Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Matúš Ivan

O kouli

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Martina Bečvářová Ph.D.

Studijní program: Chemie

Studijní obor: Učitelství chemie a matematiky pro střední školy

Praha 2014

Poďakovanie

Chcel by som sa srdečne poďakovať svojej školiteľke doc. RNDr. Martine Bečvářovej Ph.D., za jej podnetnú pomoc pri vypracovaní mojej práce, ako aj oddeleniu histórie prírodných vied knižnice Matematicko-fyzikálnej fakulty Univerzity Karlovej v Prahe.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Názov práce: O kouli

Autor: Matúš Ivan

Katedra/Ústav: Katedra didaktiky matematiky

Vedúci diplomovej práce: doc. RNDr. Martina Bečvářová Ph.D.

Abstrakt: Tato diplomová práce popisuje historický vývoj počítání objemu a povrchu koule a obsahuje analýzu učebnic pro střední a základní školy. Je určena středoškolským učitelům jako inspirace při výuce problematiky objemu a povrchu těles. Může pomoci při motivaci žáků i při výběru učebnice a způsobu výuky této problematiky. Tato práce je určena i pro středoškolské studenty se zájmem o historii matematiky. Obsahuje rozbor zachovaných úloh této problematiky ze starověkého Egypta a Mezopotámie. Obsahuje Archimédovy poznatky ze spisů, ve kterých se věnoval této problematice. Popisuje přínos osvícenců k tomuto tématu a ukazuje exaktní postupy odvození vzorců s využitím integrálního počtu.

Klíčová slova: koule, objem, povrch, metody výpočtu, Archimédovo dílo, historické interpretace a přístupy

Title: Volume and surface of sphere

Author: Matúš Ivan

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: doc. RNDr. Martina Bečvářová Ph.D.,

Abstract: This diploma thesis describes historical evolution of calculation of sphere’s volume and surface and provides an analysis of textbooks for secondary and primary schools. It is made with the intention to inspire high school teachers with various approaches of teaching the volume and surface of solid bodies. It can help teachers with motivation of students as well as with selection of textbook and teaching methods for the issue. This thesis is meant to inspire high school students interested in history of mathematics, too. It includes analysis of preserved exercises on the topic from ancient Egypt and Mesopotamia as well as findings from Archimedes’ works, which were devoted to this topic. Moreover it describes contribution of enlighteners on the subject and shows exact procedures of derivation of formulas using integral calculus.

Keywords: sphere, volume, surface, methods of calculation, works of Archimedes, historical interpretation

Názov práce: O kouli

Autor: Matúš Ivan

Katedra/Ústav: Katedra didaktiky matematiky

Vedúci diplomovej práce: doc. RNDr. Martina Bečvářová Ph.D.

Abstrakt: Táto diplomová práca popisuje historický vývoj počítania objemu a povrchu gule a obsahuje analýzu učebníc pre stredné a základné školy. Je určená stredoškolským učiteľom ako inšpirácia pri výuke problematiky objemu a povrchu telies. Môže pomôcť pri motivácii žiakov a pri výbere učebnice a spôsobu výuky tejto problematiky. Táto práca je určená aj pre stredoškolských študentov so záujmom o históriu matematiky. Obsahuje rozbor zachovaných úloh tejto problematiky zo strovekého Egypta a Mezopotámie. Zaoberá sa aj Archimédovými poznatkami zo spisov, v ktorých sa venoval tejto problematike. Popisuje prínos osvietencov k tejto téme a ukazuje exaktné postupy odvodenia vzorcov s využitím integrálneho počtu.

Kľúčové slová: guľa, objem, povrch, metódy výpočtu, Archimédovo dielo, historické interpretácie a prístupy

Obsah

Úvod 1

1 Definícia gule 2

1.1 Definícia gule rotáciou 2

1.2 Definícia gule vzdialenosťou v eukleidovskom priestore 3

1.3 Guľa v karteziánskej sústave súradníc 4

1.4 Sférické súradnice 4

2 Definícia objemu a povrchu 6

2.1 Miera množín 6

2.2 Miery v trojdimenzionálnom priestore 6

3 Egypt a Mezopotámia 8

3.1 Egypt 8

3.2 Mezopotámia 10

4 Staré Grécko 13

4.1 Matematika starovekého Grécka 13

4.2 Archimédés zo Syrakúz 14

4.3 Exhaustívna metóda 15

4.4 O guli a valci a O metóde 16

5 Cavalieriho princíp 47

5.1 Matematika v novoveku a osvietenstve 47

5.2 Bonaventura Cavalieri 47

5.3 Cavalieriho princíp pre guľu 48

6 Infinitezimálny počet 51

6.1 História infinitezimálneho počtu 51

6.2 Odvodenie vzorcov rôznymi postupmi 51

6.3 Sféra a rovina 55

7 Metodická časť 58

7.1 Rozbor základoškolských učebníc 58

7.2 Rozbor stredoškolských učebníc 63

Záver 68

Zoznam použitej literatúry 69

Zoznam analyzovaných učebníc 70

Zoznam použitých skratiek 71

Úvod

Objem a povrch telies zujímal ľudí už od počiatkov logického myslenia. Ľudia mali potrebu kvantifikovať objekty okolo seba mierou. Na nasledujúcich stranách tejto diplomovej práce sa budeme zaoberať jedným konkrétnym telesom – guľou. Budeme sa snažiť podať ucelený pohľad na problematiku vývoja spôsobov počítania objemu a povrchu gule a jej častí od čias starovekého Egypta až po vznik diferenciálneho a integrálneho počtu.

Guľa, ako teleso, nemá veľmi praktický význam v staroveku, a preto sa nesmieme diviť, že pred dobou rozvoja teoretickej matematiky veľa informácií o tomto telese nenájdeme. Ucelené poznatky o guli a guľovej ploche vznikajú až v období starovekého Grécka.

Prácu členíme na sedem kapitol. V prvej kapitole sa budeme venovať definícii gule a guľovej plochy z historického, ale aj súčasného hľadiska. Druhá kapitola bude venovaná miere množín, špeciálne objemu a povrchu. V tretej kapitole sa budeme venovať matematike starovekých štátov Egypt a Mezopotámia. V kapitole štvrtej zameriame svoju pozornosť na matematiku starovekého Grécka a najmä na Archiméda zo Syrakúz a jeho diela, v ktorých sa venoval našej problematike. V piatej kapitole sa budeme venovať Bonaventurovi Cavalierimu a jeho známemu Cavalieriho princípu, ktorý nám pomôže pri nájdení vzorca pre objem gule. V kapitole šiestej sa už zameriame na odvodenie vzorcov pre objem a povrch gule pomocou integrálneho počtu. Využijeme aj poznatky z diferenciálnej geometrie: pre výpočet povrchu gule, ale aj pre dôkaz nerozvinuteľnosti guľovej plochy do roviny. Siedmu kapitolu venujeme didaktickému a metodickému rozboru súčasných základoškolských a stredoškolských učebníc využívaných vo výuke na školách v Českej republike a Slovenskej republike.

1 Definícia gule

1.1 Definícia gule rotáciou

Prvé náznaky definície gule nemožno hľadať v praveku ani v dávnejšom staroveku. Z hľadiska vývoja myslenia sa musíme pozrieť na doby, kedy bola abstrakcia už viac rozvinutá. Jednu z prvých zachovaných definícií gule podal Eukleidés[1] vo svojich *Základoch*, konkrétne v 11. knihe v časti definícií. Pojem sféra bol však využívaný už Aristotelom v jeho spise *Metafyzika*. Eukleidés sa v *Základoch* venuje aj pojmom teleso a jeho hranica:

Kniha XI, definícia 1:

Teleso je to, čo má dĺžku, šírku aj hĺbku.

Kniha XI, definícia 2:

Hranicou telesa je plocha.

Definície telesa a jeho hranice sú intuitívne. V dnešnej dobe, keď máme vypracovanú teóriu množín, sa teleso už dá zadefinovať exaktnejšie, ako uzavretá oblasť priestoru.

Kniha XI, definícia 14:

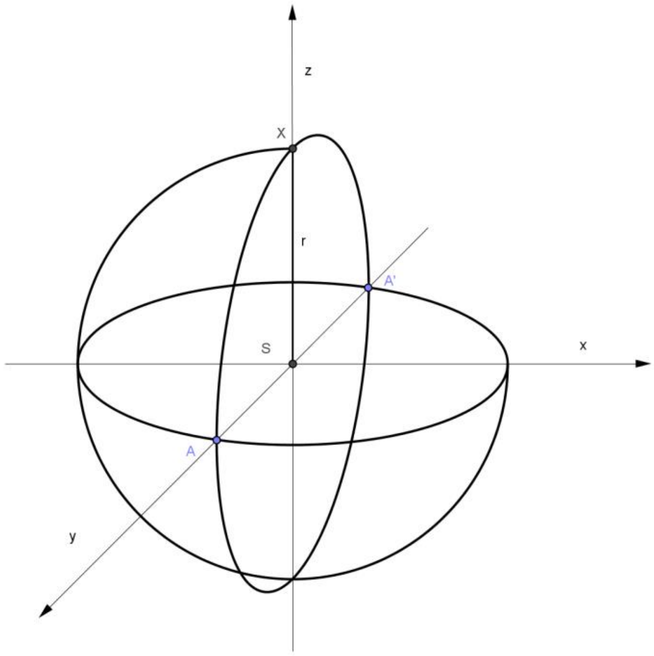
Guľa je teleso opísané polkruhom, ktorý sa pohybuje okolo svojho fixovaného priemeru späť do pôvodnej pozície.[2]

Na tejto definícii je zaujímavé to, že Eukleidés definoval guľu pomocou pohybu – rotácie polkruhu okolo osi. Tento postup je neobvyklý pre grécku matematiku, keďže existencia pohybu bola niektorými z učencov v starovekom Grécku dokonca popieraná – napr. (napríklad) Zénónom z Eley v tzv. (takzvaných) *Zénónových apóriách*.

[1] Eukleidés (asi 325p.n.l. – asi 260 p.n.l.) bol grécky matematik a geometer. Študoval zrejme v Aténach, kde jeho učiteľmi boli Eudoxos a Theaitétos. Neskôr bol povolaný do Alexandrijskej knižnice, kde pracoval a asi aj učil. Jedným z jeho žiakov bol Archimédés. Okrem základov geometrie sa venoval aj teórii čísel, perspektíve, kužeľosečkám a sférickej geometrii. Jeden z jeho zachovaných spisov sa venuje teórii rovinných a konkávnych zrkadiel.

[2] Všetky tri definície viď [6], str. 424.

V definíciách 15 až 17 v knihe XI *Základov* Eukleidés definoval stred gule ako stred polkruhu, ktorý danú guľu vytvorí rotáciou okolo svojho priemeru. Ďalej definoval priemer gule ako úsečku prechádzajúcu stredom, ktorej oba koncové body ležia na hranici gule. Definoval aj os rotácie gule ako os, okolo ktorej rotoval polkruh, ktorý guľu vytvoril. Definícia osi gule nie je veľmi významná v porovnaní s ostatnými rotačnými telesami, keďže osou gule by bola každá priamka, prechádzajúca jej stredom, pretože guľa je súmerná podľa svojho stredu.



Obr. 1 Vznik gule rotáciou polkruhu AXA' okolo AA'a sféry rotáciou polkružnice AXA' okolo AA'.

1.2 Definícia gule vzdialenosťou v eukleidovskom priestore

Objekt, ktorý Eukleidés nazval guľou, sa dá zadefinovať aj inak, a to pomocou vzdialenosti v priestore. Množina všetkých bodov v priestore, ktoré opíše polkruh rotujúci okolo svojho priemeru, je množina bodov v priestore, ktorých vzdialenosť od stredu tohto polkruhu je rovná alebo menšia než jeho polomer. Takto sa dá zaviesť všeobecne tzv. hyperguľa v n-dimenzionálnom priestore. My sa však zameriame len na hyperguľu v trojrozmernom priestore, ktorú nazývame guľa. Označme ju G, jej stred S a polomer r. Potom guľou je množina:

$$G = \{X \in \mathbb{R}^3, |XS| \leq r\}.$$

Táto definícia nám poskytne predstavu o guli ako o trojrozmernom telese, ktorého objemom sa budeme zaoberať.

Chceme sa však zaoberať aj povrchom tohto telesa, a preto musíme definovať aj hraničnú plochu gule – guľovú plochu (sféru). Označme ju κ, jej stredom je stred gule S a jej polomerom je polomer gule r. Potom guľovou plochou (sférou) je množina:

$$\kappa = \{X \in \mathbb{R}^3, |XS| = r\}.$$

Je to teda množina bodov v priestore, ktoré majú od pevného bodu (stredu) rovnakú vzdialenosť. Ak by sme chceli využiť paralelu s Eukleidovou definíciou, teda definíciou rotáciou rovinného útvaru, tak guľová plocha (sféra) by bola útvarom vzniknutým rotáciou polkružnice okolo svojho priemeru.

1.3 Guľa v karteziánskej sústave súradníc

V eukleidovskom priestore so zavedenou karteziánskou sústavou súradníc, ak uvažujeme, že ľubovoľný bod gule má súradnice $X = [x, y, z]$, jej stred má súradnice $S = [m, n, o]$ a polomer gule je r, môžeme postupnými úpravami dostať analytické vyjadrenie gule:

$$|SX| \leq r,$$
$$\|X - S\| \leq r,$$
$$\sqrt{(x-m)^2 + (y-n)^2 + (z-o)^2} \leq r,$$
$$G: (x-m)^2 + (y-n)^2 + (z-o)^2 \leq r^2.$$

Ak zameníme nerovnosť za rovnosť, obdobnými úpravami dostaneme analytické vyjadrenie guľovej plochy:

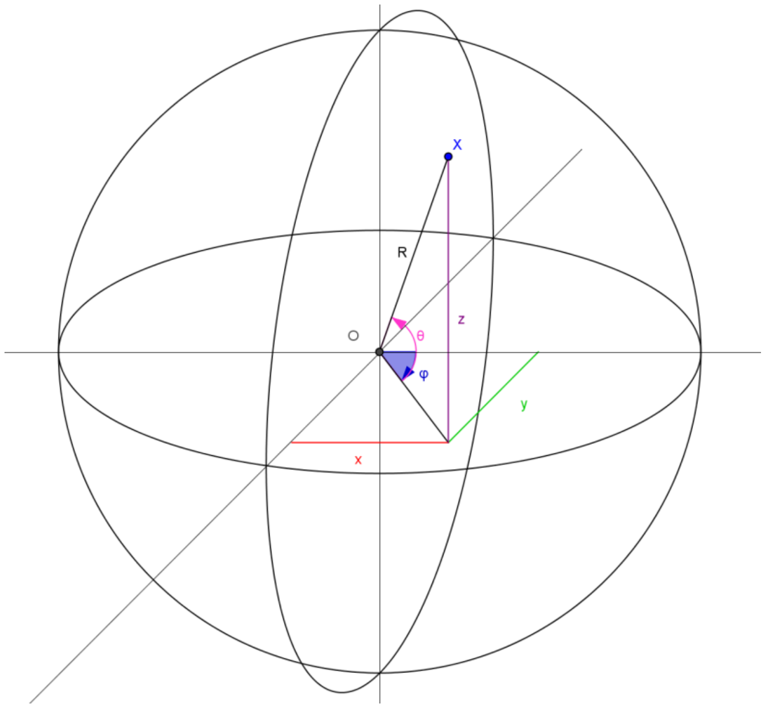
$$\kappa: (x-m)^2 + (y-n)^2 + (z-o)^2 = r^2.$$

1.4 Sférické súradnice

Pri odvodzovaní vzorcov pre výpočet objemu a povrchu gule je výhodné nahradiť karteziánsku sústavu súradníc sférickou sústavou. Sférická sústava súradníc pre popis polohy bodu X s karteziánskymi súradnicami $[x, y, z]$ v priestore využíva: vzdialenosť R bodu X od počiatku súradnicovej sústavy O; orientovaný uhol kolmého priemetu vektoru $X - O$ do roviny (o_x, o_y) a kladnej časti osi x (označme ho φ); orientovaný uhol, ktorý zviera vektor $X - O$ a rovina (o_x, o_y) (označme ho θ).[3] Potom pre karteziánske súradnice platí vzťah:

$$x = R.\cos\varphi.\cos\theta,$$
$$y = R.\sin\varphi.\cos\theta,$$
$$z = R.\sin\theta,$$
$$R \in \langle 0,\infty), \varphi \in \langle -\pi,\pi), \theta \in \langle -\pi/2 ,\pi/2).$$

Rozsah súradníc je zvolený tak, aby popísal celý trojrozmerný priestor.



Obr. 2 Sférické a karteziánske súradnice

Sférické súradnice budú pre nás pri popise gule a sféry výhodné vtedy, keď nami popisované gule a sféry budú mať stred v počiatku sústavy súradníc. Vtedy stačí pre popis gule obmedziť iba parameter R, a to tak, že $0 \leq R \leq r$.

Pre popis guľovej plochy bude parameter R konštantný, $R = r$. Z toho vyplýva, že pre popis sféry nám stačia dva parametre, čo by nás nemalo prekvapiť, pretože sféra je plocha.

[3] Viď Obr. 2.

2 Definícia objemu a povrchu

2.1 Miera množín

Mierou budeme nazývať nezápornú σ-aditívnu funkciu na nejakom σ-okruhu Z.

Definícia: Nech X je množina, a nech Z je neprázdny systém podmnožín množiny X. Systém Z nazveme σ-okruhom, keď platí:

1) $A, B \in Z \Rightarrow A \cup B \in Z, A \setminus B \in Z,$
2) $A_i \in Z, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in Z.$[4]

Označme $\mathbb{R}_0^{+,*} = \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$, kde $\mathbb{R}_0^+$ je množina nezáporných reálnych čísel.
Definícia: Nech Z je neprázdny systém podmnožín Z. Povieme, že funkcia $\mu: Z \rightarrow \mathbb{R}_0^{+,*}$ je nezáporná σ-aditívna na Z, ak
$A_i \in Z,\ i \in \mathbb{N}, \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in Z, A_i \cap A_j = \emptyset$ pre $i \neq j \Rightarrow\ \varphi(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i)$.[5]

2.2 Miery v trojdimenzionálnom priestore

Guľa, ktorej objem a povrch chceme ďalej študovať, je objekt, ktorý sme definovali v trojrozmernom priestore. Zavedenou mierou v trojdimenzionálnom eukleidovskom priestore je objem. Mierou v dvojdimenzionálnom eukleidovskom priestore je obsah. Obsah hranice trojrozmerného telesa nazývame povrchom.

V stredoškolských učebniciach matematiky sa stretneme s priamou definíciou objemu a povrchu telesa v tejto podobe:

Definícia: *Objem telesa je kladné reálne číslo priradené telesu tak, že platí:*

Zhodné telesá majú objemy sebe rovné.

Ak je teleso zložené z niekoľkých neprenikajúcich sa telies, je jeho objem rovný súčtu objemov týchto telies.

Objem kocky, ktorej hrana má dĺžku 1 *(m, cm,…) je rovný* 1 *(*m^3*,* cm^3*,…).*

[4] Pozri [9], str. 1

[5] Pozri [9], str. 2

Navzájom sa neprenikajúcimi telesami rozumieme také telesá, z ktorých žiadne neobsahuje vnútorný bod druhého.[6]

Definícia: *Povrchom telesa rozumieme obsah jeho hranice.*[7]

Stredoškolská definícia objemu nám dáva predstavu o tom ako počítať objemy „hranatých“ telies, teda mnohostenov, nedáva nám však návod, ako počítať objem „krivočiarych“, teda aj rotačných telies. Táto definícia nie je úplne totožná s definíciou miery z kapitoly 2.1 pretože neuvažuje o objeme telesa vytvoreného zo spočetného nekonečného počtu telies.

[6] Originálna citácia viď [10], str. 149.

[7] Originálna citácia viď [10], str. 150.

3 Egypt a Mezopotámia

3.1 Egypt

Ľudia už od dávna obdivujú staroegyptskú architektúru, náboženstvo, umenie a iné prvky staroegyptskej kultúry. Málokto si však uvedomí, že mnohé prvky kultúry (najmä architektúra – stavba pyramíd) by sa nezaobišli bez matematických poznatkov. Matematické myslenie a poznatky zo starovekého Egypta máme dochované v papyroch, drevených tabuľkách a kožených zvitkoch. Medzi najznámejšie patria Moskovský matematický papyrus, fragmenty papyru z Káhúnu, fragmenty papyru uložené v múzeu v Berlíne, drevené tabuľky z Achmímu a Rhindov matematický papyrus a kožený zvitok[8]. Úlohy na papyroch sú zapísané ako návody popisujúce jednotlivé kroky výpočtu.

Zo záznamov v papyroch sa dozvedáme niekoľko znalostí o počítaní obsahov rovinných útvarov a objemov a povrchov telies. Všetky geometrické úlohy vznikali z praxe staviteľstva, vymeriavania polí a poľnohospodárstva, preto sa nemôžeme diviť, že v papyroch nenájdeme veľa úloh, ktoré by sa venovali telesu, akým je guľa. V záznamoch nájdeme niekoľko úloh pre výpočet obsahu kruhu v Rhindovom papyre a výpočet objemu valca v Rhindovom papyre a vo fragmentoch Káhúnskeho papyru. Pri výpočte obsahu kruhu sa využíva hodnota $\pi = 3{,}16$. Toto je zanedbateľná chyba[9].

Čo sa týka gule, v dostupných hieratických matematických textoch nenájdeme úlohu, ktorá sa zaoberá jej objemom. V Moskovskom papyre[10] však nájdeme úlohu, ktorá popisuje „Metódu výpočtu košu“. Kôš môžme považovať za polovicu guľovej plochy. Znenie tejto úlohy je nasledovné:

Povie sa ti: kôš s $4\frac{1}{2}$ *v tep-r k* $4\frac{1}{2}$ *na adž*[11].

Nuž, udaj mi jeho plochu.

Spočítaj $\frac{1}{9}$ z 9, *lebo kôš je* $\frac{1}{2}$*..., vyjde* 1.

Spočítaj zvyšok, je to 8.

---

[8] Viď [13] str. 4.

[9] Viď [13] str. 45 a str. 47.

[10] Papyrus je uložený v Moskovskom múzeu. Je datovaný do obdobia 1700 p. n. l.

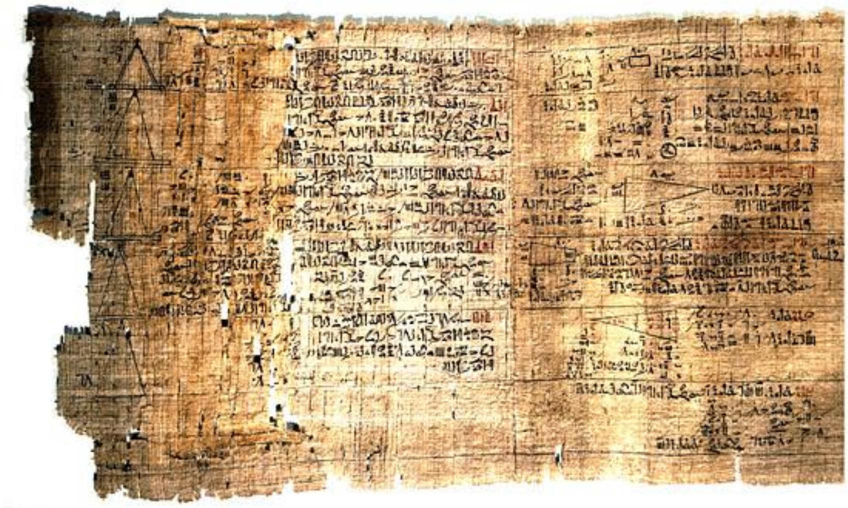
[11] Tep-r a adž sú zrejme rozmery košíka.

Spočítaj $\frac{1}{9}$ *z* 8*, vyjde* $\frac{2}{3}\frac{1}{6}\frac{1}{18}$.

Spočítaj zvyšok z tých 8 *za tými* $\frac{2}{3}\frac{1}{6}\frac{1}{18}$*, vyjde* $7\frac{1}{9}$.

Počítaj s $7\frac{1}{9}$ $4\frac{1}{2}$ *krát, vyjde* 32.

Pozri toto je jeho plocha. Našiel si správne.[12]



Obr. 3 Moskovský papyrus[13]

Úloha teda popisuje postup výpočtu povrchu koša alebo košíku s priemerom $9/2$. Matematicky môžeme sled týchto operácií zapísať takto:

$$P = \left(\left(9 - \frac{1}{9}\cdot 9\right) - \frac{1}{9}\left(9 - \frac{1}{9}\cdot 9\right)\right)\cdot\frac{9}{2} = 32.$$

Keď upravíme predošlý vzťah tak, aby približne odpovedal výpočtu povrchu polgule so zadaným polomerom, teda $9/4$, dostaneme:

$$P = 2\cdot\left(\frac{256}{81}\right)\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^2.$$

Z uvedeného vyplýva, že namiesto konštanty π starovekí Egypťania používali číslo $256/81$, a teda v tomto príklade je číslo π určené s odchýlkou asi $0{,}0189$, čo odpovedá chybe asi $0{,}6\%$.[14]

[12] Viď [13] str. 80.

[13] Zdroj http://www.ablogabouthistory.com/2010/12/09/ancient-egyptian-mathematics.

[14] Pozri [2], str. 103.

Toto je však len jeden z pohľadov na túto úlohu. Môžeme na ňu nahliadať aj ako na postup výpočtu povrchu polovice plášťa valca s priemerom $4\frac{1}{2}$ a výškou $4\frac{1}{2}$ – toto vysvetlenie podal T. E. Peet. Na túto úlohu môžme nahliadať aj ako na výpočet povrchu štvrtiny valca s priemerom 9 a výškou $4\frac{1}{2}$. Iným vysvetlením (podaným O. Neugebauerom) môže byť výpočet povrchu kupolovitej sýpky bežnej v starovekom Egypte. Ďalšou možnosťou je interpretovať tento výpočet ako výpočet obsahu polkruhu (úvod príkladu je však protichodný tejto možnosti).[15] Najpravdepodobnejšie sú vysvetlenia zahrňujúce povrch pologule alebo časti plášťa valca vzhľadom k tvaru zachovaných staroegyptských košov.

Obr. 4 Staroegyptské koše[16]

3.2 Mezopotámia

Matematika starovekej Mezopotámie je známejšia ako matematika starovekého Egyptu hlavne preto, že svoje poznatky a myšlienky obyvatelia Mezopotámie vyrývali do hlinených tabuliek, ktoré mali vyššiu trvanlivosť než papyrus Egypťanov. V Mezopotámii zapisovali svoje poznatky učni aj učenci.

[15] Pozri [2] str. 103.

[16] Zdroj http://www.reshafim.org.il/ad/egypt/basketry/.

Z ich riešenia rovníc sa dozvedáme, že im boli známe vzťahy ako:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$
$$(a + b).(a - b) = a^2 - b^2,$$
$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^n = 2^n + (2^n - 1),$$
$$1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}n\right).(1 + 2 + 3 + \cdots + n)$$

a Pýthagorova veta. Avšak toto bol zároveň aj vrchol geometrických vedomostí starovekej Mezopotámie. Poznali postupy pre výpočet obsahu trojuholníka a lichobežníka, objemu kvádra, kocky a ihlanu, ale návody na výpočty objemu valca, kužeľa, zrezaného ihlanu a ďalších komplikovanejších telies (klíny, koryto a iné) mali iba približné.

Keďže matematické poznatky starovekej Mezopotámie vychádzali z potrieb praxe a predmety guľového tvaru sa v poľnohospodárstve a staviteľstve tejto doby veľmi nepoužívali, pre Mezopotámčanov nemalo význam zaoberať sa výpočtami objemu či povrchu tohto telesa.

Obr. 5 Tabuľka YBC 7302[17]

Z babylonských matematických tabuliek sa však môžeme dozvedieť o znalosti rovinného ekvivalentu gule – kruhu. Tabuľka YBC 7302[18] popisuje vzťah medzi obvodom a obsahom kruhu. Obsahuje nákres kruhu s tromi číslami (3 nad kruhom, 9 vedľa kruhu a 45 v kruhu). Interpretácia týchto čísel je: 3 obvod kruhu, 9 jeho druhá

---

[17] Zdroj http://numberwarrior.wordpress.com, článok On the ancient babylonian value for pi.

[18] Tabuľka je súčasťou Babylonskej kolekcie Yaleovej Univerzity.

mocnina a 45 značí $0;45$, teda $45/60$, čo je obsah kruhu. Babylonskí matematici využívali „vzorec“ pre obsah kruhu v tomto tvare: $\mathrm{S} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{o}^2$.[19]

Postupnými úpravami spomenutého vzorca s použitím zadania z tabuľky YBC 7302 zistíme, že v Mezopotámii používali miesto konštanty π číslo 3, čo je odchýlka približne $0{,}1416$, ktorá odpovedá chybe približne 5%. V inom babylonskom texte sa však uvádza vzťah medzi obvodom pravidelného šesťuholníku a obsahom jeho opísaného kruhu, kde je pre π použitá hodnota $3{,}125$, čo je odchýlka približne $0{,}01659$, ktorá odpovedá chybe asi $0{,}5\%$. Poznamenajme, že je to zanedbateľnejšia chyba, dokonca menšia než v Egypte.[20]

[19] Pozri [2], str. 325.

[20] Pozri [8], str. 10.

4 Staré Grécko

4.1 Matematika starovekého Grécka

Základné rozdiely medzi matematikou Grécka a matematikou Mezopotámie a Egypta boli v týchto desiatich princípoch:

- v motivácii matematického myslenia – v Egypte vychádzala len z potreby praxe, ale v Grécku naviac vychádzala aj z túžby vysvetliť príčinu javov, problémy mágie aj samotnej matematiky;
- v otázke bádania – v Egypte „Ako?“ (vymerať, zostrojiť), v Grécku „Prečo?“ (je to tak a tak);
- v systéme práce – v Egypte experimenty typu pokus – omyl, v Grécku orientované nadobúdanie skúseností a ich hierarchizácia;
- v nástroji – v Egypte ruka, trpezlivosť, pamäť, v Grécku rozmýšľanie a špekulácia;
- v predstave – v Egypte predmetná, v Grécku idealizované objekty;
- v klíme objavu – v Egypte mýtická, objav je vnuknutie, dar bohov, v Grécku logická, objav je dôsledok cieľavedomého bádania;
- v kritériu pravdivosti poznatku – v Egypte náboženská viera, aproximatívny súhlas s praxou, v Grécku logická preukázateľnosť poznatku, dôkaz;
- vo výsledkoch – v Egypte náhodné a mozaikovité, v Grécku systematizované a hierarchizované;
- vo vyučovaní – v Egypte reprodukcia návodu a imitácia učiteľa, v Grécku dialóg podnecujúci a usmerňujúci samostatné bádanie žiaka;
- v kritériu náročnosti – v Egypte náročnosť závisí od dĺžky návodu pre poznatok, v Grécku závisí od výšky abstrakcie pojmov a myšlienok.[21]

Matematika v starovekom Grécku bola úzko spätá s prírodnou filozofiou. Medzi najdôležitejších vedcov starovekého Grécka, ktorí ovplyvnili rozvoj matematiky a geometrie, patrili Thalés Milétsky, Pýthagorás zo Samu, Zénón z Eley, Démocritos z Abdér, Hippokratés z Chiu, Sókratés, Platón, Aristotelés, Eukleidés z Alexandrie a i. (a iní). Spomínaných vedcov nemôžeme nazvať čistými matematikmi, pretože

[21] Pozri [14], str. 20.

v tejto dobe ešte nie sú vedecké odbory vymedzené tak ako dnes. Väčšina týchto vedcov sa venovala filozofii, fyzike aj matematike zároveň.

Pod rozvoj a hierarchizáciu matematickej teórie sa najviac podpísal Eukleidés z Alexandrie svojim dielom *Základy*.[22] Toto dielo používa metódu axiomatickej výstavby teórie, ktorú neskôr prebrali mnohí ďalší vedci. Knihy I až VII, X a XI *Základov* sú rozdelené na dve časti – v prvej sa nachádzajú predpoklady a definície a v druhej matematické vety, ktoré sú exaktne odvodené z predpokladov a dokázané.V knihách VIII, IX, XII a XIII sú len vety s dôkazmi. Eukleidés vo svojom diele zhŕňa poznatky planimetrie, stereometrie, algebry a teórie čísel. Na výskume rotačných telies, ich objemov a povrchov sa veľkou mierou podieľal Archimédés zo Syrakúz.

4.2 Archimédés zo Syrakúz

Archimédés (narodený asi roku 287 p. n. l. (pred naším letopočtom) v Syrakúzach, umrel 212 p. n. l.) bol gréckym matematikom, fyzikom, astronómom, mechanikom, technikom a vynálezcom. Jeho otcom bol zrejme Feidiás, grécky astronóm, ktorý pôsobil za vlády Hieróna II. Archimédés bol mužom nízkeho pôvodu, ale bol zrejme nejako spriaznený s vládcom Hierónom II. Študoval v Alexandrii, kde bol v styku so žiakmi Eukleida – Konónom zo Samu, Dositheom z Pelusie, či Erathosthenom z Kyrény). V Alexandrii si osvojil Eukleidov exaktný prístup k budovaniu matematickej teórie. Svoje diela písal v dialekte rodného mesta Syrakúz.

Vo svojich matematických dielach *O špirálach, O guli a valci, O kvadratúre paraboly, Meranie kruhu, O kónoidoch a sféroidoch* rozvíjal myšlienky infinitezimálnych postupov, ktoré inšpirovali najmä matematikov 17. storočia.

Vo svojich fyzikálnych prácach sa zaoberal jednoduchými strojmi ako sú rovnoramenné a nerovnoramenné páky, kladky, kladkostroje a skrutka. Venoval sa problematike ťažiska rovinných útvarov a hydrostatike (Archimédov zákon). Fyzikálno-matematické témy rozvíjal v dielach *O rovnováhe alebo ťažiskách rovinných obrazcov, O metóde, O plávajúcich telesách*.

[22] Toto dielo je už spomenuté v kapitole 1.1 na str. 1.

Ako technik využil svoje fyzikálne teórie o jednoduchých strojoch v praxi tým, že tieto stroje reálne zostrojil. Archimédova skrutka bola využívaná už skôr v Egypte, kde sa s ňou Archimédés zoznámil a následne ju zdokonalil. Pripisujú sa mu vynálezy mnohých inovatívnych strojov (aj bojových) a obranných mechanizmov, ktoré boli využité pri obrane proti obliehaniu Syrakúz rímskym vojskom. Umrel pri prelomení tejto obrany.[23]

Všeobecne je považovaný za najväčšieho matematika staroveku a jedného z najväčších matematikov všetkých čias. Pri svojom výskume geometrických objektov, ich obvodov, obsahov, povrchov či objemov využíval tzv. exhaustívnu metódu, ktorú rozvedieme v jednom z nasledujúcich odstavcov.

Archimédés po sebe zanechal obsiahle diela, zachovalo sa nám z nich trinásť. Uveďme ich chronologicky: O *rovnováhe alebo ťažiskách rovinných útvarov*, kniha I., *O kvadratúre paraboly*, *O rovnováhe alebo ťažiskách rovinných útvarov*, kniha II., *Posolstvo Eratosthenovi o mechanickej metóde riešenia geometrických úloh* (skrátene *O metóde*), *O guli a valci*, kniha I. a II., *O špirálach*, *O kónoidoch a sféroidoch*, *O plávajúcich telesách*, kniha I. a II., *Meranie kruhu*, *Počítanie piesku*, *Kratochvíle*, *Poučky*, *Problém dobytku*.[24] Pre nás sú najdôležitejšie diela *O guli a valci* a *O metóde*.

4.3 Exhaustívna metóda

Autorstvo tejto metódy je pripisované Eudoxovi z Knidu[25]. Je známa ako staroveká metóda limít. Môžeme nájsť jej ekvivalent vo viacerých dimenziách. Na priamke môžeme odhadovať iracionálne číslo obmedzovaním intervalu jeho výskytu racionálnymi číslami (napr. číslo π môžeme hrubo odhadnúť číslom 3,1 zdola a 3,2 zhora a postupne odhad zjemňovať). Pre dvojrozmerné objekty sa táto metóda dá využiť na výpočet obsahu kruhu, a to vpisovaním a opisovaním pravidelných *n*-uholníkov.

[23] Pozri [7], str. 9-21

[24] Pozri [4], str. 24.

[25] Eudoxos z Knidu (asi 408 p.n.l. – asi 355 p.n.l.) bol starogrécky astronóm, matematik a filozof. V matematike bol zrejme jeho učiteľom Archytas, vo filozofii Platón a astronómiu študoval v Egypte. Bol zrejme prvým z antických autorov, ktorý pri popise vesmíru vychádzal len z pozorovania a snažil sa túto teóriu rozvíjať čistou vedeckou metódou.

Exhaustívnu metódu ďalej rozpracoval Archimédés, ktorý ju následne využíval pri mnohých dôkazoch svojich tvrdení. *Vo svojich prácach rozvíjal myšlienky infinitezimálneho charakteru, v určitom zmysle môžeme hovoriť o výpočtoch limít a určitých integrálov aj o diferenciálnych úvahách.*[26] Túto metódu Archimédés využíval aj pri výskume objemov a povrchov telies. V ďalšom odstavci rozoberieme jeho výsledky zahŕňajúce guľu z jeho diela *O guli a valci* a *O metóde*.

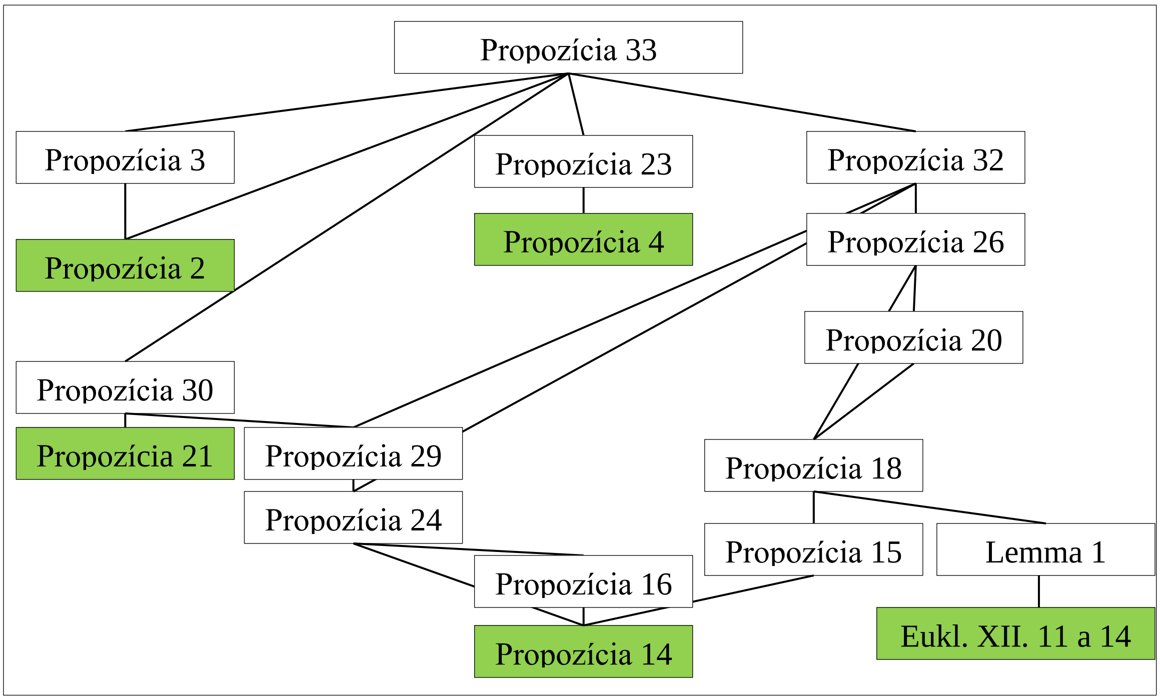
4.4 O guli a valci a O metóde

Archimédovo dielo *O guli a valci* pojednáva o troch rotačných telesách, a to o valci, kuželi a guli. Najdôležitejšie, a teda aj hlavné, výsledky, ku ktorým sa Archimédés dopracoval v tejto práci, sú zhrnuté v druhej časti prvej knihy tohto diela. V druhej knihe Archimédés rieši problémy konštrukcie valcov, kužeľov, gúľ a ich častí s rovnakými objemami či povrchmi. Závery z prvej knihy sú zhrnuté do piatich hlavných viet, ktoré vyjadrujú objem a povrch gule, povrch vrchlíku a objem guľového výseku. V diele *O metóde* (resp. (respektíve) *Posolstve Erathosthénovi o mechanickej metóde riešenia geometrických úloh*) nachádzame dôkaz výpočtu objemu gule ako štvornásobku objemu kužeľa, ktorého podstava je zhodná s hlavným kruhom gule a výška je zhodná s polomerom gule.

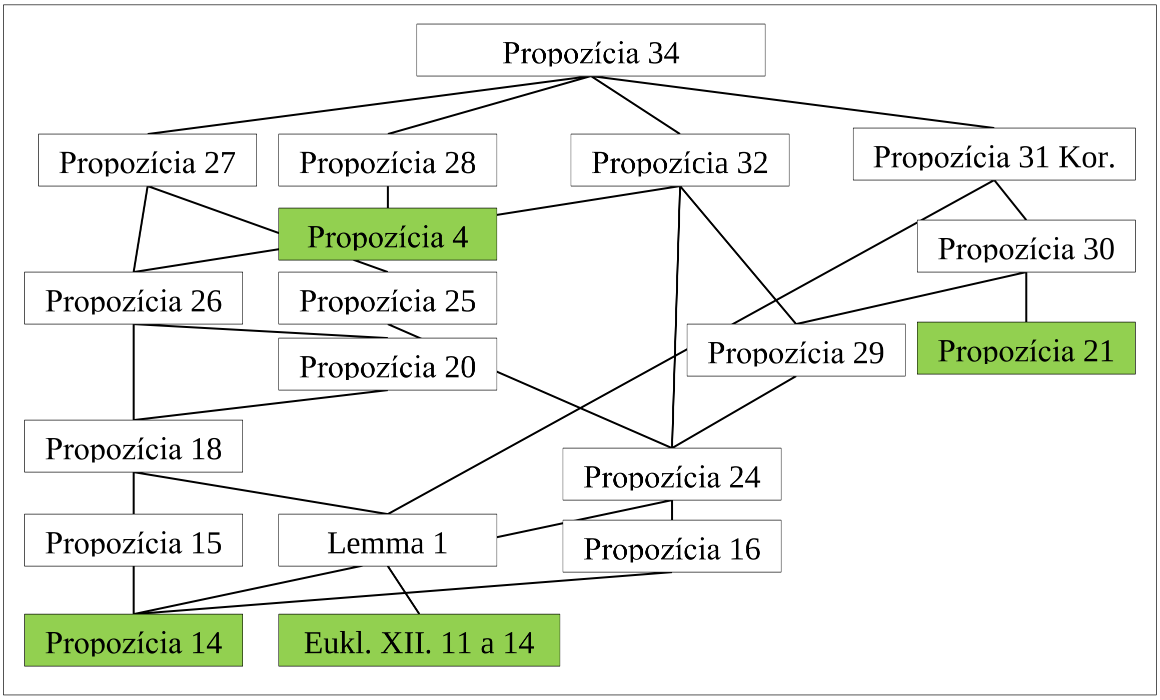
Najprv budú uvedené štyri grafy, ktoré ukazujú súvislosti pri dokazovaní propozícií 32, 33, 42 a 44 spisu *O guli a valci*. Propozícia, ktorá je položená v grafe nižšie a je prepojená s inou propozíciou v grafe umiestnenou vyššie je použitá v dôkaze vyššie položenej propozície. Tie označené zelenou farbou k svojmu dôkazu už nepotrebujú ďalšie propozície. Tie, ktoré sú označené žltou farbou majú svoj graf v jednom z predošlých obrázkov.[27]

[26] Originálna citácia viď [4], str. 31.

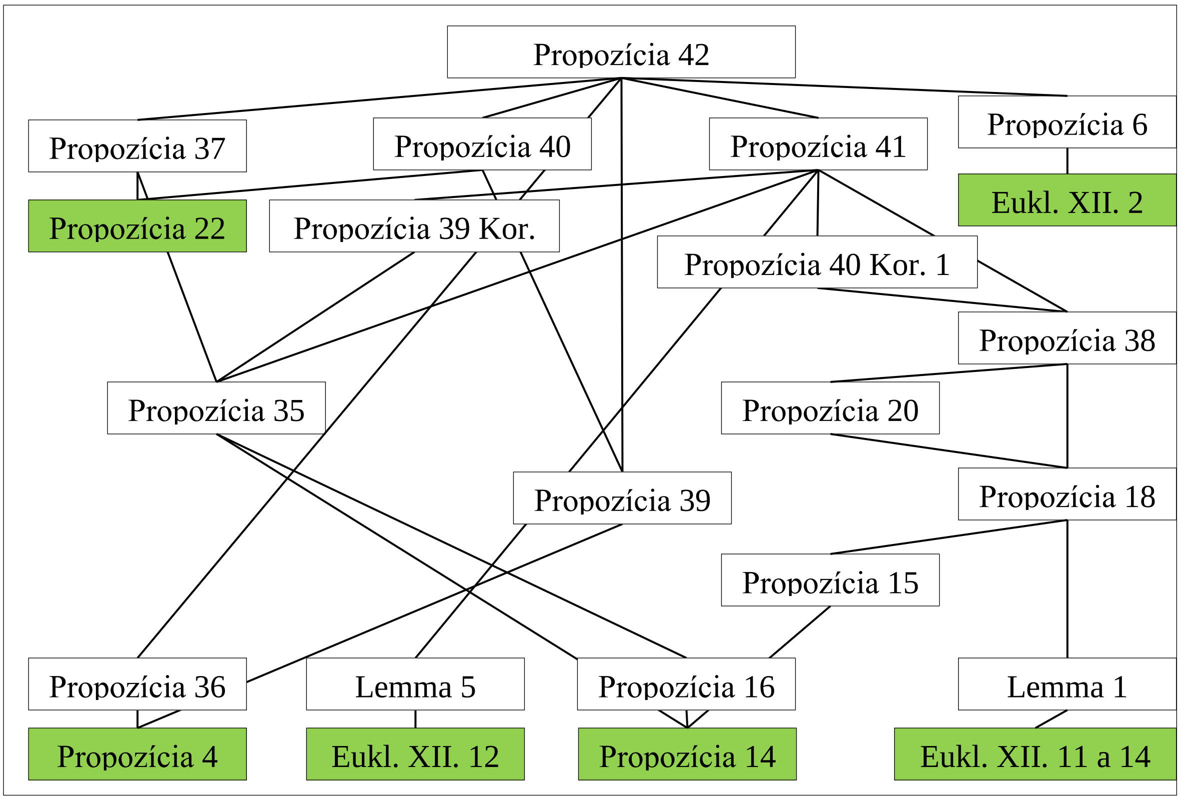
[27] Pozri Obr. 6 až 9.



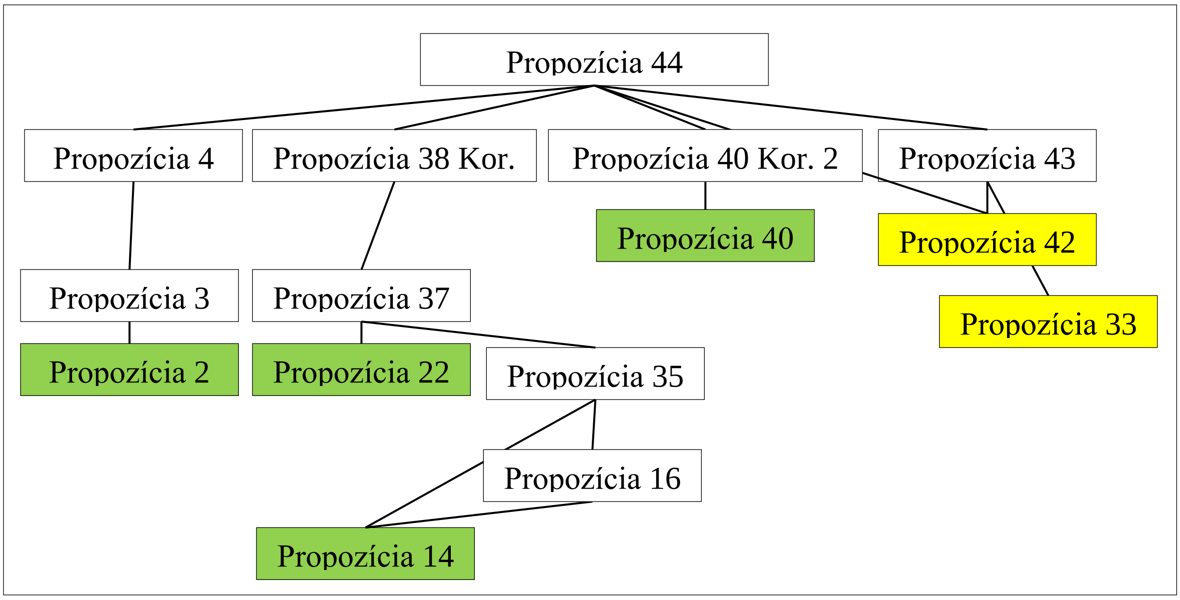
Obr. 6 Graf súvislostí pri dokazovaní propozície 33



Obr. 7 Graf súvislostí pri dokazovaní propozície 34



Obr. 8 Graf súvislostí pri dokazovaní propozície 42



Obr. 9 Graf súvislostí pri dokazovaní propozície 44

Hlavné výsledky spisu *O guli a valci* popisujúce objem, povrch gule a jej častí sú zhrnuté v propozíciách 33, 34, 42 a 44 (propozícia 43 úzko súvisí s propozíciou 42 – zovšeobecňuje záver o výpočte povrchu vrchlíku, ak je väčší než hemisféra). V nasledujúcej časti budú uvedené dôkazy týchto hlavných viet a ďalších pomocných viet, ktoré sa priamo venujú guli i jej častiam a znenie viet, ktoré sú využívané v uvedených dôkazoch.

Vety Eukleidových základov:

Základy Kniha XII, Veta 2: *Obsahy kruhov sú k sebe v takom pomere, v akom sú štvorce ich polomerov.*[28]

Základy Kniha XII, Veta 10: *Objem každého kužeľa je tretina objemu valca s podstavou a výškou zhodnou s daným kužeľom.*[29]

Základy Kniha XII, Veta 11: *Objem kužeľa a valca so zhodnými výškami sú k sebe v takom pomere, v akom sú obsahy ich podstáv.*[30]

Základy Kniha XII, Veta 12: *Objemy podobných kužeľov a valcov sú k sebe v takom pomere, v akom tretie mocniny polomerov ich podstáv.*[31]

Základy Kniha XII, Veta 14: *Objemy kužeľov a valcov so zhodnými podstavami sú k sebe v takom pomere, v akom sú ich výšky.*[32]

Z predpokladov spisu *O guli a valci I* potrebujeme len predpoklad 4, ktorý sa dá zjednodušiť pre potrebu dokazovaných viet:

Predpoklad 4: *Majme rovinu a dve rôzne plochy ležiace v jednom a tom istom polpriestore určenom danou rovinou s hranicami, ktoré sú buď spoločné, alebo ak nie sú, tak sú tieto plochy konkávne v rovnakých smeroch, pričom prvá z nich má body buď spoločné s druhou plochou alebo tieto body ležia medzi danou rovinou a druhou plochou. Potom povrch prvej plochy je menší než povrch plochy druhej.*[33]

Lemmy spisu *O guli a valci* sa priamo odkazujú na vety Eukleidových základov:

Lemma 1 zhŕňa vety 11 a 14 z knihy XII Eukeildových Základov. Lemma 5 sa odvoláva na vetu 12 z knihy XII Eukleidových Základov.

---

[28] Pozri [6], str. 472

[29] Pozri [6], str. 486

[30] Pozri [6], str. 489

[31] Pozri [6], str. 491

[32] Pozri [6], str. 496

[33] Pozri [1], On the Sphere and Cylinder, str. 4

Vety resp. propozície spisu *O guli a valci*:

Propozícia 2: *Majme dané dve úsečky rozdielnej dĺžky, potom existujú ďalšie dve úsečky rozdielnej dĺžky také, že pomer dĺžky väčšej z týchto úsečiek k dĺžke menšej z týchto úsečiek je menší než pomer dĺžok väčšej danej úsečky k dĺžke menšej danej úsečky.*[34]

Propozícia 3: *Majme dané dve úsečky rozdielnej dĺžky a kružnicu, potom existujú: n-uholník vpísaný a n-uholník opísaný kružnici tak, že pomer dĺžky strany opísaného n-uholníka k dĺžke strany vpísaného n-uholníka je menší než pomer dĺžky väčšej danej úsečky k dĺžke menšej danej úsečky.*[35]

Propozícia 4: *Majme dané dve úsečky rozdielnej dĺžky a kruhový výsek, potom existujú : n-uholník vpísaný a n-uholník opísaný výseku tak, že pomer dĺžky strany opísaného n-uholníka k dĺžke strany vpísaného n-uholníka je menší než pomer dĺžky väčšej danej úsečky k dĺžke menšej danej úsečky.*[36]

„Vpísaným“ n-uholníkom v tomto prípade rozumieme n-uholník, ktorého dve strany sú hraničnými polomermi výseku a zvyšné strany majú rovnakú dĺžku. „Opísaný“ n-uholník bude vytvorený časťou dotyčnice, ktorá je rovnobežná so stranou vpísaného n-uholníka, ku kružnicovému oblúku, ktorý je hraničný pre daný výsek, a dvomi úsečkami, ktorých hraničné body sú stred kruhu prislúchajúceho danému výseku a priesečníky priamok obsahujúcich hraničné polomery výseku a spomínanej dotyčnice. Stranami vpísaného a opísaného n-uholníka pre kruhový výsek rozumieme strany, ktoré neobsahujú hraničné polomery kruhového výseku.

Propozícia 6: *Majme dané dve úsečky rozdielnej dĺžky a kruhový výsek, potom existujú: n-uholník vpísaný a n-uholník opísaný výseku tak, že pomer obsahu opísaného n-uholníka k obsahu vpísaného n-uholníka je menší než pomer dĺžky väčšej danej úsečky k dĺžke menšej danej úsečky.*[37]

[34] Pozri [1], On the Sphere and Cylinder, str. 5

[35] Pozri [1], On the Sphere and Cylinder, str. 6

[36] Pozri [1], On the Sphere and Cylinder, str. 7

[37] Pozri [1], On the Sphere and Cylinder, str. 9

Propozícia 13: *Povrch plášťa kolmého valca je rovný obsahu kruhu, ktorého polomer je geometrickým priemerom dĺžky strany (výšky) valca a dĺžky priemeru jeho podstavy.*[38] [39]

Propozícia 14: *Povrch plášťa rotačného kužeľa je rovný obsahu kruhu, ktorého polomer je geometrickým priemerom dĺžky strany kužeľa a dĺžky polomeru jeho podstavy.*[40]

Propozícia 15: *Pomer povrchu plášťa rotačného kužeľa k obsahu jeho podstavy je rovný pomeru dĺžky strany kužeľa k dĺžke polomeru jeho podstavy.*

Propozícia 16: *Ak zostrojíme rez rotačného kužeľa rovinou rovnobežnou s jeho podstavou, potom povrch plášťa časti kužeľa medzi rovinou rezu a rovinou podstavy je rovná obsahu kruhu s polomerom rovným geometrickému priemeru dĺžky časti strany kužeľa medzi rovinou rezu a rovinou podstavy a súčtu dĺžok polomerov podstavy a kruhu, ktorý je rezom kužeľa danou rovinou.* [41]

Pre ďalšie propozície bude potrebný pojem dvojkužeľ, ktorý zavedieme ako teleso pozostávajúce z dvoch kužeľov so spoločnou podstavou, ktorých vrcholy ležia v opačných polpriestoroch určených rovinou obsahujúcou túto spoločnú podstavu.[42]

Propozícia 18: *Objem dvojkužeľa pozostávajúceho z dvoch kolmých kužeľov je rovný objemu kužeľa, ktorého podstava má obsah rovný povrchu jedného z kužeľov dvojkužeľa a výšku rovnú vzdialenosti vrcholu druhého kužeľa od priamky obsahujúcej stranu prvého kužeľa.*[43]

Propozícia 20: *Ak zostrojíme rez jedným z kužeľov tvoriacich dvojkužeľ rovinou rovnobežnou s rovinou základne dvojkužeľa a do dvojkužeľa vpíšeme kužeľ, ktorého podstava bude rezom prvého kužeľa a jeho vrchol bude zhodný s vrcholom druhého kužeľa, získame nový dvojkužeľ. Ak tento nový dvojkužeľ odoberieme z pôvodného*

---

[38] Pri kolmom valci je dĺžka strany rovná výške valca.

[39] Pozri [1], On the Sphere and Cylinder, str. 16

[40] Pozri [1], On the Sphere and Cylinder, str. 19

[41] Pozri [1], On the Sphere and Cylinder, str. 21. Takisto pre propozíciu 15.

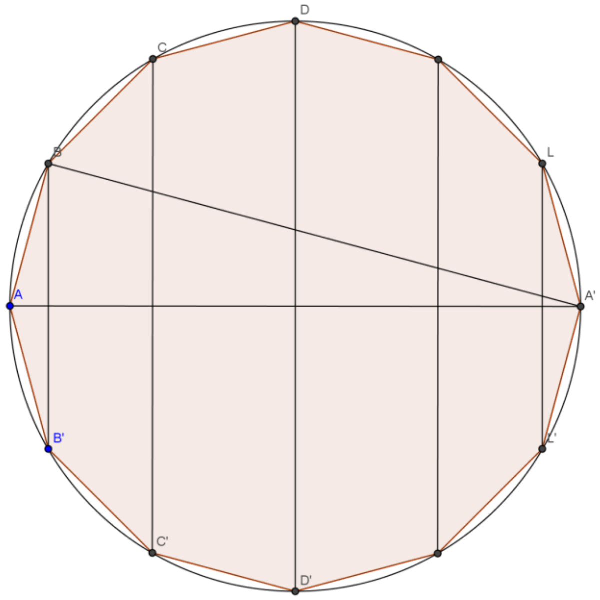
[42] Pojem dvojkužeľ je zavedený ako paralela k Archimédovmu pojmu, ktorý sa do anglického jazyka prekladá ako „solid rhombus". Viď [1], On Sphere and cylinder str. 3

[43] Pozri [1], On the Sphere and Cylinder, str. 24

dvojkužeľa, objem zvyšnej časti bude rovný objemu kužeľa, ktorého obsah podstavy je rovný povrchu časti plášťa prvého kužeľa medzi rovinou rezu a rovinou podstavy a ktorého výška bude rovná vzdialenosti vrcholu druhého kužeľa od priamky obsahujúcej stranu prvého kužeľa.[44]

Propozícia 21: *Majme pravidelný 2n-uholník ABC...A'...C'B'A vpísaný do kružnice. AA' je priemer kružnice a úsečky BB', CC'... majú koncové body (vrcholy 2n-uholníka) osovo súmerné podľa AA', potom:*

$$(|BB'| + |CC'| + \cdots) : |AA'| = |A'B| : |BA|.^{45}$$



Obr. 10 Náčrt k propozícii 21

Propozícia 22: *Majme pravidelný (2n+1)-uholník vpísaný do kružnicového oblúku LAL', ktorého všetky strany (okrem LL') majú rovnakú dĺžku, pričom A je presečník osi LL' a kružnicového oblúku LAL'. Zostrojme úsečky BB', CC',... rovnobežné s LL', potom:*

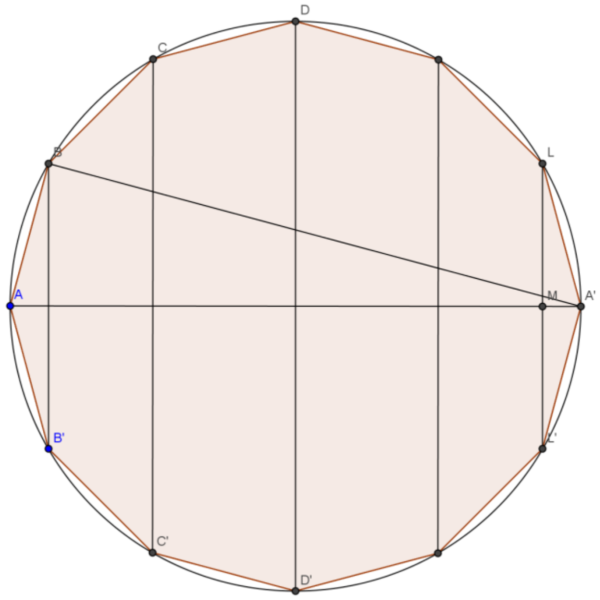
$$(|BB'| + |CC'| + \cdots + |LM|) : |AM| = |A'B| : |BA|,$$

kde bod M je stred úsečky LL' a AA' je priemer prechádzajúci bodom M.[46]

[44] Pozri [1], On the Sphere and Cylinder, str. 26

[45] Pozri [1], On the Sphere and Cylinder, str. 28

[46] Pozri [1], On the Sphere and Cylinder, str. 29



Obr. 11 Náčrt k propozícii 22

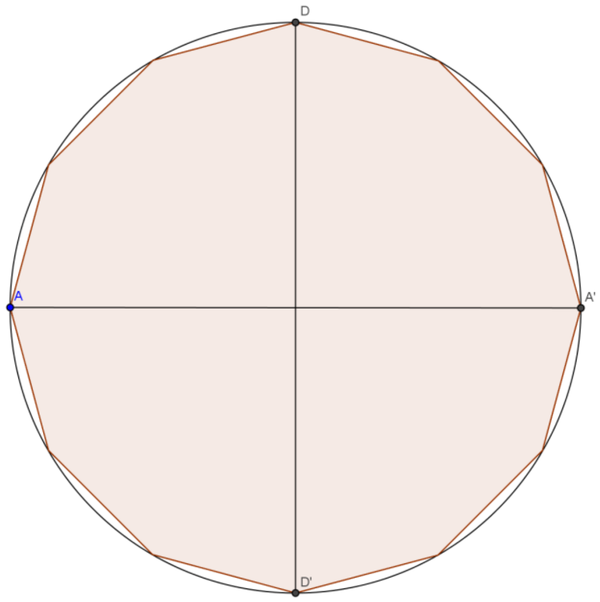
Ďalej nasledujú propozície, ktoré sa priamo týkajú objemu a povrchu gule a jej častí s dôkazmi:

Propozícia 23: *Majme hlavnú kružnicu sféry a dva jej združené priemery AA' a MM', ktoré sú zároveň jednými z vrcholov pravidelného 4n-uholníka vpísaného do tejto kružnice. Potom povrch sféry vzniknutej rotáciou jej hlavnej kružnice okolo jej priemeru je väčší než povrch telesa vzniknutého rotáciou 4n-uholníka okolo tohto priemeru.*[47][48]

Dôkaz: Ak porovnáme hemisféru vzniknutú rotáciou polkružnice *MAM'* okolo *AA'* a polovicu telesa, ktorá vznikne rotáciou 4n-uholníka a leží vo vnútornej časti hemisféry vidíme, že teleso vzniknuté rotáciou polovice 4n-uholníka je vo vnútornej oblasti hemisféry a obe plochy sú konkávne v rovnakých smeroch. Tým pádom môžeme aplikovať predpoklad 4, a teda platí, že povrch telesa vzniknutého rotáciou polovice 4n-uholníka je menší než povrch hemisféry. Obdobne dôkaz prevedieme pre opačnú hemisféru. Sčítaním jednotlivých povrchov teda zistíme že povrch telesa vzniknutého rotáciou 4n-uholníka je menší než povrch sféry. Q.E.D.

[47] Viď Obr. 12.

[48] Pozri [1], On the Sphere and Cylinder, str. 30



Obr. 12 Náčrt k propozícii 23

Propozícia 24: *Majme pravidelný 4n-uholník AB...A'...B'A, kde AA' je priemerom hlavnej kružnice sféry, vpísaný do tejto kružnice,*[49] *potom povrch telesa vzniknutého rotáciou tohto 4n-uholníka okolo AA' je rovnaký ako obsah kruhu, ktorého štvorec dĺžky polomeru je rovný obsahu obdĺžniku:*

$$|\mathrm{BA}|(|\mathrm{BB}'| + |\mathrm{CC}'| + \cdots)$$[50]

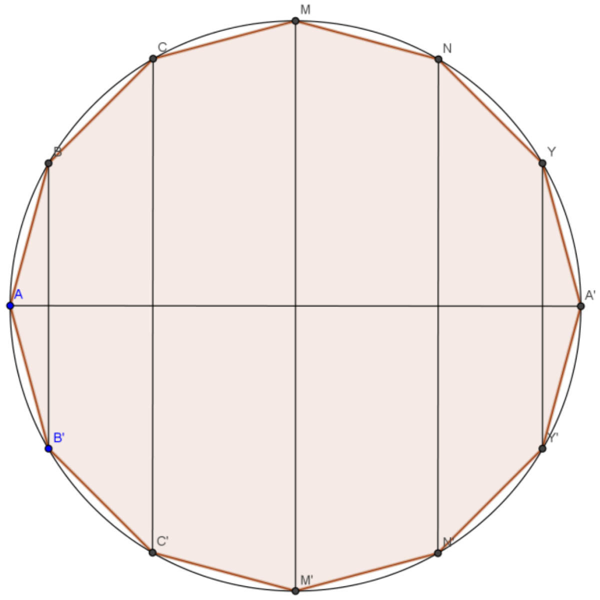
Dôkaz: Povrch telesa vzniknutého rotáciou 4n-uholníka pozostáva z častí plášťov kužeľov. Povrch plášťa kužeľa vzniknutého rotáciou trojuholníka *ABB'* je rovný obsahu kruhu s polomerom $\sqrt{|\mathrm{BA}|.\frac{1}{2}|\mathrm{BB}'|}$. (Propozícia 14)

Povrch plášťa zrezaného kužeľa vzniknutého rotáciou lichobežníka *BB'C'C* je rovný obsahu kruhu s polomerom $\sqrt{|\mathrm{BC}|.\frac{1}{2}(|\mathrm{BB}'| + |\mathrm{CC}'|)}$, (Propozícia 16) obdobne pre ďalšie časti. Keďže 4n-uholník je pravidelný tak AB = BC = ⋯, takže povrch celého telesa bude rovný obsahu kruhu s polomerom:

$$\sqrt{|\mathrm{BA}|.(|\mathrm{BB}'| + |\mathrm{CC}'| + \cdots + |\mathrm{MM}'| + \cdots + |\mathrm{YY}'|)}.$$

[49] Viď Obr. 13.

[50] Pozri [1], On the Sphere and Cylinder, str. 31



Obr. 13 Náčrt k propozícii 24

Propozícia 25: *Povrch telesa uvedeného v propozícii 24, pozostávajúci z častí plášťov kužeľov je menši než štvornásobok obsahu hlavného kruhu sféry.*[51]

Dôkaz: Nech *AB...A'...B'A* je pravidelný 4n-uholník. Tak ako v predošlých propozíciách majme rovnobežné úsečky *BB', CC',... YY'*.[52] Označme *R* obsah kruhu s polomerom:

$$r = |AB|(|BB'| + |CC'| + \cdots + |YY'|),$$

takže povrch telesa vzniknutého rotáciou 4n-uholníka okolo *AA'* je rovný *R*. (Propozícia 24)

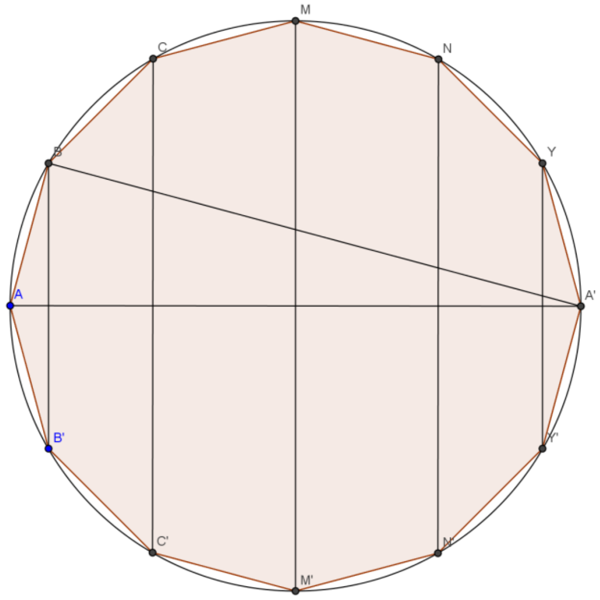
Z propozície 21 vyplýva: $(|BB'| + |CC'| + \cdots |YY'|) : |AA'| = |A'B| : |AB|$.

Po úprave $|AB| . (|BB'| + |CC'| + \cdots |YY'|) = |A'B| . |AA'|$.

Teda $r^2 = |A'B| . |AA'| < |AA'|^2$. Nerovnosť vyplýva z toho, že *A'B* je tetiva kružnice, ktorá nie je priemerom. Keďže *AA*' je priemer hlavnej kružnice, tak musí platiť, že obsah *R* musí byť menší než štvornásobok obsahu hlavného kruhu sféry.

[51] Pozri [1], On the Sphere and Cylinder, str. 32

[52] Viď Obr. 14.



Obr. 14 Náčrt k propozícii 25

Propozícia 26: *Objem telesa opísaného v propozícii 24 je rovný objemu kužeľa, ktorého obsah podstavy je rovný povrchu tohto telesa, a ktorého výška je rovná vzdialenosti stredu sféry od strany vpísaného 4n-uholníka.*[53]

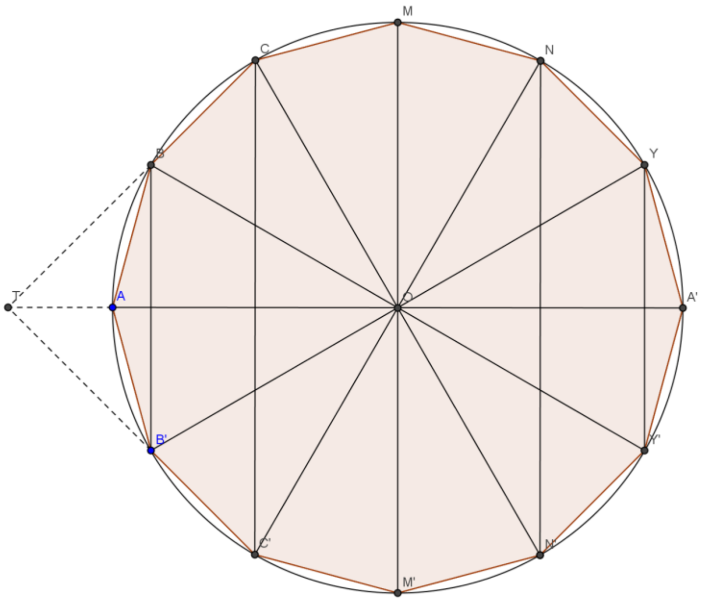
Dôkaz: Nech *AB...A'...B'A* je pravidelný 4n-uholník vpísaný hlavnej kružnici sféry. Tak ako v predošlých propozíciách majme rovnobežné úsečky *BB'*, *CC'*,... *YY'*.[54] Rotáciou trojuholníkov *BOB*', *COC'*,... okolo *AA'* vytvoríme kužele. Potom rotáciou štvoruholníka *OBAB'* okolo *AA'* vznikne dvojkužeľ, ktorého objem je rovný objemu kužeľa, ktorého obsah podstavy je rovný povrchu plášťa kužeľa vytvoreného z trojuholníka *ABB'*, a ktorého výška (označme *p*) je rovná vzdialenosti *O* od *AB* (Propozícia 18).

Priamky *CB* a *C'B'* sa pretnú v bode *T* Potom objem telesa vzniknutého rotáciou trojuholníka *BOC* okolo *AA'* je rovný rozdielu objemu dvojkužeľa vzniknutého rotáciou štvoruholníka *OCTC'* okolo *AA'* a objemu dvojkužeľa vzniknutého rotáciou štvoruholníka *OBTB'* okolo *AA'*, a teda je rovný objemu kužeľa, ktorého obsah podstavy je rovný povrchu plášťa zrezaného kužeľa vzniknutého rotáciou štvoruholníka *BCC'B'* okolo *AA'* a ktorého výška je *p* (Propozícia 20).

[53] Pozri [1], On the Sphere and Cylinder, str. 33

[54] Viď Obr. 15.

Postupne môžeme nasčítať objemy týchto kužeľov so zhodnými výškami a dostaneme objem kužeľa s obsahom podstavy rovným povrchu telesa vzniknutého rotáciou 4n-uholníka okolo *AA'* a výškou rovnou *p*. Q.E.D.



Obr. 15 Náčrt k propozícii 26

Propozícia 27: *Objem telesa opísaného v propozícii 24 je menší než štvornásobok objemu kužeľa, ktorého podstavou je hlavný kruh gule a výškou je polomer gule.*[55]

Dôkaz: Podľa propozície 26 je objem telesa vzniknutého rotáciou spomínaného 4n-uholníka rovný objemu kužeľa, ktorého obsah podstavy je rovný povrchu spomínaného telesa a jeho výška je vzdialenosť stredu kruhu od strany 4n-uholníka – tento objem označme *R*. Majme ďalší kužeľ, ktorého podstava je zhodná s hlavným kruhom sféry a ktorého výška je rovná polomeru sféry – jeho objem označme *S*.

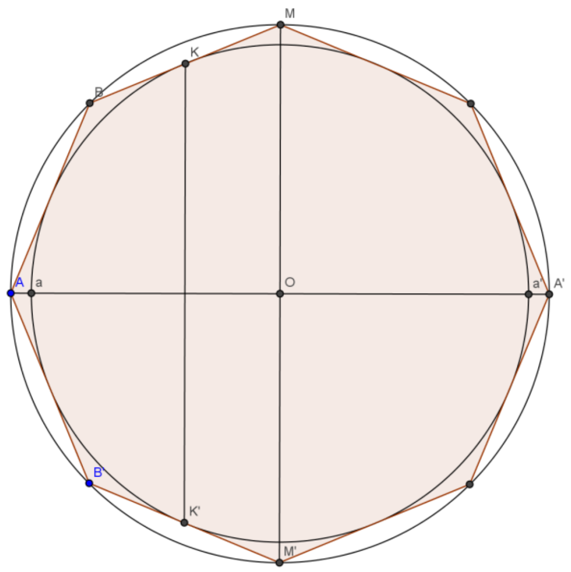
Keďže povrch spomenutého telesa je menší než štvornásobok obsahu hlavného kruhu sféry (Propozícia 25) a vzdialenosť *p* je menšia než polomer sféry musí platiť že objem *R* je menší než štvornásobok objemu *S*. Q.E.D.

Propozícia 28: *Majme pravidelný 4n-uholník AB...A'...B'A opísaný hlavnej kružnici danej sféry, a jeho opísanú kružnicu (táto má teda spoločný stred s hlavnou*

[55] Pozri [1], On the Sphere and Cylinder, str. 34

kružnicou sféry). Objem (a povrch) telesa vzniknutého rotáciou 4n-uholníku okolo AA' bude väčší než objem (a povrch) danej sféry.[56]

Dôkaz: Tvrdenie o objeme spomínaných telies je jasné, pretože guľa, ktorá vznikne rotáciou spomínaného kruhu je podmnožinou telesa, ktoré vznikne rotáciou 4n-uholníka okolo *AA'*. Tvrdenie o povrchu vyplýva z predpokladu 4. Rotáciou priamky KK'(bod *K* je dotykový bod hlavnej kružnice sféry a priamky *BM* a bod *K'* je osovo súmerný s bodom *K* podľa osi *AA'*)[57] okolo *AA'* dostaneme rovinu, ktorá rozdelí priestor na dva polpriestory. Rotáciou kružnicového oblúku *Ka'K'* okolo *AA'* dostaneme vrchlík, rotáciou mnohouholníka *KM...A'...M'K'* okolo *AA'* dostaneme plochu, ktorá bude obsiahnutá vo vnútornej časti vrchlíku a keďže obe tieto plochy sa nachádzajú v rovnakom polpriestore a sú konkávne v rovnakých smeroch, musí byť povrch vrchlíka menší než povrch telesa vzniknutého rotáciou mnohouholníka *KM...A'...M'K'* okolo *AA'* (Predpoklad 4). Obdobne pre druhý polpriestor. Po sčítaní odpovedajúcich si povrchov platí tvrdenie Propozície 28. Q.E.D.



Obr. 16 Náčrt k propozícii 28

[56] Pozri [1], On the Sphere and Cylinder, str. 35

[57] Viď Obr. 16.

Propozícia 29: *Povrch telesa vzniknutého rotáciou 4n-uholníka uvedeného v propozícii 28 je rovný obsahu kruhu, ktorého štvorec dĺžky polomeru je rovný:*

$$|\mathrm{AB}|(|\mathrm{BB}'| + |\mathrm{CC}'| + \cdots)$$

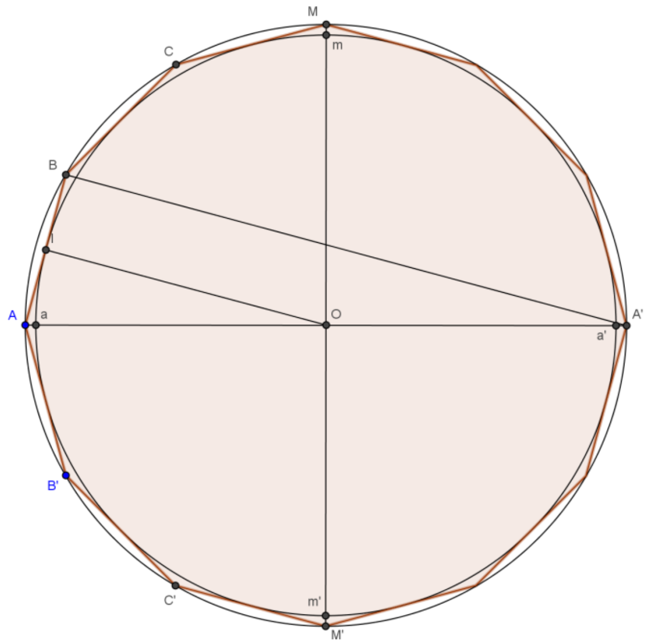
Dôkaz: Spomínaný 4n-uholník má opísanú kružnicu[58] a stačí aplikovať dôkaz propozície 24.

Propozícia 30: *Povrch telesa vzniknutého rotáciou 4n-uholníka uvedeného v propozícii 28 je väčší než štvronásobok obsahu hlavného kruhu sféry.*[59]

Dôkaz: Nech *AB...A'...B'A* je 4n-uholník opísaný hlavnej kružnici *ama'* sféry a nech body *A, A', a, a'* ležia na priamke. Označme *R* obsah kruhu rovného povrchu telesa vzniknutého rotáciou 4n-uholníka okolo *AA'* a *r* polomer tohto kruhu.

Z propozície 21 vyplýva: $(|\mathrm{BB}'| + |\mathrm{CC}'| + \cdots) : |\mathrm{AA}'| = |\mathrm{A}'\mathrm{B}| : |\mathrm{AB}|$.

Po úprave $|\mathrm{AB}|.(|\mathrm{BB}'| + |\mathrm{CC}'| + \cdots) = |\mathrm{A}'\mathrm{B}|.|\mathrm{AA}'|$.



Obr. 17 Náčrt k propozícii 30

[58] Viď Obr. 16.

[59] Pozri [1], On the Sphere and Cylinder, str. 36. Takisto pre propozíciu 29

Z propozície 29 vyplýva: $r^2 = |A'B|.|AA'| > |A'B|^2$. Nerovnosť vyplýva z toho, že *A'B* je tetiva kružnice, ktorá nie je priemerom. Ale $|A'B| = 2|OP|$, kde P je bod dotyku *AB* a kružnice *ama'*, a teda veľkosť *OP* je rovná polomeru kružnice *ama'*, a teda *r* je väčší než priemer kružnice *ama'*. Obsah *R* musí byť väščí než štvornásobok obsahu hlavného kruhu danej sféry. Q.E.D.

Propozícia 31: *Objem telesa vzniknutého rotáciou 4n-uholníka uvedeného v propozícii 28 je rovný objemu kužeľa, ktorého obsah podstavy je rovný povrchu tohto telesa a jeho výška je rovná polomeru danej sféry.*[60]

Dôkaz: Keďže uvedený 4n-uholník má opísanú kružnicu a vzdialenosť stredu sféry od strany tohto 4n-uholníka je rovná polomeru menšej kružnice je táto propozícia identická s propozíciou 26.

Korolár propozície 31: *Objem telesa vzniknutého rotáciou 4n-uholníka uvedeného v propozícii 28 je väčší než štvornásobok objemu kužeľa, ktorého podstava je zhodná s hlavným kruhom sféry a ktorého výška je rovná polomeru danej sféry.*

Dôkaz: Povrch telesa vzniknutého rotáciou 4n-uholníka uvedeného v propozícii 28 je väčší než štvornásobok obsahu hlavného kruhu danej sféry (Propozícia 30). Potom kužeľ (prvý) s obsahom podstavy rovným povrchu telesa vzniknutého rotáciou 4n-uholníka uvedeného v propozícii 28 a výškou rovnou polomeru sféry má objem väčší než štvornásobok objemu kužeľa (druhý) s rovnakou výškou a podstavou zhodnou s hlavným kruhom sféry (Lemma 1). Potom podľa propozície 31 je objem telesa vzniknutého rotáciou 4n-uholníka uvedeného v propozícii 28 väčší než štvornásobok objemu druhého kužeľa.

Propozícia 32: *Ak hlavnej kružnici sféry vpíšeme pravidelný 4n-uholník ab...a'...b'a a opíšeme jej pravidelný 4n-uholník AB...A'...B'A, tak povrchy telies vzniknutých rotáciou opísaného 4n-uholníka okolo AA' a vpísaného 4n-uholníka okolo aa' budú v takom pomere, v akom sú druhé mocniny dĺžok ich strán a objemy týchto telies budú v takom pomere, v akom sú tretie mocniny dĺžok ich strán.*[61]

[60] Pozri [1], On the Sphere and Cylinder, str. 37 Takisto pre korolár propozície 31.

[61] Pozri [1], On the Sphere and Cylinder, str. 38

Dôkaz: Nech body *A*, *A'*, *a*, *a'* ležia na jednej priamke pričom *aa'* je priemer menšej sféry a *AA'* je priemer väčšej sféry. Nech *mm'* je priemer menšej sféry združený s *aa'* a *MM'* je priemer väčšej sféry združený s *AA'*. Úsečky *BB'*, *CC'*... a *bb'*, *cc'*... sú rovnobežné navzájom a zároveň rovnobežné s *MM'*. Označme *R* povrch telesa vzniknutého rotáciou 4n-uholníka *AB...A'...B'A* okolo *AA'* a označme *S* povrch telesa vzniknutého rotáciou 4n-uholníka *ab...a'...b'a* okolo *aa'*.

Podľa propozície 29 obsahy *R* a *S* odpovedajú kruhom, označme polomery týchto kruhov postupne *r* a *s*.

Podľa propozície 29 ďalej:

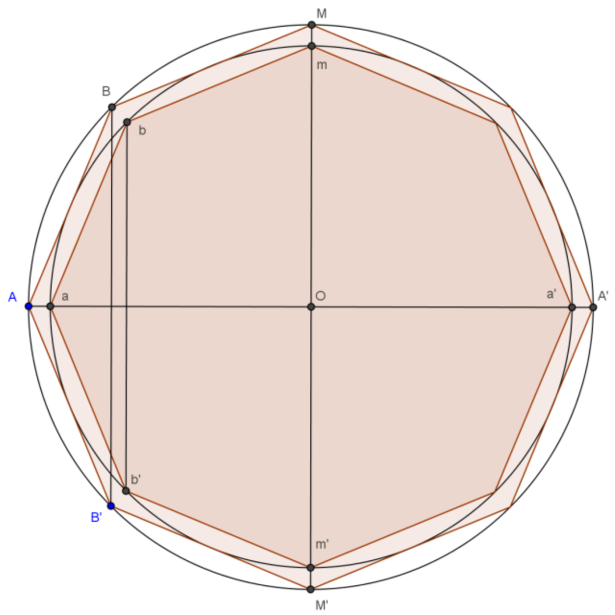
$$\mathrm{r}^2 = |\mathrm{AB}|.(|\mathrm{BB}'| + |\mathrm{CC}'| + \cdots),$$

a podľa propozície 24:

$$\mathrm{s}^2 = |\mathrm{ab}|.(|\mathrm{bb}'| + |\mathrm{cc}'| + \cdots).$$

Keďže sú 4n-uholníky navzájom podobné, potom obdĺžniky, ktorých obsahy vystupujú v predošlých rovniciach sú tiež podobné a ich obsahy sú v pomere $|\mathrm{AB}|^2 : |\mathrm{ab}|^2$. A teda aj $\mathrm{R} : \mathrm{S} = |\mathrm{AB}|^2 : |\mathrm{ab}|^2$.

Označme *V* objem kužeľa, ktorého podstava má obsah *R* a výšku veľkosti *Oa* a označme *W* objem kužeľa s obsahom postavy *S* a výškou rovnou vzdialenosti stredu sféry *O* od *ab* – túto vzdialenosť označme *p*. Potom podľa propozícií 31 a 26 je *V* rovné objemu telesa vzniknutého rotáciou 4n-uholníka *AB...A'...B'A* okolo *AA'* a *W* je rovné objemu telesa vzniknutého rotáciou 4n-uholníka *ab...a'...b'a* okolo *aa'*. Kědže dané 4n-uholníky sú podobné, platí $|\mathrm{AB}| : |\mathrm{ab}| = |\mathrm{Oa}| : \mathrm{p}$, čo je pomer výšok kužeľov s objemom *V* a s objemom *W* a vieme, že $\mathrm{R} : \mathrm{S} = |\mathrm{AB}|^2 : |\mathrm{ab}|^2$. Z uvedeného vyplýva, že $\mathrm{V} : \mathrm{W} = |\mathrm{AB}|^3 : |\mathrm{ab}|^3$. Q.E.D.



Obr. 18 Náčrt k propozícii 32

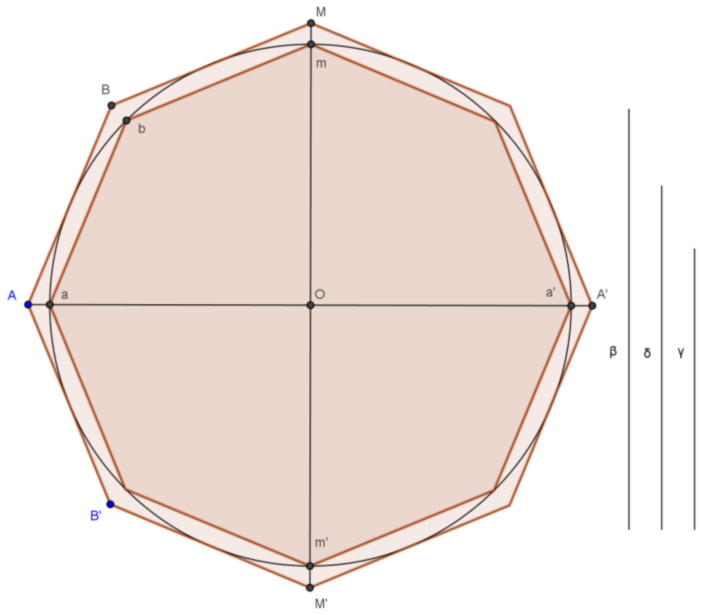
Propozícia 33: *Povrch gule je štyrikrát väčší než obsah jej najväčšieho kruhu.*[62]

Dôkaz tejto matematickej vety je vedený sporom v dvoch krokoch – predpoklad nerovnosti je rozdelený na dve ostré nerovnosti.

Dôkaz: Označme *C* obsah kruhu, štyrikrát väčšieho, než najväčší kruh gule. Prepokladajme, že sa *C* nerovná povrchu gule.

I. Nech je obsah *C* menší než povrch gule. Potom môžeme nájsť dve úsečky s dĺžkami γ a β ($\beta > \gamma$) tak, aby: $\beta : \gamma <$ (povrch gule)$: C$(Propozícia 2). Nech δ je geometrický priemer dĺžok γ a β. Do kruhu vpíšeme 4n-uholník *ab...a'...b'a* a kruhu opíšeme 4*n*-uholník *AB...A'...B'A*, ktoré sú podobné a ich pomer dĺžok strán je menší než pomer $\beta : \delta$ (Propozícia 3).

[62] Pozri [1], On the Sphere and Cylinder, str. 39



Obr. 19 Náčrt k propozícii 33

Označme *R* povrch telesa vzniknutého rotáciou 4n-uholníku *AB...A'...B'A* okolo *AA'* a označme *S* povrch telesa vznikutého rotáciou 4n-uholníku *ab...a'...b'a* okolo *aa'*. Potom platí: $\mathrm{R}:\mathrm{S} = |\mathrm{AB}|^2 : |\mathrm{ab}|^2$ (Propozícia 32). Zároveň $|\mathrm{AB}|^2 : |\mathrm{ab}|^2 < \beta^2 : \delta^2$. Platí $\delta^2 = \beta . \gamma$ (*δ* je geometrický priemer *β* a *γ*). Po dosadení:

$$\beta^2 : \delta^2 = \beta : \gamma < \text{(povrch gule)} : \mathrm{C}.$$

A teda by malo platiť $\mathrm{R}:\mathrm{S} < \text{(povrch gule)} : \mathrm{C}$, ale to je nemožné pretože *R* je väčší než povrch gule (Propozícia 28) a zároveň *S* je menší než C (Propozícia 25). To je spor s naším predpokladom, a teda C nemôže byť menší než povrch gule.

II. Nech je teda obsah C väčší než povrch gule. Obdobne ako v I. zvolíme *γ* a *β* tak, aby platilo: $\beta:\gamma < \mathrm{C} : \text{(povrch gule)}$. Opäť vpíšeme a opíšeme hlavnému kruhu sféry 4*n*-uholníky a označíme *R* a *S* povrchy telies tak ako v I. Potom v tomto prípade platí (postupujeme obdobne ako v I.):

$$\mathrm{R}:\mathrm{S} < \mathrm{C} : \text{(povrch gule)}$$

Toto je opäť spor, pretože povrch vonkajšieho telesa je väčší než *C* (Propozícia 30) a povrch vnútorného telesa je menší než povrch gule (Propozícia 23). *C* teda nemôže byť väčší než povrch gule.

Z uvedeného je teda zrejmé, že $\mathrm{C} = \text{(povrch gule)}$.

Propozícia 34: *Objem každej gule je rovný štvornásobku objemu kužeľa, ktorého podstava je zhodná s hlavným kruhom gule a jeho výška je rovná polomeru gule.*[63]

Dôkaz je podobne ako v predošlom prípade vedený sporom a predpoklad nerovnosti je rozdelený na dve ostré nerovnosti.

Dôkaz: Nech hlavný kruh gule je *ama'*. Predpokladajme, že objem gule nie je štvornásobok objemu príslušného kužeľa.

Potom:

I. Nech je objem gule v väčší než štvornásobok objemu príslušného kužeľa.

Označme *U* objem kužeľa, ktorého obsah podstavy je štyrikrát väčší než obsah najväčšieho kruhu gule a jeho výška je rovná polomeru gule. Potom môžeme nájsť dve úsečky s dĺžkami γ a β $(\beta > \gamma)$ tak, aby: $\beta : \gamma < (\text{objem gule}) : U$ Medzi β a γ vložíme ešte dve úsečky s dĺžkami δ a ε, ktorých dĺžky budú s dĺžkami β a γ tvoriť aritmetickú postupnosť.[64] Opäť kruhu opíšeme 4n-uholník *AB...A'...B'A* a vpíšeme 4*n*- uholník *ab...a'...b'a*, ktorých pomer strán bude menší než β : δ. Všetky tri rovinné útvary necháme rotovať okolo úsečky *AA'*. Objem telesa vzniknutého rotáciou opísaného 4n-uholníka (označme *V*) a objem telesa vzniknutého rotáciou vpísaného 4n-uholníka (označme *W*) budú k sebe v takom istom pomere, v akom sú tretie mocniny dĺžok ich strán (Propozícia 32): $V : W = |AB|^3 : |ab|^3$.

Platí $V : W < \beta^3 : \delta^3 < \beta : \gamma < (\text{objem gule}) : U$. Druhá nerovnosť vyplýva z definície dĺžok β, γ, δ a ε.

To je však spor, pretože *V* je väčší než objem gule (Propozícia 28) a *W* je menší než objem *U* (Propozícia 27).

Guľa teda nemá väčší objem než *V*.

II. Nech je objem gule menší než objem *U*. V tomto prípade volíme β a γ tak, aby platilo: $\beta : \gamma < U : (\text{objem gule})$.

Opakujeme postup tak ako v I. a zisťujeme: $V : W < U : (\text{objem gule})$.

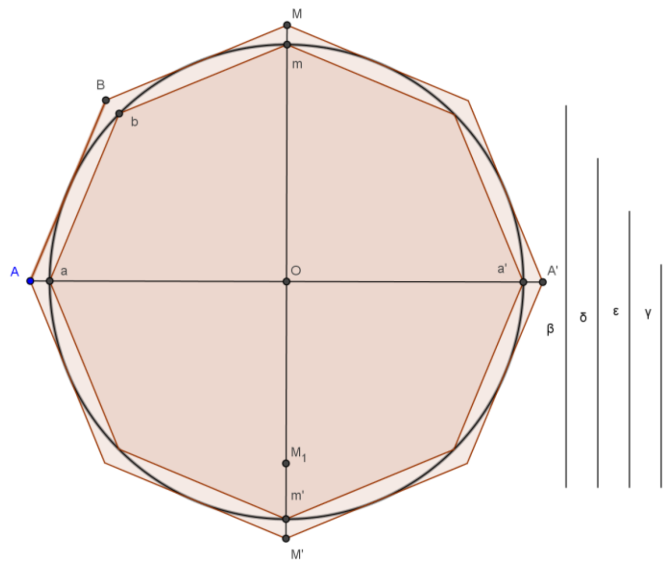
[63] Pozri [1], On the Sphere and Cylinder, str. 41

[64] Viď Obr. 20.

Toto je spor, pretože *V* je väčší než *U* (Propozícia 31) a *W* je menší než objem gule.

Tým pádom *U* nie je väčší než objem gule.

Z uvedeného vyplýva, že platí: *U* = (objem gule).



Obr. 20 Náčrt k propozícii 34

Propozícia 35: *Majme pravidelný (2n+1)-uholník vpísaný do kružnicového oblúku LAL', ktorého všetky strany (okrem LL') majú rovnakú dĺžku, pričom A je priesečník osi LL' a kružnicového oblúku LAL'. Zostrojme úsečky BB', CC',... rovnobežné s LL' a bod M ako stred LL'. Potom povrch telesa vzniknutého rotáciou (2n+1)-uholníka okolo AM je rovný obsahu kruhu ktorého druhá mocnina polomeru je rovná obsahu obdĺžniku:*

$$|\mathrm{AB}|\left(|\mathrm{BB}'| + |\mathrm{CC}'| + \cdots + |\mathrm{KK}'| + \frac{|\mathrm{LL}'|}{2}\right).$$ [65]

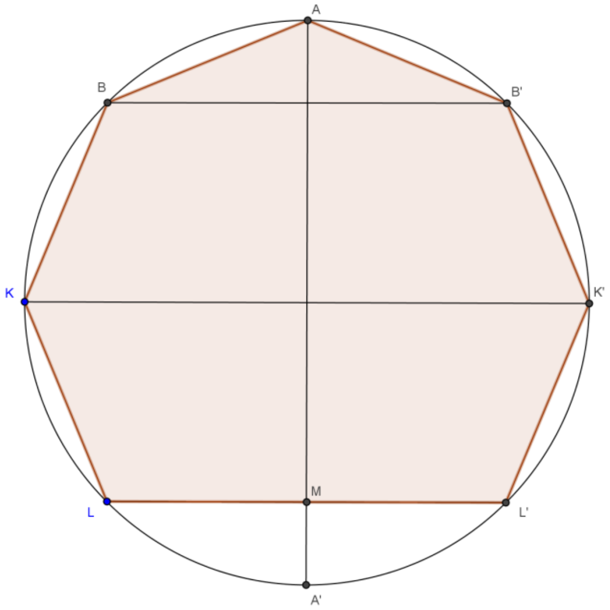
Dôkaz: Povrch telesa opísaného v tejto propozícii je zložený z častí plášťov kužeľov. Najprv vezmime povrch plášťa kužeľa vzniknutého rotáciou trojuholníku *BAB'* okolo *AA'*, ten je rovný obsahu kruhu s polomerom $\sqrt{|\mathrm{AB}|.\frac{1}{2}|\mathrm{BB}'|}$ (Propozícia 14).

[65] Pozri [1], On the Sphere and Cylinder, str. 44

Povrch plášťa zrezaného kužeľa vzniknutého rotáciou lichobežníka *BCC'B'* je rovný obsahu kruhu s polomerom $\sqrt{|\mathrm{BC}|.\frac{1}{2}(|\mathrm{BB}'| + |\mathrm{CC}'|)}$ (Propozícia 16).

Postupným sčítaním týchto povrchov, pričom vieme, že všetky strany (2*n*+1)-uholníka okrem strany *LL'* sú zhodné a všetky kruhy sú podobné a ich obsahy sú v pomere druhých mocnín ich polomerov, zistíme, že povrch nami skúmaného telesa odpovedá obsahu kruhu s polomerom:

$$\sqrt{\mathrm{AB}\left(\mathrm{BB}' + \mathrm{CC}' + \cdots + \mathrm{KK}' + \frac{\mathrm{LL}'}{2}\right)}.$$



Obr. 21 Náčrt k propozícii 35

Propozícia 36: *Povrch telesa uvedeného v propozícii 35 je menší než povrch vrchlíka vzniknutého rotáciou kružnicového oblúka LAL' okolo AM.*[66]

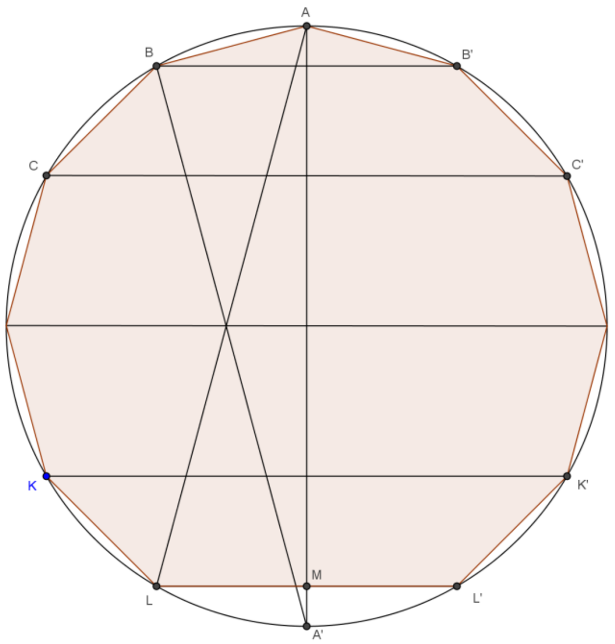
Dôkaz: Táto veta priamo vyplýva z predpokladu 4. Ide o dve plochy ležiace v rovnakom polpriestore ohraničenom rovinou kruhu vzniknutého rotáciou *LL'*. Pričom plocha vzniknutá rotáciou (2n+1)-uholníka leží celá vo vnútornej časti vrchlíku vzniknutého rotáciou kružnicového oblúku *LAL'* a obe sú konkávne v rovnakých smeroch.

[66] Pozri [1], On the Sphere and Cylinder, str. 45. Takisto pre poropozíciu 37.

Propozícia 37: *Povrch telesa uvedeného v propozícii 35 je menší než obsah kruhu s polomerom AL.*

Dôkaz: Nech priamka *AM* pretne hlavnú kružnicu ešte v bode *A'*. Podľa propozície 35 je povrch telesa vzniknutého rotáciou (2n+1)-uholníka rovný obsahu kruhu, ktorého druhá mocnina polomeru je: $|AB|(|BB'| + |CC'| + \cdots + |KK'| + |LM|)$. Ale podľa propozície 22 sa tento obsah rovná $|A'B|.|AM| < |A'A|.|AM|$. Táto nerovnosť platí, lebo *A'B* je tetiva, ktorá nie je priemerom. Keďže *AA'L* je pravouhlý trojuholník (hlavná kružnica sféry je tálesova kružnica nad *AA'*) platí v ňom Eukleidova veta o odvesne, a teda platí $|A'A|.|AM| = |AL|^2$.

Z uvedeného teda vyplýva, že povrch telesa vytvoreného rotáciou (2n+1)-uholníka okolo *AM* je menší než obsah kruhu s polomerom rovným $|AL|$. Q.E.D.



Obr. 22 Náčrt k propozícii 37

Propozícia 38: *Objem telesa uvedeného v propozícii 35, ktoré je menšie než polguľa spolu s objemom kužeľa vzniknutého rotáciou trojuholníka LOL' okolo AO, kde O je stred sféry*[67] *je rovný objemu kužeľa, ktorého obsah podstavy je rovný povrchu tohto telesa a výška je vzdialenosť stredu gule od ľubovoľnej strany vpísaného (2n+1)-uholníka okrem LL'.*[68]

[67] Viď Obr. 23.

[68] Pozri [1], On the Sphere and Cylinder, str. 46

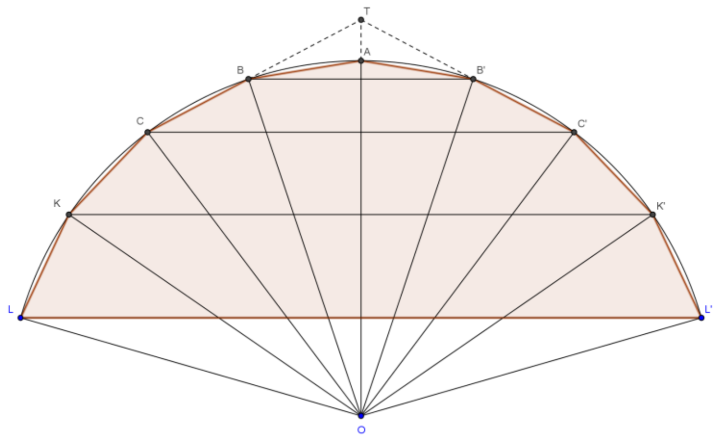
Dôkaz: Označme *p* vzdialenosť bodu *O* od *AB*.

Rotáciou štvoruholníka *OBAB'* vznikne dvojkužeľ, ktorý bude mať objem rovný objemu kužeľa s obsahom podstavy zhodným s povrchom tohto dvojkužeľa a výškou rovnou *p* (Propozícia 18).

Nech *T* je priesečník priamok *CB* a *C'B'*. Objem telesa vytvoreného rotáciou trojuholníka *BOC* okolo *AO* je rovný rozdielu objemov dvojkužeľov vzniknutých rotáciou štvoruholníka *OCTC'* a štvoruholníka *OBTB'* okolo *AO*. Podľa propozície 20 je objem tohto telesa rovný objemu kužeľa, ktorého obsah podstavy je rovný povrchu plášťa zrezaného kužeľa vytvoreného rotáciou štvoruholníka *BCC'B'* okolo *AO* a ktorého výška je *p*.

Obdobne vypočítame objem ďalších častí.

Postupným sčítaním týchto objemov získame objem kužeľa, ktorého obsah podstavy je rovný povrchu telesa vzniknutého rotáciou (2n+1)-uholníka okolo *AO* a ktorého výška je rovná *p*. Q.E.D.



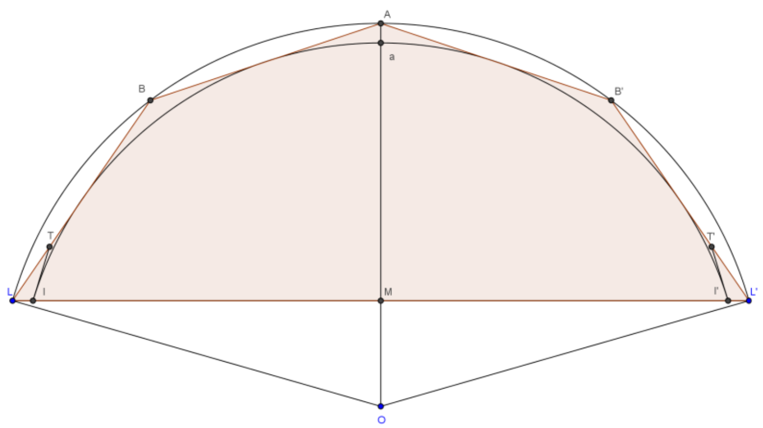
Obr. 23 Náčrt k propozícii 38

Korolár propozície 38: *Objem kužeľa, ktorého podstava je kruh s polomerom rovným* |AL| *a výška je rovná polomeru sféry, je väčší než objem telesa uvedeného v propozícii 38.*[69]

[69] Pozri [1], On the Sphere and Cylinder, str. 47

Dôkaz: Objem telesa uvedeného v propozícii 38 je rovný objemu kužeľa, ktorého obsah podstavy je rovný povrchu tohto telesa a výška je rovná *p*. Tvrdenie platí, pretože podľa propozície 37 je obsah kruhu s polomerom rovným |AL| väčší než povrch telesa uvedeného v propozícii 38 a *p* je menšie než *AO* (polomer sféry). Máme teda dva kužele pričom prvý z nich má väščí obsah podstavy aj výšku ako druhý, teda objem prvého z nich musí byť väčší než objem druhého. Q.E.D.

Propozícia 39: *Majme pravidelný (2n+1)-uholník opísaný kružnicovému oblúku lal' hlavnej kružnice sféry menšiemu než polkružnica, ktorého všetky strany (okrem LL') majú rovnakú dĺžku, pričom a je priesečník osi ll' a kružnicového oblúku lal'* a bod *m, ktorý je stredom úsečky ll'. Povrch telesa vzniknutého rotáciou tohto (2n+1)-uholníka okolo priamky am je väčší než povrch vrchlíku vzniknutého rotáciou kružnicového oblúku lal' okolo priamky am.*[70]



Obr. 24 Náčrt k propozícii 39

Dôkaz: Nech *T* je bod úsečky *LB* taký, že priamka *lT* je dotyčnica hlavnej kružnice sféry v bode *l*. Potom povrch telesa vzniknutého rotáciou mnohouholníka *lT...BAB'...T'l'* okolo *AM* je väčší než povrch vrchlíka vzniknutého rotáciou kružnicového oblúka lal' okolo *aM* – vyplýva to z predpokladu 4 – máme dve plochy ležiace v jednom polpriestore, z ktorých jedna je vo vnútornej časti druhej a obe sú konkávne v rovnakých smeroch. Tým pádom aj povrch telesa vzniknutého rotáciou mnohouholníka *L...BAB'...L* je väčší než povrch spomínaného vrchlíku (pretože *lLT*

[70] Pozri [1], On the Sphere and Cylinder, str. 47

tvorí pravouhlý trojuholník, v ktorom *LT* je preponou a *lT* je odvesnou, a teda $|\mathrm{LT}| > |\mathrm{lT}|$). Q.E.D.

Korolár propozície 39: *Povrch telesa vzniknutého rotáciou mnohouholníka uvedeného v propozícii 39 je rovný obsahu kruhu, ktorého druhá mocnina polomeru je* rovná:

$$|\mathrm{AB}|\left(|\mathrm{BB'}| + |\mathrm{CC'}| + \cdots + |\mathrm{KK'}| + \frac{|\mathrm{LL'}|}{2}\right).$$

Dôkaz: Spomínaný mnohouholník má opísaný kružnicový oblúk *LAL'*, a teda stačí aplikovať dôkaz propozície 35.

Propozícia 40: *Povrch telesa opísaného v propozícii 39 je väčší než obsah kruhu s polomerom al.*[71]

Dôkaz: Nech *a'* je ďalší priesečník priamky *aO* a hlavnej kružnice sféry. Nech *A'* je ďalší priesečník priamky *AO* a kružnice opísanej mnohouholníku opísanému hlavnej kružnici sféry. Nech *N* je dotykový bod hlavnej kružnice sféry a úsečky *AB*

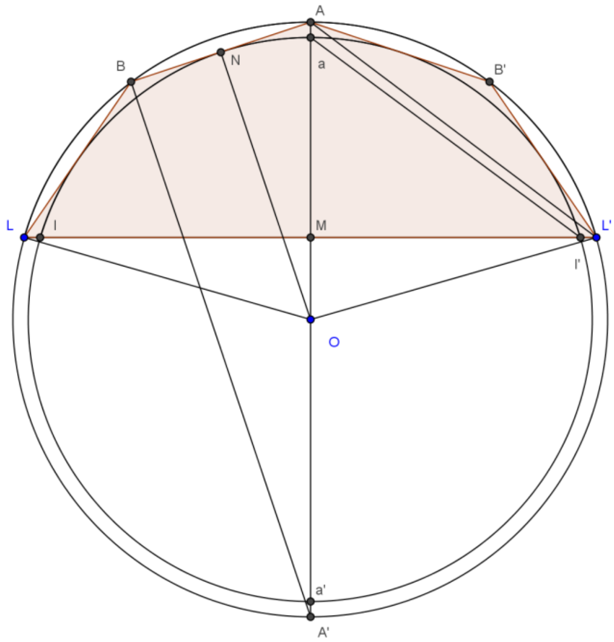
Podľa koroláru propozície 39 je povrch telesa vzniknutého rotáciou mnohouholníka *L...BAB'...L'O* rovný obsahu kruhu, ktorého druhá mocnina polomeru je rovná:

$|\mathrm{AB}|\left(|\mathrm{BB'}| + |\mathrm{CC'}| + \cdots + |\mathrm{KK'}| + \frac{|\mathrm{LL'}|}{2}\right) = |\mathrm{A'B}||\mathrm{AM}|$ (Propozícia 22)

Ďalej platí $|\mathrm{AM}| > |\mathrm{am}|$ a $|\mathrm{AL}| > |\mathrm{al}|$ a trojuholníky *AON* a *AA'B* sú podobné (podľa vety sus) s koeficientom $\frac{1}{2}$. Platí teda : $|\mathrm{A'B}| = 2|\mathrm{ON}| = |\mathrm{aa'}|$

Z uvedeného vyplýva: $|\mathrm{A'B}|.|\mathrm{AM}| > |\mathrm{am}|.|\mathrm{aa'}|$. A po aplikácii Eukleidovej vety o výške na trojuholník *al'a'* platí $|\mathrm{am}|.|\mathrm{aa'}| = |\mathrm{al'}|^2$, a teda aj $|\mathrm{A'B}|.|\mathrm{AM}| > |\mathrm{al'}|^2$.

[71] Pozri [1], On the Sphere and Cylinder, str. 49. Takisto pre korolár propozície 39



Obr. 25 Náčrt k propozícii 40

Korolár 1 Propozície 40: *Objem telesa vzniknutého rotáciou mnohouholníka L...BAB'...L'O je rovný objemu kužeľa, ktorého obsah podstavy je rovný povrchu tohto telesa a jeho výška je polomer danej sféry.*

Dôkaz: Spomínaný mnohouholník je vpísaný do kružnice s väčším polomerom než má daná sféra ale rovnakým stredom, tým pádom môžme aplikovať dôkaz propozície 38.

Korolár 2 propozície 40: *Objem telesa vzniknutého rotáciou mnohouholníka L...BAB'...L'O je väčší než objemu kužeľa, ktorého podstavou je kruh s polomerom al a jeho výška je polomer danej sféry.*[72]

Propozícia 41: *Majme dva pravidelné (2n+1)-uholníky – jeden opísaný (LK…BAB'...K'L') kružnicovému oblúku lal' hlavnej kružnice sféry menšiemu než polkružnica, ktorého všetky strany (okrem LL') majú rovnakú dĺžku a druhý vpísaný (lk...bab'...k'l') do tohto kružnicového oblúku podobný opísanému, pričom a je priesečník osi ll' a kružnicového oblúku lal' a bod m, ktorý je stredom úsečky ll'. Potom povrchy telesa vytvoreného rotáciou opísaného (2n+1)-uholníka a telesa vytvoreného rotáciou vpísaného (2n+1)-uholníka sú v tom istom pomere ako* $|AB|^2 : |ab|^2$ *a ich objemy spolu s kužeľmi, ktorých podstavy sú kruhy vzniknuté*

[72] Pozri [1], On the Sphere and Cylinder, str. 50. Takisto pre korolár 1 propozície 40

rotáciou úsečky LL' (opísaný) a rotáciou úsečky ll' (vpísaný) okolo priamky am a majú spoločný vrchol v strede hlavnej kružnice sú v tom istom pomere ako $|AB|^3 : |ab|^3$.[73]

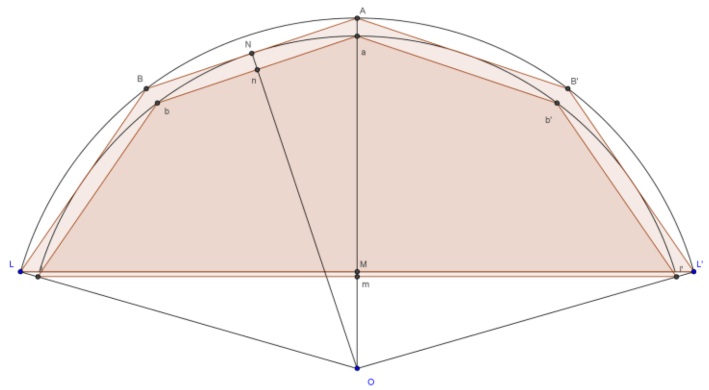
Dôkaz: Povrch telesa vzniknutého rotáciou mnohouholníka *L...BAB'...L'O* je podľa koroláru propozície 39 rovný obsahu kruhu s druhou mocninou polomeru rovnou:

$$|AB|\left(|BB'| + |CC'| + \cdots + |KK'| + \frac{|LL'|}{2}\right)$$

a povrch telesa vzniknutého rotáciou mnohouholníka *l...bab'...l'O* je podľa propozície 35 rovný obsahu kruhu s druhou mocninou polomeru rovnou:

$$|ab|\left(|bb'| + |cc'| + \cdots + |kk'| + \frac{|ll'|}{2}\right)$$

Obsahy týchto dvoch kruhov sú v pomere $|AB|^2 : |ab|^2$. Tým pádom aj povrchy spomínaných telies sú v tomto pomere.



Obr. 26 Náčrt k propozícii 41

Označme *S* povrch telesa vzniknutého rotáciou mnohouholníka *L...BAB'...L'O* okolo priamky *OA* a *s* povrch telesa vzniknutého rotáciou mnohouholníka *l...bab'...l'O* okolo priamky *OA*. Podľa koroláru 1 propozície 40 je objem telesa vzniknutého rotáciou mnohouholníka *L...BAB'...L'O* okolo priamky *OA* rovný objemu kužeľa s obsahom podstavy *S* a výškou $|ON|$ a podľa propozície 38 je objem telesa vzniknutého rotáciou mnohouholníka *l...bab'...l'O* okolo priamky *OA* rovný objemu

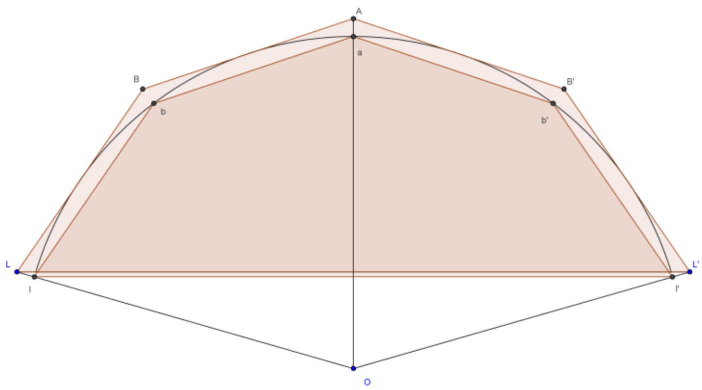
[73] Pozri [1], On the Sphere and Cylinder, str. 50

kužeľa s obsahom podstavy s a výškou $|\mathrm{On}|$. Ale $\mathrm{S}:\mathrm{s} = |\mathrm{AB}|^2 : |\mathrm{ab}|^2$ a $|\mathrm{ON}| : |\mathrm{On}| = |\mathrm{AB}| : |\mathrm{ab}|$, a teda objemy spomínaných telies sú v pomere $|\mathrm{AB}|^3 : |\mathrm{ab}|^3$.(Lemma 5)

Propozícia 42: *Guľový vrchlík má povrch rovný obsahu kruhu s polomerom dĺžky spojnice vrcholu vrchlíku a jeho okraja.*[74]

V tejto propozícii je za guľový vrchlík považovaný len vrchlík menší než polguľa. Tento problém je však vyriešený v nasledujúcej propozícii.

Dôkaz: Nech *R* je obsah kruhu s polomerom $|al|$. Potom označme povrch vrchlíku *S*. Predpokladajme, že sa obsah *R* a povrch vrchlíku *S* nerovnajú.



Obr. 27 Náčrt k propozícii 42

I. Predpokladajme $S > R$. Nech *lal'* je kruhový výsek najväčšieho kruhu v guli. Tomuto výseku opíšeme (2*n*+1)-uholník *L*...*BAB'*...*L* a vpíšeme (2*n*+1)-uholník *l*...*bab'*...*l* tak, ako v predošlých propozíciách a tak, aby platilo:

$(\text{obsah opísaného mnohouholníka}) : (\text{obsah vpísaného mnohouholníka}) < S : R$,

to je možné podľa propozície 6.

Mnohouholníky *L*...*BAB'*...*LO* a *l*...*bab'*...*lO* budeme rotovať okolo priamky *AO*, ich povrchy označme postupne *U* a *u*. Potom podľa propozície 41 bude o týchto povrchoch platiť:

$$U : u = |AB|^2 : |ab|^2 =$$

$$\left(\text{obsah opísaného mnohouholníka}\right) : \left(\text{obsah vpísaného mnohouholníka}\right) < S : R.$$

[74] Pozri [1], On the Sphere and Cylinder, str. 52

Ale *U* je väčší než *S* (Propozícia 39). Teda u je väčší než *R*, čo je spor s propozíciou 37.

II. Predpokladajme $S < R$. V tomto prípade budeme vpisovať a opisovať mnohouholníky, ktorých pomer obsahov bude menší než $R\colon S$ a dostávame výsledok:

$U\colon u < R\colon S.$

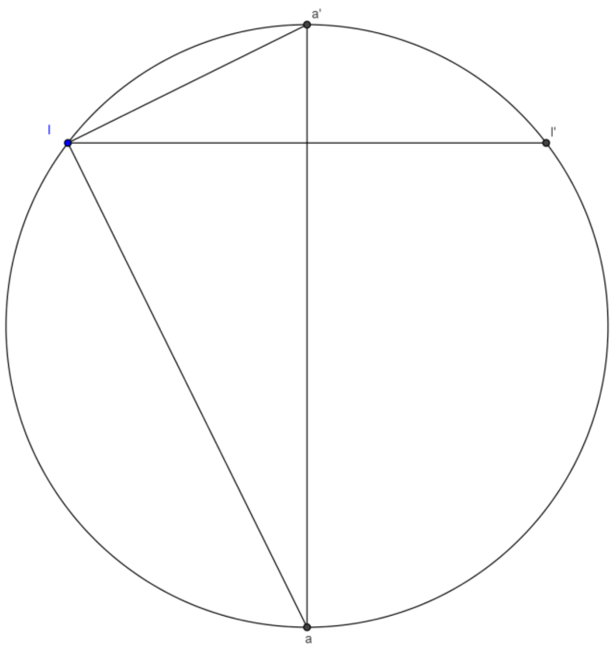
Ale *U* je väčší než *R* podľa propozície 40. Teda *u* je väčší než *S*, čo je spor s propozíciou 36.

Z uvedeného vyplýva, že platí $S = R$.

Propozícia 43: *Aj keď je guľový vrchlík väčší než polsféra, je jeho povrch rovný kruhu s polomerom dĺžky spojnice vrcholu vrchlíku a jeho okraja*[75]

Dôkaz propozície 42 je vedený exhaustívnou metódou a sporom. Propozícia 43 je dokázaná priamo.

Dôkaz: Nech *lal'* je hlavná kružnica sféry a *aa'* je jeho priemer kolmý na *ll'*. Nech *la'l'* je kružnicový oblúk menší než polkružnica.



Obr. 28 Náčrt k propozícii 43

[75] Pozri [1], On the Sphere and Cylinder, str. 53

Potom podľa Propozície 42 je povrch menšieho vrchlíku rovný obsahu kruhu s polomerom *la'*. Podľa Propozície 33 je povrch celej gule rovný obsahu kruhu s polomerom *aa'*.

Platí však $|aa'|^2 - |a'l|^2 = |al|^2$ a obsahy kruhov sú k sebe ako druhé mocniny ich polomerov. Tým pádom povrch vrchlíka vzniknutého rotáciou kružnicového oblúku *lal'*, ktorý je rozdielom povrchu gule a povrchu vrchlíka vzniknutého rotáciou kružnicového oblúku *la'l'*, je obsah kruhu s polomerom *al*.

Propozícia 44: *Objem guľového výseku je rovný objemu kužeľa, ktorého podstava má rovnaký obsah ako je povrch odpovedajúceho vrchlíku a ktorého výška je rovná polomeru gule.*[76]

Dôkaz: Označme *R* objem kužeľa, ktorého obsah podstavy je rovný povrchu vrchlíku vzniknutého rotáciou kružnicového oblúku *lal'* a ktorého výška je rovná polomeru sféry a označme *S* objem guľového výseku vzniknutého rotáciou trojuholníka *lOl'* a rotáciou kruhového odseku *lal'*.[77]

Predpokladajme, že R ≠ S.

I. Predpokladajme, že $S > R$.

Majme dve úsečky s dĺžkami *β* a *γ* také, že $\beta > \gamma$ a aby platilo: $\beta : \gamma < S : R$. Nech *δ* a *ε* sú dĺžky dvoch úsečiek tak aby *β*, *δ*, *ε* a *γ* v tomto poradí tvorili aritmetickú postupnosť. Kruhovému výseku *lal'O* vpíšeme (2n+1)-uholník *l...bab'...l'* a opíšeme (2n+1)-uholník *L...BAB'...L'* obdobne ako v predošlých propozíciách ale tak, aby platilo $|AB| : |ab| < \beta : \delta$. To je možné podľa propozície 4.

Rotáciou mnohouholníka *L…BAB'...L'O* okolo priamky *OA* vznikne teleso, ktorého objem označíme *V* a rotáciou mnohouholníka *l...bab'...l'* okolo priamky *OA* vznikne teleso, ktorého objem označíme *v*. Podľa propozície 41 o týchto objemoch platí: $V : v = |AB|^3 : |ab|^3$. Tento pomer je menší než $\beta^3 : \delta^3$ (viď vyššie) a je menší než $\beta : \gamma$ (vyplýva z definícií dĺžok *β*, *δ*, *ε* a *γ*). Ale $\beta : \gamma < S : R$, a teda aj $V : v < S : R$. Ale $V > S$ a tým pádom $v > R$. Toto je však spor s korolárom propozície 38 skombinovaným s propozíciami 42 a 43.

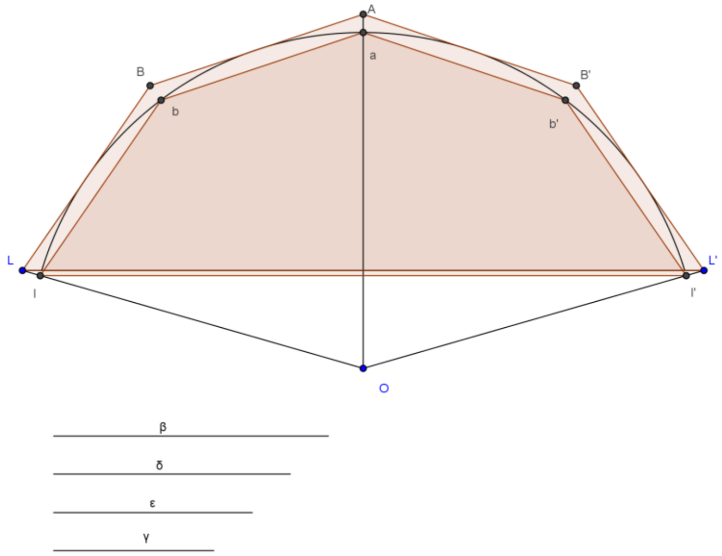
---

[76] Pozri [1], On the Sphere and Cylinder, str. 54

[77] Viď Obr. 29.

II. Predpokladajme, že $S < R$.

V tomto prípade vezmeme dĺžky β a γ tak, aby platilo $\beta : \gamma < R : S$ zvyšok postupu je obdobný s I. Dostaneme sa k vzťahu: $V : v < R : S$. Ale $v < S$ a tým pádom $V < R$. Toto je však spor s korolárom 2 propozície 40 skombinovaným s propozíciami 42 a 43.



Obr. 29 Náčrt k propozícii 44

V spise *O metóde* sa nachádza propzícia 2, ktorej znenie odpovedá propozícii 34 zo spisu *O guli a valci*, teda pojednáva o objeme gule. Dôkaz je tu vedený mechanickou metódou vyvažovania predmetov na páke, kedy sa guľa a kužeľ, ktorého podstava má obsah rovný štvornásobku obsahu hlavného kruhu danej gule a ktorého výška je rovná polomeru gule, postavia svojimi ťažiskami na opačnú stranu páky, budú v rovnováhe (do rovnováhy sa najprv postavia ľubovoľné rezy týchto dvoch telies rovinami kolmými na os kužeľa).[78]

Z uvedeného vyplýva, že Archimedes si bol vedomý existencie konštanty π, ktorá bola spoločným znakom rotačných telies. Pomocou exhaustívnej metódy (vpísaním a opísaním pravidelného 96-uholníka kruhu) túto konštantu obmedzil medzi 25344/8069 a 29376/9347 . Tento odhad čísla π má odchýlku asi 0,001234, čo predstavuje chybu približne 0,04%.[79]

[78] Pozri [1], The Method, str. 18 - 21

[79] Pozri [4], str. 43.

5 Cavalieriho princíp

5.1 Matematika v novoveku a osvietenstve

Obdobie stredoveku je často označované ako obdobie temnoty. Nemôžeme si ale myslieť, že sa veda počas tohto obdobia vôbec nerozvíjala. Pokrok však bol spomalený nástupom kresťanstva a potláčaním tých poznatkov, ktoré by ohrozovali zvrchovanosť a moc cirkvi. V kresťanskej Európe sa teda teoretická matematika veľmi neposunula, čím sa nemohla rozvinúť ani teória, ktorá by presnejšie riešila problém objemu a povrchu gule.

Úplne iným obdobím sa však stal novovek, renesancia a obzvlášť obdobie osvietenstva. V rokoch 1400 až 1600 bola Európa do základov otrasená udalosťami, ktoré zmenili náhľad na vedu a podnietili prudký rozvoj matematickej teórie. K tomuto prispela aj vyššia dostupnosť starogréckych vedeckých prác v Európe.[80]

Medzi matematikov tohto obdobia, ktorí sa zaoberali obsahmi plôch a objemami telies patrili Johannes Kepler (1571 – 1630), Galileo Galilei (1564 – 1642), Pierre de Fermat (1601 – 1665) a i.. Najviac sa o rozvoj týchto teórií zaslúžil Bonaventura Cavalieri, ktorý začal odhaľovať cenné Archimédove postupy.[81]

5.2 Bonaventura Cavalieri

Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647) bol talianskym matematikom, ktorý sa však zaoberal aj optikou a mechanikou. Pracoval na prekurzoroch infinitezimálneho počtu a uviedol logaritmy do Talianska. Vo svojich prácach ďalej rozvinul klasickú exhaustívnu metódu.[82]

Narodil sa v Miláne, získal široké humanitné vzdelanie, ktoré mu umožnilo študovať texty antických autorov v origináli. Jeho učiteľom matematiky bol B.Castelli, ktorý ho zoznámil s G. Galileim. Na Galileovo odporučenie bol roku 1629 prijatý na katedru matematiky univerzity v Bologni.[83] Jeho prvým dielom bolo *Lo specchio ustorio ouero trattato delle settioni conichea,* v ktorom rozvinul teóriu

[80] Pozri [8], str. 216.

[81] Pozri [11], str. 26.

[82] Pozri [11], str. 25.

[83] Viď [3], str. 91

o parabolických, hyperbolických a eliptických zrkadlách a ich vzájomných kombináciách. Táto práca však bola čisto teoretická, keďže technológia v tomto čase ešte nebola dostatočne vyvinutá pre zostrojenie týchto zrkadiel. Je známy vďaka Cavalieriho princípu (bol ešte skôr objavený čínskym matematikom Zu Gengzhi), ktorý rozoberieme v ďalšej kapitole. Výklad Cavalieriho princípu, uvedený v diele *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, bol však kritizovaný (najmä švajčiarskym matematikom Paulom Guldinom). V reakcii na túto kritiku Cavalieri napísal dielo *Exercitationes Geometricae Sex*, v ktorom bol tento princíp lepšie vysvetlený, uznaný a využívaný matematikmi v 17. storočí. Zkonštruoval hydraulickú pumpu. Publikoval tabuľky logaritmov, ktorými zdôraznil ich praktické využitie v geometrii a astronómii. Umrel v Bologni.

Medzi jeho ďalšie práce patria: *Directorium Generale Uranometricum*, *Trigonometria plana et sphaerica linearis et logarithmica*.

5.3 Cavalieriho princíp pre guľu

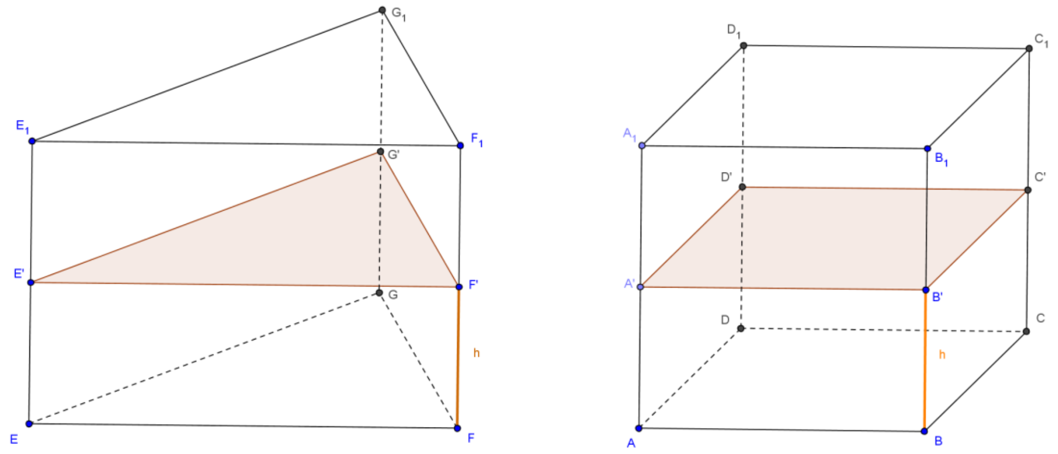
Bonaventura Cavalieri zhrnul v roku 1635 vo svojom diele *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* všetky poznatky infinitezimálneho počtu nadobudnuté do 17. storočia. Súčasťou diela bol jednoduchý výklad metódy výpočtu objemu telesa dnes známeho ako Cavalieriho princíp:[84]

"*Si duae figurae planae, vel solidae, in aedem altitudine fuerint constituae, ductis autem in planis rectis lineis & in figuris solidis ductis planis utcumque inter se parallelis, quorum respectu praedicta sumpta sit altitudo, repertum fuerit ductarum linearum portiones figuris planis interceptas, seu ductorum planorum portiones figuris solidis interceptas, esse magnitudines proportionales, homologis eadem figura semper existentibus, dictae figurae erunt inter se, ut unum quodlibet eorum antecedentium, ad suum consequens in alia figura eidem corespondens.*"[85]

[84] Pozri [11], str. 25.

[85] Pozri [5], str. 115

Nech dve telesá majú rovnakú výšku. Keď rezy rovinami rovnobežnými s ich podstavami a majúcimi od týchto podstáv rovnakú vzdialenosť sú také, že pomer ich obsahov je vždy rovnaký, potom objemy týchto telies majú tiež tento pomer.[86]



Obr. 30 Cavalieriho princíp

Veľkou výhodou Cavalieriho princípu je, že pre odvodenie presných vzorcov výpočtu objemu telies nie je potrebné využívať limitu známu v dnešnej dobe.

Na to, aby sme odvodili vzorec pre objem gule môžeme veľmi dobre využiť Cavalieriho princíp, ktorý je známy už v stredoškolskej matematike. Je potrebné nájsť teleso, ktoré bude spĺňať podmienky Cavalieriho princípu pre guľu.

Zisťujeme, že pre polguľu s polomerom r je takýmto telesom valec s polomerom a výškou r, z ktorého je vykrojený kužeľ s polomerom r a výškou r, ktorý má s valcom spoločnú jednu podstavu. Označme objem tohto telesa V_2 a objem polgule V_1.

Vyjadríme postupne obsahy jednotlivých rezov rovinami rovnobežnými s podstavou polgule a telesa s objemom V_2. Označme vzdialenosť roviny, ktorou telesá režeme, od roviny, v ktorej ležia obe podstavy týchto telies, h. Označme $S_{h,1}$ obsah rezu (kruh s hraničnou kružnicou c) danou rovinou vo vzdialenosti h v telese s objemom

[86] Tento preklad obsahuje Cavalieriho princíp pre priestorové telesá, pôvodný latinský text však vysvetľuje aj Cavalieriho princíp pre rovinné útvary.

V_1 a $S_{h,2}$ obsah rezu (medzikružie kružníc k_1 a k_2) danou rovinou vo vzdialenosti h v telese s objemom V_2.[87] Potom:

$$S_{h,1} = \pi \cdot \left(\sqrt{r^2 - h^2}\right)^2 = \pi \cdot (r^2 - h^2),$$

kde obrazec, ktorého obsah počítame, je kruh, ktorého polomer je jednou z odvesien v pravouhlom trojuholníku s preponou dĺžky r a druhou odvesnou dĺžky h.

Ďalej platí:

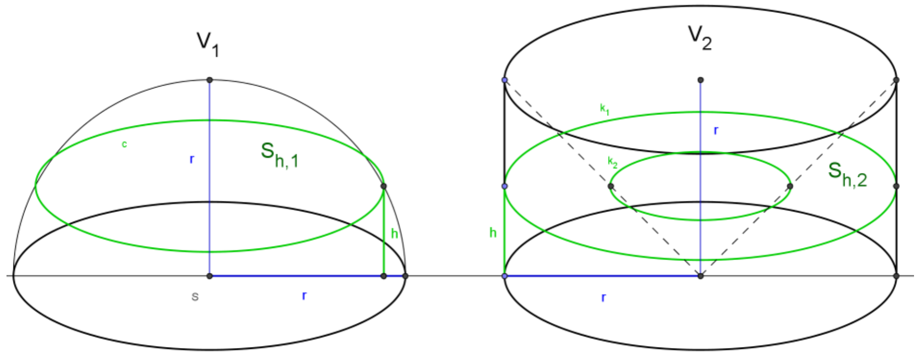
$$S_{h,2} = \pi \cdot r^2 - \pi \cdot h^2 = \pi \cdot (r^2 - h^2),$$

kde obrazec, ktorého obsah počítame, je medzikružie dvoch kružníc, z ktorých väčšia má polomer r a menšia má polomer h.

Z uvedeného vidíme, že pre ľubovoľnú vzdialenosť rezovej roviny od roviny, v ktorej ležia podstavy oboch telies, platí rovnosť obsahov ich rezov. Z toho vyplýva, že objemy V_1 a V_2 sú rovnaké a platí:

$$V_2 = \pi \cdot r^2 \cdot r - \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot r = \frac{2}{3}\pi \cdot r^3 = V_1.$$

Objem polgule je teda rovný $\frac{2}{3}\pi \cdot r^3$, čo je už nám známy vzorec.



Obr. 31 Cavalieriho princíp pre guľu

Cavalieriho princíp je dnes chápaný ako dôsledok Fubiniho vety, ktorú rozoberieme v ďalšej kapitole pri odvodení vzorcov pre výpočet objemu a povrchu gule.

[87] Viď Obr. 31.

6 Infinitezimálny počet

6.1 História infinitezimálneho počtu

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) a Isaac Newton(1643 – 1727) v druhej polovici 17. storočia nezávisle na sebe vytvorili teóriu diferenciálneho a integrálneho počtu, čím sa stali najväčšími matematikmi tohto obdobia. Do tejto vybudovanej teórie zahrnuli všetky roztrieštené poznatky svojich predchodcov. Infinitezimálne postupy mali veľký úspech v 17. storočí. Boli použité na sčítanie nekonečného počtu nekonečne malých veličín (aplikácia pre Cavalieriho princíp, kde rezy sú vzhľadom k trojrozmernému priestoru nekonečne malé).[88]

Určitý integrál nadobudol veľké využitie vo fyzike, mechanike i optike. V matematike sa využíva pre výpočet obsahov plôch pod grafmi funkcií a pomocou tzv. Fubiniho vety (integrácia viacrozmerných integrálov) ho možno použiť pre výpočet povrchu gule (veľkosť guľovej plochy) či jej objemu. Tieto výpočty si ukážeme v nasledujúcom odstavci.

6.2 Odvodenie vzorcov rôznymi postupmi

Objem a povrch gule ako rotačného telesa

Ak sa budeme držať historickej cesty, tak guľa bola Eukleidom definovaná ako rotačné teleso, ktoré vzniká rotáciou polkruhu okolo svojho priemeru. Pre objem a povrch rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou rovinnej krivky popísanej rovnicou $y = f(x)$, pre $x \in \langle a, b \rangle$ okolo osi x, sú odvodené vzorce:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'^{(x)})^2} dx.$$

Toto platí pre funkcie ktoré sú merateľné.

Polkruh, ktorého rotáciou guľa vznikne, má polomer r. Bez ujmy na všeobecnosti sme ho mohli umiestniť tak, aby sa stred gule ním vytvorenej, nachádzal v bode

[88] Pozri [11], str. 35.

$[0; 0; 0]$. Takto zvolený polkruh a jeho hraničnú polkružnicu potom môžeme popísať funkciou:

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Následne využitím spomínaných vzorcov dostaneme:

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) dx = \left[r^2 \cdot x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^{r} = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3,$$

$$S = 2\pi \cdot \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right)^2} \, dx = 2\pi \cdot \int_{-r}^{r} r \, dx = [2\pi \cdot r \cdot x]_{-r}^{r} =$$
$$= 4\pi \cdot r^2.$$

Fubiniho veta[89]

Veta: Nech $a, b \in \mathbb{R}, b > a$. Nech funkcia f je reálna funkcia troch premenných merateľná v $\mathbb{R}^3$, definovaná na množine M:

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3, x \in (a, b), y \in (\varphi_1(x), \varphi_2(x)), z \in (\psi_1(x, y), \psi_2(x, y))\}$$

kde φ_1a φ_2 sú spojité funkcie jednej premennej x, pričom platí $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ pre $\forall x \in (a, b)$ a ψ_1a $\psi_2$sú spojité funkcie premenných x a y, pričom platí $\psi_1(x, y) \leq \psi_2(x, y)$ pre $\forall (x, y)$ také, že $x \in (a, b)$ a $y \in (\varphi_1(x), \varphi_2(x))$.[90]

Potom platí:

$$\iiint_{\mathrm{M}} f(x, y, z) dxdydz = \int_{a}^{b} \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z) \, dzdydx.$$

Využijeme zavedené definície z prvej kapitoly o guli v karteziánskej súradnicovej sústave a o sférických súradniciach. Pri odvodení vzorca pre objem gule budeme počítať trojný integrál z 1 cez množinu obsahujúcu všetky body gule, teda

---

[89] Guido Fubini (1879 – 1943) bol taliansky matematik. Narodil sa v Benátkach. Študoval na univerzite v Pise, neskôr vyučoval na Univerzite v Catanii, na Univerzite v Janove a na Univerzite v Turíne. Pri pôsobení na týchto univerzitách sa venoval matematickej analýze, diferenciálnym rovniciam, funkcionálnej a komplexnej analýze, ale študoval aj variačný počet, teóriu grúp, neeukleidovskú a projektívnu geometriu. Neskôr sa venoval aplikovaným problémom elektrických obvodov a akustiky. Umrel v New Yorku roku 1943 po emigrácii z Talianska roku 1939.

[90] Znenie tejto vety pre viacdimenzionálne priestory viď [9], str. 35

$$V = \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \int_{-\sqrt{r^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} 1\, dzdydx$$

Hranice sú určené tak, aby množina, cez ktorú integrujeme, bola celá guľa. Táto integrácia by bola veľmi náročná na výpočet, preto zavádzame substitúciu pomocou sférických súradníc (viď kapitola 1.4, str. 4). Integrovaný výraz budeme musieť prenásobiť jakobiánom použitého substitučného zobrazenia, ktorý je v našom prípade rovný $R^2 \cdot \cos\theta$. Následný výpočet sa potom zjednoduší:

$$V = \int_{0}^{r} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2 \cos\theta \, d\theta \, d\varphi \, dR = [R^3/3]_0^r \cdot [\varphi]_{-\pi}^{\pi} \cdot [\sin\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \tfrac{4}{3}\pi \cdot r^3.$$

Obsah guľovej plochy ako parametrizovanej plochy

Pre výpočet povrchu musíme guľovú plochu zaviesť ako plochu s danou parametrizáciou:

$$f(u,v) = (r \cdot \cos u \cdot \cos v\,, r \sin u \cdot \cos v\,, r \cdot \sin v),$$
$$u \in \langle -\pi,\pi), v \in \langle -\pi/2, \pi/2),$$

kde u, v sú parametre plochy a r je polomer guľovej plochy. Povrch takto zadanej gule potom vypočítame následným spôsobom.

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = (-r \cdot \sin u \cdot \cos v\,, r \cdot \cos u \cdot \cos v\,, 0),$$
$$\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = (-r \cdot \cos u \cdot \sin v\,, -r \cdot \sin u \cdot \sin v\,, r \cdot \cos v),$$
$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = (r^2 \cdot \cos u \cdot \cos^2 v\,, r^2 \cdot \sin u \cdot \cos^2 v\,, r^2 \cdot \sin v \cdot \cos v),$$
$$\left\| \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \right\| = r^2 \cdot \cos v\,,$$
$$S = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\| \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \right\| dvdu = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cdot \cos v \, dvdu =$$
$$= r^2 \cdot [u]_{-\pi}^{\pi} \cdot [\sin v]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4\pi \cdot r^2,$$

kde $\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)$ a $\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)$ sú parciálne derivácie analytického vyjadrenia plochy podľa parametrov u a v. Integrál teda počítame z veľkosti ich vektorového súčinu.

Guldinovo pravidlo[91]

Veta: Objem rotačného telesa V_r je rovný objemu hranolu, ktorého podstava má rovnaký obsah ako rotujúci obrazec S a jeho výškou je dĺžka kružnice s polomerom, ktorý odpovedá vzdialenosti ťažiska rotujúceho obrazca od osi rotácie y_T. Povrch tohto rotačného telesa S_r je rovný obsahu obdĺžniku, ktorého jedna strana je rovná dĺžke obvodu rotovaného obrazca l a druhá je dĺžka kružnice vzniknutej rotáciou ťažiska krivky, ktorá je hranicou spomínaného útvaru y_t, teda:

$$V_r = 2\pi \cdot y_T \cdot S,$$
$$S_r = 2\pi \cdot y_t \cdot l.$$ [92]

Opäť budeme guľu uvažovať tak ako na začiatku tejto kapitoly.[93] Vzdialenosť ťažiska od osi rotácie bude v tomto prípade totožná s ypsilónovou súradnicou tohto ťažiska. Vypočítame y_T – vzdialenosť ťažiska polkruhu od osi rotácie ako integrál z y cez polkruh delený jeho obsahom.

$$y_T = \frac{\int_{-r}^{r}\int_{0}^{\sqrt{r^2-x^2}} y\,dy\,dx}{\pi \cdot r^2/2} = \frac{2\int_{-r}^{r}[y^2/2]_0^{\sqrt{r^2-x^2}}dx}{\pi \cdot r^2} = \frac{\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)dx}{\pi \cdot r^2} =$$
$$= \frac{[r^2 \cdot x - x^3]_{-r}^{r}}{\pi \cdot r^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi}$$

Vzdialenosť ťažiska polkružnice od osi rotácie (y_t) vypočítame ako integrál z y cez polkružnicu delený jej dĺžkou. Polkružnicu budeme parametrizovať a budeme počítať krivkový integrál:

$$c(t) = \left(t, \sqrt{r^2-t^2}\right), c'(t) = \left(1, \frac{-t}{\sqrt{r^2-t^2}}\right),$$
$$y_t == \frac{\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-t^2}\cdot\sqrt{1+\frac{t^2}{r^2-t^2}}\,dt}{\pi \cdot r} = \frac{\int_{-r}^{r} r dt}{\pi \cdot r} = \frac{[r \cdot t]_{-r}^{r}}{\pi \cdot r} = \frac{2r}{\pi}$$

Potom objem a povrch gule bude:

[91] Paul Guldin (1577 – 1643) bol švajčiarsky matematik a astronóm. Narodil sa v Mels. Bol profesorom na univerzitách v Graz a vo Viedni. Spolupracoval s Johannesom Keplerom.

[92] Pozri [9], str. 46.

[93] Pozri Objem a povrch gule ako rotačného telesa, v kapitole 6.2, str. 46.

$$V_r = 2\pi \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi} \cdot \frac{\pi \cdot r^2}{2} = \tfrac{4}{3}\pi \cdot r^3$$

$$S_r = 2\pi \cdot \frac{2 \cdot r}{\pi} \cdot \pi \cdot r = 4\pi \cdot r^2$$

6.3 Sféra a rovina

Základným problémom pri určovaní povrchu sféry je to, že sféra sa nedá rozvinúť do roviny, teda neexistuje izometria (zobrazenie medzi plochami, ktoré zachováva vzdialenosti) medzi rovinou a sférou.

Definícia: Nech S_1 a S_2 sú regulárne plochy v $\mathbb{R}^3$. Difeomorfizmus $f: S_1 \to S_2$ sa nazýva izometria, ak zachováva dĺžky kriviek. Povieme, že dve plochy sú izometrické, ak medzi nimi existuje izometria.

K zisteniu, či medzi dvoma plochami existuje izometria, nám sluźi veta *Theorema egregium* a jej dôsledok.[94]

Veta: (Theorema egregium) Gaussova krivosť K plochy parametrizovanej zobrazením f sa dá vypočítať z koeficientov 1. fundamentálnej formy (E, F, G) plochy a ich derivácií:

$$K = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} & \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} \\ \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} & E & F \\ \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v} & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} & E & F \\ \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} & F & G \end{vmatrix}}{(EG - F^2)},$$

kde $E = \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \cdot \frac{\partial f}{\partial u}(u,v)$, $F = \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)$ a $G = \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)$.

Dôsledok: Ak sú dve plochy izometrické, majú rovnakú Gaussovu krivosť.

Stačí nám teda spočítať Gaussovu krivosť roviny a sféry.

Označme sféru s polomerom $r > 0$ a stredom v bode $[0,0,0]$ ako plochu S_1 parametrizovanú zobrazením f_1 s Gaussovou krivosťou K_1 a rovinu so všeobecnou

[94] Pozri [12] str. 52. Pre bližšie vysvetlenie Gaussovej krivosti a ďalších pojmov diferenciálnej geometrie viď celý dokument [12].

rovnicou $z = 0$ ako plochu S_2 parametrizovanú zobrazením f_2 s Gaussovou krivosťou K_2. Potom:

$$f_1(u,v) = (r \cdot \cos u \cdot \cos v, r \sin u \cdot \cos v, r \cdot \sin v),$$
$$u \in \langle -\pi,\pi), v \in \langle -\pi/2, \pi/2)$$

a

$$f_2(u,v) = (u,v,0),$$
$$u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}.$$

Označme E_1, F_1, G_1 koeficienty 1. fundamentálnej formy plochy S_1 a E_2, F_2, G_2 koeficienty 1. fundamentálnej formy plochy S_2. Potom spočítajme parciálne derivácie zobrazení f_1 a f_2 podľa premenných u a v:

$$\frac{\partial f_1}{\partial u}(u,v) = (-r \cdot \sin u \cdot \cos v, r \cdot \cos u \cdot \cos v, 0),$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial v}(u,v) = (-r \cdot \cos u \cdot \sin v, -r \cdot \sin u \cdot \sin v, r \cdot \cos v)$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial u}(u,v) = (1,0,0)\frac{\partial f_2}{\partial v}(u,v) = (0,1,0).$$

Ďalej spočítajme hodnoty koeficientov $E_1, F_1, G_1, E_2, F_2, G_2$ (všetky tieto koeficienty sú funkcie premenných u, v, pre zjednodušenie zápisu tento fakt však vynecháme) a ich parciálnych derivácií, ktoré sú potrebné pre výpočet Gaussovej krivosti:

$$\mathrm{E_1} = \mathrm{r}^2 \cos^2 \mathrm{v}, \mathrm{F_1} = 0, \mathrm{G_1} = \mathrm{r}^2,$$
$$\frac{\partial \mathrm{E_1}}{\partial \mathrm{u}} = 0, \frac{\partial \mathrm{E_1}}{\partial \mathrm{v}} = -2\mathrm{r}^2 \sin \mathrm{v} \cdot \cos \mathrm{v}, \frac{\partial^2 E_1}{\partial v^2} = -2\mathrm{r}^2 \cdot (\cos^2 \mathrm{v} - \sin^2 \mathrm{v}),$$
$$\frac{\partial \mathrm{F_1}}{\partial \mathrm{u}} = 0, \frac{\partial \mathrm{F_1}}{\partial \mathrm{v}} = 0, \frac{\partial^2 F_1}{\partial u \partial v} = 0,$$
$$\frac{\partial \mathrm{G_1}}{\partial \mathrm{u}} = 0, \frac{\partial \mathrm{G_1}}{\partial \mathrm{v}} = 0, \frac{\partial^2 G_1}{\partial u^2} = 0,$$
$$\mathrm{E_2} = 1, \mathrm{F_2} = 0, \mathrm{G_2} = 1,$$
$$\frac{\partial \mathrm{E_2}}{\partial \mathrm{u}} = 0, \frac{\partial \mathrm{E_2}}{\partial \mathrm{v}} = 0, \frac{\partial^2 E_2}{\partial v^2} = 0,$$
$$\frac{\partial \mathrm{F_2}}{\partial \mathrm{u}} = 0, \frac{\partial \mathrm{F_2}}{\partial \mathrm{v}} = 0, \frac{\partial^2 F_2}{\partial u \partial v} = 0,$$
$$\frac{\partial \mathrm{G_2}}{\partial \mathrm{u}} = 0, \frac{\partial \mathrm{G_2}}{\partial \mathrm{v}} = 0, \frac{\partial^2 G_2}{\partial u^2} = 0.$$

Po dosadení do vzorca pre Gaussovu krivosť:

$$K_1 = \frac{\begin{vmatrix} r^2 \cdot (\cos^2 v - \sin^2 v) & 0 & 0 \\ 0 & r^2 \cos^2 v & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -r^2 \sin v \cdot \cos v & 0 \\ -r^2 \sin v \cdot \cos v & r^2 \cos^2 v & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{vmatrix}}{r^4 \cdot \cos^2 v},$$

$$K_1 = \frac{r^6 \cdot \cos^4 v - r^6 \cdot \cos^2 v \cdot \sin^2 v + r^6 \cdot \cos^2 v \cdot \sin^2 v}{r^4 \cdot \cos^2 v} = r^2,$$

$$K_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{1} = 0.$$

Keďže platí $r > 0$, Gaussova krivosť roviny sa nikdy nebude rovnať Gaussovej krivosti sféry. Tým pádom nemôže existovať izometria medzi týmito dvoma plochami, inak povedané sféra nie je rozvinuteľná do roviny.

7 Metodická časť

V tejto kapitole rozoberieme niektoré vybrané učebnice matematiky pre základné a stredné školy v Českej republike a pre stredné školy v Slovenskej republike.

7.1 Rozbor základoškolských učebníc

V základoškolských učebniciach, ktoré následne rozoberieme sa nestretneme s definíciou objemu či povrchu. Autori zrejme predpokladajú správne prekoncepty žiakov základných škôl o tom, čo je objem a povrch telesa. Zavedenie miery ako zobrazenia by bolo na základnej škole určite nemožné, ale pravdepodobne by sa dala aplikovať zjednodušená (nepresná) definícia objemu a povrchu tak, ako sa uvádza v niektorých stredoškolských učebniciach.[95] V týchto učebniciach sa nestretneme s výpočtami objemu a povrchu častí gule (táto požiadavka sa nenachádza v Rámcových vzdelávacích programoch pre základné vzdelanie).

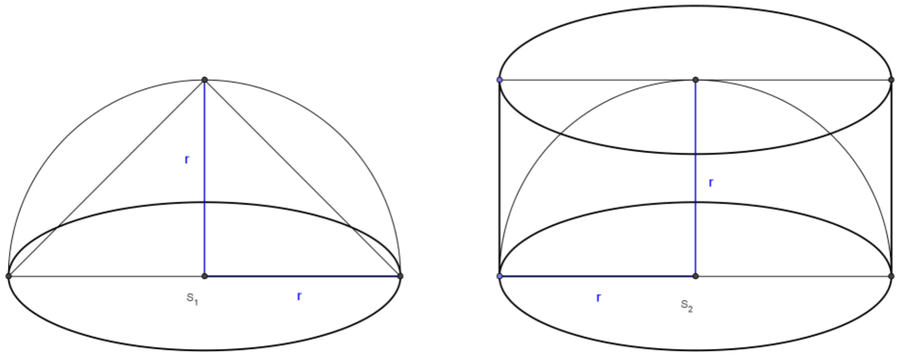
Matematika 9. Geometrie učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia

Výklad v tejto učebnici je vedený pomocou úloh pre žiakov. Všetky strany obsahujú aj vedľajšie poznámky interdisciplinárneho charakteru (prepojenie s biológiou, geografiou, chémiou, ale aj históriou, cudzími jazykmi a ďalšími vedami).

Čo sa týka objemu a povrchu gule, táto téma je zaradená na koniec kapitoly venujúcej sa objemu a povrchu telies (ihlan, kužeľ, guľa). Tento prístup je opodstatnený vzhľadom k historickej ceste a „zložitosti“ telies (teleso ohraničené rovinnými útvarmi, následne rotačné telesá (ohraničené všeobecnými plochami)). Začiatkom kapitoly si žiaci pripomenú, kde sa v bežnom živote stretávajú s telesami tvaru gule (pracuje sa s prekonceptom pojmu guľa, keďže tento ešte nie je zavedený). Následne sú zaradené úlohy, ktoré navedú žiakov na obe definície gule, teda aj rotáciou polkruhu, aj ako množiny bodov danej vlastnosti. Ďalej sú obe tieto definície exaktne uvedené. Vzorce pre výpočet objemu a povrchu gule sú uvedené bez odvodenia. Tento prístup je vhodný pre základoškolskú matematiku. Zároveň je tu však uvedený zaujímavý odhad objemu gule pomocou objemu opísaného valca a vpísaného kužeľa.[96]

[95] Viď kapitola 2.2 na str. 9.

[96] Viď Obr. 32.



Obr. 32 Odhad objemu polgule.

Po uvedení vzorcov pre výpočet objemu a povrchu gule nasleduje šesť príkladov, z ktorých päť je aplikačných (výpočet objemu planét zo zadaného polomeru, objemu vodojemu zo zadaného povrchu či priemeru akupresúrnych guličiek zo zadaného objemu) a jedna úloha čisto teoretická (doplnenie tabuľky, v ktorej sa nachádzajú údaje – polomer, objem a povrch gule).

Veľkou výhodou tejto učebnice sú názorné farebné obrázky (náčrty, ale aj fotografie z reálneho života) a množstvo aplikačných úloh. Za nevýhodu sa dá považovať to, že v učebnici nie sú vzorovo riešené príklady, čo by sa hodilo na začiatku kapitoly, resp. po zavedení príslušných vzorcov. V učebnici je pri výklade o ihlane uvedený Bonaventura Cavalieri (obrázok a popis, v ktorom je uvedené, že sa venoval objemu ihlanu). Na tomto mieste by bola vhodná zmienka o Cavalieriho princípe s názorným obrázkom (napr. dva stĺpce rovnakého počtu mincí, pričom jeden by bol zarovnaný a v druhom by boli niektoré mince trochu vysunuté zo zarovnaného stĺpca).

Matematika 9 pro základní školy

Táto učebnica bola zostavená tak, aby zodpovedala Rámcovým vzdelávacím programom pre základné vzdelanie. V učebnici sa nachádzajú tri kapitoly, ktoré sa venujú objemu a povrchu telies. Tieto kapitoly sú nazvané Ihlan, Kužeľ a Guľa. Učebnica je vedená viac klasicky. Kapitoly začínajú opakovaním staršieho učiva potrebného pre osvojenie učiva nového. Nasledujú definície súvisiace s novým učivom a jeden vzorovo riešený príklad. Následne sú uvedené neriešené príklady na precvičenie. V učebnici sú spomenutí významní matematici ako Thalés, Eukleidés, Archimédés, René Descartes, Pierre de Fermat a i.. Historické poznámky sú uvedené vždy po kapitole. Nie je tu však zmienka o Bonaventurovi Cavalierim, ktorá by sa hodila najmä pri objeme kužeľa a gule.

Prvá podkapitola kapitoly o guli má názov Guľa a jej povrch, čo nie je úplne optimálny názov, keďže by sme mali rozlišovať mezi povrchom telesa a jeho hranicou. Lepší názov by bol Guľa a sféra či Guľa a guľová plocha. Kapitola začína opakovaním vlastností kruhu a kružnice pomocou otázok, čo je prínosné, keďže guľa a guľová plocha úzko súvisia s kruhom a kružnicou. Guľa je opäť zadefinovaná oboma definíciami, teda rotáciou kruhu okolo jeho osi súmernosti, ale aj ako množina bodov. Pojem povrch gule je zadefinovaný tak, že zodpovedá pojmu guľová plocha. Je tu uvedený aj pojem vnútro gule ako guľa bez príslušnej guľovej plochy. Nasleduje zaujímavá úloha, v ktorej si žiaci majú vystrihnúť kruh z papiera a skúsiť s ním otáčať okolo osi prechádzajúcej či neprechádzajúcej stredom tohto kruhu. Následne by mohol byť uvedený záver, v ktorom by bolo pomenované teleso vzniknuté rotáciou kruhu okolo osi, ktorá je jeho nesečnicou – anuloid. Tento pojem tu už, bohužiaľ, chýba. Ďalej nasledujú cvičenia, v ktorých majú žiaci určiť polomer gule z obrázku, priemet gule do roviny či vypočítať polomer guľového objektu, ktorý ešte prepadne cez sito.

Nasleduje podkapitola o guľovej ploche, v ktorej sa spomína že guľová plocha sa nedá rozvinúť do roviny a je tu uvedený náznak jednoduchého dôkazu, prečo žiadna úsečka nemôže celá ležať na guľovej ploche. Potom je uvedený vzorec pre výpočet povrchu gule bez odvodenia, s vysvetlením potreby vyššej matematiky. Pojem povrch gule je tu už použitý správne. Nato je uvedený riešený príklad, kde je zadaný polomer gule a má sa vypočítať jej povrch. Ďalej je uvedených desať cvičení (určenie povrchu gule s daným polomerom, porovnanie povrchu Zeme a Mesiaca, úlohy o pomere povrchov a polomerov daných gulí, výpočet polomeru gule so zadaným povrchom, výpočet povrchu gule vpísanej do danej kocky). Úlohy sú aplikačného aj teoretického charakteru. Veľmi vhodné sú úlohy na určovanie pomeru povrchov pri zadanom polomere gule (súvislosť dĺžky a povrchu).

Ďalšia podkapitola je venovaná objemu gule. Táto podkapitola už nemá úvod, autori pripomínajú definíciu gule a predkladajú vzorec pre výpočet jej objemu. Nasleduje riešený príklad – výpočet objemu gule daného polomeru a opäť desať neriešených príkladov. Príklady sú zoradené podľa náročnosti od výpočtu objemu gule s daným polomerom, cez výpočet objemu polgule s daným polomerom, výpočet polomeru gule daného objemu až po aplikačné úlohy fyzikálneho charakteru (hmotnosť guľových predmetov). Zaujímavý je príklad výpočtu pomeru objemu gule a jej opísanej kocky.

Výhodou učebnice je množstvo obrázkov a náčrtov, vložené fotografie sú však čiernobiele. Zaradenie riešeného vzorového príkladu je veľmi vhodné, i keď riešené príklady by mohli byť vo väčšom množstve (dva až tri) a väčšej zložitosti (zväčša ide len o dosadenie do predloženého vzorca). Nevhodné sú niektoré náčrty gule (dve elipsy ležiace vo vnútornej strane kružnice).

Geometrie 9

Táto učebnica sa rovnako ako predošlé dve venuje objemu a povrchu telies ihlan, kužeľ a guľa.

Kapitola o guli začína jej definíciou ako množiny bodov a následne je uvedená definícia rotáciou polkruhu okolo jeho priemeru. Rovnako ako v predošlej učebnici je zavedený pojem povrch gule ako množiny bodov namiesto guľovej plochy či sféry. Oproti ostatným učebniciam je tu zavedená aj definícia guľovej plochy rotáciou kružnice. Vzorce pre objem a povrch gule sú uvedené priamo a so zdôvodnením, že k ich odvodeniu je potrebná vyššia matematika. Nasledujú dva príklady výpočtu hmotnosti gule. V oboch sa však počíta objem gule z toho istého materiálu, čo je zbytočné. Nasledujú tri teoretické príklady: vyplniť tabuľku, v ktorej je zadaný polomer gúľ a má sa vypočítať ich povrch a objem. Optimálnejšie by bolo zadať raz polomer, raz priemer, raz povrch a raz objem gule. Ďalej majú žiaci určiť objem či povrch gule, ktorej sa polomer násobne zväčší. Tieto príklady sú oddelené od príkladov aplikačných. Medzi aplikačnými úlohami sa nachádzajú úlohy na výpočet priemernej hustoty lopty danej hmostnosti či hmotnosti kamennej gule so zadaným priemerom a hustotou (tento príklad je vhodný pre uvedomenie si vzťahu polomer – priemer). Aplikačné a teoretické úlohy na precvičenie výpočtov objemov, povrchov a hmotností nielen gule, ale aj ostatných telies dopĺňujú súbor cvičení. Na záver kapitoly o guli sú uvedené príklady na výpočet objemov telies v tvare gule, s ktorými sa žiaci môžu stretnúť v bežnom živote (vodojemy, akvárium, balóny a iné zložené telesá, ktorých súčasťou je guľa či polguľa).

Výhodou tejto učebnice je veľké množstvo príkladov, i keď niektoré sú si veľmi podobné. Učebnica má pestrú grafickú úpravu, čím zaujme pozornosť žiakov. Textová úprava ale nie je optimálna, nakoľko sú časti textu príliš blízko pri sebe. Táto úprava môže byť pre žiakov neprehľadná. Nenájdeme tu ani zmienku o histórii matematiky, ktorá je pre niektorých žiakov zaujímavá a motivujúca.

Sbírka úloh z matematiky pro 9. ročník ZŠ

V tejto zbierke úloh sú uvedené príklady na výpočet objemu a povrchu ihlanu, kužeľa a gule, čo zodpovedá učivu v učebniciach pre 9. ročník.

Uvedené príklady majú teoretický, ale aj aplikačný charakter. Na začiatku sa nachádzajú jednoduché úlohy na výpočet objemu a povrchu gule s daným polomerom. Nachádzajú sa tu úlohy na výpočet pomeru povrchov gúľ so zadaným pomerom polomerov, výpočty polomeru gule so zadaným povrchom či objemom. Nájdeme tu aj aplikačné úlohy na výpočet hmotnosti a objemu telesa zloženého z gule (polgule) a iného telesa, výpočet objemu klbka vytvoreného z vlákna tvaru valca, objemu vodojemu, povrchu a objemu gule so zadanou dĺžkou hlavnej kružnice. Zaujímavá je úloha, v ktorej si žiaci majú zobrať ľubovoľný guľový predmet a pomocou dvoch pravítiek s ryskou a ďalšieho pravítka odmerať jeho priemer a vypočítať objem.

Klasicky zostavená zbierka úloh, v ktorej sú veľmi vhodne zastúpené čisto teoretické, ale aj aplikačné a praktické úlohy.

Sbírka úloh z matematiky pro 9. ročník

V tejto zbierke sú tiež uvedené príklady na výpočet objemu telies ihlan, kužeľ a guľa.

Nachádza sa tu dvanásť úloh, čo je asi polovičné množstvo v porovnaní s predošlou zbierkou napriek tomu, že má približne rovnaký obsah (čo sa týka kapitol) a rozsah. Prvé príklady sa zaoberajú priamym výpočtom objemu a povrchu gule so zadaným polomerom či priemerom. Vyskytujú sa tu zložitejšie príklady zo stereometrie, napr. výpočet zemepisnej šírky pri zadanej dĺžke rovnobežky, výpočet povrchu gule opísanej kocke so zadaným povrchom. Príklad s výpočtom zemepisnej šírky môžme považovať za rozširujúci oproti požiadavkám RVP (Rámcový vzdelávací program) a vhodný pre prípravu na štúdium na strednej škole. Nájdeme tu aplikačné príklady na výpočet: objemu vodojemu; objemu telesa, ktorého časťou je guľa či polguľa; spotreby materiálu na výrobu lopty.

7.2 Rozbor stredoškolských učebníc

V stredoškolských učebniciach rozoberaných v tejto kapitole sa už stretneme s definíciou objemu telies. Exaktné zavedenie miery je aj na stredných školách nemožné kvôli tomu, že je potrebné využiť vyššiu teoretickú matematiku. Oproti základoškolským učebniciam sa stretneme nielen s objemom a povrchom gule, ale aj s objemom a povrchom jej častí.

Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborních učilišť 3. část

Objem je definovaný v tejto učebnici tak, ako ho popisujeme v kapitole 2.2 na strane 6. Je tu uvedená aj zmienka o miere, ale nie je zadefinovaná exaktne. V tejto učebnici nie je uvedená ani definícia telesa, takže sa stále pracuje s prekonceptom tohto pojmu.

Definície gule a guľovej plochy sú pripomenuté na začiatku kapitoly o objeme a povrchu gule. Guľa a guľová plocha sú zadefinované ako množiny bodov s danou vlastnosťou. Definícia pomocou rotácie polkruhu či kružnice však chýba. Oproti spomínaným základoškolským učebniciam je definovaný pojem guľová plocha a nie povrch gule. Následne sú uvedené priamo vzorce pre výpočet objemu a povrchu gule bez odvodenia. Tento prístup je optimálny vzhľadom k tomu, že učebnica je určená pre stredné odborné školy a nie gymnáziá.

V tejto učebnici nájdeme definície častí gule a guľovej plochy – guľový odsek, guľový vrchlík, guľová vrstva, guľový pás a guľový výsek. Po popise týchto telies je uvedený vzorec pre výpočet ich objemu a povrchu (opäť bez odvodenia) a dva riešené príklady na výpočet objemu odseku a povrchu vrchlíku so zadaným polomerom príslušnej gule a výškou odseku. Je vhodné, že riešený príklad nie je triviálny. V druhom riešenom príklade sa počíta povrch časti Zeme (považovanej za guľu), ktorú môže vidieť pozorovateľ z danej výšky nad jej povrchom. Opäť ide o netriviálny príklad, v ktorom je potrebné dopočítať rozmery vrchlíku pre výpočet jeho povrchu. Pre precvičenie učebnica uvádza šesť neriešených príkladov. Príklady sú zoradené podľa rastúcej náročnosti, čo je optimálne. Na začiatku je uvedený príklad výpočtu objemu a povrchu gule s daným obvodom. Druhý príklad je aplikačný – vedie na výpočet hmotnosti dutej gule so zadaným vonkajším priemerom, hrúbkou a hustotou použitého materiálu. V ďalších príkladoch sa už počítajú objemy a povrchy častí gule buď so zadanými parametrami, ktoré stačí dosadiť do vzorca, alebo s parametrami, z ktorých je ešte nutné dopočítať rozmery potrebné pre konečný výpočet.

Táto učebnica je obsahom primeraná učivu preberanému na stredných odborných školách. Avšak nevyskytujú sa tu zmienky o histórii matematiky, ktoré sú pri tejto téme vhodné a môžu byť aj motivujúce.

Matematika pro gymnázia. Stereometrie

Z tejto učebnice je čerpaná definícia objemu v kapitole 2.2 na strane 6. Ako dodatok k definícii objemu je pre určovanie objemu telies iných ako hranol vyložený Cavalieriho princíp. V tejto učebnici ako jedinej nájdeme definíciu telesa. Nachádzajú sa tu definície rotačných telies – konkrétne aj gule a guľovej plochy rotáciou polkruhu a kružnice. Definícia týchto objektov ako množín bodov je uvedená pre guľovú plochu. Pre guľu je tu otázka na opakovanie (definícia gule ako množiny bodov je učivo základnej školy). Definované sú aj pojmy stred gule, polomer gule, guľový odsek, guľový vrchlík, guľová vrstva, guľový pás a guľový výsek. Kapitoly tejto učebnice sú rozdelené na časť výkladovú, ktorá je prekladaná riešenými príkladmi a časť precvičovaciu – neriešené úlohy.

Vzorec pre objem gule je uvedený odvodením pomocou Cavalieriho princípu (podobne ako v kapitole 5.3 tejto práce). Tento postup je primeraný pre gymnaziálnu výuku a bližšie približuje myšlienky infinitezimálneho počtu. Objem guľového odseku a vrstvy je vyjadrený len vzorcom, bez odvodenia. Autorka sa odvoláva na zložitosť odvodenia bez využitia integrálneho počtu. Tu by práve boli vhodné Archimédove postupy uvedené v kapitole 4.4. Objem guľového výseku je vyvodený ako súčet objemu príslušného odseku a objem kužeľa s podstavou zhodnou s podstavou odseku a vrcholom v strede gule.

Na odvodenie vzorca pre výpočet povrchu gule je využitá úvaha: pokryjeme povrch gule milimetrovým papierom a vytvoríme ihlany, ktorých hlavné vrcholy budú totožné so stredom gule a podstavy budú štvorčeky milimetrového papiera. Tým získame poznatok, že objem gule je rovný objemu ihlanu, ktorého podstava má obsah rovný povrchu gule a jeho výška je rovná polomeru gule. Táto úvaha je chybná, pretože guľa nie je rozvinuteľná do roviny (viď kapitola 6.3) a súčet objemov takto zavedených ihlanov by neodpovedal presne objemu gule. Mal by sa tu vyskytnúť návrh na zmenšenie štvorčekov (aby mali stranu $0{,}5\ \mathrm{mm}$, alebo $0{,}25$ mm...), aby vzniknutá chyba bola stále menšia a menšia. Táto úvaha by sa približovala infinitezimálnemu počtu. Po tejto úvahe a priloženom výpočte sú uvedené vzorce pre výpočet povrchu guľového vrchlíku a guľového pásu. Následne je uvedená otázka pre žiakov o sieti gule, ktorá však zostáva bez vysvetlenia.

Na záver výkladovej časti tejto kapitoly sú uvedené vzorce pre výpočet objemu a povrchu anuloidu – toto učivo už je nad rámec RVP, ale je vhodné pre žiakov, ktorý sa budú ďalej venovať matematike.

Po výkladovej časti v učebnici nájdeme neriešené príklady týkajúce sa objemu a povrchu všetkých rozobraných rotačných telies. Je tu uvedený jeden zaujímavý príklad, ktorý sa netýka priamo objemu a povrchu gule. Ide o výpočet objemu a povrchu telesa, ktoré vznikne rotáciou pravidelného šesťuholníka, so stranou zadanou všeobecne a, okolo jeho dlhšej uhlopriečky – tento príklad úzko súvisí s Archimédovým postupom odvodzovania objemu a povrchu gule. Nájdeme tu osemnásť úloh na výpočet objemu a povrchu gule a jej častí. Príklady sú od začiatku netriviálne, čo nie je úplne vhodný prístup. Bolo by dobré, ak by na začiatok boli zaradené „rozbehové" úlohy, ktoré by vyžadovali jednoduchšie operácie. Niektoré úlohy sú teoretické, všeobecného charakteru – napr. ako sa zmení objem či povrch gule, ak jej polomer zmenšíme k-násobne alebo zäčšíme o ε (ε je zanedbateľne malé oproti polomeru gule). Táto úloha môže slúžiť ako návodná úloha pre infinitezimálny počet, ktorému sa ale autorka vyhla pri výklade. Ďalšie úlohy sú teoretické, ale konkrétneho charakteru (výpočty objemov a povrchov gule a jej častí zo zadaných parametrov). Nakoniec sú uvedené úlohy aplikačného charakteru (architektonické výpočty, výpočet objemu cisterny zloženej z valca a guľových odsekov, výpočet pomeru hmotností gule a gule s vyrezaným valcom a odsekom). Posledná uvedená úloha vedie na výpočet hmotnosti anuloidu.

Táto učebnica je z pohľadu matematickej teórie písaná veľmi exaktne. Príklady na precvičovanie sú náročné, a preto je na rozhodnutí učiteľa, ktorý chce učebnicu využívať, ako vyberie vhodné príklady a optimálnu hĺbku výkladu.

Matematika pre druhý ročník gymnázií. Základy geometrie v priestore.

Ani v tejto učebnici nie je uvedená definícia telesa.Objem tu je uvedený opisom jeho vlastností, pričom sa autor odvoláva na učivo základnej školy. Tieto vlastnosti ale zodpovedajú predošlým dvom učebniciam a sú doplnené o Cavalieriho princíp. Zadefinované sú pojmy: guľa, rotáciou kruhu okolo jeho osi; stred gule a polomer gule. Guľovú plochu autor definuje ako hranicu gule (hodila by sa tu aj definícia pomocou rotácie kružnice). V nasledujúcom texte sú uvedené definície gule a guľovej plochy ako množiny bodov danej vlastnosti. Vzorec pre objem gule je odvodený pomocou Cavalieriho princípu a pre jej povrch zostáva bez komentáru. Časti gule a guľovej plochy sú definované aj s pomocnými pojmami: guľový odsek, podstava guľového odseku, výška guľového odseku, guľový vrchlík ako hranica odseku bez jeho podstavy. Žiaci sú oboznámení so vzorcami pre výpočet objemu guľového odseku a povrchu guľového vrchlíku s malou poznámkou o pokračovaní úvah, ktoré boli použité pri odvodení vzorca pre objem gule. Nie je tu však vysvetlené ako v týchto úvahách pokračovať. Zaujímavá úprava vzorca pre výpočet objemu guľového odseku ukazuje, že sa tento objem dá rozdeliť na objem gule a valca:

$$V = \tfrac{1}{6}\pi \cdot v \cdot (3\rho^2 + v^2) = \tfrac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{v}{2}\right)^3 + \pi \cdot \rho^2 \cdot \frac{v}{2},$$

kde v je výška guľového odseku a ρ je polomer podstavy guľového odseku. Ďalší riešený príklad ilustruje vypočet časti povrchu Zeme, ktorú kozmonaut vidí z danej výšky. Tento príklad je typovo rovnaký ako riešený príklad z Matematiky pro střední odborní školy, ktorú sme už rozoberali. Úloha je netriviálna, a preto vhodne zvolená. Nasleduje šesť neriešených príkladov, z ktorých prvé tri sú aplikačného charakteru: výpočet hmotnosti Zeme, ak poznáme jej hustotu a považujeme ju za guľu (tento fakt nie je zdôraznený), výpočet hrúbky steny dutej kovovej gule a výpočet hmotnosti nitu zloženého z valca, zrezaného kužeľa a guľového odseku. Pre žiakov sú pripravené aj úlohy teoretického charakteru: dôkaz vzorca pre objem guľového odseku (tu je vidieť, prečo autor ďalej nešpecifikoval spôsob odvodenia tohto vzorca pri výklade) a výpočet objemu telesa pozostávajúceho z kocky a gule, ktorá sa dotýka všetkých jeho hrán.

Táto učebnica je primeraná požiadavkám gymnaziálneho učiva. Rovnako jej výklad je primeraný výuke na gymnáziu, nezachádza príliš do podrobností, ale je dostatočne exaktný. Je škoda, že tu chýba definícia guľového výseku a vzorec pre jeho objem.

Záver

V tejto diplomovej práci sú zhrnuté poznatky o objeme a povrchu gule a jej častí. Zo záznamov zo starovekého Egypta sa zachovala len jedna úloha, ktorá by mohla popisovať návod na výpočet povrchu polgule, ale nie je jasné, či sa jedná práve o toto teleso. V starovekej Mezopotámii sa nestretneme s tabuľkou, na ktorej by boli zobrazené postupy pre výpočet povrchu či objemu gule. Dôvod je zrejme ten, že matematika starovekej Mezopotámie vychádzala z praxe, v ktorej nemali potrebu počítať objem či povrch telesa akým je guľa.

Najväčšia časť práce je venovaná prekladu Archimédovho diela *O guli a valci*, v ktorom sa venoval objemu a povrchu gule a jej častí. Archimédés dokázal odvodiť pomocou exhaustívnej a mechanickej metódy (spis *O metóde*) vzťah medzi objemom gule a kužeľa, povrchom gule a obsahom kruhu, objemom guľového výseku a kužeľa a medzi povchom vrchlíku a obsahom kruhu.

Bonaventura Cavalieri významne prispel k objavu vzorca pre objem a povrch gule, keď aplikoval svoj Cavalieriho princíp na výpočet objemu gule. Vzorce pre výpočet objemu a povrchu gule, ktoré sú nám známe dnes, sa dajú odvodiť pomocou integrálneho počtu s využitím Fubiniho vety, Guldinovho pravidla či poznatkov z diferenciálnej geometrie. Najväčším problémom pri určovaní povrchu sféry je to, že sféra nemá sieť, teda nie je rozvinuteľná do roviny ako nám dokazuje Theorema egregium diferenciálnej geometrie.

Posledná kapitola práce je venovaná didaktickému rozboru učebníc využívaných pre výuku na základných a stredných školách v Českej republike a Slovenskej republike. V základoškolských učebniciach sa stretneme so vzorcami pre objem a povrch gule, ale nie jej častí. Rovnako sa nestretneme ani s definíciou telesa či objemu a povrchu ako miery. S týmito pojmami sa pracuje intuitívne. Stredoškolské učebnice už obsahujú vzorce pre objem a povrch gule a jej častí ako aj stredoškolskú definíciu objemu. Len jedna z učebníc definuje teleso. Dve zo spomínaných učebníc využívajú Cavalieriho princíp pre odvodenie objemu gule. Žiadna z učebníc nevyužíva metódy integrálneho počtu pre odvodenie vzorcov. Je to očakávateľné, keďže v sériách týchto učebníc je téma objemu a povrchu gule zaradená do tretieho ročníka a integrálny počet sa vyučuje až v maturitnom ročníku.

Zoznam použitej literatúry

1. ARCHIMEDES, HEATH, J. D.: The Works of Archimedes. Londýn: Cambridge University Press. 1897. 326 s.
2. BEČVÁŘ, J., BEČVÁŘOVÁ, M., VYMAZALOVÁ, H.: Matematika ve starověku Egypt a Mezopotámie. Praha: Prometheus. 2003. 371 s. ISBN 80-7196-255-4.
3. BEČVÁŘ, J., FUCHS, E.: Matematika v 16. a 17. století. Praha: Prometheus. 1999. 324 s. ISBN 80-7196-150-7.
4. BEČVÁŘ, J., ŠTOLL, I.: Archimedes Největší vědec starověku. Praha: Prometheus. 2005. 72 s. ISBN 80-7196-273-2.
5. CAVALIERI, B.: Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota. Bologna: 1653. 547 s. ISBN nedostupné.
6. FITZPATRICK, R.: Euclid's Elements of Geometry. 2007. 428 s. ISBN 978-0-6151-7984-1.
7. HALAS, Z.: Archimédés. Několik pohledů do jeho života a díla. Praha: Matfyzpress. 2012. 136 s. ISBN 978-80-7378-228-3.
8. KLINE, M.: Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. New York: Oxford University Press. 1972. 390 s. ISBN 0-19-506135-7.
9. KOPÁČEK, J. a kol.: Příklady z matematiky pro fyziky III. Praha: Matfyzpress. 2002. 194 s. ISBN 80-85863-95-2.
10. POMYKALOVÁ, E.: Matematika pre gymnáziá – Stereometria. Praha: Prometheus. 2007. 223 s. ISBN 978-80-7196-178-9.
11. SCHWABIK, Š., ŠARMANOVÁ, P.: Malý průvodce historií integrálu. Praha: Prometheus. 1996. 95 s. ISBN 80-7196-038-1.
12. SOUČEK, V.: Křivky a plochy, 4. semestr. [online]. 71s. [cit. 20.7. 2014] Dostupné na internete: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~slavik/dg-soucek.pdf>
13. VYMAZALOVÁ, H.: Staroegyptská matematika. Hieratické matematické texty. Praha: Český egyptologický ústav Filozofické fakulty Univerzity Karlovy v Praze, Celetná 20, 110 01 Praha 1, ve spolupráci s Jednotou českých matematiků a fyziků. 2006. 155 s. ISBN 80-7308-156-3.
14. ZNÁM, Š. a i.: Pohľad do dejín matematiky. Bratislava: ALFA. 1986. 240 s. ISBN 4558-1985-30.

Zoznam analyzovaných učebníc

1. BINTEROVÁ, H., FUCHS, E., TLUSTÝ, P.: Matematika 9. Geometrie. Učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia. Plzeň: Nakladatelství Fraus. 2010. 96 s. ISBN 978-80-7238-691-8.
2. PŮLPÁN, Z., ČIHÁK, M., TREJBAL, J.: Matematika 9 pro základní školy. Praha: SPN. 2010. 102 s. ISBN 978-80-7235-489-4.
3. ROSECKÁ, Z., MÍČEK, A.: Geometrie 9. Brno: Nová škola. 2009. 111s. ISBN 80-8289-020-4.
4. BUŠEK, I., CIBULKOVÁ, M., VÄTEROVÁ, V.: Sbírka úloh z matematiky pro 9. ročník ZŠ. Praha: Prometheus. 2012. 170 s. ISBN 978-80-7196-408-7.
5. ŽENATÁ, E.: Sbírka úloh z matematiky pro 9. Ročník. Praha: Blug. Rok vydania neuvedený. 160 s. ISBN 80-7274-963-3.
6. ODVÁRKO, O., ŘEPOVÁ, J.:Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť. 3. část. Praha: Prometheus. 2011. 200 s. ISBN 978-80-7196-039-3.
7. POMYKALOVÁ, E.: Matematika pro gymnázia – Stereometrie. Praha: Prometheus. 2007. 223 s. ISBN 978-80-7196-178-9.
8. BOŽEK, M.: Matematika pre 2. ročník gymnázií. Základy geometrie v priestore. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo. 1994. 103 s. ISBN 80-08-02326-0.

Zoznam použitých skratiek

napr. – napríklad,

tzv. – takzvaný,

a i. – a iní,

p. n. l. – pred naším letopočtom,

resp. – respektíve,

RVP – Rámcový vzdelávací program