Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKA PRÁCE

Michal Kudlík

Penze z pohledu teorie užitku

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce:	prof. RNDr. Tomáš Cipra, DrSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Finanční matematika

Praha 2014

Moje poďakovanie za vedenie a cenné pripomienky pri vedení a záverečnom spracovaní bakalárskej práce patrí Prof. Ciprovi. Ďalej by som sa rád poďakoval všetkým, ktorí ma počas štúdia neustále podporovali a posúvali vpred.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 19.5.2014 Kudlík Michal

Název práce: Penze z pohledu teorie užitku

Autor: Michal Kudlík

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky MFF UK

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Tomáš Cipra, DrSc.

Abstrakt: Tato bakalářská práce se zabývá problematikou penzí z pohledu teorie užitku. Jmenovitě uvedeme základní principy, vlastnosti penzí spolu se základním dělením. Součástí práce je i část o teorii užitku, jak z ordinálního pohledu na teorii užitku, tak i z pohledu kardinálních užitkových funkcí. Následně zformulujeme příslušné úlohy ke zvoleným užitkovým funkcím, které se budeme snažit optimalizovat na základě použité užitkové funkce. Úlohu optimalizace účelové funkce převedeme na úlohu s vázanými extrémy odpovídajícími různým anuitním trhům, které budeme řešit pomocí věty o Lagrangeových multiplikátorech. Výsledkem práce bude spočítat výši peněžního kapitálového ekvivalentu pro užitkovou funkci CRRA (Constant relative risk aversion) při použití různých hodnot relativní averze vůči riziku a ukázat optimální spotřební strategii pro penzisty na základě úmrtnostních tabulek pro Českou republiku z roku 2012.

Klíčová slova: Penze, teorie užitku, užitkové funkce, optimální spotrební strategie, peňěžní kapitálový ekvivalent.

Title: Pensions from the point of view of utility theory

Author: Michal Kudlík

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics MFF UK

Supervisor: prof. RNDr. Tomáš Cipra, DrSc.

Abstract: This work deals with pensions from the perspective of utility theory. We list several basic principles, characteristics of pensions and their classification. Part of the work is also the utility theory from the ordinal point of view of utility theory as well as in terms of cardinal utility functions. Afterwards, we formulate the tasks for the selected utility functions, which we will try to optimize by using utility functions. We transfer the task of maximizing objective function to the task with extreme bound corresponding to various annuity markets which we will solve by theory of Lagrange multipliers. Final result of the work should be calculation of annuity equivalent wealth per common utility function Constant relative risk aversion (CRRA) using different relative risk aversions and showing the optimum consumption strategy for pensioners calculated based on mortality tables for Czech republic from 2012.

Keywords: Pensions, utility theory, utility functions, optimum consumption strategy, constant relative risk aversion.

Názov práce: Dôchodky z pohľadu teórie úžitku

Autor: Michal Kudlík

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky MFF UK

Vedúci bakalárskej práce: prof. RNDr. Tomáš Cipra, DrSc.

Abstrakt: Táto bakalárska práca sa zaoberá problematikou penzií z pohľadu teórie úžitku. Menovite uvedieme základné princípy, vlastnosti penzií spolu so základným delením. Súčasťou práce je aj časť o teórii úžitku, ako z ordinálneho pohľadu na teóriu úžitku, tak aj z pohľadu kardinálnych úžitkových funkcií. Následne sformulujeme príslušné úlohy k zvoleným úžitkovým funkciám, ktoré sa budeme snažiť optimalizovať na základe použitej úžitkovej funkcie. Úlohu optimalizácie účelovej funkcie prevedieme na úlohu s viazanými extrémami zodpovedajúcimi rôznym anuitným trhom, ktoré budeme riešiť pomocou vety o Lagrangeových multiplikátoroch. Výsledkom práce bude spočítať výšku peňažného kapitálového ekvivalentu pre úžitkovú funkciu CRRA (Constant relative risk aversion) pri použití rôznych hodnôt relatívnej averzie voči riziku a ukázať optimálnu spotrebnú stratégiu pre penzistov na základe úmrtnostných tabuliek pre Českú republiku z roku 2012.

Kľúčové slová: Dôchodky, teória úžitku, úžitkové funkcie, optimálna spotrebná stratégia, peňažný kapitálový ekvivalent.

Obsah

Úvod

Cieľom tejto práce je prehľadne popísať a vyriešiť vybrané optimalizačné úlohy úžitkových funkcií v penzijnom kontexte, vystihnúť ich podstatu a predstaviť prístupy k ich riešeniu podľa [1].

Práca je delená do štyroch samostatných kapitol. V prvej kapitole sa rozoberá pojem penzia či dôchodok, ich záťaž na jednotlivé generácie a podpora staršej generácie od štátu. Následne sa uvádza úspešná aplikácia dôchodkovej reformy, ktorá by mala spĺňať rôzne kritériá. Nasleduje vysvetlenie základných pojmov a triediacich znakov v oblasti penzií. V rámci tejto časti sú uvedené aj rozličné druhy dôchodkových systémov, spolu s princípmi efektívneho vzájomného chodu. Záver prvej kapitoly sa venuje niektorým finančným inštrumentom, cenným papierom a anuitám v rámci penzií.

Druhá kaptiola je venovaná teórii úžitku z dvoch hlavných prístupov, podobne ako v [3], a to teória úžitku z ordinálneho pohľadu a pomocou kardinálnych úžitkových funkcií, kedy na definovanie úžitkovej funkcie využijeme axiómy, ktoré budú spĺňať určité relácie. V závere kapitoly uvedieme penzie z pohľadu teórie úžitkovosti a dopyt po penziách zostavený na základe [1]. Na základe Yaariho výskumu uvedieme príklad na penzijný hlavolam, kedy bude dôraz kladený na spotrebu rozdelenú medzi sporiaci produkt a životnú anuitu. V rámci tejto podkapitoly spomenieme aj úžitkové funkcie, ktoré sú často používané v kontexte s penziami a penzijnou spotrebou, spolu so základnými vlastnosťami úžitkových funkcií a interpretáciou v danom kontexte. Sformulujeme jeden z hlavných cieľov tejto práce: určiť veľkosť penzijného kapitálového ekvivalentu.

Tretia kapitola všobecne sformuluje hlavnú úlohu práce podľa [1]: maximalizovať stredný úžitok všobecnej účelovej funkcie cez prípustné spotreby dosiahnuté z pevného počiatočného kapitálu. Definujeme náhodnú účelovú funkciu cez všeobecnú úžitkovú funkciu a základné vlastnosti, ktoré musí spĺňať. Za všobecnú úžitkovú funkciu zvolíme funkciu CRRA uvedenú v druhej kapitole. Náhodnosť je modelovaná pravdepodobnosťami dožitia do skúmaných časov. Úlohu sme previedli na riešenie optimalizačnej úlohy s viazaným extrémom. Optimalizovať účelovú funkciu budeme v rámci troch rôznych trhov, pre ktoré platia rôzne spotrebné obmedzenia. Dokážeme maximalitu účelovej funckie pre stacionárne body, ktoré dostaneme riešením pomocou Lagrangeových multiplikátorov. Pre anuitné trhy spočítame výšku penzijného kapitálového ekvivalentu oproti dlhopisovému trhu.

Posledná štvrtá kapitola je zameraná na numerické riešenie maximálneho úžitku z budúceho toku spotrebých služieb na základe aktuálnych úmrtnostných tabuliek, ktoré máme k dispozícii. Spočítame aktuálne hodnoty pre teoretický výpočet prevedený v predchádzajúecj kapitole. Pre výpočet využijeme software Mathematica.

1. Penzie

1.1 Charakteristika penzií

Súčasný trend starnutia populácie (*population ageing*) a slová penzie či dôchodky (*retirement*) pozná každý. V súčasnosti je starnutie populácie globálny demografický proces, ktorý je pozorovateľný už viac než sto rokov a prejavuje sa v najväčšej miere vo vyspelých krajinách sveta. V súčasnom význame je dôchodok trvalé opustenie zamestnania zaisťované dôchodkovým príjmom (oproti minulosti, kedy to bola skôr výsada vyšších vrstiev spoločnosti). Ešte nedávno v niektorých častiach sveta bola staroba synonymom pre chudobu. V budúnosti sa však očakáva, že spojenie starnutia s dôchodkami bude mať hlboký dopad na celú spoločnosť.

Podľa [1] je na verejnosti táto téma rozoberaná najmä v oblasti verejných financií, t. j. v súvislosti s dôchodkovými zdrojmi sprostredkovanými štátom. No sú tu ďalšie dva zdroje, ktoré by mali pomôcť v pokrytí potrieb starších občanov: rodina a tržne zhodnotené úspory. Odborníci uvádzajú, že vhodná kombinácia týchto troch zložiek by v budúcnosti mohla fixovať dôchodkové výdaje na trvale udržateľnej úrovni (*sustainable level*):

- *Štát/vláda* - Má dominantnú úlohu pri prelozdeľovaní finančných prostriedkov a služieb, a to v čase (t. j. v priebehu ľudského života) a aj medzi rodinami.
- *Rodina* - Opatrovateľské služby sú už rozšírené takmer po celom svete. Ide o starostlivosť poskytovanú rodinou. Súžitie detí s rodičmi alebo prarodičmi vypovedá nielen o rodinnej starostlivosti, ale i o ekonomickom postavení starších ľudí (vyskytuje sa napr. v Japonsku, v európskom Stredomorí, v štátoch kontinentálnej Európy), starostlivosť nerodinného charakteru (v Škandinávii, v USA existuje dokonca tržná ponuka platených opatrovatelských služieb).
- *Tržné investovanie úspor* - Penzijné fondy a účty majú rôznu váhu v rôznych krajinách. Využívajú sa hlavne tam, kde štátny dôchodkový zdroj už neposkytuje dostatočné množstvo financií.

Existuje určitý zjavný vzťah, ktorý medzi nimi platí: stupeň, ako sa môže staršia populácia spoliehať na rodinnú starostlivosť alebo na svoje súkromné našetrené zdroje závisí na štátnej podpore a naopak. Čo však neznamená, že jednotlivo by sa mohli nahradzovať. Nevyhnutnosť angažovania rodiny by sa mala prejaviť, keď štátna pomoc a nasporené financie už nepostačujú. Takisto spoliehať sa na sociálne služby, ktoré sú často drahé a nedostupné, nie je ideálne riešenie.

Dosiahnuť určité kompromisy v oblasti dôstojnej staroby je dôležitý problém dnešnej starnúcej generácie. Táto oblasť sa s trochou nadsádzky označuje ako medzigeneračná zmluva *(intergenerational constract)* a rozoberá to, ako nezaťažiť aktívnu a mladú generáciu, no zároveň uspokojiť potreby občanov v dôchodku.

Nejde o ľahkú úlohu, kedže priemerný vek voličov rastie, čo môže narušiť spoločenskú rovnováhu v prospech dôchodcov, zvýšiť náklady na prácu či narušiť pracovný trh. Ako možné riešenie sa uvádza Musgraveovo pravidlo, ktoré pracuje s tzv. FRP modelom ako rozdeliť náklady spravodlivo medzi generácie. Musgrave navrhoval riešenie pomocou pevne nastaveného pomeru, podľa ktorého by toto delenie prebiehalo. Zároveň by sa nesmelo v dlhodobom časovom horizonte hýbať so spomínaným pomerom, dokonca ani pri zmene politickej moci v krajine. Príspevky v tomto modeli sú upravené tak, aby pomer priemerného čistého zárobku aktívnej polulácie a priemerného čistého dôchodku zostal fixne konštantný. Toto pravidlo má však aj svoje podmienky:

- je aplikovateľné iba v krajinách, v ktorých dominuje štátny priebežný dôchodkový systém,
- ostane funkčné iba za predpokladu, že ceny v nákupnom koši mladšej a staršej generácie ostanú v rovnakom pomere,
- zaoberá sa spravodlivým rozdelením nákladov medzi generáciami, nie však v rámci nich.

1.2 Dôchodková reforma

Podľa Svetovej banky je najlepšie prikloniť sa k prístupu, ktorý sformuluje ciele a ukáže možné varianty, ako ich dosiahnuť. Na predstaviteľoch národa (zástupcov občanov) však zostáva, ktorú z nich si vyberú na následné uvedenie do praxe, aby štát fungoval. V [1] sa rozlišujú v súvislosti s týmito cieľmi tzv. primárne a sekundárne kritéria.

- *Primárne kritéria* hovoria o schopnosti dôchodkového systému. Správne nastavený systém by mal mať nasledujúce vlastnosti:
  - *Adekvátnosť (adequancy)* - Adekvátny dôchodkový systém zabezbečuje dávky, ktoré nielen zabraňujú chudobe v starobe (dávky aspoň za hranicou chudoby), ale aj poskytujú stabilitu spotreby v priebehu života.
  - *Finančná dostupnosť (affordability)* - Finančne dostupný dôchodkový systém zodpovedá finančným možnostiam človeka a spoločnosti tým, že jeho činnosť neobmedzuje iné potreby (ekonomické a sociálne) a nemá negatívne fiškálne dôsledky.
  - *Udržateľnosť (sustainability)* - Udržateľný dôchodkový systém má byť tak finančne zdravý, aby cez časový horizont za platnosti určitých racionálnych predpokladov o budúcom vývoji zostal efektívny (funkčný). Krízou poznačený horizont by bez zásahu do štátneho rozpočtu mohol spôsobiť vládam neudržateľné problémy. V súčasnosti je to kľúčovým kritériom v hodnotení dôchodkových systémov.
  - *Robustnosť (robustness)* - Robustný dôchodkový systém musí ustáť veľké výkyvy vrátane demografickej, ekonomickej a politickej volatility (miera kolísania hodnoty aktíva alebo jeho výnosovej miery).

- *Sekundárne kritéria* (nepriame kritéria) súvisia s podielom dôchodkového systému na ekonomickej stabilite a rozvoji danej krajiny. Posudzujú sa podľa toho, ako dôchodkový systém: (i) minimalizuje deformácie pracovného trhu, (ii) podporuje tvorbu úspor v populácii, (iii) prispieva k rozvoju finančných trhov. Ďalšími vlastnosťami, ktoré už nie sú reformnými kritériami, sú:
  - *Ekvita - férovosť* - Dôchodkový systém má za úlohu prerozdeľovať príjmy od viac zárobkovo činných osôb k účastníkom s nižšími príjmami so sociálnymi preferenciami (t. j. konzistentne). Zároveň od osôb mimo systému nevyžaduje príspevky alebo ich nezdaňuje.
  - *Predpovedateľnosť* - Poskytuje zákonom stanovené dávky, nie politicky či administratívne podmienené. Dávky sú imúnne voči riziku dlhovekosti, indexované ako ochrana proti inflácii a pred úrokovými či platovými zmenami.

Tieto kritéria sú spojené tzv. *dôchodkovým paradoxom.* To znamená, že splnenie jedného kritéria je na úkor dosiahnutia iných. Preto je nutné vypracovať istý kompromis, ktorý bude: (i) adekvátny voči finančnej prijateľnosti (vyššie penzie, vyšší príjem, ale štát v konečnom dôsledku stoja viac) a (ii) adekvátny voči udržateľnosti (nízke penzie vyvolajú tlak verejnosti na zvýšenie objemu penzie, pričom zlé riešenie môže uškodiť udržateľnosti daného dôchodkového systému).

1.3 Klasifikácia dôchodkových systémov

V súvislosti s klasifikáciou dôchodkových systémov sa predpokladá určitá znalosť základných pojmov, ktoré slúžia ako triediace znaky. Využitím [1] sformulujeme zopár základných charakteristík:

1. *Náhradový pomer (replacement rate)* pojednáva o životnej úrovni človeka po odchode do dôchodku. Sleduje zmenu životnej úrovne jedincov. Vyjadruje, akú časť svojho terajšieho zárobku alebo zárobku tesne pred odchodom do dôchodku dostane jednotlivec v dôchodku. V roku 2012 sa v ČR uvádza výška náhradového pomeru priebežného dôchodkového systému asi 40%.
   Rozlišujú sa: (i) *Hrubý náhradový pomer (gross replacement rate)* sa definuje ako pomer hrubých penzijných nárokov človeka oproti jeho hrubým zárobkom (teste pred odchodom do dôchodku alebo v priebehu pracovného života). Neberie však do úvahy dane, preto sa v praxi používa (ii).
   (ii) *Čistý náhradový pomer (net replacement rate)* sa definuje ako pomer čistých penzijných nárokov voči čistým príjmom (opäť tesne pred odchodom do dôchodku alebo v priebehu pracovného života). Na rozdiel od (i) sa rešpekntuje daň z príjmu a príspevky na sociálne poistenie. Meria ako efektívne sa nahrádzajú pracovné príjmy dôchodkovým systémom. V krajinách OECD ako Grécko, Maďarsko, Island či Holandsko dosahuje 100% a viac.

2. *Penzijný plán (pension plane, pension scheme)* je záväzná zmluva, ktorá môže mať formu zákona, pravidiel alebo dokumentov penzijného plánu alebo dokonca môže byť súčasťou pracovnej zmluvy. Primárne je určený pre dôchodkové účely, v ktorých môžu byť dávky vyplácané iba v legálne

určenom dôchodkovom veku. Normálny (oficiálny) dôchodkový vek bol pre rok 2010 v OECD v priemere 63,5 roka pre mužov a pre ženy 62,5 roka, no v roku 2050 OECD predpokladá nárast dôchodkového veku na 65 pre obe pohlavia. Okrem starobných dôchodkov môže penzijný plán ponúkať aj iné formy dávok, napr. pre prípad invalidity, nemoci či zabezpečenia pozostalých.

3. *Mandatorný (obligatórny, povinný) penzijný plán (mantadory pension scheme)* je povinný, definovaný pre skupinu účastníkov. Delí sa na (i) verejné (štátna spoluúčasť a administratíva cez verejný sektor), (ii) zamestnanecké (vstup do tohto plánu ja viazaný uzavretím pracovného pomeru) a (iii) osobné penzijné plány (s povinnými príspevkami účastníka aj keď s určitou možnosťou voľby).

4. *Dobrovoľný penzijný plán (voluntary pension scheme)* môže byť ustanovený na zamestnaneckej báze alebo na osobnej báze (nie je príliš obvyklý).

5. *Verejný penzijný plán (public pension scheme)* je financovaný priebežným spôsobom, možné nahradenie je fondovým spôsobom financovania alebo súkromnými penzijnými plánmi. Verejný penzijný plán je obvykle financovaný priebežne, no v niektorých krajinách nájdeme aj rôzne spôsoby financovania.

6. *Súkromný penzijný plán (private pension scheme)* nie je financovaný štátnou organizáciou, ale súkromným sektorom, väčšinou zamestnávateľom. Má tendenciu doplňovať alebo aj nahrádzať verejný dôchodkový systém.

7. *Zamestnanecký penzijný plán* je podmienený účasťou v pracovnom vzťahu (zamestnanec a zriaďovateľ).

8. *Osobný penzijný plán* je zriadený a financovaný inštitúciou, ktorá sa zaoberá poskytovaním penzií. Príspevky od zamestnávateľov sú dobrovoľné, účastníci si nezávisle vyberajú a nakupujú ponúkané dávky.

9. *Komerčné dôchodkové poistenie a anuitné trhy* - životné poistenie je väčšinou inverzný obraz penzijnej tématiky, príčinou je predmet poistenia (poistenie proti úmrtiu a poistenie dožitia). Jeho princípy sa častokrát uplatňujú aj v tejto oblasti poistenia.

1.4 Prístupy ku klasifikácii penzijných systémov

Táto téma je predmetom diskusie v rôznych častiach ľudskej spoločnosti a teda ju môžeme nájsť aj v rôzych písomných prameňoch. Kedže táto práca značne postupuje podľa [1], kde sa uvádzajú rôzne špecifikácie a klasifikácie dôchodkových systémov podľa rôznych inštitúcii, budeme jej teda podriaďovať aj následný výklad. Uvedieme tri druhy triedenia dôchodkových systémov a to nasledujúce.

1.4.1 Klasický prístup: tri piliere

Klasický prístup počíta s rozložením dôchodkovej záťaže na určité piliere *(pillars)*. Pôvodné dôchodkové systémy boli spracovávané ako trojpilierové: „ kde prvý pilier je verejne spravovaný s mandatornou účasťou a s prednostným určením redukovať chudobu medzi seniormi, druhý pilier je súkromne spravovaný mandatorný sporiaci systém a tretí pilier je dobrovoľný šetriaci systém“ (World Bank (1994)) pozri [6].

- *Prvý pilier* dôchodkových systémov je základným pilierom. Je tvorený mantadornými, verejne spravovanými (spravuje ich verejná či štátna inštitúcia) dôchodkovými systémami, ktoré sú financované priebežne. Väčšina verejnosti ich vníma ako štátne, no niekedy sú chápané ako sociálne poistenie či sociálne zabezpečenie. Jeho úlohou je zmenšiť podiel chudoby medzi občanmi, seniormi.

- *Druhý pilier* je úzko spojený s prvým pilierom, naviac ho aj doplňuje (preto sa často chápe ako doplnkový). Penzijné plány sú tu častejšie mandatorné ako dobrovoľné a sú spojenené so zamestnaním alebo výkonom práce. Sú to kolektívne systémy poistenia v podnikoch pre vlastných zamestnancov alebo v skupinách (komorách) spájajúce rozličné profesie. Výšky príspevkov v týchto penzijných plánoch bývajú často odvodené od výšky platu (zamestnanecký typ). Menej časté sú fondovo financované osobné penzijné plány (penzijné fondy). Niekedy sa tento pilier označuje ako kapitálový z dôvodu často vysokých objemov zdrojov vo fondoch, ktoré môžu slúžiť ako investičný kapitál.

- *Tretí pilier* je doplnkový pilier k predchádzajúcim dvom. Tvoria ho súkromné úspory na starobu. Uplatňujú sa v ňom osobné penzijné plány uzatvárané s poskytovateľom anuity, obvykle poisťovňa alebo penzijný fond. Tento fond ráta s osobnou iniciatívou občanov a účasť je dobrovoľná, pričom splátky financujú občania z vlastných zdrojov.

1.4.2 Svetová banka: päť pilierov

Svetová banka (WB) či ďalšie inštitúcie rozšírili vyššie uvedený trojpilierový systém na päťpilierové usporiadanie, ktoré má viac zodpovedať súčasným trendom v penziách. Nejde iba o doplnenie trojpilierového systému, ale o iné, nové stanovenie hlavných charakteristík nižšie uvedých pilierov.

- *Nultý pilier (WB)* sa považuje za prevenciu proti chudobe v podobe bezpríspevkovej sociálnej penzie alebo sociálnej pomoci poskytovanej vládou z daňových odvodov. V tomto pilieri je zapojená veľká časť občanov, aj nezapojených do ekonomiky štátu. Pilier poskytuje základný dôchodok pre každého občana v dôchodkovom veku alebo osobám s obmedzeným majetkom či príjmami. Podoba tohto piliera je úzko prepojená so stupňom sociálnych spoločenských vrstiev, s dostupnosťou finančných zdrojov a rezerv a prípadne s ďalšími opatreniami.

- *Prvý pilier (WB)* je akousi formou náhrady príjmu poberaného počas pracovného života. Charakterizuje sa ako povinné zamestnanecké alebo verejné dôchodkové poistenie. Používa princíp zásluhovosti, je zväčša mandatorný a priebežne financovaný. Nevýhodou tohto piliera sú vysoké príspevky, ktoré pôsobia negatívne v prípade nedostatočnej prípravy občana na dôchodok.

- *Druhý pilier (WB)* je rovnako povinný. Účastníci príspevkami investujú na vlastné sporiace účty. Niekedy sa charakterizuje ako súkromné penzijné sporenie. Často sa hovorí o príspevkovo definovaných mandatorných penzijných plánoch s rôznymi možnosťami investovania prostriedkov.

- *Tretí pilier (WB)* predstavuje pilier s dobrovoľnou účasťou so súkromnými sporiacimi či investičnými sporeniami. Dá sa považovať za dobrovoľné súkromné penzijné sporenie či poistenie. Je veľmi flexibilný a má viacero podôb. Niekde dokonca predstavuje hlavný zdroj seniorských príjmov.

- *Štvrtý pilier (WB)* sa prevažne opiera o účať rodiny a služieb (zdravotné, opatrovateľské a ubytovacie). Nemenšou časťou sú aj vlastné finančné a nefinančné aktíva (vlastnenie nehnuteľností, cenných papierov, hypotéky a pod.). Tento doplnkový pilier má značný podiel na záťaži verejných financií vo vyspelých krajinách. Svetová banka považuje za riešenie finančných možností a zaopatrenia v starobe väčšiu zodpovednosť rodiny a komunity.

1.4.3 OECD: tri vrstvy

Na rozdiel od predchádzajúcich kategorizácií, v tejto klasifikácii nie sú použité piliere, pretože OECD zavádza pojem vrstvy. Táto klasifikácia zavedená OECD je vhodná pre zostavovanie tabuľkových ukazovateľov pre jednotlivých členov. V prvej a druhej vrstve sa nachádzajú mandatorné, povinné systémy, a tretia zahrňuje dobrovoľné dôchodkové systémy.

- *Prvá vrstva (OECD)* má redistribučnú funkciu a zahŕňa dôchodkové programy, ktoré majú ako primárnu úlohu zaistiť určitý životný štandard pre jej členov a zachrániť seniorov pred chudobou. Poskytovateľom týchto mandatorných programov je väčšinou verejný sektor a často sú viacerých typov: *Základný penzijný plán* zaručuje fixnú penziu pre každého člena penzijného plánu alebo penziu vymeranú plošne na základe odpracovaných rokov (nezávisí na výške platov). *Smerovaný penzijný plán* distribuuje vyššie dávky chudobnejším účastníkom a majetnejším naopak. Existujú tri výpočty výšky platieb, ktoré závisia na: (a) výške priemerného platu, (b) všetkých príjmoch účastníka a (c) všetkých príjmoch a výške majetku. *Minimálna penzia* zabraňuje poklesu dôchodku pod minimálnu dolnú hranicu. Programy sú kombinované a prepojené so zamestnaneckými plánmi a vstup do nich je možný za istých podmienok.

- *Druhá vrstva (OECD)* je navrhnutá ako forma sporenia či poistenia. Opäť by sa mal zaistiť životný štandard účastníkov do miery zrovnateľnej s životnou úrovňou počas pracovného života. Programy sú väčšinou mandatorné a môžu mať rôznu štruktúru: *DB penzijný plán, DC penzijný plán, NDC penzijný plán a Bodový penzijný plán.*

- *Tretia vrstva (OECD)* je obrazom tretieho piliera trojpilierového a aj päťpilierového dôchodkového systému v predchádzajúcich klasifikáciach. V tejto vrstve sa nachádzajú súkromné penzijné plány.

1.5 Anuity

Pojem anuita v minulosti označoval aktívum, ktoré zaručovalo ročný príjem bez podmienky, že príjemca je nažive. V súčasnosti sa anuity odvodzujú od časového intervalu, na ktorý sú zjednané. Podľa [1] budeme formulovať rôzne druhy anuít, a to:

- *Anuita s pevnou dobou splatnosti* je postupnosť vopred dohodnutých platieb na predom určenú dobu, bez ohľadu na to, či príjemca je nažive alebo nie. V prípade úmrtia sa anuita stáva časťou pozostalosti. Podobá sa kupónovým dlhopisom, no na rozdiel od dlhopisu sú platby vyplácané bez úrokov. Suma úrokov je vyplácaná v dobe splatnosti anuity. Existuje aj prípad anuity (anuita s garanciou), kedy je stanovený minimálny počet rokov, počas ktorých je anuita vyplácaná a v prípade smrti pred touto dobou sa anuita stáva časťou pozostalosti príjemcu. Často je kladená otázka, koľko sa celkovo nasporí do konca trvania anuity. Táto čiastka je označovaná ako *koncová hodnota (future value FV)* tohto sporenia a je daná:

$$FV(K, r, N) = K(1+r)^{(N-1)} + K(1+r)^{(N-2)} + \cdots + K = K\frac{(1+r)^N - 1}{r}$$

  Počiatočná hodnota (present value PV) môže zaujímať jedinca, ktorý dovŕšil dôchodkový vek a začne špekulovať, či jeho úspory stačia na výplaty danej anuity. Základnou operáciou pri výpočte súčasnej (počiatočnej) hodnoty anuity je diskontovanie. Aplikuje sa na všetky príslušné finančné toky pomocou predpokladanej úrokovej miery v počiatočnom čase zloženým úročením. Parametre tejto funkcie sú: T - počet období alebo dĺžka anuity, C - splátka na konci každého obdobia a fixná úrokova miera - r.

$$PV(C, r, T) = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \dots \frac{C}{(1+r)^T} = C\frac{1-(1+r)^{-T}}{r}$$

  V súvislosti s počiatočnou a koncovou hodnotou anuít sa udáva tzv. *konverzný koeficient* α (t. j. pomer medzi koncovou hodnotou jednotkového sporenia $FV(1, r, N)$ a počiatočnou hodnotou jednotkovej dôchodkovej spotreby $PV(1, r, T)$). Interpretácia pre konverzný koeficient: koľkokrát môže byť vyššia alebo nižšia anuitná platba (dávka) ako sporiaca platba (príspevok) pri daných dĺžkach kumulačnej a dekumulačnej fázy. Z predchádzajúcich rovností dostávame:

$$C = \frac{FV(1, r, N)}{PV(1, r, T)}K = \alpha K = \frac{(1+r)^N - 1}{1-(1+r)^{-T}}K$$

- *Životná anuita* je protipríklad k anuite s pevnou dobou splatnosti. Vyplácanie splátok je podmienené dobou trvania života. Ak si jedinec zaplatí cenu anuity alebo poistné (obvykle jednorazovo), je mu príslušnou inštitúciou pravidelne vyplácaný určitý príjem až do okamihu smrti vlastníka. Aj v tomto prípade existuje prípad anuity (dočasná anuita), kedy je stanovený maximálny počet rokov, počas ktorých je auita vyplácaná. Zaujímavou otázkou je modelovanie životných anuít, kde nejde o pevnú dobu vyplácania splátok, ale o náhodný počet ostávajúcich rokov života. Nedá sa preto uvažovať o počiatočnej hodnote, ale iba o strednej počiatočnej hodnote hodnoty životných anuít ako kapitálovej čiastke $\mathrm{E}(PV_x)$, ktorá umožňuje výplatu anuít iba v priemere cez väčšie portfólio (kmeň). Presnejšie ide o stredné hodnoty náhodných veličín, ktoré vznikajú kumuláciou náhodného počtu finančných tokov diskontovaných k okamihu výpočtu. Životné anuity sa modelujú v diskrétnom aj v spojitom čase.

- *Indexované anuity* sa používajú na výpočet vývoja výšky splátky pre určité indexy rôznych druhov. Môže to byť každoročné navyšovanie výšky splátky predom dohodnutým percentom (fixne navyšovaná anuita), alebo inflačne indexovaná anuita odzrkadľuje vývoj inflácie na výške platieb a investičná anuita súvisí s investovaním do akcií, a teda index je viazaný na výkonnosť akciových trhov.

V prvých dvoch spomenutých prípadoch sa môže vopred dohodnúť výška splátky v postupnosti platieb. V takom prípade ide o fixnú anuitu. Tu dochádza k rozporu vo výške mesačnej (alebo ročnej a pod.) splátky medzi mužmi a ženami, keďže ženy majú vyššiu strednú dĺžku života, ich splátky teda budú nižšie ako v prípade mužov. Musí sa však dávať pozor na rôzne antidiskriminačné tendencie (v procese riešenia je diskriminácia medzi pohlaviami a rasová diskriminácia). Zvláštnu kategóriu predstavujú anuity týkajúce sa viacerých životov naraz. Príkladom môže byť združená anuita, ktorá sa vypláca, kým sú manželia alebo partneri nažive. Anuita pre posledného žijúceho je vyplácaná, kým je aspoň jeden z nich nažive. Alebo jednostranná anuita pre žijúceho, ktorá je vyplácaná od smrti prvého partnera do smrti toho druhého.

2. Teória úžitku

Teória úžitku (teória hodnoty alebo teória rovnováhy spotrebiteľa) sa zaoberá skúmaním správania jedného typu spotrebiteľov, ktorý sa pri nákupe dostupných komodít usiluje o maximalizáciu svojho úžitku. Jednoducho povedané, pri podmienke rovnakých výdajových možností všetkých spotrebiteľov účastník nakupuje súbor komodít poskytujúcich mu čo najväčší úžitok. Maximalizácia úžitku sa odohráva v prostredí, kde účastník (spotrebiteľ) musí vychádzať z cien komodít, ktoré sú tvorené v rámci tržného prostredia nezávisle na jeho vôli, a kde musí dbať o veľkosť svojho príjmu, ktorý má na tento účel k dispozícii a nemal by ho prekročiť.

2.1 Všeobecný pohľad na teóriu úžitku

V tejto časti sa zameriame na odvodenie *úžitkovej funkcie (utility function)* podobne ako v [3]. Úžitkovú funkciu môžeme chápať aj ako funkciu, ktorá zachytáva subjektívne vnímanie peňazí. Najprv uveďme relácie, z ktorých si dokáže investor (spotrebiteľ) vybrať pri porovnávaní subjektívneho úžitku z rôznych kombinácií statkov. Predpokladáme $n+1$ statkov, označíme $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ kombináciu statkov, kde x_i značí množstvo i-teho statku. Zvoľme ľubovoľnú dvojicu x a y z uzavretej konvexnej množiny $S \subset R^n$. Uvažujme, že investor zvolí jednu z týchto relácií:

1. $x \succeq y$ preferuje neostro x pred y, x je aspoň tak preferované ako y,
2. $x \succ y$ (preferuje neostro x pred y), ak $x \succeq y$, ale nie $y \succeq x$,
3. $x \sim y$ (x a y sú indiferentné), ak $x \succeq y$ a $y \succeq x$,
4. $y \succeq x$ a $y \succ x$ analogicky.

Ďalej predpokladajme, že tieto relácie spĺňajú axiómy (niekedy označované ako *von Neumann-Morgensternove* axiómy)

(i) *úplnosť* $\forall x, y \in S$ platí buď $x \succeq y$ alebo $y \succeq x$

(ii) *relfexivita* $\forall x \in S$ platí $x \succeq x$

(iii) *tranzitivita* ak platí $x \succeq z$ a $z \succeq y$, potom platí $x \succeq y$

(iv) *spojitosť* $\forall x \in S$ sú množiny $\{\eta \in S : x \succ \eta\}$ a $\{\tau \in S : \tau \succ x\}$ otvorené

potom podľa [3] existuje spojitá reálna funkcia U, pre ktorú platí

$$U(x) > U(y) \Leftrightarrow x \succ y \qquad U(x) = U(y) \Leftrightarrow x \sim y$$

Funkciu U nazveme ordinálnou úžitkovou funkciou. Jej číselné hodnoty nemajú žiadnu vypovedajúcu hodnotu, no táto funkcia zachováva vzťah preferencie (poradie) medzi kombináciami statkov.

Na teóriu úžitku môžeme pozerať aj z pohľadu kardinálnych úžitkových funkcií. Pri tejto myšlienke zohľadňujeme nielen poradie, ale aj číselné hodnoty, ktoré udávajú hodnoty o veľkosti úžitku. Pri definovaní kardinálnej úžitkovej funkcie musíme zaviesť pojem *hra (lotéria)*. Hrou nazveme objekt $L = \{X, \pi\}$, ktorý tvorí dvojica $X = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ vektor kombinácií statkov a $\pi = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n)$, $\sum_{i=0}^{n} \pi_i = 1$ im náležiace pravdepodobnosti. Zavedením hier rozšírime úvahy o neistotu, ktorú nesie stochastický vektor π. Uvažujme o množine hier, na ktorej existujú relácie $\succeq, \succ, \sim$ splňajúce axiómy (i), (ii) a (iii).

(v) *nezávislosť*: Nech $L_1 = \{(x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n), \pi\}$ a $L_2 = \{(x_0, x_1, \ldots, z, \ldots, x_n), \pi\}$. Ak $x_i \sim z$ potom $L_1 \sim L_2$.

(vi) *spojitosť 2*: Nech $x_1 \succeq x_2 \succeq x_3$. Potom existuje pravdepodobnosť π taká, že platí $x_2 \sim \{(x_1, x_3), (\pi, 1-\pi)'\}$. Ak naviac nie je $x_1 \sim x_3$, potom je táto pravdepodobnosť určená jednoznačne.

(vii) *dominancia*: Uvažujme o dvoch hrách s rôznymi pravdepodobnosťami $L_1 = \{(x_1, x_2), (\pi_1, 1-\pi_1)'\}$ a $L_2 = \{(x_1, x_2), (\pi_2, 1-\pi_2)'\}$. Ak platí $x_1 \succ x_2$, potom $L_1 \succ L_2$ práve vtedy, keď $\pi_1 > \pi_2$)

[3] Za platnosti axiómov (i)-(vii) investor (spotrebiteľ) s úžitkovou funkciou $\widetilde{U}$ si zvolí medzi hrami $L_1, L_2, \ldots$ tú, ktorá mu prináša najvyšší očakávaný účinok.

$$\sum_{i=0}^{n} \pi_i \cdot \widetilde{U}(x_i) = E\,\widetilde{U}(x).$$

Pričom axiómy (vi) a (vii) zaručujú existenciu tzv. *kardinálnej úžitkovej funkcie*. Pre hru $L = \{X, \pi\}$ označme $u(L) := \sum_{i=0}^{n} \pi_i \cdot \widetilde{U}(x_i)$. Táto funkcia sa nazýva *(von Neumann-Morgensternová) úžitková funkcia*. Dá sa zovšeobecniť, ak neberieme do úvahy stochastický vektor pravdepodobností π, ale hustotu $\pi(x)$.

Teraz si uvedieme základnú definíciu úžitkovej funkcie: Nech I je interval. Neklesajúcu funkciu $u: I \to R$ nazveme úžitková funkcia. Predpoklad neklesajúcej funkcie zaručuje, že s rastúcim majetkom investorovi neklesá úžitok. Premenná $u(W)$ bude spravidla značiť úžitok z kapitálu (majetku) vo výške W.

2.2 Teória penzijného dopytu a úžitkovosti

2.2.1 Dopyt po penziách

V tejto časti predstavíme ekonomický pohľad na penzie podľa [1], aplikujeme úžitkové funkcie a ekonomickú teóriu dopytu po penziách. Prvýkrát začína modelovo skúmať dopyt po penziách Yaari(1965). Ako prvý zohľadnil náhodnosť (neurčitosť) dĺžky ľudského života. Na tento fakt sa môžeme pozerať aj ako na náhodnosť doby (času), kedy sa vypláca životná anuita. Jeho výsledky boli pozoruhodné, kedže v praxi sa deje pravý opak. Konštatuje, že za štandardných podmienok je optimálna maximálna možná „anuitizácia“, teda človek by mal preferovať penzijné produkty pred okamžitou spotrebou. Tento paradox spočívajúci v rozpore medzi teóriou a praxou je často označovaný ako penzijný hlavolam.

Jeho výsledok sa dá ľahko ukázať na modeli, v ktorom sa predpokladá splnenie určitých podmienok. Model nezohľadňuje skoro žiadne neurčitosti, okrem jedinej náhodnosti, ktorou je dĺžka ľudského života. Jedinec uvažujúci o penzii má v čase 0 (dátum dosiahnutia dôchodkového veku, kedy je jedinec nažive s pravdepodobnosťou 1) kapitál W_0 s fixnou úrokovou mierou r medzi časmi 0 a 1, kde dožitie do času 1 nie je isté (s pravdepodobnosťou $p < 1$) a penzia sa týka výlučne týchto dvoch časových bodov. Kapitál W_0 môže spotrebovať rôznymi spôsobmi, napr. na priamu spotrebu v časoch 0 (c_0) a 1 (c_1), investovaním na jedno obdobie do sporiaceho produktu (dlhopisu) a časť prostriedkov sa využije na nákup životnej anuity. Životná anuita vypláca čiastku A v čase 0 a s pravdepodobnosťou p pri dožití do času 1 vyplatí druhú platbu vo výške A. Obe tieto platby sú spotrebované okamžite. Neuvažujeme však o investícii do rizikových aktív. Základnými otázkami, na ktoré hľadáme riešenie boli: (1) Koľko spotrebovať v jednotlivých časoch? a (2) Koľko prostriedkov použiť na nákup anuity?

Vychádzame z rovnice $A + p \cdot \frac{A}{1+r} = 1$ (pozri [1]), z ktorej vieme vyjadriť výšku predlehotnej anuitnej platby A na jednotkový počiatočný kapitál. Teda $A = \frac{1+r}{1+r+p}$. Predpokladajme, že jedinec použije $\upsilon \cdot W_0$ na nákup penzie, pre $0 \leq \upsilon \leq 1$ a ostane mu zatiaľ nevyužitý kapitál vo výške $(1 - \upsilon) \cdot W_0$. Odtiaľ výška anuitnej platby bude

$$A \cdot \upsilon \cdot W_0 = \frac{(1+r) \cdot \upsilon \cdot W_0}{1+r+p}. \tag{2.1}$$

V čase 0 môže jedinec maximálne spotrebovať čiastku (pozri [1])

$$\frac{(1+r) \cdot \upsilon \cdot W_0}{1+r+p} + (1-\upsilon) \cdot W_0 = A \cdot \upsilon \cdot W_0 + (1-\upsilon) \cdot W_0 \leq W_0 \tag{2.2}$$

pre $\upsilon > 0$. Yaariho teória spočíva v analýze pomeru využitia kombinácie dlhopisu a životnej anuity, pričom využívanie iba jedného druhu sporenia (dlhopisu) limituje spotrebu. Daná analýza sa dá zovšeobecniť pre situácie s ľubovoľným konečným počtom období. Rozšírenie spotrebných oblastí môžeme dosiahnuť použitím odložených anuít v súvislosti s existenciou dokonalého anuitného trhu.

Tento model nezohľadňuje predpoklad existencie dokonalého anuitného trhu (v praxi nerealizovateľný) a nezohľadňuje ani osobné preferencie jedinca. Jedinci však v praxi preferujú rôzne budúce spotrebné stratégie v zmysle indiferenčných kriviek, ktoré sú širšie skúmané v teórii úžitku. V jednoduchosti sa dá zhrnúť, že pre každého jedinca existuje určitý systém indiferenčných kriviek často definovaných podľa vhodnej úžitkovej funckie, kde všetky body ležiace na rovnakej indiferenčnej krivke sú pre tohto jedinca prijateľné.

2.2.2 Úžitkovosť penzií

V modeloch spotreby zahrňujúcich životné anuity zohráva podstatnú úlohu averzia voči riziku u daného jedinca. Z tohto dôvodu budeme v rámci všoobecnej teórie úžitku študovať iba tie úžitkové funkcie, ktoré túto averziu zohľadňujú. Základom teórie úžitku je úžitková funkcia $u(c)$, ktorá transformuje hodnotu c, ktorú má jedinec k dispozícii vo forme majetku alebo peňazí k prípadnej spotrebe na vlastný úžitok tohto jedinca. Jedná sa o tzv. úžitkový rating jedinca. Jednou z najpoužívanejších úžitkových funkcií je logaritmická úžitková funkcia

$$u(c) = \ln(c)\ (c > 0), \tag{2.3}$$

pretože je rastúca a konkávna, čo dobre charakterizuje efekt marginálneho úžitku: rast úžitku z peňazí či majetku je spojený obvykle s rastom ich objemu. S vyšším objemom však klesá tempo rastu, čo môžeme demonštrovať na príklade sociálnych dávok vyplácaných paušálne. Tieto dávky majú malý prírastok na úžitku pre osoby s vysokými príjmami, no pre jedincov s nízkymi príjmami častokrát životne dôležitý. Dá sa konštatovať, že daný úžitkový rating zostane rovnaký pri násobení úžitkovej funkcie ľubovoľnou kladnou konštantou a pri pripočítaní ľubovoľnej kladnej konštanty.

Vo všeobecnom kontexte úžitkových funkcií sa požaduje platnosť nasledujúcich vlastností $u(c)$ (pozri [1]):

$$u'(c) > 0, u''(c) < 0, u'''(c) > 0, \text{ pre } c > 0. \tag{2.4}$$

Uvedieme interpretáciu daných nerovností v zmysle oceňovania úžitku spotreby jednotlivca pri dopyte po dôchodkoch.

1. Nerovnosť $u'(c) > 0$, teda prvá derivácia musí byť kladná. Znamená to, že požadujeme rastúcu úžitkovú funkciu. Táto úžitková funkcia preferuje u jedincov vyššiu spotrebu pred nižšou. Niekedy to však nemusí byť jednoduché u jedincov v pokročilom veku.

2. U nerovnosti $u''(c) < 0$ požadujeme, aby druhá derivácia bola záporná. Z analytického hľadiska to vyjadruje konkávnosť úžitkovej funkcie, ktorá vyjadruje averziu jedinca voči riziku. Jedinec s touto funkciou by si pri výbere medzi dvoma možnosťami s rovnakým priemerným úžitkom volil alternatívu s menším relatívnym rizikom. Pojem *riziková prirážka* alebo *prémia za riziko* znamená, že jedinec je za danú istotu ochotný podstúpiť riziko v porovnaní s rizikovejšou druhou možnosťou na spotrebu nižšiu o danú položku.

3. Posledná nerovnosť $u'''(c) > 0$, t. j. kladná tretia derivácia, vyjadruje obozretnosť jedinca s touto úžitkovou funkciou voči riziku. Analýza druhej derivácie u'', ktorá je podľa druhej nerovnosti záporná, ale podľa tretej nerovnosi rastie, ukazuje, že u'' v absolútnej hodnote klesá a jedinec s touto úžitkovou funciou „obozretne toleruje rast rizika“ vyvolaný rastom spotreby.

Znamienko v druhej derivácii úžitkovej funkcie hrá dôležitú rolu: Ak je u'' záporná $\Rightarrow$ úžitková funkcia je konkávna $\Rightarrow$ prémia za riziko je kladná a jedinec je averzný voči riziku. Ak je u'' kladná $\Rightarrow$ úžitková funkcia je konvexná $\Rightarrow$ prémia za riziko je záporná a jedinec nie je averzný voči riziku, ale naopak riziko vyhľadáva. Ak je $u'' = 0 \Rightarrow$ úžitková funkcia je lineárnou funkciou $\Rightarrow$ prémia za riziko je nulová a jedinec je neutrálny vzhľadom k riziku.

V rámci penzií sa častokrát využíva úžitková funkcia (ako uvádza napr. [1]) nazývaná skratkou CRRA (*constant relative risk aversion*) tvaru:

$$u(c) = \begin{cases} \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}, & \gamma > 0,\ \gamma \neq 1, \\ \ln(c_i), & \gamma = 1 \end{cases} \tag{2.5}$$

pre $c > 0$ a γ je pevne zvolená či odhadnutá konštanta. Postupným derivovaním (2.5) sa ľahko preukážu požadované vlastnosti $u(c)$ v (2.4). Pretože $u'(c) = c^{-\gamma} > 0$; $u''(c) = -\gamma \cdot c^{-1-\gamma} < 0$ a $u'''(c) = -\gamma \cdot (-1-\gamma) \cdot c^{-2-\gamma} > 0$ pre $\forall \gamma$, $c > 0$. Pre logaritmickú úžitkovú funkciu plynie (2.4) z vlastností logaritmu. Relatívna averzia voči riziku označovaná ako RRA(c) (*relative risk aversion*) a definovaná ako:

$$RRA(c) = -\frac{u''(c) \cdot c}{u'(c)} = \gamma \tag{2.6}$$

je skutočne v prípade (2.5) konštantná (teda rovná konštante γ).

Pokúsime sa aplikovať úžitkové funkcie na teóriu penzijného dopytu. Opäť budeme uvažovať o jedincovi s kapitálom W_0, ktorý má prístup na dokonalý anuitný trh (umožňuje okamžite investovať v ľubovoľnom množstve do životných anuít s ľubovoľnými dobami odkladu) a klasický anuitný trh (umožňuje okamžite investovať v ľubovoľnom množstve do fixných životných anuít). Základnou úlohou v tomto prípade je určiť veľkosť kapitálu (*penzijný kapitálový ekvivalent, annuity equivalent wealth* AEW_0), pri ktorom bude mať rovnakú výšku úžitku, ako keď bude sporiť investovaním do dlhopisov bez využitia penzie. Teda bude mať prístup iba na dokonalý dlhopisový trh. Podľa Yaariho teórie zrejme musí platiť vzťah $AEW_0 > W_0$.

3. Optimalizačné úlohy

3.1 Formulácia problému

V nasledujúcej úvahe musíme upraviť formuláciu predchádzajúcej úlohy. Postupovať budeme podobne ako v [1]. Uvažujeme teda o životných anuitách a penzijnej spotrebe, ktoré sa odohrávajú v dlhších časových výhľadoch (v priemere dlhších ako desať rokov). Budeme sledovať stránky penzijného úžitku, ako napr. preferencia súčasnej pred budúcou spotrebou. Vyššie uvedený model, ktorý uvažoval iba o časoch 0 a 1, musíme rozšíriť takto: Budeme brať do úvahy jedinca, ktorému v čase 0 (napr. dosiahnutie dôchodkového veku 65 rokov) oceňujeme jeho úžitok z budúceho toku spotrebných služieb $c_0, c_1, \ldots, c_T$. Tento tok spotrebných služieb je zabezpečený investovaným kapitálom W_0 v čase 0 do dlhopisov, vrátane klasických sporení a životných anuít. Čas T (počet budúcich spotrieb) je náhodný a môžeme ho považovať za náhodnú veličinu, ktorá označuje ostávajúcu dobu života jedinca a spotreba c_t v čase t je uskutočnená iba pri dožití jedinca do času t. Jedinec pri rozhodovaní na základe jeho úžitkovej funkcie $u(c)$ môže v ľubovoľnom čase oceniť svoj úžitok $u(c_t)$ zo spotreby c_t. V konečnom dôsledku však musí zohľadniť úžitok z usporiadaného súboru spotrebných služieb v čase. Vo všeobecnosti sa tento problém formuluje ako optimalizačná úloha, ktorá maximalizuje stredný úžitok účelovej funkcie

$$v(c_0, c_1, \ldots, c_T) \ = \ \mathrm{E}_0\{u(c_0, c_1, \ldots, c_T)\} \tag{3.1}$$

cez prípustné budúce toky spotrebných služieb $c_0, c_1, \ldots, c_T$ dosiahnuté z počiatočného kapitálu W_0 a pre vhodne definovaný úžitok zo spotreby $u(c_0, c_1, \ldots, c_T)$. Výpočet strednej hodnoty sa uskutoční na základe informácií známych v čase 0.

Na tomto jednoduchom prípade budeme definovať účelovú funkciu označovanú ako v^{GD} *(geometric discounting)*:

$$v^{GD}(c_0, c_1, \ldots, c_T) = \sum_{i=0}^{T} \delta^i \cdot s_i \cdot u(c_i), \tag{3.2}$$

kde konštanta $\delta \in (0, 1)$, s_i označuje pravdepodobnosť dožitia z času 0 do času i a $u(\cdot)$ je jednoargumentová úžitková funkcia daného jedinca. Táto úloha sa dá rôzne modifikovať, no v tejto práci sa tomu nebudeme venovať. Od účelovej funkcie v^{GD} požadujeme, aby:

(1) rešpektovala princíp aditívnej separability v čase (celkový úžitok môžeme vhodne zložiť z úžitkových hodnôt pre spotreby v jednotlivých budúcich časoch);

(2) pomocou geometrického diskontovania zohľadňovala časové preferencie jedinca, kde konštanta δ zohľadňuje „spotrebnú netrpezlivosť“, teda subjektívny faktor, ktorý umožní porovnať v čase 0 úžitky z budúcej spotreby; δ pre jedinca, ktorý preferuje rýchlejšiu spotrebu, je nižšia ako pre jedinca ochotného odložiť alebo rozložiť spotrebu do neskoršieho obdobia;

(3) vyjadrovala strednú hodnotu ako vážený priemer s váhami s_i.

3.2 Riešenie problému

Hlavnou úlohou tejto práce je riešenie optimaližačného problému podľa [1], kedy maximalizujeme všeobecnú účelovú funkciu

$$\sum_{i=0}^{T} \delta_i \cdot s_i \cdot u(c_i) \tag{3.3}$$

cez množinu prípustných budúcich stratégií spotrebných služieb $c_0, c_1, \ldots, c_T$, ktoré možno dosiahnuť z počiatočného kapitálu W_0. V tejto práci sa zameriame na maximalizovanie účelovej funkcie [1]

$$v^*(c_0, c_1, \ldots, c_T) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{T} \delta_i \cdot s_i \cdot \frac{c_i^{1-\gamma}}{1-\gamma}, & \gamma \neq 1, \gamma > 0, \\ \sum_{i=0}^{T} \delta_i \cdot s_i \cdot ln(c_i), & \gamma = 1. \end{cases} \tag{3.4}$$

V tomto prípade sme volili úžitkovú funkciu CRRA, ktorá v praxi patrí k najpoužívanejším.

Za zodpovedajúcu diskontnú postupnosť $\{\delta_i\}$ môžeme považovať jednu z postupností pre $\beta > 0, \xi, \eta > 0$:

$$\begin{gathered} \{\delta^i\}, \quad i = 0, 1, \ldots, T; \\ \begin{cases} 1, & i = 0 \\ \{\beta\delta^i\}, & i = 1, \ldots, T \end{cases}; \\ \frac{1}{(1+\eta i)^{\xi/\eta}}, \quad i = 0, 1, \ldots, T. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Budúce stratégie budeme určovať v závislosti na type trhu a výške výnosov (úrokových mier) pri investovaní na konkrétnych trhoch. Budeme zvažovať uvedený problém pre tieto trhy: dokonalý dlhopisový trh PB, anuitný trh PA a klasický anuitný trh CA. Vždy však budeme uvažovať o rovnakej úžitkovej funkcii. Označme r_i ako ročný výnos v roku i. Splatnú čiastku na konci roku i z každej jednotky počiatočného kapitálu dostaneme ako

$$R_i = \prod_{j=1}^{i} (1 + r_j)^j, \; R_0 = 1, \tag{3.6}$$

kde R_i^{-1} vyjadruje potrebný počiatočný kapitál pre jednu jednotku kapitálu na konci roku i.

Zostavením podmienok pre jednotlivé typy trhov prechádzame k riešeniu optimalizačnej úlohy s viazanými extrémami. Táto úloha sa najčastejšie rieši pomocou Lagrangeovej funkcie a Lagrangeových multiplikátorov, ktoré využijeme v riešení problému. V riešení musíme zohľadniť správanie investora na jednotlivých trhoch a účelovú funkciu na podmnožinách množiny hodnôt konštanty γ.

Vetu o Lagrangeových multiplikátoroch (veta o viazanom extréme) môžeme nájsť napríklad v [5]. Lagrangeovu funkciu $L(c_i, \lambda_k)$, kde λ_k sú Lagrangeove multiplikátory ($k \in (1, K), i \in (0, T), K < T$), vytvoríme ako:

$$L(c_0, c_1, \ldots, c_T, \lambda) = v^*(c_0, c_1, \ldots, c_T) - \sum_{j=1}^{K} \lambda_j \cdot g_j(c_0, c_1, \ldots, c_T), \tag{3.7}$$

ak $v^* \in C^1$ a ohraničenia $g_j \in C^1$.

3.2.1 Optimálna spotreba v rámci dokonalého dlhopisového trhu PB

V tejto časti budeme hľadať maximálnu hodnotu účelovej funkcie v^* cez spotrebné stratégie $c_0, c_1, \ldots, c_T$ na dokonalom dlhopisovom trhu. Zostavme podmienku, ktorú musia spĺňať $c_0, c_1, \ldots, c_T$ investované iba do sporenia. Hodnota c_i vyjadruje výšku majetku alebo peňazí, ktorým daný jedinec disponuje na konci roku i. Teda súčet zdiskontovaných $c_i > 0$ do roku 0 sa musí rovnať počiatočnému kapitálu, ktorý má daný jedinec k dispozícii v čase 0 na vloženie do sporenia (spotrebné obmedzenie).

$$W_0 = \sum_{j=0}^{T} c_j \cdot R_j^{-1}. \tag{3.8}$$

Odtiaľ dostaneme počet ohraničení $K = 1$ a podmienku

$$g_1 = \sum_{j=0}^{T} c_j \cdot R_j^{-1} - W_0 = 0. \tag{3.9}$$

Odtiaľ vidíme, že budeme riešiť úlohu s viazaným extrémom na uzavretej krivke.

(a) Pre $\gamma \neq 1$ má Lagrangeova funkcia tvar

$$L_{PB} = \sum_{i=0}^{T} \delta_i \cdot s_i \cdot \frac{c_i^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \lambda(W_0 - \sum_{i=0}^{T} c_i \cdot R_i^{-1}). \tag{3.10}$$

Stacionárny bod c^* funkcie L_{PB} musí splňovať (3.9), t. j. $\frac{\partial L_{PB}}{\partial \lambda} = 0$ a

$$\frac{\partial L_{PB}}{\partial c_i} = \delta_i \cdot s_i \cdot c_i^{-\gamma} - \lambda \cdot R_i^{-1} = 0 \tag{3.11}$$

$\forall i = 0, 1, \ldots, T$. Riešime teda sústavu $T + 2$ rovníc s neznámimi $c_0, c_1, \ldots, c_T, \lambda$. Z definície vieme, že $\delta_0 = s_0 = R_0 = 1$. Dosadením do rovnice (3.11) pre $i = 0$ dostaneme $\frac{\partial L_{PB}}{\partial c_0} = c_0^{-\gamma} - \lambda = 0$. Odtiaľ vyjadríme multiplikátor $\lambda = c_0^{-\gamma}$, ktorý dosadíme do (3.11)

$$\frac{\partial L_{PB}}{\partial c_i} = \delta_i \cdot s_i \cdot c_i^{-\gamma} - c_0^{-\gamma} \cdot R_i^{-1} = 0 \tag{3.12}$$

a dostaneme vyjadrenie c_i ako funkciu závislú na premennej c_0

$$c_i = c_0 \cdot (s_i \cdot \delta_i \cdot R_i)^{-\gamma} \text{ pre } i = 0, 1, \ldots, T. \tag{3.13}$$

Zostáva nám vyjadriť, čomu sa rovná posledná premenná c_0 v sústave rovníc (3.9) a (3.11). Využijeme pritom rovnosť (3.8), do ktorej dosadíme vyjadrené c_i z (3.13)

$$W_0 = \sum_{j=0}^{T} c_0 \cdot (s_j \cdot \delta_j \cdot R_j)^{1/\gamma} \cdot R_j^{-1} \tag{3.14}$$

a dostaneme vyjadrenie pre c_0:

$$c_0 = \frac{W_0}{\sum_{j=0}^{T} (s_j \cdot \delta_j \cdot R_j^{1-\gamma})^{1/\gamma}}. \tag{3.15}$$

Spätným dosadením c_0 z (3.15) do vzťahu (3.13) dostaneme vyjadrenie optimálnej spotreby, t. j. stacionárny bod funkcie $v^*(c_0, c_1, \ldots, c_T)$ pre $\gamma \neq 1$ ako

$$c_i^* = \frac{W_0 \cdot (s_i \cdot \delta_i \cdot R_i)^{1/\gamma}}{\sum\limits_{j=0}^{T} (s_j \cdot \delta_j \cdot R_j^{1-\gamma})^{1/\gamma}} \text{ pre } i = 0, 1, \ldots, T \tag{3.16}$$

Zostáva ukázať, že v bode c^* je globálne maximum funkcie $v^*(c_0, c_1, \ldots, c_T)$. Existenciu maxima dokážeme aplikovaním úpravy: $\arg\min(-f) = \arg\max f$ a podľa [4] sa v bode c^* nachádza maximum funkcie $v^*(c_0, c_1, \ldots, c_T)$, ak Hesián funkcie $-L_{PB}$ je pozitívne definitný (teda v bode c^* je minimum funkcie $-v^*(c_0, c_1, \ldots, c_T)$). Definíciu Hesiánu a pozitívne definitnej matice nájdeme v [4]. Hesián H zostavíme ako maticu druhých derivácií funkcie $-L_{PB}$ podľa c_i pre $i = 0, 1, \ldots, T$. Keďže $\frac{\partial^2 - L_{PB}}{\partial c_i c_j}$ pre $i \neq j$ je 0 a pre $i = j$ je $s_i \cdot \delta_i \cdot c_i^{-\gamma-1} \cdot \gamma$ dostávame

$$H = \begin{pmatrix} s_0 \cdot \delta_0 \cdot c_0^{-\gamma-1} \cdot \gamma & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & s_i \cdot \delta_i \cdot c_i^{-\gamma-1} \cdot \gamma & 0 & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & s_T \cdot \delta_T \cdot c_T^{-\gamma-1} \cdot \gamma \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

kde $\gamma > 0,\ s_i,\ c_i,\ \delta_i > 0$ pre $\forall i = 0, 1, \ldots, T$ a teda prvky na diagonále sú kladné. Odtiaľ vieme, že v bode c^* je minimum práve vtedy, keď všetky vlastné čísla matice H sú kladné. Z definície vlastných čísel vieme, že pre každé vlastné číslo $\lambda_i,\ i = 0, 1, \ldots, T$ matice H platí $H - I_{T+1}\lambda_i = 0$. Konkrétne pre diagonálnu maticu D platí, že vlastné čísla sú prvky na hlavnej diagonále matice D. Zistili sme, že vlastné čísla matice H sú kladné, t. j. matica H je pozitívne definitná. Dokázali sme, že bod c^* je minimum funkcie $-v^*(c_0, c_1, \ldots, c_T)$. Z toho plynie, že bod c^* je argumentom maxima funkcie $v^*(c_0, c_1, \ldots, c_T)$.

Existenciu globálneho maxima ukážeme pomocou ohraničenia, na ktorom skúmame úlohu s viazaným extrémom. Vieme, že naše ohraničenie je uzavretá krivka, ktorá neobsahuje vnútro. Z toho môžeme vyvodiť, že medzi zistenými lokálnymi maximami je globálne to, ktoré má najvyššiu funkčnú hodnotu. Kedže v našom príklade sme spočítali jedno lokálne maximum, z toho vyplýva, že dané maximum je aj globálne.

Teraz vyjadríme maximálnu hodnotu účelovej funkcie v bode globálneho maxima c^*:

$$\max\left(\sum_{i=0}^{T} \delta_i \cdot s_i \cdot \frac{c_i^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right) = \frac{W_0^{1-\gamma}}{1-\gamma} \cdot \frac{\sum\limits_{i=0}^{T} \delta_i^{1/\gamma} \cdot s_i^{1/\gamma} \cdot R_i^{(1-\gamma)/\gamma}}{\left(\sum\limits_{j=0}^{T} \delta_j^{1/\gamma} \cdot s_j^{1/\gamma} \cdot R_j^{(1-\gamma)/\gamma}\right)^{1-\gamma}} \tag{3.18}$$

Z toho jednoduchou úpravou dostávame maximálnu hodnotu účelovej funkcie vo výške

$$\frac{W_0^{1-\gamma}}{1-\gamma} \cdot \left(\sum_{j=0}^{T} \delta_j^{1/\gamma} \cdot s_j^{1/\gamma} \cdot R_j^{(1-\gamma)/\gamma}\right)^{\gamma}. \tag{3.19}$$

(b) Pre $\gamma = 1$ má Lagrangeova funkcia tvar

$$L_{PB} = \sum_{i=0}^{T} \delta_i \cdot s_i \cdot \ln(c_i) + \lambda(W_0 - \sum_{i=0}^{T} c_i \cdot R_i^{-1}). \tag{3.20}$$

Pri hľadaní stacionárneho bodu danej funkcie opäť využijeme, že musí spĺňať podmienku $\nabla L = 0$, t. j. rovnosť (3.9) a rovnosti $\forall i = 0, 1, \ldots, T$

$$\frac{\partial L_{PB}}{\partial c_i} = \delta_i \cdot s_i \cdot c_i^{-1} - \lambda \cdot R_i^{-1} = 0. \tag{3.21}$$

Opäť počítame sústavu $T + 2$ rovníc s rovnakým počtom neznámych. Poznáme hodnoty $\delta_0 = s_0 = R_0 = 1$ a dosadíme ich do vzťahu (3.20) pre $i = 0$, odkiaľ plynie $\lambda = \frac{1}{c_0}$, čo následne spätne vložíme do (3.20) a máme

$$\frac{\partial L_{PB}}{\partial c_i} = \delta_i \cdot s_i \cdot c_i^{-1} - \frac{1}{c_0} \cdot R_i^{-1} = 0. \tag{3.22}$$

Úpravou získame vzťah $c_i = c_0 \cdot \delta_i \cdot s_i \cdot R_i$, ktoré sú opäť závislé iba na jednej premennej c_0. Poslednú premennú získame využitím podmienky pre ohraničenie (3.9), ak dosadíme c_j

$$c_0 = \frac{W_0}{\sum\limits_{j=0}^{T} \delta_j \cdot s_j}. \tag{3.23}$$

Spätne vyjadríme pomocou c_0 formulu pre optimálnu spotrebu $c_i^* \; \forall i = 0, 1, \ldots, T$ v tvare

$$c_i^* = \frac{W_0 \cdot s_i \cdot \delta_i \cdot R_i}{\sum\limits_{j=0}^{T} s_j \cdot \delta_j}. \tag{3.24}$$

Pri dôkaze globálneho maxima v bode optimálnej spotreby c_i^* postupujeme analogicky ako v (a). Transformujeme úlohu ako hľadanie argumentu minima funkcie $-v$ a zostavíme Hesián, ktorý je opäť diagonálna matica s kladnými prvkami na diagonále ($\frac{\partial^2 - L_{PB}}{\partial c_i^2} = \delta_i \cdot s_i \cdot c_i^{-2} > 0$). Z toho plynie, že bod optimálnej spotreby c_i^* je bodom globálneho maxima funcie v^*. Účelová funkcia $v^*(c_0, c_1, \ldots, c_T)$ v danom bode nadobúda hodnotu

$$\max\Big(\sum_{i=0}^{T} \delta_i \cdot s_i \cdot \ln(c_i)\Big) = \sum_{i=0}^{T} \delta_i \cdot s_i \cdot \ln\left(\frac{W_0 \cdot s_i \cdot \delta_i \cdot R_i}{\sum\limits_{j=0}^{T} s_j \cdot \delta_j}\right). \tag{3.25}$$

3.2.2 Optimálna spotreba v rámci dokonalého anuitného trhu PA

Pre dokonalý anuitný trh musíme upraviť podmienku v optimalizačnej úlohe. V tomto prípade budeme chcieť pri investovaní počiatočného kapitálu W_0 do životných anuít zohľadniť pravdepodobnosť, že sa jedinec (investor) dožije z času 0 do času i, t. j. pravdepodobnosť dožitia s_i. Odtiaľ

$$W_0 = \sum_{j=0}^{T} c_j \cdot s_j \cdot R_j^{-1}, \tag{3.26}$$

z čoho dostávame podmienku pre ohraničenie

$$g_1 = \sum_{j=0}^{T} c_j \cdot s_j \cdot R_j^{-1} - W_0 = 0. \tag{3.27}$$

Opäť hľadáme extrémy funkcie s viazaným extrémom na uzavrenej krivke.

(a) Pre $\gamma \neq 1$ má Lagrangeova funkcia tvar

$$L_{PA} = \sum_{i=0}^{T} \delta_i \cdot s_i \cdot \frac{c_i^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \lambda(W_0 - \sum_{i=0}^{T} c_i \cdot s_i \cdot R_i^{-1}). \tag{3.28}$$

Zostavíme sústavu rovníc $\nabla L_{PA} = 0$. Derivovaním podľa parametra $\frac{\partial L_{PA}}{\partial \lambda}$ dostaneme rovnicu (3.27) a podľa prvkov vektora spotreby dostane $\forall i = 0, 1, \ldots, T$:

$$\frac{\partial L_{PA}}{\partial c_i} = \delta_i \cdot s_i \cdot c_i^{-\gamma} - \lambda \cdot s_i \cdot R_i^{-1} = 0. \tag{3.29}$$

Poznáme hodnoty $\delta_0 = s_0 = R_0 = 1$ a znovu opakujeme postup ako pri dlhopisovom trhu a dostávame vyjadrenie multriplikátora $\lambda = c_0^{-\gamma}$ a následne spotreby c_i $\forall i = 0, 1, \ldots, T$ ako funkciu c_0: $c_i = c_0 \cdot (\delta_i \cdot R_i)^{/\gamma}$ a odtiaľ dosadením do (3.26) a jednoduchou úpravou dostaneme predpis pre c_0:

$$c_0 = \frac{W_0}{\sum_{j=0}^{T} (s_j \cdot \delta_j \cdot R_j^{1-\gamma})^{1/\gamma}}, \tag{3.30}$$

ktorú následne dosadíme do vzťahu pre c_i a dostaneme konečnú optimálnu spotrebu $\forall i = 0, 1, \ldots, T$

$$c_i^* = \frac{W_0 \cdot (\delta_i \cdot R_i)^{1/\gamma}}{\sum_{j=0}^{T} s_j \cdot (\delta_j \cdot R_j^{1-\gamma})^{1/\gamma}} \text{ pre } i = 0, 1, \ldots, T. \tag{3.31}$$

Pri dokazovaní globálneho maxima funkcie v^* v bode c_i^* budeme postupovať ako v časti 3.2.1. Zostavíme Hesián funkcie v^* (maticu druhých derivácií funkcie v^*). Avšak Hesián je rovný matici H v (3.17), z čoho vyplýva, že v bode c_i^* je lokálne maximum funkcie v^*. Globálne maximum odvodíme rovnako ako v časti 3.2.1.

Maximálna hodnota účelovej funkcie v bode globálneho maxima c_i^* je:

$$\max\left(\sum_{i=0}^{T} \delta_i \cdot s_i \cdot \frac{c_i^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right) = \frac{W_0^{1-\gamma}}{1-\gamma} \cdot \left(\sum_{i=0}^{T} \delta_i^{1/\gamma} \cdot s_i \cdot R_i^{(1-\gamma)/\gamma}\right)^{\gamma}. \tag{3.32}$$

Na základe predchádzajúcich výpočtov môžeme analyticky stanoviť výšku penzijného kapitálového ekvivalentu AEW_0, ktorý dostaneme vďaka prístupu na dokonalý anuitný trh PA oproti sporeniu iba na dlhopisovom trhu PB (pozri odstavec 3.2.1). Využijeme pritom porovnávanie maximálnych hodnôt účelových funkcií pre oba trhy, no pre trh PB uvažujeme miesto počiatočného kapitálu W_0 práve hľadaný penzijný kapitálový ekvivalentAEW_0, pre ktorý by malo platiť na základe Yaariho teórie $AEW_0 > W_0$. Dostávame rovnosť:

$$\frac{W_0^{1-\gamma}}{1-\gamma} \cdot \left(\sum_{i=0}^{T} \delta_i^{1/\gamma} \cdot s_i \cdot R_i^{(1-\gamma)/\gamma}\right)^{\gamma} = \frac{AEW_0^{1-\gamma}}{1-\gamma} \cdot \left(\sum_{j=0}^{T} \delta_j^{1/\gamma} \cdot s_j^{1/\gamma} \cdot R_j^{(1-\gamma)/\gamma}\right)^{\gamma}; \tag{3.33}$$

z ktorej vyjadríme AEW_0 v tvare:

$$AEW_0 = W_0 \cdot \left(\frac{\sum\limits_{i=0}^{T} \delta_i^{1/\gamma} \cdot s_i \cdot R_i^{(1-\gamma)/\gamma}}{\sum\limits_{j=0}^{T} \delta_j^{1/\gamma} \cdot s_j^{1/\gamma} \cdot R_j^{(1-\gamma)/\gamma}} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}. \tag{3.34}$$

(b) Pre $\gamma = 1$ má Lagrangeova funkcia tvar

$$L_{PA} = \sum_{i=0}^{T} \delta_i \cdot s_i \cdot \ln(c_i) + \lambda(W_0 - \sum_{i=0}^{T} c_i \cdot s_i \cdot R_i^{-1}), \tag{3.35}$$

pričom podmienka pre ohraničenie (3.27) zostáva rovnaká. Zostavením vektora $\nabla L_{PA} = 0$ dostaneme sústavu rovníc $\forall i = 0, 1, \ldots, T$:

$$\frac{\partial L_{PA}}{\partial c_i} = \delta_i \cdot s_i \cdot c_i^{-1} - \lambda \cdot s_i \cdot R_i^{-1} = 0, \tag{3.36}$$

odkiaľ pre $i = 0$ dostávame vyjadrenie multiplikátora $\lambda = \frac{1}{c_0}$, ktorý dosadíme spätne do rovnice (3.36) a máme vzťah pre $c_i = \delta_i \cdot c_0 \cdot R_i$ $\forall i = 0, 1, \ldots, T$ ako funkciu jednej premennej c_0. Následne dosadením do podmienky (3.26) dostaneme vyjadrenie pre spotrebu v čase 0 ako

$$c_0 = \frac{W_0}{\sum\limits_{j=0}^{T} \delta_j \cdot s_j}. \tag{3.37}$$

Finálna optimálna spotreba je teda vo výške

$$c_i = \frac{\delta_j \cdot R_i \cdot W_0}{\sum\limits_{j=0}^{T} \delta_j \cdot s_j} \; \forall i = 0, 1, \ldots, T \tag{3.38}$$

s maximálnou hodnotou účelovej funkcie vo výške

$$\max\Big(\sum_{i=0}^{T} \delta_i \cdot s_i \cdot \ln(c_i)\Big) = \sum_{i=0}^{T} \delta_i \cdot s_i \cdot \ln\left(\frac{W_0 \cdot \delta_i \cdot R_i}{\sum\limits_{j=0}^{T} s_j \cdot \delta_j} \right). \tag{3.39}$$

Porovnaním maximálnych hodnôt opäť zostavíme rovnicu, z ktorej vyjadríme penzijný kapitálový ekvivalent AEW_0:

$$\sum_{i=0}^{T} \delta_i \cdot s_i \cdot \ln\left(\frac{W_0 \cdot \delta_i \cdot R_i}{\sum\limits_{j=0}^{T} s_j \cdot \delta_j} \right) = \sum_{i=0}^{T} \delta_i \cdot s_i \cdot \ln\left(\frac{AEW_0 \cdot s_i \cdot \delta_i \cdot R_i}{\sum\limits_{j=0}^{T} s_j \cdot \delta_j} \right). \tag{3.40}$$

Ak využijeme, že exponenciály sú zhodné práve vtedy, keď sú zhodné exponenty, potom dostaneme penzijný kapitálový ekvivalent AEW_0 ako

$$AEW_0 = \frac{W_0}{\prod\limits_{i=0}^{T} s_i}. \tag{3.41}$$

3.2.3 Optimálna spotreba v rámci klasického anuitného trhu CA

Na dokonalom klasickom anuitnom trhu, kde sa investujú konštantné platby $c = c_0 = c_1 = \ldots = c_T$ do životných anuít, dostávame jednoduchým upravením podmienky na PA trhu

$$W_0 = \sum_{j=0}^{T} c \cdot s_j \cdot R_j^{-1}. \tag{3.42}$$

Vyjadríme výšku konštantnej platby

$$c = \frac{W_0}{\sum\limits_{j=0}^{T} s_j \cdot R_j^{-1}}. \tag{3.43}$$

Dosadíme do účelovej funkcie v^* a dostávame:

(a) Pre $\gamma \neq 1$

$$v^*(c) = \sum_{i=0}^{T} \delta_i \cdot s_i \cdot \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} = \frac{W_0^{1-\gamma}}{1-\gamma} \cdot \frac{\sum\limits_{i=0}^{T} \delta_i \cdot s_i}{(\sum\limits_{j=0}^{T} s_j \cdot R_j^{-1})^{1-\gamma}}. \tag{3.44}$$

Penzijný kapitálový ekvivalent AEW_0 vznikne v tomto prípade vďaka prístupu na klasický aunitný trh CA v porovnaní so sporením iba na dlhopisovom trhu PB. Analyticky ho vyjadríme ako

$$AEW_0 = W_0 \cdot \left(\frac{\sum\limits_{i=0}^{T} \delta_i \cdot s_i}{(\sum\limits_{j=0}^{T} s_j \cdot R_j^{-1})^{1-\gamma} \sum\limits_{j=0}^{T} \delta_j^{1/\gamma} \cdot s_j^{1/\gamma} \cdot R_j^{(1-\gamma)/\gamma}} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}}. \tag{3.45}$$

(b) Pre $\gamma = 1$

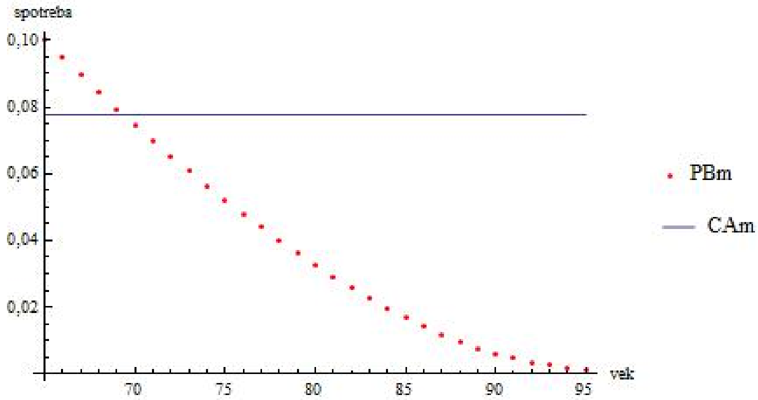
$$v^*(c) = \sum_{i=0}^{T} \delta_i \cdot s_i \cdot \ln(c) = \sum_{i=0}^{T} \delta_i \cdot s_i \cdot \ln\left(\frac{W_0}{\sum\limits_{j=0}^{T} s_j \cdot R_j^{-1}} \right). \tag{3.46}$$

Penzijný kapitálový ekvivalent AEW_0 je rovný:

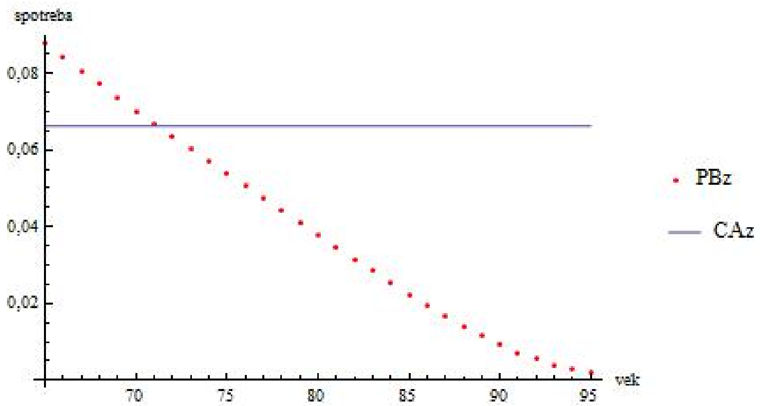
$$AEW_0 = W_0 \cdot \frac{\sum\limits_{i=0}^{T} \delta_i \cdot s_i}{\sum\limits_{i=0}^{T} \delta_i \cdot R_i^{-1}} \cdot \left(\prod_{j=0}^{T} \delta_j \cdot s_j \cdot R_j \right)^{-1}. \tag{3.47}$$

4. Numerická interpretácia problému

Na základe teoretickej analýzy optimálnej spotreby spočítame na počiatočný jednotkový kapitál optimálnu spotrebnú stratégiu. Výpočet je realizovaný pomocou programu Mathematica a je priložený v elektronickej podobe. Pre výpočty budeme používať úmrtnostné tabuľky z roku 2012 pre Českú republiku (muži a ženy) s dôchodkovým vekom 65 rokov. Ďalej budeme rozlišovať stratégie v rámci odlišných trhov. Pre logaritmickú úžitkovovú funkciu s $\gamma = 1$ (vyjadríme nulovú averziu voči riziku, t. j. oceníme riziko hodnotou jedna) dostávame optimálnu spotrebu v rámci dokonalého dlhopisového trhu PB s fixnou úrokovou mierou 2,5 % (fixná aj pre ostatné trhy vo výške tzv. technickej úrokovej miery v ČR v roku 2014) pre mužov zobrazenú na obrázku 4.1 a na obrázku 4.2 pre ženy. V rámci trhu CA je spotreba charakteristická konštantnou výškou, ktorá je zobrazená v obrázkoch 4.1-4; táto konštatná výška v rámci CA trhu sa líši pre jednotlivé pohlavia.

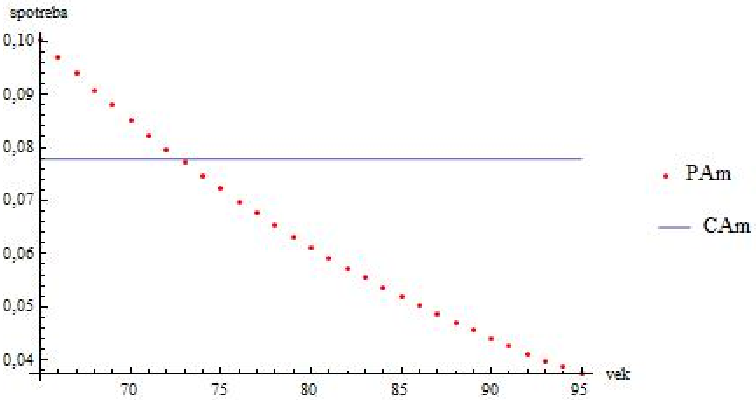


Obrázok 4.1: Optimálna spotrebná stratégia $\{c_i\}$ pre PB trh (muži) (pre log. účelovú funkciu podľa (3.24), kde $W_0 = 1$, $\delta_i = \delta^i$, $\delta = 0,944$, $r = 0,025$, ČR 2012)

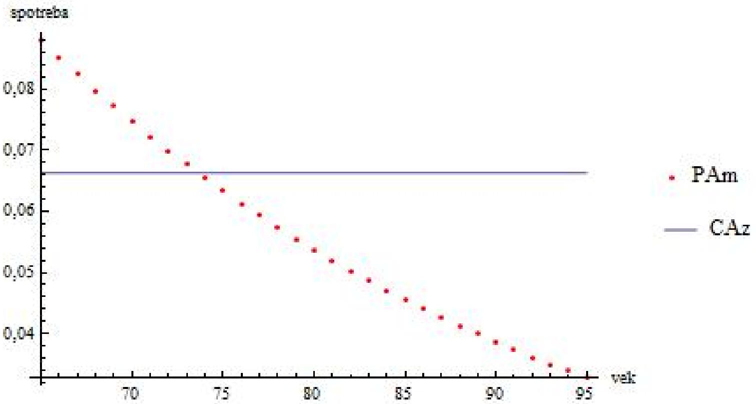


Obrázok 4.2: Optimálna spotrebná stratégia $\{c_i\}$ pre PB trh (ženy) (pre log. účelovú funkciu podľa (3.24), kde $W_0 = 1$, $\delta_i = \delta^i$, $\delta = 0,944$, $r = 0,025$, ČR 2012)

Za uvedených predpokladov spočítame optimálnu spotrebu v rámci PA trhu pre mužov a ženy a znázorníme na obrázkoch 4.3 a 4.4.

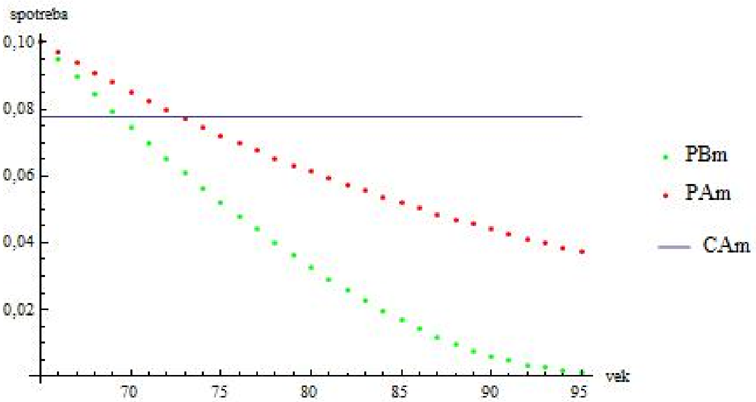


Obrázok 4.3: Optimálna spotrebná stratégia $\{c_i\}$ pre PA trh (muži)
(pre log. účelovú funkciu podľa (3.31), kde $W_0 = 1$, $\delta_i = \delta^i$, $\delta = 0,944$, $r = 0,025$, ČR 2012)

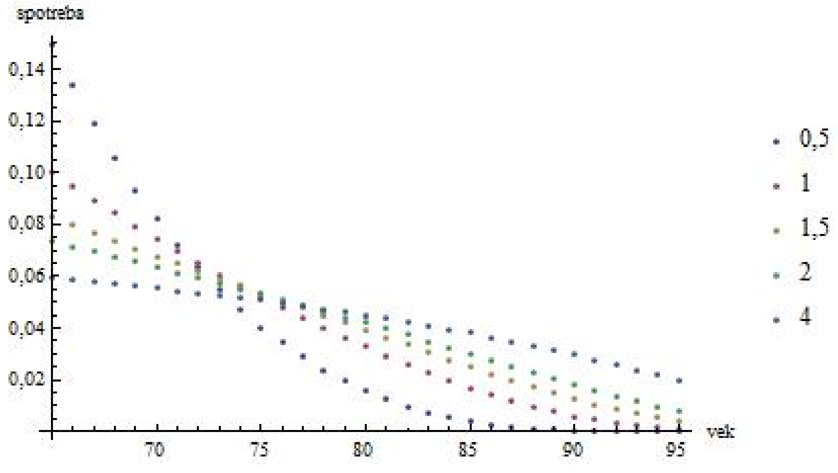


Obrázok 4.4: Optimálna spotrebná stratégia $\{c_i\}$ pre PA trh (ženy)
(pre log. účelovú funkciu podľa (3.31), kde $W_0 = 1$, $\delta_i = \delta^i$, $\delta = 0,944$, $r = 0,025$, ČR 2012)

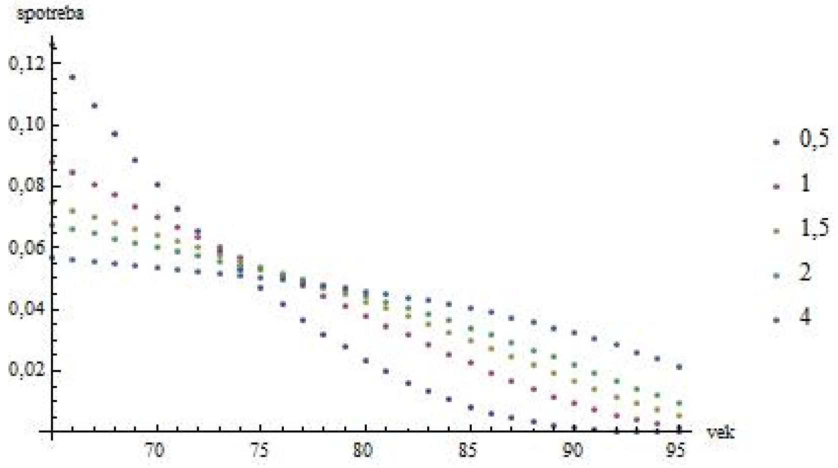
Z obrázkov pre logaritmickú účelovú funkciu je vidieť rozdiel medzi dokonalým dlhopisovým trhom PB a dokonalým anuitným trhom PA. Pre trh PA platí, že s pribúdajúcim vekom je spotreba vyššia ako pre PB trh. Tým sme potvrdili našu teóriu, že jednotlivec pri investovaní do anuitného produktu má optimálnejšiu spotrebu ako by mal pri využívaní dlhopisov. Tento rozdiel môžeme pozorovať na obrázku 4.5 pre mužov.



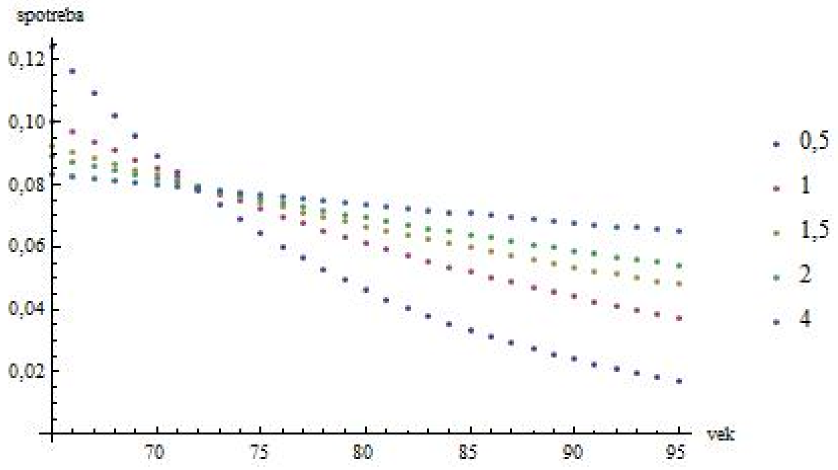
Obrázok 4.5: Porovnanie optimálnych spotrebných stratégii $\{c_i\}$ v rámci trhov PA, PB a CA pre mužov (pozri obr. 4.1 a 4.3)



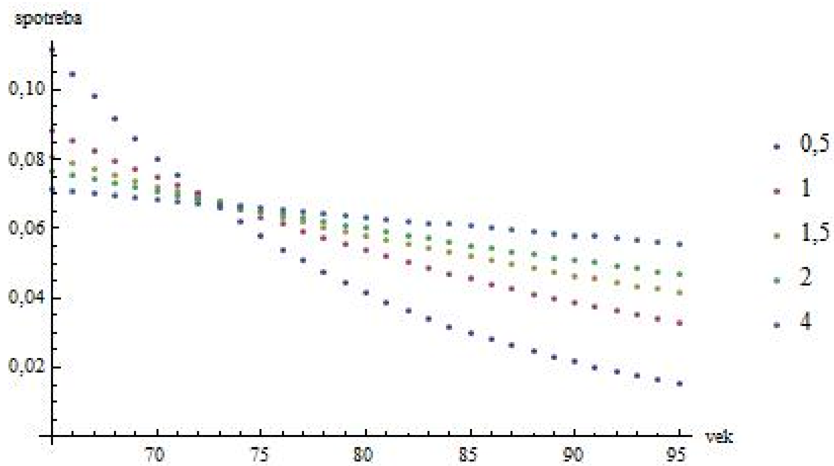
Obrázok 4.6: Optimálna spotrebná stratégia $\{c_i\}$ pre PB trh (muži) (CRRA účelová funkcia v závislosti na γ)



Obrázok 4.7: Optimálna spotrebná stratégia $\{c_i\}$ pre PB trh (ženy) (CRRA účelová funkcia v závislosti na γ)



Obrázok 4.8: Optimálna spotrebná stratégia $\{c_i\}$ pre PA trh (muži) (CRRA účelová funkcia v závislosti na γ)



Obrázok 4.9: Optimálna spotrebná stratégia $\{c_i\}$ pre PA trh (ženy)
(CRRA účelová funkcia v závislosti na γ)

V prípade úžitkovej funkcie CRRA (pozri (3.4)) budeme spotrebu počítať s rôznymi averziami voči riziku, ktoré sú znázornené v grafoch 4.6-9. Opäť budeme pracovať s jednotkovým počiatočným kapitálom a úmrtnostnými tabuľkami z roku 2012 pre ČR od 65 rokov. Predpokladáme fixnú úrokovú mieru 2,5 %.

Z grafov môžeme pozorovať istú súvislosť medzi spotrebami v súvislosti s ochotou podstúpiť riziko. Ak je model vhodne zostavený, tak pre $\gamma = 1$ by sa mali spočítané spotrebné stratégie podobať spotrebám spočítaným pomocou logaritmickej úžitkovej funkcie. To grafy 4.6-9 potvrdzujú, teda model pracuje vhodne a platí.

V nasledujúcej tabuľke sú uvedené hodnoty penzijného kapitálového ekvivalentu AEW_0 pre mužov a ženy, ktorý vznikne vďaka prístupu na PA, resp. CA trh v porovnaní so sporením v rámci PB trhu. Tabuľka je konštruovaná na základe úmrtnostných tabuliek z roku 2012 pre Českú republiku. Opäť predpokladáme dôchodkový vek 65 rokov a fixnú ročnú úrokovú mieru 2,5 %. Pri počítaní penzijného kapitálového ekvivalentu sme využili pre konzistentnosť výpočtov úžitkovú funkciu CRRA a pre $\gamma = 1$ sme výšku ekvivalentu dostali limitným prechodom $\gamma \to 1$.

Tabulka 4.1: Peňažný kapitálový ekvivalent AEW_0 relatívne k trhu PB

γ	0,5	1,0	1,5	2,0	4,0	8,0
PA muži	1,20443	1,33116	1,41747	1,48253	1,64309	1,78591
PA ženy	1,13091	1,21873	1,27845	1,32337	1,43516	1,53825
CA muži	1,15680	1,30282	1,39684	1,46614	1,63384	1,78084
CA ženy	1,07978	1,18915	1,25727	1,30673	1,42598	1,53329

Yaariho teória predpovedala, že $AEW_0 > W_0$, čo platí v našom modeli, teda sme potvrdili počiatočný predpoklad pre penzijný kapitálový ekvivalent. Hodnoty v tabuľke 4.1 pri fixnej ročnej úrokovej miere 2,5 % udávajú výšku zvýhodnenia v prípade prístupu na daný trh. Napr. pre šesťdesiatpäťročného muža s umiernenou averziou voči riziku ($\gamma = 0,5$) prinesie prístup na dokonalý anuitný trh navýšenie o 0,20443 na každú jednotku investovaného kapitálu (t. j. o 20,4 %).

Záver

V tejto práci sme kládli dôraz na teoretické odvodenie spolu s ukázaním platnosti odvodenia pre optimálnu spotrebnú stratégiu a výšku peňažného penzijného ekvivalentu jedinca s prístupom na rôzne trhy.

Dôležité závery vyplývajú z numerickej štúdie v kapitole 4. Z prvých dvoch grafov na obrázkoch 4.1 a 4.2 pre logaritmickú úžitkovú funkciu môžeme pozorovať skoro identické spotrebné stratégie pre mužov aj ženy v rámci PB trhu s menšou spotrebou pre ženy v prvých rokoch po dovŕšení dôchodkového veku, ale s takmer lineárnou spotrebou, naproti tomu u mužov vidíme spotrebu, ktorá pripomína skôr kvadratický priebeh. Túto skutočnosť vidíme aj v prípade dokonalého anuitného trhu (obrázky 4.3 a 4.4). Pokiaľ ide o klasický anuitný trh, muži majú vyššiu spotrebu. Je to dané pravdepodobnosťami dožitia sa z počiatočného dôchodkového veku do vyššieho dôchodkového veku, ktoré sú menšie ako u žien. Túto skutočnosť môžeme vidieť aj v (3.43), keďže ženy majú vyššiu pravdepodobnosť dožitia do vyššieho veku.

Pomocou obrázka 4.5 porovnáme optimálne spotrebné stratégie pre mužov v rámci všetkých trhov na základe spomínaných úmrtnostných tabuliek. Ako sme vyššie uviedli, od anuitných trhov očakávame, že jedinci budú môcť vo všetkých časoch spotrebovávať viac ako v prípade dokonalého dlhopisového trhu. Tento fakt vidíme aj na grafe na tomto obrázku, kde ak porovnáme spotreby v rámci PB a PA, vidíme, že jedinec dosiahne vyššiu spotrebu, ak uprednostní dokonalý anuitný trh pred dokonalým dlhopisovým trhom.

Z obrázkov 4.6-9 vidíme správanie spotrebiteľa v rámci trhu PB a PA pri rôznych averziách voči riziku. Grafy ukazujú, že spotrebiteľ s rastúcim RRA=γ (averziou voči riziku) podľa nášho modelu uprednostňuje vyššiu spotrebu vo vekoch nasledujúcich krátko po dovŕšení dôchodkového veku na úkor spotreby vo vysokom veku. Opäť sledujeme vyššiu spotrebu v prípade zvolenia dokonalého anuitného trhu PA, a to pre mužov a aj pre ženy. Pre veľmi malú averziu voči riziku (idúcu k nule) sa spotreba približuje ku konštatnej výške porovnateľnej s klasickým anuitným trhom.

V prípade porovnania s výsledkami [1] na základe dát z roku 2010 sa dostávame k podobným hodnotám, či už pre optimálne spotrebné stratégie, tak aj pre výšku penzijného kapitálového ekvivalentu AEW_0 (tabuľka 4.1). Pre AEW_0 platí, že s nárastom averzie voči riziku rastie aj kapitálové navýšenie na jednotku počiatočného kapitálu.

Možným pokračovaním tejto práce môže byť zvolenie inej (podobnej) úžitkovej funkcie, pre ktorú by sa previedla podobná analýza ako v tejto práci. CRRA úžiková funkcia je v rôznych zdrojoch rôzlične definovaná. Ak by sme volili úžitkovú funkciu tvaru

$$u(c) = \frac{c^{1-\gamma} - 1}{1 - \gamma}; \ \gamma > 0, \ \gamma \neq 1,$$

môžeme pre $\gamma = 1$ definovať limitným prechodom, s využitím L'Hospitalovho pravidla, logaritmickú úžitkovú funkciu. Výpočty by sa mohli zjednodušiť a nemuseli by sme riešiť prípad $\gamma = 1$ zvlášť.

Zoznam použitej literatúry

[1] CIPRA, Tomáš. *Penze: kvantitativní přístup.* 1. vydání. Ekopress, Praha, 2012. (ISBN 978-80-86929-87-3).

[2] CIPRA, Tomáš. *Matematika cenných papíru.* 1. vydání. Professional Publishing, Praha, 2013. (ISBN 978-80-7431-097-9).

[3] NAVRÁTIL, František. *Modelování averze vůči riziku.* Bakalárska práca, MFF UK, 2013.

[4] DUPAČOVÁ, Jitka, LACHOUT, Petr. *Úvod do optimalizace.* MatfyzPress, Praha, 2011, (ISBN 978-80-7378-176-7).

[5] HUŠEK, Miroslav. *Extrémy funkcí více proměnných*, text k prednáške Kalkulus 1b. 2010. Dostupné na:
http://www.karlin.mff.cuni.cz/ mhusek/Kalkul1b/11-aplfvp.pdf
(apríl 2012).

[6] WORLD BANK. *Averting the Old-Age Crisis:* Poliecies to Protext the Old and Promote Growth. Oxfford University Press, Oxford 1994.