Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Marek Goldstein

Symetrie

Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce:	doc. RNDr. David Stanovský, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2014

Chtěl bych velice poděkovat doc. RNDr. Davidu Stanovskému, Ph.D. za poskytnuté rady a za pomoc při zpracování této práce.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 22.5.2014

Název práce: Symetrie

Autor: Marek Goldstein

Katedra: Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. David Stanovský, Ph.D., Katedra algebry

Abstrakt: Tato práce vychází z publikace D.L. Johnson, Symmetries, Springer 2001. Je zde stručně shrnuta teorie z vybraných kapitol této knihy, zejména je věnován prostor izometriím roviny, diskrétním eukleidovským, vlysovým, tapetovým a trojúhelníkovým grupám a pravidelným konvexním polytopům různých dimenzí. Jsou uvedeny základní poznatky z teorie grup. V druhé části práce jsou vypracovaná cvičení zaměřená právě na tyto oblasti. Cvičení jsou zejména důkazy některých tvrzení, či doplnění důkazů uvedených v publikaci. Práce mimojiné obsahuje kompletní klasifikaci vlysových a tapetových grup, pravidelných konvexních polytopů a dláždění eukleidovských prostorů.

Klíčová slova: grupa, symetrie, dláždění, polytop

Title: Symmetries

Author: Marek Goldstein

Department: Departement of Algebra

Supervisor: doc. RNDr. David Stanovský, Ph.D., Departement of Algebra

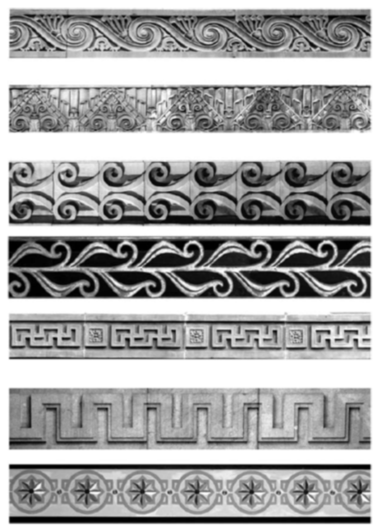
Abstract: The thesis is based on the book D.L. Johnson, Symmetries, Springer 2001. There is a brief summary of theory from selected chapters. In particular, there are covered isometries of the plane, discrete Euclidean groups, frieze groups, plane crystallographic groups, triangle groups and convex regular polytopes of arbitrary dimension. Several fundamental theorems from group theory are listed. In the second part of the thesis, excersises from the respective chapters are work out. Exercises are mainly proofs of lemmas, or completion of proofs presented in the book. The thesis includes a complete classification of frieze groups, plane crystallographic groups, convex regular polytopes and tessellations of the plane.

Keywords: group, symmetry,tessellation, polytope

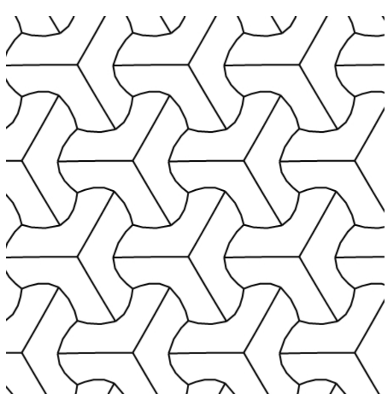
Obsah

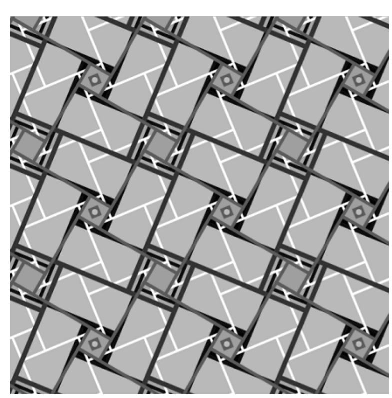
Úvod

Základním tématem práce jsou symetrie geometrických obrazců. Každému geometrickému objektu přísluší nějaká grupa symetrií. Tato grupa o objektu něco vypovídá a do jisté míry jej charakterizuje. Uvažujme například architektonický prvek vlys. To je vodorovný pás tvořený periodicky opakujícím se obrazcem, často figurálním či ornamentálním reliéfem. Symetrie původního obrazce jednoznačně určuje typ vlysu, tedy z vlastností jednoho dílu se dá odvodit struktura celého vzoru. Právě zkoumáním symetrií se dá ukázat, že existuje přesně 7 druhů vlysů. Všechny jsou vyobrazeny níže.



Podobný princip se opakuje u klasifikace všech dláždění v rovině. Pokud bychom chtěli pokrýt nějakou rovnou plochu, například podlahu či zeď, stejnými pravidelnými dlaždicemi, zjistíme, že i zde tvar dlaždice ovlivňuje vzhled celku. Zkoumáním symetrií a vzájemné polohy jednotlivých dílů nahlédneme, že existuje právě 17 typů dláždění roviny. Dva příklady takových dláždění jsou na obrázcích níže, všechny jsou k nahlédnutí například v [3].





Se studiem symetrií také velmi úzce souvisejí pravidelné mnohostěny a jejich vícedimenzionální zobecnění. Jelikož jsou tyto útvary pravidelné, vykazují nejvyšší možnou míru symetrie a jejich grupy symetrií jsou velice zajímavé. Pomocí pravidelných polytopů můžeme dláždit odpovídající prostory a pro některé dimenze dostáváme pozoruhodné varianty.

Toto téma jsem si vybral z několika důvodů. Jednak mi teorie grup přijde jako velmi zajímavá partie matematiky. Z estetického hlediska mě fascinují symetrické objekty. Je velice důležité, že celá práce má silný geometrický podtext. Všechny zkoumané problémy se dají snadno představit a dá se tak velmi dobře pochopit jejich podstata. Geometrický náhled pomáhá ilustrovat mnoho pojmů z teorie grup a umožňuje je chápat zcela intuitivním způsobem.

Zadáním této bakalářské práce bylo nastudovat knihu [1] a vypracovat některá cvičení. Tomu odpovídá struktura celé práce. V první části je stručně zpracována teorie potřebná k vypracování příkladů. Druhá část jsou právě vypracovaná cvičení. Cílem práce nebylo pouze vypracovat cvičení, ale zejména rozšířit svoje znalosti zejména z teorie grup.

Při zpracování teorie jsem se snažil vypsat definice a věty tak, aby všechny pojmy použité ve cvičeních byly dobře definované. Většina formulací je přejetá z hlavní publikace. Protože jsem se nevěnoval všem partiím knihy, bylo třeba některé definice upravit tak, aby navazovaly a využívaly pojmy již definované. Některé pojmy jsem musel dodefinovat sám, jelikož byly v publikaci uvedeny příliš vágně nebo byl jejich význam pouze nastíněn. Důkazy vět jsem neuváděl, jelikož je možné je snadno dohledat v literatuře.

Příklady byly zvoleny tak, aby vhodně doplňovaly vybrané oblasti knihy. Zaměřil jsem se zejména na vlysové, tapetové a trojúhelníkové grupy, pravidelné konvexní polytopy a na dláždění eukleidovských prostorů. Cvičení často doplňují věty či důkazy formulované ve studované knize. Například odvozují klasifikace výše zmíněných objektů či dokazují jejich vzájemnou odlišnost.

1. Teorie

Převzal jsem značení používané v literatuře [1] a proto jsou zobrazení skládána zprava do leva.

1.1 Eukleidovská grupa

Definice 1 *Izometrií* metrického prostoru (X, d) budeme rozumět bijektivní zobrazení $u : X \to X$, které zachovává vzdálenosti:

$$d(xu, yu) = d(x, y)\ \forall x, y \in X.$$

Množinu všech izometrií (X, d) značíme $\mathrm{Isom}(X, d)$. Buď F podmnožina X . Pak symetrií množiny F rozumíme izometrii (X, d), která zachovává F. Množinu všech symetrií F budeme značit $Sym(F)$.

$$\mathrm{Sym}(F) = \{u \in \mathrm{Isom}(X) \mid Fu = F\}.$$

Lemma 1 [1, str. 5] Množina $\mathrm{Isom}(X, d)$ izometrií metrického prostoru X tvoří grupu s operací skládání.

Lemma 2 [1, str. 10] Pro libovolnou podmnožinu F metrického prostoru (X, d) tvoří $\mathbf{Sym}(\mathbf{F})$ podrgrupu $\mathbf{Isom}(\mathbf{X})$.

Lemma 3 [1, str. 16] Libovolná izometrie u prostoru $\mathbb{R}^2$

1. zobrazuje trojúhelník ABC na shodný trohúhelník,
2. zachovává úhly,
3. zobrazue přímky na přímky.

Věta 4 [1, str. 17] Izometrie prostoru $\mathbb{R}^2$ je jednoznačně určena svým působením na třech nekolineárních bodech.

Definice 2 *Euklidovskou grupou* nazýváme grupu všech symetrií roviny $\mathbf{Isom}(\mathbb{R}^{\mathbf{2}})$, značíme $\mathbb{E}_2$. Nechť A, B, C jsou body a A', B', C' jejich obrazy při zobrazení $u \in \mathbf{Isom}(\mathbb{R}^{\mathbf{2}})$. Řekneme, že izometrie $u \in \mathbf{Isom}(\mathbb{R}^{\mathbf{2}})$ je *přímá izometrie*, pokud je obraz trojúhelníku ABC trojúhelník $A'B'C'$. Pokud je obrazem trojúhelníku ABC trojúhelník $A'C'B'$, říkáme takovému zobrazení *nepřímá izometrie*. Jelikož složením dvou přímých symetrií vznikne opět přímá symetrie, podgrupu všech přímých symetrií budeme označovat $\mathbb{E}_2^+$.

Definice 3 *Translace* (*posunutí*) t je zobrazení, pro které platí

$$t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + a_1, x_2 + a_2),$$

kde (x_1, x_2) je libovolný bod v $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ je pevně zvolený vektor. Píšeme $t = t(\mathbf{a})$ a směr $\mathbf{a}$ budeme nazývat osou posunutí t. *Rotace* (*otočení*) s je zobrazení, které každý bod roviny otáčí o pevný úhel kolem fixního bodu O, který nazýváme *středem*. Považujme bod O za počátek polárního souřadnicového systému (ρ, θ), pak

$$s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (\rho, \theta) \mapsto (\rho, \theta + \alpha).$$

Reflexí r rozumíme zobrazení, které zobrazí každý bod roviny na jeho zrcadlový obraz vzhledem k pevně zvolené přímce l. Tuto přímku nazývejme *osou* reflexe r a pišme $r = r(l)$. Pro každý bod $P \in \mathbb{R}^2$ platí buď $P \in l$, a tedy $Pr = P$, nebo $P \notin l$, pak Pr je jednoznačně určený bod v rovině a osa l je osou úsečky spojující body P a Pr. Nechť P,P' jsou dva různé body, $P, P' \in l$, kde l je přímka v $\mathbb{R}^2$. Definujeme izometrii

$$q(P, P') = r(l)t(\overrightarrow{PP'}),$$

kterou nazveme *posunutou reflexí* .

Poznámka 1 Translace mají tři důležité vlastnosti: jsou to přímá zobrazení, nefixují žádný bod (pokud $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$) a dají se skládat následujícím způsobem

$$t(\mathbf{a})t(\mathbf{b}) = t(\mathbf{a} + \mathbf{b}),$$

kde $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ a znaménkem $+$ myslíme sčítání po složkách. Pak translace tvoří podgrupu grupy $\mathbb{E}_2$, kterou budeme označovat $\mathbb{T}$. Rotace jsou přímá zobrazení. Pro nenulový úhel každá rotace fixuje právě jeden bod. Rotace můžeme skládat následujícím způsobem

$$s(O, \alpha)s(O, \beta) = s(O, \alpha + \beta),$$

kde znaménkem $+$ míníme sčítaní v $\mathbb{R}\, mod\, 2\pi$. Z poslední vlastnosti plyne, že všechny rotace se středem O tvoří podgrupu $\mathbb{E}_2$, kterou označujeme $\mathbb{S}_0$. Reflexe jsou nepřímá zobrazení, fixují všechny body osy l a platí $r(l)^2 = 1$.

Věta 5 [1, str. 20] Zvolme bod O a přímku l v $\mathbb{R}^2$, tak aby $O \in l$. Pak libovolný element $u \in \mathbb{E}_2$ můžeme jednoznačně vyjádřit ve formě

$$u = r^{\varepsilon} st,$$

kde r označuje reflexi $r(l)$, $\varepsilon \in \{0, 1\}, s \in \mathbb{S}_0, t \in \mathbb{T}$. Podgrupa $\mathbb{E}_2^+$ se skládá pouze z prvků u, kde $\varepsilon = 0$. Toto vyjádření prvku grupy $\mathbb{E}_2$ budeme nazývat *normální tvar*.

Lemma 6 [1, str. 23] Nechť r je reflexe podle osy l, $s = s(\beta)$ je rotace o úhel $\beta \in \mathbb{R}\, mod\, 2\pi$ okolo bodu $O \in l$ a $t(\mathbf{a})$ je posunutí o vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$. Pak

$$t(\mathbf{a})^r = t(\mathbf{a}r),\ t(\mathbf{a})^s = t(\mathbf{a}s),\ s(\beta)^r = s(-\beta).$$

Lemma 7 [1, str. 46] Nechť r, r' jsou dvě reflexe podle os l, l' v $\mathbb{R}^2$. Složení těchto reflexí je rotace nebo translace podle toho, jestli se protínají. Pokud ano, pak středem otočení je průsečík přímek l, l' a úhlem otočení je dvojnásobný úhel, který tyto přímky svírají. Pokud se neprotínají, je směr posunutí kolmý na obě přímky a délka translace je rovna dvojnásobku vzdálenosti těchto přímek.

Lemma 8 [1, str. 50] Složení tří reflexí z $\mathbb{E}_2$ je reflexe, pokud je počet průsečíků os reflexí menší nebo roven 1, nebo to je posunutá reflexe, pokud je počet průsečíků větší nebo roven 2.

Věta 9 [1, str. 52] Každá netriviální izometrie $\mathbb{R}^2$ je složením nejvýše tří reflexí a je reflexe, nebo rotace, nebo translace, nebo posunutá reflexe.

1.2 Teorie grup

Definice 4 Nechť $x, y \in \mathbf{G}$, kde $\mathbf{G}$ je libovolná grupa. *Komutátorem* prvků x, y rozumíme prvek $c = x^{-1}y^{-1}xy$, označujeme $c = [x, y]$. Nechť C je množina všech komutátorů, pak grupu $\langle \mathbf{C} \rangle$ nazveme komutátorovou podgrupou a značíme ji $\mathbf{G}'$.

Poznámka 2 Protože faktorgrupa $\mathbf{G}/\mathbf{G}'$ je největší možná abelovská faktorgrupa, říkáme ji $\mathbf{G}$ abelizovaná, můžeme značit $\mathbf{G}^{\mathbf{ab}}$.

Definice 5 Uvažujme trojici $(\mathbf{H}, \mathbf{K}, \alpha)$, kde $\mathbf{H}, \mathbf{K}$ jsou grupy a nechť $\alpha : \mathbf{K} \to Aut(\mathbf{H}), k \mapsto \alpha_k$ je homomorfismus. Definujme binární operaci na kartézském součinu $K \times H$. Buď $(k, h), (k', h') \in K \times H$, pak $(k', h')(k, h) = (k'k, h'\alpha_k h)$, kde $h'\alpha_k$ je obraz $h' \in H$ zobrazení α_k. Tuto grupu označujeme jako *semidirektní součin* a značíme $\mathbf{K} \ltimes_{\alpha} \mathbf{H}$. Pokud je α_k triviální zobrazení, pak hovoříme o *direktním součinu* a značíme $\mathbf{K} \times \mathbf{H}$.

Definice 6 Nechť $\mathbf{G}$ je grupa a X, R množiny. Buď $X = \{x_1 \dots x_n, n \in \mathbb{N}_0\}$. Definujeme *slovo nad* X jako libovolnou posloupnost symbolů $x_i^{\pm 1}, 1 \leqq i \leqq n$. X nazveme *generující množinou* grupy $\mathbf{G}$, pokud každý prvek $g \in \mathbf{G}$ můžeme vyjádřit jako slovo nad X. Jestliže slovo neobsahuje podposloupnost $x_i^1 x_i^{-1}$ nebo $x_i^{-1} x_i^1$ $\forall i, 1 \leqq i \leqq n$, nazveme jej *redukovaným slovem*. Množinu všech redukovaných slov nad X budeme značit $F(X)$. Rovnosti typu $u_i = v_i$, $u_i, v_i \in F(X)$, $1 \leqq i \leqq n$, $n \in \mathbb{N}_0$ budeme označovat jako *definující relace* a jejich množinu budeme značit R. Pak dvojici $\langle X \mid R \rangle$ nazveme *prezentací grupy* pokud platí následující

1. $\mathbf{G} = \langle X \rangle$,
2. všechny realce z R platí v celé grupě $\mathbf{G}$,
3. všechny rovnosti mezi slovy nad X platné v $\mathbf{G}$, jsou důsledky realcí z R.

Definice 7 Nechť $\langle X \mid R \rangle$ je prezentace grupy. Pak následující operace označujeme jako *Tietzeho transformace*:

1. přidání relace, která je důsledkem již existujících
2. přidání generátoru a definující relace používající stávající generátory
3. odebrání relace, která je důsledkem jiných
4. odebrání generátoru, který se objevuje v relacích pouze jednou, společně s relací, která jej definuje

Věta 10 [1, str. 66] Buďte $\langle X \mid R(X) \rangle$ a $\langle Y \mid S(Y)) \rangle$ dvě konečné prezentace stejné grupy $\mathbf{G}$, pak jednu můžeme získat z druhé pomocí konečného počtu Tietzeových transformací.

1.3 Vlysové a tapetové grupy

Definice 8 Buď $\mathbf{G}$ grupa, $\mathbf{G} \leq \mathbb{E}_2$. Řekneme, že grupa $\mathbf{G}$ je *diskrétní*, pokud pro každý bod $O \in \mathbb{R}^2$ každý kruh se středem O obsahuje pouze konečně mnoho bodů množiny $O\mathbf{G} = \{Og \mid g \in \mathbf{G}\}$.

Lemma 11 [1, str. 80] Pokud $\mathbf{G} \leq \mathbb{E}_2$ a $\mathbf{G} \cap \mathbb{T} = \{1\}$, pak existuje bod $O \in \mathbb{R}^2$, který grupa $\mathbf{G}$ fixuje.

Věta 12 [1, str. 80] Každá konečná podgrupa $\mathbb{E}_2$ je buď cyklická, nebo dihedrální.

Věta 13 [1, str. 81] Nechť **G** je diskrétní podgrupa $\mathbb{E}_2$, pak její grupa translací $\mathbf{T} = G \cap \mathbb{T}$ je buď triviální, nekonečná cyklická, nebo volná abelovská stupně 2.

Definice 9 Nechť **G** je grupa, $\mathbf{G} \leq \mathbb{E}_2$. Pokud je **G** diskrétní a platí $\mathbf{G} \cap \mathbb{T} \simeq \mathbb{Z}$, nazveme ji *vlysovou grupou.*

Věta 14 [1, str. 85] Existuje právě sedm vlysových grup, které se liší svým působením na rovinu. Jsou to následující
$\mathbf{F_1} = \langle t \mid \rangle$,
$\mathbf{F_1^1} = \langle t, r \mid r^2 = 1, t^r = t \rangle$,
$\mathbf{F_1^2} = \langle t, r \mid r^2 = 1, t^r = t^{-1} \rangle$,
$\mathbf{F_1^3} = \langle t, r \mid r^2 = t, t^r = t \rangle$,
$\mathbf{F_2} = \langle t, s \mid s^2 = 1, t^s = t^{-1} \rangle$,
$\mathbf{F_2^1} = \langle t, s, r \mid s^2 = 1, t^s = t^{-1}, r^2 = 1, t^r = t, (sr)^2 = 1 \rangle$,
$\mathbf{F_2^2} = \langle t, s, r \mid s^2 = 1, t^s = t^{-1}, r^2 = t, t^r = t, (sr)^2 = 1 \rangle$.

Definice 10 Nechť **G** je diskrétní podgrupa $\mathbb{E}_2$ a $\mathbf{G} \cap \mathbb{T} \simeq \mathbb{Z}^2$, pak **G** nazveme *tapetovou grupou.*

Lemma 15 [2, str. 152] Izomofismus mezi tapetovými grupami zobrazuje translace na translace, rotace na rotace, relfexe na reflexe a posunuté reflexe na posunuté reflexe.

Věta 16 [1, str. 94] Až na izomorfismus existuje právě 17 různých tapetových grup:
$\mathbf{G_1} = \langle a, b \mid ab = ba \rangle$,
$\mathbf{G_1^1} = \langle a, b, r \mid ab = ba, r^2 = 1, a^r = a, b^r = b^{-1} \rangle$,
$\mathbf{G_1^2} = \langle a, b, r \mid ab = ba, r^2 = 1, a^r = b, b^r = a \rangle$,
$\mathbf{G_1^3} = \langle a, b, r \mid ab = ba, r^2 = a, a^r = a, b^r = b^{-1} \rangle$,
$\mathbf{G_2} = \langle a, b, s \mid ab = ba, s^2 = 1, a^s = a^{-1}, b^s = b^{-1} \rangle$,
$\mathbf{G_2^1} = \langle a, b, s, r \mid ab = ba, s^2 = r^2 = (sr)^2 = 1, a^s = a^{-1}, b^s = b^{-1}, a^r = a, b^r = b^{-1} \rangle$,
$\mathbf{G_2^2} = \langle a, b, s, r \mid ab = ba, s^2 = r^2 = 1, a^s = a^{-1}, b^s = b^{-1}, a^r = a, b^r = b^{-1}, (sr)^2 = b \rangle$,
$\mathbf{G_2^3} = \langle a, b, s, r \mid ab = ba, s^2 = r^2 = (sr)^2 = 1, a^s = a^{-1}, b^s = b^{-1}, a^r = b, b^r = a \rangle$,
$\mathbf{G_2^4} = \langle a, b, s, r \mid ab = ba, s^2 = 1, a^s = a^{-1}, b^s = b^{-1}, r^2 = a, a^r = a, b^r = b^{-1}, (sr)^2 = b \rangle$,
$\mathbf{G_3} = \langle a, b, s \mid ab = ba, s^3 = 1, a^s = a^{-1}b, b^s = a^{-1} \rangle$,
$\mathbf{G_3^1} = \langle a, b, s, r \mid ab = ba, s^3 = r^2 = (sr)^2 = 1, a^s = a^{-1}b, b^s = a^{-1}, a^r = a, b^r = ab^{-1} \rangle$,
$\mathbf{G_3^2} = \langle a, b, s, r \mid ab = ba, s^3 = r^2 = (sr)^2 = 1, a^s = a^{-1}b, b^s = a^{-1}, a^r = b, b^r = a \rangle$,
$\mathbf{G_4} = \langle a, b, s \mid ab = ba, s^4 = 1, a^s = b, b^s = a^{-1} \rangle$,

$\mathbf{G_4^1} = \langle a,b,s,r \mid ab=ba, s^4=r^2=(sr)^2{=}1, a^s=b, b^s=a^{-1}, a^r=a, b^r=b^{-1}\rangle$,
$\mathbf{G_4^2} = \langle a,b,s,r \mid ab=ba, s^4=(sr)^2{=}1, a^s=b, b^s=a^{-1}, a^r=r^2=a, b^r=b^{-1}\rangle$,
$\mathbf{G_6} = \langle a,b,s \mid ab=ba, s^6=1, a^s=b, b^s=a^{-1}b\rangle$,
$\mathbf{G_6^1} = \langle a,b,s,r \mid ab=ba, s^6=r^2=(sr)^2{=}1, a^s=b, b^s=a^{-1}b, a^r=a, b^r=a\rangle$.

Definice 11 Nechť $\mathbf{G}$ je grupa s prezentací $\langle x,y,z \mid x^2=y^2=z^2=(xy)^l=(yz)^m=(zx)^n=1\rangle$, kde platí $2 \leqq l \leqq m \leqq n$. Tuto grupu označíme jako *trojúhelníkovou grupu* a budeme ji označovat $\mathbf{\Delta(l,m,n)}$.

Poznámka 3 Uvažujme trojúhelník XYZ. Buďte x,y,z reflexe určené stranami trojúhelníku. Podle lemma 7 budou $a=xy,\ b=yz,\ c=zx$ rotace okolo vrcholů Z, resp. X, resp. Y, o dvojnásobek velikosti úhlů, který svírají osy příslušných reflexí. V případě, že úhly v trojúhelníku jsou zlomky π, např. $\pi/l, \pi/m, \pi/n,\ l,m,n \in \mathbb{N}$, pak platí $a^l=b^m=c^n$.

1.4 Polytopy

Definice 12 *Polytopem v* $\mathbb{R}^d$ rozumíme průnik konečně mnoha uzavřených poloprostorů. Poloprostor S je *uzavřený*, pokud obsahuje svoji hranici $H=\partial S$. Nechť $P=\bigcap_{i=1}^n S_i$, kde n je minimální a položme $H_i=\partial S_i,\ i=1,2,\dots n$. Pak $P\cap H_i$ nazveme *stěnou* P. Pro $k=d-1,\dots 1,0$ jsou $k-$ *stěny* definovány induktivně: $(d-1)-$ stěna je shodná se stěnou P. Pro $0 \leqq k < d-1$, je $k-$ stěna stěnou $(k+1)-$ stěny P. 1-stěna je nazývána *hrana* a 0-stěna ja nazývána *vrchol*. Dvě $k-$ stěny označíme za *sousedící* pokud je jejich průnik $(k-1)-$ stěna. Úhel, který svírají dvě $(d-1)-$ stěny, nazýváme *dihedrální úhel*. Polytop P je *pravidelný*, pokud jsou všechny jeho stěny navzájem shodné pravidelné polytopy v dimenzi $d-1$ a pokud mají všechny jeho dihedrální úhly stejnou velikost.

Definice 13 *Dláždění prostoru* $\mathbb{R}^d$ je pokrytí $\mathbb{R}^d$ polytopy. Každé dva polytopy mají společnou nejvýše společnou k-stěnu, $k \leqq d-1$. Pokrytím myslíme, že každý bod leží v alespoň jednom polytopu.

Věta 17 (Euler) Pro polytopy v $\mathbb{R}^3$ platí vztah $v-e+f=2$, kde v je počet vrcholů, e je počet hran a f je počet stěn.

Definice 14 Nechť P je pravidelný polytop, pak polytop určený množinou vrcholů, které jsou spojeny hranou s pevně zvoleným vrcholem V, nazveme *link* P' *polytopu* P. *Symbolem* $d-$dimenzionálního pravidelného polytopu P budeme rozumět posloupnost $\{r_1, r_2 \dots r_{d-1}\}$ celých čísel, která je definována následovně: r_1 je počet hran 2-stěny P a $\{r_2, \dots r_{d-1}\}$ je symbol linku P'.

Poznámka Všechny vrcholy P' leží v nadrovině H kolmé na spojnici zvoleného vrcholu V a středu polytopu a platí $P' = P \cap H$. Průnik poloprostorů určující polytop P a nadroviny H jsou stěny P' a dostáváme korespondenci mezi k-stěnami P obsahujícími vrchol V a $(k-1)$ - stěnami P'. Pravidelnost P implikuje pravidelnost P'. P' je tedy pravidelný polytop dimenze $d-1$ a nezávisí na výběru vrcholu V.

Definice 15 Pro pravidelný polytop P s poloměrem kružnice opsané r a délkou hran l, definujeme $\rho(P) = l^2/(4r^2)$.

Lemma 18 [1, str. 162] Nechť má P symbol $\{r_1 \dots r_{d-1}\}$, pak

$$\rho(P) = 1 - \frac{\cos^2 \pi/r_1}{\rho(P')}.$$

Věta 19 [1, str. 163] Jediné možné symboly pro pravidelný polytop dimenze d jsou

1. $\{n\}$, kde n je přirozené číslo, pokud $d = 2$,
2. $\{3,3\}$, $\{4,3\}$, $\{3,4\}$, $\{5,3\}$, $\{3,5\}$ když $d = 3$,
3. $\{3,3,3\}$, $\{4,3,3\}$, $\{3,3,4\}$, $\{3,4,3\}$, $\{5,3,3\}$, $\{3,3,5\}$ pro $d = 4$,
4. $\{3,\dots,3\}$, $\{4,3,\dots 3\}$, $\{3,\dots 3,4\}$ kdykoliv $d \geqq 5$.

Věta 20 [1, str. 166, cvičení 12.16] Dláždění prostoru $\mathbb{R}^d$ pravidelným polytpem $\{r_1,\dots,r_{d-1}\}$ existuje právě tehdy, když existuje pravidelný polytop P určený symbolem $\{r_2,\dots,r_d\}$ takový, že

$$\rho(P) = \cos^2(\pi/r_1).$$

Poznámka 4 Polytop určený symbolem $\{4,3\dots,3\}$ nazveme $d-$ *krychlí* a značíme C_d. Vznikne jako průnik $2d$ poloprostorů $H_i^{\pm} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid x_i = \pm 1\right\}, i = 1,2,\dots d$. Z toho vidíme, že $\{(x_1,\dots,x_d) \mid x_i = \pm 1, i = 1,\dots,d\}$ je množina všech vrcholů d-krychle. Množina středů všech $(d-1)$-stěn d-krychle jsou body na souřadných osách ve vzdálenosti 1 od počátku. Polytop s takovou množinou vrcholů nazveme *kokrychle* a označíme C_d^*. C_d^* je jednoznačně určen smybolem $\{3,\dots,3,4\}$. Říkáme, že C_d^* je duální k C_d. Polytopy určené symbolem $\{3,\dots,3\}$ pojmenujeme *pravidelný* $d-$ *simplex* a budeme značit T_d. T_d je link polytopu C_{d+1}.

2. Cvičení

Cvičení 1 Vyjádřete prvky každé vlysové grupy v normálním tvaru. Nalezněte prvky konečného řádu a určte centrum $Z(\mathbf{F})$. Do každé prezentace přijdete dostatek relací, tak abyste získali $\mathbf{F}/\mathbf{F}'$ a určete $\mathbf{F}'$. Pomocí těchto pozorování ukažte, že vlysové grupy jsou izomorfní pouze 4 grupám.

Řešení: Grupa $\mathbf{F_1} = \langle t \mid \rangle$ je generována pouze jedním generátorem. Proto každý prvek $f \in \mathbf{F_1}$ má tvar $f = t^k, k \in \mathbb{Z}$. Kromě jednotky nemá žádné prvky konečného řádu. Z prezentace grupy vidíme, že $Z(\mathbf{F_1}) = \mathbf{F_1}$. Protože je tato grupa abelovská, platí $\mathbf{F_1}/\mathbf{F_1}' = \mathbf{F_1}$ a tudíž $\mathbf{F_1'} = 1$. Grupa je izomorfní $\mathbb{Z}$, zvolme například zobrazení $\varphi : \mathbf{F_1} \to \mathbb{Z}, t^k \mapsto k$.

$\mathbf{F_1^1} = \langle t, r \mid r^2 = 1, t^r = t \rangle$ můžeme interpretovat tak, že t je translace a r reflexe, jejíž osa je ve směru posunutí. Proto pro $f \in \mathbf{F_1^1}$ platí $f = r^\varepsilon t^k, \varepsilon \in \{0,1\}, k \in \mathbb{Z}$. Tato grupa má pouze dva prvky konečného řádu a to $1, r$ neboť pro $\varepsilon = 1$ platí $(rt^k)^2 = r^{-1}t^k r t^k = t^{2k}$ a prvek konečného řádu dostaneme jen volbou $k = 0$. Odvodíme komutátorovou grupu. Pro všechny hodnoty $\varepsilon, \tau \in \{0,1\}, k, l \in \mathbb{Z}$ spočteme komutátor prvků $r^\varepsilon t^k, r^\tau t^l$. Obecně $[r^\varepsilon t^k, r^\tau t^l] = t^{-k} r^\varepsilon t^{-l} r^\tau r^\varepsilon t^k r^\tau t^l$. Pro $(\varepsilon, \tau) = (0,0)$ dostáváme $\left[t^k, t^l\right] = 1$, $(0,1)$ dává $[t^k, r^\tau t^l] = t^{-k}t^{-l}r^\tau t^k r^\tau t^l = t^{-k}t^{-l}t^k t^l = 1$, volbou $(1,0)$ získáme $[rt^k, t^l] = t^{-k}rt^{-l}rt^k t^l = t^{-k}r^{-l}t^k t^l = 1$ a pro $(1,1)$ platí $[rt^k, rt^l] = t^{-k}rt^{-l}rrt^k rt^l = t^{-k}r^{-l}t^k t^l = 1$. Proto $Z(\mathbf{F_1^1}) = \mathbf{F_1^1}$ a $\mathbf{F_1^1}/(\mathbf{F_1^1})' = \mathbf{F_1^1}$ a $(\mathbf{F_1^1})' = 1$. Protože víme, jak působí r konjugací na t a z předchozích pozorování usoudíme $\mathbf{F_1^1} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$. Přirozeně se nabízí izomorfismus $\varphi : \mathbf{F_1^1} \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}, r^\varepsilon t^k \mapsto (\varepsilon, k)$.

$\mathbf{F_1^2} = \langle t, r \mid r^2 = 1, t^r = t^{-1} \rangle$ se od grupy $\mathbf{F_1^1}$ liší působením r na t. Nechť $f \in \mathbf{F_1^2}$, pak $f = r^\varepsilon t^k, \varepsilon \in \{0,1\}, k \in \mathbb{Z}$. Grupa má nekonečně mnoho prvků konečného řádu a to $1, r, rt^k, k \in \mathbb{Z}$. Z relací $t^r = t^{-1}$ a $r^2 = 1$ plyne $rt^k rt^k = t^{-k}t^k = 1$. Spočtěme komutátory pro všechny prvky. Uvažujme dva libovolné elementy $\mathbf{F_1^2}$ v normáním tvaru, pak má komutátor vyjádření $[r^\varepsilon t^k, r^\tau t^l] = t^{-k} r^\varepsilon t^{-l} r^\tau r^\varepsilon t^k r^\tau t^l$, $\varepsilon, \tau \in \{0,1\}, k, l \in \mathbb{Z}$. Použijeme definující relace a postupně volíme parametry. Volbou $(\varepsilon, \tau) = (0,0)$ dostaneme $[t^k, t^l] = t^{-k}t^{-l}t^k t^l = 1$, pro $(0,1)$ platí $[t^k, rt^l] = t^{-k}t^{-l}rt^k rt^l = t^{-k}t^l t^{-k} t^l = t^{-2k}$, $(1,0)$ dává $\left[rt^k, t^l\right] = t^{-k}rt^{-l}rt^k t^l = t^{-k}t^l t^k t^l = t^{2l}$ a z $(1,1)$ získáme $[rt^k, rt^l] = t^{-k}rt^{-l}rrt^k rt^l = t^{-k}t^l t^{-k} t^l = t^{2l-2k}$. Z toho je vidět, že v centru je pouze identita, tedy $Z(\mathbf{F_1^2}) = 1$. Abelizovaná grupa je určená původní prezentací, do které jsou přidány všechny komutátorové relace. Všechny jsou ovšem důsledkem vztahu $t^2 = 1$ a proto můžeme psát $\mathbf{F_1^2}/(\mathbf{F_1^2})' = \langle t, r \mid r^2 = 1, t^r = t^{-1}, t^2 = 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Komutátorová podgrupa $(\mathbf{F_1^2})' = \langle t^{2k}, k \in \mathbb{Z} \mid \rangle \cong \langle t^2 \mid \rangle$.

Z výše uvedeného a z působení reflexe na posunutí je vidět, že $\mathbf{F_1^2} \cong \mathbb{Z}_2 \ltimes \mathbb{Z} \cong \mathbf{D}_\infty$. Hledaným izomorfismem je například zobrazení $\varphi : \mathbf{F_1^2} \to \mathbb{Z}_2 \ltimes \mathbb{Z}, r^\varepsilon t^k \mapsto (\varepsilon, k)$.

V grupě $\mathbf{F_1^3} = \langle t, r \mid r^2 = t, t^r = t\rangle$ můžeme t interpretovat jako posunutí a r jako posunutou reflexi. V normálním tvaru pro $f \in \mathbf{F_1^3}$ platí $f = r^\varepsilon t^l, \varepsilon \in \{0, 1\}, l \in \mathbb{Z}$, ale pokud dvakrát složíme posunutou reflexi dostaneme posunutí. Proto můžeme $f \in \mathbf{F_1^3}$ vyjádřit jako $f = r^k, k \in \mathbb{Z}$. Tato vlysová grupa nemá kromě jednotky žádný prvek konečného řádu. Z nového vyjádření $f \in \mathbf{F_1^3}$ vidíme, že $Z(\mathbf{F_1^3}) = \mathbf{F_1^3}$. Jelikož celá grupa komutuje, pak $\mathbf{F_1^3}/(\mathbf{F_1^3})' = \mathbf{F_1^3}$ a tudíž $(\mathbf{F_1^3})' = 1$. Protože jsme nahlédli, že celou grupu můžeme generovat jedním prvkem, který není svázán relací, platí $\mathbf{F_1^3} \cong \mathbb{Z}$. $\varphi : \mathbf{F_1^3} \to \mathbb{Z}, r^k \mapsto k$.

Jelikož je grupa $\mathbf{F_2} = \langle t, s \mid s^2 = 1, t^s = t^{-1}\rangle$ izomorní grupě $\mathbf{F_1^2} = \langle t, r \mid r^2 = 1, t^r = t^{-1}\rangle$, jsou zjištěné údaje shodné s výše popsanými. Izomorfismus mezi grupami je například tento: $\varphi : s^\varepsilon t^k \mapsto r^\varepsilon t^k$.

$\mathbf{F_2^1} = \langle t, s, r \mid s^2 = r^2 = (sr)^2 = 1, t^s = t^{-1}, t^r = t\rangle$. Jelikož platí $(sr)^2 = 1 \Rightarrow rsr = s, srs = r, rs = sr$, můžeme $f \in \mathbf{F_2^1}$ vyjádřit takto $f = r^\tau s^\varepsilon t^k, \tau, \epsilon \in \{0, 1\}, k \in \mathbb{Z}$. Prvků konečného řádu je v této grupě grupě nekonečně mnoho: $1, r, s, rs, st^k, rst^k, k \in \mathbb{Z}$. Ověřme pro dva poslední: $st^k st^k = t^{-k}t^k = 1$ a $(rst^k)^2 = rst^k srt^k = rt^{-k}rt^k = 1$. Abychom určili centrum a komutátorovou grupu, spočítáme komutátory pro všechny dvojice prvků. Ty vyjádříme v normálovém tvaru $r^a s^b t^k$, respektive $r^c s^d t^l$, kde $a, b, c, d \in \{0, 1\}, k, l \in \mathbb{Z}$. Volbou $a = c = 0$ získáme již rozebraný případ v $\mathbf{F_1^2}$ a vidíme, že $\left[s^b t^k, s^d t^l\right] = t^{2m}, m \in \mathbb{Z}$ a $m = 0 \Leftrightarrow k = l$. Stejně tak jsme již rozebrali případ $b = d = 0$, kde $[r^a t^k, r^b t^l] = 1$. Podívejme se jak prvek sr působí na t. Získáme $t^{sr} = rstsr = rt^{-1}r = t^{-1}$. Rozebereme zbývající případy, někde využijeme symetrie ve volbě parametrů. Nechť $(a, b, c, d) = (0, 0, 1, 1)$, pak $\left[t^k, rst^l\right] = t^{-k}t^{-l}srt^k rst^l = t^{-2k}$, volme $(0, 1, 1, 1)$ a získáme $\left[st^k, rst^l\right] = t^{-k}st^{-l}srst^k rst^l = t^{-k}t^l t^{-k}t^l = t^{2l-2k}$, mějme $(1, 0, 1, 1)$ a $\left[rt^k, rst^l\right] = t^{-k}rt^{-l}srrt^k rst^l = t^{-k}t^{-l}t^{-k}t^l = t^{-2k}$, buď $(a, b, c, d) = (0, 1, 1, 0)$, pak $\left[st^k, rt^l\right] = t^{-k}st^{-l}rst^k rt^l = t^{-k}t^l t^k t^l = t^{2l}$ a na závěr $(a, b, c, d) = (1, 1, 1, 1)$ dává $\left[rst^k, rst^l\right] = t^{-k}srt^{-l}srsrt^k srt^l = t^{-k}t^l t^{-k}t^l = t^{2l-2k}$. Zvolením $k = 0$ či $l = 0$ zjistíme, že jediné prvky, které komutují se všemi ostatními jsou $1, r$. Proto $\mathbf{Z}(\mathbf{F_2^1}) \cong \mathbb{Z}_2$. Komutátorová grupa je tvaru $(\mathbf{F_2^1})' = \langle t^2 \mid \rangle \cong 2\mathbb{Z}$, neboť všechny komutátorové relace jsou důsledkem relace $t^2 = 1$, protože jsou tvaru $t^{2m} = 1, m \in \mathbb{Z}$. Abelizovaná grupa má tedy prezentaci $\mathbf{F_2^1}/(\mathbf{F_2^1})' = \langle r, s, t \mid r^2 = s^2 = t^2 = (sr)^2 = 1, t^s = t^{-1}, t^r = t\rangle \simeq \mathbb{Z}_2^3$. Platí $\mathbf{H} = \langle s, t \mid s^2 = 1, t^s = t^{-1}\rangle \trianglelefteq \mathbf{F_2^1}$, neboť vztah $rst^k r = srt^k r = st^k$ znamená, že grupa $\mathbf{H}$ je uzavřená na konjugaci. Také grupa $\mathbf{G} = \langle r \mid r^2 = 1\rangle$ je normální podgrupou, jelikož $\mathbf{G} \cong Z(\mathbf{F_2^1})$. Proto můžeme psát

$\mathbf{F_2^1} \cong \mathbf{H} \times \mathbf{G}$. Navíc $\mathbf{H} \cong \mathbb{Z}_2 \ltimes \mathbb{Z}, \varphi : \mathbf{F_1^2} \to \mathbb{Z}_2 \ltimes \mathbb{Z}, s^\varepsilon t^k \mapsto (\varepsilon, k)$. Z toho vidíme, že $\mathbf{F_1^2} \cong D_\infty \times \mathbb{Z}_2$.

Z relací grupy $\mathbf{F_2^2} = \langle t, s, r \mid s^2 = (sr)^2 = 1, t^s = t^{-1}, t^r = t, r^2 = t \rangle$ plyne, že $srs = r^{-1}$. Proto pro libovolné $f \in \mathbf{F_2^2}$ platí $f = r^\tau s^\varepsilon t^k, \tau, \epsilon \in \{0,1\}, k \in \mathbb{Z}$. Také v této grupě je spočetně mnoho prvků konečného řádu: $1, s, sr, st^k, rst^k, k \in \mathbb{Z}$. Ověřme pro poslední dva, k libovolné: $st^kst^k = t^{-k}t^k = 1$ a $rst^krst^k = srt^krst^k = st^kst^k = 1$. Pomocí Tietzeovy transformace ukážeme, že $\mathbf{F_2^2} \cong \mathbf{D}_\infty \cong \mathbf{F_1^2}$. Generátor t je v prezentaci nadbytečný a po substituci v definujících relacích lze vypustit, společně s dalšími relacemi, které se stanou důsledky jiných. Dostaneme $\mathbf{F_2^2} = \langle s, r \mid s^2 = 1, r^s = r^{-1} \rangle$ a naopak, přidáme-li do této prezentace generátor t s definující relací $t = r^2$, snadno odvodíme původní relace. Pak je $Z(\mathbf{F_2^2}) = 1$ a $\mathbf{F_2^2}/(\mathbf{F_2^2})' = \langle s, r \mid s^2 = 1, r^s = r^{-1}, r^2 = 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Na závěr shrňme nejpodstatnější výsledek tohoto cvičení. Následující vlysové grupy jsou izomorfní: $\mathbf{F_1} \cong \mathbf{F_1^3} \cong \mathbb{Z}$, $\mathbf{F_1^1} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$, $\mathbf{F_1^2} \cong \mathbf{F_2} \cong \mathbf{F_2^2} \cong \mathbf{D}_\infty$ a $\mathbf{F_1^2} \cong \mathbf{D}_\infty \times \mathbb{Z}_2$.

Cvičení 2 Dokažte, že grupa $\mathbf{G_i}$ je izomorfní podgrupě $\mathbf{G_j}$ právě když $i \mid j$.

Řešení: „ $\Rightarrow$ “ Tuto implikaci dokážeme sporem. Nechť existuje grupa $\mathbf{H} \simeq \mathbf{G_i}$, $\mathbf{H} \leq \mathbf{G_j}$ a přitom $i \nmid j$. V grupě $\mathbf{G_i}$ jsou pouze prvky řádu $\frac{i}{k}, k \in \mathbb{N}$ a nekonečného řádu. Protože je $\mathbf{H}$ podgrupou $\mathbf{G_j}$, všechny prvky konečného řádu jsou dělitelem j. Proto neexistuje izomorfismus mezi $\mathbf{H}$ a $\mathbf{G_i}$.

„ $\Leftarrow$ “ Pro všechny možné soudělné dvojice i, j ověříme, že takové vnoření existuje. Z definujích relací víme jak působí generátor s na a, b a proto můžeme prvky $\mathbf{G_i}$ vyjádřit v normálním tvaru $g = s^k a^u b^v$, $k \in \{0 \dots i-1\}, u, v \in \mathbb{Z}$. Normální tvar existujue dle věty 5. Buď $\mathbf{H}$ je podgrupa $\mathbf{G_j}$ generovaná $a, b, s^{\frac{j}{i}}$. Nechť $\varphi : \mathbf{G_i} \to \mathbf{H}$, $s^k a^u b^v \mapsto s^{k\frac{j}{i}} a^u b^v$. Ověřme, že φ je homomorfismus. Nejdříve převedeme součin dvou prvků na normální tvar. Využijeme zejména vztahů konjugace a komutativity $s^l a^w b^x \cdot s^k a^u b^v = s^{l+k} s^{-k} a^w s^k s^{-k} b^x s^k a^u b^v$. Principem bude složit dva prvky, vyjádřit je v normálním tvaru, zobrazit je vhodným zobrazením a obraz pak vhodně rozložit tak, abychom ukázali, že toto zobrazení je izomorfismus. Jelikož se snažíme prvky vyjádřit tak, aby mocniny s byly všechny složeny na začátku, při převádění do normálního tvaru nebudeme nikterak na s^l působit a pro nezáleží na hodnotě parametru l.

1. $i = 1, j = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ je $k = 0$ a tedy $\varphi(a^u b^v a^w b^x) = \varphi(a^{u+w} b^{v+x}) = a^{u+w} b^{v+x} = \varphi(a^u b^v) \cdot \varphi(a^w b^x)$.

2. $i = 2, j = 4$ případ $k = 0$ je stejný jako v bodě 1. Dále uvažujme $k = 1$. Pak platí $\varphi(s^l a^w b^x \cdot s a^u b^v) = \varphi(s^{l+1} s^{-1} a^w s s^{-1} b^x s a^u b^v) = \varphi(s^{l+1} a^{u-w} b^{v-x}) = s^{2l+2} a^{u-w} b^{v-x} = s^{2l+2} s^{-2} a^w s^2 s^{-2} b^x s^2 a^u b^v = s^{2l} a^w b^x s^2 a^u b^v = \varphi(s^l a^w b^x) \cdot \varphi(s a^u b^v)$.

3. $i = 2, j = 6$ Ověříme naprosto stejně jako minule, ale využijeme vztahů $a^{-w} = s^{-1} a^{-w} b^w s = s^{-2} b^w s^2 = s^{-3} a^w s^3$ a $b^{-x} = s^{-3} b^x s^3$

4. $i = 3, j = 6$ Pro $k = 0$ stačí opět využít komutativity prvků a, b. Buď $k = 1$, pak $\varphi(s^l a^w b^x \cdot s a^u b^v) = \varphi(s^{l+1} s^{-1} a^w s s^{-1} b^x s a^u b^v) = \varphi(s^{l+1} a^{-w} b^w a^{-x} a^u b^v) = s^{2l+2} a^{-w} b^w a^{-x} a^u b^v = s^{2l+2} s^{-2} a^w s^2 s^{-2} b^x s^2 a^u b^v = s^{2l} a^w b^x s^2 a^u b^v = \varphi(s^l a^w b^x) \cdot \varphi(s a^u b^v)$, neboť platí $a^{-w} b^w = s^{-1} b^w s = s^{-2} a^w s^2$ a $a^{-x} = s^{-1} a^{-x} b^x s = s^{-2} b^x s^2$. Je-li $k = 2$ opět využijeme vztahů plynoucích z definujících relací grupy G_6. Jsou to $s^{-4} a^w s^4 = b^{-w}$ a $s^{-4} a^{-x} s^4 = b^x$.

Z volby grupy $\mathbf{H}$ vidíme, že toto zobrazení je na. Protože $i \leq j$ je jasné, že φ je prosté a je tedy izomofismem.

Cvičení 3 Nechť $\mathbf{G}$ je libovolná diskrétní podgrupa $\mathbb{E}_2$ s netriviální podgrupou translací $\mathbf{T}$. Dokažte, že $[\mathbf{G} : \mathbf{T}] \leqq 12$.

Řešení: Nejdříve rozebereme případ $\mathbf{G} \cap \mathbf{T} \cong \mathbb{Z}^2$. Podle definice je $\mathbf{G}$ tapetová grupa. Věta 16 dává jejich úplnou klasifikaci. Z prezentace tapetových grup vidíme, že každá obsahuje komutující generátory a, b, lze je interpretovat jako translace. Buď $\mathbf{H} = \langle a, b \mid ab = ba \rangle$. Tuto grupu můžeme izomorfně vnořit do každé tapetové grupy. Prvky všech tapetových grup lze převést na normální tvar z věty 5. Chápejme $\mathbf{H}$ vždy jako obraz prostého vnoření. Budeme zkoumat, jak budou vypadat rozkladové třídy určené grupou $\mathbf{H}$. $\mathbf{H}$ určuje v grupách $\mathbf{G_n}, n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ rozkladové třídy $[s^i], i \in \{0, \dots n-1\}$, je jich méně než 12. Další grupy vzniknou přidáním generátoru r a relací, které tento generátor využívají. Pro grupu $\mathbf{G_6^1}$ platí $r^2 = s^6 = (sr)^2 = 1$, a tudíž zde $\mathbf{H}$ určuje právě 12 rozkladových tříd. Pro $\mathbf{G_3^1}$ a $\mathbf{G_3^2}$ máme $r^2 = s^3 = (sr)^2 = 1$, a proto $\mathbf{H}$ určuje 6 rozkladových tříd. V grupě $\mathbf{G_4^1}$ platí $r^2 = s^4 = (sr)^2$, a proto je $[\mathbf{G_4^1} : \mathbf{H}] = 8$. Z prezentace $\mathbf{G_4^2}$ vidíme $r^2 = a \in \mathbf{H}, s^4 = (sr)^2 = 1$. Také zde je 8 rozkladových tříd určených $\mathbf{H}$. V grupách $\mathbf{G_2^3}$ a $\mathbf{G_2^1}$ platí $r^2 = s^2 = (sr)^2 = 1$, a tudíž zde $\mathbf{H}$ určuje 4 rozkladové třídy. Pro $\mathbf{G_2^4}$ z prezentace zjistíme, že $r^2 = a \in \mathbf{H}, (sr)^2 = b \in \mathbf{H}$ a $s^2 = 1$. Pak $[\mathbf{G_2^4} : \mathbf{H}] = 4$. Taktéž pro grupu $\mathbf{G_2^2}$ je index $\mathbf{H}$ roven 4, neboť $(sr)^2 = b \in \mathbf{H}, s^2 = r^2 = 1$. Grupy $\mathbf{G_1^2}$ a $\mathbf{G_1^1}$ mají v prezentaci definující relaci $r^2 = 1$, a proto je index určený $\mathbf{H}$ roven 2. Pro $\mathbf{G_1^3}$ platí $r^2 = a \in \mathbf{H}$ a proto $[\mathbf{G_1^3} : \mathbf{H}] = 2$.

Druhý případ je $\mathbf{G} \cap \mathbf{T} \cong \mathbb{Z}$. Podle definice je $\mathbf{G}$ vlysová grupa a jejich výčet dává věta 14. Každá z nich obsahuje generátor t nekonečného řádu. Proto lze t interpretovat jako translaci. Také prvky vlysových grup lze převést na normální tvar z věty 5. Definujme $\mathbf{H} = \langle t \mid \rangle$. Chápejme $\mathbf{H}$ vždy jako obraz prostého vnoření. Ihned vidíme, že $[\mathbf{F_1} : \mathbf{H}] = 1$. Ze vztahu $r^2 = 1$ v grupách $\mathbf{F_1^2}$ a $\mathbf{F_1^1}$ vidíme, že v těchto grupách $\mathbf{H}$ určuje 2 rozkladové třídy. Jelikož v $\mathbf{F_1^3}$ platí $r^2 = t \in \mathbf{H}$, pak $[\mathbf{F_1^3} : \mathbf{H}] = 2$. Z prezentace $\mathbf{F_2}$ vidíme $s^2 = 1$, tedy index grupy $\mathbf{H}$ je 2. Protože v $\mathbf{F_2^1}$ platí $r^2 = s^2 = (sr)^2 = 1$, je $[\mathbf{F_2^1} : \mathbf{H}] = 4$. Ze vztahů $s^2 = (sr)^2 = 1$ a $r^2 = t \in \mathbf{H}$ se ukáže, že $\mathbf{H}$ určuje v $\mathbf{F_2^2}$ právě 4 rozkladové třídy.

Pro všechny grupy $\mathbf{G}$ s netriviální podgrupou translací platí $[\mathbf{G} : \mathbf{T}] \leqq 12$ a rovnost nastává pouze pro $\mathbf{G_6^1}$.

Cvičení 4 Ověřte, že žádné dvě tapetové grupy nejsou po dvou izomorfní. Argumentujte například řády konečných prvků či indexem komutátorové grupy.

Řešení: Nejprve uděláme hrubou úvahu. Aby byly grupy izomorfní, musí obsahovat prvky stejných řádů. Grupy odvozené od $\mathbf{G_n}$, $n \in \{2, 3, 4, 6\}$ mají prvek řádu n, a proto nemohou být izomorfní. Stačí tedy zkoumat, zda-li jsou grupy izmorfní v rámci této skupiny. Tuto úvahu nelze použít na grupy odvozené od $\mathbf{G_1}$ a $\mathbf{G_2}$, jelikož mají jen prvky řádu 1 a 2, musíme je zkoumat společně.

Budeme využívat algoritmus abelizace pomocí Smithovy normální formy, který je důkladně popsán v $[1, str.\ 70 - 74]$. Ilustrujme použití na grupě $\mathbf{G_6^1} = \langle a, b, s, r \mid ab = ba, s^6 = r^2 = (sr)^2{=}1, a^s = b, b^s = a^{-1}b, a^r = a, b^r = a \rangle$. Z relací dostaneme vztahy $a - b = 0, a + b = 0, 2r + 2s = 0, 6s = 0$ a $2r = 0$. Tyto vztahy určují matici, kterou upravíme následovně

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Proto $\mathbf{G_6^1}/(\mathbf{G_6^1})' \cong \mathbb{Z}_2^2$ a komutátorová grupa má index 4. Pokud použijeme stejný algoritmus pro $\mathbf{G_6}$, zjistíme, že $\mathbf{G_6^{ab}} \cong \mathbb{Z}_6$ a proto platí $\mathbf{G_6^1} \ncong \mathbf{G_6}$.

Pro grupy odvozené do $\mathbf{G_3}$ budeme opět argumentovat indexem komutátorové grupy a opět využijeme zmíněného algoritmu abelizace. Z $\mathbf{G_3}$ definujících relací odvodíme a upravíme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Známe tedy $\mathbf{G^{ab}} \cong \mathbb{Z}_3^2$ a proto $[\mathbf{G} : \mathbf{G}'] = 9$. Obdobně postupujeme pro další grupy a zjistíme, že $[\mathbf{G}_3^1 : (\mathbf{G}_3^1)'] = 6$ a $[\mathbf{G}_3^2 : (\mathbf{G}_3^2)'] = 2$. Žádné dvě grupy odvozené od $\mathbf{G_3}$ nejsou izomorfní.

Spočítáme pro každou grupu $\mathbf{G}/\mathbf{G}' = \mathbf{G^{ab}}$. Postupně dostáváme $(\mathbf{G_4})^{\mathbf{ab}} \cong (\mathbf{G_4^2})^{\mathbf{ab}} \cong \mathbb{Z}_2^3 \ncong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \cong (\mathbf{G_4^1})^{\mathbf{ab}}$. Dokážeme, že neexistuje izomorfismus mezi $\mathbf{G_4}$ a $\mathbf{G_4^2}$. Prezentaci $\mathbf{G_4}$ upravíme pomocí vztahu $a^s = b$ a získáme novou prezentaci $\mathbf{G_4} = \left\langle a, s \mid aa^s = a^s a, a^{s^2} = a^{-1}, s^4 = 1 \right\rangle$. V $\mathbf{G_4^2}$ substitujeme $a^s = b$ a $r^2 = a$, pak $\mathbf{G_4^2} = \left\langle r, s \mid r^2(r^2)^s = (r^2)^s r^2, (r^2)^{s^2} = r^{-2}, s^4 = 1, (sr)^2 = 1, (r^2)^{sr} = (r^{-2})^s \right\rangle$ je nová prezentace $\mathbf{G_4^2}$. Proto každý nenulový homomorfismus $\varphi : \mathbf{G_4} \to \mathbf{G_4^2}$ musí zobrazit s na s, a na r^2, a proto nemůže být prostý a ani izomorfismus.

Zkoumejme nyní grupy odvozené od $\mathbf{G_1}$ a $\mathbf{G_2}$. U každé grupy určíme počet prvků konečného řádu a komutátorovou grupu. Grupa $\mathbf{G_1}$má jenom jeden konečný prvek a to identitu. Její komutátorová grupa je triviální, neboť $\mathbf{G_1}$ je komutativní a je generována dvěma prvky. $\mathbf{G_1^1}$ má spočetně mnoho prvků řádu 2, jsou to rb^k, $k \in \mathbb{Z}$, neboť $rb^k rb^k = r^{-1}b^k rb^k = b^{-k}b^k = 1$. Použitím výše zmíněného algoritmu zjistíme, že $(\mathbf{G_1^1})' \cong \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}$. Grupa $\mathbf{G_1^2}$ má právě dva prvky řádu 2 a to 1 a r, protožer působí na t takto: $a^r = b$, respektive $b^r = a$. Její komutátorová grupa je izomorfní $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$. Poslední tapetová grupa odvozená od $\mathbf{G_1}$ je $\mathbf{G_1^3}$ a ta má pouze jeden prvek řádu 2 - identickou symetrii. Tím se liší od všech předchozích kromě $\mathbf{G_1}$, ale ta je komutativní a $\mathbf{G_1^3}$ není. Grupa $\mathbf{G_2}$ má spočetně mnoho prvků konečného řádu, jsou to například sb^k, $k \in \mathbb{Z}$. Její komutátorová grupa má index 8, jelikož $\mathbf{G_2^{ab}} \cong \mathbb{Z}_2^3$. Definujme $\mathbf{T} = \langle a, b \mid ab = ba \rangle \leq G_2$. Z prezentace grupy zjistíme, že $\mathbf{T}$ je uzavřená na konjukce, a tudíž platí $[\mathbf{G_2} : \mathbf{T}] = 2$. Můžeme psát $\mathbf{G_2} \cong \mathbb{Z}_2 \ltimes \mathbb{Z}^2$. Grupa $\mathbf{G_1^2}$ má spočetně mnoho prvků řádu 2. Index její komutátorové grupy je 16. Pro $\mathbf{G_2^2}$ platí $(\mathbf{G_2^2})^{\mathbf{ab}} \cong \mathbb{Z}_2^3$ a tedy $[\mathbf{G_2^2} : (\mathbf{G_2^2})'] = 8$. Jako všechny grupy odvozené od $\mathbf{G_2}$ má spočetně mnoho prvků konečného řádu. Grupa $\mathbf{G_2^3}$ má také index komutátorové grupy 8, $(\mathbf{G_2^3})^{\mathbf{ab}} \cong \mathbb{Z}_2^3$ a nekonečný počet prvků řádu 2. Buď $\mathbf{H}$ podgrupa $\mathbf{G_2^3}$, $\mathbf{H} = \langle s, r \mid s^2 = r^2 = (sr)^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2^2$. Protože je $\mathbf{T} = \langle a, b \mid ab = ba \rangle$ uzavřená na konjugaci, tedy $\mathbf{T} \trianglelefteq \mathbf{G_2^3}$, platí $\mathbf{G_2^3} \cong \mathbb{Z}_2^2 \ltimes \mathbb{Z}^2$. Grupa $\mathbf{G_2^4}$ má index komutátorové grupy také 8, ale $(\mathbf{G_2^4})^{\mathbf{ab}} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ a proto není s předešlými izomorfní. U všech grup srovnáme počet prvků řádu dva a strukturu jejich abelizované grupy a zjistíme, že žádné dvě nejsou izomorfní až na $\mathbf{G_2}, \mathbf{G_2^2}$ a $\mathbf{G_2^3}$. Ale víme, že $\mathbf{G_2} \cong \mathbb{Z}_2 \ltimes \mathbb{Z}^2 \ncong \mathbf{G_2^3} \cong \mathbb{Z}_2^2 \ltimes \mathbb{Z}^2$. Dále upravíme prezentace $\mathbf{G_2^2}$ a $\mathbf{G_2^3}$ s použitím vztahů $(sr)^2 = 1$, respektive $b = a^r$. Dostaneme $\mathbf{G_2^2} = \langle a, s, r \mid aa^r = a^r a, s^2 = r^2 = (sr)^2 = 1, a^s = a^{-1} \rangle$ a $\mathbf{G_2^3} = \left\langle a', s', r' \mid a'(s'r')^2 = (s'r')^2 a', s'^2 = r'^2 = 1, a'^{s'} = a'^{-1}, a'^{r'} = a', (r's')^2 = (s'r')^2 \right\rangle$. Protože generátory a, a' jsou v obou případech jediné nekonečné generátory, musí se zobrazit na sebe. Generátory s, r a s', r' jsou oba řádu dva, mohly by se zobrazit na sebe různě. V každém případě, je $(sr)^2 = 1$, ale $(s'r')^2$ je nekonečného řádu a takový izomorfismus tedy neexistuje. Pokud bychom chtěli najít homomorfismus $\mathbf{G_2}$ a $\mathbf{G_2^2}$, stačí jej zadat na generátorech. Ale $\mathbf{G_2}$ má dva generátory nekonečného řádu, avšak $\mathbf{G_2^2}$ pouze jeden a takový homomorfismus tedy nemůže být prostý.

Cvičení 5 Rozhodněte, které ze 17 tapetových grup jsou izomorfní podgrupě jiné tapetové grupy.

Řešení: Pro každou tapetovou grupu platí $\mathbf{G} \cap \mathbb{T} \cong \mathbb{Z}^2$. Proto lze do každé takové grupy vnořit $\mathbf{G_1}$. Grupa $\mathbf{G_1^1}$ můžeme interpretovat jako dvě navzájem kolmá posunutí a reflexi s osou ve směru translace a. Proto je izomorfní podgrupám $\mathbf{G_2^1}, \mathbf{G_2^2}, \mathbf{G_4^1}$ generovanými prvky a, b, r, které mají stejnou strukturu. $\mathbf{G_1^2}$ můžeme opět chápat jako dvě kolmé translace, ale osa rotace je shodná s osou úhlu, který tyto posunutí svírají. Je izomorfní pouze podgrupě $\mathbf{G_2^3}$ určené prvky a, b, r. Grupa $\mathbf{G_1^3}$ obsahuje r, který můžeme chápat jako posunutou reflexi, a může být izomorfní pouze podgrupám $\mathbf{G_2^4}$ nebo $\mathbf{G_4^2}$. Snadno se ověří, že v obou případech takový izomorfismus skutečně existuje. Je jím jediný možný kandidát $\varphi : a \mapsto a', b \mapsto b', r \mapsto r'$.

Grupu $\mathbf{G_2}$ je samozřejmě možné přirozeně vnořit do grup od ní odvozených $\mathbf{G_2^1}, \mathbf{G_2^2}, \mathbf{G_2^3}$ a $\mathbf{G_2^4}$. Z cvičení 2 víme, že je také izomorfní podgrupě $\mathbf{G_4}$ a $\mathbf{G_6}$. Proto půjde vnořit i do grup do nich odvozených $\mathbf{G_4^1}, \mathbf{G_4^2}$ a $\mathbf{G_6^1}$. Použijeme zobrazení $\varphi : a \mapsto a', b \mapsto b', s \mapsto (s')^2$, respektive $\varphi : a \mapsto a', b \mapsto b', s \mapsto (s')^3$. $\mathbf{G_2^1}$ lze vnořit do podgrupy $\mathbf{G_4^1}$ generované a, b, r, s^2. Zejména je třeba si uvědomit, že $\varphi(s^{-1}as) = (s')^{-2}a'(s')^2 = (s')^{-1}b's' = (a')^{-1} = \varphi(a^{-1})$ a $\varphi(s^{-1}bs) = (s')^{-2}b'(s')^2 = (s')^{-1}(a')^{-1}s' = (a')^{-1} = \varphi(b^{-1})$, proto je takové zobrazení izomorfismus. Grupa $\mathbf{G_2^2}$ není izomorfní podgrupě žádné jiné tapetové grupy. Generátory s, r se musí zobrazit na generátory konečného řádu, a proto se $(sr)^2$ při izomorfismu musí zobrazit na $(s'r')^2$. Ale $\mathbf{G_2^2}$ není izomorfní s žádnou grupou odvozenou od $\mathbf{G_2}$ a pro grupy odvozené od $\mathbf{G_4}$ a $\mathbf{G_6}$ platí $(sr)^2 = 1$. Grupu $\mathbf{G_2^3}$ lze interpretovat jako dvě kolmá posunutí, reflexi v ose jejich úhlu a rotaci. Při geometrické interpretaci svírají translace rodiny $\mathbf{G_6}$ jiný úhel, v grupě $\mathbf{G_4^1}$ je osa zrcadlení shodná se směrem posunutí a $\mathbf{G_4^2}$ obsahuje posunutou reflexi. Proto $\mathbf{G_2^3}$ není izomorfní žádné podgrupě jiné tapetové grupy. $\mathbf{G_2^4}$ obsahuje generátor r, který chápeme jako posunutou reflexi a tak jediný kandidát je $\mathbf{G_4^2}$, ale jedniný možný obraz prvku $(sr)^2$je $(s'r')^2$ a tyto se liší v řádu. Proto takový izomorfismus neexistuje.

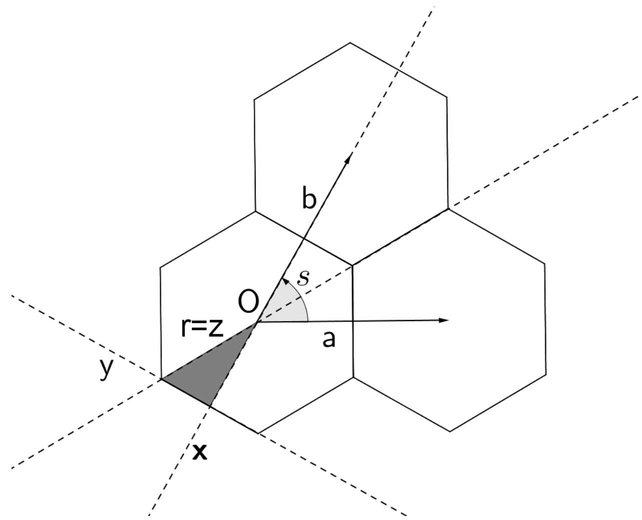
Podle cvičení 2 grupa $\mathbf{G_4}$ není izomorfní podgrupě žádných jiných grup než jsou grupy od ní odvozené. Jelikož grupy $\mathbf{G_4^1}$ a $\mathbf{G_4^2}$ obsahují prvky řádu 4, nejdou prostě vnořit do grup odvozených od $\mathbf{G_3}$ ani $\mathbf{G_6}$.

Grupa $\mathbf{G_3}$ lze vnořit jednak do grup od ní odvozených a také do grup $\mathbf{G_6}$ a $\mathbf{G_6^1}$. V obou případech se použije zobrazení $\varphi : a \mapsto a', b \mapsto b', s \mapsto (s')^2$. Snadno se ověří, že jde o izomorfismus, zřejmě nejtěžší je ověřit, jak se zobrazí konjugace rotací $\varphi(s^{-1}as) = (s')^{-2}a'(s')^2 = (s')^{-1}b's' = (a')^{-1}b' = \varphi(a^{-1}b)$ a $\varphi(s^{-1}bs) = (s')^{-2}b'(s')^2 = s'(a')^{-1}bs' = (a')^{-1} = \varphi(a^{-1})$. Stejně tak se ukáže, že $\mathbf{G_3^2}$ je izomorfní podgrupě $\mathbf{G_6^1}$ generované prvky a, b, r, s^2. Grupa $\mathbf{G_3^1}$ není izomorfní podgrupě žádné tapetové grupy.

Zbývá nám poslední skupina tapetových grup, grupy odvozené do $\mathbf{G_6}$. $\mathbf{G_6}$ lze přirozeně vnořit do $\mathbf{G_6^1}$. $\mathbf{G_6^1}$ už do žádné jiné grupy prostě vnořit nelze. Ta by musela mít prvek řádu 6 a obsahovat reflexi. To je pouze $\mathbf{G_6^1}$.

Cvičení 6 Aplikací Tietzeových transformací dokažte, že $\mathbf{\Delta(2,3,6)} \cong \mathbf{G_6^1}$.

Řešení: Máme ukázat, že lze pomocí Tietzeových transformací z prezentace trojúhelníkové grupy $\mathbf{\Delta(2,3,6)} = \langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^2 = (xy)^2 = (yz)^3 = (zx)^6 = 1\rangle$ získat $\mathbf{G_6^1} = \langle a, b, s, r \mid ab = ba, s^6 = r^2 = (sr)^2 = 1, a^r = b, b^r = a, a^s = b, b^s = a^{-1}b\rangle$ a naopak. Ke generátorům x, y, z přidáme další generátory a, b, s, r definované vztahy: $a = (zy)(zx)^2, b = (xy)(zx)^3, s = zx, r = z$. Z toho ihned plyne $x = rs, y = bs^2r, z = r$. Na obrázku č.1 jsou jednotlivé generátory zaznamenány do jednoho nákresu. Ukážeme, že relací definujících grupu$\mathbf{\Delta(2,3,6)}$ plynou relace definující grupu $\mathbf{G_6^1}$.



Obrázek č.1 Geometrická interpretace vztahů mezi generátory $\mathbf{\Delta(2,3,6)}$ a $\mathbf{G_6^1}$

Nejprve odvodíme tři pomocné vztahy, které se nám budou často hodit:

$$(zx)^6 = 1 \Rightarrow (zx)^3 = (xz)^3 \Rightarrow y(zx)^3 = y(xz)^3 \quad (1)$$

$$(xy)^2 = 1 \Rightarrow xy = yx \quad (2)$$

$$(yz)^3 = 1 \Rightarrow yzy = zyz \quad (3)$$

Ukážeme, že vztah $ab = ba$ je důsledek jiných:

$$\begin{aligned}
y = y &\Rightarrow y(xz)^3 = y(zx)^3 && \\
&\Rightarrow xyz(xz)^2 = y(zx)^3 && \text{Rozepsání } (xz)^3 \text{ a (2)} \\
&\Rightarrow y(zx)^2 = xy(zx)^3 z && \text{Přenásobení } z \text{ zprava} \\
&\Rightarrow yzxy^2zyx = xy(zx)^3 zy && \text{Přenásobení } y \text{ zprava a } y^2 = 1 \\
&\Rightarrow (yzy)x(yzy)x && \text{Využili jsme dvakrát vztah (2)} \\
&\Rightarrow (zy)(zx)^2(xy)(zx) = (xy)(zx)^3(zy) && \text{Vztah } x^2 = 1 \\
&\Rightarrow \mathbf{ab = ba}. && \text{Z definice } a, b
\end{aligned}$$

Triviálním důsledkem relací $r = z$ a $zx = s$ je

$$z^2 = 1 \Rightarrow \mathbf{r^2 = 1},$$

$$(zx)^6 = 1 \Rightarrow \mathbf{s^6 = 1},$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow zxxz = 1 \Rightarrow (zxz)^2 = 1 \Rightarrow \mathbf{(sr)^2 = 1}.$$

Působení r na a získáme následovně

$$\begin{aligned}
y = y &\Rightarrow y(xz)^3 = y(zx)^3 && \text{Přenásobení } (zx)^3 = (xz)^3 \\
&\Rightarrow xy(zx)^2 z = y(zx)^3 && \text{Rozepsání } (zx)^3 \text{ a podle (2)} \\
&\Rightarrow z^{-1}(zy)(zx)^2 z = (xy)(zx)^3 && \text{Přenásobení } x \text{ a } z^{-1}z = 1 \\
&\Rightarrow \mathbf{a^r = b}. && \text{Z definice}
\end{aligned}$$

Také platí

$$zxy = zyx \Rightarrow zxy(zx)^4 = zyx(xz)^2 \qquad \text{Použili jsme } (zx)^6 = 1$$

$$\Rightarrow z^{-1}(xy)(zx)^3z = (zy)(zx)^2 \qquad \text{Přenásobení } x \text{ zprava a } z = z^{-1}$$
$$\Rightarrow \mathbf{b^r = a}. \qquad \text{Z definice}$$

Snadno ukážeme, jak působí s na a

$$xy = xy \Rightarrow (xz)(zy) = xy \qquad \text{Vztah } z^2 = 1$$
$$\Rightarrow (zx)^{-1}(zy)(zx)^2(zx) = (xy)(zx)^3 \qquad \text{Přenásobení } (zx)^3 \text{ a } (zx)^{-1} = xz$$
$$\Rightarrow \mathbf{a^s = b}. \qquad \text{Z definice}$$

Zbývá odvodit poslední vztah a $b^s = a^{-1}b$

$$x = x \Rightarrow xyzy = xzyz \qquad \text{Podle (3)}$$
$$\Rightarrow xy = (xz)(yz)^2 \qquad \text{Přenásobení } yz$$
$$\Rightarrow xy = (xz)(yz)(xy)(xz) \qquad \text{Relace } x^2 = 1 \text{ a } xy = yx$$
$$\Rightarrow (zx)^{-1}(xy) = (xz)^2(yz) \qquad \text{Přenásobení } (zx) = (xz)^{-1} \text{ zleva}$$
$$\Rightarrow (zx)^{-1}(xy)(zx)^3(zx) = (xz)^2(yz)(xy)(zx)^3 \qquad \text{Přenásobení } (zx)^4\text{zprava}$$
$$\Rightarrow \mathbf{b^s = a^{-1}b} \qquad \text{Z definice}$$

Nyní jsme dokázali, že z relací definujích grupu $\mathbf{\Delta(2,3,6)}$ lze odvodit definující relace grupy $\mathbf{G_6^1}$. Pokud ukážeme, že z relací prezentace $\mathbf{G_6^1}$ lze odvodit relace pro $\mathbf{\Delta(2,3,6)}$, budeme hotovi. Tietzeho transformace oběma směry proběhne těmito kroky: Přidání nových generátorů a jejich definujících relací. Tím se staré relace stanou důsledkem nově přidaných a proto je odstraníme. Můžeme také odstranit původní generátoy a jejich definující relace a získáme tak kýženou grupu.

Triviální důsledek vztahu $r = z$ je $r^2 = 1 \Rightarrow \mathbf{z^2 = 1}$.

Odvodíme pomocné vztahy:

$$(sr)^2 = 1 \Rightarrow s = r^{-1}s^{-1}r \tag{4}$$
$$s^{-2}a^{-1}s^2 = s^{-1}b^{-1}s = ab^{-1} \tag{5}$$
$$s^{-2}bs^2 = s^{-1}(a^{-1}b)s = s^{-1}a^{-1}ss^{-1}bs = a^{-1} \tag{6}$$

Snadným důsledkem vztahu (4) je

$$1 = s^{-1}s = rsrs \Rightarrow \mathbf{1 = x^2}.$$

Následovně se ukáže, že $\mathbf{y^2 = 1}$

$$1 = ba^{-1}b^{-1}a \qquad \text{Využijeme komutativity } a, b$$
$$= brb^{-1}rra^{-1}rrbr \qquad \text{Třikrát použití konjugací } b = a^r, a = b^r$$
$$= brb^{-1}a^{-1}br \qquad \text{Podle relace } r^2 = 1$$
$$= brs^{-1}a^{-1}ss^{-1}bsr \qquad \text{Využití vztahů } b^s = a^{-1}b, a^s = b$$
$$= brs^{-1}(a^{-1}b)sr \qquad \text{Zkrátíme } ss^{-1}$$
$$= brs^{-2}bs^2r \qquad \text{Opět užití konjugace } s$$
$$= brrs^2rbs^2r \qquad \text{Z rovnosti } s^{-2} = rs^2r$$
$$= bs^2rbs^2r = y^2 \qquad \text{Pokrácení } rr \text{ a z definice}$$

Takto odvodíme relaci $(\mathbf{xy})^{\mathbf{2}} = \mathbf{1}$

$$\begin{aligned}
1 &= bb^{-1} \\
&= bs^{-1}a^{-1}s && \text{Použili jsme působení } s \text{ na } b^{-1} \\
&= bs^{-2}(a^{-1}b)s^2 && \text{Tentokráte } (a^{-1}b)^s = a^{-1} \\
&= bs^{-3}bs^3 && \text{Potřetí konjugace } s \\
&= sbs^2sbs^2 && \text{Ze vztahu } s^{-3} = s^3 = s^2s \\
&= rsbs^2rrsbs^2r && \text{Přenásobení z obou stran } r \text{ a použití } r^2 = 1 \\
&= (rsbs^2r)^2 = (xy)^2 && \text{Formální úprava a z definice } x, y
\end{aligned}$$

Ze znalosti působení s na a, b získáme $(\mathbf{yz})^{\mathbf{3}}$=1

$$\begin{aligned}
1 &= bb^{-1}aa^{-1} \\
&= bs^{-2}a^{-1}s^2a^{-1} && \text{Využití vztahu } s^{-2}a^{-1}s^2 = b^{-1}a \\
&= bs^{-2}s^{-2}bs^2s^2s^{-2}bs^2 && \text{Dvakrát podle } s^{-2}bs^2 = a^{-1} \\
&= (bs^2)^3 = (yz)^3 && \text{Z } s^4 = s^{-2}\text{, krácení } s^2s^{-2} = 1 \text{ a z definice } y, z
\end{aligned}$$

Zbývající definující relaci získáme skoro triviálně

$(rrs)^6 = s^6 = 1 \Rightarrow (\mathbf{zx})^{\mathbf{6}} = \mathbf{1}$. □

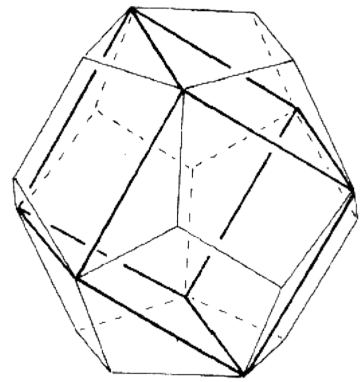
Cvičení 7 Ukažte, že každá ze tří grup $\mathbf{\Delta(l, m, n)}$, kde $1/l + 1/m + 1/n = 1$ má podgrupu konečného indexu izomorfní $\mathbb{Z}^2$.

Řešení: Obdobně jako ve cvičení 8 lze pomocí Tietzeových transformací ukázat, že $\mathbf{\Delta(2, 4, 4)} \cong \mathbf{G_4^1}$ a $\mathbf{\Delta^+(3, 3, 3)} \cong \mathbf{G_3}$. Tento fakt je také známý z publikace $[1, str.\ 152]$. Z předchozí úlohy víme, že $\mathbf{\Delta(2, 3, 6)} \cong \mathbf{G_6^1}$. Grupy $\mathbf{G_3}, \mathbf{G_4^1}$ a $\mathbf{G_6^1}$ jsou tapetovými grupami a mezi jejich generátory patří různá posunutí a, b. Grupa translací $\mathbf{T}$ je izomorfní volné abelovské grupě řádu 2. Ve cvičení 3 jsme dokázali, že $[\mathbf{G} : \mathbf{T}] \leq 12$, kde $\mathbf{G}$ je libovolná diskrétní podgrupa $\mathbb{E}_2$.

Jelikož je grupa $\mathbf{\Delta^+(3, 3, 3)} \cong \mathbf{G_3}$ podgrupou přímých zobrazení, platí pro její index $[\mathbf{\Delta(3, 3, 3)} : \mathbf{\Delta^+(3, 3, 3)}] \leqq 2$ a proto $[\mathbf{\Delta(3, 3, 3)} : \mathbf{T}] \leq 24$. Tudíž je grupa translací konečného indexu a je izomorfní $\mathbb{Z}^2$.

Cvičení 8 Ukažte, že grupa symetrií pravidelného dvanáctistěnu $\mathbf{Sym(D)} \simeq A_5 \times \mathbb{Z}_2$.

Řešení: Zkoumejme nejdříve přímé symetrie $\mathbf{Sym^+(D)}$. Vyberme si libovolnou stěnu a zvolme v ní jednu z pěti úhlopříček. Tato úhlopříčka tvoří hranu krychle vepsané do dvanáctistěnu. Každá z hran krychle tvoří úhlopříčku jedné z dvanácti stěn tělesa, viz obrázek č. 2. Pokud vybereme v prvně zvolené stěně jinou úhlopříčku, dostaneme jinou krychli. Tedy je 5 takových krychlí a každá ze symetrií dvanáctistěnu tyto krychle permutuje.



Obrázek č. 2 [2, str. 40] Vepsání krychle do dvanáctistěnu

Je třeba ověřit, že žádné dvě symetrie neurčují stejnou permutaci krychlí. Jeden druh symetrií je tvořen rotacemi kolem přímky, která spojuje protilehlé stěny. Druhý typ jsou otočení okolo přímky, která spojuje protilehlé vrcholy. Posledním typem jsou otočení okolo osy, která spojuje středy protilehlých hran. Řády symetrií jsou 2,3 a 5 (nesoudělné) nemůže se tedy stát že dvě symetrie jiného typu určují stejnou permutaci krychlí.

Pokud otáčíme okolo středů protilehlých stran, tak se hýbe všech pět krychlí. V každé dvojici stěn je jiné vzájemné uspořádání uhlopříček a proto krychle permutují v jiném pořadí. Máme tedy celkem 24 permutací řádu 5.

Pokud otáčíme okolo středů protilehlých hran, pak jedna krychle zůstává na místě (ta, co nemá s hranou ani jeden společný vrchol) a ostaní utvoří dvě dvojice (otočení o 180°). Jsou právě tři symetrie, ketré fixují tuto krychli. Můžeme vybrat právě tři protilehlé dvojice hran a každým výběrem dostaneme jiné dvojice krychlí, které se na sebe zobrazují. Celkem je tedy 15 permutací typu $(\cdot\cdot)\,(\cdot\cdot)$.

Pokud otáčíme okolo osy tvořené spojnicí středu a vrcholu, pak je v tomto vrcholu vrchol právě dvou krychlí. Ty se zobrazují na sebe a ostatní tři permutují. Z pěti krychlí vybereme 2 celkem deseti způsoby, což koresponduje s deseti dvojicemi protilehlých vrcholů. Tedy otáčení okolo každé osy určuje dvě krychle, které budou fixované. Grupa $\mathbf{Sym}^{+}(\mathbf{D})$ obsahuje celkem 20 trojcyklů.

Společně s identickým zobrazením máme tedy celkem 60 symetrií, které permutují 5 objektů. Je to podgrupa $\mathbf{S_5}$ obsahující všechny trojcykly, tedy $\mathbf{Sym}^{+}(\mathbf{D}) \simeq \mathbf{A_5}$.

Jelikož středová symetrie $\varphi : x \mapsto -x$ je nepřímou symetrií dvanáctistěnu, komutuje s přímými izometriemi a je řádu 2, vidíme, že $\mathbf{Sym}(\mathbf{D}) \simeq \mathbf{A_5} \times \mathbb{Z}_2$.

Cvičení 9 Pro každý pravidelný mnohostěn určete dihedrální úhly mezi jeho stěnami. Pomocí předešlého cvičení dokažte, že existuje právě jedno dláždění $\mathbb{R}^3$.

Řešení: Pro každé těleso spočítáme dihedrální úhly zvlášť. Pokusíme se použít různé metody.

Nechť máme pravidelný čtyřstěn určený body $A = [0,0,0]$, $B = [1,1,0]$, $C = [1,0,1]$, $D = [0,1,1]$. Uvažujme rovinu kolmou na úsečku CD obsahující bod A. Průnik této roviny a úsečky CD označme P. Pak velikost dihedráního úhlu mezi rovinami určenými body ACD a BCD je roven velikosti úhlu u vrcholu P v rovnoramenném trojúhelníku ABP. Ten spočítáme podle kosinové věty $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\gamma$. Tedy $cos\gamma = -\frac{1}{3}$ a proto $\gamma_4 \approx 70,53°$.

Dihedrální úhel, který svírají stěny krychle je zřejmý, $\gamma_6 = 90°$.

Pro výpočet úhlu, který svírají stěny osmistěnu využijeme tu vlastnost, že osmistěn je duálním tělesem ke krychli. Pokud bychom chtěli spočítat dihedrální úhel analyticky, museli bychom zjistit odchylku normálových vektorů příslušných stran. Jelikož je osmistěn pravidelné telěso tvořené rovnostrannými trojúhelnky, tak se tyto normály protnou přesně ve středu tělesa. Spojují tedy středy příslušných stran a střed mnohostěnu. Pokud vepíšeme do osmistěnu krychli, zjistíme, že normály se shodují s tělesovými úhlopříčkami krychle. Velikost dihedrálního úhlu bude tedy stejná jako velikost úhlu v rovnoramenném trojúhelníku, který svírají stejně dlouhé strany. Délky těchto stran jsou $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$ respektive 1. Úhel γ_8 dopočítáme opět pomocí kosinové věty. Pro odchylku normálových vektorů, vyjde $\cos\gamma = 1/3$. Dihedrální úhel je pak doplňkem do 180° a proto $\gamma_8 \approx 109,47°$.

Známe souřadnice bodů pravidelného dvacetistěnu $[\pm t, \pm t^{-1}, 0]$, $[0, \pm t, \pm t^{-1}]$, $[\pm t^{-1}, 0, \pm t]$, kde $t = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$. Tyto jsou uvedeny v literatuře [1, *str.* 136]. Jelikož je stěna tělesa pravidelný mnohostěn, všechny vrcholy této stěny budou mít od středu stejnou vzdálenost. Proto střed určíme jako průměr souřadnic vrcholů náležících do jedné stěny. Výše uvedené souřadnice můžeme transformovat na tyto $[\pm\tau, \pm 1, 0]$, $[0, \pm\tau, \pm 1]$, $[\pm 1, 0, \pm\tau]$, kde $\tau = (1+\sqrt{5})/2$, změní se pouze velikost tělesa. Vyberme si stěny určené $[\tau, 1, 0]$, $[0, \tau, 1]$, $[1, 0, \tau]$ a $[\tau, 1, 0]$, $[\tau, -1,]$, $[1, 0, \tau]$. Jejich středy jsou $\left[\frac{\tau+1}{3}, \frac{\tau+1}{3}, \frac{\tau+1}{3}\right]$ respektive $\left[\frac{2\tau+1}{3}, 0, \frac{\tau}{3}\right]$. Normály odpovídají vektorům určeným počátkem souřadnic a středy stěn. Po jejich znormování spočítáme odchylku pomocí skalárního součinu.

$$\cos\gamma = \frac{3\tau + 1}{\sqrt{3(5\tau^2 + 4\tau + 1)}} \approx 0,7453$$

Platí, že $\gamma \approx 41,81°$, dihedrální úhel je doplněk do 180° a proto $\gamma_{20} \approx 138,19°$.

Pro dvanáctistěn použijeme stejnou metodu jako pro výpočet dihedrálního úhlu osmistěnu. Vepíšme dvacetistěn do dvanáctistěnu a vybereme si dva body dvacetistěnu spojené hranou. Tyto jsou středy stěny dvanáctistěnu. Vezměme si například $[\tau, 1, 0]$ a $[1, 0, \tau]$. Spočítáme jejich vzdálenost $\sqrt{(t-1)^2 + 1 + \tau^2}$ a vzdálenost od počátku $\sqrt{\tau^2 + 1}$. Pomocí kosinové věty dostaneme

$$\cos\gamma = \frac{2(\tau^2 + \tau + 1) - (\tau^2 + 1) - (\tau^2 + 1)}{2(\tau^2 + 1)} = \frac{\tau}{\tau^2 + 1} \approx 0,4472.$$

Z toho získáme $\gamma \approx 63,43^\circ$ a proto $\gamma_{12} \approx 116,57^\circ$.

Pokud chceme jedním tělesem vydláždit celý prostor $\mathbb{R}^3$, dihedrální úhel objektu musí mít velikost $360/n,\ n \in \mathbb{N},$. Pouze pak můžeme mnohostěny poskládat tak, aby součet dihedrálních úhlů těles majících společnou hranu byl 360°. Jediné takové těleso je krychle.

Cvičení 10 Pro každé $k,\ 0 \leqq k \leqq d-1$, spočtěte počet k-stěn pravidelných polytopů $T_d, C_d, C_d^*, d \geqq 2$. Odvoďte Eulerův vztah pro pravidelné konvexní poyltopy libovolné dimenze $d \geqq 2$.

Řešení: V literatuře [1, *str.* 129, 160] je formulována a ověřena Eulerova formule pro dimenze $d = 3$ a $d = 4$. V rovině je vztah jasný $v - e = 0$, kde v je počet vrcholů a e počet hran.

Dokážeme, že pokud má polytop symbol $\{r_1, \ldots, r_d\}$, pak jeho $(d-1)$-stěna má smybol $\{r_1, \ldots r_{d-1}\}$. Budeme dokazovat indukcí. Pro $d = 3$ dokážeme rozborem mnohostěnů. Čtyřstěn má symbol $\{3, 3\}$ a jeho stěna je rovnostranný trojúhelník a má symbol $\{3\}$. Krychle má symbol $\{4, 3\}$ a její stěna má čtyři hrany, tedy má symbol $\{4\}$. Osmistěn je určen symbolem $\{3, 4\}$ a jeho stěna má symbol $\{3\}$. Dvanáctistěn má symbol $\{3, 5\}$ a jeho stěna je pravidelný pětiúhelník - dává symbol $\{5\}$. Dvacetistěn je určen $\{5, 3\}$ a jeho stěna je rovnostranný trojúhelník, který má symbol $\{3\}$. Uvažme $(d-1)$-stěnu libovolného d-dimenzionálního polytopu P se symbolem $\{r_1, \ldots r_d\}$. Link tohoto polytopu P má z definice symbol $\{r_2, \ldots r_d\}$. Z indukčního předpokladu má $(d-2)$-stěna linku symbol $\{r_2, \ldots r_{d-1}\}$. Protože k-stěny polytopu P a $(k-1)$-stěny linku P' spolu korespondují, je $(d-2)$-stěna linku je určena vrcholy, které leží s fixovaným vrcholem V v jedné $(d-1)$-stěně polytopu P. Což je to samé jako kdybychom vzali $(d-1)$-stěnu polytopu P, ve které leží vrchol V a určili její link. Tedy symbol $(d-1)$-stěny polytopu P je $\{x, r_2, \ldots r_{d-1}\}$. Protože 2-stěny polytopu P a jeho $(d-1)$-stěny jsou totožné, musí být $x = r_1$.

Indukcí dokažme, že každá k-stěna je $T_k, k \geqq 2$. Pro $d = 3$ dostáváme pravidelný čtyřstěn, jehož 2-stěny jsou rovnostranné trojúhelníky. Symbol T_d je posloupnost čísel 3, kterých bude d. Označujme $\{3^d\}$. Výše jsme dokázali, že symbol $(d-1)$-stěny tohoto polytopu je $\{3^{d-1}\}$. To znamená, že $(d-1)$-stěna T_d je T_{d-1}. Ostatní stěny jsou také T_k, to plyne z indukčního předpokladu.

Polytop T_d je d-dimenzionální útvar. Víme, že T_d je link C_{d+1}. S každým vrcholem C_{d+1} je hranou spojeno právě $d+1$ vrcholů. Těmito je T_d určeno a proto má $d+1$ vrcholů. Vidíme, že link T_d má d vrcholů, a tedy je všech $d+1$ vrcholů spojeno hranou, a tudíž je každá k-stěna určena právě $k+1$ vrcholy. Proto je počet k-stěn roven $t_k = \binom{d+1}{k+1}$. Pokusíme se zobecnit Eulerův vztah. Uvažujme sumu k-stěn přes všechny přípustné dimenze, kterou ještě upravíme posunutím sčítacího indexu.

$$\sum_{k=0}^{d-1} (-1)^k t_k = \sum_{k=1}^{d} (-1)^{k+1} \binom{d+1}{k} = x$$

K obou stranám přičteme členy 1 a $(-1)^{d+1}$, substitujeme $d+1 = n$ a využijeme známé kombinatorické identity

$$0 = -\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{d+1} (-1)^{k+1} \binom{d+1}{k} = x - 1 + (-1)^{d+2}.$$

Dostáváme tedy vztah

$$\sum_{k=0}^{d-1} (-1)^k t_k = 1 - (-1)^d.$$

Polytop C_d je také d-dimenzionální útvar. Indukcí dokážeme, že každá jeho k-stěna je $C_k, k \geqq 2$. Pro $d = 3$ to je zřejmé, 2-stěny jsou čtverce. Symbol polytopu C_d je $\{4, 3^{d-1}\}$ a podle výše dokázaného je symbol jeho $(d-1)$-stěny $\{4, 3^{d-2}\}$ a tedy je to polytop C_{d-1}. Ostatní k-stěny jsou C_k z indukčního předpokladu.

V jednom jeho vrcholu se setkává právě d hran. Každá k-stěna C_d je C_k. Každých k hran v jednom vrcholu určuje k-dimenzinální podprostor H a platí, že $H \cap C_d$ je právě jedna k-stěna, proto je počet k-stěn obsahujících fixovaný vrchol $\binom{d}{k}$. Vybereme libovolný vrchol. Těch je 2^d. Každá stěna obsahuje 2^k vrcholů a tolikrát bychom ji započítali. Proto $c_k = 2^{d-k}\binom{d}{k}$. Protože C_d^* duální k C_d, platí $c_{d-k}^* = c_k$. Zobecněme Eulerův vztah pro C_d a C_d^*:

$$\sum_{k=0}^{d-1}(-1)^k c_k = \sum_{k=0}^{d-1}(-1)^k 2^{d-k}\binom{d}{k} = x.$$

K oběma stranám přičteme člen $(-1)^d$, uvědomíme si, že $\binom{d}{d-k} = \binom{d}{k}$, zjistíme, že jsme dostali vzorec pro binomický rozvoj výrazu $(2-1)^d$:

$$x + (-1)^d = \sum_{k=0}^{d}(-1)^k 2^{d-k}\binom{d}{k} = \sum_{k=0}^{d}(-1)^k 2^k\binom{d}{k} = (2-1)^d = 1.$$

A z toho tedy plyne, že

$$\sum_{k=0}^{d-1}(-1)^k c_k = \sum_{k=0}^{d-1}(-1)^k c_k^* = 1-(-1)^d.$$

Eulerova formule $v - e + f = 2$ může být zobecněna pro všechny pravidelné polytopy libovolné dimenze $d \geqq 2$ takto: $\sum_{k=0}^{d-1}(-1)^k f_k = 1-(-1)^d$, kde f_k je počet k-stěn.

Cvičení 11 Klasifikujte všechna dláždění prostorů $\mathbb{R}^d$, $d \geqq 2$ pravidelnými konvexními polytopy.

Řešení: Nejprve spočteme hodnotu ρ pro všechny pravidelné konvexní polytopy.

Budeme postupovat podle dimenze. Nechť $d = 2$. Pak všechny útvary určené symbolem $\{n\}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1,2\}$ jsou pravidelné mnohoúhelníky. Vyberme si dva libovolné vrcholy se společnou hranou a spojme je se středem. Vznikne rovnoramenný trojúhelník. Úhel proti hraně určíme snadno, je to $2\pi/n$. Z kosinové věty proto vypočteme čtverec délky hrany $l^2 = 2r^2(1-\cos\gamma)$. Dosadíme do definice ρ a zjistíme, že $\rho(\{n\}) = l^2/4r^2 = (1-\cos\gamma)/2$. Dosadíme velikost úhlu, upravíme podle goniometrických vzorců a dostaneme $\rho(\{n\}) = \sin^2(\pi/n)$.

Nechť $d = 3$. Využijeme vzorec z lemma 18, do kterého dosadíme výsledek pro $d = 2$

$$\rho(\{r_1, r_2\}) = 1 - \frac{\cos^2(\pi/r_1)}{\rho(\{r_2\})} = 1 - \frac{\cos^2(\pi/r_1)}{\sin^2(\pi/r_2)}.$$

Z věty 19 známe symboly všech pravidelných mnohostěnů a proto stačí jen dosadit.

$$\rho(\{3,3\}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \qquad \rho(\{4,3\}) = \frac{1}{3} \qquad \rho(\{3,4\}) = \frac{1}{2}$$

$$\rho(\{5,3\}) = \frac{3-2\cos^2(\pi/5)}{3} \qquad \rho(\{3,5\}) = \frac{4\sin^2(\pi/5)-1}{\sin^2(\pi/5)}$$

Buď $d = 4$. Použijeme vzorec pro výpočet ρ z lemma 18. Dosadíme a upravíme

$$\rho(\{r_1, r_2, r_3\}) = 1 - \frac{\cos^2(\pi/r_1)}{\rho(\{r_2, r_3\})} = \frac{\rho(\{r_2, r_3\}) - \cos^2(\pi/r_1)}{\rho(\{r_2, r_3\})}.$$

Celé opakujeme ještě jednou a využijme znalosti $\rho(\{r_3\}) = \sin^2(\pi/r_3)$

$$\rho(\{r_1, r_2, r_3\}) = \frac{\sin^2(\pi/r_3)\sin^2(\pi/r_1) - \cos^2(\pi/r_2)}{\sin^2(\pi/r_3) - \cos^2(\pi/r_2)}.$$

Symboly všech pravidelných polytopů známe z věty 19 a proto můžeme určit jejich ρ.

$$\rho(\{3,3,3\}) = \frac{5}{8} \qquad \rho(\{4,3,3\}) = \frac{1}{4} \qquad \rho(\{3,3,4\}) = \frac{1}{2}$$

$$\rho(\{3,4,3\}) = \frac{1}{4} \qquad \rho(\{5,3,3\}) = \frac{3\sin^2(\pi/5)-1}{2} \qquad \rho(\{3,3,5\}) = \frac{3\sin^2(\pi/5)-1}{4\sin^2(\pi/5)-1}$$

Buď $d \geqq 5$. Postupně spočteme ρ pro všechny tři typy polytopů.

1. Tvrdíme, že $\rho(C_d^*) = \frac{1}{2}$ pro všechny hodnoty d. Souřadnice C_d^* známe z poznámky 4, jsou to $\{(0, \ldots x_i \ldots 0) \mid x_i = \pm 1,\ i = 1, \ldots d\}$. Proto $l = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$ a $r = 1$. Pak $\rho(C_d^*) = l^2/4r^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

2. Pro T_d budeme hondotu ρ dokazovat indukcí. Tvrdíme, že $\rho(T_d) = (d+1)/2d$. Pro $d = 2$ ověříme díky výpočtu výše $\rho(\{3\}) = \sin^2(\pi/3) = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{4}$. Z indukčního předpokladu víme, že $\rho(T_{d-1}) = \frac{d}{2d-2}$. Z lemma 18 $\rho(T_d) = 1 - \cos^2(\pi/3)/\rho(T_{d-1})$. Spočítáme hodnotu kosinu, dosadíme do druhého vzorce a dostaneme
$$\rho(T_d) = 1 - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{d}{2d-2}} = \frac{4d-2d+2}{4d} = \frac{d+1}{2d}.$$

3. Chceme dokázat, že $\rho(C_d) = 1/d$. Množina $\{(x_1, \ldots, x_d) \mid x_i = \pm 1, i = 1, \ldots, d\}$ jsou vrcholy hyperkrychle podle poznámky 4. Délku hrany spočteme ve standratní metrice jako $l = \sqrt{(1+1)^2} = 2$. Stejně spočteme poloměr opsané sféry $r = \sqrt{d}$. Po dosazení do definice ρ dostáváme $\rho(C_d) = 4/4d = 1/d$.

Nyní známe hodnoty ρ a můžeme přistoupit k samotné klasifikaci dláždění pomocí pravidlných konvexních polytopů.

Nechť $d = 2$. Podle věty 20 existuje dláždění roviny pravidelným mnohoúhelníkem právě když existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $\sin^2(\pi/n) = \cos^2(\pi/k)$. Takové dvojice jsou pouze $(3,6),(6,3)$ a $(4,4)$.

Buď $d = 3$. Všechna dláždění prostoru $\mathbb{R}^3$ jsme již klasifikovali ve cvičení 9. Ukážeme alternativní důkaz. Využijeme větu 20.

1. Pravidelný čtyřstěn má symbol $\{3,3\}$, proto musí existovat polytop P, pro který platí $\rho(P) = \cos^2(\pi/3) = \frac{1}{4}$. Podle přechozích výpočtů takový objekt neexistuje.

2. Krychle má symbol $\{4,3\}$, musí proto existovat polytop P tak, že $\rho(P) = \cos^2(\pi/4) = \frac{1}{2}$. Takový existuje, je to kokrychle. Její symbol je $\{3,4\}$, a tudíž splňuje obě podmínky věty 20. Krychlí lze tedy dláždit $\mathbb{R}^3$.

3. Duální krychli C_3^* odpovídá symbol $\{3,4\}$, hledáme tedy mnohostěn P, jehož hodnota ρ je $\frac{1}{4}$. Podle dřívějšího výsledku takový mnohostěn neexistuje.

4. Polytop se symbolem $\{5,3\}$ dláždí $\mathbb{R}^3$, právě když existuje polytop se symbolem $\{3,r_3\}$ tak, že $\cos^2(\pi/5) = \rho(\{3,r_3\})$. Rovnost určitě nenastane pro $r_3 = 3$, ověřme pro $r_3 = 5$. Musela by platit rovnost

$$\cos^2(\pi/5) = \frac{4\sin^2(\pi/5) - 1}{\sin^2(\pi/5)},$$

kterou můžeme snadno upravit do tvaru

$$(\sin^2(\pi/5))^2 + 3\sin^2(\pi/5) - 1 = 0.$$

Řešením kvadratické rovnice zjistíme, že tento výraz nedává smysl.

5. Abychom mohli dláždit eukleidovský prostor mnohostěnem se symbolem $\{3,5\}$, muselo by platit

$$\frac{1}{4} = \frac{3 - 2\cos^2(\pi/5)}{3},$$

po úpravě dává $\cos^2(\pi/5) = \frac{9}{8}$, což zjevně neplatí.

Uvažujme $d = 4$. Použijeme větu 20 a budeme chtít zjistit, zda-li existuje polytop P se symbolem $\{r_2, r_3, r_4\}$tak, že $\rho(\{r_2, r_3, r_4\}) = \cos^2(\pi/r_1)$. Z výše vyjádřeného vzorce pro výpočet ρ odvodíme podmínku pro hodnotu r_4

$$\sin^2(\pi/r_4) = \frac{\cos^2(\pi/r_3)\sin^2(\pi/r_1)}{\sin^2(\pi/r_2) - \cos^2(\pi/r_1)}.$$

Z věty 19 známe klasifikace všech polytopů v $\mathbb{R}^4$ a postupně pro všechny ověříme platnost této rovnosti.

1. Pro polytop se symbolem$\{3,3,3\}$ jsou jediné možné hodnoty $r_4 \in \{3,4,5\}$. Zkusíme tedy dosadit a dostáváme po řadě $\frac{3}{4} = \frac{3}{8}$, $\frac{1}{4} = \frac{3}{8}$, $\sin^2(\pi/5) = \frac{3}{8}$. Vidíme, že ani jedna z těchto rovností neplatí a proto nelze 4-simplexem vydláždit $\mathbb{R}^4$.

2. Pro hyperkrychli připadají v úvahu opět hodnoty $r_4 \in \{3,4,5\}$. Po dosazení $r_4 = 4$ dostaneme rovnost.

3. Duální polytop k hyperkrychli má symbol $\{3,3,4\}$, proto můžeme uvažovat pouze jednu variantu $r_4 = 3$. Po dosazení získáme platnou rovnost a tudíž je možné dláždit $\mathbb{R}^4$ pomocí kokrychle dimenze 4.

4. Mějme symbol $\{3,4,3\}$. Z klasifikace polytopů vidíme, že se musíme zabývat pouze varinatou $r_4 = 3$. Dosadíme a získáme $\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$, tedy lze dláždit 4-dimenzionální eukleidovský prostor pomocí 24-nadstěnu.

5. Polytop se symbolem $\{5,3,3\}$ dláždí $\mathbb{R}^4$ právě když platí jedna z následujících rovností

$$\frac{3}{4} = \frac{\frac{1}{4}\sin^2(\pi/5)}{\frac{1}{3} - \cos^2(\pi/5)},\ \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{4}\sin^2(\pi/5)}{\frac{1}{3} - \cos^2(\pi/5)},\ \sin^2(\pi/5) = \frac{\frac{1}{4}\sin^2(\pi/5)}{\frac{1}{3} - \cos^2(\pi/5)}.$$

   Protože $\frac{1}{3} - \cos^2(\pi/5) \neq 0$ přenásobíme první rovnost jmenovatelem zlomku na pravé straně. Využijeme goniometrické identity $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Po další úpravě dostaneme $\sin^2(\pi/5) = 1$, což očividně neplatí. V případě druhé, respketive třetí, rovnosti získáme obdobnou úpravou vztah $\frac{4}{3} = \sin^2(\pi/5)$, respektive $\frac{8}{9} = \sin^2(\pi/5)$. Obě tyto rovnosti nedávají smysl, a proto polytopem se symbolem $\{5,3,3\}$ nelze vydláždit $\mathbb{R}^4$.

6. Poslední nadstěn dimenze 4 má symbol $\{3,3,5\}$. Neexistuje pravidelný polytop se symbolem $\{3,5,r_4\}$, proto ani neexistuje dláždění tímto útvarem.

Mějme $d \geqq 5$. Opět využijeme Větu 20. Hodnoty ρ pro všechny pravidelné konvexní polytopy vyšších dimnzí jsme určili výše.

1. Pokud bychom chtěli $\mathbb{R}^d$ dláždit C_d^*, musel by existovat pravidelný polytop se symbolem $\{3,\ldots 3,4,r_d\}$, ale takový neexistuje, to víme z věty 19.

2. Protože T_d má symbol $\{3, \ldots, 3\}$, připadají v úvahu polytopy T_d a C_d^*. První dává rovnost $\cos^2(\pi/3) = \frac{1}{4} = (d+1)/2d$. Jednoduchou úpravou získáme řešení $d = -2$. Druhý případ dává rovnost $\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, což očividně nedává smysl.

3. Uvažujme C_d. Polytop C_d^* splňuje podminky věty 20, neboť jeho symbol je $\{3, \ldots 3, 4\}$ a platí $\cos^2(\pi/4) = \frac{1}{2} = \rho(C_d^*)$.

Závěrem rekapitulujme výsledek tohoto cvičení.

$d = 2$: Existují dláždění roviny pouze pro mnohostěny symbolu $\{3\}, \{4\}$ a $\{6\}$, tedy rovnostranným trojúhelníkem, čtvercem a pravidelným šestistěnem.

$d = 3$: Prostor lze zcela pokrýt pouze krychlemi.

$d = 4$: Jsou celkem 3 typy dláždění $\mathbb{R}^4$, a to hyperkrychlemi, duálními hyperkrychlemi a polytopem symbolu $\{3, 4, 3\}$.

$d \geqq 5$: Jediné možné dláždění prostorů vyšší dimenze je pomocí d-dimenzinálních krychlí.

Závěr

V této práci jsem shrnul teorii z vybraných pasáží zkoumané knihy a vypracoval jsem některé příklady. Část, kde je prezentována teorie, je delší než jsem původně zamýšlel, ale jsem přesvědčen, že všechny použité pojmy je třeba definovat a charakterizovat je. Mým hlavním přínosem je tedy vypracování příkladů. Některé z nich jsou skutečně zajímavé. Vybral bych například klasifikaci všech dláždění eukleidovských prostorů pomocí pravidelných konvexních polytopů, kompletní rozbor vztahů mezi tapetovými grupami, či důkaz Eulerova vztahu pro pravidelné konvexní polytopy vyšší dimenze.

Samotný proces vypracování bakalářské práce byl pro mě velmi přínosný. S pomocí geometrického náhledu jsem si plně osvojil některé, již známé pojmy z teorie grup. Rozšířil jsem svoje znalosti ohledně prezentace grup, velmi jsem ocenil algoritmus Tietzeho transformace. Také jsem nastudoval proces abelizace grupy pomocí Smithova normálního tvaru. Poznal jsem celé nové skupiny grup, například trojúhelníkové grupy či Coexterovy grupy.

Téma jsem si vybral také proto, že se zde dá velmi dobře uplatnit geometrický přístup. Při vypracovávání příkladů jsem byl poněkud zklamán. Sice jsem si problémy mohl snadno představit a vyřešit je tak, ale často jsem při formálním zapisování řešil technické obtíže. Příkladem je ověřování, zda některé zobrazení je izomorfismus, či není.

Tato práce by šla dále snadno rozšířit. Bylo by možné se zabývat dlážděním sféry či hyperbolických ploch. Také by šlo zkoumat nekonvexní či nepravidelné polytopy a dláždění prostorů těmito útvary. Zajímavou variantou je zkoumat dláždění více objekty či neperiodická dláždění.

Seznam literatury

[1] D.L. Johnson, Symmetries, Springer 2001

[2] M.A. Armstrong, Groups and Symmetry, 1988

[3] http://mathworld.wolfram.com/WallpaperGroups.html