prvního ročníku střední školy je možné použít větu Pythagorovu, případně se studentem Euklidovu větu v předstihu odvodit.

Úloha 3.

Určete počet všech trojic navzájem různých přirozených čísel, jejichž součet je dělitelný každým ze tří sčítaných čísel.

Označme si podle vzorového řešení hledaná čísla x, y, z. Zadání nám říká, že

$$x \mid x+y+z, \quad y \mid x+y+z, \quad z \mid x+y+z,$$

neboli

$$x \mid y+z, \quad y \mid x+z, \quad z \mid x+y.$$

Nechť pak dále například $x < y < z$. (Tuto podmínku můžeme stanovit, neboť na označení tří hledaných čísel nezáleží.) Potom existuje přirozené k takové, že $x+y=kz$. Protože je zároveň $x+y<2z$, což vyplývá z toho, že $z \mid x+y+z$, je nutně $k=1$, $x+y=z$. Dále y dělí $x+z=2x+y<3y$, takže $2x+y=2y$, $y=2x$.

Tři přirozená čísla daných vlastností mají tedy tvar $x, y=2x, z=3x$, kde x je přirozené číslo.

Mají-li být trojmístná, pak $x \geq 100$ a $3x \leq 999$, neboli $100 \leq x \leq 333$. Hledaný počet trojic čísel je tedy $333-99=234$.

Úloha, i když se opírá jen o znalosti z elementární teorie čísel, tj. o dělitelnost přirozených čísel, probíranou v prvních dnech čtyřletého studia na gymnáziu, se mi jeví spíše jako obtížnější než předchozí dvě, ale o to možná zajímavější. Není to typ úlohy, který by se řešil v hodinách matematiky, přirozeným číslům a jejich vlastnostem není většinou věnována na některých školách taková pozornost. Avšak student, který má o matematiku a danou problematiku zájem a dostatek času, zajisté si s problémem poradí.

Úloha 4.

Je dáno přirozené číslo n ($n>2$) a reálná čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$, pro která platí

$$x_1 x_2 = x_2 x_3 = \dots = x_{n-1} x_n = x_n x_1 = 1.$$

Dokažte, že

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq n.$$

Podívejme se nejprve, co znamenají rovnosti v zadání. Uvědomíme-li si, jak vypadají další součiny v $x_1 x_2 = x_2 x_3 = \dots = x_{n-1} x_n = x_n x_1 = 1$, dojdeme k zjištění, že

$$x_1 = x_3 = x_5 = \dots = x_{n-1},$$

$$x_2 = x_4 = x_6 = \dots = x_n.$$

Čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou zcela jistě všechna nenulová. Je-li navíc n číslo liché, pak dokonce $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = \dots = x_{n-1} = x_n$. Pro sudé n toto platit obecně nemusí.

Pro lichá n si je tedy všech n čísel sobě rovno. Otázka pak zní, které číslo po vynásobení samo sebou dává číslo 1. Jsou to čísla 1 nebo -1. Ta po umocnění na druhou dávají číslo 1. Sečtu-li n-krát číslo 1, dostávám n a v dokazované nerovnosti platí rovnost.

Pro sudá n bude zřejmě $x_1 = \frac{1}{x_2} = x_3 = \frac{1}{x_4} = \dots = x_{n-1} = \frac{1}{x_n}$. Zkoumaný součet $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ se pak přepíše jako

$$x_1^2 + \left(\frac{1}{x_1}\right)^2 + x_1^2 + \left(\frac{1}{x_1}\right)^2 + \dots + x_1^2 + \left(\frac{1}{x_1}\right)^2 = n\left(x_1^2 + \frac{1}{x_1^2}\right) = \frac{n}{2}\left(x_1^2 + \frac{1}{x_1^2}\right).$$

Nyní chci dokázat, že $\frac{n}{2}\left(x_1^2 + \frac{1}{x_1^2}\right)$ je větší než nebo rovno n, nebo-li že zlomek $x_1^2 + \frac{1}{x_1^2}$ je pro libovolné nenulové reálné číslo x_1 roven alespoň 2.

Dokážu toto tvrzení pro libovolné kladné číslo u. Z vlastností druhé mocniny plyne, že $(u-1)^2 \geq 0$ pro všechna reálná u, tím spíše pro kladná. Nerovnost můžu dále upravovat následujícím způsobem.

$$u^2 - 2u + 1 \geq 0$$

$$u^2 + 1 \geq 2u$$

$$u + \frac{1}{u} \geq 2,$$

přičemž poslední úprava je se zachováním znaménka nerovnosti možná nejen pro u různá od nuly, ale jen pro kladná. Ještě dodám, že rovnost nastává právě pro $u = 1$, což lze nahlédnout z výchozího tvaru nerovnosti.

Proto je tedy i $x_1^2 + \frac{1}{x_1^2} \geq 2$, neboť pro libovolné nenulové x_1 je x_1^2 kladné číslo. Výše odvozená nerovnost je jedním z několika mála poznatků využívaných opakovaně ve všech úrovních soutěže a řešitelé na něj narazili nespočetněkrát i během uplynulých ročníků.

Tato úloha využívající opět pouze základní znalosti o číslech se mi tak zdá být opět velmi pěkná, a prozkoumá-li žák dopodrobna všechny informace vytěžené ze zadání, zcela jistě přijde rychle sám na řešení. To bývá, jak bude vidět brzy i z následujících úloh, nejlepší metoda, tj. rozebrat co nejvíce dopodrobna zadání a souvislost s požadovaným úkolem se tak brzy sama objeví.

Návodnou úlohou pro použití zmiňované nerovnosti může být první úloha domácího kola kategorie C z 33.ročníku znějící:

Najděte všechny trojice kladných čísel a, b, c, pro které platí

$$a + 2b + 3c + \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 12.$$

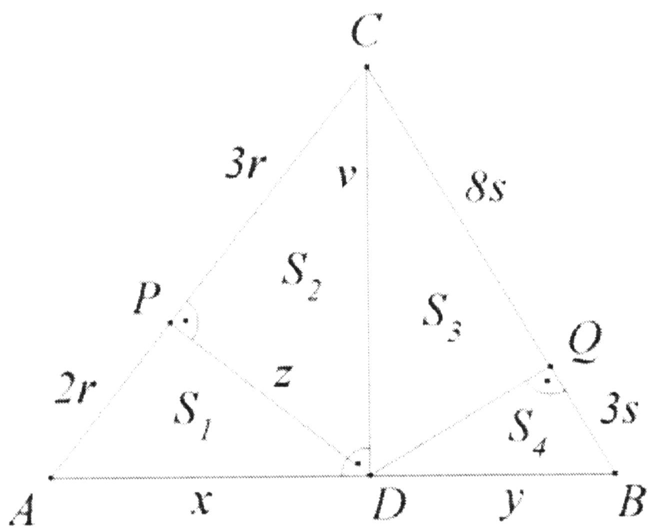
Řešení je s využitím výše dokázané nerovnosti na první pohled zcela zřejmé: $a = b = c = 1$.

Úloha 5.

V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme D patu výšky z vrcholu C a P, Q odpovídající paty kolmic vedených bodem D na strany AC, BC. Obsahy trojúhelníků ADP, DCP, DBQ, CDQ označme postupně S_1, S_2, S_3, S_4. *Vypočtěte* $S_1 : S_3$, *jestliže* $S_1 : S_2 = 2 : 3$ a $S_3 : S_4 = 3 : 8$.

V této planimetrické úloze se využívá zejména podobnosti trojúhelníků. Ta bývá náplní učiva již vyšších ročníků nižšího gymnázia, žáci ji znávají i z posledních ročníků základních škol. Bývá užívána k důkazům nebo odvozením například Euklidových vět o odvěsně a o výšce v pravoúhlém trojúhelníku.

Označím si $x = |AD|$, $y = |BD|$ a $v = |CD|$ jako v obr. 5 pro všechna následující řešení. Trojúhelníky *ADP* a *CDP* mají společnou výšku *DP*. Jsou-li jejich obsahy v poměru $S_1 : S_2 = 2:3$, jsou tak v témž poměru i délky úseček *AP* a *CP*. Můžu je tedy označit například *2r* a *3r* pro nějakou délku *r*. Podobně jsou-li obsahy trojúhelníků *BDQ* a *CDQ* v poměru $S_3 : S_4 = 3:8$, můžu pak délky úseček *BQ* a *CQ* označit *3s* a *8s* pro nějakou délku *s*.



obr. 5

Nyní budu zkoumat již hledaný poměr, pro který dostávám první vztah v podobě $\dfrac{S_1}{S_3} = \dfrac{2r|DP|}{3s|DQ|}$, kde v čitateli i ve jmenovateli jsou příslušné obsahy rozšířené dvěma. Nyní potřebuji najít nějaký vztah mezi délkami *r*, *s* a $|DP|, |DQ|$. Ty získám následovně: Využitím Euklidovy věty o výšce vyjádřím $|DP| = \sqrt{6r^2} = r\sqrt{6}$ a $|DQ| = \sqrt{24s^2} = 2s\sqrt{6}$. Vztah mezi *r* a *s* pak získám využitím podobnosti trojúhelníků *ACD* a *DCP* a trojúhelníků *BCD* a *DCQ* a rovnosti poměrů délek přepon a delších odvěsen. $\dfrac{5r}{v} = \dfrac{v}{3r}$, odkud vyjádřím $v^2 = 15r^2$, a dále pak $\dfrac{11s}{v} = \dfrac{v}{8s}$, odkud dostávám $v^2 = 88s^2$. Odtud pak $15r^2 = 88s^2$, což můžu dosadit do vztahu výše.

$$\frac{S_1}{S_3} = \frac{2r|DP|}{3s|DQ|} = \frac{2r^2\sqrt{6}}{6s^2\sqrt{6}} = \frac{88}{3.15} = \frac{88}{45}.$$

Využít při řešení lze ale například i větu Pythagorovu. Provedu označení shodné s předchozím postupem a ještě označím navíc $z = |PD|$. Trojúhelníky *ADP*, *PDC*, *ADC*, jsou pravoúhlé. Potom platí $x^2 = 4r^2 + z^2$, $v^2 = 9r^2 + z^2 = 25r^2 - x^2$. Odtud potom $z^2 = 16r^2 - x^2 = 16r^2 - (4r^2 - z^2)$, neboli $2z^2 = 12r^2$, $z = r\sqrt{6}$, $x = r\sqrt{10}$, $v = r\sqrt{15}$, a konečně $S_1 = r^2\sqrt{6}$. Analogicky budu postupovat i pro pravoúhlé trojúhelníky *BDQ*, *QDC*, *BDC*. Tedy $v = 2s\sqrt{22}$, $y = s\sqrt{33}$, $S_3 = 3s^2\sqrt{6}$. Stejně jako výše využiji dvojího vyjádření $v^2 = 15r^2 = 88s^2$ a pro hledaný poměr $\dfrac{S_1}{S_3}$ tak dostávám stejný výsledek $\dfrac{S_1}{S_3} = \dfrac{88}{45}$.

Již několikrát zmíněné podobnosti můžu využít ještě jinak. Opět ponechám zavedené značení. Z podobnosti trojúhelníků *ADP* a *DCP* plyne $x^2 : v^2 = S_1 : S_2 = 2:3$. Podobně z podobnosti trojúhelníků *DBQ* a *CDQ* plyne $y^2 : v^2 = S_3 : S_4 = 3:8$. Odtud pak získáme poměr $x^2 : y^2 = (2.8):(3.3) = 16:9$ a $x : y = 4:3$. Trojúhelníky ADC a BDC mají společnou výšku, proto platí $(S_1 + S_2):(S_3 + S_4) = x : y = 4:3$. Za S_2 dosadíme $\frac{3}{2}S_1$, za S_4 dosadíme $\frac{8}{3}S_3$ a po úpravě dostáváme $\frac{S_1 + S_2}{S_3 + S_4} = \frac{\frac{5}{2}S_1}{\frac{11}{3}S_3} = \frac{15S_1}{22S_3} = \frac{4}{3}$, odkud $\frac{S_1}{S_3} = \frac{88}{45}$.

Tato úloha, možná protože patří mezi ty jednodušší z kategorie C, je opět podle mě jednou z těch velmi pěkných. Dá se zde využít řada planimetrických poznatků, známých leckdy už i na základní škole. Asi nejméně zřetelným postupem se zdá být ten poslední, uvedený jako vzorové řešení. Studenti si totiž často neuvědomují, že jsou-li nějaké dva trojúhelníky podobné s koeficientem podobnosti k, jsou jejich obsahy v poměru k^2.

Úloha 6.

Rozhodněte, které z čísel

$$\sqrt{p+\sqrt{q}} + \sqrt{q+\sqrt{p}},\ \sqrt{p+\sqrt{p}} + \sqrt{q+\sqrt{q}}$$

je větší, jsou-li p a q různá kladná čísla.

V úloze, kde se mají porovnávat nějaká dvě (kladná) čísla, se jako řešení nabízí zkrátka zvolit jedno z čísel (v mém uvedeném postupu například to první) jako větší, řešit nerovnici a za užití ekvivalentních úprav zkoumat, zda dojdu, nebo nedojdu ke sporu.

Protože se jedná o čísla kladná, můžu bez rozmýšlení umocnit obě strany nerovnice na druhou. Poté od obou stran odečtu čísla p, q, $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$ a vydělím dvěma. Dále opakovaně umocňuji. Stále se jedná o ekvivalentní úpravy.

$$\sqrt{p+\sqrt{q}} + \sqrt{q+\sqrt{p}} > \sqrt{p+\sqrt{p}} + \sqrt{q+\sqrt{q}}$$

$$p+\sqrt{q}+2\sqrt{p+\sqrt{q}}\sqrt{q+\sqrt{p}}+q+\sqrt{p} > p+\sqrt{p}+2\sqrt{p+\sqrt{p}}\sqrt{q+\sqrt{q}}+q+\sqrt{q}$$

$$\sqrt{p+\sqrt{q}}\sqrt{q+\sqrt{p}} > \sqrt{p+\sqrt{p}}\sqrt{q+\sqrt{q}}$$

$$\left(p+\sqrt{q}\right)\left(q+\sqrt{p}\right) > \left(p+\sqrt{p}\right)\left(q+\sqrt{q}\right)$$

$$pq+p\sqrt{p}+q\sqrt{q}+\sqrt{pq} > pq+p\sqrt{q}+q\sqrt{p}+\sqrt{pq}$$

$$p\sqrt{p}+q\sqrt{q} > p\sqrt{q}+q\sqrt{p}.$$

Nyní převedu všechny členy na levou stranu nerovnice, vytknu p a q a dále upravuji.

$$p\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)-q\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)>0$$

$$(p-q)\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)>0$$

$$\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)>0$$

$$\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)^2>0.$$

Z posledního řádku je již zcela zřejmé, že předpovídaná nerovnost je splněna. Součin dvou kladných čísel a druhé mocniny nenulového rozdílu je vždy kladný. Jelikož jsme postupovali ekvivalentními úpravami, můžeme úvahu obrátit a dojdeme k závěru, že větší z daných čísel je to první.

I když jsou rovnice a nerovnice s odmocninami v prvním ročníku gymnázia náplní až druhého pololetí, studenti s nimi mají již své zkušenosti. Proto by nemělo být problémem úlohu během jednoho posezení zvládnout. Pokud ano, lze úpravy procvičit na jednodušších příkladech podobného typu, třeba i s čísly. Kamenem úrazu může být závěr. Řada studentů bývá chybně navyklá dokázat nějaké tvrzení tím, že z něj odvodí pravdivý výrok.

Shrnu-li tedy výše uvedené informace, vidím, že domácí kolo kategorie C bylo zaměřeno převážně na algebru a planimetrii, zejména pak na dělitelnost, vlastnosti čísel, počítání s mocninami a odmocninami a z geometrie na vlastnosti kružnic a podobnost trojúhelníků. Všechna tato témata se objeví v dalších kolech, tj. školním a krajském, stejně tak jsou to, jak záhy uvidíme, velmi často témata, kterým jsou věnovány úlohy kategorií A i B, avšak samozřejmě na vyšší úrovni. U kategorie C je dle mého pozorování též patrná nejmenší propast mezi tzv. školní matematikou (úlohami z běžných učebnic a sbírek řešenými v hodinách) a matematikou olympionickou, pokud tato propast vůbec v tomto případě existuje. Proto myslím, že právě první ročník střední školy je nejlepší dobou, pokud se žák neúčastnil soutěže na základní škole (i když v tom případě šlo spíše o hraní než o počítání), na to začít s olympiádou. Potenciálnímu řešiteli tak umožněme pozvolné pronikání do tématiky a ten si z kategorie C odnese řadu poznatků a souvislostí, které by ve škole třeba ani nezískal, a může je tak dále využívat a rozšiřovat své obzory. Motivujme proto výjimečné středoškoláky již v prvním ročníku a seznamujme je se soutěží, překonejme třeba i jejich stud před spolužáky a nabídněme jim nezávazně leták se zadáním domácích úloh.

2.1.2 Školní kolo

Školní část prvního kola si pořádá každá škola sama na své půdě. (Pokud není schopna ji zajistit, je povinna umožnit a zprostředkovat soutěžícím účast na jiné škole.) Úloh je již méně (pouze tři) a žák na jejich vyřešení má čtyři hodiny čistého času. Povolenými pomůckami jsou psací a rýsovací potřeby, Matematicko-fyzikální tabulky a kalkulačky bez grafického displeje, tzn. pouze ty, které neumožňují např. znázornění průběhu funkce a pod. O účasti žáka v této klauzurní části rozhoduje pověřený učitel příslušné školy. Podíváme-li se dále na témata, kterými si úlohy školního kola zabývají, zjistíme, že navazují na úlohy kola domácího, na které tak lze pohlížet i jako na kolo přípravné. Za řešení každé úlohy je možné získat maximálně šest bodů, přičemž za úspěšného řešitele je považován každý, kdo dosáhne celkového zisku alespoň desíti bodů. Nyní opět podrobněji rozeberu konkrétní úlohy.

Úloha 1.
Hokejového turnaje se zúčastnila čtyři družstva, přičemž každé sehrálo s každým právě jedno utkání. Počet branek vstřelených v každém utkání dělí celkový počet branek vstřelený v turnaji, přitom v žádných dvou utkání jich nepadl stejný počet. Kolik nejméně mohlo v turnaji padnout branek?

Nejprve určím počet zápasů, abych věděl, kolik čísel vlastně hledám. Každé ze čtyř družstev hrálo tři zápasy (se třemi zbývajícími týmy). Proto $3.4.\frac{1}{2}=6$. Šesti různými přirozenými čísly s nejmenším možným součtem jsou čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, jejichž součet je $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. Číslo 21 ale není dělitelné například dvěma. Potom se tedy nabízí nahradit číslo 6 číslem 7. Nový součet $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 = 22$ není ale dělitelný třemi. Číslo 23 je prvočíslo, proto přistoupíme až k číslu 24. Číslo 5 nahradíme číslem 6 a číslo 7 číslem 8. Součet 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 = 24 je dělitelný všemi z čísel 1, 2, 3, 4, 6, 8. Číslo 24 je nejmenší počet branek, který mohl v utkání padnout.

Jde o úlohu snadnou, proto drtivá většina řešitelů postoupivších do školního kola s ní neměla problémy. Pokud se nějaké chyby mezi úspěšnými řešiteli, kteří postoupili do krajského kola v Praze, našly, byly to zejména tyto: Mezi počty branek se objevilo číslo 0, i když jak víme, 0 není dělitelem žádného přirozeného čísla. Dva studenti ve svém vypisování součtů přehlédli, že číslo 24 vyhovuje, a tak se dostali až na 36. Jednou se také objevilo, že hledaný součet musí být nejmenším společným násobkem nejmenších možných počtů branek, tj. čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 (což bylo patrně způsobeno špatnou interpretací zadání), za který prohlášeno číslo 60. Řešitel tak získal pouze 1 bod za zjištění, že se odehrálo celkem 6 zápasů. Za povšimnutí stojí určitě následující úvaha jednoho studenta z Prahy, ve které je zvolen opačný postup: Mějme množinu několika málo čísel, která mají požadovanou vlastnost, že jejich součet dělí každé z těchto uvažovaných čísel, a přidávejme do této množiny další čísla tak, aby zůstala tato vlastnost zachována, dokud nedosáhneme počtu utkání.

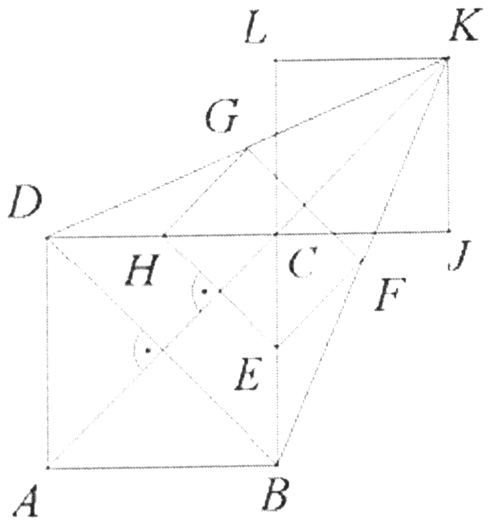
Nejmenší číslo bude určitě číslo 1, dále pak nejspíš 2 a 3. Tato trojice podmínce zadání odpovídá, jelikož 1 + 2 + 3 = 6 a 6 je číslo dělitelné 1, 2 i 3. Zkusme přičíst takové číslo, aby daná čísla stále zachovávala uvedenou podmínku, tj. aby jejich součet byl stále dělitelný všemi sčítanými čísly. Takovým číslem určitě může být číslo 6, protože 1 + 2 + 3 + + 6 = 12 a 12 je číslo dělitelné 1, 2, 3 i 6. Teď už zbývají pouze dvě čísla. Napadá mě přičíst taková čísla, jejichž součet je 12. Tím pádem bude součet všech vybraných čísel dělitelný, čím je teď. Taková dvě čísla jsou 4 a 8 nebo 5 a 7. Součet všech šesti čísel by byl 24, tím pádem dvojice 5 a 7 nepřichází v úvahu. Hledaná čísla jsou tedy 1, 2, 3, 4, 6 a 8 a jejich součet 24 je dělitelný všemi těmito čísly. Nejméně mohlo tedy padnout 24 branek.

Jinak byly žákovské postupy vesměs stejné s výše uvedeným vzorovým řešením.

Úloha 2.

Vrchol C čtverců ABCD a CJKL je vnitřním bodem úsečky AK i úsečky DJ. Body E, F, G, H jsou po řadě středy úseček BC, BK, DK, DC. Určete obsah čtyřúhelníku EFGH pomocí obsahů S a T čtverců ABCD a CJKL.

Základem úspěchu v první geometrické úloze nejen tohoto kola je jako vždy obrázek. Pokud se řešitel prodere zadáním, uvědomí si, jak situace vypadá, a vše správně zakreslí, je téměř vyhráno. Polovinu z celkového počtu šesti bodů student získává již jen za zjištění faktu, že zkoumaný čtyřúhelník *EFGH* je obdélník, což je z pěkného obrázku na první pohled patrné. Jde o to, umět to dokázat.



obr. 7

Mám-li obsah čtyřúhelníka *EFGH* vyjádřit pomocí obsahů *S* a *T* čtverců *ABCD* a *CJKL*, označím si $a=\sqrt{S}$ a $b=\sqrt{T}$. Ze zadání promítnutého do obrázku 7 je patrné, že úsečka *EH* je střední příčkou trojúhelníku *BCD*. Proto platí $2|EH|=2|FG|=|BD|$ a úsečky *EH* a *FG* jsou s úsečkou *BD* rovnoběžné. Podobně je úsečka *HG* střední příčkou v trojúhelníku *DCK* a úsečka *EF* střední příčkou v trojúhelníku *BCK*. Proto platí $2|HG|=2|EF|=|CK|$ a úsečky *HG* a *EF* jsou rovnoběžné s úsečkou *CK*, a tudíž i kolmé na úsečky BD a JL. Rovnoběžník $EFGH$ je tudíž obdélník nebo čtverec mající obsah

$$|EF|.|FG| = \frac{a\sqrt{2}}{2}\frac{b\sqrt{2}}{2} = \frac{ab}{2} = \frac{\sqrt{ST}}{2}.$$

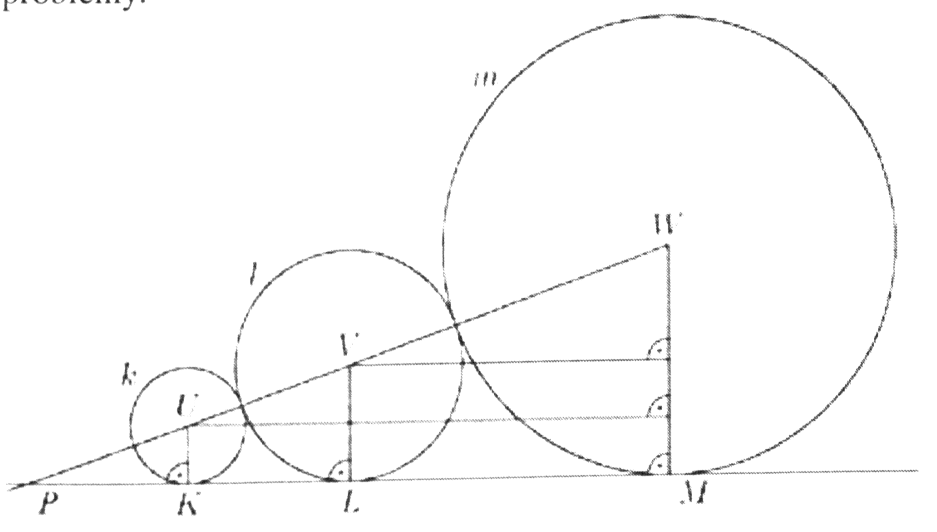
Dle mého názoru se jedná o úlohu lehkou. Zákonitosti užité během jejího řešení, jako jsou vlastnosti středních příček, obsahy čtverců a obdélníků, by měly být známy již žákům na konci základní školy. Ze zkušenosti lze tvrdit, že vyřešit tuto úlohu jsou schopni nadaní žáci i během běžné hodiny matematiky.

Řešení soutěžících z Prahy se vesměs podobala uvedenému vzorovému řešení. Z dvaceti čtyř tamních úspěšných řešitelů postupujících do krajského kola ale jen čtyři získali plný počet šesti bodů. Pěti body byl ohodnocen student s úplným řešením, ale s mnohými hloupými chybami z nepozornosti. Dalším pěti soutěžícím byly uděleny body čtyři proto, že chybělo vysvětlení toho, jakým čtyřúhelníkem útvar $EFGH$ je, a zdůvodnění, že užitý vztah pro výpočet obsahu je korektní. Tito studenti automaticky počítali s obdélníkem. Mezi neúspěšnými řešiteli se ale objevil například i rovnoramenný lichoběžník. Ačkoliv zadání jasně říkalo, že hledaný obsah se má vyjádřit pomocí obsahů S a T čtverců $ABCD$ a $CJKL$, ve dvou případech jej řešitelé vyjadřovali pomocí délek a a c stran těchto čtverců. Projdu-li si početní postup od začátku, zjistím, že snadné vyjádření délky úsečky HE získalo hned osmnáct řešitelů, délku úsečky GH nebo EF ale pak pouze dvanáct, obsah zkoumaného čtyřúhelníka pak pomocí nich vyjádřilo deset soutěžících. Pouze tři řešitelé neměli ve svých postupech žádnou správnou myšlenku. Ve dvou případech studenti nezakreslili situaci podobně jako na obrázku 7, ale tak, že obdélník $ABCD$ byl menší než obdélník $CJKL$. Tito dva si potom vyšetřovaný čtyřúhelník $EFGH$ rozdělili na čtverec a obdélník, jejichž obsahy se snažili bohužel neúspěšně nalézt.

Úloha 3.

Kružnice k, l, m se dotýkají společné tečny ve třech různých bodech a jejich středy leží v přímce. kružnice k a l stejně jako kružnice l a m mají vnější dotyk. Určete poloměr kružnice l, jestliže poloměry kružnic k a m jsou 3 cm a 12 cm.

Třetí úloha školního kola evidentně navazuje na druhou úlohu kola domácího. Pokud student vyřešil onu úlohu doma, neměla by mu tato ve školním kole dělat žádné problémy.



obr. 8

Nejdříve uvedu opět vzorové řešení. Načrtnu si obrázek, kde zohledním ty skutečnosti, že všechny tři kružnice se dotýkají společné tečny, že jejich středy (v obrázku body U, V, W) leží na jedné přímce a že kružnice k, l a l, m mají vnější dotyk. Vyznačím pravé úhly, které v bodech dotyku K, L, M svírá ona tečna s úsečkami, které jsou poloměry zadaných kružnic. Čtyřúhelníky $KLVU$, $LMWV$, $KMWU$ jsou pravoúhlé lichoběžníky. Ve všech třech použijeme Pythagorovu větu a dostáváme soustavu tří kvadratických rovnic o třech neznámých, z nichž chceme získati pouze r označující hledaný poloměr.

$$(r+3)^2 = |KL|^2 + (r-3)^2$$

$$(r+12)^2 = |LM|^2 + (12-r)^2$$

$$(2r+3+12)^2 = |KM|^2 + (12-3)^2$$

Využitím vztahu $|KM| = |KL| + |LM|$ a dosazením z první a druhé rovnice do třetí získám kvadratickou rovnici pro neznámou r.

$$4r^2 - 48r + 144 = 0$$

Tu lze řešit po vydělení čtyřmi rozkladem. Má jediné řešení $r = 6$. Poloměr kružnice l je tedy 6 cm.

Tato geometrická úloha je těžší než úloha předcházející, avšak ani tentokrát není technicky náročná. Pythagorova věta je učivem základní školy. Řešitel ale může ztroskotat na řešení takovéto soustavy rovnic (tři neznámé, kvadráty), i když nakonec nepotřebuje ani vzoreček pro kořeny kvadratické rovnice.

Nechci-li se vydat cestou soustavy tří na první pohled obtížných rovnic, můžu v obrázku najít celou řadu podobných trojúhelníků a využít podobnosti a vztahů pro délky odpovídajících si stran. Jednou dvojicí podobných trojúhelníků (podle věty *uu*) jsou trojúhelníky UXV a UYW. Potom například platí, že

$$\frac{12-3}{r-3} = \frac{2r+3+12}{r+3},$$

odkud dostávám kvadratickou rovnici bez lineárního členu $2r^2 = 72$, tedy $r = 6$ (zajímá mě jen kladné řešení).

Toto mé řešení se mi jeví jako mnohem schůdnější a opět si lze vystačit takřka jen se základoškolskými prostředky. Řešení jedné kvadratické rovnice je žák schopen i uhodnout a není deprimován dlouhými rovnicemi s kvadráty.

Řešení však lze uhádnout i mnohem snáze. Máme tři kružnice o poloměrech 3 cm, r a 12 cm, které mají nějakou požadovanou vlastnost. Dívejme se ale chvíli na tyto kružnice ne jako na trojici, ale jako na dvě dvojice. V první dvojici vystupují kružnice o poloměrech 3 cm a r, v druhé dvojici r a 12 cm. Tyto dvě situace jsou zcela identické až na to, že jedna je "zvětšením" druhé. Proto musí platit, že kolikrát je 12 cm větší než r, tolikrát je r větší než 3 cm. Odtud $r = 6\,\text{cm}$. I toto se objevilo v úvahách řešitelů. Zde však vyvstaly problémy s korektností úvah a jejich následným obodováním, které podle mých pozorování nemuselo být vždy ve všech školách shodné. Proto jsou řešení těch studentů, kteří postupují nebo mají šanci postoupit do kola krajského, ještě jednou Krajskou komisí jednotně posouzena.

A jak si počínali úspěšní soutěžící v Praze? Kromě uvedených tří postupů se v jejich pracích objevilo i vyjádření funkce sinus úhlu s vrcholem v bodě P, který svírají přímka, na které leží středy kružnic, s jejich společnou tečnou nebo s jejími rovnoběžkami, což je ale jen jiným zápisem podobnosti. Proto pak třeba platí

$$\frac{r-3}{r+3} = \frac{12-r}{12+r},$$

odkud dostáváme opět shodně $r = 6$.

Ojedinělé, ale správné řešení vymyslel jeden student z gymnázia na pražském Proseku. Využívá v něm různých vyjádření obsahů lichoběžníků v obrázku. Označme S_1

obsah lichoběžníku *KMWU*, S_2 obsah lichoběžníku *KLVU* a S_3 lichoběžníku *LMWV*, přičemž $S_1 = S_2 + S_3$. Vyjádříme-li všechny obsahy pomocí poloměrů kružnic, dostáváme následující rovnici, i když v závorkách nejsou přímo výšky lichoběžníků, ale výrazy jim úměrné.

$$\frac{3+12}{2}(3+2r+12)=\frac{3+r}{2}(3+r)+\frac{r+12}{2}(r+12)$$

$$30r+225=r^2+6r+9+r^2+24r+144$$

$$2r^2=72$$

Jak je vidět, i tímto způsobem dostáváme správné řešení $r = 6$ cm.

Jak jsme se přesvědčili, úlohy školního kola byly zaměřeny na stěžejní témata kola domácího. Byly jimi vlastnosti rovinných útvarů, konkrétně trojúhelníků, čtyřúhelníků a kružnic a různému pojetí s nimi spojené problematiky, a dále pak nechyběla elementární teorie čísel, konkrétněji dělitelnost.

Práce úspěšných řešitelů byly, jak jsem již uvedl, zaslány Krajské komisi k jednotnému posouzení a poté byli tito soutěžící s návrhem na postup ze své školy pozváni k účasti v krajském kole. To je pro kategorii C kolem nejvyšším.

2.1.3 Krajské kolo

V krajském kole, které se konalo v březnu 2006, tedy necelé dva měsíce po kole školním, byla kritéria hodnocení stejná jako v kole předchozím. To znamená šestibodové maximum za každý bezchybně vyřešený příklad a desetibodová hranice pro úspěšného řešitele. Povolenými pomůckami byly stále psací a rýsovací potřeby, tabulky a kalkulačky. Co se ale změnilo, byl počet úloh, jenž vzrostl ze tří na čtyři. Soutěžícímu se tak naskytla větší možnost výběru. Čas určený na vypracování byl rovněž čtyři hodiny.

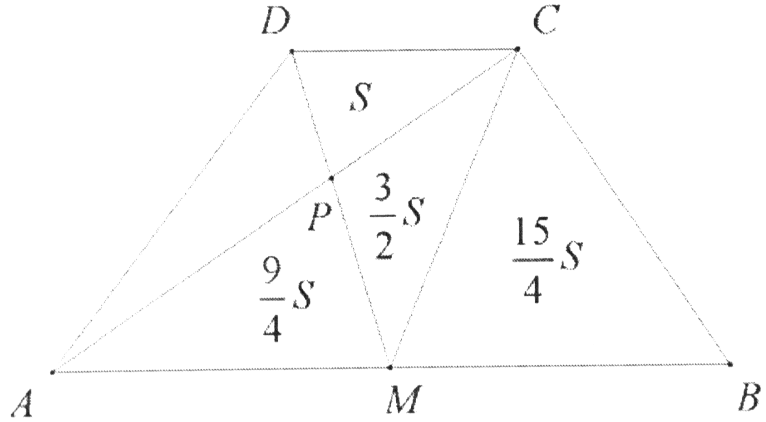
Úloha 1.

Základna AB lichoběžníku ABCD je třikrát delší než základna CD. Označme M střed strany AB a P průsečík úsečky DM s úhlopříčkou AC. Vypočítejte poměr obsahů trojúhelníku CDP a čtyřúhelníku MBCP.

Základem výpočtu je využití těchto dvou známých základních pravidel:

a) Jsou-li dva trojúhelníky podobné s koeficientem *k*, jsou jejich obsahy v poměru k^2.

b) Leží-li nějaké tři body *X*, *Y*, *Z* v jedné přímce a bod *V* mimo ni, potom jsou obsahy trojúhelníků *XYV* a *YZV* v poměru $\frac{|XY|}{|YZ|}$. Jinými slovy pro konstantní výšku na stranu se obsah trojúhelníku změní tolikrát, kolikrát se změní délka této strany. Ze shodnosti střídavých úhlů mezi rovnoběžkami *AB* a *CD* plyne, že trojúhelníky *AMP* a *CDP* jsou



obr. 9

podobné podle věty *uu* s koeficientem $\frac{|AM|}{|CD|}=\frac{3}{2}$. Označím-li S obsah trojúhelníku CDP, je obsah trojúhelníku AMP roven $\left(\frac{3}{2}\right)^2 S=\frac{9}{4}S$ a z rovností $\frac{|AP|}{|CP|}=\frac{|MP|}{|DP|}=\frac{3}{2}$ plyne, že obsah trojúhelníků APD a MPC je roven $\frac{3}{2}$ obsahu trojúhelníku CDP. Obsahy trojúhelníků AMP a BMP jsou stejné. Mají stejně dlouhou jednu stranu a výšku k této straně. Tedy $\frac{9}{4}S+\frac{3}{2}S=\frac{15}{4}S$. Obsah čtyřúhelníku $MBCP$ je potom roven součtu $\frac{15}{4}S+\frac{3}{2}S=\frac{21}{4}S$. Hledaný poměr je tedy 21:4.

Jiné řešení by mohlo vypadat třeba následovně. Začněme tím, že ze zadání vyplývá $|MB|=\frac{3}{2}.|CD|$. A opět budeme potřebovat fakt, že trojúhelníky AMP a CDP jsou podobné s koeficientem $\frac{|AM|}{|CD|}=\frac{|MP|}{|DP|}=\frac{3}{2}$, odkud získáme $|MP|=\frac{3}{2}.|DP|$ a tudíž $|MP|=\frac{3}{5}|MD|$.

Vyjádřeme si nyní obsahy obou zkoumaných útvarů a označme obsah trojúhelníku S_3 a obsah čtyřúhelníku S_4. Obsah S_3 se zřejmě rovná

$$S_3=\frac{|CD|.|DP|}{2}=\frac{|CD|.(|DM|-|MP|)}{2}=\frac{|CD|.|DM|}{2}-\frac{|CD|.|MP|}{2}.$$

Jelikož výraz $\frac{|CD|.|DM|}{2}$ odpovídá obsahu trojúhelníku CDM, je proto $\frac{|CD|.|MP|}{2}$ obsah trojúhelníku MCP. Ten je ale součástí čtyřúhelníku $MBCP$. Proto můžeme psát

$$S_4=\frac{|MB|.|MD|}{2}+\frac{|CD|.|MP|}{2}.$$

A nyní už můžeme vyjadřovat hledaný poměr:

$$\frac{S_3}{S_4}=\frac{\frac{|CD|.|MD|}{2}-\frac{|CD|.|MP|}{2}}{\frac{3.|CD|.|MD|}{4}+\frac{|CD|.|MP|}{2}}=\frac{|MD|-|MP|}{\frac{3}{2}.|MD|+|MP|}=\frac{|MD|-\frac{3}{5}.|MD|}{\frac{3}{2}.|MD|+\frac{3}{5}.|MD|}=\frac{1-\frac{3}{5}}{\frac{3}{2}+\frac{3}{5}}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{16}{10}}=\frac{4}{21}.$$

Z dvaadvaceti soutěžících v Ústeckém kraji pouze tři řešili bezchybně a získali plný počet šesti bodů. Zato třináct nebylo schopno se s úlohou vůbec vypořádat a pokud se na jejich papírech něco objevilo, byly to jen kusé útržky nějakých omylných závěrů. Nejednou se objevila chybná určení poměru délek výšek trojúhelníků ABP a CDP jako například 1:2 nebo 1:3. Tři řešitelé se ubírali tím směrem, že si nějaký lichoběžník vyhovující zadání narýsovali a pak potřebné délky měřili. To ovšem zůstalo pochopitelně bez bodového ohodnocení. Stejně tak i jedno řešení, které nebylo prováděno obecně, ale pro konkrétní čísla. I když byl výsledek správný, chybělo zobecnění.

Naopak v Praze to byla úloha s nejvyšším průměrným počtem bodů a 18 z 67 řešitelů dosáhlo plného počtu šesti bodů.

Úloha 2.

Splňují-li reálná čísla a, b, c, d rovnosti

$$a^2+b^2=b^2+c^2=c^2+d^2=1,$$

platí nerovnost

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd \le 3.$$

Dokažte a zjistěte, kdy přitom nastane rovnost.

Z rovnosti $a^2+b^2=b^2+c^2=c^2+d^2=1$ dostáváme $a^2=c^2$ a $b^2=d^2$, což znamená $|a|=|c|$ a $|b|=|d|$. Musíme proto rozebrat tři různé případy.

a) $c=a$ a zároveň $d=b$:

Levou stranu zkoumané nerovnosti můžeme upravit na tvar

$$L=ab+ac+ad+bc+bd+cd=ab+a^2+ab+ab+b^2+ab=1+4ab,$$

o čemž bychom chtěli dokázat, že je menší nebo rovno 3. Využijeme k tomu zřejmou nerovnost $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \ge 0$, odkud dostáváme $2ab \le a^2+b^2$. Proto tedy

$$1+4ab \le 1+2\left(a^2+b^2\right)=1+2=3.$$

b) $c=-a$ a zároveň $d=b$:

Levou stranu nyní upravíme takto:

$$L=ab+ac+ad+bc+bd+cd=ab-a^2+ab-ab+b^2-ab=-a^2+b^2 \le a^2+b^2=1<3.$$

c) $c=a$ a zároveň $d=-b$:

Levou stranu upravíme takto:

$$L=ab+ac+ad+bc+bd+cd=ab+a^2-ab+ab-b^2-ab=a^2-b^2 \le a^2+b^2=1<3.$$

d) Nakonec $c=-a$ a zároveň $d=-b$:

Levou stranu upravíme takto:

$$L=ab+ac+ad+bc+bd+cd=ab-a^2-ab-ab-b^2+ab=-a^2-b^2 \le 0<3.$$

Nyní zbývá zjistit, kdy nastává rovnost $ab+ac+ad+bc+bd+cd=3$. Vidíme, že je to možné jen v případě a), protože jinak je levá strana omezena číslem 1 nebo dokonce 0.

$$L=ab+ac+ad+bc+bd+cd=ab+a^2+ab+ab+b^2+ab=1+4ab,$$

což se má rovnat číslu 3. To znamená, že $4ab=2$, neboli $ab=\frac{1}{2}$. Jelikož však navíc musí být součet $a^2+b^2=1$, dostáváme $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Odpověď na otázku, kdy nastává rovnost, zní, že právě tehdy, když $a=b=c=d=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ve vzorovém řešení je uváděn ještě jiný postup. Hodnota následujícího součtu

$$\begin{gathered}S=(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2= \\ a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+a^2-2ad+d^2+ \\ +b^2-2bc+c^2+b^2-2bd+d^2+c^2-2cd+d^2= \\ 3a^2+3b^2+3c^2+3d^2-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) \ge 6-2.3=0\end{gathered}$$

je zřejmě s využitím podmínek uvedených v zadání nezáporná. Pro dvojnásobek levé strany dokazované nerovnosti pak tedy platí:

$$2L=3\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)-S \le 3\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)=6.$$

Tím je nerovnost dokázána. Zároveň však dostáváme odpověď na otázku, v jakém případě platí rovnost. Je to právě tehdy, když $S=0$, což nastane, když čísla a, b, c, d mají stejnou hodnotu. Vzhledem k podmínce $a^2+b^2=b^2+c^2=c^2+d^2=1$ to však může být právě jen hodnota $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Tato druhá cesta se mi však jeví jako podstatně méně zřetelná. Student prvního ročníku gymnázia asi stěží začne nějakým ne na první pohled vhodným součtem druhých mocnin jakýchsi rozdílů.

Z dvaceti pěti studentů v Ústí nad Labem a okolí jich celkem patnáct nedostalo za řešení úlohy jediný bod, přičemž celých deset se o řešení takřka ani nepokusilo. Z řešících se tři dopustili té chyby, že opomněli absolutní hodnoty, když z rovností $a^2=c^2$ a $b^2=d^2$ usoudili, že $a=c$ a $b=d$. Druhá část úlohy, důkaz rovnosti, činil největší problémy. Řešitelé totiž dle mého názoru nemají v prvním ročníku, i když je to náplní výuky, ještě takové zkušenosti s důkazy, aby věděli, jak správně úvahy vést. Často vycházejí z toho, co vlastně dokazují, někdy jen zkrátka dokazované suše konstatují, i když třeba správně.

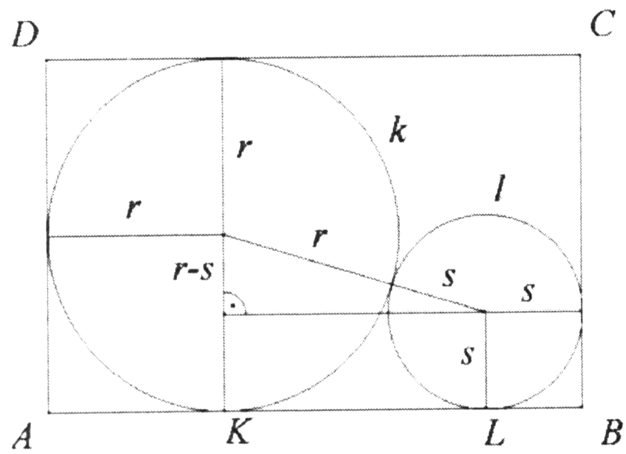
Úloha 3.

Kružnice k,l s vnějším dotykem leží obě v obdélníku ABCD, jehož obsah je 72cm². Kružnice k se přitom dotýká stran CD, DA a AB, zatímco kružnice l se dotýká stran AB a BC. Určete poloměry kružnic k a l, jestliže poloměr kružnice k je v centimetrech vyjádřen celým číslem.

Uveďme nejprve vzorové řešení úlohy. Označíme po řadě r, s poloměry zkoumaných kružnic k, l a K, L jejich body dotyku se stranou AB obdélníku $ABCD$. Užitím Pythagorovy věty vyjádřeme

$$|KL|=\sqrt{(r+s)^2-(r-s)^2}=2\sqrt{rs}.$$

Pro délky stran obdélníku $ABCD$ platí $|AD|=2r$ a $|AB|= = r+2\sqrt{rs}+s=\left(\sqrt{r}+\sqrt{s}\right)^2$, což nám dává po dosazení do vztahu pro obsah obdélníku



obr. 10

$$2r\left(\sqrt{r}+\sqrt{s}\right)^2=72, \text{ neboli } r+\sqrt{rs}=6.$$

Odtud plyne podmínka $r>6$ a vyjádření

$$s=\frac{(6-r)^2}{r}.$$

Ze zadání dále plyne, že s nemůže být větší než r, protože by jinak kružnice l neležela celá uvnitř obdélníku. Protože i celá kružnice k musí ležet celá uvnitř obdélníku, musí platit i $|AB|\geq|AD|=2r$. Vyjádření poloměru s výše nám pak dává $36-12r+r^2\leq r^2$, tj. $r\geq 3$. Z nerovnosti $|AB|\geq 2r$ pak plyne $72=|AB|.|AD|\geq 4r^2$, neboli $r^2\leq 18$, což pro celočíselné r znamená $r\leq 4$. Dostáváme tak pouze dvě přípustné možnosti $r\in\{3,4\}$. Hodnotu poloměru s dopočítáme ze vztahu $s=\dfrac{(6-r)^2}{r}$. Dostáváme tak právě dvě řešení: $r=s=3$ cm a $r=4$ cm, $s=1$ cm.

Úvahu o přípustných hodnotách poloměru r však můžeme provést i jinak. Víme-li, že $72 = |AD|.|AB|$ a že poloměr r je vyjádřen v celých centimetrech, hledejme celočíselné rozklady čísla 72 na dva činitele, kde navíc jeden je číslo sudé $(|AD| = 2r)$.

$$72 = 2.36 = 3.24 = 4.18 = 6.12 = 8.9.$$

Sudý činitel ale musí být, jak bylo řečeno, menší než ten druhý, aby se kružnice k vešla do obdélníku. Proto můžeme vyloučit 3.24. Druhý činitel však po odečtení prvního musí být menší než první. To odpovídá podmínce zadání, aby kružnice l ležela celá uvnitř obdélníku. Vyloučíme tak 2.36 a 4.18. Zbývají tak rozklady 8.9 a 6.12, což znamená $2r = 8$ nebo $2r = 6$, což nám dává $r = 4$ nebo $r = 3$ jako v uvedeném vzorovém řešení.

V Ústeckém kraji řešilo úspěšně vzorovým postupem sedm soutěžících z celkem dvaadvaceti. Dva z těchto sedmi dospěli však jen k řešení $r = 4$ cm a $s = 1$ cm. Rozklady čísla 72 hledali tři studenti, avšak jen jeden jediný dospěl takto k řešení. Zbytek studentů měl zpravidla 0 bodů, protože jejich úvahy byly chybné a vycházely zejména ze špatně pochopeného zadání nebo špatné interpretace situace do náčrtku.

Úlohu však i přes třetinovou úspěšnost hodnotím jako jednoduchou a hezkou. pěkný obrázek, ve kterém si přehledně vyznačím vše, co znám, je stejně jako ve všech podobných geometrických úlohách základem úspěchu. Z matematických dovedností jsou zapotřebí jen úpravy jednoduchých výrazů. Úloha navazuje na úlohy s kružnicemi z minulých kol a opět využívá Pythagorovy věty. Pokud se jimi řešitel více zaobíral, neměl by se objevit problém.

Úloha 4.

Najděte všechny dvojice prvočísel p a q, pro které platí

$$p + q^2 = q + 145p^2.$$

Upravme rovnici ze zadání do tvaru

$$q^2 - q = 145p^2 - p$$

$$q(q-1) = p(145p-1)$$

Čísla p a q jsou prvočísla, potom ze zadání plyne, že prvočíslo p dělí součin $q(q-1)$. Prvočíslo p však nemůže dělit prvočíslo q. Muselo by platit $p = q$, a tedy $145p = p$, což není možné. Proto p dělí q-1, tj. existuje přirozené číslo k takové, že $q-1 = kp$. Po dosazení dostáváme podmínku

$$p = \frac{k+1}{145-k^2}.$$

Prvočíslo je číslo kladné, $k + 1$ je rovněž číslo kladné, proto musí být i jmenovatel zlomku číslo kladné. Tudíž $k^2 < 145$, tj. $k \le 12$. Dále pak vidíme, že pro $k \le 11$ je čitatel zlomku menší než jeho jmenovatel. Výsledkem takového podílu by nemohlo být číslo celé. Proto může nastat právě jedna situace, $k = 12$, které nám dává $p = \frac{13}{1} = 13$ a potom $q = 157$. Úloha má právě toto jediné řešení.

Další velmi hezká úloha zabývající se již několikáté dělitelností a nově i prvočísly se specifickými vlastnostmi. Zamyslíme-li se nad návazností na příklady počítané ve škole, zřejmě si uvědomíme, že ta tu téměř chybí. Příkladům z teorie čísel není věnováno mnoho času. Studentovi tak chybí potřebný cvik.

Nejčastějšími tématickými okruhy krajského kola byly tedy rovinné geometrické útvary v úloze zaměřené opět na podobnost v pokročilejším užití a v úloze s kružnicemi v propojení s teorií čísel. Vlastnosti prvočísel, jakožto nedílná součást olympiády, byly zastoupeny v hezké poslední úloze. Rovněž velmi častým úkolem je důkaz nějaké rovnosti či nerovnosti. V souhrnu by se daly úlohy pro 55. ročník matematické olympiády kategorie C zhodnotit jako vhodné a smysluplně poskládané za sebe v tom smyslu, že určitých témat jako například podobnosti bylo užíváno s postupně rostoucí obtížností.

Z 67 účastníků pražského krajského kola se jich 17 stalo úspěšnými řešiteli, přičemž nejlepší výsledek měl Jakub Töpfer se ziskem 19 bodů z 24. Zajímavé je, že je to nejhorší zisk nejlepšího řešitele z posledních pěti let, co se Prahy týká. První úloha využívající podobnosti byla tou, ve které nejvíce studentů získalo plný počet bodů, což dokázalo 18 z nich. Naopak nejhůře si u pražských mladých matematiků vedla překvapivě poslední úloha s prvočísly. Tu v Praze na plný počet nevyřešil kupodivu nikdo.

Stejně tomu bylo v kraji Jihomoravském, kde maximum získané z posledního příkladu bylo 5, kterých dosáhla i nejúspěšnější Hana Šormová. První úloha spolu se třetí byly těmi na jižní Moravě nejlépe řešenými příklady. Měli zde dokonce 22 úspěšných řešitelů ze 73. Dalšími úspěšnými řešiteli na prvních místech jsou s 18 body Klára Holková a Jakub Štefela z Libereckého kraje, Jan Matějka z Jihočeského kraje rovněž s 18 body, Diana Marková, Nguyen Van Minh s 13 body z Plzeňského kraje a s 12 body Marcela Höferová z Ústeckého kraje.

2.2 Kategorie B

2.2.1 Domácí kolo

Úloha 1.

Určete všechny hodnoty celočíselného parametru a, pro něž má rovnice

$$(x+a)(x+2a)=3a$$

alespoň jedno celočíselné řešení.

Po roznásobení závorek na levé straně a převedení pravé strany nalevo dostaneme kvadratickou rovnici

$$x^2+3ax+2a^2-3a=0.$$

Její kořeny, pokud existují, mají podle známého vzorce tvar

$$x_{1,2}=\frac{-3a\pm\sqrt{9a^2-4(2a^2-3a)}}{2}=\frac{-3a\pm\sqrt{a^2+12s}}{2}.$$

Hodnota tohoto výrazu může být celé číslo jen tehdy, je-li číslo a^2+12a druhou mocninou nějakého celého čísla b, o kterém můžeme předpokládat, že je nezáporné. Upravujme tedy dále rovnost $b=\sqrt{a^2+12a}$.

$$a^2+12a=b^2$$

$$a^2+12a+36=b^2+36$$

$$(a+6)^2-b^2=36$$

$$(a+6+b)(a+6-b)=36.$$

Dostali jsme rozklad čísla 36 na součin dvou celočíselných činitelů, které musejí mít stejné znaménko. Jelikož jejich rozdíl

$$(a+6+b)-(a+6-b)=2b$$

je sudé nezáporné číslo, mají oba činitelé stejnou paritu, tj. jsou oba sudé nebo oba liché, a druhý činitel není větší než první činitel. Proto existují právě čtyři následující možnosti:

a) 36 = 18.2, tedy $(a+6+b)=18$, $(a+6-b)=2$. Tato soustava dává jediné řešení $a=4, b=8$. Rovnice $(x+4)(x+8)=12$ má pak kořeny -10 a -2.

b) 36 = 6.6, tedy $(a+6+b)=6$, $(a+6-b)=6$. Tato soustava dává jediné řešení $a=0, b=0$. Rovnice $(x+0)(x+0)=0$ má pak dvojnásobný kořen 0.

c) 36 = (-2).(-18), tedy $(a+6+b)=-2$, $(a+6-b)=-18$. Tato soustava dává jediné řešení $a=-16, b=8$. Rovnice $(x-16)(x-32)=-48$ má pak kořeny 20 a 28.

d) 36 = (-6).(-6), tedy $(a+6+b)=-6$, $(a+6-b)=-6$. Tato soustava dává jediné řešení $a=-12, b=0$. Rovnice $(x-12)(x-24)=-36$ má pak dvojnásobný kořen 18.

Hledané hodnoty parametru a jsou pak tedy právě čísla 4, 0, -12 a -16.

Ve vzorovém řešení úlohy najdeme i následující alternativu. Stejně jako v prvním řešení upravme nejprve rovnici do tvaru

$$x^2+3ax+2a^2-3a=0.$$

Nyní se pokusme najít rozklad výrazu na levé straně na součin dvou lineárních činitelů tvaru $\alpha x+\beta a+\gamma$. Ten nenajdeme, ale můžeme uhodnout rozklad

$$(x+2a+3)(x+a-3)=x^2+3ax+2a^2-3a-9,$$

který se od hledaného liší o konstantní číslo. Zkoumanou rovnici pak lze zapsat ve tvaru

$$(x+2a+3)(x+a-3)=-9.$$

I tento rozklad je velmi cenný, protože pro řešení v oboru celých čísel existuje pouze konečný počet rozkladů.

a) -9 = 9.(-1), tedy $x+2a+3=9$, $x+a-3=-1$, neboli $a=4, x=-2$,

b) -9 = 3.(-3), tedy $x+2a+3=3$, $x+a-3=-3$, neboli $a=0, x=0$,

c) -9 = 1.(-9), tedy $x+2a+3=1$, $x+a-3=-9$, neboli $a=4, x=-10$,

d) -9 = (-1).9, tedy $x+2a+3=-1$, $x+a-3=9$, neboli $a=-16, x=28$,

e) -9 = (-3).3, tedy $x+2a+3=-3$, $x+a-3=3$, neboli $a=-12, x=18$,

f) -9 = (-9).1, tedy $x+2a+3=-9$, $x+a-3=1$, neboli $a=-16, x=20$.

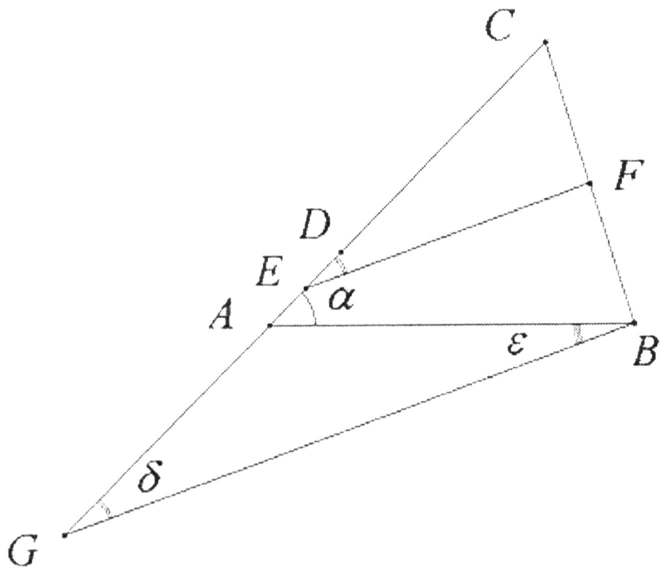
Dojdeme tak ke stejnému řešení jako prvním způsobem, tedy k hledaným hodnotám parametru a 4, 0, -12 a -16.

Zasedne-li řešitel olympiády k této úloze, měl by napoprvé zcela určitě dojít k podmínce, že číslo a^2+12a musí být druhou mocninou nějakého celého čísla. Poté však může (na čas) s řešením přestat, protože cesta se nejeví již tak jasná. Může si zkoušet dosazovat konkrétní čísla, což ho může přivést i k obecnému řešení. Tato cesta je mnohem zřejmější než hledání rozkladu. I když ke zdárnému vyřešení problému je třeba pouze znalost "kvadratického problému", jeví se mi úloha spíš jako obtížnější. Je však dobré, že byla vybrána do kola domácího, kde není nutné vyřešit ji najednou, ale je tu možnost se později s nějakým nápadem, třeba doplněním na úplný čtverec, k řešení vrátit. Kvadratické rovnice jsou náplní zcela jistě už prvního ročníku gymnázia, avšak většinou se školní úlohy omezují jen na řešení rovnice a nezkoumají příliš vztahy mezi kořeny a koeficienty rovnice. Pokud ano, pak skutečně jen zcela povrchně. Kapitola rovnic s parametrem je velice obsáhlá, a tak nebývá každý typ dostatečně procvičován.

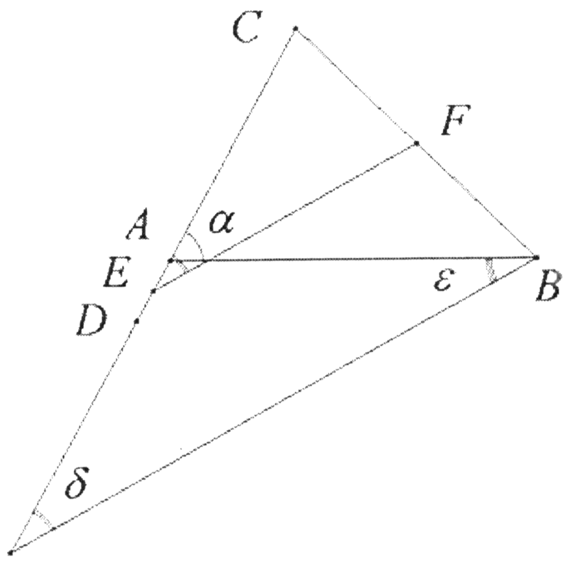
Úloha 2.

V daném trojúhelníku ABC označme D ten bod polopřímky CA, pro který platí $|CD|=|CB|$. Dále označme po řadě E, F středy úseček AD a BC. Dokažte, že $|\angle BAC|=2|\angle CEF|$ právě tehdy, když $|AB|=|BC|$.

Na obr. 11 a obr. 12 vidíme dva různé případy, které mohou nastat, tj. $|AC| > |BC|$ a $|AC| < |BC|$. Případ rovnosti $|AC| = |BC|$ je triviální.



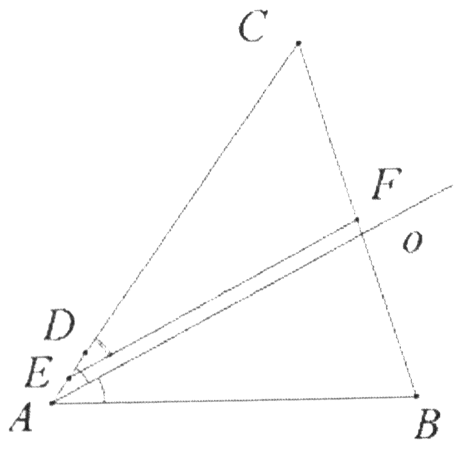
obr. 11



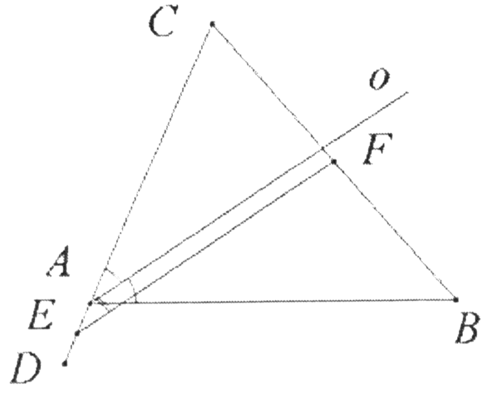
obr. 12

Označme bod G ten bod polopřímky CA, pro který platí $|AG| = |BC| = |CD|$. V souladu se vzorovým řešením označme ještě $\varepsilon = |\angle ABG|$ a $\delta = |\angle BGA|$. Protože $|EA| = |ED|$ a $|AG| = |CD|$, je bod E středem úsečky CG. Úsečka EF je tudíž střední příčkou trojúhelníku BCG. Proto je $EF \parallel GB$. Z rovnosti souhlasných úhlů vyplývá, že $|\angle FEC| = \delta$. Pro velikost úhlu BAC platí $|\angle BAC| = \delta + \varepsilon$. Zajímá nás, kdy je $\alpha = 2\delta$. To nastane právě tehdy, když $\varepsilon + \delta = 2\delta$, neboli $\varepsilon = \delta$. To je splněno, právě když je trojúhelník ABG rovnoramenný, neboli $|AB| = |AG|$, tj. $|AB| = |AC|$. Tím je důkaz hotov.

Další řešení může vypadat tak, že se budeme snažit najít úhel o velikosti $|\angle CEF|$. Ten najdeme rozdělením osou úhlu BAC. Její průsečík se stranou BC označíme H. Rovnost $|\angle BAC| = 2|\angle CEF|$ ze zadání tedy nastane právě tehdy, když budou úsečky EF a AH rovnoběžné, neboli trojúhelníky CEF a CAH podobné. To jest podle věty *sus* právě tehdy, když $\dfrac{|AC|}{|HC|} = \dfrac{|EC|}{|FC|}$. Tato podmínka je ekvivalentní s rovností $|\angle BAC| = 2|\angle CEF|$.



obr. 13



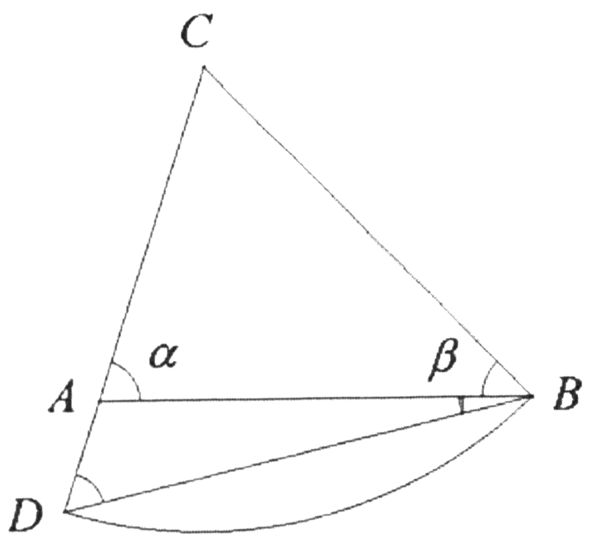
obr. 14

Vyjádřeme délky zmíněných úseček pomocí délek stran trojúhelníka ABC. Bod E je středem úsečky AC a bod F je středem úsečky BC. Proto $|EC| = \frac{|AC| + |DC|}{2} = \frac{|AC| + |BC|}{2} = \frac{b+a}{2}$ a $|FC| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{a}{2}$. Nyní potřebujeme vyjádřit ještě délku úsečky HC. Víme, že $|HC| + |HB| = a$ a $|HB| : |HC| = b : c$. Druhý vztah vyjadřuje, v jakém poměru dělí osa vnitřního úhlu trojúhelníku jeho protější stranu. Vizte níže. Odtud $|HC| = \frac{ab}{b+c}$. Všechny tyto tři délky nyní dosaďme do vztahu $\frac{|AC|}{|HC|} = \frac{|EC|}{|FC|}$.

Dostáváme

$$b : \frac{ab}{b+c} = \frac{a+b}{2} : \frac{a}{2}$$
$$\frac{b+c}{a} = \frac{a+b}{a}$$
$$b + c = a + b$$
$$c = a.$$

Tím je dokázáno, že podmínka $\frac{|AC|}{|HC|} = \frac{|EC|}{|FC|}$ platí právě tehdy, když $c = a$, neboli $|AB| = |BC|$.



obr. 15

Podívejme se na jednodušší související úlohu, kterou by měl na konci školního roku každý absolvent prvního ročníku střední školy být schopný vyřešit.

Situace je znázorněna na obrázku 15. K libovolnému trojúhelníku ABC označme D ten bod polopřímky CA, pro který platí $|CD| = |CB|$. *Vyjádřete velikost úhlu BDC a ABD pomocí velikostí* $\alpha = |\angle BAC|$ a $\beta = |\angle ABC|$.

Úhel BDC je úhlem při základně rovnoramenného trojúhelníka BDC.

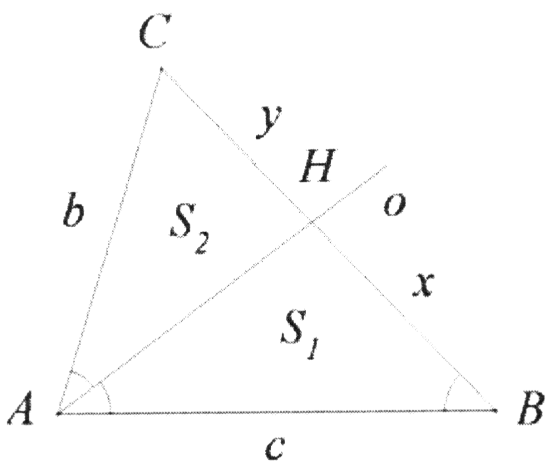
Proto platí

$$|\angle BDC| = \frac{180° - \gamma}{2} = \frac{180° - (180° - \alpha - \beta)}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Velikost úhlu ABD závisí na tom, zda platí $\alpha > \beta$, nebo $\alpha < \beta$. Potom

$$|\angle ABD| = \alpha - \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\alpha - \beta}{2}, \text{ nebo } |\angle ABD| = \beta - \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\beta - \alpha}{2}, \text{ tzn. } \frac{|\alpha - \beta|}{2}.$$

Zastavím se ještě nad tím, v jakém poměru dělí osa vnitřního úhlu protější stranu trojúhelníku. Vyjdu z obecného trojúhelníku ABC a označím si délky jeho dvou stran standardně b a c. Dále označím H průsečík osy úhlu BAC se stranou BC, v označím výšku na tuto stranu a w výšku na stranu AB a AC a dále označím x, y délky úseček HB a HC. Obsah trojúhelníka ABH označím S_1, obsah trojúhelníka ACH označím S_2. Pro tyto obsahy platí následujícíc vztahy.



obr. 16

$$S_1 = \frac{xv}{2} = \frac{cw}{2},$$
$$S_2 = \frac{yv}{2} = \frac{bw}{2}.$$

Odtud potom $\dfrac{xv}{yv} = \dfrac{cw}{bw}$, neboli $\dfrac{x}{y} = \dfrac{c}{b}$.

Úloha 3.

Rozhodněte, zda nerovnost

$$a(b+1)+b(c+1)+c(d+1)+d(a+1) \geq \frac{1}{2}(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)$$

platí pro libovolná kladná čísla a, b, c, d, která vyhovují podmínce
a) ab = cd = 1; b) ac = bd = 1.

a) Má-li se dokázat nějaká nerovnost, začneme jejím zjednodušováním na ekvivalentní nerovnosti. Každý člen ab nebo cd nahradíme po vzoru autorského řešení vždy ihned číslem 1.

$$2(ab+a+bc+b+cd+c+da+d) \geq (ab+a+b+1)(cd+c+d+1)$$
$$2(ad+bc+a+b+c+d+2) \geq (a+b+2)(c+d+2)$$
$$2(ad+bc)+2(a+b+c+d)+4 \geq ac+ad+bc+bd+2(a+b+c+d)+4$$
$$ad+bc \geq ac+bd$$
$$(a-b)(c-d) \leq 0.$$

Jiný řešitel může postupovat nepatrně odlišným postupem, nicméně musí dojít ke stejnému závěru. Poslední nerovnost obecně platit nemusí. Proto neplatí obecně ani nerovnost, ze které jsme vycházeli.

b) S podobnou strategií jako v předchozím bodě postupujme i v tomto případě. Číslem jedna nyní nahrazujeme součiny ac nebo bd.

$$2(ab+a+bc+b+cd+c+da+d) \geq (ac+a+c+1)(bd+b+d+1)$$
$$2(ab+bc+cd+ad+a+b+c+d) \geq (a+c+2)(b+d+2)$$
$$2(ab+bc+cd+ad)+2(a+b+c+d) \geq ab+ad+bc+cd+2(a+b+c+d)+4$$
$$ab+db+cd+da \geq 4$$
$$(a+c)(b+d) \geq 4.$$

Nyní zbývá objevit, zda platí tato poslední nerovnost. Každý z činitelů $a + c$ nebo $b + d$ je větší nebo roven číslu 2. Z podmínky $ac = bd = 1$ se totiž jedná vždy o součet čísla a čísla k němu převráceného, proto můžeme použít známé tvrzení

$$u > 0 \Rightarrow u + \frac{1}{u} \geq 2.$$

Tuto nerovnost můžeme získat například ze známé nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$$

dvou v našem případě kladných čísel $a_1 = u, a_2 = \dfrac{1}{u}$.

Nerovnost $(a+c)(b+d) \geq 4$ pro kladná čísla a, b, c, d platí, můžeme tedy postup obrátit a dokážeme danou nerovnost.

Uvedené řešení je asi nejvíce nasnadě. Lze jej ještě obměnit tak, že si ze zadaných podmínek vyjádřím dvě závislé proměnné pomocí zbývajících a ty dosadím do dokazované nerovnosti.

a) Z podmínky $ab = cd = 1$ vyjádříme $b = \dfrac{1}{a}$ a $d = \dfrac{1}{c}$ a dosadíme do dokazované nerovnosti. Poté opět upravujeme ekvivalentními úpravami.

$$a\left(\frac{1}{a}+1\right)+\frac{1}{a}(c+1)+c\left(\frac{1}{c}+1\right)+\frac{1}{c}(a+1) \geq \frac{1}{2}(a+1)\left(\frac{1}{a}+1\right)(c+1)\left(\frac{1}{c}+1\right)$$

$$2+a+c+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{c} \geq \frac{1}{2}\left(2+a+\frac{1}{a}\right)\left(2+c+\frac{1}{c}\right)$$

$$2+a+c+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{c} \geq 2+a+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}\left(ac+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{1}{ac}\right)$$

$$\frac{c}{a}+\frac{a}{c} \geq ac+\frac{1}{ac}$$

$$c^2+a^2 \geq a^2c^2+1$$

$$(a^2-1)(c^2-1) \leq 0.$$

Poslední nerovnost obecně platit nemusí.

b) Z podmínky $ac = bd = 1$ vyjádříme tentokrát $c = \dfrac{1}{a}$ a $d = \dfrac{1}{b}$.

$$a(b+1)+b\left(\frac{1}{a}+1\right)+\frac{1}{a}\left(\frac{1}{b}+1\right)+\frac{1}{b}(a+1) \geq \frac{1}{2}(a+1)(b+1)\left(\frac{1}{a}+1\right)\left(\frac{1}{b}+1\right)$$

$$ab+a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{1}{ab} \geq \frac{1}{2}\left(2+a+\frac{1}{a}\right)\left(2+b+\frac{1}{b}\right)$$

$$ab+a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{1}{ab} \geq \frac{1}{2}\left(4+2a+2b+ab+\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{1}{ab}\right)$$

$$ab+\frac{1}{ab}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 4.$$

Poslední nerovnost ale evidentně platí, protože se skládá ze svou nerovností $ab+\dfrac{1}{ab} \geq 2$ a $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a} \geq 2$ z prvního řešení.

Tato úloha patří k těm jednodušším z této kategorie. Ekvivalentní úpravy rovnic jsou látkou již prvního ročníku gymnázia, nerovnost $u > 0 \Rightarrow u + \frac{1}{u} \geq 2$ by měla být v ročníku druhém žákům již známa. Ačkoliv se zdají být úpravy zdlouhavé, nejsou obtížné. U této úlohy není nutné dlouhé rozmýšlení postupu a řešitel je schopen ji zvládnout mezi prvními a motivovat se pro další složitější úlohy, na které tak získá potřebný čas.

Jako motivační úlohy poukazující na všestranné užití výroku $u > 0 \Rightarrow u + \frac{1}{u} \geq 2$ mohou sloužit následující návodné úlohy:

Dokažte, že pro kladní čísla a, b taková, že $ab = 2$ platí:

$$(a+1).(b+2) \geq 8.$$

Dokazovanou nerovnost upravíme jednoduchými ekvivaletními úpravami, přičemž součin ab nahradíme okamžitě 2 a b nahradíme $\frac{2}{a}$, a posléze využijeme zmiňované nerovnosti.

$$2 + 2a + \frac{2}{b} + 2 \geq 8$$

$$a + \frac{1}{a} \geq 2.$$

Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b, c, d platí:

$$(a^2 + a + 1).(b^2 + b + 1).(c^2 + c + 1).(d^2 + d + 1) \geq 81abcd.$$

Každou ze závorek vydělíme postupně a, b, c a d a poté použijeme na každou z nich opět zmiňovanou nerovnost.

$$\left(a + 1 + \frac{1}{a}\right).\left(b + 1 + \frac{1}{b}\right).\left(c + 1 + \frac{1}{c}\right).\left(d + 1 + \frac{1}{d}\right) \geq 81,$$

přičemž hodnota každé závorky je alespoň 3, tudíž hodnota levé strany je alespoň 81.

Podobných příkladů lze nalézt spousty a studenti mající zájem se tak brzy naučí sami použitou nerovnost v úlohách hledat a využívat. K jejímu odvození postačují znalosti absolventa základní školy, bohužel však na ni nemusí být kladen na středních školách žádný důraz nebo nemusí dojít u žáka k jejímu okamžitému vybavení.

Úloha 4.

*Každou z hvězdiček v zápisech dvanáctimístných čísel A = *88 888 888 888 a B = *11 111 111 111 nahraďte nějakou číslicí tak, aby výraz $|14A - 13B|$ měl co nejmenší hodnotu.*

Úlohy podobného rázu s velmi velkými čísly jsou zadávány tak, aby je nebylo možné počítat "otrocky", případně na kalkulačce, ale aby byl student nucen jejich zápis zjednodušit a dovedl též s tímto zápisem pracovat.

Označme tedy a hledanou číslici v čísle A a b hledanou číslici v čísle B. Obě čísla můžeme přepsat do tvaru $A = a.10^{11} + 8.11\,111\,111\,111$ a $B = b.10^{11} + 11\,111\,111\,111$, přičemž číslo 11 111 111 111 můžeme ještě dále nahradit číslem $\frac{99\,999\,999\,999}{9}=\frac{10^{11}-1}{9}$. Pak tedy můžeme psát

$$A=a.10^{11}+\frac{8}{9}\left(10^{11}-1\right),\quad B=b.10^{11}+\frac{1}{9}\left(10^{11}-1\right).$$

Nyní už můžeme vyjádřit zkoumaný rozdíl:

$$14A-13B=(14a-13b).10^{11}+\frac{14.8-13}{9}\left(10^{11}-1\right)=(14a-13b+11).10^{11}-11.$$

Absolutní hodnota takovéhoto výrazu je minimální právě tehdy, pokud je minimální hodnota výrazu $14a-13b+11$. Zkusme nejprve zjistit, zda existují taková vyhovující čísla a, b, pro která by dokonce byl tento výraz snad roven 0. Výhodně proto k tomuto účelu vyjádřeme například b pomocí a:

$$b=\frac{14a+11}{13}=a+1+\frac{a-2}{13}.$$

Jelikož je však a číslice, tudíž některé z čísel 0, 1, 2, ..., 9, smíme dosazovat pouze tyto hodnoty. A zjistíme, že pouze pro $a = 2$ dostáváme přípustné $b = 3$. To znamená, že pouze pro tyto číslice platí, že $14a-13b+11=0$, tj. $\left|(14a-13b+11).10^{11}-11\right|=11$. Výraz $|14A-13B|$ má tedy nejmenší hodnotu pro $a = 2$, $b = 3$.

Práci s vysokými čísly není ve středoškolské matematice věnováno mnoho času, pokud vůbec nějaký. Studenti se s nimi setkávají zpravidla v kapitole o mocninách v prvním ročníku. Zde jsou většinou upravovány pouze různé lomené výrazy s čísly v semilogaritmickém tvaru a podobný příklad bychom hledali jen stěží. Avšak nelze ho označit jako těžký. Zájemce o řešení ale nezíská od prvního ročníku potřebné zkušenosti ve škole, nýbrž musí jich nabýt procvičováním a samostatným studiem tématu. Učitel může pomoci například následujícím příkladem postupně uvádějícím do problému.

Najděte největší zápornou a nejmenší kladnou hodnotu výrazu $12.\overline{a555}-5.\overline{b777}$, *kde a, b jsou první číslice čtyřmístných čísel, jejichž dekadický zápis je vyznačen čarou nad číslicemi.*

Narozdíl od soutěžního příkladu vystupují v tomto čísla výrazně nižšího řádu, je tudíž možné s nimi okamžitě pracovat a přejít tak k okamžitému pátrání po tom, jakých hodnot může zkoumaný rozdíl nabývat. Nejprve ho upravme na tvar

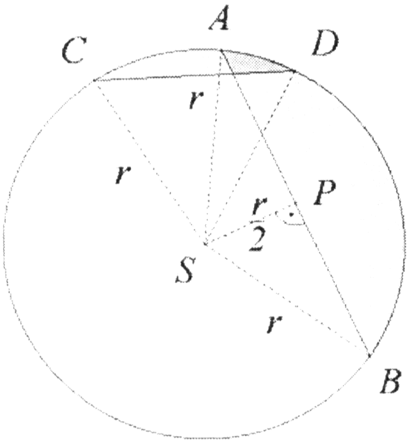
$$12.\overline{a555}-5.\overline{b777}=12.555-5.777+1000.(12a-5b)=2775+1000.(12a-5b),$$

odkud je patrné, že budeme hledat takové hodnoty přirozených čísel a a b od 1 do 9, pro které je tento rozdíl co nejblíže 0. Pro $a=1$ a $b=3$ je jeho hodnota rovna $12-15=-3$, což znamená, že vyšetřovaný rozdíl je roven -225, což je jeho největší možná záporná hodnota. Kdybychom chtěli, aby se $12a-5b$ rovnalo -2, zjistili bychom, že takové vyhovující číslice a, b nenajdeme. Pro $a=2$ a $b=5$ je pak $12a-5b$ rovno -1, což nám dává hodnotu zkoumaného rozdílu rovnu 1775.

Zvládne-li žák vyřešit tuto úlohu, bude pro něj ta soutěžní mnohem snazší, dokáže si lépe představit, jak se vysoká čísla v zadání při početních operacích chovají.

Úloha 5.

Kruh o středu S a poloměru r je rozdělen na čtyři části dvěma tětivami, z nichž jedna má délku r a druhá má od středu vzdálenost $\frac{1}{2}r$. *Dokažte, že absolutní hodnota rozdílu obsahů těch dvou částí, které mají společný právě jeden bod, a přitom žádná z nich neobsahuje střed S, je rovna jedné šestině obsahu kruhu.*



obr. 17

Daná situace je znázorněna na obrázku vlevo. Uvažované tětivy označíme AB a CD a střed úsečky AB označíme P. Zadání nám říká, že $|SP| = \frac{1}{2}r$ a $|CD| = r$. Zkoumaný rozdíl obsahů dvou světle vybarvených částí kruhu se nezmění, když ke každé z nich přidáme další tutéž část kruhu, která má s jeho hraniční kružnicí společný oblouk AD a je na obrázku vybarvena tmavě. Tak získáme dvě kruhové úseče, jednu nad tětivou AB, druhou nad tětivou CD. Jejich obsahy získáme jako rozdíl obsahu příslušné kruhové výseče, z velikostí příslušných středových úhlů podle známého vztahu $S = \frac{\alpha}{2\pi}.\pi r^2$, a obsahu trojúhelníka.

Trojúhelník CSD je rovnostranný, proto $|\angle CSD| = 60°$. Výška rovnostranného trojúhelníku o straně délky r má délku $\frac{\sqrt{3}}{2}r$. Obsah kruhové úseče nad tětivou CD je tedy roven

$$S_1 = \frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}.$$

Trojúhelník ASP je pravoúhlý. Můžeme tak $|\angle ASP|$ spočítat pomocí goniometrické funkce sinus nebo si uvědomíme, že se jedná o polovinu rovnostranného trojúhelníka, který by byl osově symetrický přes osu AP. Proto $|\angle ASP| = 60°, |\angle ASB| = 120°$. Obsah kruhové úseče nad tětivou AB je tedy roven

$$S_1 = \frac{\pi r^2}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}.$$

Nyní již zbývá nalezené výrazy od sebe odečíst.

$$S_2 - S_1 = \left(\frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right) - \left(\frac{\pi r^2}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\pi r^2}{6}.$$

Rozdíl obsahů obou daných oblastí je tedy právě šestina obsahu celého kruhu.

Tato úloha se mi jeví jako velmi pěkná. Využívá znalostí studenta planimetrie v prvním ročníku. Řešitelná je matematickými nástroji již žáka vyššího gymnázia a užitý postup je zcela zřejmý. Možná bych volil ale jiné místo v zadání domácího kola, úloha by mohla být zařazena více na začátek a motivovat svou jednoduchostí. Volil bych prohození s první geometrickou úlohou.

Úloha 6.

Určete nejmenší přirozené číslo n s následující vlastností: Zvolíme-li n různých přirozených čísel menších než 2006, jsou mezi nimi dvě taková, že podíl součtu a rozdílu jejich druhých mocnin je větší než tři.

Jako řešení této úlohy uvedu řešení autorské: Formulujme si nejprve nerovnost pro ona přirozená čísla a a b.

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} > 3.$$

Vidíme, že čitatel zlomku je vždy kladný. Aby byl kladný celý zlomek, musí nutně být $a > b$. Potom můžeme dále upravovat. Násobíme kladným číslem.

$$a^2 + b^2 > 3(a^2 - b^2)$$
$$4b^2 > 2a^2$$
$$b\sqrt{2} > a.$$

Podmínka $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} > 3$ je tak splněna právě tehdy, když $b\sqrt{2} > 3$, což navíc spolu s $a > b$ dává $1 < \frac{a}{b} < \sqrt{2}$.

Toto je také místo, kde řada řešitelů skončí. Musíme totiž nyní přirozená čísla menší než 2006 rozdělit do skupin tak, aby v nich bylo co nejvíce čísel a aby podíl největšího a nejmenšího čísla každé skupiny byl menší než $\sqrt{2}$, říká vzorové řešení. Provádíme to tak, že do skupin budeme postupně zařazovat čísla 1, 2, ... a k nové skupině vždy přejdeme, až to bude nutné. K porovnávání podílu $\frac{a}{b}$ s číslem $\sqrt{2}$ využíváme kalkulačku. Výsledky zde nebudu uvádět. Dostaneme tak následujících dvacet skupin:

$$A_1 = \{1\}, \qquad A_2 = \{2\},$$
$$A_3 = \{3,4\}, \qquad A_4 = \{5,6,7\},$$
$$A_5 = \{8,9,10,11\}, \qquad A_6 = \{12,13,14,15,16\},$$
$$A_7 = \{17,\dots,24\}, \qquad A_8 = \{25,\dots,35\},$$
$$A_9 = \{36,\dots,50\}, \qquad A_{10} = \{51,\dots,72\},$$
$$A_{11} = \{73,\dots,103\}, \qquad A_{12} = \{104,\dots,147\},$$
$$A_{13} = \{148,\dots,209\}, \qquad A_{14} = \{210,\dots,296\},$$
$$A_{15} = \{297,\dots,420\}, \qquad A_{16} = \{421,\dots,595\},$$
$$A_{17} = \{596,\dots,842\}, \qquad A_{18} = \{843,\dots,1192\},$$
$$A_{19} = \{1193,\dots,1687\}, \qquad A_{20} = \{1688,\dots,2005\}.$$

Například skupinu A_{11} jsme získali takto: Číslo 73 jsme do skupiny A_{10} už nezařadili, jelikož jeho podíl s nejmenším číslem této skupiny je roven $\frac{73}{51} = 1{,}431\ldots > 1{,}414\ldots = \sqrt{2}$. Číslo 103 pak do této skupiny ještě náleží, poněvadž $\frac{103}{51} = 1{,}410\ldots < 1{,}414\ldots = \sqrt{2}$.

Pro libovolná dvě čísla a a b z nějaké téže skupiny A_i daná podmínka $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} > 3$ platí. Takových skupin A_i jsme našli 20. Vybereme-li proto libovolně 21 čísel z množiny $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{20}$, budou některá dvě z nich patřit do téže skupiny A_i, tzn. že dvě z nich splňují nerovnost $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} > 3$. Proto číslo 21 je řešením úlohy v zadání. Číslo 20 jím už není. Vybereme-li z každé z množin A_i její nejmenší prvek, dostaneme dvacet čísel

1, 2, 3, 5, 8, 12, 17, 25, 36, 51, 73, 104, 148, 210, 297, 421, 596, 843, 1193, 1688,

mezi nimiž nenajdeme žádná dvě, která by podmínce ze zadání vyhovovala. Tak jsme skupiny volili.

První polovina řešení je celkem zřejmá. V druhé části využíváme tzv. Dirichletův princip. Nejprve tak můžeme řešit následující jednodušší úlohy a nápad, jak jej využít v dané soutěžní úloze, pak bude jednodušší.

Na večírku je několik hostů. Dokažte, že dva mají mezi ostatními hosty stejný počet přátel, přičemž přátelství je symetrický vztah, tzn. je-li A přítelem B, pak je i B přítelem A.

Pokud má každý z hostů na večírku alespoň jednoho přítele, rozdělme hosty do skupin tak, aby v téže skupině byli právě ti, co mají stejný počet přátel. Skupin je méně než hostů. Pokud by tomu tak nebylo, můžeme předpokládat, že na večírku je jediný host bez přátel. Na ostatní hosty pak použijeme předchozí postup. Je-li skupin méně než hostů, existuje skupina, ve které jsou alespoň dva hosté, tudíž alespoň dva mají stejný počet přátel.

Dokažte, že z libovolné n-tice celých čísel lze vybrat jedno nebo několik čísel tak, že součet vybraných čísel je dělitelný číslem n.

Označme tato čísla $a_1, \ldots a_n$ a následně spočítejme součty $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, ..., $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Poté je rozdělme do skupin podle zbytku při dělen číslem n.

Určete nejmenší přirozené číslo n s následující vlastností: Vybereme-li n libovolných různých čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, 100\}$, *pak mezi vybranými čísly existují dvě, jejichž*

a) rozdíl je dělitelný číslem 11,

b) rozdíl je roven číslu 11,

c) součet je roven 111.

a) Zřejmě podle výše uvedených principů $n = 12$.

b) Čísla od 1 do 110 rozdělíme do 55 dvouprvkových skupin ve tvaru $\{x, x+11\}$, kde x je ve tvaru $22k + j$, kde $j \in \{1, 2, \ldots, 11\}$ a $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Vybereme-li z každé skupiny to menší z obou čísel, dostaneme 55 čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, 100\}$, které požadovanou vlastnost nemají. Vybereme-li 56 čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, 100\}$, pak dvě z nich leží ve stejné skupině.

c) Čísla od 1 do 110 tentokrát rozdělíme do 55 dvouprvkových skupin ve tvaru $\{x, 111 - x\}$, kde x je z množiny $\{1, 2, \ldots, 55\}$. Vybereme-li z každé skupiny to menší z obou čísel, tak požadovanou vlastnost opět nemají. Proto je i tentokrát hledané $n = 56$.

Tuto úlohu hodnotím jako velmi těžkou. Ačkoliv je jistým zpestřením a zabývá se kombinatorikou, je k jejímu zvládnutí notná dávka nadání a cit pro tento typ úlohy. Student, který by měl zájem řešit olympiádu, by jí mohl být odrazen, protože cesta, kterou s emá vydat, mu není vůbec zřejmá. Kombinatorika navíc bývá náplní až samého závěru středoškolského studia matematiky, tudíž by se dalo očekávat, že pokud vůbec, objeví až v kategorii A.

Nyní věnuji ještě několik řádků rozboru uvedených úloh. Zásadní podíl v nich měla opět témata z rovinné geometrie, nyní zaměřená nejen třeba na kružnici nebo kruh jako takové, nýbrž navíc i na kruhové úseče. Těmi se podrobněji zabývá střední škola obvykle ke konci prvního ročníku. Stejně tak vlastnosti rovinných obrazců v 2. úloze, včetně spojitostí mezi velikostmi počítaných úhlů, si žádají hlubšího poznání. Nedílnou součástí jsou vždy rovnice, nerovnice nebo důkazy rovností a nerovností. Vzácností nejsou požadavky kladené na číselný obor, ze kterého mají být kořeny či koeficienty nějaké rovnice nebo nerovnice. Tyto úlohy slouží určitě i jako odrazový můstek pro složitější zadání v dalších kolech. Ničím neobvyklým v matematické olympiádě není ani "hraní si s čísly" na lidově řečeno "vyšší úrovni" ve 4. úloze. Výjimečným příkladem je poslední kombinatorická úloha č. 6. Dá se ale konstatovat, že zadání příkladů připravených pro domácí část kategorie B je jinak adekvátní. A jak bylo řečeno již dříve, je mnohem snazší řešit tyto příklady pro studenta, který již má s olympiádou své zkušenosti.

2.2.2 Školní kolo

Úloha 1.

Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b, c platí nerovnost

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\cdot\left(b+\frac{1}{c}\right)\cdot\left(c+\frac{1}{a}\right)\geq 8.$$

Zjistěte, kdy platí rovnost.

Jako každou podobnou úlohu začněme roznásobováním levé strany a poté sdružme vzniklé členy do dvojice navzájem převrácených výrazů.

$$\left(ab+1+\frac{a}{c}+\frac{1}{bc}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right)\geq 8$$

$$abc+a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{abc}\geq 8$$

$$\left(abc+\frac{1}{abc}\right)+\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)+\left(c+\frac{1}{c}\right)\geq 8.$$

Je vidět, že řešení se ubírá směrem použitým v domácí úloze, budeme využívat nerovnosti $u+\frac{1}{u}\geq 1$, kde $u>0$, přičemž rovnost nastane právě pro $u=1$. Tím je vlastně důkaz hotov.

Rovnost tedy nastává pro $abc+\frac{1}{abc}=a+\frac{1}{a}=b+\frac{1}{b}=c+\frac{1}{c}=2$, tudíž pro $a=b=c=1$.

Můžeme si též uvědomit, jaký vztah platí mezi aritmetickým a geometrickým průměrem čísel. Jelikož součin osmi čísel $a,b,c,abc,\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c},\frac{1}{abc}$ je roven 1, a tedy i jejich geometrický průměr, bude aritmetický průměr alespoň 1.

Dokazovanou nerovnost můžeme také upravit nejprve tak, že se zbavíme zlomků vynásobením číslem abc a následným roznásobením závorek. Potom dostáváme:

$$(ab+1)(bc+1)(ac+1)\geq 8abc$$

$$(ab^2c+ab+bc+1)(ac+1)\geq 8abc$$

$$a^2b^2c^2+a^2bc+ab^2c+abc^2+ab+bc+ac+1\geq 8abc.$$

Dále pak rozdělíme člen $8abc$ na pravé straně na čtyřikrát $2abc$, převedeme na levou stranu a sdružíme vhodně do závorek:

$$a^2b^2c^2-2abc+1+abc^2-2abc+ab+ab^2c-2abc+a^2bc-2abc+bc\geq 0$$

$$a^2b^2c^2-2abc+1+ab(c^2-2c+1)+ac(b^2-2b+1)+bc(a^2-2a+1)\geq 0$$

$$(abc-1)^2+ab(c-1)^2+ac(b-1)^2+bc(a-1)^2\geq 0$$

Z posledního tvaru je vidět, že nerovnost platí, protože na levé straně je součet čtyř nezáporných čísel. Rovnost je možná právě v případě, kdy jsou závorky rovny jedné, tj. když $a=1, b=1, c=1$ a potažmo i součin $abc=1$.

Další možná vzorová řešení jsou spíše "uměle vykonstruovaná" a jen zřídka, pokud vůbec, se s nimi můžeme setkat v žákovských postupech.

Levou stranu nemusíme ani roznásobovat, stačí využít AG-nerovnosti:

$$\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{b}\right)\geq\sqrt{\frac{a}{b}},\ \frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{c}\right)\geq\sqrt{\frac{b}{c}},\ \frac{1}{2}\left(c+\frac{1}{a}\right)\geq\sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Jejich vynásobením dostáváme:

$$\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{b}\right).\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{c}\right).\frac{1}{2}\left(c+\frac{1}{a}\right)\geq\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{\frac{b}{c}}\sqrt{\frac{c}{a}}$$

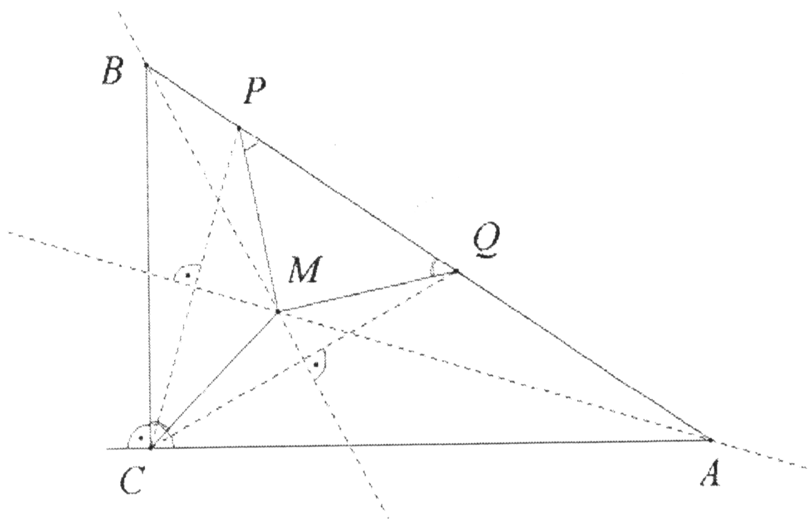
$$\left(a+\frac{1}{b}\right).\left(b+\frac{1}{c}\right).\left(c+\frac{1}{a}\right)\geq 8.$$

Rovnost přitom nastane právě tehdy, když nastane rovnost ve všech třech použitých AG-nerovnostech, tj. $a=\frac{1}{b}, b=\frac{1}{c}, c=\frac{1}{a}$, tj. $a=b=c=1$.

Poslední dva postupy jsou hezkou ukázkou toho, jak rozličnými způsoby lze dojít k jednomu cíli. Všechny tři cesty spolu úzce souvisejí, ale pro studenta gymnázia je nejvíce nasnadě první z nich, která je v hodinách matematiky tou nejčastěji volenou. Využívání vlastností průměrů je ve školské matematice ojedinělé, avšak projití si uvedených řešení může být pro studenta přínosem do budoucna.

Úloha 2.

Na přeponě AB pravoúhlého trojúhelníku ABC uvažujme body P a Q takové, že $|AP|=|AC|$ *a* $|BQ|=|BC|$. *Označme M průsečík kolmice z vrcholu A na přímku CP a kolmice z vrcholu B na přímku CQ. Dokažte, že přímky PM a QM jsou navzájem kolmé.*



obr. 18

Bod P je zadán tak, aby byl trojúhelník APC rovnoramenný. Přímka AM prochází jeho hlavním vrcholem a je kolmá k základně, tudíž se jedná o osu vnitřního úhlu CAP. Body A a P jsou tedy souměrně sdružené podle přímky AM, tudíž úhly APM a ACM jsou potom shodné. Stejně tak je rovnoramenný trojúhelník BQC, přímka BM je osou úhlu CBQ, a tak i úhly BQM a BCM jsou shodné. Nyní už můžeme psát:

$$|\angle QPM|+|\angle PQM|=|\angle APM|+|\angle BQM|=|\angle ACM|+|\angle BCM|=|\angle ACB|=90°.$$

Též si můžeme uvědomit, že leží-li bod M na osách dvou vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, leží tedy i na ose třetího, pravého úhlu. Proto mají oba úhly ACM a BCM velikost 45°, neboli $|\angle APM|=|\angle ACM|=45°, |\angle BQM|=|\angle BCM|=45°$ a trojúhelník PQM je tedy pravoúhlý a rovnoramenný s pravým úhlem při vrcholu M.

Ze souměrnosti bodů C a P podle přímky AM a ze souměrnosti bodů C a Q podle přímky BM též ale vyplývají rovnosti $|PM|=|CM|$ a $|QM|=|CM|$. Tudíž $|PM|=|QM|=|CM|$ a bod M je tak středem kružnice opsané trojúhelníku PQC. Též víme, že $|\angle BAC|+|\angle ABC|=90°$ a $\left|\left(90°-\frac{1}{2}|\angle BAC|\right)\right|+\left(90°-\frac{1}{2}|\angle ABC|\right)-|\angle PCQ|=90°$, takže $|\angle PCQ|=45°$. To je velikost obvodového úhlu nad tětivou PQ zmíněné kružnice. Velikost odpovídajícího středového úhlu PMQ je tudíž 90°.

Další velmi pěkná planimetrická úloha využívající jen ty nejzákladnější poznatky, se kterými se seznamují studenti na přelomu prvního a druhého ročníku střední školy, jakými jsou vlastnosti os úhlů, kružnice vepsané trojúhelníku a pod.

Úloha 3.

Najděte všechny dvojice celých čísel a, b, pro něž žádná z rovnic

$$x^2 + ax + b = 0, \ y^2 + by + a = 0$$

nemá dva různé reálné kořeny.

O tom, jaká má či nemá kvadratická rovnice kořeny rozhoduje její diskriminant. Ty pro naše rovnice vypadají takto:

$$D_1 = a^2 - 4b, D_2 = b^2 - 4a.$$

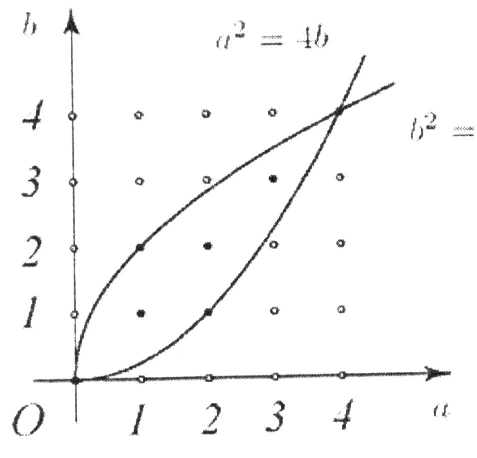
Aby rovnice neměly dva různé reálné kořeny, musejí být tyto výrazy nekladné, tedy:

$$a^2 \le 4b, \ b^2 \le 4a.$$

Odtud můžeme mnohé vypozorovat. Jednak, že obě čísla a, b jsou čísla nezáporná. (Protože jsou nezáporná čísla a^2, b^2.) Pokud vyjádříme navíc z obou nerovnic neznámou b, dostáváme

$$\frac{a^2}{4} \le b \le 2\sqrt{a}.$$

Aby takové b existovalo, musí být $\frac{a^2}{4} \le \sqrt{2a}$, neboli $a \le 4$. Jsou-li obě čísla a, b podle zadání celá a navíc i nezáporná a nanejvýš 4, leží v množině $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Nyní tedy prozkoumejme zvlášť všechna přípustná a a zjistěme, která b podle podmínky $\frac{a^2}{4} \le b \le 2\sqrt{a}$ vyhovují.



obr. 19

a) $a = 0$: $0 \le b \le 0 \quad \Leftrightarrow b \in \{0\}$,

b) $a = 1$: $\frac{1}{4} \le b \le 2 \quad \Leftrightarrow b \in \{1,2\}$,

c) $a = 2$: $1 \le b \le 2\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow b \in \{1,2\}$,

d) $a = 3$: $\frac{9}{4} \le b \le 2\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow b \in \{3\}$,

e) $a = 4$: $4 \le b \le 4 \quad \Leftrightarrow b \in \{4\}$.

Vyhovuje tedy těchto sedm dvojic: $(0,0), (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4)$.

Je patrné, že s každou dvojicí (a_0, b_0) vyhovuje i dvojice (b_0, a_0). To vyplývá ze symetrie a a b v zadání. Toho lze využít. Víme-li, že $0 \le a \le 4$, musí tedy stejný vztah platit i pro b. Požadované dvojice tedy můžeme hledat pouze v množině 25 takových dvojic (a,b), kde $a, b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ a zkoumat, zda vyhovují soustavě $a^2 \le 4b$, $b^2 \le 4a$. Jinými slovy hledám takové body kartézského souřadnicového sytému Oab s celočíselnými souřadnicemi, které leží uvnitř nebo na hranici oblasti omezené parabolami danými rovnicemi $4a = b^2$ a $4b = a^2$.

Ačkoliv je kvadratická rovnice v některých případech řešena již ve vyšších ročnících nižšího gymnázia a nejpozději v prvním ročníku střední školy, tato úloha je vhodnější spíše pro tuto kategorii, tedy kategorii B, než třeba C. Vyžaduje totiž také znalosti z oboru nerovnic a nabytí jisté geometrické představivosti a schopnosti geometrické interpretace. Jinak je velmi pěkná a z úloh podobného typu (s požadavky na počet řešení) tou jednodušší.

Jak je vidět, školní kolo navazovalo na domácí úlohy v planimetrii, kvadratických rovnicích a v důkazu téměř triviální nerovnosti.

Připomeňme opět, že na řešení těchto tří úloh ve školním kole měli žáci čtyři hodiny čistého času a úspěšným řešitelem byl každý, kdo získal alespoň 10 bodů z 18 možných. Podle známého principu pak byly vybráni postupující do kola krajského.

2.2.3 Krajské kolo

Úloha 1.

Určete všechny dvojice prvočísel p a q, pro něž platí

$$p + q^2 = q + p^3.$$

Nejprve si rovnici upravme do tvaru

$$q.(q-1) = p.(p-1).(p+1).$$

Na první pohled je patrné, že $p < q$. To můžeme dokázat sporem. Nechť $p \geq q$, potom $p - 1 \geq q - 1 > 0$. Také $p + 1 > 1$, což by znamenalo, že $p.(p-1).(p+1) > q.(q-1)$, což by byl spor se zadáním.

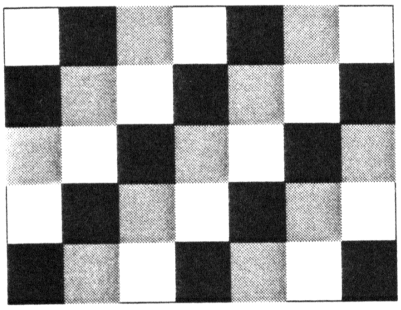
Nyní si uvědomme, že q je prvočíslo, pro které platí jedna z možností $q|p$, $q|p-1$ nebo $q|p+1$. Protože $1 < p < q$, může být splněno jen $q|p+1$, z čehož vyplývá, že $q \leq p+1$, a to spolu s $p < q$ dává podmínku $q = p + 1$. Jediná taková dvojice prvočísel je dvojice $p = 2$ a $q = 3$. Zkouškou ověříme, že tato čísla vyhovují zadání. $2 + 3^2 = 3 + 2^3$.

Řada studentů našla dvojici $(p,q) = (2,3)$ pouhým zkusmým dosazováním malých prvočísel, přičemž žádná vyšší čísla zadání nevyhovovala. Za to byl udělen jeden bod. V Ústeckém kraji nebylo vyššího počtu bodů dosaženo. Nerovnost $p < q$ se sice objevila často, ale bez poctivého zdůvodnění. Několik studentů uvádělo jako řešení dvojici čísel $(p,q) = (1,1)$, která sice vyhovují rovnici, ale jak známo, číslo 1 nepatří mezi prvočísla.

K úspěšnému vyřešení této nikterak těžké úlohy jsou třeba jen znalosti z elementární teorie čísel ze začátku prvního ročníku. Na začátek krajského kola se zdá jako vhodná, může řešiteli dodat chuť do dalších příkladů.

Úloha 2.

Obdélník ABCD se stranami délek $|AB| = 2008$ *a* $|BC| = 2006$ *je rozdělen na* 2008×2006 *jednotkových čtverců a ty jsou střídavě obarveny černou, šedou a bílou barvou podobně jako obdélník na obrázku: Čtverce při vrcholech A a B jsou černé, čtverce při vrcholech C a D jsou bílé. Určete obsah té části trojúhelníku ABC, která je šedá.*



obr. 20

Obdélník v zadání i ten na obrázku mají oba strany délek $3n+1$ a $3n-1$ pro nějaké přirozené n. Pro takovéto obdélníky je příslušné obarvení rohových čtverců stejné, protože barva se ve vodorovném i svislém směru opakuje s periodou 3 čtverce. Šedá část obdélníku je středově souměrná. Ne však celé trojúhelníky. Šedá část trojúhelníku ABC je středově souměrná s šedou částí trojúhelníku ACD. Proto je obsah šedé části trojúhelníku ABC roven polovině šedé části obdélníku $ABCD$.

Kolik je v obdélníku ABCD šedých polí? Postupujeme-li zleva doprava a shora dolů, zjistíme, že opakování trojice bílý, černý, šedý není narušeno ani během přechodu mezi řádky. Pravý dolní roh je však obarven černě, to znamená, že poslední trojice je neúplná, chybí poslední šedé pole. Pokud bychom ho přidali, skládal by se obdélník celkem z $2008.2006+1=4028049$ jednotkových čtverců. Z nichž šedá by byla jedna třetina, tudíž 1 342 683. Ten poslední ale v obdélníku $ABCD$ neleží, musíme ho tedy odebrat. Z těchto šedých polí ale v našem čtverci ABC leží pouze polovina, to jest 671 341.

Jiné řešení může vypadat tak, že budu od vrcholu B postupně sčítat šedé čtverce na diagonálách. Celkový počet šedých polí je $3+6+9+\dots$, přičemž než bychom se dostali na číslo 2007, začne se diagonála opět zkracovat a ta nejdelší šedá má pouze 2006 čtverců, z nichž navíc bereme pouze polovinu. Obsah šedé části pak dostaneme jako součet

$$3+6+9+\dots+2001+2004+\frac{2006}{2}=\frac{2004}{3}.\frac{3+2004}{2}+\frac{2006}{2}=668.2005{,}5+1003=671341.$$

I druhá úloha krajského kola kategorie B se mi jeví jako pěkná, poměrně snadná a navíc i zajímavá. Velkou pomůckou může být zajisté obrázek v zadání, který napoví leccos o tom, jak vypadá situace kolem přepony AC daného trojúhelníka. I v Ústeckém kraji to byla úloha s největšími bodovými zisky. Plný počet bodů získalo nemálo studentů. Nezískání maxima bývalo způsobeno zpravidla jen nezdůvodněním některých tvrzení.

Úloha 3.

V lichoběžníku ABCD, jehož základna AB má dvakrát větší délku než základna CD, označme E střed ramene BC. Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku CDE prochází středem úhlopříčky AC, právě když strany AB a BC jsou navzájem kolmé.

Na první pohled by se tato úloha mohla zdát být těžkou. Důkazy v geometrii bývají často velmi neoblíbené. Studentům není předem dostatečně jasný směr, jakým se mají ubírat. Neznají ze školy přesný algoritmus. Avšak rozebere-li se situace dopodrobna, je jasné, že patří tato úloha mezi ty jednoduché a pěkné.

Označme S střed úhlopříčky AC. Přímka ES je rovnoběžná s přímkami AB a CD. Uvažujme nyní kružnici opsanou trojúhelníku CDE. Ta prochází bodem S právě tehdy, je-li čtyřúhelník $CDSE$ tětivový. V tětivovém čtyřúhelníku, jak víme, je součet velikostí protějších úhlů roven 180°. Potom tedy

$$|\angle ESD|+|\angle ECD|=180°.$$

Také ale víme, že čtyřúhelník $CDSE$ je rovnoběžníkem, kde jsou protější úhly shodné. Proto tedy také platí

$$|\angle ESD|=|\angle ECD|.$$

Z této jednoduché soustavy dostáváme $|\angle ECD| = 90°$, tedy i $|\angle ABC| = 90°$.

Ačkoliv se jedná o úlohu, ve které využíváme jen základních zákonitostí rovinné geometrie, které jsou náplní učiva konce prvního ročníku gymnázia, je její zařazení až do kategorie B vhodné. Nejen že se nemůže stát, že se student s danými poznatky ještě nesetkal, ale uplynulý čas může využít k utřídění myšlenek a k dalšímu procvičení se v důkazových technikách.

Úloha 4.

Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, c z intervalu $\langle 0,1\rangle$ *platí*

$$1 \le a+b+c+2(ab+bc+ac)+3(1-a)(1-b)(1-c) \le 9.$$

Zkoumejme, jakých hodnot může výraz uprostřed nerovností nabývat. Využijme při tom toho, že je pro všechny tři proměnné a, b, c lineární. Potom totiž nabývá svých extrémních hodnot pro $\{a,b,c\} \in \{0,1\}$.

a) Budou-li všechna tři čísla a, b, c rovna 0, bude se hodnota výrazu rovnat 3.

b) Budou-li všechna tři čísla a, b, c rovna 1, bude se hodnota výrazu rovnat 9.

c) Budou-li pouze dvě čísla z trojice a, b, c rovnat 0 a třetí rovnat 1, bude se hodnota výrazu rovnat 1.

d) Budou-li pouze dvě čísla z trojice a, b, c rovnat 1 a třetí rovnat 0, bude se hodnota výrazu rovnat 4.

Pro nás jsou důležité body b) a c), ze kterých vidíme, že zkoumaný výraz je omezen číslem 1 zdola a číslem 9 shora. Tím je daná nerovnost dokázána.

Chyba, které se studenti mohou dopustit, je mylná domněnka, že stačí prošetřit pouze body a) a b), tj. kdy jsou všechny tři proměnné rovny 0 nebo 1, a omezit tak daný výraz zdola dokonce číslem 3.

Nyní se podívejme na jiná vzorová řešení. Jejich cíl však nemusí být na první pohled jasný. První z nich rozdělí "trikově" zkoumaný výraz na dvě části, o kterých zvlášť též něco víme:

$$a+b+c+2(ab+bc+ac)+3(1-a)(1-b)(1-c) =$$
$$= a+b+c+(1-a)(1-b)(1-c)+2(ab+bc+ac)+2(1-a)(1-b)(1-c),$$

přičemž

$$a+b+c+(1-a)(1-b)(1-c) = 1+ab+bc+ac-abc = 1+ab(1-c)+bc+ac \ge 1$$
$$2(ab+bc+ac)+2(1-a)(1-b)(1-c) \ge 0,$$

odkud sečtením obou nerovností dostáváme

$$a+b+c+2(ab+bc+ac)+3(1-a)(1-b)(1-c) \ge 1.$$

Omezení devíti shora dokážeme ještě přes méně zřejmé nahrazení $x = 1-a$, $y = 1-b$, $z = 1-c$. Všechny tři nové proměnné x, y, z jsou nyní stále z intervalu $\langle 0,1\rangle$. Pro vyšetřovaný výraz potom dostáváme

$$1-x+1-y+1-z+2[(1-x)(1-y)+(1-y)(1-z)+(1-x)(1-z)]+3xyz =$$
$$= 3-(x+y+z)+2[3-2(x+y+z)+xy+yz+xz]+3xyz =$$
$$= 9-5(x+y+z)+2(xy+yz+xz)+3xyz =$$
$$= 9-2x(1-y)-2y(1-z)-2z(1-x)-3x(1-yz)-3y-3z \le 9.$$

Nebo zkusme prozkoumat omezení našeho výrazu nejprve pouze v závislosti na dvou proměnných, např. b, c a a položme rovno 0. Potom

$$a+b+c+2(ab+bc+ac)+3(1-a)(1-b)(1-c)=b+c+2bc+3(1-b)(1-c)=$$
$$=3+5bc-2b-2c=3+5\left(b-\frac{2}{5}\right)\left(c-\frac{2}{5}\right)-\frac{4}{5}.$$

Protože $b,c\in\langle 0,1\rangle$, nabývá výraz $\left(b-\frac{2}{5}\right)\left(c-\frac{2}{5}\right)$ největší hodnoty pro $b=c=1$ a nejmenší hodnoty pro $\{b,c\}=\{0,1\}$, tedy když je b, nebo c rovno 0. Pak tedy platí, že

$$3+5.\left(-\frac{2}{5}\right).\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\leq a+b+c+2(ab+bc+ac)+3(1-a)(1-b)(1-c)\leq 3+5.\frac{3}{5}.\frac{3}{5}-\frac{4}{5}$$
$$1\leq a+b+c+2(ab+bc+ac)+3(1-a)(1-b)(1-c)\leq 4$$

Je-li ale $a=1$,
$a+b+c+2(ab+bc+ac)+3(1-a)(1-b)(1-c)=1+b+c+2(b+bc+c)=1+3b+3c+2bc.$
Takový výraz nabývá své největší hodnoty opět pro $b=c=1$ a nejmenší pro $b=c=0$. Tedy

$$1\leq a+b+c+2(ab+bc+ac)+3(1-a)(1-b)(1-c)\leq 9.$$

Tím jsme prověřili chování výrazu pro pevné extrémní hodnoty proměnné a. Naopak pro libovolné, ale pevné hodnoty b, c je výraz $a+b+c+2(ab+bc+ac)+3(1-a)(1-b)(1-c)$ buď konstantní, nebo lineární funkcí proměnné $a\in\langle 0,1\rangle$. Víme, že lineární funkce definovaná na uzavřeném intervalu nabývá svých extrémů právě v krajních bodech tohoto intervalu. Protože pro $a=0$, i $a=1$ platí dokazovaná nerovnost, tj.

$$1\leq a+b+c+2(ab+bc+ac)+3(1-a)(1-b)(1-c)\leq 9,$$

platí tato nerovnost také pro všechna a, b, c z intervalu $\langle 0,1\rangle$.

Podívejme se například, jak dopadli v tomto kole řešitelé z Jihočeského kraje. Tam na příčce nejvyšší stanula Martina Vaváčková se ziskem 19 bodů. Nejvyššího průměrného zisku dosáhli studenti u druhé úlohy, která zkoumala, jakou část jistého obdélníka zabírají šedé čtverečky. Bodový průměr činí přesně 3,0 bodu, které bylo možné získat za zdůvodnění té skutečnosti, že obsah šedé části trojúhelníku ABC je roven polovině obsahu šedé části obdélníku $ABCD$. (Více na straně 38.) Naopak nejhorší průměrný výsledek - pouze 1,1 bodu měla podle očekávání první úloha hledající dvě prvočísla vyhovující stanovené podmínce. Z celkem 34 soutěžících nedosáhl nikdo plného počtu bodů, pouze dva včetně absolutní vítězky získali 5 bodů z 6 možných. 13 z 33 řešitelů se stalo řešiteli úspěšnými, tj. dosáhlo alespoň desetibodového zisku. Na jižní Moravě se úspěšnými řešiteli z celkového počtu 45 účastníků krajského kola stalo 25 z nich, přičemž absolutní vítěz Jiří Řihák získal plný počet 24 bodů. V tabulce bodových zisků ve skupině úspěšných řešitelů jistě zaujme, že nejčastěji opakovaným číslem je číslo 6. A druhým zajímavým faktem je, že z této skupiny je 18 řešitelů studenty brněnského gymnázia na třídě Kapitána Jaroše. Je vidět, že zde je na účast v soutěži kladen velký důraz a studenti jsou na ni velmi dobře a všestranně připraveni. V Praze dosáhl plného počtu 24 bodů Hoang Vo Viet. Ze 41 účastníků jich alespoň 10 bodů dosáhlo dokonce 21 soutěžících. První úloha s prvočísly byla i zde tou nejproblematičtější. 6 bodů získali pouze tři řešitelé, nejčastěji byla řešení hodnocena pouze jedním jediným bodem a nulou pouze v jednom jediném případě. Na severu Čech pak byl vyhlášen nejlepším řešitelem Bohumil Vybíralík s 13 body z Libereckého kraje a Tomáš Pajma se 14 body v Ústeckém kraji. V Plzeňském kraji byl nejúspěšnějším se ziskem 12 bodů Jindřich Havlík.

2.3 Kategorie A

2.3.1 Domácí kolo

Úloha 1.

V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\sqrt{2}\,(\sin t + \cos t) = \mathrm{tg}^3\, t + \mathrm{cotg}^3\, t.$$

Goniometrické rovnice bývají řešeny na gymnáziích již ve druhém ročníku, ale většinou pouze užitím známých a jednoduchých vztahů a součtových vzorců. Metoda odhadování obou stran rovnice zdola nebo shora různými čísly, jak je tomu v následujícím vzorovém postupu, není často studentům jako metoda řešení rovnic a nerovnic vůbec představena.

Nejprve stanovme podmínky, za kterých má rovnice smysl. Levá strana je definovaná pro všechna reálná t, pravá strana jen pro ta t různá od $k.\frac{\pi}{2}$, kde k je libovolné celé číslo. Jelikož v rovnici vystupují pouze periodické funkce, stačí řešit pouze na čtyřech disjunktních intervalech

a) $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$: Pro každé takové t platí nerovnosti

$$\sqrt{2}.(\sin t + \cos t) \le 2 \quad \text{a} \quad \mathrm{tg}^3 t + \mathrm{cotg}^3 t = \mathrm{tg}^3 t + \frac{1}{\mathrm{tg}^3 t} \ge 2,$$

přičemž rovnosti v obou z nich nastávají právě pro $t = \frac{\pi}{4}$. Potom se tedy obě strany řešené rovnice rovnají číslu 2 a $t = \frac{\pi}{4}$ je jejím jediným řešením na uvedeném intervalu.

b) $t \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$: Pro každé takové t platí nerovnosti

$$\sqrt{2}.(\sin t + \cos t) \ge -\sqrt{2} \quad \text{a} \quad \mathrm{tg}^3 t + \mathrm{cotg}^3 t = \mathrm{tg}^3 t + \frac{1}{\mathrm{tg}^3 t} \le -2,$$

což znamená, že se obě strany rovnice nemohou nikdy rovnat. Na zkoumaném intervalu tedy nemá rovnice řešení.

c) $t \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$: Pro každé t z tohoto intervalu platí nerovnosti

$$\sqrt{2}.(\sin t + \cos t) < 0 \quad \text{a} \quad \mathrm{tg}^3 t + \mathrm{cotg}^3 t \ge 2 > 0,$$

odkud vidíme, že ani na tomto intervalu nemá rovnice žádné řešení.

d) $t \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$: Pro každé t pak platí

$$\sqrt{2}.(\sin t + \cos t) \ge -\sqrt{2} \quad \text{a} \quad \mathrm{tg}^3 t + \mathrm{cotg}^3 t \le -2,$$

což opět znamená, že ani v tomto intervalu nemá naše rovnice žádné řešení. Další intervaly zkoumat nemusíme, protože goniometrické funkce jsou funkce periodické. Rovnice má tak všechna řešení ve tvaru $t = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, kde k je libovolné celé číslo.

Ačkoliv se během uvedeného postupu využívají pouze notoricky známé poznatky o goniometrických funkcích, případně již několikrát zmíněná nerovnost $u+\frac{1}{u}\geq 2$ pro každé kladné číslo u, jde o rovnici poměrně neobvyklou.

Pokud by si student nevěděl s příkladem rady, protože takovýmto způsobem řešitelné příklady ve škole obvykle předváděny nebývají (většinou jde jen o úpravu maximálně užitím různých goniometrických vzorců a následným zjednodušením již lehce určíme neznámou), můžou mu být nápomocny následující úlohy.

Dokažte nerovnost $|\sin t+\cos t|\leq\sqrt{2}$.

$$|\sin t+\cos t|=\sqrt{2}.\left|\sin t.\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos t.\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=\sqrt{2}.\left|\sin t.\cos\frac{\pi}{4}+\cos t.\sin\frac{\pi}{4}\right|=\sqrt{2}.\left|\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right|\leq\sqrt{2}.$$

Tento postup je naprosto běžným v řešení úloh v kapitole o goniometrických funkcích v druhém ročníku gymnázií.

Dokažte, že pro libovolné přirozené n a $t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ *platí* $\mathrm{tg}^n t+\mathrm{cotg}^n t\geq 2$.

Upravme $\mathrm{tg}^n t+\mathrm{cotg}^n t=\mathrm{tg}^n t+\frac{1}{\mathrm{tg}^n t}$. Pro uvažovaná t je hodnota $\mathrm{tg}^n t$ kladná. Podle známého a několikrát zmíněného tvrzení $u>0\Rightarrow u+\frac{1}{u}\geq 2$ je pak již dokazovaná nerovnost naprosto zřejmá.

V oboru reálných čísel řešte soustavu nerovnic

$$\sin x+\cos y\geq\sqrt{2}$$
$$\sin y+\cos z\geq\sqrt{2}$$
$$\sin z+\cos x\geq\sqrt{2}.$$

Sečtěme nejprve všechny rovnice.

$$\sin x+\cos y+\sin y+\cos z+\sin z+\cos x\geq 3\sqrt{2}.$$

Nyní členy vhodně přeuspořádejme a kromě odhadu zdola daného rovnicí využijme i výše dokázaného odhadu shora. Odtud pak je

$$3\sqrt{2}\leq\sin x+\cos x+\sin y+\cos y+\sin z+\cos z\leq 3\sqrt{2}.$$

Vidíme, že obě neostré nerovnosti mohou být splněny právě jen tehdy, pokud nastává v obou případech rovnost, neboli

$$\sin x+\cos x+\sin y+\cos y+\sin z+\cos z=3,$$

tj. když

$$\sin x=\cos x=\sin y=\cos y=\sin z=\cos z=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

což je splněno právě pro

$$x=\frac{\pi}{4}+2k_1\pi,\ y=\frac{\pi}{4}+2k_2\pi\ \text{a}\ z=\frac{\pi}{4}+2k_3\pi,$$

kde k_1, k_2, k_3 jsou libovolná celá čísla.

Protože jsme na začátku řešení použili důsledkovou úpravu, je nutná zkouška. Vidíme však, že nalezená řešení vyhovují zadané soustavě. Nastává přitom dokonce opět rovnost.

Poslední návodná úloha byla zařazena v 50. ročníku olympiády rovněž do domácí části.

Student znalý goniometrických rovnic by mohl postupovat i jinak, jak je k tomu veden ve škole, alespoň na začátku. Užitím definičních vztahů pro funkce tangens a kotangens a úpravou vzniklých zlomků za užití vztahů pro součet šestých mocnin a jiných vztahů pro goniometrické funkce by následujícím způsobem získal:

$$\sqrt{2}(\sin t+\cos t)=\frac{\sin^3 t}{\cos^3 t}+\frac{\cos^3 t}{\sin^3 t}$$

$$\sqrt{2}(\sin t+\cos t)=\frac{\sin^6 t+\cos^6 t}{\sin^3 t.\cos^3 t}$$

$$\sqrt{2}(\sin t+\cos t)=\frac{(\sin^2 t+\cos^2 t).(\sin^4 t-\sin^2 t.\cos^2 t+\cos^4 t)}{\sin^3 t.\cos^3 t}$$

$$\sqrt{2}(\sin t+\cos t)=\frac{\sin^4 t-\sin^2 t.\cos^2 t+\cos^4 t}{\sin^3 t.\cos^3 t}$$

$$\sqrt{2}(\sin t+\cos t)=\frac{\sin^4 t+2\sin^2 t.\cos^2 t+\cos^4 t-3.\sin^2 t.\cos^2 t}{\sin^3 t.\cos^3 t}$$

$$\sqrt{2}(\sin t+\cos t)=\frac{(\sin^2 t+\cos^2 t)^2-3.\sin^2 t.\cos^2 t}{\sin^3 t.\cos^3 t}$$

$$\sqrt{2}(\sin t+\cos t)=\frac{1-3.\sin^2 t\cos^2 t}{\sin^3 t.\cos^3 t}$$

$$2.\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-\frac{3}{4}.4.\sin^2 t\cos^2 t}{\frac{8}{8}.\sin^3 t.\cos^3 t}$$

$$2.\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-\frac{3}{4}\sin^2 2t}{\frac{1}{8}\sin^3 2t}$$

$$\frac{1}{4}.\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right).\sin^3 2t+\frac{3}{4}\sin^2 2t=1$$

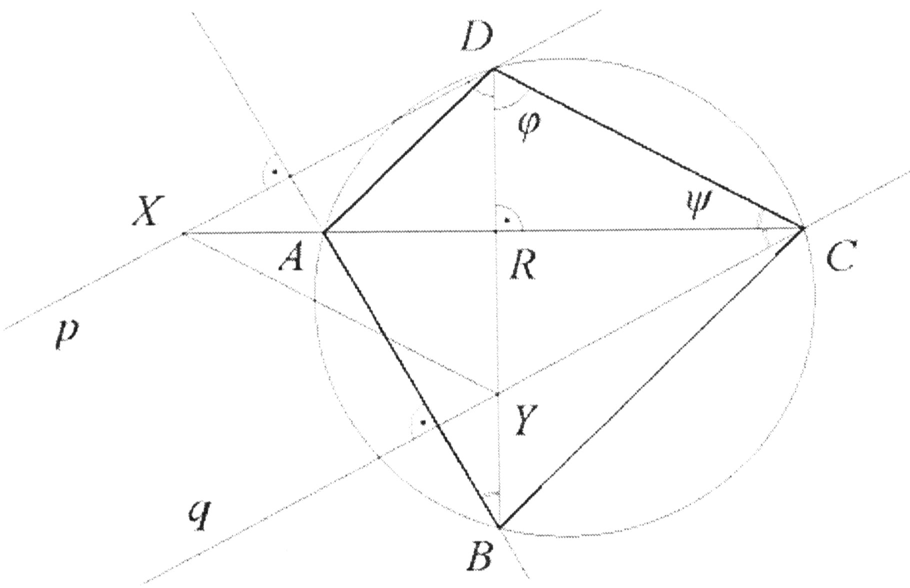
$$\sin^2 2t.\left[\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right).\sin 2t+3\right]=4.$$

Z posledních tří řádků je patrná snaha vyjádřit sinus i kosinus pomocí jedné z nich, v tomto případě pomocí sinu. Z posledního řádku pak získám řešení. Nějaký goniometrický výraz se má rovnat číslu 4. Nejvyšší kladná hodnota, jaké může však funkce sinus nabývat, je 1. Hodnota činitele $\sin^2 2t$ je proto také nanejvýš 1. Číslo 4 tak můžeme získat pouze v závorce, a to právě tehdy, je-li $\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2t=1$, což je v případě $t=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, kde k je libovolné celé číslo. Pak má hranatá závorka hodnotu 4 a člen $\sin^2 2t$ je roven 1, tudíž je $t=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ hledaným řešením.

Úloha 2.

Nechť ABCD je tětivový čtyřúhelník s navzájem kolmými úhlopříčkami. Označme po řadě p, q kolmice z bodů D, C na přímku AB a dále X průsečík přímek AC a p a Y průsečík přímek BD a q. Dokažte, že XYCD je kosočtverec nebo čtverec.

Pro řešení této pěkné planimetrické úlohy vyčteme opět mnohé z obrázku. Když si uvědomíme všechny skutečnosti vyplývající ze zadání, je jako obvykle zřejmé, že je úloha velmi jednoduchá; hodila by se i do nižších kol soutěže.

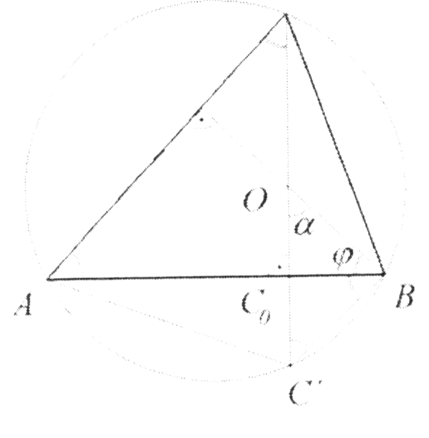


obr. 21

Označme R ve shodě se vzorovým řešením průsečík oněch dvou navzájem kolmých úhlopříček daného čtyřúhelníku $ABCD$ a poté ještě φ a ψ po řadě velikosti úhlů CDR a DCR. Přímka DR je kolmá k přímce AC, a jelikož na těchto přímkách leží i úhlopříčky čtyřúhelníku $XYCD$, jsou tak tyto rovněž kolmé. Nutnou podmínkou pro to, aby byl čtyřúhelník $XYCD$ čtvercem nebo kosočtvercem, je, že trojúhelník XCD bude rovnoramenný, tj. úsečka RD bude jeho výškou k základně XC. To však dokážeme velmi snadno využitím skutečnosti, že čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový a má navzájem kolmé úhlopříčky. Úhel CDR je obvodový úhel příslušící oblouku BC. Tomuto oblouku ale přísluší i obvodový úhel BAC. Ze známé rovnosti velikostí všech obvodových úhlů příslušících jednomu oblouku je tedy i velikost úhlu BAC rovna φ. A stejný úhel svírají i polopřímky kolmé na ramena tohoto úhlu, tudíž platí i $|\angle XDB| = \varphi$. Tudíž je trojúhelník XCD rovnoramenný se základnou XC. Dokonce ale i úhel DYC má velikost φ, protože jde o úhly střídavé. Tudíž i trojúhelník DYC je rovnoramenný se základnou DY.

Nyní tedy víme, že $|XD| = |DC| = |CY|$, tj. že čtyřúhelník $XYCD$ má tři strany shodné, je to rovnoběžník, protože přímky p a q, na kterých leží dvě nesousední strany XD a YC, jsou kolmé k též přímce, a dokonce má navzájem kolmé úhlopříčky. Takový čtyřúhelník může být jedině kosočtverec nebo dokonce čtverec.

Využít můžeme též i celkem neznámého poznatku, že bod souměrně sdružený s průsečíkem výšek daného trojúhelníku podle jeho libovolné strany leží na kružnici trojúhelníku opsané. Nejprve toto dokážeme (například pro ostroúhlý trojúhelník ABC).



Sestrojme například výšky na strany AB a AC a označme C_0 patu výšky na stranu c. Označme dále O průsečík těchto výšek a C' průsečík polopřímky CO s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC a dokažme, že je to obraz bodu O v osové symetrii určené přímkou AB. Velikost úhlu BOC' označme α. Kolmice k jeho ramenům obsahují ramena úhlu CAB, tudíž je i jeho velikost rovna α. Jedná se o obvodový úhel nad tětivou BC, stejně jako v případě úhlu $BC'C$, jehož velikost je tedy též α. Odtud $|\angle BOC'| = |\angle BC'O|$. Postupujme podobně ještě jednou a velikost úhlu OBC_0 označme φ. Kolmice k jeho ramenům obsahují ramena úhlu ACC', tudíž je i jeho velikost rovna φ. Jde ale o

obr. 22

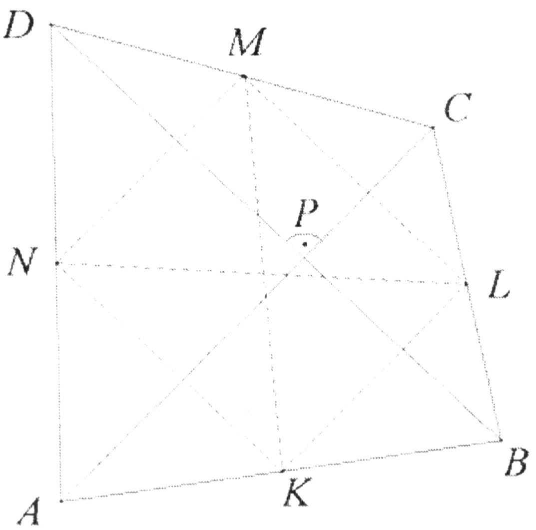
obvodový úhel nad tětivou AC', stejně jako v případě úhlu ABC', jehož velikost je tedy také φ. Pak $|\angle OBC_0| = |\angle C'BC_0|$. Trojúhelníky BOC_0 a $BC'C_0$ jsou tedy shodné podle věty *usu*, protože se shodují ve vnitřních úhlech a navíc mají společnou odvěsnu BC_0. Pak tedy platí, že $|C_0O| = |C_0C'|$ a zvolený bod C' na kružnici opsané trojúhelníku ABC je obrazem bodu O v osové souměrnosti s osou symetrie AB.

Vraťme se tedy k naší úloze. Ze zadání vyplývá, že bod X je průsečíkem výšek v trojúhelníku ABD a bod Y průsečíkem výšek v trojúhelníku ABC. Bod C je tedy obrazem bodu X v osové souměrnosti podle přímky BD. Bod R je středem úsečky YD. A protože jsou úsečky XC a YD navzájem kolmé, je $XYCD$ kosočtverec nebo čtverec.

Návodem k řešení může být studentům následující úloha ze školního kola kategorie B 47. ročníku.

Nechť obě úsečky spojující středy protilehlých stran konvexního čtyřúhelníku ABCD mají stejnou délku. Dokažte že úhlopříčky AC a BD jsou navzájem kolmé a že platí rovnost

$$|AB|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 + |DA|^2.$$



obr. 23

Označme nejprve K, L, M, N po řadě středy stran AB, BC, CD, DA uvažovaného čtyřúhelníku $ABCD$. Takto získaný čtyřúhelník $KLMN$ je rovnoběžník, neboť jeho každá z jeho stran je střední příčkou v jednom z trojúhelníků ABC, BCD, CDA a DAB, na něž je čtyřúhelník $ABCD$ rozdělen svými úhlopříčkami, přičemž platí $KL \| AC \| MN$ a $LM \| BD \| MK$. O jeho úhlopříčkách ze zadání navíc víme, že mají stejnou délku, proto je navíc čtyřúhelník $KLMN$ i pravoúhelník (tzn. obdélník nebo čtverec), a proto jsou úhlopříčky čtyřúhelníku $ABCD$ navzájem kolmé.

Označme dále P průsečík úhlopříček AC a BD čtyřúhelníku $ABCD$. Užitím Pythagorovy věty postupně na všechny trojúhelníky ABP, BCP, CDP a DAP dostáváme

$$|PA|^2 + |PB|^2 = |AB|^2$$

$$|PB|^2 + |PC|^2 = |BC|^2$$

$$|PC|^2 + |PD|^2 = |CD|^2$$

$$|PC|^2 + |PA|^2 = |DA|^2.$$

Sečteme-li první a třetí, resp. druhou a čtvrtou rovnost, vyjde

$$|AB|^2 + |CD|^2 = |PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2 = |BC|^2 + |DA|^2,$$

což jsme měli dokázat.

Úloha 3.

Posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *nenulových celých čísel má tu vlastnost, že pro každé* $n \geq 0$ *platí* $a_{n+1} = a_n - b_n$, *kde* b_n *je číslo, které má stejné znaménko jako* a_n, *ale opačné pořadí číslic (zápis čísla* b_n *může narozdíl od zápisu čísla* a_n *začínat jednou nebo více nulami). Například pro* $a_0 = 1210$ *je* $a_1 = 1089$, $a_2 = -8712$, $a_3 = -6534$, ...

a) Dokažte, že posloupnost (a_n) *je periodická.*

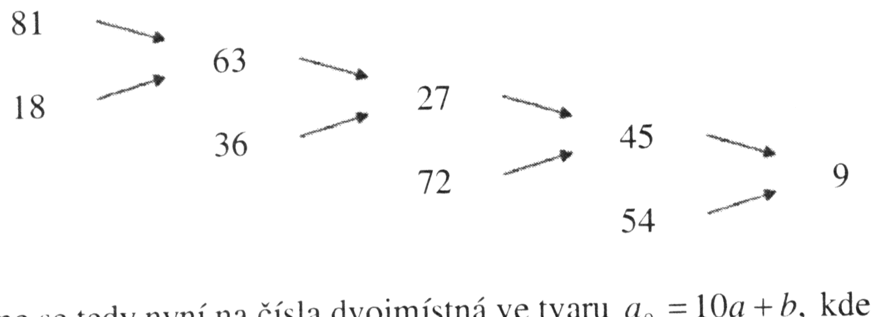
b) Zjistěte, jaké nejmenší přirozené číslo může být a_0.

Tato úloha je pro poslední ročníky matematické olympiády typická - na první pohled složitá, v krátké době spatra neřešitelná, naprosto nesouvisející a neodrážející úlohy a problémy řešené v hodinách matematiky na gymnáziu. Na druhý pohled však, pokud nahlédneme do řešení, nebo nasloucháme-li někomu, kdo s úlohou již bojoval, zjistíme, že ze zadání lze vytěžit velmi mnoho a že se jedná nakonec o problém velmi pěkný. U těchto úloh však existuje zpravidla pouze jediný postup vedoucí k cíli a spočívá v rozsáhlé analýze problému, kde jakákoliv drobná numerická chyba může vést k závažným komplikacím. Proto jsou tyto úkoly vhodné pouze pro domácí část soutěže.

Dokázat periodičnost uvažované posloupnosti vlastně znamená najít taková čísla n_0 a p, pro která platí $a_{n0+p} = a_{n0}$. Každý další člen naší posloupnosti je totiž určen jednoznačně členem jemu předcházejícím, tudíž pro každé $n \geq n_0$ bude již platit $a_{n+p} = a_n$, tj. posloupnost bude počínaje členem a_{n0} periodická s periodou délky p.

Uvažujme nyní o tom, jak vypadá číslo $a_{n+1} = a_n - b_n$. To má nanejvýš tolik číslic, kolik má číslo a_n, číslo b_n může mít totiž stejně nebo méně číslic než právě a_n. $(|a-b| \leq \max(a,b))$. Má-li tedy první člen posloupnosti a_0 k číslic, budou všechny další členy mít nanejvýš k číslic, a tím pádem budou tedy všechny patřit do konečné množiny nanejvýš $2(10^k - 1)$ čísel. Právě tolik je k-ciferných nenulových čísel obou znamének. Naše uvažovaná posloupnost je ale nekonečná. Tudíž nemůže obsahovat pouze tolik členů. Po čase tedy musí dojít k zopakování, z čehož vyplývá, že daná posloupnost je periodická.

Podívejme se na druhý bod zadání. Zkusme nejprve dosazovat za a_0 malá čísla. Nejprve si však připomeňme, že se jedná o posloupnost nenulových čísel. Tudíž žádný z jejích členů nesmí být tzv. palindromické číslo, tj. číslo, které "přečteme" stejně zepředu i ze zadu. To jsou všechna čísla jednomístná. Pro každé takové a_0 bychom jako další člen získali 0, což je ve sporu se zadáním.



Zaměřme se tedy nyní na čísla dvojmístná ve tvaru $a_0 = 10a + b$, kde $a \in \{1, 2, ..., 9\}$ a $b \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$. Příslušné b_0 pak má tvar $b_0 = 10b + a$ a pro následující člen potom dostáváme $a_1 = a_0 - b_0 = 10a + b - 10b - a = 9(a - b)$. To znamená, že všechny další členy jsou dělitelné devíti. Zabývejme se tedy dále jen dvouciferními násobky devíti, tj. čísly 18, 27, 36, ..., 99. Pro všech těchto deset čísel vyzkoušejme, jak naznačuje schéma na obrázku, jak bude vypadat několik následujících členů a zjistíme, že dříve či později "sklouzneme" k číslu 9, pro které je následujícím členem "zakázaná" 0. Pro záporná čísla by schéma vypadalo stejně. Vidíme tedy, že počátečním členem a_0 tedy nemůže být ani dvouciferné číslo.

Pokračujme tedy dále mezi čísly trojcifernými. Ta můžeme zapsat ve tvaru $a_0 = 100a + 10b + c$, kde $a \in \{1, 2, ..., 9\}$ a $b, c \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$. Příslušné b_0 pak má tvar $b_0 = 100c + 10b + a$, což dává $a_1 = a_0 - b_0 = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 99(a - c)$. Vidíme, že v tomto případě jsou všechny následující členy posloupnosti dělitelné 99, a proto se tedy obdobně jako v předchozím případě zabývejme pouze násobky 99, tj. čísly 198, 297, 369, ..., 990, která prozkoumáme opět pomocí následujícího schématu, díky kterému opět zjistíme, že ani trojciferná čísla nemohou stát na začátku uvažované posloupnosti, protože tak by se v ní objevil člen 99 a poté nepřípustná 0.

$$\begin{tikzcd}
891 \arrow[dr] & & & & \\
& 693 \arrow[dr] & & & \\
198 \arrow[ur] & & 297 \arrow[dr] & & \\
& 396 \arrow[ur] & & 495 \arrow[dr] & \\
& & 792 \arrow[ur] & & 99 \\
& & & 594 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Nezbývá než přistoupit ke čtyřmístným číslům. Ta zapíšeme obecně ve tvaru $a_0 = 1000a + 100b + 10c + d$, kde $a \in \{1, 2, ..., 9\}$ a $b, c, d \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$. Odpovídající b_0 má pak tvar $b_0 = 1000d + 100c + 10b + a$, což dává $a_1 = a_0 - b_0 = 999(a - d) + 90(b - c)$.

$$\begin{tikzcd}
8991 \arrow[dr] & & & & \\
& 6993 \arrow[dr] & & & \\
1998 \arrow[ur] & & 2997 \arrow[dr] & & \\
& 3996 \arrow[ur] & & 4995 \arrow[dr] & \\
& & 7992 \arrow[ur] & & 999 \\
& & & 5994 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Zde není situace již na první pohled tak zřejmá, proberme tedy tato čísla postupně. Začněme $a_0 = 1000$, pro který je příslušné $b_0 = 1$, tudíž $a_1 = 999$, což jsme zavrhli výše. Číslo 1001 je palindromické. Pro $a_0 = 1002$ dostáváme $a_1 = -999$. Pro čísla 1003 až 1009 dostáváme opět po několika krocích trojmístné číslo 999, které opět ze zřejmých důvodů zavrhneme. Následuje $a_0 = 1010$, které nám dá nevhodné $a_1 = 909$, a $a_0 = 1011$, které dává opět nevyhovující $a_1 = -90$. Až pro číslo $a_0 = 1012$ dostávám přípustný výsledek a posloupnost pak má zcela konkrétní tvar:

$$1012, -1089, 8712, 6534, 2178, -6534, -2178, 6534, ...$$

Odpověď tedy zní: Nejmenší přirozené číslo, které může být počátečním členem zkoumané posloupnosti je číslo $a_0 = 1012$.

Úloha 4.

Najděte všechny kubické rovnice $P(x) = 0$, které mají alespoň dva různé reálné kořeny, z nichž jeden je číslo 7, a které pro každé reálné t splňují podmínku: Jestliže $P(t) = 0$, pak $P(t+1) = 1$.

Hledaná kubická rovnice má tvar $a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0$, kde $a \neq 0$ a x_1, x_1, x_1 označují její reálné kořeny. Rozeberme nyní tři různé případy, které mohou nastat, a snažme se získat koeficient a.

a) Předpokládejme, že x_1, x_2, x_3 jsou nejprve tři navzájem různá reálná čísla.

Potom má rovnice $P(t+1) = 1$ *tvar* $a(x-x_1-1)(x-x_2-1)(x-x_3-1)=1$, což je velmi důležité si uvědomit. Vyplývá z podmínky uvedené v zadání. Porovnáním obou dvou rovnic získáváme rovnost $a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)+1=a(x-x_1-1)(x-x_2-1)(x-x_3-1)$. Porovnáním koeficientů u příslušných mocnin získáme rovnici $-a(x_1+x_2+x_3)=-a(x_1+x_2+x_3+3)$, odkud dostáváme $a = 0$, což je ve sporu se zadáním. Tři kořeny hledané kubické rovnice tedy nemohou být tři různá reálná čísla.

b) Předpokládejme $x_1 = x_2 = 7 \neq x_3$.

Tehdy $P(x) = a(x-7)^2(x-x_3)$ a rovnost $P(x) = 1$ má platit pro $x = 8$ a $x = x_3+1$. Dostáváme tak soustavu dvou rovnic $P(8) = a(8-x_3) = 1$ a $P(x_3+1) = a(x_3-6)^2$, odkud vidíme, že $\frac{1}{a} = 8-x_3 = (x_3-6)^2$. Úpravou získáme kvadratickou rovnici $x_3^2-11x_3+28=0$, která má dva reálné kořeny $x_3=4$ a $x_3=7$. Vyhovuje jen první kořen. Pak $a = \frac{1}{4}$ a hledaná kubická rovnice má tvar $\frac{1}{4}(x-7)^2(x-4)=0$.

c) Zbývá ještě případ $x_1 = 7 \neq x_2 = x_3$.

Tehdy $P(x) = a(x-7)(x-x_3)^2$ a rovnost $P(x) = 1$ má platit pro $x = 8$ a $x = x_2+1$. Dostáváme tak soustavu dvou rovnic $P(8) = a(8-x_2)^2 = 1$ a $P(x_2+1) = a(x_2-6)$, odkud vidíme, že $\frac{1}{a} = (8-x_2)^2 = x_2-6$. Úpravou získáme kvadratickou rovnici $x_2^2-17x_2+70=0$, která má dva reálné kořeny $x_2=10$ a $x_2=7$. Vyhovuje jen první kořen. Pak $a = \frac{1}{4}$ a hledaná kubická rovnice má tvar $\frac{1}{4}(x-7)(x-10)^2=0$.

Zadání tedy vyhovují pouze dvě kubické rovnice $\frac{1}{4}(x-7)^2(x-4)=0$ a $\frac{1}{4}(x-7)(x-10)^2=0$.

Úlohu hodnotím jako těžkou. Prochází-li si čtenář vzorové řešení, nenajde v něm nic nejasného, avšak podle mého názoru je obtížné zvolit na začátku správnou cestu, která by vedla úspěšně k řešení, protože není snadné si uvědomit veškeré důsledky zadání. Problematice kubických rovnic se nevěnuje na gymnáziích takřka žádná pozornost, zpravidla pouze jejich řešení v součinovém tvaru, ze kterého jsou hledané kořeny navíc patrné již na první pohled. Proto bych tuto problematiku ze soutěže vynechal.

Jako návod může být použita 4. úloha z ústředního kola 51. ročníku.
Najděte všechny dvojice reálných čísel a, b, pro které má rovnice

$$\frac{ax^2-24x+b}{x^2-1}=x$$

v oboru reálných čísel právě dvě řešení, přičemž jejich součet je 12.

Po vynásobení obou stran rovnice výrazem $x^2 - 1$ pro x různá od 1 a -1 a převedení všech členů na levou stranu dostáváme rovnici ve tvaru

$$x^3 - ax^2 + 23x - b = 0.$$

Protože obě řešení první rovnice musejí být zároveň řešeními této nové rovnice, musí mít tato rovnice tři reálné kořeny. Pro tato čísla x_1, x_2, x_3 platí Viètovy vzorce. Ty však v učebnicích pro střední školy pro kubické rovnice nenajdeme. To by měl být podle mého názoru jasný impulz k vynechání podobných úloh.

$$x_1 + x_2 + x_3 = a$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 23$$

$$x_1x_2x_3 = b.$$

Předpoklad existence dvou řešení ze zadání znamená, že buď právě jeden z kořenů x_1, x_2, x_3 je z množiny $\{-1, 1\}$ a ostatní dva kořeny jsou různé, nebo že jeden z kořenů x_1, x_2, x_3 je dvojnásobný a žádný do množiny $\{-1, 1\}$ nepatří. Označme tak řešení původní rovnice s a $12 - s$. Potom nastane právě jedna z možností: $(x_1, x_2, x_3) = (-1, s, 12 - s)$, $(x_1, x_2, x_3) = (1, s, 12 - s)$, nebo $(x_1, x_2, x_3) = (s, s, 12 - s)$, přičemž vždy platí $s \in \{-1, 1, 6, 11, 13\}$. Nyní rozebereme tyto tři možnosti, které by mohly nastat.

a) $(x_1, x_2, x_3) = (-1, s, 12 - s)$: Z výše uvedených Viètových vztahů po dosazení a upravení dostáváme $a = 11$, $s^2 - 12s - 35 = 0$, $b = -s(12 - s)$. Druhá rovnice má dva kořeny $s_1 = 5$ a $s_2 = 7$, kterým podle třetí rovnice odpovídá i stejná hodnota $b = -35$. Dvojice $(a, b) = (11, -35)$ je tedy řešením úlohy.

b) $(x_1, x_2, x_3) = (1, s, 12 - s)$: Z Viètových vztahů po dosazení a upravení vyplývá toto: $a = 13$, $s^2 - 12s + 11 = 0$, $b = s(12 - s)$. Druhá rovnice má kořeny $s_1 = 1$ a $s_2 = 11$, které jsou však nepřípustnými hodnotami.

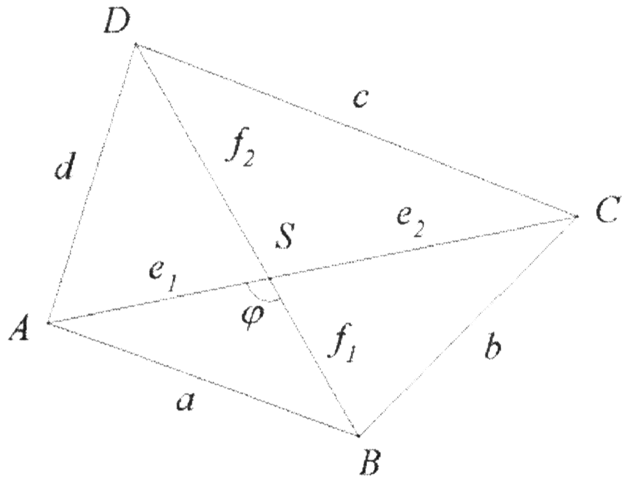
c) $(x_1, x_2, x_3) = (s, s, 12 - s)$: $a = s + 12$, $s^2 - 24s + 23 = 0$, $b = s^2(12 - s)$. Druhá rovnice má kořeny $s_1 = 1$ a $s_2 = 23$, přičemž první hodnota je nepřípustná a druhá nám dává podle první a třetí rovnice hodnoty $a = 23$ a $b = -11.23^2 = -5819$. Dvojice $(a, b) = (35, -5819)$ je tak druhým řešením úlohy.

Hledané dvojice čísel a a b jsou tedy dvojice $(11, -35)$ a $(35, -5819)$.

Úloha 5.

Jsou dány úsečky délek a, b, c, d. Dokažte, že konvexní čtyřúhelníky ABCD se stranami délek a, b, c, d (při obvyklém značení) existují, a přitom úhlopříčky každého z nich svírají jeden a týž úhel, právě když platí rovnost $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

Pátá úloha se mi zdá ze všech úloh domácího kola kategorie A pro třetí a čtvrté ročníky gymnázií být tou nejobtížnější. Jak uvidíme dále, k jejímu řešení budeme používat poprvé trigonometrické věty, avšak po prvních přečteních nemusí být zcela jasné, co se po řešiteli, sedmnáctiletém gymnazistovi, vlastně chce.



obr. 24

Než se pustíme do řešení, označme si nejprve délky úseček v uvažovaném konvexním čtyřúhelníku $ABCD$, S označme průsečík jeho úhlopříček, dále pak $e=|AC|$, $f=|BD|$, $e_1=|AS|$, $e_2=|CS|$, $f_1=|BS|$, $f_2=|DS|$ a ještě $\varphi=|\angle ASB|$. Využitím kosinové věty a vztahu $\cos t=-\cos(\pi-t)$ získáme rovnosti

$$a^2=e_1^2+f_1^2-2e_1f_1\cos\varphi$$
$$b^2=e_2^2+f_1^2+2e_2f_1\cos\varphi$$
$$c^2=e_2^2+f_2^2-2e_2f_2\cos\varphi$$
$$d^2=e_1^2+f_2^2+2e_1f_2\cos\varphi.$$

Sečteme-li nyní první a třetí rovnost a od výsledku odečteme součet druhé a čtvrté rovnosti, dostaneme

$$(a^2+c^2)-(b^2+d^2)=-2(e_1f_1+e_2f_2+e_2f_1+e_1f_2)\cos\varphi,$$

neboli

$$(a^2+c^2)-(b^2+d^2)=-2ef\cos\varphi.$$

Je-li splněna rovnost $a^2+c^2=b^2+d^2$ ze zadání, tehdy a jen tehdy je levá strana rovna nule a aby nastala rovnost, je $\cos\varphi=0$, což nastává pro $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Úhlopříčky jsou tedy navzájem kolmé a délky stran mají vyjádření

$$a^2=e_1^2+f_1^2,\ b^2=e_2^2+f_1^2,\ c^2=e_2^2+f_2^2,\ d^2=e_1^2+f_2^2.$$

Zdůvodněme ještě, že takové čtyřúhelníky, jejichž strany splňují vztah $a^2=e_1^2+f_1^2$, skutečně existují. Předpokládejme bez újmy na obecnosti, že nejkratší strana má délku d. Potom e_1 volme libovolně v intervalu $(0,d)$ a z výše uvedených vztahů odvodíme

$$f_1=\sqrt{a^2-e_1^2},\ f_2=\sqrt{d^2-e_1^2},\ e_2=\sqrt{c^2-d^2+e_1^2}=\sqrt{b^2-a^2+e_1^2}.$$

V druhé části řešení naopak předpokládejme, že alespoň jeden takový čtyřúhelník $A_0B_0C_0D_0$ se stranami daných délek a, b, c, d existuje. Z vlastností drátěného modelu čtyřúhelníku vyplývá, že pak existuje nekonečně mnoho čtyřúhelníků $ABCD$ tvarově blízkých $A_0B_0C_0D_0$, jejichž vnitřní úhly α,γ u vrcholů A, C jsou svázány podmínkou

$$a^2+d^2-2ad\cos\alpha=b^2-c^2-2bc\cos\gamma$$

vyplývající z porovnání společné strany BD trojúhelníků ABD a BCD. Předpokládejme nyní naopak, že rovnost $a^2+c^2=b^2+d^2$ neplatí a tudíž levá strana nerovnosti $(a^2+c^2)-(b^2+d^2)=-2ef\cos\varphi$ je nenulová. Potom z ní můžeme vypočítat součin ef, který je tak pro všechny vyhovující čtyřúhelníky stejný. Víme-li že obsah tohoto čtyřúhelníka $S=\frac{1}{2}ef\sin\varphi$, vidíme, že i hodnota S je jedna a táž. Obsah S ale můžeme vyjádřit také vzorcem $S=\frac{1}{2}ad\sin\alpha+\frac{1}{2}bc\sin\gamma$, proto usoudíme, že existují takové konstanty R_1 a R_2, že

$$R_1=ad\cos\alpha-bc\cos\gamma,$$

což vyplývá ze vztahu $a^2+d^2-2ad\cos\alpha=b^2-c^2-2bc\cos\gamma$, a

$$R_2=adsi\alpha-bc\sin\gamma$$

pro $R_2 = 2S$. Z těchto vztahů dále můžeme získat

$$(bc)^2 = (bc\cos\gamma)^2 + (bc\sin\gamma)^2 = (ad\cos\alpha - R_1)^2 + (R_2 - ad\sin\alpha)^2 =$$
$$= (ad)^2 + R_1^2 + R_2^2 - 2ad(R_1\cos\alpha + R_2\sin\alpha).$$

Součin ad je nenulový, lze pak z posledního tvaru vypočítat hodnotu výrazu $R_1\cos\alpha + R_2\sin\alpha$. Ta je pro všechny čtyřúhelníky $ABCD$ stejná. To je možné jedině tehdy, když $R_1 = R_2 = 0$. To je však spor s tím, že $R_2 = 2S > 0$. Tím je důkaz hotov.

Tuto úlohu hodnotím jako velmi těžkou. Úvahy zejména v druhé části vzorového řešení jsou místy nejasné a troufám si vyslovit obavu, že se najdou i učitelé matematiky, kteří nebudou kompetentní k vedení nebo dokonce opravování této úlohy u svých případných řešitelů. Její zařazení se mi jeví jako nevhodné.

Úloha 6.

Najděte všechny uspořádané dvojice (x, y) přirozených čísel, pro něž platí

$$x^2 + y^2 = 2005(x - y).$$

Je výhodné, začít řešit rovnici obecně ve tvaru

$$x^2 + y^2 = k(x - y)$$

pro nějaké přirozené k a až poté konkrétně pro $k = 2005$. Upravme proto rovnici do součinového tvaru

$$y(k + y) = x(k - x).$$

Nyní budeme, jak je tomu v podobných úlohách olympiády zvykem, uvažovat o soudělnosti vystupujících členů a označíme d největší společný dělitel přirozených čísel x a y, tudíž platí $x = dm$ a $y = dn$, kde m a n jsou nějaká nesoudělná přirozená čísla. Nyní můžeme rovnici číslem d vydělit a dostaneme

$$n(k + y) = m(k - x).$$

Z této rovnice totiž díky nesoudělnosti m a n plyne, že přirozené číslo $k + y$ je násobkem čísla m a číslo $k - x$ je stejným násobkem čísla n. Pak tedy existuje přirozené číslo q tak, že $k + y = qm$ a $k - x = qn$. Vyjádřeme z obou těchto vztahů číslo k a porovnejme:

$$\begin{aligned} k &= qm - y = qm - dn \\ k &= qn + x = qn + dm \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad qm - dn = qn + dm \quad\Rightarrow\quad m(q - d) = n(q + d).$$

A opakujme úvahu ještě jednou. Čísla m a n jsou nesoudělná, tudíž existuje nějaké přirozené číslo r takové, že $q + d = rm$ a $q - d = rn$. Sečtením a odečtením těchto vztahů dostáváme vyjádření čísel q a d pomocí čísel m, n a r: $q = \dfrac{r(m+n)}{2}$ a $d = \dfrac{r(m-n)}{2}$, odkud již konečně získáme vztahy pro hledané neznámé x a y:

$$x = dm = \frac{r(m-n)m}{2} \quad\text{a}\quad y = dn = \frac{r(m-n)n}{2}.$$

K získání kořenů x a y však potřebujeme znát čísla m, n a r a jejich souvislost s daným k. Zkusme například odvozené vzorce dosadit do rovnosti $k = qn + x$:

$$k = qn + x = \frac{r(m+n)n}{2} + \frac{r(m-n)m}{2} = \frac{r(m^2 + n^2)}{2},$$

odkud dostáváme hledanou podmínku

$$2k = r(m^2 + n^2).$$

Shrňme tedy naše úvahy: Je-li k dané přirozené číslo, pak řešeními rovnice $x^2 + y^2 = k(x - y)$ jsou právě ty dvojice přirozených čísel x a y ve tvaru

$$x = dm = \frac{r(m-n)m}{2} \text{ a } y = dn = \frac{r(m-n)n}{2},$$

kde m, n a r jsou přirozená čísla splňující rovnost $2k = r(m^2 + n^2)$. Nyní můžeme tedy již přistoupit k řešení naší konkrétní rovnice. Navíc je vidět, že $m > n$.

Budeme hledat všechny možné rozklady čísla $2k$ na dva činitele, $2k = rs$ a pro každý z nich pak vyhovující čísla m a n podle vztahu $s = m^2 + n^2$. Pak už jen pro konečný počet čísel m nesoudělných s číslem s a splňujících nerovnost $m^2 < s < 2m^2$ otestujeme, zda je rozdíl $s - m^2$ druhou mocninou přirozeného čísla. Pro dané k = 2005 = 5.4001 (401 je prvočíslo) existují následující rozklady. Protože je $m^2 + n^2 \geq 2^2 + 1^2 = 5$, vynecháme ty rozklady, ve kterých je činitel $s = m^2 + n^2$ menší než 5.

a) 4010 = 802.5, tj. $r = 802$, $m^2 + n^2 = 5$. Zřejmě $m = 2$ a $n = 1$, odkud $x = 802$ a $y = 401$,
b) 4010 = 401.10, tj. $r = 401$, $m^2 + n^2 = 10$. Zřejmě $m = 3$ a $n = 1$, odkud $x = 1203$ a $y = = 401$,
c) 4010 = 10.401, tj. $r = 10$, $m^2 + n^2 = 401$. Zřejmě $m = 20$ a $n = 1$, odkud $x = 1900$ a $y = = 95$,
d) 4010 = 5.802, tj. $r = 5$, $m^2 + n^2 = 802$. Zřejmě $m = 21$ a $n = 19$, odkud $x = 105$ a $y = 95$,
e) 4010 = 2.2005, tj. $r = 2$, $m^2 + n^2 = 2005$. Tentokrát vyhovuje jednak $m = 39$ a $n = 22$, pro která se $x = 663$ a $y = 374$, nebo též $m = 41$ a $n = 18$, pro která se $x = 943$ a $y = 414$,
f) 4010 = 1.4010, tj. $r = 1$, $m^2 + n^2 = 4010$. Tentokrát vyhovuje jednak $m = 59$ a $n = 23$, pro která se $x = 1062$ a $y = 414$, nebo též $m = 61$ a $n = 17$, pro která se $x = 1342$ a $y = 374$.

Úloha má právě osm řešení, a to tyto uspořádané dvojice (x, y): $(105, 95)$, $(66, 374)$, $(802, 401)$, $(943, 414)$, $(1062, 414)$, $(1203, 401)$, $(1342, 374)$, $(1900, 95)$.

Zkusme ještě zadanou rovnici upravit doplněním na úplný čtverec:

$$x^2 - kx + y^2 + ky = 0$$

$$\left(x - \frac{k}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{k}{2}\right)^2 = \frac{k^2}{2}.$$

Vidíme, že úloha se dá interpretovat tak, že nalezená řešení jsou celočíselnými souřadnicemi bodů kružnice s výše uvedenou rovnicí v prvním kvadrantu kartézské soustavy souřadné Oxy. Střed kružnice leží ve čtvrtém kvadrantu. Proto se všechna čísla na místě y vyskytují v nalezených řešeních dvakrát a s rostoucím x nejprve y roste, poté klesá. Protože leží střed této kružnice o souřadnicích $\left[\frac{k}{2}, -\frac{k}{2}\right]$ ve čtvrtém kvadrantu, budou se hodnoty y pohybovat pouze od 1 do celé části $\frac{k\sqrt{2}}{2} - \frac{k}{2} = \frac{k}{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)$, čemuž pro naše k = 2005 vyhovují pouze čísla 1, ..., 415. Ke všem z těchto hodnot y existuje přirozené x pouze pro 95, 374, 401 a 414. Ta by se nalezla, kdybychom se na naši rovnici dívali jako na kvadratickou rovnici s neznámou x $x^2 - kx + y^2 + ky = 0$, jejíž řešení by vypadala takto:

$$x_{1,2} = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4\left(y^2 + ky\right)}}{2} = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4ky - 4y^2}}{2}.$$

Ohlédneme-li se za úlohami kategorie A, tedy úlohami určenými pro studenty 3. a 4. ročníků středních škol, všimneme si, že kromě již běžných témat, kterými jsou rovinná geometrie a "hraní si" s čísly a zkoumání jejich vlastností, i když na vyšší úrovni, se objevila i řada novinek. Ty jsou z kapitol goniometrie, posloupností a kubických rovnic. Goniometrické funkce, jejich definiční obory, periodičnost, obory hodnot a další vlastnosti jsou náplní obvykle druhého pololetí druhého ročníku. Proto je adekvátní zařazení až právě do kategorie A. Dle mého názoru nešťastně byla vybrána jen trigonometrická 5. úloha kombinovaná s důkazem. Více sporná a diskutabilní je situace, jak již bylo naznačeno dříve, u zbývajících dvou tématických novinek. První z nich je, jak bylo rozebráno dříve u 4. úlohy, kubická rovnice. Kubická a goniometrická rovnice jsou přitom v této části jediné řešené rovnice. Posloupnosti jsou pak náplní někde třetího, většinou až začátku čtvrtého ročníku střední školy. Uvážíme-li, že kategorie A je určená i pro mladší zájemce, může být a je jejich zařazení kritizováno. Řešitel je pak odkázán na samostudium, případně na pomoc vyučujícího. Avšak pročteme-li si pozorně uvedené řešení a uvážíme-li, že nové teorie nutné k porozumění úloze, je skutečně málo, lze se zařazením na této úrovni souhlasit. Spíše než o posloupnosti se tu jedná opět o zkoumání jejích členů, to jest čísel s určitými konkretizovanými vlastnostmi. V tomto případě navíc o velmi pěkné a zajímavé.

Podívejme se nyní, jak připravily domácí úlohy řešitele na školní část.

2.3.2 Školní kolo

Úloha 1.

Najděte všechny dvojice celých čísel x a y, pro něž platí

$$\sqrt{x\sqrt{5}}-\sqrt{y\sqrt{5}}=\sqrt{6\sqrt{5}-10}\,.$$

Asi každý při řešení této úlohy nejprve celou rovnici umocní na druhou. Při tom obvykle pamatujeme na to, že provádíme neekvivalentní úpravy. V tomto případě je však při pohledu na rovnici patrné, že nutně musí být $x > y > 0$. Potom jsou následující úpravy úpravami ekvivalentními. Pokud na tuto skutečnost řešitel zapomene, je nucen provádět zkoušku řešení.

$$x\sqrt{5}-2\sqrt{5xy}+y\sqrt{5}=6\sqrt{5}-10$$

$$x-2\sqrt{xy}+y=6-2\sqrt{5}$$

Pokračuji dále v umocňování a jiných úpravách tak, abych získal jediný člen s odmocninou a ten pak osamostatnil na levé straně.

$$x+y-6=2\left(\sqrt{xy}-\sqrt{5}\right)$$

$$(x+y+6)^2=4\left(xy-2\sqrt{5xy}+5\right)$$

$$8\sqrt{5xy}=4(xy+5)-(x+y+6)^2$$

Z poslední rovnice plyne, že $\sqrt{5xy}$ je racionální číslo, tedy číslo celé, z čehož vyplývá, že $5xy$ je druhá mocnina celého nezáporného čísla, jež je dělitelné pěti. (Je-li n celé a n^2 dělitelné pěti, potom je i n dělitelné pěti.) Platí tedy, že $5xy=(5k)^2$ neboli $xy=5k^2$, kde k je nezáporné celé číslo. Nyní dosadíme do rovnice výše.

$$x+y-6=2\left(\sqrt{5k^2}-\sqrt{5}\right)$$

$$x+y-6=2(k-1)\sqrt{5}\,.$$

Zde využiji iracionality čísla $\sqrt{5}$. Aby se levá strana rovnala pravé, musí nutně být obě rovny 0. Tudíž $x+y=6$ a $k=1$, neboli $x+y=6$ a $xy=5$. S přihlédnutím k nerovnosti $x>y>0$ dostávám jediné řešení $x=5$ a $y=1$.

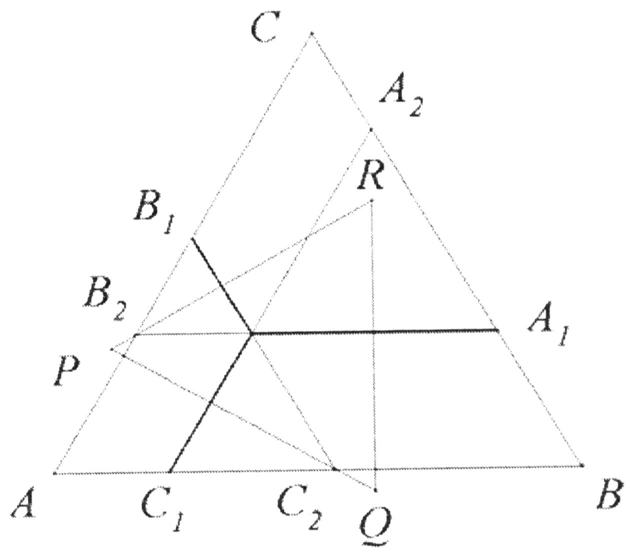
Touto poměrně snadnou úlohou, která využívá znalosti studenta získaných během prvního ročníku gymnázia, je vhodné školní kolo začínat. Dokáže studenta motivovat a dodá mu chuť do dalších úloh. Její zařazení je po absolvování domácí části soutěže spíše milým překvapením než nezdolatelným problémem.

Úloha 2.

Je dán rovnostranný trojúhelník ABC o obsahu S a jeho vnitřní bod M. Označme po řadě A_1, B_1, C_1 ty body stran BC, CA a AB, pro něž platí $MA_1 \parallel AB$, $MB_1 \parallel BC$ a $MC_1 \parallel AC$. Průsečíky os úseček MA_1, MB_1 a MC_1 tvoří vrcholy trojúhelníku o obsahu T. Dokažte, že platí S = 3T.

Označme P, Q, R vrcholy vzniklého trojúhelníku (vizte obrázek). Každá z os úseček MA_1, MB_1 a MC_1 je kolmá na odpovídající stranu trojúhelníku ABC, který je rovnostranný, proto i strany trojúhelníku PQR svírají úhel 60°, a tudíž je i tento trojúhelník rovnostranný.

Nyní ukážeme, že součet délek úseček MA_1, MB_1 a MC_1 je nezávisle na poloze bodu M roven délce strany a trojúhelníku ABC. Označme proto po řadě B_2, C_2 a A_2 průsečíky přímek MA_1, MB_1 a MC_1 se stranami CA, AB a BC. Protože jsou trojúhelníky MA_1A_2, MB_1B_2 a MC_1C_2 rovnostranné, je



obr. 25

$$|MA_1| + |MB_1| + |MC_1| = |A_1A_2| + |A_2C| + |A_1B| = |BC| = a.$$

Pro libovolný vnitřní bod rovnostranného trojúhelníku platí, že součet jeho vzdáleností od všech tří stran trojúhelníku je roven délce jeho výšky. To dokážeme například vyjádřením součtu obsahů tří trojúhelníků tvořených daným bodem a dvojicí vrcholů. Jelikož má bod M od stran trojúhelníku PQR vzdálenosti $\frac{|MA_1|}{2}$, $\frac{|MB_1|}{2}$ a $\frac{|MC_1|}{2}$, je potom jeho výška dlouhá $t = \frac{|MA_1| + |MB_1| + |MC_1|}{2} = \frac{a}{2}$. Protože můžeme výšku v rovnostranného trojúhelníku vyjádřit pomocí délky jeho strany a jako $v = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, odkud plyne $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}v$, je potom jeho obsah $S = \frac{av}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}v^2$. Totéž platí pro trojúhelník PQR s výškou délky t, můžeme tedy pro jeho obsah T psát

$$T = \frac{\sqrt{3}}{3}t^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{v}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{9}v^2 = \frac{S}{3},$$

což je to, co jsme měli dokázat.

Druhá úloha školní části soutěže je ve své kategorii další hezkou a názornou úlohou zkoumající vlastnosti jednoho z nejzákladnějších rovinných útvarů, kterým je rovnostranný trojúhelník. Zvážíme-li, že pouze za zdůvodnění, že trojúhelník PQR je rovnostranný, bylo možné získat 3 body, je její zařazení velmi vhodné. Užité vztahy jsou záležitostí prvního ročníku střední školy a neměly by již činit žádné problémy. Složité může být snad jedině nakreslení přehledného a názorného obrázku při takovém množství informací obsažených v zadání úlohy.

Úloha 3.

V oboru reálných čísel řešte rovnici $1+\sin\frac{x+\pi}{5}\sin\frac{x-\pi}{11}=0$.

Při řešení této rovnice nejspíš nenajdeme goniometrický vzorec, který bychom mohli použít na její celé řešení. V domácí úloze se ale studenti již seznámili i s jinou metodou řešení spočívající v rozboru oborů hodnot vystupujících funkcí. Tak bude nutné začít i nyní.

Prohlédneme-li si pozorně zadání, napadne nás, že rovnici řeší taková reálná x, pro která je výraz $\sin\frac{x+\pi}{5}\sin\frac{x-\pi}{11}=-1$. A jelikož oborem hodnot funkce sinus je interval $\langle -1;1\rangle$, nastává rovnost pouze v případě, kdy se jeden z činitelů rovná 1 a druhý -1. Odtud dostáváme dvě možné soustavy rovnic, kde k a l jsou celá čísla.

$$\frac{x+\pi}{5}=\frac{\pi}{2}+2k\pi \qquad \frac{x+\pi}{5}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

$$\frac{x-\pi}{11}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad \text{nebo} \quad \frac{x-\pi}{11}=\frac{\pi}{2}+2k\pi.$$

Rovnici vyřešíme a dostáváme

$$x=\frac{3\pi}{2}+10k\pi \qquad x=-\frac{7\pi}{2}+10k\pi$$

$$x=-\frac{9\pi}{2}+22k\pi \quad \text{nebo} \quad x=\frac{13\pi}{2}+22k\pi$$

Nyní hledejme dvojice čísel k a l, která rovnicím vyhovují.

$$\frac{3\pi}{2}+10k\pi=-\frac{9\pi}{2}+22k\pi \quad \text{nebo} \quad -\frac{7\pi}{2}+10k\pi=\frac{13\pi}{2}+22k\pi$$

$$5k+3=11l \qquad 5k-5=11l$$

První rovnici nyní upravíme na tvar $5(k-6)=11(l-3)$. Zde by mohl vyvstat pro některé řešitele problém, proč zvolit zrovna tento trik. Jelikož jsou čísla 5 a 11 nesoudělná, jsou všechna řešení rovnice ve tvaru $k=6+11n$ a $l=3+5n$, kde n je celé číslo. Dosazením vztahu pro hledané x dostáváme první řešení

$$x=\frac{3\pi}{2}+10k\pi=\frac{3\pi}{2}+10\pi(6+11n)=61{,}5\pi+110n\pi.$$

Stejně tak upravíme druhou rovnici na tvar $5(k-1)=11l$ .Odtud $k=1+11n$, $l=5n$, kde n je celé číslo. Dosazením do druhého vztahu pro x dostáváme druhé řešení

$$x=-\frac{7\pi}{2}+10k\pi=-\frac{7\pi}{2}+10\pi(1+11n)=6{,}5\pi+110n\pi.$$

Úlohu hodnotím jako spíše náročnou. Ani tak ne pro možnou neznalost goniometrických funkcí, ale spíše pro ne příliš zřejmé triky s rovnicemi pro čísla k a l. Avšak i bez nich lze nějaký počet bodů získat.

Při řešení se lze vydat i jinou cestou. Využít můžeme vzorec

$$\sin A.\sin B=\frac{\cos(A-B)-\cos(A+B)}{2},$$

který však není v Matematicko-fyzikálních tabulkách takto uváděn. Student si ho musí být schopen odvodit ze vztahů, které uvedeny jsou. Potom ho může na součin v zadání použít a získává rovnici

$$\cos\left(\frac{x+\pi}{5}+\frac{x-\pi}{11}\right)-\cos\left(\frac{x+\pi}{5}-\frac{x-\pi}{11}\right)=2.$$

Ani tak se ale nevyhneme úvahám o argumentech a oborech hodnot. Zde je opět třeba si uvědomit obor hodnot funkce kosinus, kterým je interval $\langle -1;1\rangle$, z čehož plynou rovnosti

$$\frac{x+\pi}{5}+\frac{x-\pi}{11}=2k\pi \text{ a } \frac{x+\pi}{5}-\frac{x-\pi}{11}=\pi+2l\pi,$$

kde k a l jsou celá čísla. Sečtením a odečtením rovnic dostáváme

$$\frac{x+\pi}{5}=\frac{\pi}{2}+(k+l)\pi \text{ a } \frac{x-\pi}{11}=-\frac{\pi}{2}+(k-l)\pi,$$

odkud vyjádříme dvojím způsobem neznámou x.

$$\frac{3\pi}{2}+5\pi(k+l)=-\frac{9\pi}{2}+11\pi(k-l),$$

což nám dává vztah pro k a l $(3k-1)=8l$, což znamená, že $l=3n$ a $k=8n+1$ pro vhodné celé číslo n. Dosazením ke vztahu pro hledané x dojdeme k řešení

$$x=\frac{13\pi}{2}+55\pi n=6{,}5\pi+55\pi n.$$

Všimli jsme si, že školní kolo kategorie A čerpá ze samozřejmých součástí soutěže, kterými jsou planimetrie, goniometrické rovnice a vyšetřování vlastností nějakých reálných čísel. Posloupnosti, ani kubická rovnice nebo trigonometrie se v něm neobjevily, což je obzvláště v případě kubické rovnice a trigonometrické úlohy podle mého názoru v soutěži, kde jde o čas, dobře.

I na tomto místě připomenu, že soutěžící měli 6. prosince 2005 na vyřešení čtyři hodiny čistého času, užívat mohli obvyklých pomůcek a za úspěšného řešitele byl považován ten, kdo z 18 možných bodů získal alespoň 10, což znamená například alespoň jeden celý a dvě třetiny nějakého druhého příkladu.

2.3.3 Krajské kolo

Úloha 1.

Najděte všechny dvojice celých čísel a, b takových, že součet a + b je kořenem rovnice $x^2+ax+b=0$.

Hledaná čísla a a b musejí po dosazení do rovnice v zadání splňovat rovnost $(a+b)^2+a(a+b)+b=a^2+2ab+b^2+a^2+ab+b=0$. Tu přepišme ještě třeba jako kvadratickou rovnici pro neznámou b ve tvaru $b^2+(3a+1)b+2a^2=0$. Ta má celočíselné řešení $b_{1,2}=\frac{-(3a+1)\pm\sqrt{(3a+1)^2-8a^2}}{2}=\frac{-(3a+1)\pm\sqrt{a^2+6a+1}}{2}$, když její diskriminant a^2+6a+1 je úplný čtverec (aby odmocnina z diskriminantu bylo celé číslo), tzn. $(a+3)^2-8$, který je ještě o osm menší než jiný úplný čtverec $(a+3)^2$. Úplné čtverce postupně rostou a rozdíl 8 mají pouze úplně čtverce 1 a 9. Proto $(a+3)^2=9$, odkud a = 0 nebo a = -6. Pro a = 0 dostávám b = 8 nebo b = 9 a pro a = -6 dostávám b = 0 nebo b = -1. Hledané dvojice (a,b) existují právě čtyři, a to $(-6,8)$, $(-6,9)$, $(0,0)$ a $(0,-1)$.

Tato úloha je na začátek vhodná, není obtížná a matematické dovednosti k jejímu řešení by student měl získat už v prvním ročníku gymnázia, a v dalších letech tak jen sbírat zkušenosti. V prvním ročníku gymnázia je ale kvadratická rovnice probírána jen s omezením na nalézání kořenů (vzorcem nebo rozkladem), případně na její sestavení (pro požadované kořeny nebo jejich vlastnosti). V jiném oboru nebo množině než v reálních číslech řešeny nebývají.

U pražských studentů dopadla úloha velmi dobře. Ze sedmnácti úspěšných řešitelů z celkem šestapadesáti účastníků tamějšího krajského kola jich osm získalo plný počet bodů za odhalení všech čtyř řešení. Jeden další student ke své smůle získal bodů jen pět, protože špatně opsal jedno číslo z mezivýpočtu. V řešeních těchto studentů se velmi často objevovaly Viètovy vzorce v kombinaci se vzorovým řešením. Uveďme například zajímavou úvahu studenta Vo Vieta:

Označme t a u kořeny rovnice $x^2+ax+b=0$, kde a a b jsou celá čísla. Potom platí $(x-t)(x-u)=0$ právě tehdy, když $x^2-(t+u)x+tu=0$. To znamená, že $-(t+u)=a$ a $tu=b$. A pokud jsou a a b celá čísla, jsou i u a t celá čísla. Dále víme, že součet a + b je kořenem, například t. Potom tedy $a+b=-(t+u)+tu=t$, neboli $2t=u(t-1)$. Dále můžeme pro t různá od 1 vydělit závorkou $t-1$. Kdyby bylo $t=1$, pak by mělo platit 2 = 0, co neplatí. Dostáváme tedy $u=\frac{2t}{t-1}=\frac{2(t-1)+2}{t-1}=2+\frac{2}{t-1}$. Má-li být u celé číslo, musí být také $\frac{2}{t-1}$ celé číslo, tudíž $t-1|2$. To znamená, že $t\in\{-1,0,2,3\}$. Potom jsou tedy vyhovujícími dvojicemi kořenů $(t;u)$ tyto dvojice celých čísel, přičemž nezáleží na pořadí, protože kořeny jsou záměnné: $(-1,1),(0,0),(2,4),(3,3)$. Ze vztahů $-(t+u)=a$ a $tu=b$ pak získám jednoduše čtyři stejné vyhovující dvojice (a,b), a to $(0,-1),(0,0),(-6,8),(-6,9)$.

A jak řešili tuto úlohu ústečtí studenti? Z jednatřiceti řešitelů v tomto kraji pouze čtyři řešili na plný počet bodů a zbytek většinou získal po dvou bodech. A to byla tato úloha jedinou, kde byl získán plný počet šesti bodů. Pouze jeden student řešil uvedeným vzorovým postupem. Často se objevovalo řešení pomocí Viètových vzorců, které nám dalo též rovnici pro b $b^2+(3a+1)b+2a^2=0$. Studenti také zkoušeli čísla a, b experimentálně dosazovat a hledané dvojice objevili.

Úloha 2.

Posloupnost reálných čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *splňuje pro každé* $n\geq 1$ *rovnost*

$$\frac{a_{n+3}-a_{n+2}}{a_n-a_{n+1}}=\frac{a_{n+3}+a_{n+2}}{a_n+a_{n+1}}$$

a navíc platí, $a_{11}=4$, $a_{22}=2$, $a_{33}=1$. *Dokažte, že pro každé přirozené číslo k je součet*

$$a_1^k+a_2^k+\ldots+a_{100}^k$$

druhou mocninou přirozeného čísla.

Nejprve se podívejme na důsledky rovnosti $\frac{a_{n+3}-a_{n+2}}{a_n-a_{n+1}}=\frac{a_{n+3}+a_{n+2}}{a_n+a_{n+1}}$. Jednak je vidět, že má smysl pouze pro $a_n\neq a_{n+1}$, což znamená, že žádné dva sousední členy se nesmějí rovnat, a $a_n\neq -a_{n+1}$, což znamená, že dva sousední členy nesmějí mít ani stejnou absolutní hodnotu. Dále pak postupnými úpravami můžeme získat

$$(a_n + a_{n+1})(a_{n+3} - a_{n+2}) = (a_n - a_{n+1})(a_{n+3} + a_{n+2})$$

$$a_n a_{n+3} - a_n a_{n+2} - a_{n+1} a_{n+2} + a_{n+1} a_{n+3} = a_n a_{n+3} + a_n a_{n+2} - a_{n+1} a_{n+2} - a_{n+1} a_{n+3}$$

$$a_{n+1} a_{n+3} = a_n a_{n+2},$$

odkud vidíme, že součin každých dvou členů, jejichž indexy se liší o dva, je stále stejný, tj.

$$a_1 a_3 = a_2 a_4 = a_3 a_5 = a_4 a_6 = \ldots = a_{99} a_{100} = \ldots,$$

z čehož ještě vyplývá, že členy, jejichž indexy se liší o čtyři, mají stejnou hodnotu, tj.

$$a_1 = a_5 = a_9 = \ldots = a_{33} = \ldots = a_{97} = 1$$

$$a_2 = a_6 = a_{10} = \ldots = a_{22} = \ldots = a_{98} = 2$$

$$a_3 = a_7 = a_{11} = \ldots = a_{99} = 4.$$

Navíc z rovnosti $a_1 a_3 = a_2 a_4$ můžeme určit

$$a_4 = a_8 = a_{12} = \ldots = a_{100} = 2.$$

Daná posloupnost je tedy již zcela konkrétní: 1, 2, 4, 2, 1, 2, 4, 2, ... , 1, 2, 4, 2. Nyní zbývá dokázat, že pro každé přirozené číslo k je součet $1^k + 2^k + 4^k + 2^k + \ldots + 1^k + 2^k + 4^k + 2^k$ druhou mocninou přirozeného čísla. Součet $1^k + 2^k + 4^k + 2^k$ se v něm vyskytuje celkem pětadvacetkrát. Tudíž hledaný součet je $25(1 + 2^k + 4^k + 2^k) = [5(1 + 2^k)]^2$, čímž je důkaz ukončen.

Tuto úlohu s posloupností hodnotím jako velmi pěknou. Je to další ukázka toho, že na první pohled třeba obtížný příklad se stane velmi jednoduchým, pokud si pečlivě rozeberu zadání a vytěžím z něj maximum. O to více nemilým překvapením bylo zhlédnutí některých studentských řešení.

V Praze z celkového počtu padesáti osmi řešitelů krajských úloh jich třináct úlohu vůbec nezačalo řešit a v sedmi případech zcela chybně interpretovali zadání a dopouštěli se chybných úvah. Naprosto šokujícím pro mě bylo zjištění, že celých sedm účastníků krajského kola, což nejsou lidově řečeno žádní "začátečníci", použilo ve svém řešení slovo diference nebo kvocient a svá řešení směřovalo na jejich zjišťování pomocí vztahů užívaných na středních školách. Negativně se tak na nich projevil zřejmě učitelův výrok "...posloupnosti známe aritmetické nebo geometrické..." nebo jejich vlastní samostudium posloupností. Oproti tomu naopak deset studentů došlo k hledanému cíli, dokonce patnáct z nich objevilo klíčový součin $a_{n+1} a_{n+3} = a_n a_{n+2}$ a z nich jedenáct určilo zcela konkrétně, jak vypadají členy této uvažované posloupnosti.. Kupodivu pouze jeden soutěžící dosáhl v Praze plného počtu 6 bodů. Bodové ztráty ostatních soutěžících byly způsobeny zejména nekorektním a neúplným zdůvodněním. Průměrný zisk činil pouze 1,6 bodu, což způsobilo až 27 nul.

V Ústeckém kraji sice řešitelé také nějaké body získali, ale nebylo to mnoho. Ze třicítky studentů jich polovina řešit ani nezačala a odevzdala prázdné papíry. Dalších devět zcela chybně interpretovalo zadání a počítalo nějaké další koeficienty bez ohledu na zadanou rovnost, například opět pomocí kvocientu, i když se v zadání o geometrické posloupnosti vůbec nehovoří. Šest řešících došlo k poznatku, že posloupnost je periodická. Čtyři z nich však již dále neřešili a jenom dva dokazovali, že zadaný součet je druhou mocninou přirozeného čísla. Bohužel chybně. Jediný student toto dokázal jako v řešení uvedeném výše, avšak ani on nezískal plný počet šesti bodů. Kvůli neúplnému důkazu periodicity posloupnosti mu byly uděleny pouze dva body. Z některých odevzdaných prací je též patrné, že studenti nejsou k důkazům vedeni a že se neumějí vyjadřovat a formulovat přesně své myšlenky. Proto v jejich pracích nalezneme často formulace jako: "Když dosadíme za k jakékoliv kladné číslo, předpoklad nevyjde" nebo "Pevně věřím, že to platí."

Úloha 3.

Je dán trojúhelník ABC a uvnitř něho bod P. Označme X průsečík přímky AP se stranou BC a Y průsečík přímky BP se stranou AC. Dokažte, že čtyřúhelník ABXY je tětivový, právě když druhý průsečík (různý od bodu C) kružnic opsaných trojúhelníkům ACX a BCY leží na přímce CP.

"Geometrická úloha je vždy těžká," říká se a v tomto případě to může opravdu tak vypadat. K jejímu řešení však není zapotřebí ničeho jiného než dobrých znalostí vlastností tětivových čtyřúhelníků nebo ještě lépe mocnosti bodu ke kružnici. To je látka již konce prvního ročníku gymnázia, i když v případě mocnosti bodu ke kružnici jde o učivo rozšiřující. Ze zkušenosti však víme, že planimetrii je věnována jen krátká závěrečná část prvního školního roku, a těmto problémům nebývá tak věnována náležitá pozornost. Proto například v Ústeckém kraji ze všech řešitelů nezískal ani jeden z nich jediný bod. Většina z nich se o řešení ani nepokusila, čtyři se pak omezili jen na rovnostranné trojúhelníky a řešili konstrukčně.

Vzorové řešení ale vypadá velmi stručně. Obě implikace se dokazují zároveň. Body A, B, X, Y leží na kružnici právě tehdy, když

$$|PA|.|PX| = |PB|.|PY|.$$

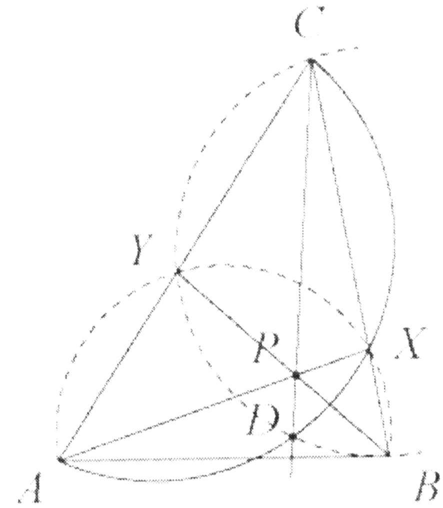
Kružnice opsaná trojúhelníku ACX protne polopřímku opačnou k polopřímce PC v bodě, který označíme D. Pro tento bod platí

$$|PA|.|PX| = |PC|.|PD|.$$

Leží-li bod D na kružnici opsané trojúhelníku BCY, tzn. je-li druhým průsečíkem kružnic opsaných trojúhelníkům ACX a BCY, tehdy a jen tehdy pak platí rovnost

$$|PB|.|PY| = |PC|.|PD|.$$

Tím je důkaz hotov.



obr. 26

Jak již bylo řečeno, lze využít i mocnosti bodu ke kružnici. Množina všech bodů, které mají stejnou mocnost ke dvěma daným kružnicím je vždy přímka, tzv. chordála, jež je kolmá na střednou obou kružnic a prochází společnými body těchto kružnic (pokud existují). Rovnost $|PA|.|PX| = |PB|.|PY|$ vyjadřuje tedy i to, že bod P leží na chordále kružnic opsaných trojúhelníkům ACX a BCY.

A pro Pražany to skutečně těžká úloha byla. Ze všech šestapadesáti soutěžících v Praze pouze jeden jediný Huang Ho Viet získal plný počet šesti bodu. Mezi patnácti úspěšnými řešiteli pak pouze další dva získali nenulový počet bodů, tj. 4.

Úloha 4.

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\sin^2 x + \cos^2 y = y^2$$
$$\sin^2 y + \cos^2 x = x^2.$$

Jedná se o dost netradiční soustavu goniometrických rovnic, které se na středních školách obvykle běžně neřeší. Postupujme však standardní sčítací metodou. Uvědomme si však nejprve, že s každou dvojicí čísel (x, y) řešící soustavu ji řeší i dvojice $(-x, y)$,

$(x,-y)$ a $(-x,-y)$, ale i (y,x). To plyne z vystupujících druhých mocnin a z patrné možné záměny neznámých x a y. Navíc předpokládejme například $0 \le x \le y$. Nejprve obě rovnice sečtěme a potom například funkci kosinus vyjádřeme známým vztahem jako sinus druhou rovnici odečtěme od první. Dostáváme

$$x^2 + y^2 = 2$$

$$2\sin^2 x - 2\sin^2 y = y^2 - x^2.$$

Druhou rovnici ještě můžeme přepsat do tvaru

$$2(\sin x + \sin y)(\sin x - \sin y) = y^2 - x^2.$$

Podmínku $0 \le x \le y$ nyní můžeme ještě rozšířit na $0 \le x \le y \le \sqrt{2} \le \frac{\pi}{2}$. Řešení soustavy nyní určíme už z poslední rovnice. Pro výše uvedená x a y je sinus funkce rostoucí. To znamená, že člen $\sin x - \sin y$ je nekladný. Levá strana rovnice je tedy nekladná a pravá nezáporná. Z čehož plyne $x = y = 1$. Kromě dvojice čísel $(1,1)$ však soustavu řeší i dvojice $(-1,1)$, $(1,-1)$ a $(-1,-1)$, jak bylo vysvětleno dříve.

Nyní uvedu ještě zajímavé řešení jednoho úspěšného pražského řešitele: Omezme se nejprve na x a y z intervalu $\langle 0;\sqrt{2}\rangle$. Předpokládejme, že

a) $x > y$: V takovém případě je $\sin x > \sin y$ a $\cos x < \cos y$. To znamená po umocnění (všechna čísla jsou nezáporná), že $\sin^2 x + \cos^2 y > \sin^2 y + \cos^2 x$, neboli $y^2 > x^2$, což na zvoleném intervalu znamená $y > x$, a to je spor s předpokladem. Zkusme tedy možnost

b) $x < y$: Potom je $\sin x < \sin y$ a $\cos x > \cos y$. To na našem intervalu znamená, že $\sin^2 x + \cos^2 y < \sin^2 y + \cos^2 x$, neboli $y^2 < x^2$, tj. $y < x$, což vede opět ke sporu.

Pokud tedy hledaná čísla x a y existují, jsou si rovna. Soustavu pak můžeme nahradit jedinou rovnicí

$$\sin^2 x + \cos^2 x = x.$$

Jelikož je levá strana pro všechna reálná x rovna jedné, musí být tedy $x = y = 1$. Protože jsou všechny v soustavě vystupující funkce sudé, jsou ke každému řešení ve tvaru $(a;b)$ řešeními i uspořádané dvojice $(a,b), (a,b), (a,b)$. Dostáváme tak opět čtyři výše uvedená řešení soustavy.

Z patnácti úspěšných řešeitelů krajské úrovně kategorie A pouze čtyři získali za řešení této úlohy šest bodů. (Mezi zbývajícími řešiteli to byli dva.) Byla tak podle studentů druhou nejjednodušší. Studentská řešení se nesou z převážné části v duchu výše uvedených postupů s vetši či menší úrovní důkazů užitých tvrzení. Řada z nich zůstala jen na intuitivní úrovni, což se promítlo v bodovém ohodnocení.

Podívejme se nyní podrobněji, jak úlohu řešili soutěžící v Ústeckém kraji. Plný počet bodů, tj. 6, nezískal nikdo. Maximální počet dosažených bodů byly 2. Alespoň bod získala zhruba pouze polovina řešitelů. Většinou byli schopni pouze rovnice sečíst, dostali $x^2 + y^2 = 2$, ale na druhou rovnici do soustavy většinou pozapomněli. Pokud nezapomněli, nebyli schopni ji nějak interpretovat a řešit. Většina jen z rovnice $x^2 + y^2 = 2$ a z možné záměny x a y usoudila, že $|x| = |y| = 1$. Je obtížné určit, proč byli ústečtí studenti tak málo úspěšní. Soustavy rovnic se na gymnáziích řeší v prvním ročníku, goniometrie je látkou ročníku druhého, i když pravdou je, že soustavy goniometrických rovnic řešeny nebývají.

V Praze byla situace o poznání lepší a překvapivě tato úloha dopadla lépe než třeba ta s číslem 2 o posloupnosti. Z 58 řešitelů dosáhlo až 10 z nich počtu šesti bodů a jen osm z nich nezískalo bod žádný. Správná řešení byla takřka stejná, problémy způsobovaly úvahy, které měly následovat po sestavení nových rovnic výše. Podle toho, kam až řešitel dospěl, byl následovně ohodnocen.

24. ledna 2006 se ve čtyřech úlohách krajského kola kategorie A tedy setkali jeho řešitelé s neodmyslitelnou úlohou z geometrie, goniometrickými funkcemi (tentokrát v netradiční soustavě), úlohou zkoumající kvadratickou rovnici a s posloupností. Ta byla stejně jako v domácí části prvního kola nepříliš závislá na znalostech z oboru. Kladně hodnotím i nepřítomnost kubické rovnice z kola domácího.

Na krajské úrovni kategorie zcela určitě zazářil opět kraj Jihomoravský, konkrétně známé brněnské gymnázium na třídě Kapitána Jaroše, ze kterého se celkem 17 soutěžících probojovalo mezi jednadvacet úspěšných řešitelů z celkového počtu 90. Nejvyšší počet bodů 22 získal Jakub Opršal z téhož gymnázia. V této skupině úspěšných se největší oblibě těšila úloha první, tj. ta zkoumající kořen kvadratické rovnice. Průměrné bodové ohodnocení této úlohy mezi úspěšnými řešiteli bylo 5,5 bodů. Na druhém místě je se 3,3 bodu zajímavá úloha s posloupností. Velmi zajímavý je pohled na výsledkovou listinu kategorie A v Praze, na jejímž vrcholu stojí stejně jako v kategorii B Huang Vo Viet z gymnázia Na Vítězné Pláni se ziskem 18 bodů. I tam byla nejúspěšněji řešená kvadratická úloha a poté posloupnost. V kraji Plzeňském získali pouze jednoho úspěšného řešitele ze 17 zúčastněných, a to ještě s těsným desetibodovým výsledkem. Byl jím Tomáš Jirotka. Kvadratický problém byl i zde tím nejlépe zvládnutým, jinak byly zisky velmi špatné. Ještě horší byla situace v kraji Ústeckém, kde nejlepší řešitel Daniel Šimsa získal pouhých 8 bodů, a tím pádem se nestal ani úspěšným řešitelem.

Z řad úspěšných řešitelů, tj. těch, kteří získali alespoň 10 bodů z tentokrát 24 možných, byli ti nejlepší z celé republiky pozváni k účasti v celostátním ústředním kole.

2.3.4 Celostátní kolo

Finálové kolo 55. ročníku Matematické olympiády se konalo ve dnech 26. až 29. března 2006 na půdě Gymnázia J. Jungmanna v Litoměřicích. Zúčastnilo se ho celkem jednačtyřicet mladých matematiků z celé České republiky. Nevíce byl zastoupen kraj Jihomoravský, konkrétně městem Brno. Soutěžící měli za úkol vyřešit následujících šest úloh, každý den tři po sedmi bodech.

Úloha 1.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *přirozených čísel má tu vlastnost, že pro každé* $n \geq 1$ *platí* $a_{n+1} = a_n + b_n$, *kde* b_n *je číslo, které má opačné pořadí číslic (zápis čísla* b_n *může narozdíl od zápisu čísla* a_n *začínat jednou nebo více nulami). Například pro* $a_1 = 170$ *je* $a_2 = 241$, $a_3 = 383$, $a_4 = 766$, ... *Rozhodněte, zda* a_7 *může být prvočíslo.*

U těchto velice náročných úloh uvedu jen autorská řešení.

Začněme důkazem, že člen a_7 je vždy číslo dělitelné jedenácti. Je-li zápis nějakého přirozeného čísla m v desítkové soustavě $\overline{c_k c_{k-1} \dots c_1 c_0}$, dává pak toto číslo m při dělení jedenácti stejný zbytek jako střídavý součet jeho číslic

$$\text{zb}(m) = c_0 - c_1 + c_2 - \dots + (-1)^k c_0.$$

Protože má číslo b_n stejné číslice jako číslo a_n, akorát v opačném pořadí, bude určitě platit vztah

$$\mathrm{zb}(a_n) = \pm \mathrm{zb}(b_n),$$

přičemž o znaménku rozhodne to, zda je počet číslic a_n lichý nebo sudý. Odtud plyne, že je-li nějaký člen naší posloupnosti dělitelný jedenácti, je jedenácti dělitelný už každý následující. Navíc je vidět, že pokud má už nějaký člen a_n sudý počet číslic, platí $\mathrm{zb}(a_n) = -\mathrm{zb}(b_n)$, tudíž je už $a_{n+1} = a_n + b_n$ číslo dělitelné jedenácti.

Uvažovaná posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je zřejmě rostoucí. Zbývá dokázat, že mezi prvními šesti členy posloupnosti je vždy alespoň jeden se sudým počtem číslic. Tím pádem by každý další člen byl dělitelný jedenácti a nemohl být tudíž prvočíslem. Postupujme sporem.

Předpokládejme naopak, že všechna čísla a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 mají lichý počet číslic. Označme $c \in \{1, 2, ..., 9\}$ první a $d \in \{0, 1, ..., 9\}$ poslední číslici v desítkové zápisu a_n. Zápis čísla b_n pak bude začínat naopak číslem d a končit číslem c. Podle předpokladu má tedy číslo $a_2 = a_1 + b_1$ rovněž lichý, tj. dokonce stejný, protože není možné, aby bylo výsledkem sčítání číslo o dva řády vyšší než a_1, proto musí být $c + d < 10$. To je totiž číslice na jeho posledním místě. Na prvním místě pak bude číslice c +d nebo $c + d + 1$ podle toho, zda došlo na místě před ke sčítání přes desítku. Opakujme postup i dále. Na prvním místě čísla $a_3 = a_2 + b_2$ bude stát číslice alespoň $2.(c + d)$, na prvním místě čísla $a_4 = a_3 + b_3$ to bude číslice nejméně $4.(c + d)$, v případě pátého členu $a_5 = a_4 + b_4$ to nebude méně než $8.(c + d)$ a konečně v případě $a_6 = a_5 + b_5$ bude na prvním místě stát číslice dokonce $16.(c + d)$. Protože však $1 \le c + d \le 9$, nemůže už platit $16.(c + d) \le 9$. To znamená, že alespoň v jednom z čísel a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 se musí nutně počet číslic zvýšit a změnit tak z lichého na sudý. Tím je řešení u konce.

Tento typ úlohy patří opravdu k těm těžkým, vhodným snad jen právě do těchto posledních kol nejvyšší kategorie soutěže. Opět se ale opírá jen o zcela základní početní operace s malými čísly, ale vychází z vůbec ne zřejmého místa, kterým jsou vlastnosti čísel dělitelných jedenácti. Předpokládá naprosto perfektní znalost elementárních znaků dělitelnosti v širších souvislostech a důsledcích. Vyšetřování podobných posloupností v předchozích kolech jsou zajisté velmi užitečná. Přínos tohoto příkladu spatřuji rovněž v ukázce krás matematiky při podrobném studování vzorového řešení.

Úloha 2.

Nechť m a n jsou přirozená čísla taková, že rovnice

$$(x + m)(x + n) = x + m + n$$

má aspoň jedno celočíselné řešení. Dokažte, že platí

$$\frac{1}{2} < \frac{m}{n} < 2.$$

Upravme rovnici nejprve převedením členu $x + n$ na levou stranu. Rovnice pak má tvar

$$(x + m - 1)(x + n) = m.$$

Nyní je vidět, že pouze je-li x celé číslo, dostáváme na levé straně rozklad čísla m na součin dvou celých čísel. Ta musejí obě ležet nutně v množině $\{1, 2, ..., m\}$, nebo obě v množině $\{-m, -m+1, ..., -1\}$. Rozdíl těchto dvou čísel však nepřevyšuje $m - 1$.

$$(x+n)-(x+m-1)\le m-1$$
$$n-m+1\le m-1$$
$$n\le 2m-2,$$

kde již vidíme odhad zkoumaného podílu $\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\le\frac{m}{n}$, tím spíš $\frac{1}{2}\le\frac{m}{n}$. Protože jsou však čísla m a n v zadání úlohy záměnná, můžeme napsat i $m\le 2n-2$, odkud dostáváme $\frac{m}{n}\le 2-\frac{2}{n}$, tím spíš $\frac{m}{n}\le 2$. Shrneme-li oba odhady, dostáváme dokazovanou nerovnost

$$\frac{1}{2}<\frac{m}{n}<2.$$

Nebo též můžeme zkoumat diskriminant dané kvadratické rovnice, kterou si za tím účelem upravíme na tvar

$$x^2+(m+n-1)x+mn-m-n=0.$$

Její diskriminant má tvar

$$D=(m+n-1)^2-4(mn-m-n)=m^2+n^2-2mn+2m+2n+1=(m-n+1)^2+4n.$$

Aby řešení $x_{1,2}=\dfrac{-(m+n-1)\pm\sqrt{D}}{2}$ dané rovnice bylo celočíselné, musí být tento diskriminant druhou mocninou celého čísla. Protože $4n$ je kladné sudé číslo, je D větší než $(m-n+1)^2$ a má také stejnou paritu jako číslo $m-n+1$, které je taky kladné, protože uvažujeme $m\ge n$. Proto musí platit $D=k^2$, kde k je nějaké celé číslo splňující podmínku $k\ge m-n+3$, tudíž platí

$$D=(m-n+1)^2+4n=k^2\ge(m-n+3)^2=(m-n+1+2)^2=(m-n+1)^2+4(m-n+1)+4.$$

Odtud plyne nerovnost $4n\ge 4(m-n+1)+4$, neboli $m\le 2n-2$, což jsme měli dokázat. Obdobně bychom získali $n\le 2m-2$, čímž je úloha vyřešena.

Úloha 3.

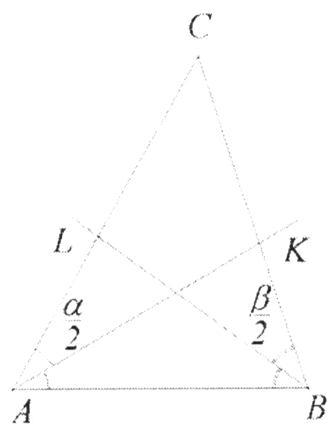
V trojúhelníku ABC, který není rovnostranný, označme K průsečík osy vnitřního úhlu BAC se stranou BC a L průsečík osy vnitřního úhlu ABC se stranou AC. Dále označme S střed kružnice vepsané, O střed kružnice opsané a V průsečík výšek trojúhelníku ABC. Dokažte, že následující tvrzení jsou ekvivalentní:

a) Přímka KL se dotýká kružnic opsaných trojúhelníkům ALS, BVS a BKS.

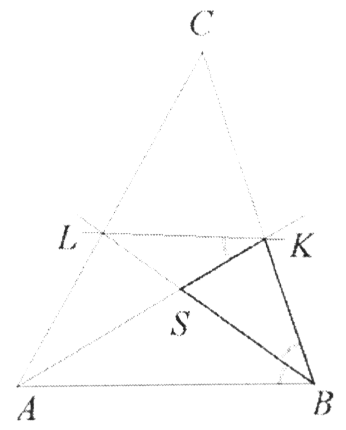
b) Body A, B, K, L a O leží na jedné kružnici.

Označme v daném trojúhelníku nejprve obvyklým způsobem velikosti jeho vnitřních úhlů α,β,γ. A poté začněme nejprve vyšetřováním druhého tvrzení. Body A, B, K, L leží na kružnici právě tehdy, když $|\angle KAL|=|\angle KBL|$, tj. když $\alpha=\beta$, protože to jsou oba obvodové úhly nad tětivou KL. Bod O na chvíli opomeňme.

Zabývejme se nyní prvním tvrzením. Přímka KL se dotýká kružnice opsané trojúhelníku BKS nutně v bodě K, a to právě tehdy, když úsekový a obvodový úhel příslušící tětivě SK mají stejnou velikost, tj. $|\angle LKA|=|\angle LBK|=|\angle LBA|$, přičemž právě toto je nutná a postačující podmínka pro to, aby body A, B, K, L leželi na kružnici, což nastává, jak bylo řečeno výše, pro $\alpha=\beta$. Stejně tak můžeme postupovat v případě kružnice opsané trojúhelníku ALS, která se tedy dotýká podle stejných úvah přímky KL právě tehdy, když $\alpha=\beta$.

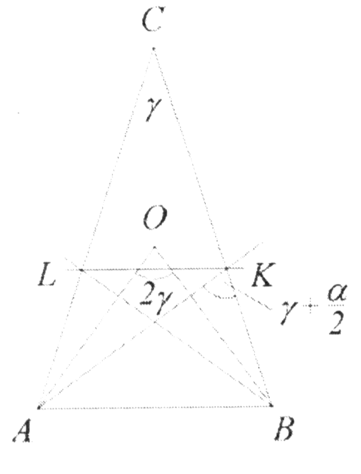


obr. 27

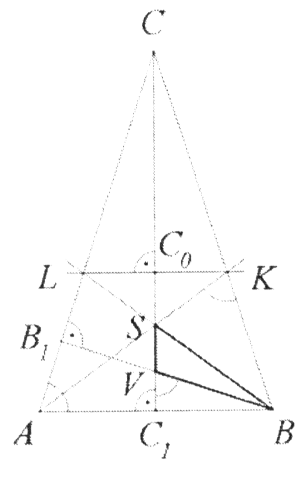


obr. 28

Další úvahy tedy můžeme omezit pouze na rovnoramenné trojúhelníky ABC se základnou AB a vraťme se ještě jednou k druhému tvrzení a zkoumejme, kdy leží bod O na kružnici opsané čtyřúhelníku $ABKL$. Středový úhel AOB v kružnici opsané trojúhelníku ABC má velikost $\frac{\gamma}{2}$. Úhel AKB má velikost $180° - \frac{\alpha}{2} - \beta = \frac{\alpha}{2} + \gamma$. Bod O nemůže ležet ani na straně AB, kdy by bylo $\gamma = 90°$, ani v polorovině opačné k ABC, protože v tom případě by vyšlo $|\angle AOB| + |\angle AKB| = (360° - 2\gamma) + \left(\frac{\alpha}{2} + \gamma\right) = 180° + \frac{3}{2}\alpha + \beta > 180°$. Body A, B, K, L, O tak leží na kružnici právě tehdy, když $2\gamma = \frac{1}{2}\alpha + \gamma$, neboli $\alpha = \beta = 2\gamma$, tj. $\alpha = \beta = 72°$ a $\gamma = 36°$.



obr. 29



obr. 30

Zbývá tedy objevit, kdy se přímky KL dotýká kružnice opsaná trojúhelníku BVS. V polorovině KLB existují dvě kružnice obsahující body B a S, které se dotýkají přímky KL. Jedná se o Apolloniovu úlohu; pro bod dotyku T z mocnosti bodu L k takové kružnici platí $|LT|^2 = |LS|.|LB|$. Jednou takovou kružnicí je již zmíněná kružnice opsaná trojúhelníku BKS, jež se přímky KL dotýká v bodě K. Druhá kružnice se tedy dotýká přímky KL v bodě K', který je souměrně sdružený s bodem K ve středové souměrnosti se středem v bodě L. Má-li tato kružnice opsaná trojúhelníku BVS ležet v polorovině KLB, musí v ní ležet i bod V, který pak musí být vnitřním bodem úsečky C_0C_1, která leží na ose úsečky AB. Úhel SBV má velikost nanejvýš $\frac{\beta}{2}$, je tedy ostrý a střed hledané kružnice leží v polorovině C_0C_1B a leží v ní i jeho kolmý průmět na přímku KL. Kružnice se tak dotýká přímky KL tedy jedině v případě, že se jedná o kružnici opsanou trojúhelníku BKS, neboli když body B, K, S, V

leží na kružnici. To nastane právě tehdy, když $|\angle C_1VB| = |\angle SKB|$. Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků ABB_1 a BVC_1 vyplývá $|\angle C_1VB| = \alpha$. Rovnost $|\angle C_1VB| = |\angle SKB|$ tedy nastává právě tehdy, když $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + \gamma$, neboli $\alpha = \beta = 72°$ a $\gamma = 36°$.

Dokázali jsme tedy, že obě zkoumaná tvrzení jsou ekvivalentní, obě jsou právě pro rovnoramenný trojúhelník, jehož vnitřní úhly splňují podmínku $\alpha = \beta = 72°$ a $\gamma = 36°$.

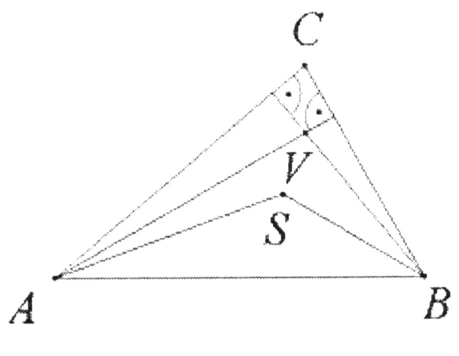
Právě vyřešená úloha je dalším hezkým příkladem, jak se pouze na základě jednoduchých a základních znalostí z rovinné geometrie dá vybudovat na první pohled těžká a nepřehledná úloha. Všechny poznatky jsou zahrnuty v povinné nebo rozšiřující látce pro první ročník. Jejich prohlubováním a rozšiřováním se určitě student zajímající se o olympiádu určitě věnuje. Základem úspěchu je vytažení potřebných informací z textu, uvědomění si jejich souvislostí, umět je správně interpretovat a nakreslit si účelný obrázek. Jako těžší hodnotím až závěrečnou část týkající se kružnice opsané trojúhelníku BVS.

Úloha 4.

V rovině je dána přímka AB. Sestrojte množinu těžišť všech ostroúhlých trojúhelníků ABC, pro něž platí: Vrcholy A a B, průsečík výšek V a střed S kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží na jedné kružnici.

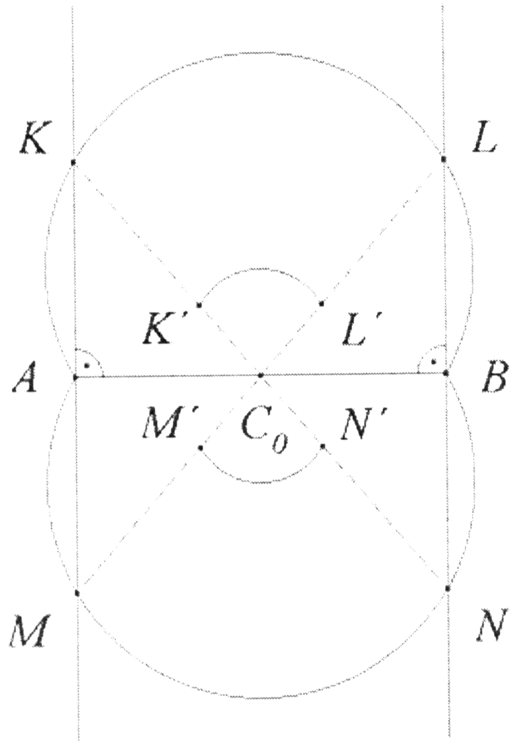
Označme velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC obvyklým způsobem α, β, γ. Protože je trojúhelník ABC, leží body V a S v jeho vnitřku. Potom platí:

$$|\angle AVB| = 180° - \gamma \quad \text{a} \quad |\angle ASB| = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 90° + \frac{\gamma}{2}.$$



obr. 31

Aby body A, B, S, V leželi na jedné kružnici, musí být, jak již bylo několikrát v minulých úlohách řečeno, $|\angle AVB| = |\angle ASB|$, neboli právě tehdy, když $\gamma = 60°$. Tím jsme specifikovali trojúhelník ABC mnohem konkrétněji. Vrchol C tak musí ležet na jednom ze dvou kružnicových oblouků, ze kterých je vidět úsečku AB pod úhlem 60°. A nejen to, navíc musí ležet uvnitř pásu vymezeného kolmicemi k úsečce AB procházejícími body A, B. Vrchol C tak leží na kružnicovém oblouku KL, nebo MN, jak je vidět na obrázku.



obr. 32

Rozmysleme si nyní, jaké vlastnosti má těžiště takového trojúhelníku. Víme, že těžiště dělí těžnici na dvě úsečky, jejichž délky jsou v poměru 1:2. Označme C_0 střed úsečky AB. Těžiště T je pak obrazem bodu C ve stejnolehlosti se středem v bodě C_0 a koeficientem $\frac{1}{3}$. Protože vrchol C leží na výše zmíněných kružnicových obloucích, leží těžiště T na obrazech $K'L'$, nebo $M'N'$ těchto oblouků ve zmíněné stejnolehlosti.

Stejnolehlost, jak víme, je zobrazení vzájemně jednoznačné, proto každý bod oblouků $K'L'$ a $M'N'$ má požadovanou vlastnost, tj. je těžištěm ostroúhlého trojúhelníku ABC s úhlem o velikosti 60° při vrcholu C, jehož průsečík výšek a střed kružnice jemu vepsané leží na jedné kružnici.

Tato úloha je dalším příkladem velmi jednoduché úlohy, jejíž řešení se zakládá pouze na precizních znalostech základních poznatků o rovinných útvarech. Opět využíváme toho, že obvodové úhly příslušící jedné a též tečně jsou shodné. Využití stejnolehlosti je pak taktéž velmi zřejmé a triviální.

Úloha 5.

Najděte všechny dvojice navzájem různých prvočísel p, q, r splňujících následující podmínky:

$$p \mid q + r,$$

$$q \mid r + 2p,$$

$$r \mid p + 3q.$$

Uvedená úloha je hezkým příkladem na hraní si s prvočísly a využívání faktu, že je-li nějaké prvočíslo dělitelné číslem třeba k různým od jedné, pak je ono samo tím číslem k.

Postupujme podle toho, které z oněch tří hledaných prvočísel je největší.

a) Nechť je největším prvočíslo p. Z podmínky $p|q+r$ a z nerovnosti $q+r<2p$ vyplývá, že $q+r=p$. Dále víme, že $q|r+2p=3r+2q$, tudíž musí $q|3r$, znamená, že $q=3$. Protože tedy $p=r+3$ a $r|p+3q=p+9=r+12$, neboli $r|12$, je potom, aby byla prvočísla různá, $r=2$ a následovně $p=5$. Získali jsme $(p,q,r)=(5,3,2)$.

b) Nechť je největší prvočíslo q. Z podmínky $q|r+2p$ a z nerovnosti $r+2p<3q$ vyplývá, že $r+2p=q$, nebo $r+2p=2q$.

Platí-li, že $r+2p=2q$, pak musí být r sudé, tj. $r=2$. Pak tedy $2q=2+2p$, neboli $q=1+p$, což pro prvočísla větší než 2 nemůže nastat.

Platí-li, že $r+2p=q$, pak tedy $p|q+r=2p+2r$, neboli $p|2r$, tudíž $p=2$. Protože $r|p+3q=3r+7p=3r+14$, neboli $r|14$, je potom $r=7$ a následovně $q=11$. Získali jsme $(p,q,r)=(2,11,7)$.

c) Nechť je největší prvočíslo r. Z podmínky $r|p+3q$ a z nerovnosti $p+3q<4r$ plyne, že je buď $p+3q=r$, $p+3q=2r$, nebo $p+3q=3r$.

Kdyby bylo $p+3q=3r$, bylo by $p=3(r-q)$. To by znamenalo $p=3$ a $r-q=1$, což by mohlo nastat pouze pro $r=3$ a $q=2$. To ale nevyhovuje zadání, neboť nalezená prvočísla nejsou různá.

Kdyby bylo $p+3q=2r$, dostali bychom $p|2(q+r)=p+5q$, tudíž $p|5q$, tj. $p=5$. Dále pak víme, že $q|2(r+2p)=2r+20=3q+25$, tudíž také $q=5$, což opět nevyhovuje zadání.

Kdyby konečně bylo $p+3q=r$, dostáváme $p|p+4q$, tudíž $p|4q$, tzn. $p=2$. Dále pak víme, že $q|r+2p=3q+6$, tedy $q|6$, což znamená, že $q=3$. Potom $r=p+3q=2+3.3=11$. Získali jsme tak další trojici $(p,q,r)=(2,3,11)$.

Úloha má tedy tři řešení, jsou jimi uspořádané trojice prvočísel $(5,3,2)$, $(2,11,7)$ a $(2,3,11)$.

Úloha 6.

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\mathrm{tg}^2 x + 2\mathrm{cotg}^2 2y = 1$$
$$\mathrm{tg}^2 y + 2\mathrm{cotg}^2 2x = 1$$
$$\mathrm{tg}^2 z + 2\mathrm{cotg}^2 2z = 1.$$

Přepišme nejprve funkci dvojnásobného argumentu jako

$$2\mathrm{cotg}^2 2\varphi = 2\left(\frac{\cos 2\varphi}{\sin 2\varphi}\right)^2 = 2\left(\frac{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}{2\sin\varphi\cos\varphi}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tg}^2\varphi + \mathrm{cotg}^2\varphi - 2\right).$$

Poté lze naši soustavu přepsat do tvaru

$$\mathrm{tg}^2 x + \frac{1}{2}\left(\mathrm{tg}^2 y + \mathrm{cotg}^2 y\right) = 2$$
$$\mathrm{tg}^2 y + \frac{1}{2}\left(\mathrm{tg}^2 z + \mathrm{cotg}^2 z\right) = 2$$
$$\mathrm{tg}^2 z + \frac{1}{2}\left(\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{cotg}^2 x\right) = 2.$$

Pro snadnější práci zaveďme nyní substituci $a = \mathrm{tg}^2 x$, $b = \mathrm{tg}^2 y$ a $c = \mathrm{tg}^2 z$ a využitím známého vztahu mezi funkcemi tangens a kotangens přepišme soustavu do tvaru

$$a + \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b}\right) = 2$$

$$b + \frac{1}{2}\left(c + \frac{1}{c}\right) = 2$$

$$c + \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) = 2.$$

Předpokládejme, že například platí $c \le b \le a$. Potom z posledního zápisu soustavy vyplývá i

$$b + \frac{1}{b} \le c + \frac{1}{c} + a + \frac{1}{a}.$$

Protože dále víme, že pro každé kladné u platí $u + \frac{1}{u} \ge 2$, vyplývá ze soustavy výše i nerovnost $0 < a, b, c \le 1$. Funkce $f(x) = x + \frac{1}{x}$ je na intervalu $\langle 0;1 \rangle$ klesající, dostáváme tak pro $c \le b \le a$ další nerovnost

$$a + \frac{1}{a} \le b + \frac{1}{b} \le c + \frac{1}{c}.$$

Ta zároveň s předchozími nerovnostmi může nastat právě tehdy, platí-li $a = b = c$. Stačí tedy jen najít takové u, které vyhovuje rovnici

$$u + \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right) = 2.$$

Upravme ji a rozložme na součin lineárních dvojčlenů.

$$3u + \frac{1}{u} = 4$$

$$3u^2 - 4u + 1 = 0$$

$$(3u - 1)(u - 1) = 0.$$

Vidíme, že kořeny rovnice jsou $u_1 = 1$ a $u_2 = \frac{1}{3}$. Nyní se jen zbývá vrátit k užitým substitucím a vyjádřit zpětně hledaná x, y a z. Pro $u_1 = 1$ dostáváme $\left(\frac{\pi}{4} + k_1 \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4} + k_2 \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4} + k_2 \frac{\pi}{2}\right)$ a pro $u_2 = \frac{1}{3}$ pak $\left(\pm\frac{\pi}{6} + k_1\pi; \pm\frac{\pi}{6} + k_2\pi; \pm\frac{\pi}{6} + k_2\pi\right)$, kde k_1, k_2 a k_3 jsou libovolná celá čísla a znaménka v druhé závorce jsou vybrána libovolně a navzájem nezávisle.

Ve srovnání s jinými početními úlohami celostátního kola hodnotím tuto jako hezkou a zvládnutelnou patrně i v nižších kolech. Na začátku řešení není třeba objevit žádný trik a je možné vydat se tak zřejmou cestou. Ani další úpravy a úvahy nejsou nikterak těžké. Možná proto byla tato soustava zvolena až na samý závěr soutěže.

Po zhlédnutí úloh závěrečného kola soutěže zjistíme, že všechna témata byla důkladně probrána v kolech předchozích; není nutné je ani znova vypisovat. Zajímavý však je naopak výpis témat, která se v soutěži vůbec neobjevila. Z velmi rozšířené geometrie, bez které si nedovedeme olympiádu ani představit, to byla vždy pouze úloha z roviny.

Přičemž nikdy nešlo o úlohy konstrukční. Ani stereometrie, ani geometrie analytická v ní nejsou zastoupeny. V případě prostorové geometrie se domnívám, že to souvisí s problematikou náčrtků a geometrické představivosti, které by řešení až příliš komplikovaly. Z prvního ročníku pak zůstala překvapivě zcela nevyužita kapitola výroků a výrokových forem. Té je ale zřejmě věnována pozornost v olympiádě informatické. Funkce jako takové, které tvoří majoritní výplň druhého ročníku gymnázií, nebo konkrétně třeba exponenciála nebo logaritmus též nejsou zahrnuty. Pokud tomu ale v minulosti tak bylo, jednalo se o úlohy nadprůměrně obtížné. Vypuštění takových témat, jakými jsou statistika, komplexní čísla, nebo celý úvod do tzv. vyšší matematiky, je ale zcela zřejmé a nutné.

Když se podíváme blíže na to, jak si s úlohami celostátního kola poradilo čtyřicet jedna soutěžících, zjistíme, že žádná z úloh nevybočuje průměrným bodovým ziskem z celkového průměru bodových zisků, který je při 13,2 bodu z 42,0 možných na jednoho řešitele 1,9 bodu z 7,0 možných na úlohu. Vítězi se stalo nejlepších deset řešitelů, jejichž celková skóre se pohybují od osmnácti bodů výš, přičemž absolutně nejúspěšnějším řešitelem je Jaromír Kuben z brněnského gymnázia na třídě Kapitána Jaroše se ziskem 39 bodů, což znamená jednobodovou ztrátu ve třech z celkem šesti úloh.

Dohromady se v první desítce umístili celkem čtyři studenti navštěvující zmíněné gymnázium v Brně, ve kterém je kladen na soutěž velký důraz. Podíl na nadprůměrném úspěchu mají bezesporu přednášky a semináře pro studenty i učitele organizované Přírodovědeckou fakultou Masarykovy univerzity v Brně.

2.4 Závěrečná pozorování

Učiňím na závěr ještě několik neopomenutelných poznámek. Nutno přiznati, že Matematická olympiáda je soutěží do jisté míry kontraverzní. V řadách ředitelů škol a učitelů se objevují velmi pestré názory na podobu, smysl a význam soutěže. Někteří se na ni dívají jako na běžnou školní předmětovou soutěž a účast svých studentů nebo studentů své školy ponechávají spíše náhodě. Názor pedagogů je buďto razantně nevyhraněný, nebo není ještě zcela vykrystalizován, anebo zkrátka soutěži nepřikládají takový význam. Objevují se ale i dva vyhraněné protipóly. Jedním je vyslovený odpor učitelů, kteří záměrně studenty se soutěží neseznamují, ba dokonce jim účast nedoporučují, obvykle pro zdánlivou velkou náročnost, která je způsobená třeba i mnohdy velkou odlišností od běžně počítaných příkladů v hodinách; pokud se laik začte třeba do této práce, má pocit, že podobné příklady nikdy v životě neviděl, i když třeba mnohé termíny nejsou jen prázdnými pojmy. Naopak oproti tomu jsou učitelé matematiky horliví a pro soutěž nadšení, své žáky nabádají k řešení a pomáhají jim s nimi. Na propagaci školních kol soutěže má velký vliv zajisté i vedení školy, s čímž je spjat jeden z atributů, který je matematické olympiádě vytýkán, a tím je přílišná snaha některých krajů a škol o zviditelnění se v soutěži za každou cenu a s ní spjatou prestiží. Mezi učiteli se objevují obavy z toho, zda by měla a jak soutěž odrážet skutečně dobré znalosti matematiky, zda tomu tak je, a řada z nich si klade i otázku, jak se vlastně takový student s matematickým nadáním pozná. Zda je to ten, kdo po prvním přečtení jakéhokoliv zadání hned najde souvislost s třeba již dříve řešeným příkladem z předešlých kol různých soutěží, nebo ten, kdo sice na první pohled nemá o postupu jasnou představu, ale jakmile uvidí, že došel do slepé uličky, začne od začátku a svou vytrvalostí a pílí časem k cíli také dojde. V případě domácího kola mají oba typy studentů rovné šance, v případě dalších kol tomu již tak určitě není.

Další výtky z řad učitelů směřujících na adresu soutěže se týkají vědomostí nutných k vyřešení problému. Je sice pravda, že mnohdy je nutné použít poznatky zahrnuté v tzv. rozšiřujícím učivu. Tomu lze ale oponovat tím, že řešitel matematické olympiády se samozřejmě nezajímá jen o povinný školní základ, ale studuje a zajímá se o matematiku i mimo školu. Větší problém spočívá dle mého v tom, kdy se řešení úlohy opírá o nějaký poznatek, který je sice pravdivý a snadno prokazatelný, nicméně na první pohled nesouvisí vůbec s úlohou. Jako příklad uveďme třeba vyšetřování dělitelnosti jedenácti v první úloze celostátního kola nebo šestou úlohu domácího kola kategorie B. Nutno připomenouti, že řada kantorů přistupuje k soutěži vlažně třeba i proto, že sami mají s řešeními větší či menší potíže, zmíněné typy úloh jim stále ještě připomínají jejich studia, kdy třeba sami měli problémy se systémem vysokoškolských důkazů, a nyní jsou mírou svých povinností na školách nejen (často velmi striktně vymezenou a tématicky i jinak okleštěnou) výukou, ale i administrativními a výchovnými problémy zahlceni tak, že na "hraní" si s těmito bezesporu zajímavými úlohami nezbývá čas a jejich nadšení pro vědu tak vzalo již nenávratně za své. Propadají skepsi a svůj styk s olympiádou omezují pouze na jakousi nástěnku, kde je sice informační leták všem na očích, ale odkud si ho téměř nikdo ze studentů nepůjčí a neprohlédne. Tak zůstává soutěž bez povšimnutí. Avšak argument, že mladí lidé mají jiné zájmy, podle mého neobstojí. Matematická olympiáda není soutěží pro každého. Tak ani není tvořena. Jsem si ale jist, že v každé třídě gymnázia se najde alespoň jeden, ne-li více nadšenců, kteří by byli soutěží nadšeni a měli šance v ní být úspěšní. Takové je třeba podnítit a neupírat jim příležitost.

Každopádně je nutno podotknouti, že i přes tyto výtky čerpané z mé vlastní zkušenosti a z vyslechnutých názorů, může být tato práce i poutavým čtením plným pozoruhodných a pro někoho i krásných příkladů.

Na tomto místě bych též rád poznamenal, že podíváme-li se na zastoupení různých typů středních škol mezi zúčastněnými, musíme konstatovat, že převaha gymnázií nad ostatními typy je zcela drtivá a skutečně jen velice ojediněle se mezi nimi objeví například střední odborná škola.

Jak již bylo řečeno v úvodu, kategorie A je určena pro studenty třetích i čtvrtých ročníků. Čas od času je slyšet hlasy volající po rozdělení kategorií, například kvůli zastoupení některých témat z právě až ze čtvrtých nebo konce třetích ročníků studia. Při pohledu do výsledkových listin zjistíme, že zastoupení studentů třetích a čtvrtých ročníků je vesměs vyrovnané.

Za zmínku stojí ještě těchto několik málo poznámek. Pročítáme-li si řešení některých studentů, nejen že není v jejich projevu na první pohled patrná vyzrálost k předávání svých myšlenek s dostatečnou přesností, dochází v nemálo případech k volbě nevhodných slov nebo záměně odborných termínů. I když s jedná o velmi mladé lidi, stálo by za zvážení, zda se nezaměřit ve škole na písemný a mluvený projev více nejen v hodinách literatury, ale i v projevu odborném. Vzácností totiž nejsou ani chyby pravopisné, hrubé a chyby v tvarosloví odrážející hovorovou mluvu. Tato negativa jsou pak zcela zbytečným neduhem studentských prací.

3. MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

Mezinárodní matematická olympiáda (IMO) je soutěž pro studenty středních škol s mezinárodní účastí. Každý rok ji pořádá jiná účastnická země. První ročník původně východoevropské soutěže proběhl roku 1959 v Rumunsku a zúčastnilo se ho sedm zemí. V současnosti se jejich počet pohybuje kolem stovky.

Úlohy pro řešitele jsou vybírány z maximálního počtu šesti návrhů z každé země, které mohou zúčastněné státy zasílat k posouzení, ze kterých vybírá Mezinárodní komise složená ze zástupců všech soutěžících států.

Studenti přijíždějí na místo vždy několik dní dříve, aby měli čas na zotavení. Předmětem řešení jsou dvě zadání vždy o třech úlohách, přičemž na vyřešení každého z nich má student čtyři a půl hodiny času. Obtížnost příkladů se přitom obvykle stupňuje. Po povinnostech se nabízí účastníkům kulturní oddechový program.

Kvůli jazykovým odlišnostem, zhlédne studentská řešení nejprve doprovod z příslušné země. Ten však nesmí do zadání nikterak zasahovat a sám nic vpisovat. Poté prezentují práce svých studentů týmu korektorů a slouží nadále jako jejich poradci.

V roce 2006 se 47. ročníku IMO, jenž hostilo 12. a 13. července Slovinsko, zúčastnilo 498 mladých matematiků z 92 zemí světa z 5 kontinentů.

Úloha 1.

Nechť I je střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC a P jeho vnitřní bod, pro který platí

$$|\angle PBA| + |\angle PCA| = |\angle PBC| + |\angle PCB|.$$

Dokažte, že $|AP| \geq |AI|$, *přičemž rovnost nastane, právě když* $P = I$.

Úloha 2.

Nechť P je pravidelný 2006-úhelník. Jeho úhlopříčka se nazývá dobrá, jestliže její koncové body dělí hranici mnohoúhelníku P na dvě části, z nichž každá je tvořena lichým počtem stran. Každá ze stran mnohoúhelníku P je rovněž dobrá.

Předpokládejme, že P je rozdělen na trojúhelníky 2003 úhlopříčkami, z nichž žádné dvě nemají společný bod uvnitř P. Určete, jaký je největší možný počet rovnoramenných trojúhelníků, které v uvažovaném rozdělení mnohoúhelníku P mají dvě dobré strany.

Úloha 3.

Určete nejmenší reálné číslo M takové, že nerovnost

$$\left|ab\left(a^2-b^2\right)+bc\left(b^2-c^2\right)+ca\left(c^2-a^2\right)\right| \leq M\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

platí pro všechna reálná čísla a, b, c.

Úloha 4.

Určete všechny dvojice (x, y) *celých čísel, pro něž platí*

$$1+2^x+2^{2x+1}=y^2.$$

Úloha 5.

Nechť $P(x)$ *je polynom stupně* $n > 1$ *s celočíselnými koeficienty a k nechť je kladné celé číslo. Uvažujme polynom* $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, *kde P je uvažováno k-krát. Dokažte, že existuje nejvýše n celých čísel t takových, že* $Q(t) = t$.

Úloha 6.

Každé straně b konvexního mnohoúhelníku P přiřadíme maximální obsah trojúhelníku, který celý leží v P a jehož jedna strana je b. Dokažte, že součet obsahů přiřazených všem stranám mnohoúhelníku P je větší nebo roven než dvojnásobek obsahu mnohoúhelníku P.

Na vypracování první i druhé trojice úloh má soutěžící, jak bylo řečeno, čtyři a půl hodiny a za každý příklad je možné získat maximálně sedm bodů.

Na první pohled se jedná o úlohy velmi těžké a nejde jen o zdání. Uvědomme si ale, že jejich řešiteli jsou nejnadanější matematikové svého věku z celého světa, a tak úroveň matematické inteligence soustředěné na tomto místě je neobvyklá.

Neuvěřitelného počtu 42 možných bodů dosáhli Zhiyu Liu z Číny, Iurie Boreico z Moldávie a Alexander Magazinov z Ruska. Zlatá medaile byla udělená každému soutěžícímu se ziskem 28 bodů a výše, stříbrná se ziskem 19 bodů a více a bronzová pro soutěžící se ziskem alespoň 15 bodů. Na prvních příčkách přitom stanuli nejčastěji studenti čínské národnosti. Bronzovou medaili se ziskem 16 bodů získali i dva Češi Pavel Šalom a Zbyněk Konečný a s 15 body Jaroslav Hančl.

4. MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA V ZAHRANIČÍ

V této kapitole bych se ještě rád krátce zaměřil na úlohy řešené soutěžícími v jiných zemích účastnících se Mezinárodní matematické olympiády.

4.1 Velká Británie

Britská matematická olympidáda se skládá ze dvou kol, na řešení každého z nich mají studenti tři a půl hodiny, přičemž první obsahuje šest a druhá čtyři úlohy s rostoucí obtížností. Bodování je nastaveno tak, že méně kompletně vyřešených příkladů je hodnoceno lépe než více dílčích odpovědí. Povolené pomůcky jsou rýsovací potřeby s výjimkou úhloměru. Kalkulačka není dovolena.

Úlohy řešené mladými Brity se dají označit za do jisté míry podobné těm českým. Uveďme pro ilustraci některé z nich.

Nechť n je celé číslo větší než 6. Dokažte, že jsou-li čísla $n-1$ a $n+1$ obě prvočísla, potom je číslo $n^2\left(n^2+16\right)$ dělitelné 720. Platí i obrácené tvrzení?

Adrian učí třídu složenou z šesti párů dvojčat. Hodlá je na kvíz rozdělit do skupin, přičemž nechce, aby dva z jednoho páru byli v témže týmu.
a) Kolika způsoby může Adrian rozdělit soutěžící do dvou skupin po šesti?
b) Kolika způsoby je může Adrian rozdělit do tří skupin po čtyřech?

Nechť G je konvexní čtyřúhelník. Dokažte, že ve vnitřku G existuje takový bod X s vlastností, že každá přímka jím procházející dělí G na dva útvary se stejnými obsahy, právě tehdy, když G je rovnoběžník.

Nech´t ABC je trojúhelník, jehož dvě délky stran splňují nerovnost $|AC|>|AB|$. Dále je dán bod X na polopřímce BA a bod Y na straně CA tak, že platí $|BX|=|CA|$ a $|CY|=|BA|$. Přímka XY protíná osu úsečky BC kolmo v bodě P. Dokažte, že platí

$$|\angle BPC|+|\angle BAC|=180°.$$

Vidíme, že úloha z kombinatoriky je o poznání snazší než kombinatorická úloha z české soutěže. První geometrickou úlohu by zřejmě většina našich středoškoláků nevyřešila, zato druhá je podobná našim u nás řešeným problémům.

Obě kola britské matematické olympiády probíhají přímo na školách. Ze všech úspěšných řešitelů je pak vybrán tým účastníků Mezinárodní matematické olympiády, kteří jsou na speciálních kurzech na účast v soutěži připravováni a školeni.

4.2 Jihoafrická republika

V Jižní Africe je Matematická olympiáda realizována ve třech kolech a dvou věkových kategoriích. První a druhé kolo formou testu s výběrem právě jedné z pěti navrhovaných odpovědí probíhá na školách a každá z dvaceti otázek je bodována podle náročnosti. Na řešení mají studenti jednu hodinu a nesmějí používat ani kalkulačku, ani rýsovací nástroje. Třetí kolo je pořádáno pro sto nejlepších řešitelů druhého kola a po dobu čtyř hodin se v něm řeší čtyři úlohy. Vyberme z obou skupin ty ukázkové. První tři jsou ze tří různě náročných kategoriií.

Soustředné kružnice mají střed O. Poloměr kratší z nich je 4. Rozdíl délek obou kružnic je 10. Poloměr delší kružnice je

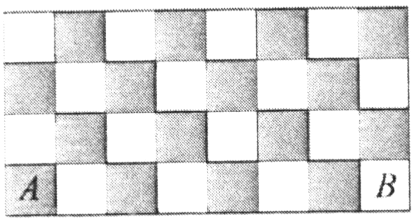
a) 14 *b)* $\frac{4\pi+10}{\pi}$ *c)* $\frac{14}{\pi}$ *d)* $5+4\pi$ *e)* $4+\frac{5.}{\pi}$.

Číslicí na místě jednotek ve výsledku násobení $(5+1).(5^2+1).(5^3+1)....(5^{2005}+1)$ *je*

a) 6 *b)* 5 *c)* 2 *d)* 1 *e)* 0.

Král K se smí po šachovnici pohybovat vždy o jedno pole ve všech možných směrech. Kolika různými způsoby se může právě sedmi tahy dostat z pole A na pole B na obrázku?

a) 56 *b)* 300 *c)* 49 *d)* 127 *e)* 228.



obr. 33

Nechť $x_1, x_2, ..., x_n$ *jsou kladná reálná čísla taková, že jejich součin je roven 1. Dokažte, že existuje* $k \in \{1, 2, ..., n\}$ *takové, že platí*

$$\frac{x_k}{k+x_1+x_2+...+x_k} \geq 1-\frac{1}{\sqrt[n]{2}}.$$

Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká jeho stran BC, CA a AB po řadě v bodech D, E a F. Označme dále Q průsečík úsečky AD a uvažované kružnice. Dokažte, že polopřímka EQ prochází středem úsečky AF tehdy a jen tehdy, když platí $|AC| = |DC|$.

Uvažujme rostoucí posloupnost přirozených čísel 1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, ..., kterou dostaneme jako řetězec bloků $\{1\}, \{2,4\}, \{5,7,9\}, \{10,12,14,16\}, ...$ *lichých a sudých čísel. Každý z bloků obsahuje o jedno číslo více než předchozí a začíná číslem o 1 větším, než předchozí blok končí. Dokažte, že n-tý člen posloupnosti je dán vztahem*

$$2n-\left\lfloor\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}\right\rfloor.$$

V jihoafrické matematické olympiádě se po soutěžících starší věkové kategorie vyžadují zejména znalosti v oborech, jakými jsou řešení jednoduchých algebraických rovnic, teorie čísel, na nejzákladnější úrovni mocniny, posloupnosti, základy kombinatoriky a základy rovinné geometrie (zhruba na naší a nižší úrovni).

Na závěr této kapitoly bych podotknul, že finálová kola v zemích vysílajících své zástupce do Mezinárodní olympiády jí jsou vesměs velmi podobná, jelikož je snahou každé země na mezinárodní utkání připravit po všech stránkách. Rozmanitost úloh i způsobu zadávání je patrná spíše na nižších úrovních.

Mezi zvláštnosti, se kterými jsem se setkal během zkoumání zahraničních matematických soutěží, patřily například tyto: V některých zejména asijských státech je každá škola, která by se chtěla zapojit, povinna nejprve uhradit na začátku každého ročníku pověřené organizaci menší či větší registrační poplatek.

Projevem určité etnické odlišnosti byl i zákaz účasti pro osoby ženského pohlaví obvyklý v arabském světě.

POUŽITÉ ZDROJE

[1] Oficiální webové stránky Matematické olympiády v Česku: *http://www.math.muni.cz/mo*

[2] Webové stránky Katedry matematiky a didaktiky matematiky Pedagogické fakulty Univerzity Karlovy v Praze: *http://www.pedf.cuni.cz/kmdm*

[3] Webové stránky regionálního výboru Matematické olympiády brněnské oblasti: *http://www.math.muni.cz/mo/rvmo*

[4] Katedra matematiky Přírodovědecké fakulty Univerzity J. E. Purkyně v Ústí nad Labem: *http://katmatprf.ujepurkyne.com*

[5] Oficiální server komise Matematické olympiády Plzeňského kraje: *http://www.mikulasske.cz/www/mo*

[6] Webové stránky Gymnázia Jírovcova, České Budějovice: *http://www.gymji.cz/gymji_mo.html*

[7] Webové stránky předmětové komise matematiky na Gymnáziu F. X. Šlady v Liberci: *http://kojot.gfxs.cz/komise/m*

[8] Oficiální webové stránky Mezinárodní matematické olympiády: *http://imo.math.ca*

[9] Oficiální webové stránky 47. ročníku Mezinárodní matematické olympiády: *http://imo2006.dmfa.si*

[10] Oficiální webové stránky britské matematické olympiády: *http://www.bmoc.maths.org*

[11] Oficiální webové stránky jihoafrické matematické olympiády: *http://science.up.ac.za/samo*