Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Marek Michl

Součty exponenciálních náhodných veličin

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce:	RNDr. Jan Seidler, CSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2014

Dovoluji si na tomto místě poděkovat Janu Seidlerovi, vedoucímu bakalářské práce, za pomoc při vzniku této práce, za čas, který mi věnoval, a za důslednost, s jakou práci vedl.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Součty exponenciálních náhodných veličin

Autor: Marek Michl

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jan Seidler, CSc., Ústav teorie informace a automatizace Akademie věd České republiky, v.v.i

Abstrakt: Součty exponenciálních náhodných veličin se často vyskytují v inženýrských aplikacích. Jejich hustoty jsou vesměs známé a v inženýrské literatuře dobře popsané, avšak jejich řádné odůvodnění zpravidla chybí. Tato práce si dává za úkol poskytnout skutečně rigorózní odvození známých explicitních formulí pro hustoty součtu nezávislých exponenciálně rozdělených náhodných veličin v několika případech podle toho, zda jsou veličiny stejně rozdělené či nikoliv. Dále pak práce připomíná některé základní vlastnosti exponenciálního rozdělení a také vztah součtu stejně rozdělených exponenciálních náhodných veličin s veličinou s gamma rozdělením, na jehož základě je odvozena také hustota pro součet gamma náhodných veličin se stejnými intenzitami.

Klíčová slova: konvoluce, exponenciální rozdělení, gamma rozdělení, charakteristická funkce.

Title: Sums of exponential random variables

Author: Marek Michl

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Jan Seidler, CSc., Institute of Information Theory and Automation of the Academy of Sciences of the Czech Republic

Abstract: Sums of exponential random variables are often found in applied mathematics. Their densities are known and are well documented in engineering articles. However, these articles usually lack detailed deductions. The purpose of this thesis is to give rigorous deductions of explicit formulas for densities of sums of independent exponential random variables, which are known. The thesis covers several cases depending on whether the variables have the same distribution or not. Furthermore, the thesis gives a summary of basic characteristics of exponential distribution and the relation between sums of identically distributed exponential random variables and a random variable with gamma distribution. Based on this relation the density of the sum of gamma random variables with the same intestity is given.

Keywords: convolution, exponential distribution, gamma distribution, characteristic function.

Obsah

Kapitola 1

Základní pojmy a vlastnosti

Cílem této práce je rigorózně odvodit explicitní formule pro hustotu součtu nezávislých náhodných veličin s exponenciálním rozdělením, které jsou obsaženy v inženýrsky orientované literatuře. Tyto formule jsou shrnuty v článku (Nadarajah, 2008), kde jsou však uvedeny bez důkazu. Z tohoto článku jsme tedy vyšli.

Řešení daného problému je velmi dobře známo, pokud mají všechny uvažované náhodné veličiny exponenciální rozdělení se stejným parametrem. V obecnějším případě je však výsledek méně zřejmý, často dosti komplikovaný, a postup záleží na tom, zda jsou parametry vesměs různé či nikoliv.

V této práci se budeme zabývat zejména náhodnými veličiny s exponenciálním rozdělením, dále se pak vyskytne i gamma rozdělení. V první kapitole si tedy zavedeme jejich formální definice a odvodíme některé základní vlastnosti, které dále použijeme ve druhé kapitole věnované výpočtům samotných hustot.

Jeden z důkazů, který užíváme, stojí za zvláštní zmínku. Je založen na výpočtu charakteristické funkce Ψ_X uvažovaného součtu X exponenciálních náhodných veličin. Neboť $\Psi_X \notin L^1(-\infty,\infty)$, nelze k výpočtu hustoty f_X náhodné veličiny X užít větu IV.5.3 ze (Štěpán, 1987), podle níž pro integrovatelné Ψ_X platí

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \Psi_X(t) dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Dokážeme však, že funkce $t \mapsto e^{-itx}\Psi_X(t)$ má Newtonův integrál a jsou splněny další technické předpoklady umožňující odvodit, že vzorec (1.1) platí, je-li integrál chápán jako Newtonův.

1.1 Exponenciální rozdělení

Nejprve se zabývejme exponenciálním rozdělením náhodné veličiny.

Definice 1. *Řekneme, že náhodná veličina X má exponenciální rozdělení s parametrem λ, pokud má hustotu*

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{I}(x > 0), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Značíme $X \sim Exp(\lambda)$.

Jako první si spočtěme distribuční funkci náhodné veličiny $X \sim Exp(\lambda)$.

Tvrzení 1. *Nechť $X \sim Exp(\lambda)$. Pak pro distribuční funkci F náhodné veličiny X platí*

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & jinak. \end{cases}$$

Důkaz. Označme f hustotu náhodné veličiny X. Pak pro $x > 0$ platí

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda \left[\frac{-e^{-\lambda t}}{\lambda} \right]_0^x \\ &= 1 - e^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

Pro $x \leq 0$ pak

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0.$$

❑

K důležitým charakteristikám náhodné veličiny patří střední hodnota, rozptyl a obecný k-tý moment. Podívejme se nyní, jak tyto charakteristiky vypadají pro $X \sim Exp(\lambda)$. Nejprve připomeňme, že symbolem $\Gamma(n)$ rozumíme tzv. gamma funkci, tj.

$$\Gamma(n) = \int_{0}^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx,$$

pro kterou platí $\Gamma(n) = (n-1)!$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Symbolem $\Gamma(n,a)$ potom rozumíme zobecněnou gamma funkci, která je dána předpisem

$$\Gamma(n,a) = \int_{0}^{\infty} x^{n-1} e^{-ax} dx,$$

pro kterou platí $\Gamma(n,a) = \frac{\Gamma(n)}{a^n}$.

Tvrzení 2. *Nechť $X \sim Exp(\lambda)$. Pak platí*

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{\lambda}, \tag{1.2}$$

$$\mathbb{E}X^k = \frac{k!}{\lambda^k}, \tag{1.3}$$

$$varX = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{1.4}$$

Důkaz. Označme f hustotu náhodně veličiny X. Nejprve dokažme (1.2) přímým výpočtem z definice jako

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx = \int_{0}^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \Gamma(2,\lambda) = \lambda \frac{\Gamma(2)}{\lambda^2} \\ &= \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Obdobným způsobem ověříme vztah (1.3), tedy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X^k &= \int_{\mathbb{R}} x^k f(x)dx = \int_0^\infty x^k \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda\Gamma(k+1,\lambda) = \lambda\frac{\Gamma(k+1)}{\lambda^{k+1}} \\ &= \frac{k!}{\lambda^k}.\end{aligned}$$

Použitím (1.3) pak dostáváme

$$\begin{aligned}varX &= \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} \\ &= \frac{1}{\lambda^2},\end{aligned}$$

čímž jsme dokázali (1.4).

❑

1.2 Gamma rozdělení

Nyní si zaveďme gamma rozdělení.

Definice 2. *Řekneme, že náhodná veličina X má gamma rozdělení s parametry n a λ, pokud má hustotu*

$$f(x) = \lambda^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \mathbb{I}(x > 0), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Značíme $X \sim \Gamma(n,\lambda)$.

Poznámka. Povšimněme si, že exponenciální rozdělení je speciálním případem gamma rozdělění, přesněji, rozdělení $Exp(\lambda)$ odpovídá rozdělění $\Gamma(1,\lambda)$.

Zaměřme se nyní na základní charakteristiky gamma rozdělení.

Tvrzení 3. *Nechť $X \sim \Gamma(n,\lambda)$. Pak platí*

$$\mathbb{E}X = \frac{n}{\lambda}, \tag{1.5}$$

$$\mathbb{E}X^k = \frac{(k+n-1)!}{(n-1)!}\frac{1}{\lambda^k}, \tag{1.6}$$

$$varX = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{1.7}$$

Důkaz. Označme f hustotu náhodně veličiny X a postupujeme obdobně jako v důkazu tvrzení 2. Tedy rovnost (1.5) plyne z

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X &= \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx = \int_0^\infty x\lambda^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\Gamma(n+1,\lambda) \\ &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\frac{\Gamma(n+1)}{\lambda^{n+1}} = \frac{n!}{(n-1)!}\frac{1}{\lambda} \\ &= \frac{n}{\lambda}.\end{aligned}$$

Podobně vztah (1.6) spočteme jako

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X^k &= \int_{\mathbb{R}} x^k f(x)dx = \int_0^\infty x^k \lambda^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\Gamma(k+n,\lambda) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\frac{\Gamma(k+n)}{\lambda^{k+n}} \\ &= \frac{(k+n-1)!}{(n-1)!}\frac{1}{\lambda^k}.\end{aligned}$$

Vztah (1.7) pak plyne použitím (1.6) následovně

$$\begin{aligned}varX &= \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{(n+1)!}{(n-1)!}\frac{1}{\lambda^2} - \frac{n^2}{\lambda^2} = \frac{n(n+1)-n^2}{\lambda^2} \\ &= \frac{n}{\lambda^2}.\end{aligned}$$

❑

K výpočtu distribuční funkce náhodné veličiny s gamma rozdělením budeme potřebovat následující integrál.

Lemma 4. *Platí*

$$\int_0^x y^n e^{-ya} dy = \frac{n!}{a^{n+1}} - e^{-xa} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} \frac{x^k}{a^{n-k+1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \forall a \in \mathbb{R}, \forall x \geq 0.$$

Důkaz. Postupujme indukcí dle n.
a) Pro případ $n = 0$ jednoduše spočteme

$$\int_0^x e^{-ya} dy = \left[\frac{e^{-ya}}{-a}\right]_0^x = \frac{1}{a} - \frac{e^{-xa}}{a}.$$

b) Z předpokládané platnosti pro n dokážeme platnost pro $n+1$ následujícím způsobem

$$\begin{aligned}\int_0^x y^{n+1} e^{-ya} dy &= \left[\frac{y^{n+1}e^{-ya}}{-a}\right]_0^x + \frac{n+1}{a}\int_0^x y^n e^{-ya} dy \\ &= -\frac{x^{n+1}e^{-xa}}{a} + \frac{n+1}{a}\left(\frac{n!}{a^{n+1}} - e^{-xa}\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}\frac{x^k}{a^{n-k+1}}\right) \\ &= -\frac{x^{n+1}e^{-xa}}{a} + \frac{(n+1)!}{a^{n+2}} - e^{-xa}\sum_{k=0}^n \frac{(n+1)!}{k!}\frac{x^k}{a^{n+1-k+1}} \\ &= \frac{(n+1)!}{a^{n+2}} - e^{-xa}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(n+1)!}{k!}\frac{x^k}{a^{n+1-k+1}}.\end{aligned}$$

❑

A nyní k výpočtu distribuční funkce náhodné veličiny s gamma rozdělením.

Tvrzení 5. *Náhodná veličina $X \sim \Gamma(n,\lambda)$ má distribuční funkci*

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^i \lambda^i}{i!}, & x > 0, \\ 0, & jinak. \end{cases}$$

Důkaz. Hustotu náhodné veličiny X si označme f. Pro $x > 0$ pak platí

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^x \lambda^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} dt = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^x t^{n-1} e^{-\lambda t} dt,$$

což se dle lemmatu 4 rovná

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \left(\frac{(n-1)!}{\lambda^n} - e^{-\lambda x} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{i!} \frac{x^i}{\lambda^{n-i}} \right) \\ &= 1 - e^{-\lambda x} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^i \lambda^i}{i!}. \end{aligned}$$

Pokud $x \le 0$, pak

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0.$$

❑

1.3 Charakteristická funkce

Dále budeme pracovat také s charakteristickou funkcí náhodné veličiny, a proto si ji na tomto místě zaveďme.

Definice 3. *Charakteristickou funkcí náhodné veličiny X rozumíme funkci danou předpisem*

$$\Psi_X(t) = \mathbb{E} e^{-itX}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

kde symbol i značí imaginární jednotku.

Tvrzení 6. *Pro charakteristickou funkci $\Psi_X(t)$ náhodné veličiny $X \sim Exp(\lambda)$ platí*

$$\Psi_X(t) = \frac{1}{1 - \frac{it}{\lambda}}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Důkaz. Přímým výpočtem dostáváme

$$\begin{aligned} \Psi_X(t) = \mathbb{E} e^{itX} &= \int_0^\infty e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^\infty e^{-x(\lambda - it)} dx \\ &= \lambda \left[\frac{e^{-x(\lambda - it)}}{it - \lambda} \right]_0^\infty = \frac{\lambda}{\lambda - it} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{it}{\lambda}}. \end{aligned}$$

$\square$

Ještě si spočtěme charakteristickou funkci pro rozdělení gamma.

Tvrzení 7. *Nechť $X \sim \Gamma(n,\lambda)$. Pak lze její charakteristickou funkci $\Psi_X(t)$ vyjádřit jako*

$$\Psi_X(t) = \left(\frac{1}{1-\frac{it}{\lambda}}\right)^n, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Důkaz. Počítejme z definice charakteristické funkce

$$\begin{aligned}\Psi_X(t) = \mathbb{E}e^{itX} &= \int_0^\infty e^{itx}\lambda^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x}dx = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x(\lambda-it)}dx \\ &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\Gamma(n,\lambda-it) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\frac{(n-1)!}{(\lambda-it)^n} = \left(\frac{\lambda}{\lambda-it}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{1-\frac{it}{\lambda}}\right)^n.\end{aligned}$$

$\square$

Pro charakteristické funkce budeme používat následující tvrzení.

Tvrzení 8. *Nechť $X_1,\dots,X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny s charakteristickými funkcemi $\Psi_{X_i}(t), i=1,\dots,n$. Pak náhodná veličina $X=\sum_{i=1}^n X_i$ má charakteristickou funkci*

$$\Psi_X(t) = \prod_{i=1}^n \Psi_{X_i}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Důkaz. S využitím nezávislosti máme

$$\begin{aligned}\Psi_X(t) &= \mathbb{E}e^{it\sum_{i=1}^n X_i} = \mathbb{E}\prod_{i=1}^n e^{itX_i} = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}e^{itX_i} \\ &= \prod_{i=1}^n \Psi_{X_i}(t).\end{aligned}$$

$\square$

1.4 Věta o konvoluci

Stěžejním krokem při odvozování hustoty součtu nezávislých náhodných veličin bude věta o konvoluci, kterou si nyní dokážeme.

Věta 9. *Nechť náhodná veličina X má hustotu f_X a nechť náhodná veličina Y má hustotu f_Y. Nechť X a Y jsou nezávislé. Potom náhodná veličina $X+Y$ má hustotu*

$$f_{X+Y}(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(u)f_Y(z-u)du, \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Důkaz. Definujme zobrazení $t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ předpisem

$$t(x,y) = (x + y,x).$$

Toto zobrazení je lineární a zřejmě existuje inverzní zobrazení $t^{-1} = \tau$, pro které platí

$$\tau(z,u) = (u,z - u) = (z,u) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tedy jakobián D_τ zobrazení τ spočteme jako

$$D_\tau = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -1.$$

Náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé, z čehož plyne, že pro sdruženou hustotu $f_{X,Y}$ vektoru (X,Y) platí

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Dle věty o transformaci náhodného vektoru (viz Anděl, 2007, Věta 3.7) má náhodný vektor $(X + Y,X) = t(X,Y)$ hustotu

$$f_{X+Y,X}(z,u) = f_{X,Y}(\tau(z,u)) \, |D_\tau| = f_{X,Y}(u,z - u) = f_X(u) f_Y(z - u).$$

Marginální hustotu f_{X+Y} pak dostaneme ze sdružené integrováním

$$f_{X+Y}(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(u) f_Y(z - u) du,$$

což je tvrzení věty.

❑

Kapitola 2

Součty nezávislých exponenciálních náhodných veličin

V této kapitole spočteme hustoty pro několik případů součtu nezávislých náhodných veličiny s exponenciálním rozdělením.

2.1 Stejně rozdělené

Začněme se zabývat případem, kdy jsou všechny veličiny stejně rozdělené.

Věta 10. *Nechť $X_1, \ldots, X_M, M \geq 1$, jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s parametrem λ. Nechť $X = \sum_{i=1}^{M} X_i$. Pak X má hustotu*

$$f_X(x) = \lambda^M \frac{x^{M-1}}{(M-1)!} e^{-\lambda x} \mathbb{I}(x > 0), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Důkaz. Označme f_{X_i} hustotu veličiny X_i a postupujme indukcí podle M. Pro $M = 1$ je tvrzení zřejmé avšak samotnou indukci započneme až pro $M = 2$, neboť nám to dá návod jak postupovat v indukčním kroku.
a) Nechť tedy $M = 2$. Pro hustoty veličin X_1, X_2 platí

$$f_{X_1}(x) = f_{X_2}(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{I}(x > 0).$$

Hustotu f_X veličiny X nyní spočteme pomocí věty 9 o konvoluci. Podle té platí

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_{X_1}(z) f_{X_2}(x - z) dz \\ &= \int_0^x \lambda e^{-\lambda z} \lambda e^{-\lambda(x-z)} dz \\ &= \lambda^2 x e^{-\lambda x},\ x > 0. \end{aligned}$$

b) Předpokládáme, že tvrzení platí pro M a chceme ho dokázat pro $M + 1$. Pro zjednodušení označme

$$Y = \sum_{i=1}^{M} X_i.$$

Tedy zkoumáme hustotu veličiny X, která se dá zapsat následujícím součtem

$$X = Y + X_{M+1}.$$

Nyní postupujeme analogicky jako v bodě a) a dostáváme

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_Y(z) f_{X_{M+1}}(x-z)dz \\ &= \int_0^x \lambda^M \frac{z^{M-1}}{(M-1)!} e^{-\lambda z} \lambda e^{-\lambda(x-z)} dz \\ &= \lambda^{M+1} e^{-\lambda x} \frac{1}{(M-1)!} \int_0^x z^{M-1} dz \\ &= \lambda^{M+1} e^{-\lambda x} \frac{1}{(M-1)!} \left[\frac{z^M}{M} \right]_0^x \\ &= \lambda^{M+1} \frac{x^M}{M!} e^{-\lambda x}, \; x > 0. \end{aligned}$$

❑

Poznámka. Povšimněme si, že hustota (2.1) odpovídá náhodné veličině s gamma rozdělením s parametry M a λ.

Přímým důsledkem tohoto poznatku je výpočet hustoty pro součet nezávislých náhodných veličin s gamma rozdělením s obecně různými parametry n a shodným parametrem λ.

Věta 11. *Nechť $X_1, \ldots, X_M, M \geq 1$, jsou nezávislé náhodné veličiny. Dále nechť $X_i \sim \Gamma(n_i,\lambda)$ pro všechna $i = 1, \ldots, M$. Označme $N = \sum_{i=1}^M n_i$. Potom pro náhodnou veličinu $X = \sum_{i=1}^M X_i$ platí $X \sim \Gamma(N,\lambda)$.*

Důkaz. Podle poznámky pod větou 10 víme, že pro každé $i = 1, \ldots, M$ má náhodná veličina X_i stejné rozdělení jako náhodná veličina $\sum_{j=1}^{n_i} Y_j$, kde platí $Y_j \sim Exp(\lambda)$. Tedy X má stejné rozdělení jako $\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{n_i} Y_j$. To však odpovídá součtu N nezávislých náhodných veličin s rozdělením $Exp(\lambda)$. Opět dle poznámky pod větou 10 má takovýto součet rozdělení $\Gamma(N,\lambda)$, z čehož plyne tvrzení věty. ❑

2.2 Nestejně rozdělené

Nyní se podívejme na situaci, kdy mají všechny veličiny navzájem různé střední hodnoty. Výsledek byl převzat z již zmiňovaného článku (Nadarajah, 2008) a část postupu byla založena na úvahách z knihy (Ross, 1997, kap. 5.2.4).

Věta 12. *Nechť $X_1, \ldots, X_M, M \geq 1$, jsou nezávislé náhodné veličiny a nechť $X_m \sim Exp(\lambda_m)$, $m = 1, \ldots, M$. Uvažme náhodnou veličinu $X = \sum_{i=1}^M X_i$. Pokud $\lambda_i \neq \lambda_j$ pro $i \neq j$, $i,j = 1, \ldots, M$, pak X má hustotu*

$$f_X(x) = \prod_{i=1}^M \lambda_i \sum_{j=1}^M \frac{e^{-\lambda_j x}}{\prod_{k=1,k\neq j}^M (\lambda_k - \lambda_j)} \mathbb{I}(x > 0), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Důkaz. Opět postupujeme indukcí dle M s tím, že tvrzení je zřejmé pro $M = 1$ a indukci začneme pro případ $M = 2$, který dává návod jak pokračovat v indukčním kroku.
a) Nejprve tedy uvažme případ $M = 2$.
Hustoty veličin X_1, X_2 vypadají následovně

$$\begin{aligned} f_{X_1}(x) &= \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \mathbb{I}(x > 0), \\ f_{X_2}(x) &= \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} \mathbb{I}(x > 0). \end{aligned}$$

Nyní za pomoci věty 9 o konvoluci

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_{X_1}(z) f_{X_2}(x - z) dz \\ &= \int_0^x \lambda_1 \lambda_2 e^{-(\lambda_1 z + \lambda_2 (x - z))} dz \\ &= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} \int_0^x e^{z(\lambda_2 - \lambda_1)} dz \\ &= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} \left[\frac{e^{z(\lambda_2 - \lambda_1)}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right]_0^x \\ &= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} \frac{e^{x(\lambda_2 - \lambda_1)} - 1}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \left(\frac{e^{-\lambda_1 x}}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{e^{-\lambda_2 x}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right), \; x > 0. \end{aligned}$$

b) Nyní předpokládejme, že rovnost (2.2) platí pro M. Dokažme ji pro $M + 1$.
Bez újmy na obecnosti lze veličiny X_i seřadit tak, aby

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_{M+1}. \tag{2.3}$$

Na začátek zaveďme náhodnou veličinu Y předpisem

$$Y = \sum_{i=1}^{M} X_i.$$

Můžeme pak náhodnou veličinu X zapsat jako součet

$$X = Y + X_{M+1}.$$

Výslednou hustotu dostaneme obdobným postupem jako v bodě a), tedy

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_{X_{M+1}}(x-z) f_Y(z) dz \\
&= \int_0^x \lambda_{M+1} e^{-\lambda_{M+1}(x-z)} \prod_{i=1}^{M} \lambda_i \sum_{j=1}^{M} \frac{e^{-\lambda_j z}}{\prod_{k=1,k\neq j}^{M} (\lambda_k - \lambda_j)} dz \\
&= \lambda_{M+1} e^{-\lambda_{M+1} x} \prod_{i=1}^{M} \lambda_i \int_0^x \sum_{j=1}^{M} \frac{e^{z(\lambda_{M+1}-\lambda_j)}}{\prod_{k=1,k\neq j}^{M} (\lambda_k - \lambda_j)} dz \\
&= \prod_{i=1}^{M+1} \lambda_i e^{-\lambda_{M+1} x} \sum_{j=1}^{M} \left(\frac{1}{\prod_{k=1,k\neq j}^{M} (\lambda_k - \lambda_j)} \int_0^x e^{z(\lambda_{M+1}-\lambda_j)} dz \right) \\
&= \prod_{i=1}^{M+1} \lambda_i e^{-\lambda_{M+1} x} \sum_{j=1}^{M} \left(\frac{1}{\prod_{k=1,k\neq j}^{M} (\lambda_k - \lambda_j)} \left[\frac{e^{z(\lambda_{M+1}-\lambda_j)}}{\lambda_{M+1} - \lambda_j} \right]_0^x \right) \\
&= \prod_{i=1}^{M+1} \lambda_i e^{-\lambda_{M+1} x} \sum_{j=1}^{M} \left(\frac{1}{\prod_{k=1,k\neq j}^{M} (\lambda_k - \lambda_j)} \frac{e^{x(\lambda_{M+1}-\lambda_j)} - 1}{\lambda_{M+1} - \lambda_j} \right) \\
&= \prod_{i=1}^{M+1} \lambda_i \sum_{j=1}^{M} \left[\frac{1}{\prod_{k=1,k\neq j}^{M} (\lambda_k - \lambda_j)} \left(\frac{e^{-\lambda_j x}}{\lambda_{M+1} - \lambda_j} + \frac{e^{-\lambda_{M+1} x}}{\lambda_j - \lambda_{M+1}} \right) \right] \\
&= \prod_{i=1}^{M+1} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{M} \frac{e^{-\lambda_j x}}{\prod_{k=1,k\neq j}^{M+1} (\lambda_k - \lambda j)} + \sum_{j=1}^{M} \frac{\frac{e^{-\lambda_{M+1} x}}{\lambda_j - \lambda_{M+1}}}{\prod_{k=1,k\neq j}^{M} (\lambda_k - \lambda_j)} \right), \ (x > 0).
\end{aligned}
$$

Obdobně však lze vzít

$$Y' = \sum_{i=2}^{M+1} X_i.$$

Pak pro veličinu X', kterou zavedeme jako

$$X' = Y' + X_1$$

zjevně platí, že

$$X = X' \text{ a tedy } f_X(x) = f_{X'}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Stejným postupem jako pro X dostáváme

$$f_{X'}(x) = \prod_{i=1}^{M+1} \lambda_i \left(\sum_{j=2}^{M+1} \frac{e^{-\lambda_j x}}{\prod_{k=1,k\neq j}^{M+1} (\lambda_k - \lambda_j)} + \sum_{j=2}^{M+1} \frac{\frac{e^{-\lambda_1 x}}{\lambda_j - \lambda_1}}{\prod_{k=2,k\neq j}^{M+1} (\lambda_k - \lambda_j)} \right), \ (x > 0).$$

Tedy z rovnosti (2.4) máme pro každé $x > 0$

$$\sum_{j=1}^{M} \frac{e^{-\lambda_j x}}{\prod_{k=1,k\neq j}^{M+1} (\lambda_k - \lambda_j)} + e^{-\lambda_{M+1} x} \sum_{j=1}^{M} \frac{\dfrac{1}{\lambda_j - \lambda_{M+1}}}{\prod_{k=1,k\neq j}^{M} (\lambda_k - \lambda_j)} =$$

$$\sum_{j=2}^{M+1} \frac{e^{-\lambda_j x}}{\prod_{k=1,k\neq j}^{M+1} (\lambda_k - \lambda_j)} + e^{-\lambda_1 x} \sum_{j=2}^{M+1} \frac{\dfrac{1}{\lambda_j - \lambda_1}}{\prod_{k=2,k\neq j}^{M+1} (\lambda_k - \lambda_j)}.$$

Odečtením stejných členů z obou stran rovnosti obdržíme

$$\frac{e^{-\lambda_1 x}}{\prod_{k=2}^{M+1} (\lambda_k - \lambda_1)} + e^{-\lambda_{M+1} x} \sum_{j=1}^{M} \frac{\dfrac{1}{\lambda_j - \lambda_{M+1}}}{\prod_{k=1,k\neq j}^{M} (\lambda_k - \lambda_j)} =$$

$$\frac{e^{-\lambda_{M+1} x}}{\prod_{k=1}^{M} (\lambda_k - \lambda_{M+1})} + e^{-\lambda_1 x} \sum_{j=2}^{M+1} \frac{\dfrac{1}{\lambda_j - \lambda_1}}{\prod_{k=2,k\neq j}^{M+1} (\lambda_k - \lambda_j)}.$$

Nyní vynásobíme obě strany rovnosti výrazem $e^{\lambda_{M+1} x}$ a dostaneme

$$\frac{e^{-(\lambda_1 - \lambda_{M+1}) x}}{\prod_{k=2}^{M+1} (\lambda_k - \lambda_1)} + \sum_{j=1}^{M} \frac{\dfrac{1}{\lambda_j - \lambda_{M+1}}}{\prod_{k=1,k\neq j}^{M} (\lambda_k - \lambda_j)} =$$

$$\frac{1}{\prod_{k=1}^{M} (\lambda_k - \lambda_{M+1})} + e^{-(\lambda_1 - \lambda_{M+1}) x} \sum_{j=2}^{M+1} \frac{\dfrac{1}{\lambda_j - \lambda_1}}{\prod_{k=2,k\neq j}^{M+1} (\lambda_k - \lambda_j)}. \tag{2.5}$$

Jelikož rovnost platí pro každé $x > 0$, platí i pro $x \to +\infty$. Díky uspořádání zavedenému v (2.3) platí

$$\lim_{x\to\infty} e^{-(\lambda_1 - \lambda_{M+1}) x} = 0.$$

Použitím tohoto faktu na obě strany (2.5) máme

$$\sum_{j=1}^{M} \frac{\dfrac{1}{\lambda_j - \lambda_{M+1}}}{\prod_{k=1,k\neq j}^{M} (\lambda_k - \lambda_j)} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{M} (\lambda_k - \lambda_{M+1})}. \tag{2.6}$$

Vraťme se nyní k $f_X(x)$. Použitím (2.6) dostáváme

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \prod_{i=1}^{M+1} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{M} \frac{e^{-\lambda_j x}}{\prod_{k=1,k\neq j}^{M+1} (\lambda_k - \lambda j)} + \frac{e^{-\lambda_{M+1} x}}{\prod_{k=1}^{M} (\lambda_k - \lambda_{M+1})} \right) \\ &= \prod_{i=1}^{M+1} \lambda_i \sum_{j=1}^{M+1} \frac{e^{-\lambda_j x}}{\prod_{k=1,k\neq j}^{M+1} (\lambda_k - \lambda j)}. \end{aligned}$$

❑

Dále mějme veličiny takové, že K z nich má stejnou střední hodnotu a N dalších má odlišné a navzájem různé střední hodnoty. Hustota takového součtu se dá vyjádřit následujícím způsobem.

Věta 13. *Nechť $Y_1,\ldots,Y_K$ a $Z_1,\ldots,Z_N, K,\ N \geq 1$, jsou nezávislé náhodné veličiny. Nechť $Y_m \sim Exp(\lambda)$, $m = 1,\ldots,K$. Dále nechť $Z_n \sim Exp(\lambda_n)$, $n = 1,\ldots,N$. Nechť $Y = \sum_{m=1}^{K} Y_m$ a $Z = \sum_{n=1}^{N} Z_n$. Pokud $\lambda_i \neq \lambda_j$ pro $i \neq j$, $i, j = 1,\ldots,N$, a dále $\lambda_m \neq \lambda$ pro $m = 1,\ldots,N$, pak $X = Y + Z$ má hustotu*

$$f_X(x) = \lambda^K \prod_{n=1}^{N} \lambda_n \sum_{j=1}^{N} \frac{\left[e^{-\lambda_j x} - e^{-\lambda x} \sum_{l=0}^{K-1} \frac{x^l}{l!(\lambda-\lambda_j)^{-l}}\right]}{\prod_{k=1,k\neq j}^{N} (\lambda_k - \lambda_j)\left(\lambda - \lambda_j\right)^K} \mathbb{I}(x > 0), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Důkaz. Z věty 10 máme hustotu f_Y veličiny Y

$$f_Y(y) = \lambda^K \frac{y^{K-1}}{(K-1)!} e^{-\lambda y} \mathbb{I}(y > 0).$$

Dále z věty 12 platí pro hustotu f_Z veličiny Z

$$f_Z(z) = \prod_{n=1}^{N} \lambda_n \sum_{j=1}^{N} \frac{e^{-\lambda_j z}}{\prod_{k=1,k\neq j}^{N} (\lambda_k - \lambda_j)} \mathbb{I}(z > 0).$$

Hustotu veličiny X nyní spočteme pomocí věty 9 o konvoluci.

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_Y(y) f_Z(x-y)\,dy \\
&= \int_0^x \lambda^K \frac{y^{K-1}}{(K-1)!} e^{-\lambda y} \prod_{n=1}^{N} \lambda_n \sum_{j=1}^{N} \frac{e^{-\lambda_j (x-y)}}{\prod_{k=1,k\neq j}^{N} (\lambda_k - \lambda_j)} dy \\
&= \lambda^K \prod_{n=1}^{N} \lambda_n \frac{1}{(K-1)!} \int_0^x \sum_{j=1}^{N} \frac{y^{K-1} e^{-y(\lambda-\lambda_j)} e^{-\lambda_j x}}{\prod_{k=1,k\neq j}^{N} (\lambda_k - \lambda_j)} dy \\
&= \lambda^K \prod_{n=1}^{N} \lambda_n \frac{1}{(K-1)!} \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{e^{-\lambda_j x}}{\prod_{k=1,k\neq j}^{N} (\lambda_k - \lambda_j)} \int_0^x y^{K-1} e^{-y(\lambda-\lambda_j)} dy \right).
\end{aligned}$$

Použitím lemmatu 4 dostáváme

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \lambda^K \prod_{n=1}^{N} \lambda_n \frac{1}{(K-1)!} \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{e^{-\lambda_j x}}{\prod_{k=1,k\neq j}^{N} (\lambda_k - \lambda_j)} \right. \\
&\qquad \left. \left(\frac{(K-1)!}{(\lambda-\lambda_j)^K} - e^{-x(\lambda-\lambda_j)} \sum_{l=0}^{K-1} \frac{(K-1)!}{l!} \frac{x^l}{(\lambda-\lambda_j)^{K-l}} \right) \right] \\
&= \lambda^K \prod_{n=1}^{N} \lambda_n \sum_{j=1}^{N} \frac{\left[\frac{e^{-\lambda_j x}}{(\lambda-\lambda_j)^K} - e^{-\lambda x} \sum_{l=0}^{K-1} \frac{x^l}{l!(\lambda-\lambda_j)^{K-l}} \right]}{\prod_{k=1,k\neq j}^{N} (\lambda_k - \lambda_j)} \\
&= \lambda^K \prod_{n=1}^{N} \lambda_n \sum_{j=1}^{N} \frac{\left[e^{-\lambda_j x} - e^{-\lambda x} \sum_{l=0}^{K-1} \frac{x^l}{l!(\lambda-\lambda_j)^{-l}}\right]}{\prod_{k=1,k\neq j}^{N} (\lambda_k - \lambda_j)\left(\lambda - \lambda_j\right)^K}.
\end{aligned}$$

❑

Poznámka. Povšimněme si, že pro $K = 0$ dostáváme situaci z věty 12 a skutečně

$$f_X(x) = \prod_{n=1}^{N} \lambda_n \sum_{j=1}^{N} \frac{e^{-\lambda_j x}}{\prod_{k=1,k\neq j}^{N} (\lambda_k - \lambda_j)}$$

odpovídá hustotě uvedené v (2.2).

V situaci z věty 13 můžeme dospět k odlišnému vyjádření, pokud budeme postupovat pomocí charakteristické funkce náhodné veličiny. Tento postup je inspirován článkem (Khuong a Kong, 2006). Nejprve si však formulujme pomocné tvrzení, které budeme v postupu potřebovat.

Tvrzení 14. *Buď F distribuční funkce náhodné veličiny X taková, že $F(x) = 0$, pro $x \leq 0$. Označme Ψ_X její charakteristickou funkci a předpokládejme, že tato je spojitá na $\mathbb{R}$. Nechť platí*

a) pro každé $x > 0$ existuje Newtonův integrál $(N) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\Psi_X(t)dt$,

b) $$\left|(N)\int_{T}^{\infty} e^{-itx}\Psi_X(t)dt + (N)\int_{-\infty}^{-T} e^{-itx}\Psi_X(t)dt\right| \overset{loc}{\underset{T\to\infty}{\rightrightarrows}} 0, \quad \text{pro } x > 0.$$

Potom má X hustotu

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}(N)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\Psi_X(t)dt, \quad \forall x > 0.$$

Důkaz. Dle (Štěpán, 1987, II.7.15) platí

$$F(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{1 - e^{-itx}}{it}\Psi_X(t)dt, \quad \forall x > 0.$$

Položme

$$F_T(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{1 - e^{-itx}}{it}\Psi_X(t)dt, \quad \forall x > 0.$$

Budeme počítat $F_T'(x)$ dle věty o derivaci integrálu podle parametru, a proto ověřme její předpoklady. Označme $h(x,t) = \dfrac{1 - e^{-itx}}{it}\Psi_X(t)$.

1) Pro každé $x \in (0,\infty)$ je $h(x,t)$ měřitelná v t.

Zjevně platí, že $h(x,t)$ je spojitá pro každé t reálné kromě nuly. Počítejme

$$\lim_{t\to 0} h(x,t) = \lim_{t\to 0} \frac{1 - e^{-itx}}{it}\Psi_X(t) = \Psi_X(0) \lim_{t\to 0} \frac{1 - e^{-itx}}{it}.$$

Použitím L'Hospitalova pravidla máme

$$\lim_{t\to 0} \frac{1 - e^{itx}}{it} = \lim_{t\to 0} \frac{ixe^{-itx}}{i} = x.$$

Celkem tedy

$$\lim_{t\to 0} h(x,t) = \Psi_X(0)x,$$

což je konečné pro každé x pevné. Tedy $h(x,t)$ lze spojitě dodefinovat pro t rovno nule, a proto je $h(x,t)$ měřitelná pro každé $x > 0$.

2) Pro každé $t \in [-T,T]$ je $\dfrac{\partial h(x,t)}{\partial x}$ konečná.

Tedy počítejme

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial x} = e^{-itx}\Psi_X(t).$$

To je konečné pro každé $t \in [-T,T]$ neboť

$$\left|e^{-itx}\Psi_X(t)\right| \leq |\Psi_X(t)| < \infty, \quad \forall t \in [-T,T].$$

3) Existuje $x_0 \in (0,\infty)$ tak, že $\int_{-T}^{T} h(x_0,t)dt$ je konečný.

Při ověřování podmínky 1) jsme ukázali, že $h(x,t)$ lze spojitě dodefinovat na $\mathbb{R}$ a tedy daný integrál je ze spojité funkce na kompaktu, tudíž nutně konečný, a to dokonce pro libovolné x_0.

4) Existuje $g(x) \in L^1([-T,T])$ tak, že pro všechna $x \in (0,\infty)$ a všechna $t \in [-T,T]$ je $\left|\dfrac{\partial h(x,t)}{\partial x}\right| \leq g(x)$.

Platí, že $\Psi_X(t)$ je spojitá na $[-T,T]$, tedy zde nabývá svého maxima K. Nyní

$$\left|\frac{\partial h(x,t)}{\partial x}\right| = \left|e^{-itx}\Psi_X(t)\right| \leq |\Psi_X(t)| \leq K,$$

kde pro $g(x) = K$ zjevně platí, že $g(x) \in L^1([-T,T])$, neboť integrujeme spojitou funkci na kompaktu. Dohromady tedy dle věty o derivování integrálu podle parametru máme

$$F_T'(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} e^{-itx}\Psi_X(t)dt, \quad \forall x > 0.$$

Dále z předpokladů a) a b) plyne

$$\left|(N)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\Psi_X(t)dt - (N)\int_{-T}^{T} e^{-itx}\Psi_X(t)dt\right| =$$
$$\left|(N)\int_{T}^{\infty} e^{-itx}\Psi_X(t)dt + (N)\int_{-\infty}^{-T} e^{-itx}\Psi_X(t)dt\right| \underset{T\to\infty}{\overset{loc}{\rightrightarrows}} 0, \quad \text{pro } x > 0,$$

tedy

$$(N)\int_{-T}^{T} e^{-itx}\Psi_X(t)dt \underset{T\to\infty}{\overset{loc}{\rightrightarrows}} (N)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\Psi_X(t)dt, \quad \text{pro } x > 0.$$

Tudíž máme

$$F_T'(x) \underset{T\to\infty}{\overset{loc}{\rightrightarrows}} \frac{1}{2\pi}(N)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\Psi_X(t)dt, \quad \text{pro } x > 0.$$

Z věty o derivování stejnoměrně konvergentních řad odtud plyne, že F' existuje na $(0,\infty)$ a $F' = \lim_{T\to\infty} F_T'$, tedy

$$F'(x) = f(x) = \frac{1}{2\pi}(N)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\Psi_X(t)dt, \quad \forall x > 0,$$

což bylo tvrzeno.

❑

A nyní již k samotnému postupu.

Věta 15. *Mějme stejnou situaci jako ve větě 13. Hustotu veličiny X lze následně vyjádřit jako*

$$f_X(x) = \sum_{n=1}^{N} E_n \lambda_n e^{-\lambda_n x} + \sum_{k=1}^{K} A_k \lambda^k e^{-\lambda x} \frac{x^{k-1}}{\Gamma(k)}, \quad \forall x > 0,$$

kde

$$E_n = \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda}\right)^K} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^{N} \frac{1}{1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_j}}, \quad n = 1, \dots, N$$

a A_k, $k = 1, \dots, K$ vyhovují maticové rovnosti $C^{-1}D = A$, kde

$$\begin{aligned} A &= [A_1, \dots, A_K]^T, \\ D &= [D_1, \dots, D_K]^T, \\ C &= (C_{ij})_{i,j=1}^K, \end{aligned}$$

přičemž

$$\begin{aligned} D_p &= \left(1 - \frac{B_p}{\lambda}\right)^{-K} \prod_{j=1}^{N} \left(1 - \frac{B_p}{\lambda_j}\right)^{-1} - \sum_{n=1}^{N} E_n \left(1 - \frac{B_p}{\lambda_n}\right)^{-1}, p = 1, \dots, K, \\ C_{pk} &= \left(1 - \frac{B_p}{\lambda}\right)^{-k}, p,\ k = 1, \dots, K \end{aligned}$$

a B_p pro $p = 1, \dots, K$ jsou libovolně zvolené konstanty různé od λ a λ_n pro všechna $n = 1, \dots, N$.

Důkaz. V tvrzení 6 jsme ukázali, že má-li náhodná veličina U rozdělení $Exp(\lambda)$, pak má charakteristickou funkci $\Psi_U(t)$ danou předpisem

$$\Psi_U(t) = \frac{1}{1 - \frac{it}{\lambda}}.$$

Dále využijeme toho, že náhodné veličiny $Y_1, \dots, Y_K$ a $Z_1, \dots, Z_N$, K, $N \geq 1$, jsou nezávislé, a tudíž charakteristická funkce jejich součtu se rovná součinu charakteristických funkcí jednotlivých sčítanců dle tvrzení 8 , neboli:

$$\Psi_X(t) = \prod_{k=1}^{K} \frac{1}{1 - \frac{it}{\lambda}} \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1 - \frac{it}{\lambda_n}} = \left(\frac{1}{1 - \frac{it}{\lambda}}\right)^K \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1 - \frac{it}{\lambda_n}}. \tag{2.7}$$

Nyní upravujme charakteristickou funkci $\Psi_X(t)$ do tvaru součtu namísto součinu. Toho dosáhneme rozkladem na parciální zlomky. Tedy dostáváme

$$\Psi_X(t) = \frac{1}{\left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^K} \frac{1}{\prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{it}{\lambda_n}\right)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{E_n}{\left(1 - \frac{it}{\lambda_n}\right)} + \sum_{k=1}^{K} \frac{A_k}{\left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^k},$$

pro nějaká $E_n, n = 1, \ldots, N$ a $A_k, k = 1, \ldots, K$, která nyní dopočteme dosazováním do rovnosti

$$1 = \sum_{n=1}^{N} E_n \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^K \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^{N} \left(1 - \frac{it}{\lambda_j}\right) + \sum_{k=1}^{K} A_k \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{K-k} \prod_{j=1}^{N} \left(1 - \frac{it}{\lambda_j}\right). \tag{2.8}$$

Snadno nahlédneme, že dosazením $t_n = \frac{\lambda_n}{i}, n = 1, \ldots, N$, do (2.8) dostáváme pro každé $n = 1, \ldots, N$

$$1 = E_n \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda}\right)^K \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^{N} \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_j}\right)$$

$$\Rightarrow E_n = \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda}\right)^K \prod_{j=1, j \neq n}^{N} \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_j}\right)} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda}\right)^K} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^{N} \frac{1}{1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_j}}.$$

Dosaďme nyní do (2.8) K různých hodnot $t_p, p = 1, \ldots, K$, pro které navíc platí, že $it_p \neq \lambda$ a zároveň $it_p \neq \lambda_n, n = 1, \ldots, N$. Označme $B_p = it_p$. Dostáváme pro $p = 1, \ldots, K$ soustavu K rovnic tvaru

$$1 = \sum_{n=1}^{N} E_n \left(1 - \frac{B_p}{\lambda}\right)^K \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^{N} \left(1 - \frac{B_p}{\lambda_j}\right) + \sum_{k=1}^{K} A_k \left(1 - \frac{B_p}{\lambda}\right)^{K-k} \prod_{j=1}^{N} \left(1 - \frac{B_p}{\lambda_j}\right). \tag{2.9}$$

Každá z těchto rovnic se dá ekvivalentně zapsat jako

$$\left(1 - \frac{B_p}{\lambda}\right)^{-K} \prod_{j=1}^{N} \left(1 - \frac{B_p}{\lambda_j}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{N} E_n \left(1 - \frac{B_p}{\lambda_n}\right)^{-1} + \sum_{k=1}^{K} A_k \left(1 - \frac{B_p}{\lambda}\right)^{-k},$$

neboli

$$\left(1 - \frac{B_p}{\lambda}\right)^{-K} \prod_{j=1}^{N} \left(1 - \frac{B_p}{\lambda_j}\right)^{-1} - \sum_{n=1}^{N} E_n \left(1 - \frac{B_p}{\lambda_n}\right)^{-1} = \sum_{k=1}^{K} A_k \left(1 - \frac{B_p}{\lambda}\right)^{-k}.$$

Označme nyní

$$D_p = \left(1 - \frac{B_p}{\lambda}\right)^{-K} \prod_{j=1}^{N} \left(1 - \frac{B_p}{\lambda_j}\right)^{-1} - \sum_{n=1}^{N} E_n \left(1 - \frac{B_p}{\lambda_n}\right)^{-1}, p = 1, \ldots, K,$$

$$C_{pk} = \left(1 - \frac{B_p}{\lambda}\right)^{-k}, p,\ k = 1, \ldots, K.$$

Soustavu rovnic (2.9) máme nyní ve tvaru

$$D_p = \sum_{k=1}^{K} C_{pk} A_k, p = 1, \ldots, K,$$

což odpovídá maticovému zápisu $D = CA$, pokud zavedeme značení

$$\begin{aligned} D &= (D_1, \ldots, D_K)^T, \\ A &= (A_1, \ldots, A_K)^T, \\ C &= (C_{pk})_{p,k=1}^K. \end{aligned}$$

Spočtěme nyní determinant matice C. Označme

$$c_p = \left(1 - \frac{B_p}{\lambda}\right)^{-1}, p = 1, \ldots, K.$$

Pak C je matice tvaru

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_1^2 & \ldots & c_1^K \\ c_2 & c_2^2 & \ldots & c_2^K \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_K & c_K^2 & \ldots & c_K^K \end{pmatrix}.$$

Dle základních pravidel pro počítání determinantu platí

$$\det C = \prod_{p=1}^K c_p \det \begin{pmatrix} 1 & c_1 & \ldots & c_1^{K-1} \\ 1 & c_2 & \ldots & c_2^{K-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & c_K & \ldots & c_K^{K-1} \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Označíme si C' matici vzniklou v (2.10). Determinant C' je znám jako Vandermondův determinant a platí pro něj

$$\det C' = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^K (c_i - c_j),$$

což najdeme například v (Bečvář, 2010, 15.7). Z (2.10) tedy dostáváme

$$\det C = \prod_{p=1}^K c_p \prod_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^K (c_i - c_j).$$

Z volby B_p však víme, že všechny hodnoty c_p jsou navzájem různé a nenulové pro $p = 1, \ldots, K$. Žádný z činitelů tedy není roven nule, a proto $\det C \neq 0$. To nám ovšem stačí k tomu, aby k matici C existovala inverzní matice C^{-1} a koeficienty A_k následně dopočítáme z rovnosti $C^{-1}D = A$. Máme tedy nyní charakteristickou funkci $\Psi_X(t)$ z (2.7) ve tvaru

$$\Psi_X(t) = \sum_{n=1}^N \frac{E_n}{\left(1 - \frac{it}{\lambda_n}\right)} + \sum_{k=1}^K \frac{A_k}{\left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^k}.$$

Označme F distribuční funkci náhodné veličiny X. Tato F je identicky rovna nule na intervalu $(-\infty, 0]$, neboť jde o distribuční funkci součtu exponenciálních náhodných veličin, které mají nenulovou hustotu pouze pro $x > 0$. Pokud jsou splněny předpoklady tvrzení 14, pak lze hustotu f veličiny X počítat jako

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}(N)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\Psi_X(t)dt, \quad \forall x > 0. \tag{2.11}$$

Pojďme se nyní podívat, zda jsou podmínky splněny.

a) Pro každé $x > 0$ existuje Newtonův integrál $(N)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\Psi_X(t)dt$.

Upravujme výraz

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\Psi_X(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\left[\sum_{n=1}^{N}\frac{E_n}{\left(1-\frac{it}{\lambda_n}\right)} + \sum_{k=1}^{K}\frac{A_k}{\left(1-\frac{it}{\lambda}\right)^k}\right] \\ &= \sum_{n=1}^{N} E_n\lambda_n \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-itx}}{\lambda_n - it}dt}_{I} + \sum_{k=1}^{K} A_k\lambda^k \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-itx}}{(\lambda - it)^k}dt}_{J_k}.\end{aligned} \tag{2.12}$$

Vyšetřujme postupně existenci I a J_k. Nejprve

$$\begin{aligned} I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-itx}}{\lambda_n - it}dt &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-itx}}{\lambda_n - it}\frac{\lambda_n + it}{\lambda_n + it}dt = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-itx}(\lambda_n + it)}{\lambda_n^2 + t^2}dt \\ &= \lambda_n \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-itx}}{\lambda_n^2 + t^2}dt}_{I_1} + i\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{te^{-itx}}{\lambda_n^2 + t^2}dt}_{I_2}.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Nyní I_1 má spojitý integrand a platí

$$|I_1| \le \int_{-\infty}^{\infty}\frac{|e^{-itx}|}{\lambda_n^2 + t^2}dt = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2 + t^2}dt.$$

Integrál vpravo existuje jako Lebesgueův, tedy ze srovnávacího kritéria i I_1 existuje jako Lebesgueův, a tedy díky spojitosti integrandu i jako Newtonův. Integrál I_2 existuje jako Newtonův na základě Dirichletova kritéria (viz Veselý, 2009, věta 11.6.10), pokud ověříme předpoklady.

1) Funkce $t \mapsto e^{-itx}$ má omezenou primitivní funkci na $\mathbb{R}$.

Primitivní funkce k e^{-itx} je $\dfrac{e^{-itx}}{-ix}$ a platí

$$\left|\frac{e^{-itx}}{-ix}\right| = \frac{1}{x} < \infty, \quad \text{pro } x > 0.$$

2) Funkce $g(t) = \dfrac{t}{\lambda_n^2 + t^2}$ má spojitou derivaci, je monotonní na okolí ∞ a $-\infty$ a $\lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{t\to-\infty} g(t) = 0$.

Zřejmě dané limity jsou rovny nule. Dále počítejme

$$g'(t) = \frac{(\lambda_n^2 + t^2) - 2t^2}{(\lambda_n^2 + t^2)^2} = \frac{\lambda_n^2 - t^2}{(\lambda_n^2 + t^2)^2},$$

což je spojitá funkce a platí

$$g'(t) < 0, \quad |t| > |\lambda_n|,$$

čímž jsou ověřeny všechny předpoklady Dirichletova kritéria. Tedy I existuje jako Newtonův integrál. Zaměřme se nyní na integrály J_k. Nejprve si všimneme, že J_1 odpovídá integrálu I, kde roli λ_n nyní hraje λ, což jsou ale z hlediska integrace konstanty a existence integrálu na nich zcela jistě nezávisí. Nechť dále k je alespoň 2. Analogicky jako postup (2.13) u I máme

$$\begin{aligned} J_k &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx}}{(\lambda - it)^k} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx}}{(\lambda - it)^k} \frac{(\lambda + it)^k}{(\lambda + it)^k} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx} (\lambda + it)^k}{(\lambda^2 + t^2)^k} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (it)^j \lambda^{k-j}}{(\lambda^2 + t^2)^k} dt = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} i^j \lambda^{k-j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx} t^j}{(\lambda^2 + t^2)^k} dt \\ &= \lambda^k \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx}}{(\lambda^2 + t^2)^k} dt}_{J_{k,0}} + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} i^j \lambda^{k-j} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx} t^j}{(\lambda^2 + t^2)^k} dt}_{J_{k,j}}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Stejnou úvahou jako pro I_1 máme

$$|J_{k,0}| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|e^{-itx}|}{(\lambda^2 + t^2)^k} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\lambda^2 + t^2)^k} dt,$$

kde poslední integrál existuje jako Lebesgueův, tedy i $J_{k,0}$ existuje jako Lebesgueův a ze spojitosti integrandu existuje jako Newtonův. Integrály $J_{k,j}, j = 1, \ldots, k$, existují jako Newtonovy dle Dirichletova kritéria (Veselý, 2009, věta 11.6.10) podobně, jako jsme ukazovali existenci integrálu I_2. Již jsme ukázali, že e^{-itx} má omezenou primitivní funkci na $\mathbb{R}$. Nyní ukažme, že funkce $h_{k,j}(t) = \dfrac{t^j}{(\lambda^2 + t^2)^k}$ mají spojitou derivaci, jsou monotonní na okolí ∞ a $-\infty$ a $\lim_{t\to\infty} h_{k,j}(t) = \lim_{t\to-\infty} h_{k_j}(t) = 0$. Vzhledem k tomu, že j nabývá hodnot od 1 do k, máme

$$\begin{aligned} h_{k,j}(t) &= \frac{t^j}{(\lambda^2 + t^2)^k} = \frac{t^j}{\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \lambda^{2l} t^{2k-2l}} = \frac{t^{j-2k}}{\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \lambda^{2l} t^{-2l}} \\ &= \frac{t^{j-2k}}{1 + \sum_{l=1}^{k} \binom{k}{l} \lambda^{2l} t^{-2l}} \overset{t\to\pm\infty}{\to} \frac{0}{1} = 0. \end{aligned}$$

Spočtěme nyní

$$h'_{k,j}(t) = \frac{jt^{j-1}(\lambda^2 + t^2)^k - t^j k(\lambda^2 + t^2)^{k-1} 2t}{(\lambda^2 + t^2)^{2k}},$$

což je opět spojitá funkce, kde jmenovatel je kladný pro všechna t. Upravujme nyní čitatel

$$\begin{aligned} jt^{j-1}(\lambda^2 + t^2)^k - t^j k(\lambda^2 + t^2)^{k-1} 2t &= t^{j-1}(\lambda^2 + t^2)^{k-1} \left[j(\lambda^2 + t^2) - 2kt^2 \right] \\ &= t^{j-1} \underbrace{(\lambda^2 + t^2)^{k-1}}_{>0} \left[j\lambda^2 + \underbrace{(j - 2k)t^2}_{<0} \right]. \end{aligned}$$

Jistě existuje t_0 kladné takové, že pro všechny t, pro které platí $|t| > t_0$, je celý výraz $[j\lambda^2 + (j-2k)t^2]$ záporný. Uvažme nyní j liché. Potom $t^{j-1} > 0$, pro $t < 0$. Dohromady tedy $h'_{k,j}(t) < 0$, pro $t < -t_0$, tedy $h_{k,j}(t)$ je monotonní na okolí $-\infty$. Obdobně $t^{j-1} > 0$, pro $t > 0$, z čehož $h'_{k,j}(t) < 0$, pro $t > t_0$, tedy $h_{k,j}(t)$ je monotonní také na okolí ∞. Pro j sudé pak $t^{j-1} < 0$, pro $t < 0$, a máme $h'_{k,j}(t) > 0$, pro $t < -t_0$, a opět $h_{k,j}(t)$ je monotonní na okolí $-\infty$. Konečně $t^{j-1} > 0$, pro $t > 0$, celkem tedy $h'_{k,j}(t) < 0$, pro $t > t_0$, a tedy $h_{k,j}(t)$ je opět monotonní také na okolí ∞.
b) Potřebujeme ukázat, že

$$\left|(N)\int_T^{\infty} e^{-itx}\Psi_X(t)dt + (N)\int_{-\infty}^{-T} e^{-itx}\Psi_X(t)dt\right| \underset{T\to\infty}{\overset{loc}{\rightrightarrows}} 0, \quad \text{pro } x > 0. \tag{2.15}$$

Platí

$$\begin{aligned}&\left|\int_T^{\infty} e^{-itx}\Psi_X(t)dt + \int_{-\infty}^{-T} e^{-itx}\Psi_X(t)dt\right| \\ \le &\left|\int_T^{\infty} e^{-itx}\Psi_X(t)dt\right| + \left|\int_{-\infty}^{-T} e^{-itx}\Psi_X(t)dt\right|\end{aligned}$$

a ukážeme, že oba sčítance jdou k nule. Budeme však vyšetřovat pouze první z nich, neboť úvahy pro druhý jsou zcela analogické. Stejným postupem jako v (2.12) dostáváme

$$\int_T^{\infty} e^{-itx}\Psi_X(t)dt = \sum_{n=1}^{N} E_n\lambda_n \underbrace{\int_T^{\infty} \frac{e^{-itx}}{\lambda_n - it}dt}_{U} + \sum_{k=1}^{K} A_k\lambda^k \underbrace{\int_T^{\infty} \frac{e^{-itx}}{(\lambda - it)^k}dt}_{V_k}.$$

Užitím rozkladu dle (2.13) máme pro U

$$U = \lambda_n \underbrace{\int_T^{\infty} \frac{e^{-itx}}{\lambda_n^2 + t^2}dt}_{U_1} + i \underbrace{\int_T^{\infty} \frac{te^{-itx}}{\lambda_n^2 + t^2}dt}_{U_2}.$$

Očividně však

$$|U_1| \le \int_T^{\infty} \frac{|e^{-itx}|}{\lambda_n^2 + t^2}dt = \int_T^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2 + t^2}dt \underset{T\to\infty}{\overset{loc}{\rightrightarrows}} 0, \quad x > 0.$$

Zajímá nás limitní chování pro $T \to \infty$ a lze tedy předpokládat, že $T > 1$. Pak lze U_2 zjednodušit, neboť platí

$$\begin{aligned}\left|U_2 - \int_T^{\infty} \frac{te^{-itx}}{t^2}dt\right| &= \left|\int_T^{\infty} \frac{te^{-itx}}{\lambda_n^2 + t^2}dt - \int_T^{\infty} \frac{te^{-itx}}{t^2}dt\right| \\ &= \left|\int_T^{\infty} \frac{t^3e^{-itx} - t^3e^{-itx} - \lambda_n^2 te^{-itx}}{t^2(\lambda_n^2 + t^2)}dt\right| = \left|\int_T^{\infty} \frac{-\lambda_n^2 e^{-itx}}{t(\lambda_n^2 + t^2)}dt\right| \\ &\le \lambda_n^2 \int_T^{\infty} \frac{|e^{-itx}|}{t(\lambda_n^2 + t^2)}dt \\ &= \lambda_n^2 \int_T^{\infty} \frac{dt}{t(\lambda_n^2 + t^2)} \underset{T\to\infty}{\overset{loc}{\rightrightarrows}} 0, \quad x > 0.\end{aligned}$$

Zbývá tudíž ukázat, že

$$\left|\int_T^\infty \frac{te^{-itx}}{t^2}dt\right| = \left|\int_T^\infty \frac{e^{-itx}}{t}dt\right| \underset{T\to\infty}{\overset{loc}{\rightrightarrows}} 0, \quad x>0.$$

Užitím substituce $u = tx$ dostaneme

$$\left|\int_T^\infty \frac{e^{-itx}}{t}dt\right| = \left|\int_{Tx}^\infty \frac{e^{-iu}}{u}du\right| \underset{T\to\infty}{\rightrightarrows} 0, \quad x\in[a,\infty), \forall a>0,$$

tedy

$$\left|\int_T^\infty \frac{e^{-itx}}{t}dt\right| \underset{T\to\infty}{\overset{loc}{\rightrightarrows}} 0, \quad x>0,$$

čímž jsme ukázali, že $U_2 \underset{T\to\infty}{\overset{loc}{\rightrightarrows}} 0, x>0$. Podobně pro $V_k, k=1,\ldots,K$, máme dle (2.14) rozklad

$$V_k = \lambda^k \underbrace{\int_T^\infty \frac{e^{-itx}}{(\lambda^2+t^2)^k}dt}_{V_{k,0}} + \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} i^j \lambda^{k-j} \underbrace{\int_T^\infty \frac{e^{-itx}t^j}{(\lambda^2+t^2)^k}dt}_{V_{k,j}}.$$

Pro $V_{k,0}$ užijeme podobný postup jako pro U_1. Tedy

$$|V_{k,0}| \le \int_T^\infty \frac{|e^{-itx}|}{(\lambda^2+t^2)^k}dt = \int_T^\infty \frac{1}{(\lambda^2+t^2)^k}dt \underset{T\to\infty}{\overset{loc}{\rightrightarrows}} 0, \quad x>0.$$

Integrály $V_{k,j}$ jdou opět zjednodušit jako U_2, pokud předpokládáme, že $T>1$. Platí totiž

$$\begin{aligned}
\left|V_{k,j} - \int_T^\infty \frac{t^j e^{-itx}}{t^{2k}}dt\right| &= \left|\int_T^\infty \frac{e^{-itx}t^j}{(\lambda^2+t^2)^k}dt - \int_T^\infty \frac{t^j e^{-itx}}{t^{2k}}dt\right| \\
&= \left|\int_T^\infty \frac{e^{-itx}t^{j+2k} - e^{-itx}t^j(\lambda^2+t^2)^k}{t^{2k}(\lambda^2+t^2)^k}dt\right| \\
&= \left|\int_T^\infty \frac{e^{-itx}t^{j+2k} - e^{-itx}t^j \sum_{l=0}^k \binom{k}{l}\lambda^{2l}t^{2k-2l}}{t^{2k}(\lambda^2+t^2)^k}dt\right| \\
&= \left|\int_T^\infty \frac{-e^{-itx}t^j \sum_{l=1}^k \binom{k}{l}\lambda^{2l}t^{2k-2l}}{t^{2k}(\lambda^2+t^2)^k}dt\right| \\
&= \left|\int_T^\infty \frac{-e^{-itx}t^j \sum_{l=1}^k \binom{k}{l}\lambda^{2l}t^{-2l}}{(\lambda^2+t^2)^k}dt\right| \\
&= \left|\sum_{l=1}^k \binom{k}{l}\lambda^{2l}\int_T^\infty \frac{-e^{-itx}t^{j-2l}}{(\lambda^2+t^2)^k}dt\right| \\
&\le \sum_{l=1}^k \binom{k}{l}\lambda^{2l}\left|\int_T^\infty \frac{-e^{-itx}t^{j-2l}}{(\lambda^2+t^2)^k}dt\right| \\
&\le \sum_{l=1}^k \binom{k}{l}\lambda^{2l}\int_T^\infty \frac{\left|e^{-itx}t^{j-2l}\right|}{(\lambda^2+t^2)^k}dt \\
&= \sum_{l=1}^k \binom{k}{l}\lambda^{2l}\int_T^\infty \frac{\left|t^{j-2l}\right|}{(\lambda^2+t^2)^k}dt
\end{aligned}$$

a dále

$$\int_T^\infty \frac{\left|t^{j-2l}\right|}{(\lambda^2+t^2)^k}dt \underset{T\to\infty}{\overset{loc}{\rightrightarrows}} 0, \quad x>0$$

a to pro každé $k=1,\dots,K$, j, $l=1,\dots,k$, neboť j nabývá hodnot $1,\dots,k$, tedy $j-2l<2k-1$. Celkem tedy

$$\left|V_{k,j}-\int_T^\infty \frac{t^j e^{-itx}}{t^{2k}}dt\right| \underset{T\to\infty}{\overset{loc}{\rightrightarrows}} 0, \quad x>0.$$

Stačí tedy vyšetřit

$$\left|\int_T^\infty \frac{t^j e^{-itx}}{t^{2k}}dt\right| = \left|\int_T^\infty \frac{e^{-itx}}{t^{2k-j}}dt\right| \underset{T\to\infty}{\overset{loc}{\rightrightarrows}} 0, \quad x>0.$$

Využitím substituce $v=tx$ dostaneme

$$\left|\int_T^\infty \frac{e^{-itx}}{t^{2k-j}}dt\right| = \left|\int_{Tx}^\infty \frac{e^{-iv}}{v^{2k-j}}x^{2k-j-1}dv\right| \underset{T\to\infty}{\rightrightarrows} 0,$$

pro $x\in[a,b]$, kde $a>0, b<\infty, a<b$. Tedy

$$\left|\int_T^\infty \frac{e^{-itx}}{t^{2k-j}}dt\right| \underset{T\to\infty}{\overset{loc}{\rightrightarrows}} 0, \quad x>0.$$

Úhrnem je tedy splněna podmínka b) tak, jak je uvedena v (2.15). Můžeme tedy počítat hustotu $f_X(x)$ tak, jak je uvedeno v (2.11), tedy

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{-itx}\Psi_X(t)dt.$$

Opět z rozkladu (2.12) máme

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^N E_n\lambda_n \underbrace{\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-itx}}{\lambda_n-it}dt}_{I} + \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^K A_k\lambda^k \underbrace{\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-itx}}{(\lambda-it)^k}dt}_{J_k} \tag{2.16}$$

a víme z (2.13), že pro I platí

$$I=\lambda_n \underbrace{\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-itx}}{\lambda_n^2+t^2}dt}_{I_1} + i\underbrace{\int_{-\infty}^\infty \frac{te^{-itx}}{\lambda_n^2+t^2}dt}_{I_2}.$$

Počítejme nyní postupně I_1 a I_2. Nejprve užitím substituce $-t=z$ máme

$$I_1=\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{izx}}{\lambda_n^2+z^2}dz.$$

Uvažme v $\mathbb{C}$ pro libovolné $R>0$ křivku

$$\varphi_R(t)=Re^{it}, \quad t\in[0,\pi]$$

a definujme křivku

$$\psi_R = [-R,R] + \varphi_R.$$

Dále platí, že funkce $h_1(z) = \dfrac{e^{izx}}{\lambda_n^2 + z^2}$ je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{-i\lambda_n, i\lambda_n\}$ a v bodech $\{-i\lambda_n, i\lambda_n\}$ jsou póly násobnosti 1. Dle reziduové věty (Veselý, 2000, věta 7.2.5) je

$$\int_{\psi_R} h_1 = 2\pi i \ \mathrm{res}_{i\lambda_n} h_1.$$

Spočtěme nyní příslušné reziduum.

$$\mathrm{res}_{i\lambda_n} h_1 = \lim_{z \to i\lambda_n} (z - i\lambda_n) f(z) = \lim_{z \to i\lambda_n} \frac{e^{izx}}{z + i\lambda_n} = \frac{e^{-\lambda_n x}}{2i\lambda_n}.$$

Z linearity křivkového integrálu pak máme

$$\int_{\psi_R} h_1 = \int_{[-R,R]} h_1 + \int_{\varphi_R} h_1 = \frac{\pi e^{-\lambda_n x}}{\lambda_n}. \tag{2.17}$$

Dle Jordanova lemmatu (Veselý, 2000, lemma 7.4.1) platí, že

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\varphi_R} h_1 = 0. \tag{2.18}$$

Provedeme-li limitní přechod pro $R \to \infty$ na (2.17), dostáváme s použitím (2.18)

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} h_1 = \frac{\pi e^{-\lambda_n x}}{\lambda_n}.$$

Obdobným způsobem počítejme I_2. Opět použitím substituce $-t = z$ máme

$$I_2 = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z e^{izx}}{\lambda_n^2 + z^2} dz.$$

Dále funkce $h_2(z) = \dfrac{z e^{izx}}{\lambda_n^2 + z^2}$ je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{-i\lambda_n, i\lambda_n\}$ a v bodech $\{-i\lambda_n, i\lambda_n\}$ jsou póly násobnosti 1. Opět dle reziduové věty je

$$\int_{\psi_R} h_2 = 2\pi i \ \mathrm{res}_{i\lambda_n} h_2$$

a pro příslušné reziduum platí

$$\mathrm{res}_{i\lambda_n} h_2 = \lim_{z \to i\lambda_n} (z - i\lambda_n) f(z) = \lim_{z \to i\lambda_n} \frac{z e^{izx}}{z + i\lambda_n} = \frac{i\lambda_n e^{-\lambda_n x}}{2i\lambda_n} = \frac{e^{-\lambda_n x}}{2}.$$

Dále opět z linearity křivkového integrálu máme

$$\int_{\psi_R} h_2 = \int_{[-R,R]} h_2 + \int_{\varphi_R} h_2 = \pi i e^{-\lambda_n x} \tag{2.19}$$

a z Jordanova lemmatu (Veselý, 2000, lemma 7.4.1) také máme

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\varphi_R} h_2 = 0. \tag{2.20}$$

Limitním přechodem pro $R \to \infty$ v (2.19) máme s ohledem na (2.20)

$$I_2 = -\int_{-\infty}^{\infty} h_2 = -\pi i e^{-\lambda_n x}.$$

Celkem tedy

$$I = \lambda_n \frac{\pi e^{-\lambda_n x}}{\lambda_n} - i\pi i e^{-\lambda_n x} = 2\pi e^{-\lambda_n x}.$$

Zbývá tedy dopočítat integrály J_k. Je vidět, že integrál J_1 je až na záměnu λ a λ_n shodný s integrálem I a tedy $J_1 = 2\pi e^{-\lambda x}$. Pro k alespoň 2 počítejme per partes

$$\begin{aligned}
J_k &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx}}{(\lambda - it)^k} dt = \left[\frac{1}{-(k-1)(-i)}\frac{e^{-itx}}{(\lambda - it)^{k-1}}\right]_{-\infty}^{\infty} \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-ix}{(k-1)(-i)}\frac{e^{-itx}}{(\lambda - it)^{k-1}} dt = \frac{x}{(k-1)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-itx}}{(\lambda - it)^{k-1}} dt \\
&= \frac{x}{(k-1)} J_{k-1}.
\end{aligned}$$

Toto ovšem platí pro každé $k \geq 2$ a tedy opakovaným použitím dostáváme

$$J_k = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} J_1 = \frac{x^{k-1}}{\Gamma(k)} 2\pi e^{-\lambda x}.$$

Dosazením do (2.16) máme

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{N} E_n \lambda_n 2\pi e^{-\lambda_n x} + \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{K} A_k \lambda^k \frac{x^{k-1}}{\Gamma(k)} 2\pi e^{-\lambda x} \\
&= \sum_{n=1}^{N} E_n \lambda_n e^{-\lambda_n x} + \sum_{k=1}^{K} A_k \lambda^k e^{-\lambda x}\frac{x^{k-1}}{\Gamma(k)}, \quad \forall x > 0.
\end{aligned}$$

❑

Poznámka. Jistě musí opět platit, že pro $K = 0$ hustota v tomto tvaru odpovídá hustotě z věty 12. A skutečně

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \sum_{n=1}^{N} E_n \lambda_n e^{-\lambda_n x} = \sum_{n=1}^{N}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq n}}^{N} \frac{1}{1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_j}} \lambda_n e^{-\lambda_n x} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{\prod_{j=1, j\neq n}^{N} \lambda_j}{\prod_{j=1, j\neq n}^{N} (\lambda_j - \lambda_n)} \lambda_n e^{-\lambda_n x} \\
&= \prod_{j=1}^{N} \lambda_j \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{-\lambda_n x}}{\prod_{j=1, j\neq n}^{N}(\lambda_j - \lambda_n)},
\end{aligned}$$

což odpovídá hustotě (2.2).

Literatura

ANDĚL, J. (2007). *Základy matematické statistiky.* Druhé opravené vydání. Matfyzpress, Praha. ISBN 80-7378-001-1.

BEČVÁŘ, J. (2010). *Lineární algebra.* Čtvrté vydání. Matfyzpress, Praha. ISBN 978-80-7378-135-4.

KHUONG, H. V. a KONG, H.-Y. (2006). General expression for pdf of a sum of independent exponential random variables. *IEEE Communications Letters*, **10**(3), 159.

NADARAJAH, S. (2008). A review of results on sums of random variables. *Acta Applicandae Mathematicae*, **103**, 131–133.

ROSS, S. M. (1997). *Introduction to Probability Models.* Sixth Edition. Academic Press, San Diego. ISBN 0-12-598470-7.

ŠTĚPÁN, J. (1987). *Teorie pravděpodobnosti, Matematické základy.* První vydání. Academia nakladatelství Československé akademie věd, Praha. ISBN 21-100-86.

VESELÝ, J. (2000). *Komplexní analýza pro učitele.* Nakladatelství Karolinum, Praha. ISBN 80–246–0202–4.

VESELÝ, J. (2009). *Základy matematické analýzy, 2.díl.* Matfyzpress, Praha. ISBN 978–80–7378–063–0.