

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Bc. Alena Malá

Scénářové stromy v úlohách stochastického programování

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Praha 2014

Děkuji všem, kteří mi při psaní této práce byli oporou. Zejména bych chtěla poděkovat vedoucímu mé diplomové práce panu doc. RNDr. Ing. Miloši Koppovi, Ph.D. za jeho odborné vedení a trpělivost. Dále děkuji panu RNDr. Petru Pospíšilovi, CSc., který mi umožnil provádět své výpočty na hardwaru Centra pro intenzivní výpočty, díky čemuž se mé výpočty značně zrychlily. V neposlední řadě bych chtěla na tomto místě poděkovat Martinu Scholtzovi za jeho bezmeznou podporu a obětavost.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne

Podpis autora

Název práce: Scénářové stromy v úlohách stochastického programování

Autor: Bc. Alena Malá

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D.

Abstrakt: Tato práce se věnuje problému vícestupňového stochastického lineárního programování a jeho aplikaci v problému investora. V práci je uvedeno několik modelů investičního plánování, důraz je kladen na základní model s transakčními náklady a model zohledňující riziko na každé investiční úrovni. Náhodné výnosy vstupující do uvedených modelů jsou získány ze scénářových stromů, které jsou vygenerovány na základě metody momentů. V práci jsou uvedeny optimální investiční strategie pro jednotlivé modely. Dále se zkoumá vzdálenost optimálních hodnot účelových funkcí v závislosti na vnořené vzdálenosti generovaných stromů. Všechny výpočty uvedené v této práci jsou prováděny v softwaru Mathematica 9.

Klíčová slova: vícestupňové stochastické lineární programování, vnořená vzdálenost, scénářový strom, problém investora

Title: Scenario trees in stochastic programming problems

Author: Bc. Alena Malá

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D.

Abstract: This thesis deals with multi-stage stochastic linear programming and its applications in the portfolio selection problem. It presents several models of investment planning, the emphasis is on the basic model with transaction costs and risk adjusted model for every investment level. Random returns entering the above models are modelled by the scenario trees which are generated using the moment-matching method. The thesis presents the optimal investment strategy for each model. It then examines distance of optimal values of objective functions in dependence on the nested distance of these generated trees. All calculations were performed using Mathematica software version 9.

Keywords: multi-stage stochastic linear programming, nested distance, scenario tree, portfolio selection problem

Obsah

1	Úvod	2
2	Vícestupňové stochastické lineární programování	3
2.1	Zpětný náhled	4
2.2	Konečný počet scénářů	6
2.3	Investiční problém	7
2.3.1	Základní model	7
2.3.2	Mean-CVaR model	10
2.3.3	Model zohledňující riziko na každé úrovni	11
3	Generování scénářů	13
3.1	Metoda momentů	13
3.1.1	Kubická transformace	13
3.1.2	Maticová transformace	14
3.1.3	Algoritmus generování scénářů	16
4	Vzdálenost mezi stochastickými scénářovými procesy	17
4.1	Vnořená vzdálenost	19
4.2	Diskretizace jednorozměrného oceňovacího procesu	28
4.3	Diskretizace mnohorozměrného oceňovacího procesu	30
5	Empirická studie	32
5.1	Základní model s transakčními náklady	33
5.1.1	Dvojstupňový strom	33
5.1.2	Trojstupňový strom	42
5.2	Model zohledňující riziko na každé úrovni	49
5.2.1	Dvojstupňový strom	50
5.2.2	Trojstupňový strom	54
6	Závěr	66
	Literatura	68
	Seznam tabulek	70
	Seznam použitých zkratk	72

Kapitola 1

Úvod

S prvkem nejistoty se v běžném životě setkáváme prakticky každodenně. Představme si člověka, který se rozhodne, že za pět let přestane pracovat a odjede na zbytek života na ostrov uprostřed Tichého oceánu. Nejprve si spočítá, kolik ho bude život na ostrově stát. Dnes má k dispozici určitý kapitál, který chce na oněch pět let investovat takovým způsobem, aby za pět let měl našetřenou přesně tu částku, kterou bude na zbytek života potřebovat. Investor může několikrát za těchto pět let – řekněme jednou ročně – své portfolio přeuspořádat tak, aby mu poskytlo co nejvyšší výnos. Takováto investice však pochopitelně není bez rizika. Pokud by investor neinvestoval své prostředky opatrně, mohlo by se mu stát, že si svůj životní sen nesplní, protože o veškeré své peníze během pěti let investování přijde. V naší práci představíme koncept víceúrovňového stochastického programování včetně několika základních modelů problému investora. Stěžejní pro nás bude základní model investora zahrnující transakční náklady [1] a model zohledňující riziko na každé investiční úrovni [17]. Oba modely lze nalézt v kapitole 2. Ve 4. kapitole uvedeme definici Kantorovičovy vzdálenosti [14] a pokročilejší vnořené vzdálenosti dvou stochastických procesů [15]. Pro lepší názornost je teoretická část kapitoly doplněna o převzaté i vlastní příklady zabývající se výpočtem obou vzdáleností. Vnořené vzdálenosti budeme v 5. kapitole měřit vzdálenost dvou scénářových stromů. Scénářové stromy vygenerujeme pomocí metody momentů [8], která je představena v kapitole 3.

V empirické studii nacházející se v 5. kapitole vycházíme z dat, která představují měsíční výnosy šesti reprezentativních portfolií amerického trhu od července roku 1926 do dubna roku 2014. Nejprve implementujeme modely investora, přičemž náhodné výnosy vyskytující se v těchto modelech získáme ze scénářových stromů vygenerovaných pomocí metody momentů. Pro tyto modely najdeme optimální investiční strategii pro jednotlivé rozhodovací kroky. Dále určíme vzdálenost optimálních hodnot účelových funkcí uvažovaných modelů mezi jednotlivými stromy. Nakonec spočítáme vnořené vzdálenosti mezi těmito stromy a budeme sledovat, jak spolu tyto dvě vzdálenosti souvisejí.

Všechny výpočty byly prováděny v softwaru Mathematica 9, jako hardware byl použit dvanáctijádrový počítač v Centru pro intenzivní výpočty ČVUT. Implementovaný algoritmus generující scénářové stromy metodou momentů, implementovaný algoritmus určující vnořené vzdálenosti dvou stromů o libovolném počtu potomků a libovolné stejné délce i všechny ostatní kódy jsou uvedeny na příloženém CD.

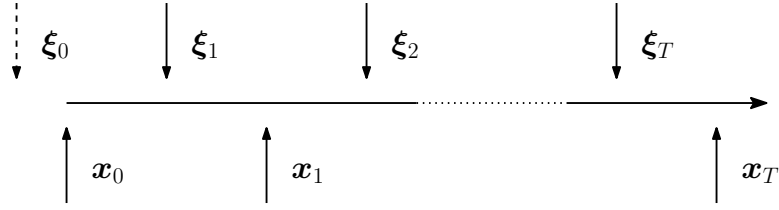
Kapitola 2

Vícestupňové stochastické lineární programování

Prvek nejistoty se vyskytuje v různých odvětvích lidské činnosti, jmenujme finanční sektor (tržní riziko, kreditní riziko, riziko likvidity), pojišťovnictví (riziko úmrtnosti, riziko dlouhověkosti) či trh s energiemi. V těchto odvětvích je při plánování obchodu podstatné zohlednit prvek nejistoty. Představme si investora, který se rozhodne sestavit své portfolio z akcií různých společností. Po určité době, řekněme po jednom měsíci, investor zjistí výnos, který mu jednotlivé akcie přinášejí. Na základě toho zjištění se rozhodne, které akcie si ve svém portfoliu ponechá, které vyřadí, a naopak, akcie kterých dalších společností (a jestli vůbec nějakých) do svého portfolia zařadí. Poté se opět po měsíci podívá na výnos svého portfolia a v důsledku toho jej přeuspořádá. Tento postup investor opakuje do té doby, než se rozhodne podnikání ukončit. Matematický postup, který optimalizuje jednotlivá rozhodnutí, se nazývá vícestupňové programování [1, 4, 9, 18].

Vektor rozhodnutí budeme značit $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T)$ a vektor pozorování $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_T)$, přičemž předpokládáme, že hodnota $\boldsymbol{\xi}_0$ je deterministická. Učinit rozhodnutí \mathbf{x}_t v čase $t, t = 0, \dots, T$, je možné pouze na základě informace, která je v tomto čase dostupná (nikoliv na základě informace, kterou získáme v budoucím čase). Tato vlastnost se nazývá *neanticipativita*. Je tedy nutné pamatovat si celou historii do času $t, t = 0, \dots, T$. Vektor $\mathbf{x}^t = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_t)$ bude představovat historii rozhodnutí do času t a $\boldsymbol{\xi}^t = (\boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_t)$ informaci dostupnou v čase t . Úlohu vícestupňového stochastického lineárního programování lze zapsat v tzv. *odstupňovaném tvaru*

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}_0^T \mathbf{x}_0 + \mathbf{c}_1^T \mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_2^T \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{c}_T^T \mathbf{x}_T \\ \text{za} \quad & A_{0,0} \mathbf{x}_0 = \mathbf{b}_0, \\ & A_{1,0} \mathbf{x}_0 + A_{1,1} \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1, \\ & \quad A_{2,1} \mathbf{x}_1 + A_{2,2} \mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2, \\ & \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \\ & \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad A_{T,T-1} \mathbf{x}_{T-1} + A_{T,T} \mathbf{x}_T = \mathbf{b}_T, \\ & \mathbf{x}_t \geq 0 \quad \forall t. \end{aligned} \tag{2.1}$$



Obrázek 2.1: Posloupnost událostí a rozhodnutí.

Vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n_0+\dots+n_T}$ představuje vektor cen. Na složky vektoru rozhodnutí \mathbf{x}_t , $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_0+\dots+n_T}$, lze nahlížet jako na funkci informace dostupné v čase t , tedy $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_t(\boldsymbol{\xi}^t)$, $t = 1, \dots, T$. Koeficienty u neznámé proměnné \mathbf{x}_t v i -tém řádku jsou dány maticí $A_{i,t}$ typu $m_t \times n_t$, kde m_t je rozměr vektoru pravých stran \mathbf{b}_t . Prvky $\mathbf{c}_0, \mathbf{b}_0, A_{0,0}$ jsou deterministické, oproti tomu některé (či všechny) prvky $\mathbf{c}_t, \mathbf{b}_t, A_{t-1,t}, A_{t,t}$, $t = 1, \dots, T$, jsou náhodné a známými se stávají postupem času.

V prvním kroku učiníme rozhodnutí \mathbf{x}_0 . Ve druhém kroku pozorujeme $\boldsymbol{\xi}_1 := (\mathbf{c}_1, A_{1,0}, A_{1,1}, \mathbf{b}_1)$ a na základě těchto pozorování dospějeme k rozhodnutí \mathbf{x}_1 . Ve třetím kroku pozorujeme $\boldsymbol{\xi}_2 := (\mathbf{c}_2, A_{2,1}, A_{2,2}, \mathbf{b}_2)$ a následně učiníme rozhodnutí \mathbf{x}_2 . Tento postup opakujeme do doby, než na základě pozorování $\boldsymbol{\xi}_T := (\mathbf{c}_T, A_{T-1,T}, A_{T,T}, \mathbf{b}_T)$ dospějeme k rozhodnutí \mathbf{x}_T , viz obrázek 2.1.

2.1 Zpětný náhled

Na úlohu (2.1) lze nahlížet zpětně, tedy od T -té úrovně po nultou úroveň. Představme si, že se nacházíme v poslední, tedy T -té úrovni. V takovém případě známe celou historii $\boldsymbol{\xi}^T$ a učinili jsme již všechna rozhodnutí $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{T-1}$. Schází nám pouze vykonat rozhodnutí \mathbf{x}_T . V tomto případě řešíme jednoduchou úlohu lineárního programování

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}_T} \quad & \mathbf{c}_T^T \mathbf{x}_T \\ \text{za} \quad & A_{T,T-1} \mathbf{x}_{T-1} + A_{T,T} \mathbf{x}_T = \mathbf{b}_T, \\ & \mathbf{x}_T \geq 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

jejíž optimální hodnota $Q_T(\mathbf{x}_{T-1}, \boldsymbol{\xi}_T)$ závisí na \mathbf{x}_{T-1} a $\boldsymbol{\xi}_T = (\mathbf{c}_T, A_{T-1,T}, A_{T,T}, \mathbf{b}_T)$.

Následně si představme, že jsme v předposlední, tedy $(T-1)$ -ní úrovni. Známe tudíž historii pozorování $\boldsymbol{\xi}^{T-1}$ a dosud jsme učinili rozhodnutí $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{T-2}$. Nyní máme vykonat rozhodnutí \mathbf{x}_{T-1} . V tomto případě řešíme úlohu dvoustupňového programování

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}_{T-1}} \quad & \mathbf{c}_{T-1}^T \mathbf{x}_{T-1} + \mathbb{E}[Q_T(\mathbf{x}_{T-1}, \boldsymbol{\xi}_T) | \boldsymbol{\xi}^{T-1}] \\ \text{za} \quad & A_{T-1,T-2} \mathbf{x}_{T-2} + A_{T-1,T-1} \mathbf{x}_{T-1} = \mathbf{b}_{T-1}, \\ & \mathbf{x}_{T-1} \geq 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Optimální hodnota $Q_{T-1}(\mathbf{x}_{T-2}, \boldsymbol{\xi}^{T-1})$ závisí na rozhodnutí \mathbf{x}_{T-2} a na informaci $\boldsymbol{\xi}^{T-1}$ dostupné v čase $T-1$.

Lze si představit, že se nacházíme na obecné úrovni t , $t = 1, \dots, T-1$. V takovém případě máme k dispozici data $\boldsymbol{\xi}^t$ a vykonaná rozhodnutí $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{t-1}$.

Naším úkolem je učinit rozhodnutí \mathbf{x}_t . Daný problém lze formulovat

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}_t} \quad & \mathbf{c}_t^\top \mathbf{x}_t & + & \quad \mathbb{E}[Q_{t+1}(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\xi}^{t+1}) | \boldsymbol{\xi}^t] \\ \text{za} \quad & A_{t,t-1} \mathbf{x}_{t-1} & + & \quad A_{t,t} \mathbf{x}_t & = & \mathbf{b}_t, \\ & \mathbf{x}_t & \geq & 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Optimální hodnota $Q_t(\mathbf{x}_{t-1}, \boldsymbol{\xi}^t)$ uvedené úlohy se nazývá „cost-to-go“ funkce.

Nyní se přesuňme do první úrovně, tedy $t = 0$. Nacházíme se v situaci, kdy musíme učinit první rozhodnutí \mathbf{x}_0 , ale nemáme k dispozici žádná data. Řešíme úlohu

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}_0} \quad & \mathbf{c}_0^\top \mathbf{x}_0 + \mathbb{E}[Q_1(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi}^1)] \\ \text{za} \quad & A_{0,0} \mathbf{x}_0 & = & \mathbf{b}_0, \\ & \mathbf{x}_0 & \geq & 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Odtud je vidět, že všechny následující úrovně $t = 1, \dots, T$, jsou zahrnuty v problému (2.5) funkcí $Q_1(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi}^1)$, a to skrze odpovídající střední hodnoty. Úlohu vícestupňového stochastického programování lze tedy zapsat pomocí „vnořené formulace“

$$\min_{\substack{A_{0,0} \mathbf{x}_0 = \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{x}_0 \geq 0}} \mathbf{c}_0^\top \mathbf{x}_0 + \mathbb{E} \left[\min_{\substack{A_{1,0} \mathbf{x}_0 + A_{1,1} \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{x}_1 \geq 0}} \mathbf{c}_1^\top \mathbf{x}_1 + \mathbb{E} \left[\dots + \mathbb{E} \left[\min_{\substack{A_{T,T-1} \mathbf{x}_{T-1} + A_{T,T} \mathbf{x}_T = \mathbf{b}_T \\ \mathbf{x}_T \geq 0}} \mathbf{c}_T^\top \mathbf{x}_T \right] \right] \right].$$

Jednou z modifikací úlohy může být předpoklad, že posloupnost $\boldsymbol{\xi}$ je markovovská¹. V takovém případě podmíněná střední hodnota v problému (2.3) nezávisí na celé historii pozorování $\boldsymbol{\xi}_0, \dots, \boldsymbol{\xi}_{T-1}$, ale pouze na posledním členu $\boldsymbol{\xi}_{T-1}$ historie a optimální hodnota (2.3) je pouze funkcí \mathbf{x}_{T-2} a $\boldsymbol{\xi}_{T-1}$. Obdobně podmíněná střední hodnota v problému (2.4) nezávisí na celé historii pozorování $\boldsymbol{\xi}_0, \dots, \boldsymbol{\xi}_t$, ale pouze na posledním členu $\boldsymbol{\xi}_t$ historie a optimální hodnota $Q_t(\mathbf{x}_{t-1}, \boldsymbol{\xi}_t)$ problému (2.4) je funkcí \mathbf{x}_{t-1} a $\boldsymbol{\xi}_t$. Proto se úloha (2.4) redukuje do tvaru

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}_t} \quad & \mathbf{c}_t^\top \mathbf{x}_t & + & \quad \mathbb{E}[Q_{t+1}(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\xi}_{t+1}) | \boldsymbol{\xi}_t] \\ \text{za} \quad & A_{t,t-1} \mathbf{x}_{t-1} & + & \quad A_{t,t} \mathbf{x}_t & = & \mathbf{b}_t, \\ & \mathbf{x}_t & \geq & 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Další modifikací úlohy může být předpoklad, že rozhodnutí \mathbf{x}_t v čase t závisí na všech rozhodnutích vykonaných do tohoto času. Na rozhodnutí v čase t lze tedy nahlížet jako na funkci nejen všech dosavadních pozorování, ale i všech dosavadních rozhodnutí, tedy $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_t(\boldsymbol{\xi}^t, \mathbf{x}^{t-1})$. Úlohu (2.1) lze v tomto případě

¹Řekneme, že posloupnost $\boldsymbol{\xi}_0, \dots, \boldsymbol{\xi}_T$ je *markovovská* [7], jestliže pro všechna $t, t = 2, \dots, T$, je podmíněné rozdělení $\boldsymbol{\xi}_t$ dané $\boldsymbol{\xi}^{t-1}$ rovno podmíněnému rozdělení $\boldsymbol{\xi}_t$ danému $\boldsymbol{\xi}_{t-1}$.

Ekvivalentní úloha k úloze (2.1) pro konečný počet scénářů má tvar

$$\begin{aligned}
\min_{\mathbf{x}} \quad & \sum_{k=1}^K p_k [(c_0)^T \mathbf{x}_0^k + (c_1^k)^T \mathbf{x}_1^k + (c_2^k)^T \mathbf{x}_2^k + \dots + (c_T^k)^T \mathbf{x}_T^k] \\
\text{za} \quad & A_{0,0} \mathbf{x}_0^k = \mathbf{b}_0, \\
& A_{1,0}^k \mathbf{x}_0^k + A_{1,1}^k \mathbf{x}_1^k = \mathbf{b}_1^k, \\
& A_{2,1}^k \mathbf{x}_1^k + A_{2,2}^k \mathbf{x}_2^k = \mathbf{b}_2^k, \\
& \dots \\
& A_{T,T-1}^k \mathbf{x}_{T-1}^k + A_{T,T}^k \mathbf{x}_T^k = \mathbf{b}_T^k, \\
& \mathbf{x}_t^k \geq 0, t = 0, \dots, T, \\
& \mathbf{x}_t^k = \mathbf{x}_t^j, \forall j, k = 1, \dots, K, j \neq k : \boldsymbol{\xi}^{t,k} = \boldsymbol{\xi}^{t,j}, t = 0, \dots, T, \\
& k = 1, \dots, K.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

2.3 Investiční problém

Investorovo chování během doby trvání finanční investice se nazývá problémem investora. Investor si na počátku obchodování stanoví finanční částku, kterou chce během doby trvání investice naspořit. Dále se rozhodne, do kterých aktiv a v jak velkém množství chce investovat. V naší práci předpokládáme, že může prodávat pouze ta aktiva, která v okamžiku uzavření obchodu skutečně vlastní, tzn. že prodeje nakrátko jsou zakázány. Investor může v určitých předem stanovených okamžicích své portfolio přeuspořádat (některá aktiva ze svého portfolio může prodat a jiná nakoupit). Cílem je nalézt optimální složení portfolio, které při investování do vybraných aktiv investorovi zajistí naspoření požadované částky. Uveďme nyní formulace několika základních modelů finančního plánování.

2.3.1 Základní model

Uvažujme investora, který si chce během období o délce T naspořit částku G . Na počátku investice, tedy v čase $t = 0$, má k dispozici kapitál o výši B , který investuje do různých aktiv, jednotlivá aktiva označme i , $i = 1, \dots, I$. Takto sestavené portfolio může v okamžicích t , $t = 1, \dots, T - 1$, přeuspořádat, tzn. určitá aktiva z portfolio může prodat a naopak jiná nakoupit. Na konci sledovaného období, tj. v čase T , investor své portfolio prodá. Jeho cílem je, aby hodnota prodávaného portfolio byla alespoň rovna požadované cílové částce G . Uvedená formulace problému investora [13] nebere v potaz riziko, které jednotlivá aktiva nesou, a zanedbává předpoklad transakčních nákladů. Primárním cílem investora je mít v okamžiku T naspořenou požadovanou částku G . Účelová funkce zmíněného problému, kterou budeme minimalizovat, je ve tvaru

$$\sum_{k=1}^K p_k [D^- q^k - D^+ y^k], \tag{2.11}$$

kde y^k vyjadřuje přebytek peněz v čase T v k -tém scénáři, q^k finanční částku chybějící k dosažení G v čase T v k -tém scénáři, D^- penalizaci, kterou je třeba k nedostatku q^k přidat, D^+ benefit, který přináší přebytek peněz y^k , p_k pravděpodobnost k -tého scénáře a K označuje počet scénářů. Na počátku finančního plánování, tj. na úrovni $t = 0$, má investor k dispozici kapitál B , za který může pořídit jednotlivá aktiva. Tuto skutečnost vyjadřuje rovnice

$$\sum_{i=1}^I x_{0,i} = B, \quad (2.12)$$

kde $x_{0,i}$ je velikost kapitálu investovaného na počátku investování do aktiva i . V dalších obdobích je zisk z jednotlivých aktiv zcela reinvestován do aktiv v následujícím období, což popisuje rovnice

$$x_{t,i}^k = \xi_{t,i}^k x_{t-1,i}^k, \quad t = 1, \dots, T-1, \quad k = 1, \dots, K, \quad i = 1, \dots, I, \quad (2.13)$$

kde $\xi_{t,i}^k$ značí náhodný výnos z investice do aktiva i v čase t ve scénáři k . V posledním období T musí být splněna podmínka

$$G = \sum_{i=1}^I \xi_{T,i}^k x_{T-1,i}^k + q^k - y^k, \quad k = 1, \dots, K. \quad (2.14)$$

Výsledná úloha má tvar

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \sum_{k=1}^K p_k [D^- q^k - D^+ y^k] \\ \text{za} \quad & (2.12), (2.13), (2.14), \\ & y^k \geq 0, \quad k = 1, \dots, K, \\ & q^k \geq 0, \quad k = 1, \dots, K, \\ & x_{t,i}^k \geq 0, \quad t = 0, \dots, T-1, \quad k = 1, \dots, K, \quad i = 1, \dots, I, \\ & \mathbf{x}_t^k = \mathbf{x}_t^j, \quad \forall j, k = 1, \dots, K, \quad j \neq k : \boldsymbol{\xi}^{t,k} = \boldsymbol{\xi}^{t,j}, \quad t = 0, \dots, T-1. \end{aligned}$$

Transakční náklady

Ve výše uvedeném modelu jsme zanedbali transakční náklady. Ve skutečnosti však investor při nákupu či prodeji akcie musí zaplatit poplatek makléři [6]. Pro jednoduchost předpokládejme, že výše poplatku se pro různé akcie a různé scénáře nemění. Označme c_b poplatek za nákup určitého objemu akcií, c_s poplatek za prodej určitého objemu akcií, $b_{t,i}^k$ hodnotu nakoupeného i -tého aktiva v čase t v k -tém scénáři a $s_{t,i}^k$ hodnotu prodaného i -tého aktiva v čase t v k -tém scénáři. V okamžiku $t = 0$ může investor libovolná aktiva nakoupit a hodnota portfolia B je tedy dána vztahem

$$\sum_{i=1}^I [(1 - c_b)b_{0,i}] = B. \quad (2.15)$$

V následujících obdobích $t, t = 1, \dots, T-1$, se při započítání transakčních nákladů změní podmínka (2.13) na

$$x_{t,i}^k = \xi_{t,i}^k x_{t-1,i}^k + (1 - c_b)b_{t,i}^k - (1 + c_s)s_{t,i}^k, \quad t = 1, \dots, T-1, \quad k = 1, \dots, K, \quad i = 1, \dots, I. \quad (2.16)$$

Zde předpokládáme, že v posledním investičním období již investor žádná aktiva nenakupuje, pouze celé portfolio prodá. Proto se hodnota portfolia v posledním období T řídí rovnicí

$$x_{T,i}^k = (1 - c_s)\xi_{T,i}^k x_{T-1,i}^k, \quad k = 1, \dots, K. \quad (2.17)$$

Podmínku (2.14) na dosažení cílové částky G je třeba upravit o transakční náklady spojené s prodejem aktiv v posledním období. Upravená podmínka je ve tvaru

$$G = (1 - c_s) \sum_{i=1}^I [\xi_{T,i}^k x_{T-1,i}^k] + q^k - y^k, \quad k = 1, \dots, K. \quad (2.18)$$

Navíc předpokládejme, že během doby investování není možné do portfolia přidávat ani z něj odebírat finanční prostředky. To znamená, že nákup aktiv je v úrovních $t = 1, \dots, T-1$ plně financován z prodeje aktiv v totožné úrovni. Tuto skutečnost vyjadřuje následující rovnice

$$\sum_{i=1}^I b_{t,i}^k = \sum_{i=1}^I s_{t,i}^k, \quad t = 1, \dots, T-1, \quad k = 1, \dots, K. \quad (2.19)$$

Dále kromě zakázání krátkých prodejů lze stanovit omezení na velikost nákupu, resp. prodeje, aktiv. Omezení shora $\bar{b}_{t,i}^k, \bar{b}_{0,i}$, resp. $\bar{s}_{t,i}^k$, mohou být dána například burzou, omezení zdola $\underline{b}_{t,i}^k, \underline{b}_{0,i}$, resp. $\underline{s}_{t,i}^k$, si může stanovit sám investor. Investor se totiž může rozhodnout, že se mu vyplatí vlastnit aktiva až od určitého finančního objemu (jinak by se mohlo stát, že by dle modelu měl vlastnit velké množství aktiv ovšem s malými podíly a jeho portfolio by bylo velmi roztržštěné). Tato omezení se zapíše ve tvaru

$$\begin{aligned} 0 &\leq \underline{b}_{0,i} \leq b_{0,i} \leq \bar{b}_{0,i}, \quad i = 1, \dots, I, \\ 0 &\leq \underline{b}_{t,i}^k \leq b_{t,i}^k \leq \bar{b}_{t,i}^k, \quad t = 1, \dots, T-1, \quad k = 1, \dots, K, \quad i = 1, \dots, I, \\ 0 &\leq \underline{s}_{t,i}^k \leq s_{t,i}^k \leq \bar{s}_{t,i}^k, \quad t = 1, \dots, T-1, \quad k = 1, \dots, K, \quad i = 1, \dots, I. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Základní model finančního plánování se zahrnutím transakčních nákladů má tvar

$$\begin{aligned}
& \min_{\mathbf{x}, \mathbf{b}, \mathbf{s}} \sum_{k=1}^K p_k [D^- q^k - D^+ y^k] \\
\text{za} \quad & (2.15), (2.16), (2.18), (2.19), \\
& y^k \geq 0, \quad k = 1, \dots, K, \\
& q^k \geq 0, \quad k = 1, \dots, K, \\
& x_{t,i}^k \geq 0, \quad t = 0, \dots, T-1, \quad k = 1, \dots, K, \quad i = 1, \dots, I, \\
& \mathbf{x}_t^k = \mathbf{x}_t^j, \quad \forall j, k = 1, \dots, K, \quad j \neq k : \boldsymbol{\xi}^{t,k} = \boldsymbol{\xi}^{t,j}, \quad t = 0, \dots, T-1, \\
& 0 \leq \underline{b}_{0,i} \leq b_{0,i} \leq \bar{b}_{0,i}, \quad i = 1, \dots, I, \\
& 0 \leq \underline{b}_{t,i}^k \leq b_{t,i}^k \leq \bar{b}_{t,i}^k, \quad t = 1, \dots, T-1, \quad k = 1, \dots, K, \quad i = 1, \dots, I, \\
& \mathbf{b}_t^k = \mathbf{b}_t^j, \quad \forall j, k = 1, \dots, K, \quad j \neq k : \boldsymbol{\xi}^{t,k} = \boldsymbol{\xi}^{t,j}, \quad t = 1, \dots, T-1, \\
& 0 \leq \underline{s}_{t,i}^k \leq s_{t,i}^k \leq \bar{s}_{t,i}^k, \quad t = 1, \dots, T-1, \quad k = 1, \dots, K, \quad i = 1, \dots, I, \\
& \mathbf{s}_t^k = \mathbf{s}_t^j, \quad \forall j, k = 1, \dots, K, \quad j \neq k : \boldsymbol{\xi}^{t,k} = \boldsymbol{\xi}^{t,j}, \quad t = 1, \dots, T-1.
\end{aligned}$$

Základní model finančního plánování předpokládá, že cílem investora je mít v posledním období T naspořenou částku G . Tento model díky tomu, že pouze minimalizuje výsledný schodek q , nese velké riziko. Abychom základní model přiblížili rozhodování racionálního investora, zapracujeme do něj požadavek na minimalizaci rizika při dosažení požadované hodnoty portfolia.

2.3.2 Mean-CVaR model

Mean-CVaR model problému investora [3, 10] minimalizuje celkové riziko investice za podmínky, že střední hodnota portfolia bude alespoň rovna požadované cílové částce G . Jako míru rizika lze v nejjednodušším případě uvažovat rozptyl (tzv. Mean-Variance model [6]), ovšem takovýto model není lineární (jedná se o úlohu kvadratického programování) a velmi obtížně se v praxi řeší. Příkladem lineárního modelu je minimalizace CVaR $_{\alpha}$ ². Mean-CVaR model zobecňuje základní model problému investora zohledňující transakční náklady. Podmínka určující, že střední hodnota portfolia na konci investičního období očištěného o transakční náklady na prodej bude alespoň rovna požadované částce G , má tvar

$$\sum_{k=1}^K p_k (1 - c_s) \sum_{i=1}^I [\xi_{T,i}^k x_{T-1,i}^k] \geq G. \quad (2.21)$$

Omezení počátečního kapitálu (2.15), podmínka (2.16) na určení hodnoty rizikových aktiv v časech t , $t = 1, \dots, T-1$, a skutečnost (2.19), že nákup aktiv je v každé úrovni plně financován z prodeje aktiv, zůstávají vzhledem k formulaci základního modelu se zahrnutím transakčních nákladů nezměněny. Výsledná

²Pro náhodnou veličinu L vyjadřující ztrátu portfolia a míru spolehlivosti $\alpha \in (0,1)$ definujeme *podmíněnou hodnotu v riziku na hladině α* (anglicky *Conditional Value at Risk*, zkráceně CVaR $_{\alpha}$) vztahem $\text{CVaR}_{\alpha}(L) = \inf \left\{ a \in \mathbb{R} : a + \frac{1}{1-\alpha} \mathbb{E}[\max(0, L - a)] \right\}$ [12].

úloha Mean-CVaR modelu je ve tvaru

$$\begin{aligned}
& \min_{\mathbf{x}, \mathbf{b}, \mathbf{s}, a, z^k} \left\{ a + \frac{1}{1 - \alpha} \sum_{k=1}^K p_k z^k \right\} \\
\text{za} & \quad (2.15), (2.16), (2.19), (2.21), \\
& \quad z^k \geq 0, \quad k = 1, \dots, K, \\
& \quad z^k \geq -a - (1 - c_s) \sum_{i=1}^I [\xi_{T,i} x_{T-1,i}^k], \quad k = 1, \dots, K, \\
& \quad x_{t,i}^k \geq 0, \quad t = 0, \dots, T-1, \quad k = 1, \dots, K, \quad i = 1, \dots, I, \\
& \quad \mathbf{x}_t^k = \mathbf{x}_t^j, \quad \forall j, k = 1, \dots, K, \quad j \neq k : \boldsymbol{\xi}^{t,k} = \boldsymbol{\xi}^{t,j}, \quad t = 0, \dots, T-1, \\
& \quad 0 \leq \underline{b}_{0,i} \leq b_{0,i} \leq \bar{b}_{0,i}, \quad i = 1, \dots, I, \\
& \quad 0 \leq \underline{b}_{t,i}^k \leq b_{t,i}^k \leq \bar{b}_{t,i}^k, \quad t = 1, \dots, T-1, \quad k = 1, \dots, K, \quad i = 1, \dots, I, \\
& \quad \mathbf{b}_t^k = \mathbf{b}_t^j, \quad \forall j, k = 1, \dots, K, \quad j \neq k : \boldsymbol{\xi}^{t,k} = \boldsymbol{\xi}^{t,j}, \quad t = 1, \dots, T-1, \\
& \quad 0 \leq \underline{s}_{t,i}^k \leq s_{t,i}^k \leq \bar{s}_{t,i}^k, \quad t = 1, \dots, T-1, \quad k = 1, \dots, K, \quad i = 1, \dots, I, \\
& \quad \mathbf{s}_t^k = \mathbf{s}_t^j, \quad \forall j, k = 1, \dots, K, \quad j \neq k : \boldsymbol{\xi}^{t,k} = \boldsymbol{\xi}^{t,j}, \quad t = 1, \dots, T-1.
\end{aligned}$$

2.3.3 Model zohledňující riziko na každé úrovni

Mean-CVaR model minimalizuje riziko v posledním investičním období a to za podmínky, že střední hodnota portfolia na koncové úrovni je alespoň rovna investičnímu cíli G . Ve skutečnosti je možné, že hodnota portfolia v prostřední části investičního období ($t = 1, \dots, T-1$) významně fluktuuje. Investorovi se proto může s velkou pravděpodobností stát, že než vůbec dosáhne dlouhodobého cíle v okamžiku T , zbankrotuje. Z tohoto důvodu je vhodné do základního modelu uvažujícího transakční náklady zapracovat podmínku zohledňující kontrolu rizika na každé investiční úrovni. Nyní představíme pokročilejší model, který minimalizuje vážený součet celkového CVaR_α a CVaR_α na jednotlivých úrovních. Podmínka na stanovení počátečního kapitálu (2.15), omezení hodnoty rizikových aktiv (2.16), podmínka (2.19) vyjadřující, že nákup aktiv je v každém období plně financován z prodeje aktiv v tomtéž období, a požadavek (2.21) na minimální střední hodnotu portfolia na konci investičního období zůstávají totožné s podmínkami vyskytujícími se v Mean-CVaR modelu. Model minimalizující váže-

ný součet celkového CVaR_α a CVaR_α na jednotlivých úrovních má tvar

$$\begin{aligned}
& \min_{\mathbf{x}, \mathbf{b}, \mathbf{s}, a, z^k, z_t^k} \left\{ \kappa \left[a + \frac{1}{1-\alpha} \sum_{k=1}^K p_k z^k \right] + \sum_{t=1}^T \lambda_t \left[a + \frac{1}{1-\alpha} \sum_{k=1}^K p_k z_t^k \right] \right\} \\
\text{za} \quad & (2.15), (2.16), (2.19), (2.21), \\
& z^k \geq 0, \quad k = 1, \dots, K, \\
& z^k \geq -a - (1 - c_s) \sum_{i=1}^I [\xi_{T,i} x_{T-1,i}^k], \quad k = 1, \dots, K, \\
& z_t^k \geq 0, \quad t = 1, \dots, T, \quad k = 1, \dots, K, \\
& z_1^k \geq -a - \sum_{i=1}^I [\xi_{1,i} x_{0,i}^k + (1 - c_b) b_{1,i}^k - (1 + c_s) s_{1,i}^k], \quad k = 1, \dots, K, \\
& z_t^k \geq -a - \sum_{i=1}^I [(\xi_{t,i} x_{t-1,i}^k + (1 - c_b) b_{t,i}^k - (1 + c_s) s_{t,i}^k) \\
& \quad - (\xi_{t-1,i} x_{t-2,i}^k + (1 - c_b) b_{t-1,i}^k - (1 + c_s) s_{t-1,i}^k)], \\
& \quad t = 2, \dots, T-1, \quad k = 1, \dots, K, \\
& z_T^k \geq -a - \sum_{i=1}^I [(1 - c_s) \xi_{T,i} x_{T-1,i}^k \\
& \quad - (\xi_{T-1,i} x_{T-2,i}^k + (1 - c_b) b_{T-1,i}^k - (1 + c_s) s_{T-1,i}^k)], \\
& \quad k = 1, \dots, K, \\
& z_t^k = z_t^j, \quad \forall j, k = 1, \dots, K, \quad j \neq k : \boldsymbol{\xi}^{t,k} = \boldsymbol{\xi}^{t,j}, \quad t = 1, \dots, T-1, \\
& x_{t,i}^k \geq 0, \quad t = 0, \dots, T-1, \quad k = 1, \dots, K, \quad i = 1, \dots, I, \\
& \mathbf{x}_t^k = \mathbf{x}_t^j, \quad \forall j, k = 1, \dots, K, \quad j \neq k : \boldsymbol{\xi}^{t,k} = \boldsymbol{\xi}^{t,j}, \quad t = 0, \dots, T-1, \\
& 0 \leq \underline{b}_{0,i} \leq b_{0,i} \leq \bar{b}_{0,i}, \quad i = 1, \dots, I, \\
& 0 \leq \underline{b}_{t,i}^k \leq b_{t,i}^k \leq \bar{b}_{t,i}^k, \quad t = 1, \dots, T-1, \quad k = 1, \dots, K, \quad i = 1, \dots, I, \\
& \mathbf{b}_t^k = \mathbf{b}_t^j, \quad \forall j, k = 1, \dots, K, \quad j \neq k : \boldsymbol{\xi}^{t,k} = \boldsymbol{\xi}^{t,j}, \quad t = 1, \dots, T-1, \\
& 0 \leq \underline{s}_{t,i}^k \leq s_{t,i}^k \leq \bar{s}_{t,i}^k, \quad t = 1, \dots, T-1, \quad k = 1, \dots, K, \quad i = 1, \dots, I, \\
& \mathbf{s}_t^k = \mathbf{s}_t^j, \quad \forall j, k = 1, \dots, K, \quad j \neq k : \boldsymbol{\xi}^{t,k} = \boldsymbol{\xi}^{t,j}, \quad t = 1, \dots, T-1,
\end{aligned}$$

kde váha $\lambda_t \in [0, +\infty)$ označuje, nakolik je dané investiční období pro investora důležité. Čím vyšší je parametr λ_t , tím vyšší prioritu investor přiřazuje investičnímu období t . Váha $\kappa \in [0, +\infty)$ značí, nakolik je pro investora podstatný celkový CVaR_α .

Kapitola 3

Generování scénářů

Podstatnou součástí testování modelů je generování scénářů. Ve většině případů máme jedna zdrojová data (jednu časovou řadu), ovšem pro účely testování je nezbytné mít k dispozici vysoký počet dat s obdobnou strukturou, jako mají zadaná data. Naším cílem je vygenerovat scénáře, které se budou řídit stejným rozdělením, které mají dostupná data. Jednou z možností, jak scénáře generovat, je metoda momentů [8].

3.1 Metoda momentů

Představme nejprve dvě klíčové transformace, které se v algoritmu generování scénářů vyskytují.

3.1.1 Kubická transformace

Cílem kubické transformace je vygenerovat jednorozměrnou veličinu \tilde{X}_i , jejíž první čtyři momenty $E \tilde{X}_i^k$, $k = 1, \dots, 4$, budou shodné s požadovanými momenty. Nejprve vygenerujeme n vzájemně nezávislých náhodných veličin X_i z libovolného rozdělení, u kterého známe prvních 12 momentů, čímž dostaneme vektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$. Kubická transformace jednotlivých složek vektoru \mathbf{X}

$$\tilde{X}_i = a_i + b_i X_i + c_i X_i^2 + d_i X_i^3, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.1)$$

slouží k nalezení vektoru $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n)$, jehož každá složka má první čtyři momenty totožné s požadovanými momenty. Abychom našli koeficienty a_i, b_i, c_i, d_i , vyjádříme první čtyři momenty transformované veličiny \tilde{X}_i pomocí prvních čtyř

momentů náhodné veličiny X_i , $i = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \tilde{X}_i &= a_i + b_i \mathbb{E} X_i + c_i \mathbb{E} X_i^2 + d_i \mathbb{E} X_i^3, \\
\mathbb{E} \tilde{X}_i^2 &= a_i^2 + 2a_i b_i \mathbb{E} X_i + (2a_i c_i + b_i^2) \mathbb{E} X_i^2 + (2a_i d_i + 2b_i c_i) \mathbb{E} X_i^3 \\
&\quad + (2b_i d_i + c_i^2) \mathbb{E} X_i^4 + 2c_i d_i \mathbb{E} X_i^5 + d_i^2 \mathbb{E} X_i^6, \\
\mathbb{E} \tilde{X}_i^3 &= a_i^3 + 3a_i^2 b_i \mathbb{E} X_i + (3a_i^2 c_i + 3a_i b_i^2) \mathbb{E} X_i^2 + (6a_i b_i c_i + 3a_i^2 d_i + b_i^3) \mathbb{E} X_i^3 \\
&\quad + (3a_i c_i^2 + 6a_i b_i d_i + 3c_i b_i^2) \mathbb{E} X_i^4 + (6a_i c_i d_i + 3b_i^2 d_i + 3b_i c_i^2) \mathbb{E} X_i^5 \\
&\quad + (3a_i d_i^2 + 6b_i c_i d_i + c_i^3) \mathbb{E} X_i^6 + (3b_i d_i^2 + 3c_i 2d_i) \mathbb{E} X_i^7 + 3c_i d_i^2 \mathbb{E} X_i^8 \\
&\quad + d_i^3 \mathbb{E} X_i^9, \\
\mathbb{E} \tilde{X}_i^4 &= a_i^4 + 4a_i^3 b_i \mathbb{E} X_i + (4a_i^3 c_i + 6a_i^2 b_i^2) \mathbb{E} X_i^2 \\
&\quad + (4a_i b_i^3 + 12a_i^2 b_i c_i + 4a_i^3 d_i) \mathbb{E} X_i^3 \\
&\quad + (b_i^4 + 12a_i b_i^2 c_i + 6a_i^2 c_i^2 + 12a_i^2 b_i d_i) \mathbb{E} X_i^4 \\
&\quad + (4b_i^3 c_i + 12a_i b_i c_i^2 + 12a_i b_i^2 d_i + 12a_i^2 c_i d_i) \mathbb{E} X_i^5 \\
&\quad + (6b_i^2 c_i^2 + 4a_i c_i^3 + 4b_i^3 d_i + 24a_i b_i c_i d_i + 6a_i^2 d_i^2) \mathbb{E} X_i^6 \\
&\quad + (4b_i c_i^3 + 12b_i^2 c_i d_i + 12a_i c_i^2 d_i + 12a_i b_i d_i^2) \mathbb{E} X_i^7 \\
&\quad + (c_i^4 + 12b_i c_i^2 d_i + 6b_i^2 d_i^2 + 12a_i c_i d_i^2) \mathbb{E} X_i^8 \\
&\quad + (4c_i^3 d_i + 12b_i c_i d_i^2 + 4a_i d_i^3) \mathbb{E} X_i^9 \\
&\quad + (6c_i^2 d_i^2 + 4b_i d_i^3) \mathbb{E} X_i^{10} + 4c_i d_i^3 \mathbb{E} X_i^{11} + d_i^4 \mathbb{E} X_i^{12}. \tag{3.2}
\end{aligned}$$

Zde vidíme, proč je nutné náhodné veličiny X_i generovat z rozdělení s alespoň dvanácti známými momenty. Parametry a_i, b_i, c_i, d_i získáme řešením soustavy 4 rovnic metodou nejmenších čtverců, která minimalizuje odchylku prvních čtyř momentů náhodné veličiny \tilde{X}_i od cílových momentů. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že náhodná veličina \tilde{X}_i má nulovou střední hodnotu a jednotkový rozptyl. Zvolená metoda nám dává jistotu, že i v případě, že soustava rovnic nemá řešení, získané hodnoty koeficientů zaručují, že první čtyři momenty budou tak blízko požadovaným momentům, jak jen je možné.

3.1.2 Maticová transformace

V níže uvedeném algoritmu generování scénářů kromě kubické transformace (3.1) využíváme maticovou transformaci

$$\mathbf{Y} = L\tilde{\mathbf{X}}. \tag{3.3}$$

Matice $L = (L_{ij})_{i,j=1}^n$ je dolní trojúhelníková matice, kterou získáme Choleského rozkladem ¹ korelační matice R , tedy

$$R = LL^T.$$

Věta 3.1. (Převzato z [8].) *Nechť $\tilde{\mathbf{X}}$ je n -rozměrná náhodná veličina, pro kterou platí*

$$i) \mathbb{E} \tilde{\mathbf{X}}^k, k = 1, \dots, 4, \text{ existují,}$$

¹Nechť A je symetrická pozitivně definitní matice, pak existuje *Choleského rozklad*, tj. existuje dolní trojúhelníková pozitivně definitní matice L taková, že $A = LL^T$ [5].

$$ii) \mathbf{E} \tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{0} \text{ a } \mathbf{E} \tilde{\mathbf{X}}^2 = \mathbf{1},$$

iii) jednorozměrné náhodné veličiny \tilde{X}_i, \tilde{X}_j jsou vzájemně nezávislé pro $i \neq j$.

Předpokládejme dále, že L je dolní trojúhelníková matice řádu n taková, že $R = LL^T$, kde R je korelační matice. Definujme náhodnou veličinu \mathbf{Y} jako $\mathbf{Y} = L\tilde{\mathbf{X}}$. Pak pro ni platí

$$i) \mathbf{E} \mathbf{Y}^k, k = 1, \dots, 4, \text{ existují,}$$

$$ii) \mathbf{E} \mathbf{Y} = \mathbf{0} \text{ a } \mathbf{E} \mathbf{Y}^2 = \mathbf{1},$$

$$iii) \mathbf{Y} \text{ má korelační matici } R = LL^T,$$

$$iv) \mathbf{E} Y_i^3 = \sum_{i=1}^n L_{i,j}^3 \mathbf{E} \tilde{X}_j^3,$$

$$v) \mathbf{E} Y_i^4 = 3 + \sum_{i=1}^n L_{i,j}^4 (\mathbf{E} \tilde{X}_j^4 - 3).$$

Důkaz. Body i) a ii) jsou zřejmé.

$$\begin{aligned} iii) \quad \text{cor}(Y_i, Y_j) &= \frac{\text{cov}(Y_i, Y_j)}{\sqrt{\mathbf{E} Y_i^2} \sqrt{\mathbf{E} Y_j^2}} = \mathbf{E} \left[\sum_{k=1}^n L_{i,k} \tilde{X}_k \sum_{l=1}^n L_{j,l} \tilde{X}_l \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n L_{i,k} L_{j,l} \mathbf{E}(\tilde{X}_k \tilde{X}_l) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n L_{i,k} L_{j,l} \delta_{k,l} \\ &= \sum_{k=1}^n L_{i,k} L_{j,k} = \sum_{k=1}^n L_{i,k} L_{k,j}^T = R_{i,j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} iv) \quad \mathbf{E} Y_i^3 &= \mathbf{E} \left[\sum_{k=1}^n L_{i,k} \tilde{X}_k \sum_{l=1}^n L_{i,l} \tilde{X}_l \sum_{m=1}^n L_{i,m} \tilde{X}_m \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n L_{i,k} L_{i,l} L_{i,m} \mathbf{E}(\tilde{X}_k \tilde{X}_l \tilde{X}_m) = \sum_{k=1}^n L_{i,k}^3 \mathbf{E} \tilde{X}_k^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v) \quad \mathbf{E} Y_i^4 &= \mathbf{E} \left[\sum_{k=1}^n L_{i,k} \tilde{X}_k \sum_{l=1}^n L_{i,l} \tilde{X}_l \sum_{m=1}^n L_{i,m} \tilde{X}_m \sum_{r=1}^n L_{i,r} \tilde{X}_r \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \sum_{r=1}^n L_{i,k} L_{i,l} L_{i,m} L_{i,r} \mathbf{E}(\tilde{X}_k \tilde{X}_l \tilde{X}_m \tilde{X}_r) \\ &= \sum_{k=1}^n L_{i,k}^4 \mathbf{E} \tilde{X}_k^4 + 3 \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n L_{i,k}^2 L_{i,l}^2 \mathbf{E} \tilde{X}_k^2 \mathbf{E} \tilde{X}_l^2 - \sum_{k=1}^n L_{i,k}^4 (\mathbf{E} \tilde{X}_k^2)^2 \right] \\ &= \sum_{k=1}^n L_{i,k}^4 \mathbf{E} \tilde{X}_k^4 + 3 \left[\sum_{k=1}^n L_{i,k}^2 \sum_{l=1}^n L_{i,l}^2 - \sum_{k=1}^n L_{i,k}^4 \right] \\ &= \sum_{k=1}^n L_{i,k}^4 [\mathbf{E} \tilde{X}_k^4 - 3] + 3 \sum_{k=1}^n L_{i,k} L_{k,i}^T \sum_{l=1}^n L_{i,l} L_{l,i}^T \\ &= \sum_{k=1}^n L_{i,k}^4 [\mathbf{E} \tilde{X}_k^4 - 3] + 3 R_{i,i} R_{i,i} = \sum_{k=1}^n L_{i,k}^4 [\mathbf{E} \tilde{X}_k^4 - 3] + 3 \end{aligned}$$

□

Maticová transformace (3.3) slouží k nalezení náhodného vektoru \mathbf{Y} , který má nulovou střední hodnotu, jednotkový rozptyl, specifikovaný třetí a čtvrtý moment a korelační matici $R = LL^T$.

3.1.3 Algoritmus generování scénářů

Nyní přistupme k samotnému algoritmu. Hlavní myšlenkou metody momentů je předpoklad, že vygenerovaný scénář má stejné rozdělení jako zadaná data právě tehdy, když se shodují první čtyři momenty a korelační matice obou rozdělení. Označme $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)$ vektor zdrojových dat.

V prvním kroku algoritmu je nutné zjistit z dat výběrové momenty prvního až čtvrtého řádu (*cílové momenty*), označme je $\mathbf{E} \mathbf{Z}^k$, $k = 1, \dots, 4$, a výběrovou korelační matici R typu $n \times n$ (*cílová korelační matice*). Jelikož maticová transformace vyžaduje dle Věty 3.1 nulovou střední hodnotu a jednotkový rozptyl náhodného vektoru, budeme namísto náhodného vektoru \mathbf{Z} generovat náhodný vektor \mathbf{Y} s $\mathbf{E} \mathbf{Y} = \mathbf{0}$, $\mathbf{E} \mathbf{Y}^2 = \mathbf{1}$ a korelační maticí R . Vektor \mathbf{Z} následně spočítáme ze vztahu

$$\mathbf{Z} = \alpha \mathbf{Y} + \beta,$$

přičemž

$$\alpha = (\mathbf{E} \mathbf{Z}^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \beta = \mathbf{E} \mathbf{Z}, \quad \mathbf{E} \mathbf{Y}^3 = \frac{\mathbf{E} \mathbf{Z}^3}{\alpha^3}, \quad \mathbf{E} \mathbf{Y}^4 = \frac{\mathbf{E} \mathbf{Z}^4}{\alpha^4}.$$

Dále pomocí Choleského rozkladu $R = LL^T$ získáme dolní trojúhelníkovou matici L . Nyní nám zbývá určit první čtyři momenty jednorozměrné náhodné veličiny \tilde{X}_i tak, aby náhodná veličina \mathbf{Y} vzniklá maticovou transformací $\mathbf{Y} = L\tilde{\mathbf{X}}$ měla cílové momenty a korelační matici R . K tomu využijeme inverzní vztahy odvozené z bodů *iv*) a *v*) Věty 3.1

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \tilde{X}_i^3 &= \frac{1}{L_{i,i}^3} \left(\mathbf{E} Y_i^3 - \sum_{k=1}^{i-1} L_{i,k}^3 \mathbf{E} \tilde{X}_k^3 \right), \\ \mathbf{E} \tilde{X}_i^4 &= \frac{1}{L_{i,i}^4} \left(\mathbf{E} Y_i^4 - 3 - \sum_{k=1}^{i-1} L_{i,k}^4 \left[\mathbf{E} \tilde{X}_k^4 - 3 \right] \right) + 3. \end{aligned}$$

Následně vypočítáme hodnoty koeficientů a_i, b_i, c_i a d_i , které se vyskytují v kubické transformaci (3.1), postupem popsaným v odstavci 3.1.1.

V dalším kroku vygenerujeme n vzájemně nezávislých náhodných veličin X_i z libovolného rozdělení, u kterého známe prvních 12 momentů, a provedeme kubickou transformaci (nyní již známe hodnoty koeficientů a_i, b_i, c_i a d_i), čímž získáme náhodnou veličinu \tilde{X}_i . Poté provedeme maticovou transformaci $\mathbf{Y} = L\tilde{\mathbf{X}}$, díky čemuž bude mít náhodný vektor \mathbf{Y} správnou korelační matici R . Na závěr transformujeme vektor \mathbf{Y} pomocí vztahu

$$\mathbf{Z} = \alpha \mathbf{Y} + \beta,$$

čímž získáme náhodný vektor \mathbf{Z} , který má požadované cílové momenty a korelační matici R .

Kapitola 4

Vzdálenost mezi stochastickými scénářovými procesy

V této kapitole představíme základní definice týkající se problematiky stromových procesů a měření vzdálenosti mezi nimi. Všechny zde uváděné definice jsou převzaty z publikací [14, 15, 16].

Připomeňme nejprve základní pojmy, se kterými dále pracujeme [2, 11]. Systém \mathcal{A} podmnožin množiny $\Omega \neq \emptyset$ se nazývá σ -algebra, jestliže splňuje

- $\emptyset \in \mathcal{A}$,
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^C \in \mathcal{A}$,
- $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

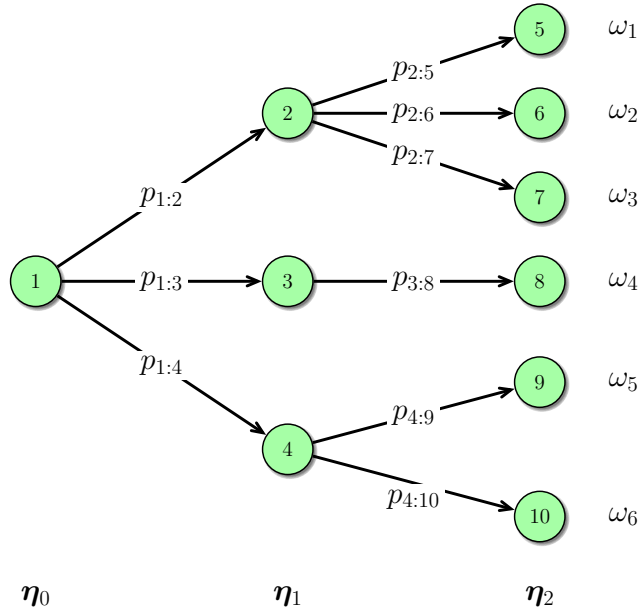
Rodina reálných náhodných veličin $\{X_t, t \in T\}$ definovaných na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, kde $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ je pravděpodobnostní prostor a $T \subset \mathbb{R}$, se nazývá náhodný proces. Jestliže $T = \mathbb{Z}$, mluvíme o procesu s diskretním časem, pokud $T = [a, b]$, kde $-\infty \leq a < b \leq \infty$, hovoříme o procesu se spojitým časem. Pokud náhodné veličny X_t nabývají pouze diskretních hodnot, mluvíme o procesu s diskretními stavy. Jestliže nabývají hodnot z nějakého intervalu, mluvíme o procesu se spojitými stavy. Řekneme, že reálný náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ je měřitelný, jestliže zobrazení $(\omega, t) \mapsto X_t(\omega)$ je $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_T$ -měřitelné, kde \mathcal{B}_T je σ -algebra borelovských podmnožin T a $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_T$ značí součinovou σ -algebru.

Uvažujme náhodný proces $\nu = (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_T)$ definovaný na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Proces ν je proces s diskretním časem a diskretními stavy. V našem případě je podstatné pamatovat si celou historii do času t . Zachovejme značení z kapitoly 2 a označme $\nu^t = (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_t)$, $t \in \mathbf{T} = \{0, 1, \dots, T\}$, historii do času t .

Definice 4.1. (Převzato z [15].) Rostoucí posloupnost \mathcal{F} σ -algeber $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_T$ definovaná na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ se nazývá *filtrace*. Prvním prvkem této posloupnosti je triviální σ -algebra $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

Skutečnost, že proces ν^t je \mathcal{F}_t měřitelný, znázorníme zápisem $\nu^t \triangleleft \mathcal{F}_t$. Souhrnně můžeme psát $\nu \triangleleft \mathcal{F}$, pokud $\nu^t \triangleleft \mathcal{F}_t$ pro všechna t .

Definice 4.2. (Převzato z [16].) Proces $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_T)$ popisující výstup z náhodného procesu ν se nazývá *oceňovací proces*.



Obrázek 4.1: Stromový proces. Zde jsou v kroužcích uvedena čísla uzlů, protože je však systém číslování uzlů v této práci zachován, budeme v dalších příkladech do kroužků uvádět hodnoty uzlů (tedy konkrétní realizace náhodné veličiny η_t).

Na složku oceňovacího procesu ξ_t lze tedy nahlížet jako na funkci ν^t , tudíž $\xi_t = f_t(\nu^t)$, kde funkce f_t je \mathcal{F}_t měřitelná. Oceňovací proces ξ je měřitelný vzhledem k filtraci \mathcal{F} , což značíme symbolem $\xi \triangleleft \mathcal{F}$.

Definice 4.3. (Převzato z [15].) Náhodný proces ν , pro který posloupnost $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_T$ je filtrace, se nazývá *stromový proces*.

Každý konečný náhodný proces lze reprezentovat pomocí stromového procesu. První uzel stromu se nazývá kořen, koncové uzly se nazývají listy, značíme je ω . Každý uzel, který není listem, je pojmenován rodič a uzly z něj přímo vycházející označujeme pojmem potomci či následníci. Úroveň stromu, ve kterých se nacházejí jednotlivé uzly, značíme písmenem $t, t = 0, \dots, T$. Pravděpodobnosti přechodu $p_{n:i}$ mezi dvěma po sobě jdoucími uzly indexujeme číslem uzlu rodiče n a číslem uzlu potomka i . Celkový počet potomků uzlu n značíme $s(n)$. Součet pravděpodobností přechodu z každého rodiče je roven jedné. Při grafickém znázornění jednotlivé uzly stromu číslováme v této práci odshora směrem dolů a zleva doprava, kořen má číslo 1. Příklad typického stromu je uveden na obrázku 4.1.

Definice 4.4. (Převzato z [15].) Uspořádaná dvojice sestávající ze stromového procesu ν^t a oceňovacího procesu ξ^t se nazývá *procesové a informační uspořádání*, značíme jej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \xi)$.

Nyní uvažujme úlohu, ve které se snažíme maximalizovat výnos z naší investice, přičemž během doby trvání investice můžeme na základě dílčích výsledků naše rozhodování týkající se dané investice měnit. Představme si, že na počátku obchodu se rozhodneme investovat určitou část našeho kapitálu do jedné komodity a zbylou část kapitálu do komodity druhé, například část našich prostředků investujeme do akcií a část do obligací. Na konci sledovaného období, řekněme po jednom měsíci, zjistíme výnos, který nám akcie a obligace vynesly, a na základě

této informace se rozhodneme, jakým způsobem přeskupíme náš kapitál mezi tato dvě aktiva na další sledované období. Tyto kroky následně aplikujeme v každém sledovaném období. Uvedený postup se nazývá vícestupňové programování (viz kapitola 2), matematicky lze úlohu zapsat ve tvaru

$$\min_{\mathbf{x}} \{E[H(\boldsymbol{\xi}^0, \mathbf{x}^0, \boldsymbol{\xi}^1, \mathbf{x}^1, \boldsymbol{\xi}^2, \dots, \mathbf{x}^{T-1}, \boldsymbol{\xi}^T, \mathbf{x}^T); \mathcal{F}] : \mathbf{x} \triangleleft \mathcal{F}, \mathbf{x} \in X\}, \quad (4.1)$$

kde $H(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$ je ztrátová funkce a $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{T-1})$ je vektor rozhodnutí, $\mathbf{x}_t \in X_t$. Podstatné je, že rozhodnutí \mathbf{x}_t v čase $t \in \mathbf{T}$ je založeno pouze na informaci, která je v tomto čase dostupná.

Uvedenou úlohu lze řešit aproximací náhodného procesu $\boldsymbol{\xi}$ se spojitými stavy procesem $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ s diskrétními stavy, který je definován na pravděpodobnostním prostoru $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$, a lze jej reprezentovat jako stromový proces. Problém (4.1) je možné přeformulovat do tvaru

$$\min_{\tilde{\mathbf{x}}} \{E[H(\tilde{\boldsymbol{\xi}}^0, \tilde{\mathbf{x}}^0, \tilde{\boldsymbol{\xi}}^1, \tilde{\mathbf{x}}^1, \tilde{\boldsymbol{\xi}}^2, \dots, \tilde{\mathbf{x}}^{T-1}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}^T, \tilde{\mathbf{x}}^T); \tilde{\mathcal{F}}] : \tilde{\mathbf{x}} \triangleleft \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{x}} \in X\}. \quad (4.2)$$

4.1 Vnořená vzdálenost

Naším cílem je změřit vzdálenost mezi problémy (4.1) a (4.2) a pomocí této vzdálenosti určit, zda je námi použitá aproximace vyhovující. K tomu využijeme koncept vnořené vzdálenosti, která udává vzdálenost dvou procesových a informačních uspořádání.

Nechť (Ξ, d) je polský prostor¹ a nechť $\mathcal{P}_1(\Xi, d)$ je třída borelovských pravděpodobnostních měr \mathbb{P} na (Ξ, d) takových, že

$$\int d(u, u_0) d\mathbb{P}(u) < \infty$$

pro všechna $u_0 \in \Xi$.

Definice 4.5. (Převzato z [14].) *Kantorovičova vzdálenost* $d_{\text{KA}}(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$ dvou pravděpodobnostních měr \mathbb{P} a \mathbb{Q} na (Ξ, d) je definována vztahem

$$d_{\text{KA}}(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) = \inf_{F_{X,Y}} \{E[d(X, Y)] : X \sim \mathbb{P}, Y \sim \mathbb{Q}\},$$

kde X , resp. Y , je náhodná veličina s rozdělením \mathbb{P} , resp. \mathbb{Q} , s hodnotami v \mathbb{R}^M , $d : \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M \mapsto \mathbb{R}$ je zadaná metrika a infimum probíhá přes všechny sdružené distribuční funkce $F_{X,Y}$ takové, že marginály $F_X = \mathbb{P}$, resp. $F_Y = \mathbb{Q}$.

Pomocí Kantorovičovy vzdálenosti je možné měřit vzdálenost $d_{\text{KA}}(\mathbb{P}, \tilde{\mathbb{P}})$ mezi spojitou distribuční funkcí procesu $\boldsymbol{\xi}$ a diskrétní distribuční funkcí procesu $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ na každé úrovni stromu. Není však možné pomocí ní měřit vzdálenost mezi náhodným procesem $\boldsymbol{\xi}$ daným spojitou distribuční funkcí a celým stromem, který obsahuje veškerou dostupnou informaci. Proto nyní představíme pojem vnořené vzdálenosti.

¹Řekneme, že topologický prostor (Ξ, d) je *polský*, jestliže je separabilní a metrizable úplnou metrikou [11].

Definice 4.6. (Převzato z [15].) Definujme metrické prostory Ξ_t rekurzivním postupem:

$$\Xi_1 := \mathbb{R}^M$$

se vzdáleností $d_1(u, v) := d(u, v)$,

$$\Xi_2 := \mathbb{R}^M \times \mathcal{P}_1(\Xi_1)$$

se vzdáleností $d_2((u, P), (v, Q)) := d(u, v) + \mathbf{d}_{\text{KA}}(P, Q; d_1)$,

$$\Xi_3 := \mathbb{R}^M \times \mathcal{P}_1(\Xi_2) = \mathbb{R}^M \times \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^M \times \mathcal{P}_1(\Xi_1))$$

se vzdáleností $d_3((u, P), (v, Q)) := d(u, v) + \mathbf{d}_{\text{KA}}(P, Q; d_2)$,

...

$$\Xi_T := \mathbb{R}^M \times \mathcal{P}_1(\Xi_{T-1})$$

se vzdáleností $d_T((u, P), (v, Q)) := d(u, v) + \mathbf{d}_{\text{KA}}(P, Q; d_{T-1})$.

Borelovské pravděpodobnostní rozdělení \mathbb{P} s konečnými prvními momenty na Ξ_T se nazývá *vnořené rozdělení délky T* , vzdálenost d_T se nazývá *vnořená vzdálenost*.

Uvažujme nyní dva oceňovací procesy ξ a $\tilde{\xi}$ s diskrétní množinou stavů, které jsou reprezentovány dvěma stromy s N , resp. \tilde{N} , listy. Označme ω_t předchůdce listu ω v čase $t = 0, \dots, T$, a $\tilde{\omega}_t$ předchůdce listu $\tilde{\omega}$ v čase $t = 0, \dots, T$. Binární relaci „být předchůdcem“ značíme dále v této kapitole symbolem \leq , zápis $m \leq \omega$ tedy znamená, že uzel m je předchůdcem (ne nutně přímým) listu ω . Vzdálenost mezi dvěma listy jednotlivých stromů definujeme vztahem

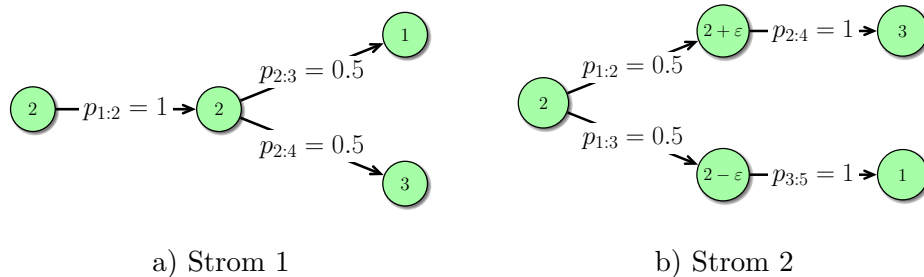
$$d(\omega, \tilde{\omega}) := \sum_{t=0}^T d_t(\xi(\omega_t), \tilde{\xi}(\tilde{\omega}_t)), \quad (4.3)$$

přičemž jako metrika d_t je uvažována absolutní hodnota.

Výpočet vnořené vzdálenosti dvou stromů lze dle [16] formulovat jako úlohu lineárního programování ve tvaru

$$\begin{aligned} & \underset{\pi}{\text{minimalizovat}} && \sum_i \sum_j \pi_{i,j} d_{i,j} \\ & \text{za podmíněk} && p_{m:\omega} = \frac{\sum_{j \geq n} \pi_{\omega,j}}{\sum_{i \geq m} \sum_{j \geq n} \pi_{i,j}}, \quad m \leq \omega, \quad \text{úroveň } n = \text{úroveň } m, \\ & && \tilde{p}_{n:\tilde{\omega}} = \frac{\sum_{i \geq m} \pi_{i,\tilde{\omega}}}{\sum_{i \geq m} \sum_{j \geq n} \pi_{i,j}}, \quad n \leq \tilde{\omega}, \quad \text{úroveň } m = \text{úroveň } n, \quad (4.4) \\ & && \sum_i \sum_j \pi_{i,j} = 1, \\ & && \pi_{i,j} \geq 0, \end{aligned}$$

kde $d_{i,j} = d(\omega_i, \tilde{\omega}_j)$ je metrika daná vztahem (4.3), $p_{m:\omega}$ je pravděpodobnost přechodu z uzlu m ležícího v prvním stromě do listu ω téhož stromu a $\tilde{p}_{n:\tilde{\omega}}$ je



Obrázek 4.2: Dva trojstupňové stromy. V kroužcích jsou uvedeny hodnoty uzlů.

pravděpodobnost přechodu z uzlu n ležícího ve druhém stromě do listu $\tilde{\omega}$ tohoto stromu.

Při výpočtu vnořené vzdálenosti pomocí algoritmu (4.4) tedy nejprve procházíme první strom a určujeme pravděpodobnosti přechodu z jednotlivých uzlů m do jednotlivých listů ω , přičemž musí být splněna podmínka, že uvažované uzly jsou vždy předchůdci uvažovaných listů. Tyto pravděpodobnosti jsou buďto zadány přímo anebo je lze snadno určit ze zadaného obrázku. Dle první podmínky uvedené úlohy lineárního programování se tato pravděpodobnost dává do rovnosti s podílem, v jehož čitateli se vyskytuje suma, jejíž index začíná na uzlu n druhého stromu, který se vyskytuje ve stejné úrovni jako uzel m v prvním stromě, a dále jde přes všechny jeho potomky až do koncového uzlu $\tilde{\omega}$. Protože ve druhém stromě se na úrovni odpovídající úrovni uzlu m může nacházet více než jeden uzel, je nutné danou podmínku $p_{m:\omega}$ uvažovat pro všechny uzly druhého stromu na této úrovni.

Pro splnění druhé podmínky dané úlohy je třeba výše popsany postup aplikovat i na druhý strom.

Příklad 4.1. (Zadání příkladu převzato z [15].) Výpočet vnořené vzdálenosti stromů uvedených na obrázku 4.2, parametr $\varepsilon \in (0,1)$.

K výpočtu vnořené vzdálenosti dvou stromů je nutné výše popsany algoritmus implementovat ve vhodném softwaru. Příklad detailně ilustruje skutečnost, že naše implementace dává výsledek shodný s výsledkem, který je prezentován v uvedené publikaci.

K řešení příkladu využijeme algoritmus (4.4). V prvním kroku je nutné spočítat vzdálenosti $d(\omega_i, \tilde{\omega}_j)$, k čemuž využijeme vztah (4.3):

$$\begin{aligned}
d(1,1) &:= d_0(1,1) = |0 - 0| = 0 \\
d(1,2) &:= d_0(1,1) = 0 \\
d(1,3) &:= d_0(1,1) = 0 \\
d(1,4) &:= d_0(1,1) = 0 \\
d(1,5) &:= d_0(1,1) = 0 \\
d(2,1) &:= d_0(1,1) = 0 \\
d(2,2) &:= d_0(1,1) + d_1(2,2) = |0 - 0| + |2 - (2 + \varepsilon)| = \varepsilon \\
d(2,3) &:= d_0(1,1) + d_1(2,3) = |0 - 0| + |2 - (2 - \varepsilon)| = \varepsilon \\
d(2,4) &:= d_0(1,1) + d_1(2,2) = \varepsilon \\
d(2,5) &:= d_0(1,1) + d_1(2,3) = \varepsilon \\
d(3,1) &:= d_0(1,1) = 0 \\
d(3,2) &:= d_0(1,1) + d_1(2,2) = \varepsilon \\
d(3,3) &:= d_0(1,1) + d_1(2,3) = \varepsilon \\
d(3,4) &:= d_0(1,1) + d_1(2,2) + d_2(3,4) = |0 - 0| + |2 - (2 + \varepsilon)| + |3 - 3| = \varepsilon \\
d(3,5) &:= d_0(1,1) + d_1(2,3) + d_2(3,5) = |0 - 0| + |2 - (2 - \varepsilon)| + |3 - 1| = \varepsilon + 2 \\
d(4,1) &:= d_0(1,1) = 0 \\
d(4,2) &:= d_0(1,1) + d_1(2,2) = \varepsilon \\
d(4,3) &:= d_0(1,1) + d_1(2,3) = \varepsilon \\
d(4,4) &:= d_0(1,1) + d_1(2,2) + d_2(4,4) = |0 - 0| + |2 - (2 + \varepsilon)| + |1 - 3| = \varepsilon + 2 \\
d(4,5) &:= d_0(1,1) + d_1(2,3) + d_2(4,5) = |0 - 0| + |2 - (2 - \varepsilon)| + |1 - 1| = \varepsilon
\end{aligned}$$

V dalším kroku určíme pravděpodobnosti přechodu $p_{m:\omega}$ z uzlu m do listu ω . Pravděpodobnosti přechodu mezi rodičem a potomkem jsou zadány, pravděpodobnosti přechodu mezi uzlem a jeho potomkem ve vyšších úrovních získáme vynásobením uvedených pravděpodobností. Nyní sestavíme podmínky $p_{m:\omega}$ úlohy (4.4). Je nutné si uvědomit, že indexy níže uvedených sum indexují rodiče a jeho potomky v dalších úrovních (\geq je symbolem binární relace „být potomkem“). Pro lepší názornost uvádíme v jednotlivých podmínkách konkrétní výčet rodičů a jejich potomků. Dále si uvědomme, že při procházení druhým stromem volíme vždy rodičem uzel, který se nachází na stejné úrovni jako aktuálně zvolený uzel prvního stromu.

Jako první tedy vybereme například koncový uzel $\omega = 3$:

$$\begin{aligned}
\omega = 3 : \quad m = 1, n = 1 : \quad p_{1:3} &= \frac{\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \pi_{3,j}}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{\tilde{N}} \pi_{i,j}} = p_{1:2} p_{2:3} = 0.5, \\
m = 2, n = 2 : \quad p_{2:3} &= \frac{\sum_{j=2,4} \pi_{3,j}}{\sum_{i=2}^N \sum_{j=2,4} \pi_{i,j}} = 0.5, \\
m = 2, n = 3 : \quad p_{2:3} &= \frac{\sum_{j=3,5} \pi_{3,j}}{\sum_{i=2}^N \sum_{j=3,5} \pi_{i,j}} = 0.5, \\
m = 3, n = 4 : \quad p_{3:3} &= \frac{\pi_{3,4}}{\pi_{3,4}} = 1, \\
m = 3, n = 5 : \quad p_{3:3} &= \frac{\pi_{3,5}}{\pi_{3,5}} = 1.
\end{aligned}$$

Následně zvolíme druhý koncový uzel prvního stromu, tedy $\omega = 4$:

$$\begin{aligned}
\omega = 4 : \quad m = 1, n = 1 : \quad p_{1:4} &= \frac{\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \pi_{4,j}}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{\tilde{N}} \pi_{i,j}} = p_{1:2} p_{2:4} = 0.5, \\
m = 2, n = 2 : \quad p_{2:4} &= \frac{\sum_{j=2,4} \pi_{4,j}}{\sum_{i=2}^N \sum_{j=2,4} \pi_{i,j}} = 0.5, \\
m = 2, n = 3 : \quad p_{2:4} &= \frac{\sum_{j=3,5} \pi_{4,j}}{\sum_{i=2}^N \sum_{j=3,5} \pi_{i,j}} = 0.5, \\
m = 4, n = 4 : \quad p_{4:4} &= \frac{\pi_{4,4}}{\pi_{4,4}} = 1, \\
m = 4, n = 5 : \quad p_{4:4} &= \frac{\pi_{4,5}}{\pi_{4,5}} = 1.
\end{aligned}$$

Ve druhém stromě určíme pravděpodobnosti přechodu $p_{n:\tilde{\omega}}$ z uzlu n do listu $\tilde{\omega}$ obdobným způsobem jako výše a sestavíme příslušné podmínky. Zvolíme koncový uzel $\tilde{\omega} = 4$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega} = 4 : \quad n = 1, m = 1 : \quad \tilde{p}_{1:4} &= \frac{\sum_{i=1}^N \pi_{i,4}}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{\tilde{N}} \pi_{i,j}} = \tilde{p}_{1:2} \tilde{p}_{2:4} = 0.5, \\
n = 2, m = 2 : \quad \tilde{p}_{2:4} &= \frac{\sum_{i=2}^N \pi_{i,4}}{\sum_{i=2}^N \sum_{j=2,4} \pi_{i,j}} = 1, \\
n = 4, m = 3 : \quad \tilde{p}_{4:4} &= \frac{\pi_{3,4}}{\pi_{3,4}} = 1, \\
n = 4, m = 4 : \quad \tilde{p}_{4:4} &= \frac{\pi_{4,4}}{\pi_{4,4}} = 1.
\end{aligned}$$

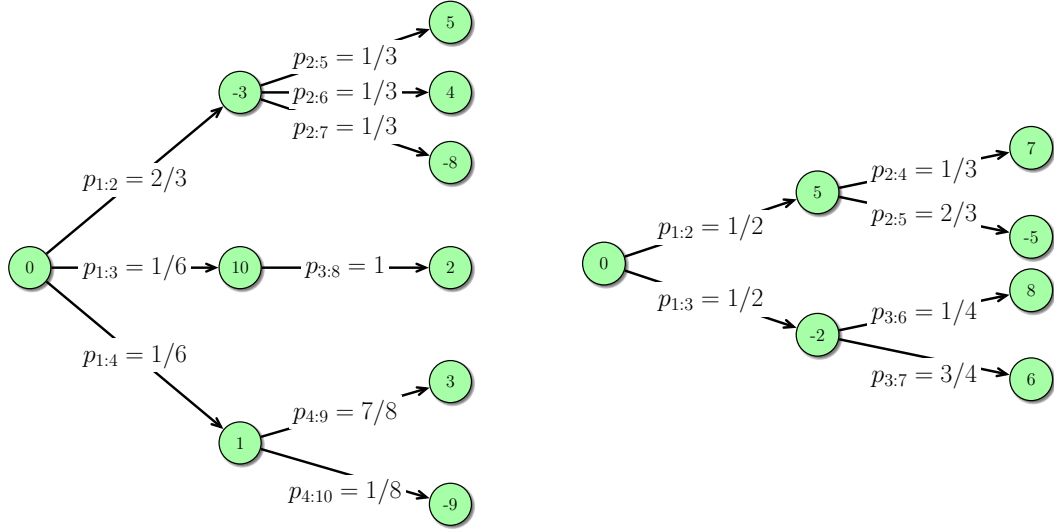
Poté vybereme druhý koncový uzel druhého stromu, tedy $\tilde{\omega} = 5$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega} = 5 : \quad n = 1, m = 1 : \quad \tilde{p}_{1:5} &= \frac{\sum_{i=1}^N \pi_{i,5}}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{\tilde{N}} \pi_{i,j}} = \tilde{p}_{1:3} \tilde{p}_{3:5} = 0.5, \\
n = 3, m = 2 : \quad \tilde{p}_{3:5} &= \frac{\sum_{i=2}^N \pi_{i,5}}{\sum_{i=2}^N \sum_{j=3,5} \pi_{i,j}} = 1, \\
n = 5, m = 3 : \quad \tilde{p}_{5:5} &= \frac{\pi_{3,5}}{\pi_{3,5}} = 1, \\
n = 5, m = 4 : \quad \tilde{p}_{5:5} &= \frac{\pi_{4,5}}{\pi_{4,5}} = 1.
\end{aligned}$$

Nakonec vyřešíme minimalizační úlohu (4.4) a numerickým výpočtem zjistíme, že vnořená vzdálenost stromů uvedených na obrázku 4.2 je rovna $1 + \varepsilon$.

◇

Výhodou přístupu vnořené vzdálenosti je skutečnost, že pomocí ní lze měřit vzdálenost dvou libovolných stromů stejné délky, nehledě na jejich strukturu. Pro účely diplomové práce jsme sestavili následující ilustrativní příklad.



Obrázek 4.3: Dva trojstupňové stromy. V kroužcích jsou uvedeny hodnoty uzlů.

Příklad 4.2. Výpočet vnořené vzdálenosti stromů uvedených na obrázku 4.3. Přestože oba stromy mají odlišnou strukturu, lze využít algoritmu (4.4) a zadanou úlohu vyřešit. Výsledná minimalizační úloha má tvar

$$\text{minimalizovat } \sum_i \sum_j \pi_{i,j} d_{i,j}$$

za podmínek

$$p_{1:5} = \frac{\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \pi_{5,j}}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{\tilde{N}} \pi_{i,j}} = p_{1:2} p_{2:5} = \frac{2}{9},$$

$$p_{2:5} = \frac{\sum_{j=2,4,5} \pi_{5,j}}{\sum_{i=2,5,6,7} \sum_{j=2,4,5} \pi_{i,j}} = \frac{1}{3},$$

$$p_{5:5} = \frac{\pi_{5,4}}{\pi_{5,4}} = 1, \quad p_{5:5} = \frac{\pi_{5,5}}{\pi_{5,5}} = 1,$$

$$p_{1:6} = \frac{\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \pi_{6,j}}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{\tilde{N}} \pi_{i,j}} = p_{1:2} p_{2:6} = \frac{2}{9},$$

$$p_{2:6} = \frac{\sum_{j=2,4,5} \pi_{6,j}}{\sum_{i=2,5,6,7} \sum_{j=2,4,5} \pi_{i,j}} = \frac{1}{3},$$

$$p_{6:6} = \frac{\pi_{6,4}}{\pi_{6,4}} = 1, \quad p_{6:6} = \frac{\pi_{6,5}}{\pi_{6,5}} = 1,$$

$$p_{2:5} = \frac{\sum_{j=3,6,7} \pi_{5,j}}{\sum_{i=2,5,6,7} \sum_{j=3,6,7} \pi_{i,j}} = \frac{1}{3},$$

$$p_{5:5} = \frac{\pi_{5,6}}{\pi_{5,6}} = 1, \quad p_{5:5} = \frac{\pi_{5,7}}{\pi_{5,7}} = 1,$$

$$p_{2:6} = \frac{\sum_{j=3,6,7} \pi_{6,j}}{\sum_{i=2,5,6,7} \sum_{j=3,6,7} \pi_{i,j}} = \frac{1}{3},$$

$$p_{6:6} = \frac{\pi_{6,6}}{\pi_{6,6}} = 1, \quad p_{6:6} = \frac{\pi_{6,7}}{\pi_{6,7}} = 1,$$

$$\begin{aligned}
p_{1:7} &= \frac{\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \pi_{7,j}}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{\tilde{N}} \pi_{i,j}} = p_{1:2} p_{2:7} = \frac{2}{9}, \\
p_{2:7} &= \frac{\sum_{j=2,4,5} \pi_{7,j}}{\sum_{i=2,5,6,7} \sum_{j=2,4,5} \pi_{i,j}} = \frac{1}{3}, \\
p_{7:7} &= \frac{\pi_{7,4}}{\pi_{7,4}} = 1, \quad p_{7:7} = \frac{\pi_{7,5}}{\pi_{7,5}} = 1, \\
p_{1:8} &= \frac{\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \pi_{8,j}}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{\tilde{N}} \pi_{i,j}} = p_{1:3} p_{3:8} = \frac{1}{6}, \\
p_{3:8} &= \frac{\sum_{j=2,4,5} \pi_{8,j}}{\sum_{i=3,8} \sum_{j=2,4,5} \pi_{i,j}} = 1, \\
p_{8:8} &= \frac{\pi_{8,4}}{\pi_{8,4}} = 1, \quad p_{8:8} = \frac{\pi_{8,5}}{\pi_{8,5}} = 1, \\
p_{1:9} &= \frac{\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \pi_{9,j}}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{\tilde{N}} \pi_{i,j}} = p_{1:4} p_{4:9} = \frac{7}{48}, \\
p_{4:9} &= \frac{\sum_{j=2,4,5} \pi_{9,j}}{\sum_{i=4,9,10} \sum_{j=2,4,5} \pi_{i,j}} = \frac{1}{3}, \\
p_{9:9} &= \frac{\pi_{9,4}}{\pi_{9,4}} = 1, \quad p_{9:9} = \frac{\pi_{9,5}}{\pi_{9,5}} = 1, \\
p_{1:10} &= \frac{\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \pi_{10,j}}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{\tilde{N}} \pi_{i,j}} = p_{1:4} p_{4:10} = \frac{1}{48}, \\
p_{4:10} &= \frac{\sum_{j=2,4,5} \pi_{10,j}}{\sum_{i=4,9,10} \sum_{j=2,4,5} \pi_{i,j}} = \frac{1}{3}, \\
p_{10:10} &= \frac{\pi_{10,4}}{\pi_{10,4}} = 1, \quad p_{10:10} = \frac{\pi_{10,5}}{\pi_{10,5}} = 1, \\
\tilde{p}_{1:4} &= \frac{\sum_{i=1}^N \pi_{i,4}}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{\tilde{N}} \pi_{i,j}} = \tilde{p}_{1:2} \tilde{p}_{2:4} = \frac{1}{6}, \\
p_{2:7} &= \frac{\sum_{j=3,6,7} \pi_{7,j}}{\sum_{i=2,5,6,7} \sum_{j=3,6,7} \pi_{i,j}} = \frac{1}{3}, \\
p_{7:7} &= \frac{\pi_{7,6}}{\pi_{7,6}} = 1, \quad p_{7:7} = \frac{\pi_{7,7}}{\pi_{7,7}} = 1, \\
p_{3:8} &= \frac{\sum_{j=3,6,7} \pi_{7,j}}{\sum_{i=3,8} \sum_{j=3,6,7} \pi_{i,j}} = 1, \\
p_{8:8} &= \frac{\pi_{8,6}}{\pi_{8,6}} = 1, \quad p_{8:8} = \frac{\pi_{8,7}}{\pi_{8,7}} = 1, \\
p_{4:9} &= \frac{\sum_{j=3,6,7} \pi_{9,j}}{\sum_{i=4,9,10} \sum_{j=3,6,7} \pi_{i,j}} = \frac{1}{3}, \\
p_{9:9} &= \frac{\pi_{9,6}}{\pi_{9,6}} = 1, \quad p_{9:9} = \frac{\pi_{9,7}}{\pi_{9,7}} = 1, \\
p_{4:10} &= \frac{\sum_{j=3,6,7} \pi_{10,j}}{\sum_{i=4,9,10} \sum_{j=3,6,7} \pi_{i,j}} = \frac{1}{3}, \\
p_{10:10} &= \frac{\pi_{10,6}}{\pi_{10,6}} = 1, \quad p_{10:10} = \frac{\pi_{10,7}}{\pi_{10,7}} = 1, \\
\tilde{p}_{2:4} &= \frac{\sum_{i=2,5,6,7} \pi_{i,4}}{\sum_{i=2,5,6,7} \sum_{j=2,4,5} \pi_{i,j}} = \frac{1}{3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_{2:4} &= \frac{\sum_{i=3,8} \pi_{i,4}}{\sum_{i=3,8} \sum_{j=2,4,5} \pi_{i,j}} = \frac{1}{3}, & \tilde{p}_{2:4} &= \frac{\sum_{i=4,9,10} \pi_{i,4}}{\sum_{i=4,9,10} \sum_{j=2,4,5} \pi_{i,j}} = \frac{1}{3}, \\
\tilde{p}_{4:4} &= \frac{\pi_{5,4}}{\pi_{5,4}} = 1, \quad \tilde{p}_{4:4} = \frac{\pi_{6,4}}{\pi_{5,4}} = 1, & \tilde{p}_{4:4} &= \frac{\pi_{7,4}}{\pi_{7,4}} = 1, \\
\tilde{p}_{4:4} &= \frac{\pi_{8,4}}{\pi_{8,4}} = 1, \quad \tilde{p}_{4:4} = \frac{\pi_{9,4}}{\pi_{9,4}} = 1, & \tilde{p}_{4:4} &= \frac{\pi_{10,4}}{\pi_{10,4}} = 1, \\
\tilde{p}_{1:5} &= \frac{\sum_{i=1}^N \pi_{i,5}}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{\tilde{N}} \pi_{i,j}} = \tilde{p}_{1:2} \tilde{p}_{2:5} = \frac{2}{6}, & \tilde{p}_{2:5} &= \frac{\sum_{i=2,5,6,7} \pi_{i,5}}{\sum_{i=2,5,6,7} \sum_{j=2,4,5} \pi_{i,j}} = \frac{2}{3}, \\
\tilde{p}_{2:5} &= \frac{\sum_{i=3,8} \pi_{i,5}}{\sum_{i=3,8} \sum_{j=2,4,5} \pi_{i,j}} = \frac{2}{3}, & \tilde{p}_{2:5} &= \frac{\sum_{i=4,9,10} \pi_{i,5}}{\sum_{i=4,9,10} \sum_{j=2,4,5} \pi_{i,j}} = \frac{2}{3}, \\
\tilde{p}_{5:5} &= \frac{\pi_{5,5}}{\pi_{5,5}} = 1, \quad \tilde{p}_{5:5} = \frac{\pi_{6,5}}{\pi_{5,5}} = 1, & \tilde{p}_{5:5} &= \frac{\pi_{7,5}}{\pi_{7,5}} = 1, \\
\tilde{p}_{5:5} &= \frac{\pi_{8,5}}{\pi_{8,5}} = 1, \quad \tilde{p}_{5:5} = \frac{\pi_{9,5}}{\pi_{9,5}} = 1, & \tilde{p}_{5:5} &= \frac{\pi_{10,5}}{\pi_{10,5}} = 1, \\
\tilde{p}_{1:6} &= \frac{\sum_{i=1}^N \pi_{i,6}}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{\tilde{N}} \pi_{i,j}} = \tilde{p}_{1:3} \tilde{p}_{3:6} = \frac{1}{8}, & \tilde{p}_{3:6} &= \frac{\sum_{i=2,5,6,7} \pi_{i,6}}{\sum_{i=2,5,6,7} \sum_{j=3,6,7} \pi_{i,j}} = \frac{1}{4}, \\
\tilde{p}_{3:6} &= \frac{\sum_{i=3,8} \pi_{i,6}}{\sum_{i=3,8} \sum_{j=3,6,7} \pi_{i,j}} = \frac{1}{4}, & \tilde{p}_{3:6} &= \frac{\sum_{i=4,9,10} \pi_{i,6}}{\sum_{i=4,9,10} \sum_{j=3,6,7} \pi_{i,j}} = \frac{1}{4}, \\
\tilde{p}_{6:6} &= \frac{\pi_{5,6}}{\pi_{5,6}} = 1, \quad \tilde{p}_{6:6} = \frac{\pi_{6,6}}{\pi_{5,6}} = 1, & \tilde{p}_{6:6} &= \frac{\pi_{7,6}}{\pi_{7,6}} = 1, \\
\tilde{p}_{6:6} &= \frac{\pi_{8,6}}{\pi_{8,6}} = 1, \quad \tilde{p}_{6:6} = \frac{\pi_{9,6}}{\pi_{9,6}} = 1, & \tilde{p}_{6:6} &= \frac{\pi_{10,6}}{\pi_{10,6}} = 1, \\
\tilde{p}_{1:7} &= \frac{\sum_{i=1}^N \pi_{i,7}}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{\tilde{N}} \pi_{i,j}} = \tilde{p}_{1:3} \tilde{p}_{3:7} = \frac{3}{8}, & \tilde{p}_{3:7} &= \frac{\sum_{i=2,5,6,7} \pi_{i,7}}{\sum_{i=2,5,6,7} \sum_{j=3,6,7} \pi_{i,j}} = \frac{3}{4}, \\
\tilde{p}_{3:7} &= \frac{\sum_{i=3,8} \pi_{i,7}}{\sum_{i=3,8} \sum_{j=3,6,7} \pi_{i,j}} = \frac{3}{4}, & \tilde{p}_{3:7} &= \frac{\sum_{i=4,9,10} \pi_{i,7}}{\sum_{i=4,9,10} \sum_{j=3,6,7} \pi_{i,j}} = \frac{3}{4}, \\
\tilde{p}_{7:7} &= \frac{\pi_{5,7}}{\pi_{5,7}} = 1, \quad \tilde{p}_{7:7} = \frac{\pi_{6,7}}{\pi_{5,7}} = 1, & \tilde{p}_{7:7} &= \frac{\pi_{7,7}}{\pi_{7,7}} = 1, \\
\tilde{p}_{7:7} &= \frac{\pi_{8,7}}{\pi_{8,7}} = 1, \quad \tilde{p}_{7:7} = \frac{\pi_{9,7}}{\pi_{9,7}} = 1, & \tilde{p}_{7:7} &= \frac{\pi_{10,7}}{\pi_{10,7}} = 1.
\end{aligned}$$

Numerický výpočet ukazuje, že vnořená vzálenost daných stromů je 11.2778.

◇

Uvažujme nyní oceňovací proces ξ se spojitými stavy a oceňovací proces $\tilde{\xi}$ s diskrétními stavy. Abychom mohli určit vnořenou vzdálenost těchto dvou procesů, musíme nejprve spojitý proces diskretizovat [20].

4.2 Diskretizace jednorozměrného oceňovacího procesu

Předpokládejme, že oceňovací proces ξ se skládá z jednorozměrných veličin ξ_t . Naším cílem je aproximovat proces ξ se spojitými stavy pomocí stromového procesu tak, aby Kantorovičova vzdálenost mezi zadaným spojitým rozdělením a zvoleným diskrétním rozdělením byla minimální. Stromovou strukturu volíme dopředu, přičemž je třeba si uvědomit, že s rostoucím počtem větvení se zvyšuje nejen přesnost aproximace, ale také výpočetní náročnost.

Zaměříme se nejprve na obecný uzel n , dočasně proto budeme všechny veličiny indexovat pouze jedním index. Pro tento konkrétní uzel známe počet potomků $s(n)$, ale neznáme jejich hodnoty z_i a ani pravděpodobnosti p_i , se kterými k realizaci jednotlivých potomků dochází. Chceme tedy zjistit hodnoty potomků uzlu i pravděpodobnosti jejich nastání, přičemž Kantorovičova vzdálenost mezi známým spojitým rozdělením F a diskrétní aproximací má být minimalizována. V prvním kroku přiřadíme pravděpodobnosti p_i jednotlivým $s(n)$ potomkům libovolně. Dále zjistíme hranice intervalů I_i , ve kterých leží hodnoty potomků z_i ,

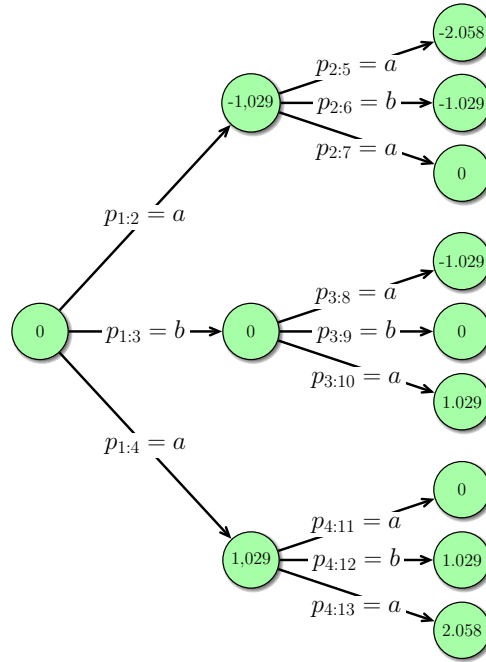
$$z_i = F^{-1} \left(\sum_{j=1}^i p_j + \frac{p_i}{2} \right) = F^{-1} \left(\frac{F(q_{i-1}) + F(q_i)}{2} \right), i = 1, \dots, s(n).$$

Interval $I_i = [q_{i-1}, q_i], i = 1, \dots, s(n)$, kde $q_0 = -\infty, q_{s(n)} = +\infty$ a $q_i = F^{-1}(\sum_{j=1}^i p_j)$, tedy $p_i = F(q_i) - F(q_{i-1})$. Následně napočítáme nové hodnoty hranic intervalů q_i^{new} a nové hodnoty potomků z_i^{new}

$$\begin{aligned} q_i^{\text{new}} &= \frac{z_i + z_{i+1}}{2}, i = 1, \dots, s(n) - 1, \\ z_i^{\text{new}} &= F^{-1} \left(\frac{F(q_{i-1}) + F(q_i)}{2} \right), i = 1, \dots, s(n). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Uvedený postup opakujeme, dokud pravděpodobnosti $p_i, i = 1, \dots, s(n)$, nedokvergují k hodnotám \mathbf{p}^{opt} , které aproximují spojitě rozdělení F .

Nyní se zaměříme na celý strom, pomocí kterého aproximujeme spojitě rozdělení procesu ξ tak, aby byla Kantorovičova vzdálenost spojitěho a aproximačního rozdělení minimální. Jak je uvedeno výše, předpokládáme, že známe strukturu stromu (pro jednoduchost uvažujme, že každý rodič má stejný počet potomků) i sdruženou distribuční funkci F_{ξ_0, \dots, ξ_T} , a díky algoritmu (4.5) známe i pravděpodobnosti $p_{n:i}^{\text{opt}}$ jednotlivých uzlů. Dále předpokládejme, že máme zadaná podmíněná rozdělení $F_{\xi_t | \xi_0, \dots, \xi_{t-1}}, t = 0, \dots, T$. Se znalostí $p_{n:i}^{\text{opt}}$ jsme schopni pro každý uzel určit interval $[b_{n,i-1}, b_{n,i}]$, ve kterém bude ležet realizace náhodné



Obrázek 4.4: Stromový proces. V kroučcích jsou uvedeny hodnoty uzlů, parametr $a = 0.30345$, $b = 0.3931$.

veličiny ξ_t :

$$\begin{aligned}
 b_{n,1} &= -\infty, \\
 b_{n,i} &= F^{-1} \left(\sum_{j=1}^i p_{n:j} \right), \\
 b_{n,s(n)} &= +\infty,
 \end{aligned}$$

kde n je číslo uzlu a $s(n)$ je počet potomků uzlu n . V posledním kroku určíme hodnoty jednotlivých uzlů jako střední body intervalů $[b_{n,i-1}, b_{n,i}]$.

Příklad 4.3. (Zadání příkladu převzato z [15].) Výpočet vnořené vzdálenosti procesu s diskrétními stavy zadaného na obrázku 4.4 a procesu se spojitými stavy, jehož vnořené pravděpodobnostní rozdělení má tvar

$$\xi_1 \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad \xi_2 | \xi_1 \sim \mathcal{N}(\xi_1, 1).$$

K výpočtu vnořené vzdálenosti procesu s diskrétními stavy a procesu se spojitými stavy je nutné výše popsaný postup implementovat ve vhodném softwaru. Příklad detailně ilustruje skutečnost, že naše implementace dává výsledek shodný s výsledkem, který je prezentován v uvedené publikaci.

Implementací výše vyloženého postupu zjistíme, že vnořená vzdálenost těchto dvou procesů je 0.8215.

◇

4.3 Diskretizace mnohorozměrného oceňovacího procesu

Nyní předpokládejme, že oceňovací proces ξ se skládá z mnohorozměrných veličin ξ_t . Naším cílem je opět aproximovat proces ξ se spojitými stavy pomocí stromového procesu tak, aby Kantorovičova vzdálenost mezi zadaným spojitým rozdělením a zvoleným diskrétním rozdělením byla minimální, přičemž stromová struktura je dopředu známá. V jednorozměrném případě jsme spojitou distribuční funkci aproximovali pomocí kvantilové funkce. V obecném mnohorozměrném případě je ovšem situace složitější. K aproximaci spojitě mnohorozměrné distribuční funkce oceňovacího procesu ξ použijeme tzv. *Voronoiův diagram*. Voronoiův diagram rozštěpí daný prostor o n bodech do konvexních mnohoúhelníků (buněk), a to takovým způsobem, že každý mnohoúhelník obsahuje právě jeden generující bod a každý bod v daném mnohoúhelníku je blíže k tomuto generujícímu bodu než k jakémukoliv jinému bodu [19]. Voronoiův diagram tedy umožňuje rozdělit daný prostor do předem daného počtu buněk a spojitě rozdělení aproximovat vnitřními body jednotlivých buněk. Pravděpodobnosti se jednotlivým vnitřním bodům přiřadí metodou Monte Carlo – vygeneruje se určitý počet bodů a určí se, kolik z nich leží v jednotlivých oblastech. Relativní četnost bodů ležících v dané buňce ku celkovému počtu vygenerovaných bodů odpovídá pravděpodobnosti vnitřního bodu této buňky.

V prvním kroku vytvoříme mřížku o N vnitřních bodech z_1, \dots, z_N . Každý bod považujeme za střed Voronoiovy buňky. Počet bodů n_i v jednotlivých buňkách je roven 1, kde $i = 1, \dots, N$. Počet dosud vygenerovaných bodů n je roven počtu vnitřních bodů N . Následně vygenerujeme veličinu ξ z mnohorozměrného spojitého rozdělení F a nalezneme index k , pro který je vzdálenost mezi veličinou ξ a vnitřním bodem z_i minimální, a to ve smyslu L_2 normy:

$$\|\xi - z_k\|_2 = \min_i \|\xi - z_i\|_2.$$

Následně posuneme vnitřní bod z_k do bodu z_k^{new} pomocí vztahu

$$z_k^{\text{new}} = z_k + \frac{1}{n^{0.75}}(\xi - z_k)$$

a počet bodů padnoucích do k -té buňky i celkový počet vygenerovaných bodů navýšíme o jedna, tedy

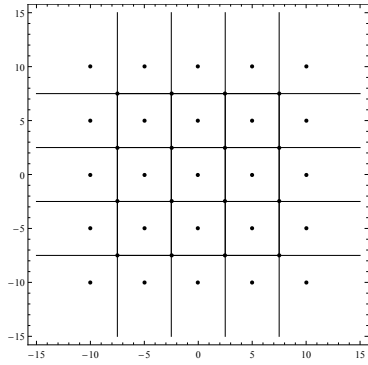
$$\begin{aligned} n_k^{\text{new}} &= n_k + 1, \\ n^{\text{new}} &= n + 1. \end{aligned}$$

Nakonec určíme pravděpodobnosti vnitřních bodů p_i jako relativní četnost

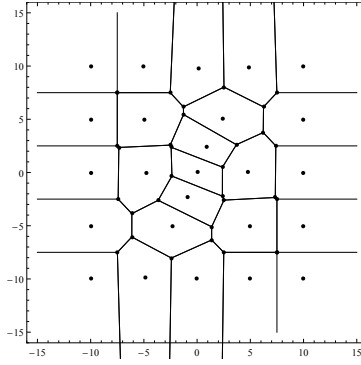
$$p_i = \frac{n_i}{n}.$$

Zmíněný postup opakujeme, dokud pravděpodobnosti p_i , $i = 1, \dots, N$, nedokvergují k pravděpodobnostem p_i^{opt} .

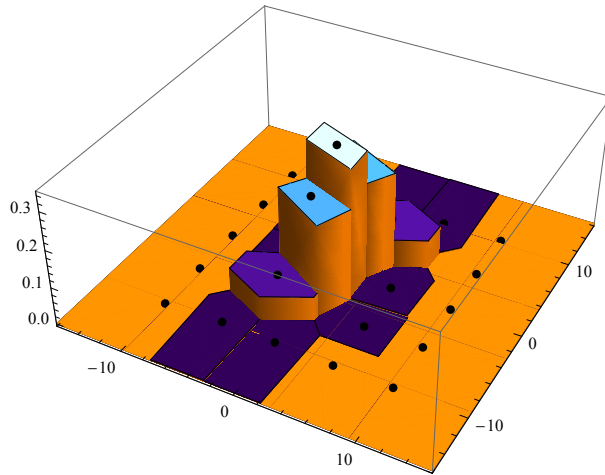
Příklad 4.4. Pro účely diplomové práce jsme sestavili následující ilustrativní příklad. Vygenerujme pravidelnou mřížku o 25 bodech a každý bod považujme



a) Pravidelná mřížka



b) Body se řídí rozdělením $\mathcal{N}_2 \left((0,0), \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \right)$



c) Pravděpodobnosti bodů řídicích se rozdělením $\mathcal{N}_2 \left((0,0), \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \right)$

Obrázek 4.5: Voronoiův diagram.

za střed právě jedné Voronoiovy buňky (v tomto případě jsou všechny buňky čtvercové), viz obrázek 4.5a). Všechny body mají totožnou pravděpodobnost $p_i = \frac{1}{25}$. Následně vygenerujeme náhodnou veličinu $\boldsymbol{\xi}$ z dvojrozměrného normálního rozdělení s vektorem středních hodnot $\boldsymbol{\mu}$ a varianční maticí Σ :

$$\boldsymbol{\mu} = (0,0), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Implementací výše uvedeného postupu dospějeme k nové mřížce – čili i k novému uskupení Voronoiových buněk – viz obrázek 4.5b). Body nové mřížky mají pravděpodobnosti \mathbf{p}^{opt} , což znázorňuje obrázek 4.5c).

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{\text{opt}} = & (1.33, 1.33, 1.33, 1.33, 1.33, \\ & 239.06, 6449.21, 192.57, 3.98, 1.33, \\ & 87.65, 24381.1, 34420.2, 25936.3, 82.34, \\ & 1.33, 3.98, 227.1, 7720.2, 240.38, \\ & 1.33, 1.33, 1.33, 1.33, 1.33) \times 10^{-5}. \end{aligned}$$

◇

Kapitola 5

Empirická studie

V této kapitole uvádíme stanovení optimální investiční strategie pro základní model investičního plánování zahrnující transakční náklady a model zohledňující riziko na každé investiční úrovni. Dále zde přinášíme výpočet vnořené vzdálenosti stromů vybudovaných pomocí metody momentů na základě zdrojových dat a informace o tom, jak vnořená vzdálenost stromů závisí na vzdálenosti optimálních řešení uvedených modelů.

V empirické studii jsme pracovali s daty převzatými z *Kenneth French data library*¹. Data představují měsíční výnosy šesti reprezentativních portfolií amerického trhu od července roku 1926 do dubna roku 2014. Tato portfolia jsou konstruována jako průnik dvou portfolií vytvořených na základě tržní kapitalizace a tří portfolií vytvořených na základě poměru účetní hodnoty a tržní kapitalizace. Původní data, která lze nalézt na přiloženém CD, představovala měsíční výnosy v procentech, proto jsme všechny uvedené hodnoty pro potřeby našich výpočtů převedli vztahem

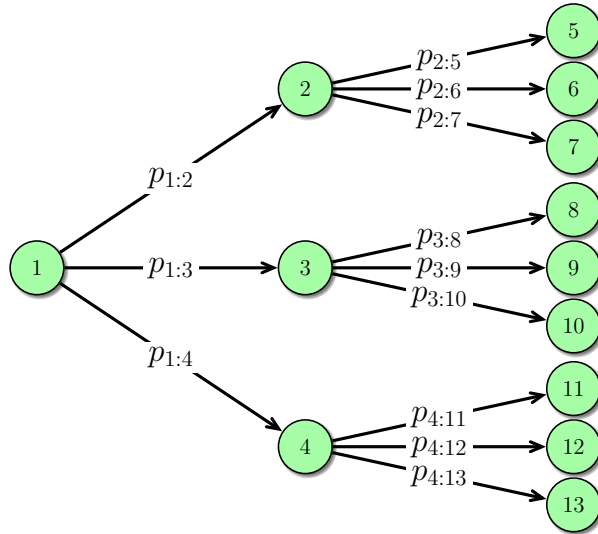
$$a_{t,i} \mapsto \frac{a_{t,i}}{100} + 1,$$

tedy například 20% na 1.2. Deskriptivní statistiky upravených dat jsou uvedeny v tabulce 5.1.

¹http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/ftp/6_Portfolios_2x3.zip

Statistika	1	2	3	4	5	6
Střed. hodnota	1.0098	1.0129	1.0149	1.009	1.0098	1.0119
Směr. odchylka	0.0768	0.0703	0.0823	0.0535	0.0574	0.0716
Šikmost	0.8076	1.2166	2.0755	-0.1469	1.2686	1.6026
Špičatost	11.5633	16.9809	23.9047	8.2402	20.1138	21.3567
Minimum	0.6767	0.693	0.663	0.7164	0.7234	0.6533
Maximum	1.6225	1.6229	1.8081	1.327	1.517	1.6691

Tabulka 5.1: Deskriptivní statistiky upravených dat. Ve sloupečcích jsou uvedena jednotlivá aktiva.



Obrázek 5.1: Primární strom. Dvojstupňový strom, každý uzel vyjma listů má právě tři následníky.

5.1 Základní model s transakčními náklady

Uvažujme základní investiční model zahrnující transakční náklady, který byl představen v podkapitole 2.3.1. Nejprve chceme zkonstruovat strom (nazveme jej primární), ve kterém má každý uzel vyjma listů právě tři následníky. V prvním kroku vygenerujeme pomocí metody momentů (viz kapitola 3) scénáře pro jednotlivé uzly (tedy tři scénáře pro každý uzel vyjma listů). Tyto hodnoty považujeme za vnitřní body mřížky, která vstupuje v prvním kroku do algoritmu popsaného v podkapitole 4.3. Následně pomocí tohoto algoritmu dospějeme k určení nových vnitřních bodů Voronoiových buněk – tedy k nově uspořádané mřížce – stejně jako k pravděpodobnostem, které novým vnitřním bodům mřížky náleží. Nakonec vystavíme požadovaný strom, viz obrázek 5.1. Hodnoty jednotlivých uzlů představují scénáře, které mohou nastat. V našem případě volíme hodnotu počátečního majetku $B = 1$ a hodnotu koncového majetku $G = 1.2$. Veličinu D^- vyjadřující penalizaci za nedosažení požadované částky G volíme rovnu 1.003, naopak benefit D^+ za překročení požadované částky G pokládáme rovný 1.001. Transakční náklady c_b na nákup určitého objemu aktiv stejně jako transakční náklady c_s na prodej určitého objemu aktiv stanovujeme rovny 0.1%. Jelikož v modelu předpokládáme, že prodeje nakrátko jsou zakázány, ohraničíme zdola hodnoty držných, nakoupených i prodaných aktiv ve všech scénářích a všech časech nulou. Rizikově averzní investor by naopak neinvestoval veškeré své finanční prostředky do jednoho jediného aktiva, z tohoto důvodu jsme hodnoty nakoupených i prodaných aktiv ve všech scénářích a všech časech omezili shora hodnotou 0.5.

5.1.1 Dvojstupňový strom

Uvažujme dvojstupňový primární strom, ve kterém má každý rodič právě dva potomky. Nejprve spočítáme optimální hodnotu účelové funkce (tedy střední

Číslo uzlu	Hodnota uzlu
1	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
2	{1.106, 1.1626, 1.248, 1.0747, 1.1516, 1.2141}
3	{1.0095, 1.011, 1.0108, 1.0087, 1.0076, 1.0084}
4	{0.8898, 0.8454, 0.7495, 0.9322, 0.8539, 0.7878}
5	{1.106, 1.1626, 1.248, 1.0747, 1.1516, 1.2141}
6	{1.0095, 1.011, 1.0108, 1.0087, 1.0076, 1.0084}
7	{0.8898, 0.8454, 0.7495, 0.9322, 0.8539, 0.7878}
8	{1.106, 1.1626, 1.248, 1.0747, 1.1516, 1.2141}
9	{1.0095, 1.011, 1.0108, 1.0087, 1.0076, 1.0084}
10	{0.8898, 0.8454, 0.7495, 0.9322, 0.8539, 0.7878}
11	{1.106, 1.1626, 1.248, 1.0747, 1.1516, 1.2141}
12	{1.0095, 1.011, 1.0108, 1.0087, 1.0076, 1.0084}
13	{0.8898, 0.8454, 0.7495, 0.9322, 0.8539, 0.7878}

Tabulka 5.2: Základní model zahrnující transakční náklady. Hodnoty jednotlivých uzlů v primárním dvojstupňovém stromu, ve kterém má každý rodič právě tři potomky.

hodnotu částky chybějící k dosažení G navýšenou o penalizaci) základního modelu investičního plánování zahrnujícího transakční náklady. Náhodné výnosy, které v tomto modelu vystupují, jsou dány hodnotami jednotlivých uzlů primárního stromu, viz tabulka 5.2, a pravděpodobnosti přechodu mezi jednotlivými uzly jsou taktéž dány pravděpodobnostmi přechodu mezi uzly primárního stromu, viz tabulka 5.3. Optimální strategií pro dvojstupňový strom, ve kterém má každý rodič právě tři potomky, je v prvním kroku nakoupit

$$\begin{array}{lll}
b_{0,1} = 0, & b_{0,2} = 500, & b_{0,3} = 500, \\
b_{0,4} = 0, & b_{0,5} = 0, & b_{0,6} = 1,
\end{array}$$

hodnoty jsou uvedeny $\times 10^{-3}$. Optimální strategie pro první a druhý rozhodovací okamžik je popsána v tabulce 5.4. Optimální hodnota účelové funkce (tedy střední hodnota nedostatku) základního modelu zohledňujícího transakční náklady pak vychází 169.171×10^{-3} .

Následně budeme konstruovat stromy podobné strukturou či hodnotami uzlů primárnímu stromu a budeme sledovat, nakolik se optimální hodnota účelové funkce primárního stromu bude lišit od optimální hodnoty účelové funkce nově generovaných stromů. Zároveň budeme sledovat, jak vzdálené jsou primární strom a nově vygenerované stromy, a to ve smyslu vnořené vzdálenosti. Ve všech případech zachováváme délku investičního horizontu $T = 2$.

V první sadě generovaných stromů uvažujeme stromy se třemi potomky. V prvním případě zachováme hodnoty uzlů primárního stromu a změníme rozdělení pravděpodobnosti jednotlivých potomků na rovnoměrné. V dalším případě zvýšíme výnos z každé akcie v každém uzlu o 0.45%, přičemž zachováme hodnoty

$p_{1:2}$	$p_{1:3}$	$p_{1:4}$
0.0834479	0.864666	0.0518859
$p_{2:5}$	$p_{2:6}$	$p_{2:7}$
0.0834479	0.864666	0.0518859
$p_{3:8}$	$p_{3:9}$	$p_{3:10}$
0.0834479	0.864666	0.0518859
$p_{4:11}$	$p_{4:12}$	$p_{4:13}$
0.0834479	0.864666	0.0518859

Tabulka 5.3: Základní model zahrnující transakční náklady. Pravděpodobnosti přechodu v primárním dvojstupňovém stromu, ve kterém má každý rodič právě tři potomky.

Číslo uzlu	Akce	Kapitál $\times 10^{-3}$
1	Nákup	{0, 500, 500, 0, 0, 1}
	Prodej	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 499.5, 499.5, 0, 0, 1}
2	Nákup	{0, 0, 1.21, 0, 0, 0}
	Prodej	{0, 0, 0, 0, 0, 1.21}
	Držení	{0, 580.74, 624.59, 0, 0, 0}
3	Nákup	{0, 0, 1.01, 0, 0, 0}
	Prodej	{0, 0, 0, 0, 0, 1.01}
	Držení	{0, 505.02, 505.89, 0, 0, 0}
4	Nákup	{0, 0, 0.85, 0, 0, 0}
	Prodej	{0, 0.06, 0, 0, 0, 0.78}
	Držení	{0, 422.22, 375.23, 0, 0, 0}

Tabulka 5.4: Základní model zahrnující transakční náklady. Optimální investiční strategie v jednotlivých uzlech primárního dvojstupňového stromu, ve kterém má každý rodič právě tři potomky. Veličina nákup představuje $b_{t,i}^k$ (resp. $b_{0,i}$ pro $t = 0$), prodej $s_{t,i}^k$ a držení $x_{t,i}^k$, $t = 0, 1$. Veškerý kapitál je uveden v $\times 10^{-3}$.

Číslo uzlu	Hodnota uzlu
1	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
2	{1.0527, 1.0855, 1.1372, 1.038, 1.0828, 1.1181}
3	{0.9967, 0.9901, 0.9775, 0.9999, 0.9872, 0.9793}
4	{1.0527, 1.0855, 1.1372, 1.038, 1.0828, 1.1181}
5	{0.9967, 0.9901, 0.9775, 0.9999, 0.9872, 0.9793}
6	{1.0527, 1.0855, 1.1372, 1.038, 1.0828, 1.1181}
7	{0.9967, 0.9901, 0.9775, 0.9999, 0.9872, 0.9793}

Tabulka 5.5: Základní model zahrnující transakční náklady. Hodnoty jednotlivých uzlů v alternativním primárním dvojestupňovém stromu, ve kterém má každý rodič právě dva potomky.

$p_{1:2}$	$p_{1:3}$
0.30463	0.69537
$p_{2:4}$	$p_{2:5}$
0.30463	0.69537
$p_{3:6}$	$p_{3:7}$
0.30463	0.69537

Tabulka 5.6: Základní model zahrnující transakční náklady. Pravděpodobnosti přechodu v alternativním primárním dvojestupňovém stromu, ve kterém má každý rodič právě dva potomky.

pravděpodobností přechodu mezi jednotlivými uzly primárního stromu. Ve třetím případě naopak snížíme výnos z každé akcie v každém uzlu o 0.45%, přičemž opět zachováme hodnoty pravděpodobností přechodu mezi jednotlivými uzly primárního stromu.

Ve druhé sadě generovaných stromů snížíme počet potomků vycházejících z každého rodiče na dva. Stejně jako v první sadě vygenerujeme alternativu primárního stromu. Hodnoty jednotlivých uzlů a pravděpodobností přechodu jsou uvedeny v tabulce 5.5, resp. 5.6. Optimální investiční strategie pro tento alternativní primární strom je popsána v tabulce 5.7, optimální hodnota účelové funkce základního modelu zohledňujícího transakční náklady je rovna 151.965×10^{-3} . Od tohoto alternativního primárního stromu odvodíme strom, jehož hodnoty uzlů budou totožné, ovšem rozdělení pravděpodobnosti přechodu mezi rodiči a potomky bude rovnoměrné. Dále naopak zachováme pravděpodobnosti přechodu, ovšem hodnoty všech uzlů zvýšíme o 0.45%. Nakonec opět zachováme pravděpodobnosti přechodu, ale hodnoty všech uzlů stromu snížíme o 0.45%.

V poslední sadě generujeme stromy, ve kterých má každý rodič právě čtyři potomky. Nejprve vygenerujeme alternativní primární strom, hodnoty uzlů a

Číslo uzlu	Akce	Kapitál $\times 10^{-3}$
1	Nákup	{0, 1, 500, 0, 0, 500}
	Prodej	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 1, 499.5, 0, 0, 499.5}
2	Nákup	{0, 0, 500, 0, 0, 0}
	Prodej	{0, 1.08, 0, 0, 0, 498.92}
	Držení	{0, 0, 1067.55, 0, 0, 59.1}
3	Nákup	{0, 0, 489.65, 0, 0, 0}
	Prodej	{0, 0.99, 0, 0, 0, 488.66}
	Držení	{0, 0, 977.42, 0, 0, 0}

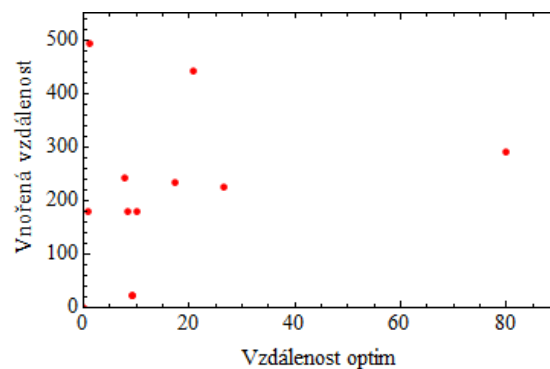
Tabulka 5.7: Základní model zahrnující transakční náklady. Optimální investiční strategie v jednotlivých uzlech alternativního primárního dvojstupňového stromu, ve kterém má každý rodič právě dva potomky. Veličina nákup vyjadřuje $b_{t,i}^k$ (resp. $b_{0,i}$ pro $t = 0$), prodej $s_{t,i}^k$ a držení $x_{t,i}^k, t = 0, 1$. Veškerý kapitál je uveden v $\times 10^{-3}$.

pravděpodobnosti přechodu uvádíme v tabulce 5.8, resp. 5.9. Optimální investiční strategie pro první a druhý krok rozhodování je popsána v tabulce 5.10, optimální hodnota (střední hodnota nedostatku včetně penalizace) vychází 168.305×10^{-3} . Od tohoto alternativního primárního stromu odvodíme strom, který zachovává hodnoty uzlů ale má odlišné (rovnoměrně rozdělené) pravděpodobnosti přechodu, dále strom, jehož hodnoty uzlů jsou navýšeny o 0.45%, a obdobně strom, jehož hodnoty uzlů jsou sníženy o 0.45%. V obou posledních případech platí, že pravděpodobnosti přechodu mezi jednotlivými uzly zůstávají zachovány.

Optimální hodnoty účelových funkcí základního investičního modelu uvažujícího transakční náklady jsou uvedeny v tabulce 5.11. Nyní spočítáme vzdálenosti (ve smyslu absolutní hodnoty) optimálních hodnot účelových funkcí primárního stromu a jednotlivých dodatečně generovaných stromů. Nakonec určíme vnořené vzdálenosti primárního a následně generovaných stromů. Tyto výsledky lze nalézt v tabulce 5.12. Závislost vnořené vzdálenosti na vzdálenosti optimálních hodnot ztráty znázorňuje obrázek 5.2.

Číslo uzlu	Hodnota uzlu
1	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
2	{0.9994, 0.9872, 0.9687, 1.0009, 0.9814, 0.9703}
3	{0.8587, 0.799, 0.6991, 0.9077, 0.8288, 0.7488}
4	{1.1471, 1.2213, 1.3405, 1.1014, 1.1917, 1.2829}
5	{1.0184, 1.0366, 1.0592, 1.0159, 1.0372, 1.0522}
6	{0.9994, 0.9872, 0.9687, 1.0009, 0.9814, 0.9703}
7	{0.8587, 0.799, 0.6991, 0.9077, 0.8288, 0.7488}
8	{1.1471, 1.2213, 1.3405, 1.1014, 1.1917, 1.2829}
9	{1.0184, 1.0366, 1.0592, 1.0159, 1.0372, 1.0522}
10	{0.9994, 0.9872, 0.9687, 1.0009, 0.9814, 0.9703}
11	{0.8587, 0.799, 0.6991, 0.9077, 0.8288, 0.7488}
12	{1.1471, 1.2213, 1.3405, 1.1014, 1.1917, 1.2829}
13	{1.0184, 1.0366, 1.0592, 1.0159, 1.0372, 1.0522}
14	{0.9994, 0.9872, 0.9687, 1.0009, 0.9814, 0.9703}
15	{0.8587, 0.799, 0.6991, 0.9077, 0.8288, 0.7488}
16	{1.1471, 1.2213, 1.3405, 1.1014, 1.1917, 1.2829}
17	{1.0184, 1.0366, 1.0592, 1.0159, 1.0372, 1.0522}
18	{0.9994, 0.9872, 0.9687, 1.0009, 0.9814, 0.9703}
19	{0.8587, 0.799, 0.6991, 0.9077, 0.8288, 0.7488}
20	{1.1471, 1.2213, 1.3405, 1.1014, 1.1917, 1.2829}
21	{1.0184, 1.0366, 1.0592, 1.0159, 1.0372, 1.0522}

Tabulka 5.8: Základní model zahrnující transakční náklady. Hodnoty jednotlivých uzlů v alternativním primárním dvojstupňovém stromu, ve kterém má každý rodič právě čtyři potomky.



Obrázek 5.2: Základní model zahrnující transakční náklady, délka investičního horizontu $T = 2$. Závislost vnořené vzdálenosti na vzdálenosti optimálních hodnot.

$p_{1:2}$	$p_{1:3}$	$p_{1:4}$	$p_{1:5}$
0.465363	0.0352276	0.0479859	0.451423
$p_{2:6}$	$p_{2:7}$	$p_{2:8}$	$p_{2:9}$
0.465363	0.0352276	0.0479859	0.451423
$p_{3:10}$	$p_{3:11}$	$p_{3:12}$	$p_{3:13}$
0.465363	0.0352276	0.0479859	0.451423
$p_{4:14}$	$p_{4:15}$	$p_{4:16}$	$p_{4:17}$
0.465363	0.0352276	0.0479859	0.451423
$p_{5:18}$	$p_{5:19}$	$p_{5:20}$	$p_{5:21}$
0.465363	0.0352276	0.0479859	0.451423

Tabulka 5.9: Základní model zahrnující transakční náklady. Pravděpodobnosti přechodu v alternativním primárním dvojstupňovém stromu, ve kterém má každý rodič právě čtyři potomky.

Číslo uzlu	Akce	Kapitál $\times 10^{-3}$
1	Nákup	{0, 1, 500, 0, 0, 500}
	Prodej	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 1, 499.5, 0, 0, 499.5}
2	Nákup	{0, 0, 485.16, 0, 0, 0}
	Prodej	{0, 0.99, 0, 0, 0, 484.17}
	Držení	{0, 0, 968.53, 0, 0, 0}
3	Nákup	{0, 0, 374.43, 0, 0, 0}
	Prodej	{0, 0.8, 0, 0, 0, 373.63}
	Držení	{0, 0, 723.26, 0, 0, 0}
4	Nákup	{0, 0, 500, 0, 0, 0}
	Prodej	{0, 1.22, 0, 0, 0, 498.78}
	Držení	{0, 0, 1169.1, 0, 0, 141.54}
5	Nákup	{0, 0, 500, 0, 0, 0}
	Prodej	{0, 1.04, 0, 0, 0, 498.96}
	Držení	{0, 0, 1028.55, 0, 0, 26.1}

Tabulka 5.10: Základní model zahrnující transakční náklady. Optimální investiční strategie v jednotlivých uzlech alternativního primárního dvojstupňového stromu, ve kterém má každý rodič právě čtyři potomky. Veličina nákup vyjadřuje $b_{t,i}^k$ (resp. $b_{0,i}$ pro $t = 0$), prodej $s_{t,i}^k$ a držení $x_{t,i}^k$, $t = 0, 1$. Veškerý kapitál je uveden v $\times 10^{-3}$.

Strom	Optima $\times 10^{-3}$
Strom 1	169.171
Strom 2	190.006
Strom 3	159.844
Strom 4	178.457
Strom 5	151.965
Strom 6	89.288
Strom 7	142.483
Strom 8	161.405
Strom 9	168.305
Strom 10	170.435
Strom 11	158.97
Strom 12	177.598

Tabulka 5.11: Základní model zahrnující transakční náklady. Optimální hodnoty účelových funkcí, délka investičního horizontu $T = 2$. Všechny hodnoty jsou uvedeny v $\times 10^{-3}$. Stromy jsou číslovány v pořadí, v jakém jsou zmíněny v textu, přičemž primární strom má číslo 1.

	Vzdálenost optim $\times 10^{-3}$	Vnořená vzdálenost $\times 10^{-3}$
Strom 1 x Strom 2	20.835	441.552
Strom 1 x Strom 3	9.328	22.342
Strom 1 x Strom 4	9.286	22.342
Strom 1 x Strom 5	17.206	232.773
Strom 1 x Strom 6	79.883	291.26
Strom 1 x Strom 7	26.688	224.159
Strom 1 x Strom 8	7.766	241.869
Strom 1 x Strom 9	0.866	180.288
Strom 1 x Strom 10	1.264	492.969
Strom 1 x Strom 11	10.201	180.578
Strom 1 x Strom 12	8.427	180.708

Tabulka 5.12: Základní model zahrnující transakční náklady. Vzdálenosti optimálních hodnot účelových funkcí a vnořené vzdálenosti mezi primárním stromem a následně vygenerovanými stromy, délka investičního horizontu $T = 2$. Stromy jsou číslovány v pořadí, v jakém jsou zmíněny v textu, přičemž primární strom má číslo 1.

5.1.2 Trojstupňový strom

Uvažujme nyní trojstupňový primární strom, ve kterém má každý rodič právě tři potomky. V prvním kroku spočítáme optimální hodnotu účelové funkce základního modelu investičního plánování zahrnujícího transakční náklady. Primární strom vygenerovaný postupem uvedeným v úvodní části kapitoly má uzly s hodnotami uvedenými na přiloženém CD a pravděpodobnosti přechodu mezi jednotlivými uzly vypsányi tamtéž. Optimální strategií pro trojstupňový strom, ve kterém má každý rodič právě tři potomky, je v prvním kroku nakoupit

$$\begin{array}{lll} b_{0,1} = 0, & b_{0,2} = 500, & b_{0,3} = 500, \\ b_{0,4} = 0, & b_{0,5} = 0, & b_{0,6} = 1, \end{array}$$

hodnoty jsou uvedeny $\times 10^{-3}$. Optimální investiční strategie pro první tři rozhodovací okamžiky je popsána v tabulce 5.13. Optimální hodnota účelové funkce základního modelu zohledňujícího transakční náklady pak vychází 151.762×10^{-3} . Následně budeme stejně jako v případě dvojstupňového stromu konstruovat stromy podobné strukturou či hodnotami uzlů primárnímu stromu a budeme pozorovat, jak se optimální hodnota účelové funkce primárního stromu bude lišit od optimální hodnoty účelové funkce nově generovaných stromů. Současně budeme pozorovat, jak vzdálené jsou od sebe primární strom a nově vygenerované stromy, a to ve smyslu vnořené vzdálenosti. Ve všech případech zachovááme délku investičního horizontu $T = 3$.

V první skupině generovaných stromů uvažujeme stromy se třemi potomky. Stejně jako v případě dvojstupňového stromu nejprve zachováme hodnoty uzlů primárního stromu a změníme rozdělení pravděpodobnosti jednotlivých potomků na rovnoměrné. Dále zvýšíme výnosy ve všech uzlech primárního stromu o 0.45% a zároveň zachováme pravděpodobnosti z primárního stromu. V posledním případě naopak snížíme výnosy ve všech uzlech primárního stromu o 0.45% s tím, že opět zachováme pravděpodobnosti z primárního stromu.

Ve druhé skupině generovaných stromů nejdříve vygenerujeme alternativní primární strom, ve kterém má každý rodič právě dva potomky (hodnoty jednotlivých uzlů a pravděpodobnosti přechodu jsou uvedeny na přiloženém CD). Pro tento strom vychází optimální hodnota účelové funkce 157.93×10^{-3} , optimální investiční strategie je uvedena v tabulce 5.14. Následně vytvoříme strom, který zachovává hodnoty uzlů alternativního primárního stromu, ale rozdělení pravděpodobností přechodu je rovnoměrné. Nakonec vygenerujeme dva stromy, které zachovávají pravděpodobnosti přechodu mezi jednotlivými uzly, ale hodnoty uzlů jsou zvětšeny, resp. zmenšeny, o 0.45%.

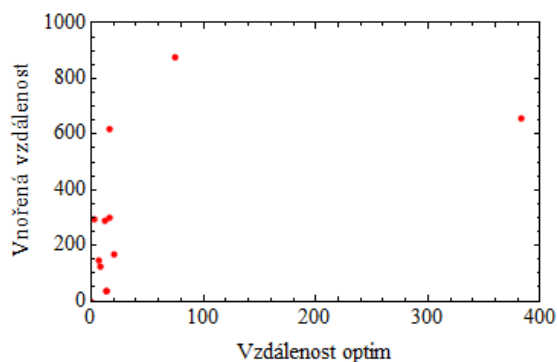
Ve třetí skupině nově generovaných stromů opakujeme celý postup, ovšem v novém alternativním primárním stromě má nyní každý rodič právě čtyři potomky. Optimální investiční strategie pro první tři rozhodovací okamžiky je uvedena v tabulce 5.15, optimální hodnota účelové funkce je v tomto případě 149.58×10^{-3} .

Optimální hodnoty účelových funkcí základního investičního modelu uvažujícího transakční náklady jsou zaspány v tabulce 5.16. Dále spočítáme vzdálenosti (ve smyslu absolutní hodnoty) optimálních hodnot účelových funkcí primárního stromu a jednotlivých dodatečně generovaných stromů. Na závěr vypočítáme vnořené vzdálenosti primárního a následně generovaných stromů. Tyto výsledky lze nalézt v tabulce 5.17. Závislost vnořené vzdálenosti na vzdálenosti optimálních hodnot ztráty znázorňuje obrázek 5.3.

Číslo uzlu	Akce	Kapitál $\times 10^{-3}$
1	Nákup	{0, 500, 500, 0, 0, 1}
	Prodej	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 499.5, 499.5, 0, 0, 1}
2	Nákup	{0, 0, 436.04, 0, 0, 0}
	Prodej	{0, 435.23, 0, 0, 0, 0.81}
	Držení	{0, 0, 831.13, 0, 0, 0}
3	Nákup	{0, 0, 500, 0, 0, 0}
	Prodej	{0, 498.99, 0, 0, 0, 1.01}
	Držení	{0, 5.52, 1004.92, 0, 0, 0}
4	Nákup	{0, 0, 500, 0, 0, 0}
	Prodej	{0, 498.78, 0, 0, 0, 1.22}
	Držení	{0, 86.81, 1130.62, 0, 0, 0}
5	Nákup	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
	Prodej	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 0, 658.14, 0, 0, 0}
6	Nákup	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
	Prodej	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 0, 840.98, 0, 0, 0}
7	Nákup	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
	Prodej	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 0, 1050.13, 0, 0, 0}
8	Nákup	{0, 0, 4.81, 0, 0, 0}
	Prodej	{0, 4.81, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 0, 800.55, 0, 0, 0}
9	Nákup	{0, 0, 5.57, 0, 0, 0}
	Prodej	{0, 5.57, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 0, 1022.39, 0, 0, 0}
10	Nákup	{0, 0, 6.47, 0, 0, 0}
	Prodej	{0, 6.47, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 0, 1276.17, 0, 0, 0}

	Nákup	{0, 0, 75.64, 0, 0, 0}
11	Prodej	{0, 75.64, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 0, 970.85, 0, 0, 0}
	Nákup	{0, 0, 87.68, 0, 0, 0}
12	Prodej	{0, 87.68, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 0, 1231.61, 0, 0, 0}
	Nákup	{0, 0, 101.76, 0, 0, 0}
13	Prodej	{0, 101.76, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 0, 1530.19, 0, 0, 0}

Tabulka 5.13: Základní model zahrnující transakční náklady. Optimální investiční strategie v jednotlivých uzlech primárního trojstupňového stromu, ve kterém má každý rodič právě tři potomky. Veličina nákup představuje $b_{t,i}^k$ (resp. $b_{0,i}$ pro $t = 0$), prodej $s_{t,i}^k$ a držení $x_{t,i}^k$, $t = 0, 1, 2$. Veškerý kapitál je uveden v $\times 10^{-3}$.



Obrázek 5.3: Základní model zahrnující transakční náklady, délka investičního horizontu $T = 3$. Závislost vnořené vzdálenosti na vzdálenosti optimálních hodnot.

Číslo uzlu	Akce	Kapitál $\times 10^{-3}$
1	Nákup	{0, 500, 500, 0, 0, 1}
	Prodej	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 499.5, 499.5, 0, 0, 1}
2	Nákup	{0, 0, 1.22, 0, 0, 0}
	Prodej	{0, 0, 0, 0, 0, 1.22}
	Držení	{0, 589.78, 635.04, 0, 0, 0}
3	Nákup	{0, 0, 0.99, 0, 0, 0}
	Prodej	{0, 0, 0, 0, 0, 0.99}
	Držení	{0, 499.82, 497.75, 0, 0, 0}
4	Nákup	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
	Prodej	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 696.38, 805.8, 0, 0, 0}
5	Nákup	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
	Prodej	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 590.15, 631.56, 0, 0, 0}
6	Nákup	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
	Prodej	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 590.15, 631.6, 0, 0, 0}
7	Nákup	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
	Prodej	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 500.13, 495.02, 0, 0, 0}

Tabulka 5.14: Základní model zahrnující transakční náklady. Optimální investiční strategie v jednotlivých uzlech alternativního primárního trojstupňového stromu, ve kterém má každý rodič právě dva potomky. Veličina nákup představuje $b_{t,i}^k$ (resp. $b_{0,i}$ pro $t = 0$), prodej $s_{t,i}^k$ a držení $x_{t,i}^k$, $t = 0, 1, 2$. Veškerý kapitál je uveden v $\times 10^{-3}$.

Číslo uzlu	Akce	Kapitál $\times 10^{-3}$
1	Nákup	{0, 500, 500, 0, 0, 1}
	Prodej	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 499.5, 499.5, 0, 0, 1}
2	Nákup	{0, 0, 500, 0, 0, 0}
	Prodej	{0, 498.96, 0, 0, 0, 1.04}
	Držení	{0, 16.85, 1024.77, 0, 0, 0}
3	Nákup	{0, 0, 500, 0, 0, 0}
	Prodej	{0, 498.77, 0, 0, 0, 1.23}
	Držení	{0, 108.47, 1165.77, 0, 0, 0.05}
4	Nákup	{0, 0, 360.83, 0, 0, 0}
	Prodej	{0, 360.15, 0, 0, 0, 0.68}
	Držení	{0, 0, 662.39, 0, 0, 0}
5	Nákup	{0, 0, 490.68, 0, 0, 0}
	Prodej	{0, 489.72, 0, 0, 0, 0.96}
	Držení	{0, 0, 968.28, 0, 0, 0}
6	Nákup	{0, 0, 17.41, 0, 0, 0}
	Prodej	{0, 17.4, 0, 0, 0, 0.01}
	Držení	{0, 0, 1095.04, 0, 0, 0}
7	Nákup	{0, 0, 20.49, 0, 0, 0}
	Prodej	{0, 20.48, 0, 0, 0, 0.01}
	Držení	{0, 0, 1387.38, 0, 0, 0}
8	Nákup	{0, 0, 12.15, 0, 0, 0}
	Prodej	{0, 12.15, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 0, 631.56, 0, 0, 0}
9	Nákup	{0, 0, 16.53, 0, 0, 0}
	Prodej	{0, 16.52, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 0, 997.36, 0, 0, 0}
10	Nákup	{0, 0, 112.06, 0, 0, 0}
	Prodej	{0, 112.01, 0, 0, 0, 0.05}
	Držení	{0, 0, 1337.87, 0, 0, 0}

	Nákup	{0, 0, 131.9, 0, 0, 0}
11	Prodej	{0, 131.84, 0, 0, 0, 0.06}
	Držení	{0, 0, 1686.75, 0, 0, 0}
	Nákup	{0, 0, 78.24, 0, 0, 0}
12	Prodej	{0, 78.21, 0, 0, 0, 0.03}
	Držení	{0, 0, 782.81, 0, 0, 0}
	Nákup	{0, 0, 106.39, 0, 0, 0}
13	Prodej	{0, 106.35, 0, 0, 0, 0.05}
	Držení	{0, 0, 1222.09, 0, 0, 0}
	Nákup	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
14	Prodej	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 0, 696.57, 0, 0, 0}
	Nákup	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
15	Prodej	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 0, 883.54, 0, 0, 0}
	Nákup	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
16	Prodej	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 0, 400.38, 0, 0, 0}
	Nákup	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
17	Prodej	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 0, 634, 0, 0, 0}
	Nákup	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
18	Prodej	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 0, 1018.24, 0, 0, 0}
	Nákup	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
19	Prodej	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 0, 1291.55, 0, 0, 0}
	Nákup	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
20	Prodej	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 0, 585.28, 0, 0, 0}
	Nákup	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
21	Prodej	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 0, 926.78, 0, 0, 0}

Tabulka 5.15: Základní model zahrnující transakční náklady. Optimální investiční strategie v jednotlivých uzlech alternativního primárního trojstupňového stromu, ve kterém má každý rodič právě čtyři potomky. Veličina nákup představuje $b_{t,i}^k$ (resp. $b_{0,i}$ pro $t = 0$), prodej $s_{t,i}^k$ a držení $x_{t,i}^k$, $t = 0, 1, 2$. Veškerý kapitál je uveden v $\times 10^{-3}$.

Strom	Optima $\times 10^{-3}$
Strom 1	151.762
Strom 2	135.953
Strom 3	137.51
Strom 4	165.887
Strom 5	157.93
Strom 6	-231.655
Strom 7	143.757
Strom 8	171.977
Strom 9	149.58
Strom 10	226.132
Strom 11	135.295
Strom 12	163.738

Tabulka 5.16: Základní model zahrnující transakční náklady. Optimální hodnoty účelových funkcí, délka investičního horizontu $T = 3$. Všechny hodnoty jsou uvedeny v $\times 10^{-3}$. Stromy jsou číslovány v pořadí, v jakém jsou zmíněny v textu, přičemž primární strom má číslo 1.

	Vzdálenost optim $\times 10^{-3}$	Vnořená vzdálenost $\times 10^{-3}$
Strom 1 x Strom 2	15.81	620.725
Strom 1 x Strom 3	14.252	33.501
Strom 1 x Strom 4	14.125	33.501
Strom 1 x Strom 5	6.168	146.206
Strom 1 x Strom 6	383.417	654.951
Strom 1 x Strom 7	8.006	125.211
Strom 1 x Strom 8	20.214	169.971
Strom 1 x Strom 9	2.182	295.006
Strom 1 x Strom 10	74.37	878.505
Strom 1 x Strom 11	16.467	301.962
Strom 1 x Strom 12	11.976	289.083

Tabulka 5.17: Základní model zahrnující transakční náklady. Vzdálenosti optimálních hodnot účelových funkcí a vnořené vzdálenosti mezi primárním stromem a následně vygenerovanými stromy, délka investičního horizontu $T = 3$. Stromy jsou číslovány v pořadí, v jakém jsou zmíněny v textu, přičemž primární strom má číslo 1.

Pro zvolenou kombinaci vstupních parametrů základní model investičního plánování ve většině případů investorovi radí polovinu počátečního majetku investovat do třetího aktiva (což je aktivum s nejvyšší střední hodnotou výnosu) a druhou polovinu majetku investovat do druhého, případně šestého, aktiva. Tato aktiva mají druhou a třetí nejvyšší střední hodnotu výnosu. Díky zvolenému hornímu omezení na nákup a prodej aktiv je nepatrná část počátečního majetku investována do dalšího (typicky šestého) aktiva. Toto aktivum je ovšem obratem v následujícím rozhodovacím období prodáno. Základní model pouze minimalizuje střední hodnotu nedostatku peněz (vůči požadovanému koncovému majetku G) na konci celého investičního období, a to bez ohledu na rizikovost jednotlivých scénářů. Ve většině případů proto model směřuje k držení třetího – tedy nejvýnosnějšího – aktiva. Toto platí pro investiční horizont $T = 2$ i $T = 3$.

Nelze tvrdit, že čím menší je vzdálenost optimálních hodnot účelových funkcí primárního stromu a dodatečně generovaného stromu, tím menší je i vnořená vzdálenost těchto dvou stromů. Naopak, optimální hodnoty účelových funkcí si mohou být blízké, přičemž stromy jsou si (ve smyslu vnořené vzdálenosti) poměrně vzdáleny. Tuto skutečnost ilustruje tabulka 5.17, konkrétně porovnání stromů číslo 1 a 9. Strom číslo 1 je strom, ve kterém má každý rodič právě tři potomky, ve stromu číslo 9 má každý rodič právě čtyři potomky. Optimální hodnota účelové funkce stromu 9 je optimální hodnotě stromu 1 ze všech generovaných stromů (ve smyslu absolutní hodnoty) nejbližší. Naproti tomu z hlediska vnořené vzdálenosti patří tyto dva stromy mezi vzdálenější. Dále jsme zjistili, že v jednotlivých sadách dodatečně generovaných stromů je nejzávažnějším porušením struktury stromu vedoucí k výraznému nárůstu vnořené vzdálenosti těchto dvou stromů změna rozdělení pravděpodobnosti přechodu. Toto platí jak pro investiční horizont $T = 2$, tak pro $T = 3$. Stromy s rovnoměrně rozdělenými pravděpodobnostmi přechodu jsou v každé sadě (tzn. sadě čtyř stromů se třemi, resp. dvěma, resp. čtyřmi potomky) ve smyslu vnořené vzdálenosti nejdále od primárního stromu.

5.2 Model zohledňující riziko na každé úrovni

Uvažujme model představený v podkapitole 2.3.3, který minimalizuje vážený součet celkového CVaR_α a CVaR_α na jednotlivých úrovních. Stejně jako v základním modelu investičního plánování chceme nejprve zkonstruovat primární strom, ve kterém má každý rodič právě tři potomky. Nejdříve vygenerujeme pomocí metody momentů (viz kapitola 3) scénáře pro jednotlivé uzly (tedy tři scénáře pro každého rodiče). Tyto hodnoty považujeme za vnitřní body mřížky, která vstupuje v prvním kroku do algoritmu popsaného v podkapitole 4.3. Následně pomocí tohoto algoritmu určíme nové vnitřní body Voronoiových buněk – tedy nově uspořádanou mřížku – stejně jako k pravděpodobnosti, které novým vnitřním bodům mřížky náleží. Na závěr vystavíme požadovaný strom. Hodnoty jednotlivých uzlů opět představují scénáře, které mohou nastat. V našem případě volíme výši transakčních nákladů na nákup i prodej určitého objemu aktiv a hodnotu počátečního majetku totožnou hodnotám vyskytujícím se v základním investičním modelu, který zohledňuje transakční náklady; tedy $c_b = c_s = 0.1\%$, $B = 1$, minimální hodnota požadovaného koncového majetku $G = 1.02$. Jelikož i v tomto modelu předpokládáme, že prodeje nakrátko jsou zakázány, ohraničíme

Číslo uzlu	Hodnota uzlu $\times 10^{-3}$
1	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
2	{1.1105, 1.1655, 1.2629, 1.0751, 1.157, 1.2244}
3	{1.008, 1.0094, 1.0102, 1.0074, 1.0078, 1.0084}
4	{0.905, 0.8619, 0.7764, 0.9408, 0.8713, 0.811}
5	{1.1105, 1.1655, 1.2629, 1.0751, 1.157, 1.2244}
6	{1.008, 1.0094, 1.0102, 1.0074, 1.0078, 1.0084}
7	{0.905, 0.8619, 0.7764, 0.9408, 0.8713, 0.811}
8	{1.1105, 1.1655, 1.2629, 1.0751, 1.157, 1.2244}
9	{1.008, 1.0094, 1.0102, 1.0074, 1.0078, 1.0084}
10	{0.905, 0.8619, 0.7764, 0.9408, 0.8713, 0.811}
11	{1.1105, 1.1655, 1.2629, 1.0751, 1.157, 1.2244}
12	{1.008, 1.0094, 1.0102, 1.0074, 1.0078, 1.0084}
13	{0.905, 0.8619, 0.7764, 0.9408, 0.8713, 0.811}

Tabulka 5.18: Model zohledňující riziko na každé úrovni. Hodnoty jednotlivých uzlů v primárním dvojestupňovém stromu, ve kterém má každý rodič právě tři potomky. Hodnoty uzlů jsou uvedeny v $\times 10^{-3}$.

zdola hodnoty držených, nakoupených i prodaných aktiv ve všech scénářích a všech časech nulou. Rizikově averzní investor by naopak opět neinvestoval veškeré své finanční prostředky do jednoho jediného aktiva, z tohoto důvodu jsme hodnoty nakoupených i prodaných aktiv ve všech scénářích a všech časech omezili shora hodnotou 0.5. Hladinu spolehlivosti α pokládáme rovnu 95%. Největší váhu $\kappa = 2 \sum_{t=1}^T \lambda_t$ klademe na celkový CVaR_α , jednotlivým investičním obdobím přisuzujeme váhu $\lambda_t = 0.95^t$, $t = 1, \dots, T$. Tato volba λ_t odráží skutečnost, že nejdůležitější je pro investora první období (v případě, že by v prvním investičním období zaznamenal vysokou ztrátu, nemuselo by se mu podařit ji za všechna zbývající investiční období zvrátit); λ_t lze navíc v tomto tvaru chápat jako diskontní faktor.

5.2.1 Dvojestupňový strom

Mějme dvojestupňový primární strom, ve kterém má každý rodič právě dva potomky. Nejdříve spočítáme optimální hodnotu účelové funkce (tedy váženého součtu celkového CVaR_α a CVaR_α na jednotlivých úrovních) investičního modelu zohledňujícího riziko na každé úrovni. Náhodné výnosy, které v tomto modelu vystupují, jsou dány hodnotami jednotlivých uzlů primárního stromu, viz tabulka 5.18, a pravděpodobnosti přechodu mezi jednotlivými uzly jsou taktéž dány pravděpodobnostmi přechodu mezi uzly primárního stromu, viz tabulka 5.19. Optimální investiční strategii pro dvojestupňový strom, ve kterém má každý

$p_{1:2}$	$p_{1:3}$	$p_{1:4}$
0.0827413	0.854545	0.0627133
$p_{2:5}$	$p_{2:6}$	$p_{2:7}$
0.0827413	0.854545	0.0627133
$p_{3:8}$	$p_{3:9}$	$p_{3:10}$
0.0827413	0.854545	0.0627133
$p_{4:11}$	$p_{4:12}$	$p_{4:13}$
0.0827413	0.854545	0.0627133

Tabulka 5.19: Model zohledňující riziko na každé úrovni. Pravděpodobnosti přechodu v primárním dvojstupňovém stromu, ve kterém má každý rodič právě tři potomky.

rodič právě tři potomky, je nakoupit na počátku investování

$$\begin{aligned}
 b_{0,1} &= 0, & b_{0,2} &= 0, & b_{0,3} &= 500, \\
 b_{0,4} &= 396.97, & b_{0,5} &= 0, & b_{0,6} &= 104.03,
 \end{aligned}$$

hodnoty jsou uvedeny v $\times 10^{-3}$. Optimální investiční strategie v prvním a druhém rozhodovacím kroku je popsána v tabulce 5.20. Optimální hodnota účelové funkce modelu zohledňujícího riziko na každé investiční úrovni (vážený součet celkového CVaR_α a CVaR_α na jednotlivých úrovních) je 117.809×10^{-3} .

Obdobně jako v předchozí podkapitole popisující základní model investičního plánování budeme budovat stromy s obdobnou strukturou, resp. s obdobnými hodnotami uzlů, jakou má primární strom, a budeme pozorovat, nakolik se optimální hodnota účelové funkce primárního stromu bude lišit od optimální hodnoty účelové funkce nově generovaných stromů. Zároveň budeme opět sledovat, nakolik jsou vzdáleny primární strom a nově vygenerované stromy, a to ve smyslu vnořené vzdálenosti. Ve všech případech zachováváme délku investičního horizontu $T = 2$.

V první sadě nově generovaných stromů pracujeme se stromy, ve kterých má každý rodič právě tři potomky. Nejprve vygenerujeme strom, jehož hodnoty uzlů budou totožné s hodnotami uzlů primárního stromu, ovšem pravděpodobnosti přechod mezi jednotlivými uzly budou rozděleny rovnoměrně. Dále vygenerujeme strom, který zachovává rozdělení pravděpodobností přechodu primárního stromu, ale veškeré hodnoty uzlů má oproti primárnímu stromu navýšené o 0.45%. Jako poslední v této sadě vygenerujeme strom, který opět zachovává rozdělení pravděpodobností přechodu primárního stromu, ale veškeré hodnoty uzlů má oproti primárnímu stromu snižené o 0.45%.

Ve druhé sadě generovaných stromů budujeme stromy, ve kterých má každý rodič právě dva potomky. Nejdříve vystavíme alternativní primární strom, jehož hodnoty uzlů a pravděpodobností přechodu mezi jednotlivými uzly lze nalézt v tabulce 5.21, resp. 5.22. Optimální investiční strategie je uvedena v tabulce 5.23, optimální hodnota účelové funkce je rovna 55.575×10^{-3} . Dále vygenerujeme strom, který má hodnoty uzlů totožné s hodnotami alternativního primárního stromu,

Číslo uzlu	Akce	Kapitál $\times 10^{-3}$
1	Nákup	{0, 0, 500, 396.97, 0, 104.03}
	Prodej	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 0, 499.5, 396.57, 0, 103.93}
2	Nákup	{257.33, 0, 0, 500, 0, 0}
	Prodej	{0, 0, 630.21, 0, 0, 127.12}
	Držení	{257.07, 0, 0, 925.84, 0, 0}
3	Nákup	{108.77, 0, 0, 500, 0, 0}
	Prodej	{0, 0, 504.07, 0, 0, 104.69}
	Držení	{108.66, 0, 0, 899.02, 0, 0}
4	Nákup	{0, 0, 0, 471.6, 0, 0}
	Prodej	{0, 0, 387.4, 0, 0, 84.2}
	Držení	{0, 0, 0, 844.21, 0, 0}

Tabulka 5.20: Model zohledňující riziko na každé úrovni. Optimální investiční strategie v jednotlivých uzlech primárního dvojstupňového stromu, ve kterém má každý rodič právě tři potomky. Veličina nákup představuje $b_{t,i}^k$ (resp. $b_{0,i}$ pro $t = 0$), prodej $s_{t,i}^k$ a držení $x_{t,i}^k, t = 0, 1$. Veškerý kapitál je uveden v $\times 10^{-3}$.

Číslo uzlu	Hodnota uzlu $\times 10^{-3}$
1	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
2	{1.0615, 1.0975, 1.1597, 1.043, 1.0955, 1.1368}
3	{0.9978, 0.9941, 0.9833, 1.0012, 0.9904, 0.9844}
4	{1.0615, 1.0975, 1.1597, 1.043, 1.0955, 1.1368}
5	{0.9978, 0.9941, 0.9833, 1.0012, 0.9904, 0.9844}
6	{1.0615, 1.0975, 1.1597, 1.043, 1.0955, 1.1368}
7	{0.9978, 0.9941, 0.9833, 1.0012, 0.9904, 0.9844}

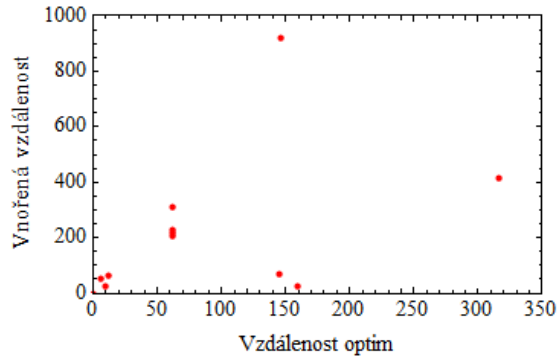
Tabulka 5.21: Model zohledňující riziko na každé úrovni. Hodnoty jednotlivých uzlů v alternativním primárním dvojstupňovém stromu, ve kterém má každý rodič právě dva potomky. Hodnoty uzlů jsou uvedeny v $\times 10^{-3}$.

$p_{1:2}$	$p_{1:3}$
0.257857	0.742143
$p_{2:4}$	$p_{2:5}$
0.257857	0.742143
$p_{3:6}$	$p_{3:7}$
0.257857	0.742143

Tabulka 5.22: Model zohledňující riziko na každé úrovni. Pravděpodobnosti přechodu v alternativním primárním dvojstupňovém stromu, ve kterém má každý rodič právě dva potomky.

Číslo uzlu	Akce	Kapitál $\times 10^{-3}$
1	Nákup	{0, 1, 500, 0, 500, 0}
	Prodej	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 1, 499.5, 0, 499.5, 0}
2	Nákup	{0, 0, 0, 338.17, 0, 0}
	Prodej	{0, 0, 338.17, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 1.1, 240.76, 337.83, 547.22, 0}
3	Nákup	{0, 0, 78.89, 416.31, 0, 0}
	Prodej	{0, 0.99, 0, 0, 494.21, 0}
	Držení	{0, 0, 569.98, 415.9, 0, 0}

Tabulka 5.23: Model zohledňující riziko na každé úrovni. Optimální investiční strategie v jednotlivých uzlech alternativního primárního dvojstupňového stromu, ve kterém má každý rodič právě dva potomky. Veličina nákup vyjadřuje $b_{t,i}^k$ (resp. $b_{0,i}$ pro $t = 0$), prodej $s_{t,i}^k$ a držení $x_{t,i}^k$, $t = 0, 1$. Veškerý kapitál je uveden v $\times 10^{-3}$.



Obrázek 5.4: Model zohledňující riziko na každé úrovni, délka investičního horizontu $T = 2$. Závislost vnořené vzdálenosti na vzdálenosti optimálních hodnot.

avšak rozdělení pravděpodobností přechodu je rovnoměrné. Nakonec vygenerujeme dva stromy, jejichž pravděpodobnosti přechodu budou rovny pravděpodobnostem přechodu v alternativním primárním stromu, avšak hodnoty uzlů budou zvýšeny, resp. sníženy, 0.45%.

V poslední sadě nově vygenerovaných stromů pěstujeme stromy, ve kterých má každý uzel vyjma listů právě čtyři potomky. Nejprve opět vygenerujeme alternativní primární strom, hodnoty uzlů a pravděpodobností přechodu uvádíme v tabulce 5.24, resp. 5.25. Optimální investiční strategie pro první a druhý krok rozhodování je popsána v tabulce 5.26, optimální hodnota účelové funkce vychází 111.487×10^{-3} . Od tohoto alternativního primárního stromu odvodíme strom, který zachovává hodnoty uzlů ale má odlišné (rovnoměrně rozdělené) pravděpodobnosti přechodu, dále strom, jehož hodnoty uzlů jsou navýšeny o 0.45%, a obdobně strom, jehož hodnoty uzlů jsou sníženy o 0.45%. V obou posledních případech platí, že pravděpodobnosti přechodu mezi jednotlivými uzly zůstávají zachovány.

Optimální hodnoty účelových funkcí modelu zohledňujícího riziko na každé investiční úrovni lze nalézt v tabulce 5.27. Nyní spočítáme vzdálenosti (ve smyslu absolutní hodnoty) optimálních hodnot účelových funkcí primárního stromu a jednotlivých dodatečně generovaných stromů a nakonec určíme vnořené vzdálenosti primárního a následně generovaných stromů. Tyto výsledky jsou uvedeny v tabulce 5.28. Závislost vnořené vzdálenosti na vzdálenosti optimálních hodnot váženého součtu celkového CVaR_α a CVaR_α na jednotlivých úrovních znázorňuje obrázek 5.4.

5.2.2 Trojstupňový strom

Uvažujme nyní trojstupňový primární strom, ve kterém má každý rodič právě tři potomky. Strom vygenerujeme postupem popsaným v první části podkapitoly. Hodnoty uzlů primárního stromu spolu s pravděpodobnostmi přechodu uvádíme na příloženém CD. Optimální investiční strategie v prvním kroku rozhodování v primárním stromě říká, že investor má nakoupit

$$\begin{aligned} b_{0,1} &= 499.99, & b_{0,2} &= 0, & b_{0,3} &= 0, \\ b_{0,4} &= 500, & b_{0,5} &= 1.01, & b_{0,6} &= 0, \end{aligned}$$

Číslo uzlu	Hodnota uzlu $\times 10^{-3}$
1	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
2	{1.0076, 1.0097, 1.009, 1.0077, 1.0055, 1.0064}
3	{1.1691, 1.6362, 1.8054, 1.2303, 1.5125, 1.7561}
4	{1.0836, 1.124, 1.1983, 1.0568, 1.1199, 1.1698}
5	{0.9202, 0.869, 0.7823, 0.9483, 0.8756, 0.8143}
6	{1.0076, 1.0097, 1.009, 1.0077, 1.0055, 1.0064}
7	{1.1691, 1.6362, 1.8054, 1.2303, 1.5125, 1.7561}
8	{1.0836, 1.124, 1.1983, 1.0568, 1.1199, 1.1698}
9	{0.9202, 0.869, 0.7823, 0.9483, 0.8756, 0.8143}
10	{1.0076, 1.0097, 1.009, 1.0077, 1.0055, 1.0064}
11	{1.1691, 1.6362, 1.8054, 1.2303, 1.5125, 1.7561}
12	{1.0836, 1.124, 1.1983, 1.0568, 1.1199, 1.1698}
13	{0.9202, 0.869, 0.7823, 0.9483, 0.8756, 0.8143}
14	{1.0076, 1.0097, 1.009, 1.0077, 1.0055, 1.0064}
15	{1.1691, 1.6362, 1.8054, 1.2303, 1.5125, 1.7561}
16	{1.0836, 1.124, 1.1983, 1.0568, 1.1199, 1.1698}
17	{0.9202, 0.869, 0.7823, 0.9483, 0.8756, 0.8143}
18	{1.0076, 1.0097, 1.009, 1.0077, 1.0055, 1.0064}
19	{1.1691, 1.6362, 1.8054, 1.2303, 1.5125, 1.7561}
20	{1.0836, 1.124, 1.1983, 1.0568, 1.1199, 1.1698}
21	{0.9202, 0.869, 0.7823, 0.9483, 0.8756, 0.8143}

Tabulka 5.24: Model zohledňující riziko na každé úrovni. Hodnoty jednotlivých uzlů v alternativním primárním dvojstupňovém stromu, ve kterém má každý rodič právě čtyři potomky. Hodnoty uzlů jsou uvedeny v $\times 10^{-3}$.

$p_{1:2}$	$p_{1:3}$	$p_{1:4}$	$p_{1:5}$
0.829663	0.00682511	0.0925021	0.0710102
$p_{2:6}$	$p_{2:7}$	$p_{2:8}$	$p_{2:9}$
0.829663	0.00682511	0.0925021	0.0710102
$p_{3:10}$	$p_{3:11}$	$p_{3:12}$	$p_{3:13}$
0.829663	0.00682511	0.0925021	0.0710102
$p_{4:14}$	$p_{4:15}$	$p_{4:16}$	$p_{4:17}$
0.829663	0.00682511	0.0925021	0.0710102
$p_{5:18}$	$p_{5:19}$	$p_{5:20}$	$p_{5:21}$
0.829663	0.00682511	0.0925021	0.0710102

Tabulka 5.25: Model zohledňující riziko na každé úrovni. Pravděpodobnosti přechodu v alternativním primárním dvojstupňovém stromu, ve kterém má každý rodič právě čtyři potomky.

hodnoty jsou uvedeny v $\times 10^{-3}$. Optimální investiční strategii pro první tři rozhodovací okamžiky lze nalézt v tabulce 5.29. Optimální hodnota účelové funkce investičního modelu zohledňujícího riziko na každé úrovni v tomto případě vychází 193.951×10^{-3} .

Podobně jako v předchozí podkapitole budeme dále budovat stromy s obdobnou strukturou, resp. s obdobnými hodnotami uzlů, jako má primární strom, a budeme pozorovat, nakolik se optimální hodnota účelové funkce primárního stromu bude lišit od optimální hodnoty účelové funkce nově generovaných stromů. Spolu s tím budeme znovu sledovat, jak jsou od sebe vzdáleny primární strom a nově vygenerované stromy, a to ve smyslu vnořené vzdálenosti. Ve všech případech zachováváme délku investičního horizontu $T = 3$.

Začneme generováním první sady, v níž se vyskytují stromy, ve kterých má každý rodič právě tři potomky. Nejprve vygenerujeme strom, jehož hodnoty jsou rovny hodnotám uzlů v primárním stromu, ovšem rozdělení pravděpodobnosti přechodu bude rovnoměrné. Dále vygenerujeme strom, ve kterém budou všechny hodnoty uzlů zvýšeny o 0.45% oproti hodnotám uzlů primárního stromu, a následně strom, jehož hodnoty uzlů budou sníženy o 0.45% oproti hodnotám uzlů primárního stromu. V obou případech zůstávají pravděpodobnosti přechodu mezi rodiči a potomky totožné s pravděpodobnostmi přechodu v primárním stromě.

Další sady nově vygenerovaných stromů budou zahrnovat stromy o dvou a čtyřech potomcích. V obou sadách opět nejprve vygenerujeme alternativní primární stromy (hodnoty uzlů i pravděpodobnosti přechodu obou stromů lze nalézt na přiloženém CD) a spočítáme hodnoty účelových funkcí. Ty vycházejí 81.296×10^{-3} pro alternativní primární strom se dvěma potomky a 173.555×10^{-3} pro alternativní primární strom se čtyřmi potomky. Optimální investiční strategie pro alternativní primární stromy lze nalézt v tabulkách 5.30 (strom se dvěma potomky) a 5.31 (strom se čtyřmi potomky). Dále vygenerujeme stromy, ve kterých

Číslo uzlu	Akce	Kapitál $\times 10^{-3}$
1	Nákup	{0, 231.79, 269.21, 500, 0, 0}
	Prodej	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 231.56, 268.94, 499.5, 0, 0}
2	Nákup	{4.66, 0, 0, 500, 0, 0}
	Prodej	{0, 233.57, 271.08, 0, 0, 0}
	Držení	{4.65, 0, 0, 1002.84, 0, 0}
3	Nákup	{363.56, 0, 0, 500, 0, 0}
	Prodej	{0, 378.49, 485.06, 0, 0, 0}
	Držení	{363.19, 0, 0, 1114.05, 0, 0}
4	Nákup	{81.95, 0, 0, 500, 0, 0}
	Prodej	{0, 260.01, 321.94, 0, 0, 0}
	Držení	{81.87, 0, 0, 1027.39, 0, 0}
5	Nákup	{0, 0, 0, 411.21, 0, 0}
	Prodej	{0, 201.02, 210.19, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 0, 0, 884.48, 0, 0}

Tabulka 5.26: Model zohledňující riziko na každé úrovni. Optimální investiční strategie v jednotlivých uzlech alternativního primárního dvojstupňového stromu, ve kterém má každý rodič právě čtyři potomky. Veličina nákup vyjadřuje $b_{t,i}^k$ (resp. $b_{0,i}$ pro $t = 0$), prodej $s_{t,i}^k$ a držení $x_{t,i}^k$, $t = 0, 1$. Veškerý kapitál je uveden v $\times 10^{-3}$.

Strom	Optima $\times 10^{-3}$
Strom 1	117.809
Strom 2	433.831
Strom 3	108.831
Strom 4	276.98
Strom 5	55.575
Strom 6	55.575
Strom 7	55.575
Strom 8	55.575
Strom 9	111.487
Strom 10	264.462
Strom 11	105.917
Strom 12	263.292

Tabulka 5.27: Model zohledňující riziko na každé úrovni. Optimální hodnoty účelových funkcí, délka investičního horizontu $T = 2$. Všechny hodnoty jsou uvedeny v $\times 10^{-3}$. Stromy jsou číslovány v pořadí, v jakém jsou zmíněny v textu, přičemž primární strom má číslo 1.

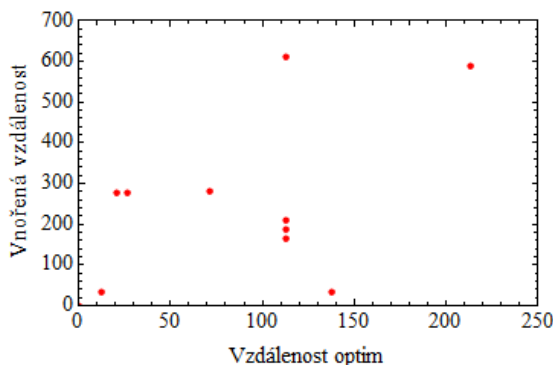
	Vzdálenost optim $\times 10^{-3}$	Vnořená vzdálenost $\times 10^{-3}$
Strom 1 x Strom 2	316.022	416.964
Strom 1 x Strom 3	8.978	22.322
Strom 1 x Strom 4	159.172	22.322
Strom 1 x Strom 5	62.234	216.727
Strom 1 x Strom 6	62.234	312.268
Strom 1 x Strom 7	62.234	206.843
Strom 1 x Strom 8	62.234	227.276
Strom 1 x Strom 9	6.321	53.891
Strom 1 x Strom 10	146.653	922.044
Strom 1 x Strom 11	11.892	63.59
Strom 1 x Strom 12	145.483	71.163

Tabulka 5.28: Model zohledňující riziko na každé úrovni. Vzdálenosti optimálních hodnot účelových funkcí a vnořené vzdálenosti mezi primárním stromem a následně vygenerovanými stromy, délka investičního horizontu $T = 2$. Stromy jsou číslovány v pořadí, v jakém jsou zmíněny v textu, přičemž primární strom má číslo 1.

Číslo uzlu	Akce	Kapitál $\times 10^{-3}$
1	Nákup	{499.99, 0, 0, 500, 1.01, 0}
	Prodej	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{499.49, 0, 0, 499.5, 1.01, 0}
2	Nákup	{0, 0, 0, 500, 0, 0}
	Prodej	{498.98, 0, 0, 0, 1.02, 0}
	Držení	{4.28, 0, 0, 1003.08, 0, 0}
3	Nákup	{0, 0, 0, 500, 0, 0}
	Prodej	{498.82, 0, 0, 0, 1.17, 0}
	Držení	{58.12, 0, 0, 1039.64, 0, 0}
4	Nákup	{0, 0, 0, 463.79, 0, 0}
	Prodej	{462.9, 0, 0, 0, 0.89, 0}
	Držení	{0, 0, 0, 939.71, 0, 0}
5	Nákup	{0, 0, 0, 4.31, 0, 0}
	Prodej	{4.31, 0, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 0, 0, 1015.59, 0, 0}
6	Nákup	{0, 0, 0, 4.77, 0, 0}
	Prodej	{4.77, 0, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 0, 0, 1089.46, 0, 0}
7	Nákup	{0, 0, 0, 3.96, 0, 0}
	Prodej	{3.96, 0, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 0, 0, 960.62, 0, 0}
8	Nákup	{0, 0, 0, 58.56, 0, 0}
	Prodej	{58.56, 0, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 0, 0, 1106.64, 0, 0}
9	Nákup	{0, 0, 0, 64.8, 0, 0}
	Prodej	{64.8, 0, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 0, 0, 1188.97, 0, 0}
10	Nákup	{0, 0, 0, 53.86, 0, 0}
	Prodej	{53.86, 0, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 0, 0, 1045.33, 0, 0}

11	Nákup	$\{0, 0, 0, 0, 0, 0\}$
	Prodej	$\{0, 0, 0, 0, 0, 0\}$
	Držení	$\{0, 0, 0, 947.4, 0, 0\}$
12	Nákup	$\{0, 0, 0, 0, 0, 0\}$
	Prodej	$\{0, 0, 0, 0, 0, 0\}$
	Držení	$\{0, 0, 0, 1016.17, 0, 0\}$
13	Nákup	$\{0, 0, 0, 0, 0, 0\}$
	Prodej	$\{0, 0, 0, 0, 0, 0\}$
	Držení	$\{0, 0, 0, 896.22, 0, 0\}$

Tabulka 5.29: Model zohledňující riziko na každé úrovni. Optimální investiční strategie v jednotlivých uzlech primárního trojstupňového stromu, ve kterém má každý rodič právě tři potomky. Veličina nákup představuje $b_{t,i}^k$ (resp. $b_{0,i}$ pro $t = 0$), prodej $s_{t,i}^k$ a držení $x_{t,i}^k$, $t = 0, 1, 2$. Veškerý kapitál je uveden v $\times 10^{-3}$.



Obrázek 5.5: Model zohledňující riziko na každé úrovni, délka investičního horizontu $T = 3$. Závislost vnořené vzdálenosti na vzdálenosti optimálních hodnot.

zachováme hodnoty uzlů alternativních primárních stromů a pouze změním rozdělení pravděpodobností přechodu na rovnoměrné. Poté u obou stromů zvýšíme hodnoty všech uzlů o 0.45%, zatímco pravděpodobnosti přechodu zůstávají stejné. Nakonec u obou stromů snížíme hodnoty všech uzlů o 0.45%, zatímco pravděpodobnosti přechodu zůstávají stejné zatímco pravděpodobnosti přechodu opět zůstávají nezměněny.

Optimální hodnoty účelových funkcí investičního modelu zahrnujícího riziko na každé úrovni jsou představeny v tabulce 5.32. Na závěr spočítáme vzdálenosti (ve smyslu absolutní hodnoty) optimálních hodnot účelových funkcí primárního stromu a jednotlivých dodatečně generovaných stromů. Nakonec určíme vnořené vzdálenosti primárního a následně generovaných stromů. Tyto výsledky lze nalézt v tabulce 5.33. Závislost vnořené vzdálenosti na vzdálenosti optimálních hodnot váženého součtu celkového CVaR_α a CVaR_α na jednotlivých úrovních znázorňuje obrázek 5.5.

Pro investiční horizont $T = 2$ radí investorovi model zohledňující riziko na každé úrovni rozdělit svůj počáteční kapitál mezi více aktiv. Jedním z nich je ve většině případů čtvrté aktivum, což je aktivum s nejnižší směrodatnou odchyl-

Číslo uzlu	Akce	Kapitál $\times 10^{-3}$
1	Nákup	{8.27, 2.88, 481.02, 7.76, 25.34, 475.72}
	Prodej	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{8.27, 2.88, 480.54, 7.75, 25.32, 475.25}
2	Nákup	{143.32, 115.77, 0, 146.16, 192.9, 0}
	Prodej	{0, 0, 334.11, 0, 0, 264.04}
	Držení	{151.47, 118.53, 144.02, 153.8, 217.94, 208.21}
3	Nákup	{275.87, 222.97, 0, 285.75, 188.62, 0}
	Prodej	{0, 0, 554.13, 0, 0, 419.08}
	Držení	{284.68, 226.07, 41.76, 293.75, 217.39, 153.66}
4	Nákup	{0, 171, 163.17, 0, 0, 0}
	Prodej	{65.47, 0, 0, 67.55, 104.84, 96.31}
	Držení	{86.38, 289.45, 306.41, 86.8, 112.31, 110.61}
5	Nákup	{137.43, 148.93, 0, 142.26, 0, 0}
	Prodej	{0, 0, 108.41, 0, 150.29, 169.92}
	Držení	{303.85, 285.48, 70.23, 306.54, 98.83, 81.02}
6	Nákup	{0, 0, 252.39, 0, 0, 0}
	Prodej	{57.92, 50.92, 0, 59.91, 55.36, 28.28}
	Držení	{227.55, 175.27, 293.72, 234.96, 161.29, 124.47}
7	Nákup	{0, 219.94, 226.51, 0, 0, 0}
	Prodej	{129.12, 0, 0, 141.27, 101.25, 74.81}
	Držení	{183.78, 480.45, 278.12, 172.65, 147.29, 110.43}

Tabulka 5.30: Model zohledňující riziko na každé úrovni. Optimální investiční strategie v jednotlivých uzlech alternativního primárního trojstupeňového stromu, ve kterém má každý rodič právě dva potomky. Veličina nákup představuje $b_{t,i}^k$ (resp. $b_{0,i}$ pro $t = 0$), prodej $s_{t,i}^k$ a držení $x_{t,i}^k$, $t = 0, 1, 2$. Veškerý kapitál je uveden v $\times 10^{-3}$.

Číslo uzlu	Akce	Kapitál $\times 10^{-3}$
1	Nákup	{499.99, 0, 0, 500, 1.01, 0}
	Prodej	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{499.49, 0, 0, 499.5, 1, 0}
2	Nákup	{0, 0, 0, 446.36, 0, 0}
	Prodej	{445.5, 0, 0, 0, 0.85, 0}
	Držení	{0, 0, 0, 911.97, 0, 0}
3	Nákup	{0, 0, 0, 500, 0, 0}
	Prodej	{498.79, 0.01, 0, 0, 1.21, 0}
	Držení	{80.76, 0, 0, 1054.22, 0, 0}
4	Nákup	{0, 0, 0, 499.94, 0, 0}
	Prodej	{498.95, 0, 0, 0, 0.99, 0}
	Držení	{0, 0, 0, 999.66, 0, 0}
5	Nákup	{0, 0, 0, 500, 0, 0}
	Prodej	{498.95, 0, 0, 0, 1.04, 0}
	Držení	{9.67, 0, 0, 1007.2, 0, 0}
6	Nákup	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
	Prodej	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 0, 0, 850.92, 0, 0}
7	Nákup	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
	Prodej	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 0, 0, 1012.78, 0, 0}
8	Nákup	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
	Prodej	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 0, 0, 913.29, 0, 0}
9	Nákup	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
	Prodej	{0, 0, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{0, 0, 0, 926.94, 0, 0}
10	Nákup	{0, 0, 0, 0.02, 0, 0}
	Prodej	{0.02, 0, 0, 0, 0, 0}
	Držení	{72.08, 0, 0, 983.67, 0, 0}

11	Nákup	$\{0, 0, 0, 93.68, 0, 0\}$
	Prodej	$\{93.69, 0, 0, 0, 0, 0\}$
	Držení	$\{0, 0, 0, 1264.35, 0, 0\}$
12	Nákup	$\{0, 0, 0, 80.67, 0, 0\}$
	Prodej	$\{80.67, 0, 0, 0, 0, 0\}$
	Držení	$\{0, 0, 0, 1136.32, 0, 0\}$
13	Nákup	$\{0, 0, 0, 82.23, 0, 0\}$
	Prodej	$\{82.23, 0, 0, 0, 0, 0\}$
	Držení	$\{0, 0, 0, 1153.66, 0, 0\}$
14	Nákup	$\{0, 0, 0, 0, 0, 0\}$
	Prodej	$\{0, 0, 0, 0, 0, 0\}$
	Držení	$\{0, 0, 0, 932.74, 0, 0\}$
15	Nákup	$\{0, 0, 0, 0, 0, 0\}$
	Prodej	$\{0, 0, 0, 0, 0, 0\}$
	Držení	$\{0, 0, 0, 1110.17, 0, 0\}$
16	Nákup	$\{0, 0, 0, 0, 0, 0\}$
	Prodej	$\{0, 0, 0, 0, 0, 0\}$
	Držení	$\{0, 0, 0, 1001.1, 0, 0\}$
17	Nákup	$\{0, 0, 0, 0, 0, 0\}$
	Prodej	$\{0, 0, 0, 0, 0, 0\}$
	Držení	$\{0, 0, 0, 1016.06, 0, 0\}$
18	Nákup	$\{0, 0, 0, 0, 0, 0\}$
	Prodej	$\{0, 0, 0, 0, 0, 0\}$
	Držení	$\{8.63, 0, 0, 939.77, 0, 0\}$
19	Nákup	$\{0, 0, 0, 11.22, 0, 0\}$
	Prodej	$\{11.22, 0, 0, 0, 0, 0\}$
	Držení	$\{0, 0, 0, 1129.74, 0, 0\}$
20	Nákup	$\{0, 0, 0, 9.66, 0, 0\}$
	Prodej	$\{9.66, 0, 0, 0, 0, 0\}$
	Držení	$\{0, 0, 0, 1018.29, 0, 0\}$
21	Nákup	$\{0, 0, 0, 9.84, 0, 0\}$
	Prodej	$\{9.84, 0, 0, 0, 0, 0\}$
	Držení	$\{0, 0, 0, 1033.56, 0, 0\}$

Tabulka 5.31: Model zohledňující riziko na každé úrovni. Optimální investiční strategie v jednotlivých uzlech alternativního primárního trojstupňového stromu, ve kterém má každý rodič právě čtyři potomky. Veličina nákup představuje $b_{t,i}^k$ (resp. $b_{0,i}$ pro $t = 0$), prodej $s_{t,i}^k$ a držení $x_{t,i}^k$, $t = 0, 1, 2$. Veškerý kapitál je uveden v $\times 10^{-3}$.

Strom	Optima $\times 10^{-3}$
Strom 1	193.951
Strom 2	406.723
Strom 3	181.846
Strom 4	331.638
Strom 5	81.296
Strom 6	81.296
Strom 7	81.296
Strom 8	81.296
Strom 9	173.555
Strom 10	571.289
Strom 11	167.597
Strom 12	265.064

Tabulka 5.32: Model zohledňující riziko na každé úrovni. Optimální hodnoty účelových funkcí, délka investičního horizontu $T = 3$. Stromy jsou číslovány v pořadí, v jakém jsou zmíněny v textu, přičemž primární strom má číslo 1.

	Vzdálenost optim $\times 10^{-3}$	Vnořená vzdálenost $\times 10^{-3}$
Strom 1 x Strom 2	212.772	588.742
Strom 1 x Strom 3	12.104	33.437
Strom 1 x Strom 4	137.687	33.437
Strom 1 x Strom 5	112.654	186.104
Strom 1 x Strom 6	112.654	610.054
Strom 1 x Strom 7	112.654	163.307
Strom 1 x Strom 8	112.654	210.913
Strom 1 x Strom 9	20.396	278.643
Strom 1 x Strom 10	377.338	695.388
Strom 1 x Strom 11	26.353	278.61
Strom 1 x Strom 12	71.113	279.748

Tabulka 5.33: Model zohledňující riziko na každé úrovni. Vzdálenosti optimálních hodnot účelových funkcí a vnořené vzdálenosti mezi primárním stromem a následně vygenerovanými stromy, délka investičního horizontu $T = 3$. Stromy jsou číslovány v pořadí, v jakém jsou zmíněny v textu, přičemž primární strom má číslo 1.

kou, tudíž aktivum nesoucí nejnižší riziko. Diverzifikací portfolia se snižuje riziko ztráty, které jednotlivé scénáře nesou. Ve druhém rozhodovacím kroku (tedy v čase $t = 1$) doporučuje model investorovi portfolio přeuspořádat. Pro scénářové stromy se třemi a čtyřmi potomky model radí prodat třetí aktivum, které je sice nejvýnosnější, ale zároveň i nejrizikovější, a ponechat si zejména čtvrté – nejméně rizikové – aktivum. Pro investiční horizont $T = 3$ model opět radí portfolio v prvním rozhodovacím kroku diverzifikovat. Pro stromy se třemi a čtyřmi potomky model směřuje v posledním rozhodovacím období k držení převážně čtvrtého, tedy nejméně rizikového, aktiva.

Stejně jako v základním modelu investičního plánování i pro model zohledňující riziko na každé úrovni platí, že malá vzdálenost mezi optimálními hodnotami účelových funkcí primárního a dodatečně vygenerovaného stromu nezaručuje blízkost stromů ve smyslu vnořené vzdálenosti. Toto tvrzení ilustruje například tabulka 5.33. Porovnejme strom 1 (strom, ve kterém má každý rodič právě tři potomky) a strom 9 (strom, ve kterém má každý rodič právě čtyři potomky). Vzdálenost optimálních hodnot těchto dvou stromů je druhá nejmenší z celého pozorovaného souboru, naopak vnořená vzdálenost těchto dvou stromů patří mezi vyšší. Obdobně jako pro základní model i pro model zohledňující riziko na každé investiční úrovni platí, že nejhrubším porušením struktury stromu je změna rozdělení pravděpodobností přechodu. Pro každou sadu stromů (stromy se třemi, dvěma i čtyřmi potomky) je od primárního stromu nejvíce vzdálen strom, jehož rozdělení pravděpodobností přechodu je rovnoměrné. Toto platí shodně pro investiční horizont $T = 2$ a $T = 3$.

Kapitola 6

Závěr

V této práci jsme ve 2. kapitole představili pojem víceúrovňového stochastického lineárního programování. Tato kapitola dále představila několik investičních modelů, konkrétně základní model investičního plánování, základní model rozšířený o transakční náklady, model zohledňující celkové riziko investice a model zohledňující riziko investice na každé úrovni. Druhý a čtvrtý jmenovaný model byl implementován v softwaru Mathematica a výsledky byly představeny v 5. kapitole. Kapitola 3 se zabývala generováním scénářů pomocí metody momentů. Tato metoda byla využita při generování scénářů, které byly nutné pro implementaci uvedených modelů. Pojem vnořené vzdálenosti dvou stochastických scénářových procesů byl představen ve 4. kapitole. V kapitole se objevily převzané i vlastní příklady objasňující pojem Kantorovičovy vzdálenosti a vnořené vzdálenosti dvou stromů.

Námi sestavené modelové portfolio se skládalo z šesti reprezentativních portfolií amerického trhu. V 5. kapitole jsme implementovali základní model investičního plánování zahrnující transakční náklady a model zohledňující riziko na každé investiční úrovni a hledali optimální investiční strategie pro tyto modely, a to pro investiční horizonty $T = 2$ a $T = 3$. Zjistili jsme, že pro námi zvolené počáteční parametry doporučuje základní model investorovi ve většině případů nakoupit dvě aktiva s nejvyššími středními hodnotami výnosů. Jelikož základní model nezohledňuje riziko, radí ve většině případů investorovi zbavit se v následujících rozhodovacích okamžicích všech aktiv až na to nejvýnosnější. Toto aktivum doporučuje dále držet až do konce celého investičního období. Naopak model zohledňující riziko na každé investiční úrovni doporučuje investorovi diverzifikovat portfolio rovnou na začátku investování. V průběhu doby trvání investice ovšem model radí zbavit se nejrizikovějších aktiv (která jsou zároveň nejvýnosnější) a ponechat si ve většině případů pouze jedno aktivum, a to to nejméně rizikové (které má ovšem také nejnížší střední hodnotu výnosu). Pro oba zmíněné modely jsme vygenerovali 12 různých scénářových stromů. V první sadě generovaných stromů se vyskytovaly čtyři stromy, ve kterých měl každý rodič právě tři potomky, ve druhé sadě stromy, ve kterých měl každý rodič právě dva potomky, a ve třetí sadě stromy, v nichž měl každý rodič právě čtyři potomky. Všech 11 stromů jsme postupně porovnávali s prvním vygenerovaným stromem a sledovali jsme vzdálenost optimálních hodnot účelových funkcí těchto dvou stromů a jejich vnořenou vzdálenost. Zjistili jsme, že ve smyslu vnořené vzdálenosti je nejdále od primárního stromu vždy z každé dodatečně generované sady stromů ten strom,

jehož rozdělení pravděpodobnosti přechodu mezi rodičem a potomkem je rovnoměrné. Dále jsme došli k závěru, že scénářové stromy, které mají velmi blízké optimální hodnoty účelových funkcí, si nejsou nutně blízké ve smyslu vnořené vzdálenosti. Námí implementovaný algoritmus umožňuje vygenerovat strom o libovolné délce a libovolném pravidelném počtu potomků (algoritmus je uveden na příloženém CD) a určit vnořenou vzdálenost dvou libovolných stromů o stejné délce.

Naše práce by se dala v několika ohledech rozšířit. Z hlediska výpočetní náročnosti vnořené vzdálenosti je v současné době časově obtížné spočítat vzdálenost stromů pro investiční horizont vyšší než $T = 4$ či pro vyšší počet potomků, kteří vycházejí z jednoho rodiče. Do budoucna by bylo zajímavé uведенé modely napočítat pro delší investiční horizont a zároveň uvažovat stromy s více potomky tak, aby se co nejlépe blížily realitě. Dále by bylo možné vygenerovat vysoký počet scénářových stromů a podrobně analyzovat závislost vnořené vzdálenosti stromů na vzdálenosti optimálních hodnot účelových funkcí uvedených modelů. V neposlední řadě by bylo možné uведенé modely rozšířit tak, aby lépe popisovaly chování trhu (zahrnutí daní, inflace, možnost odebírání či dodávání peněz do modelu aj.).

Literatura

- [1] Johan R. Birge and François Louveaux. *Introduction to Stochastic Programming*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer, 2011.
- [2] Denis Bosq and Hung T. Nguyen. *A Course in Stochastic Processes: Stochastic Models and Statistical Inference*. Theory and decision library. Series B, Mathematical and statistical methods. Springer, 1996.
- [3] Wei Ning Cho. Robust portfolio optimization using conditional value at risk. Master's thesis, Imperial College London, Department of Computing, 2008.
- [4] Jitka Dupačová, Jan Hurt, and Josef Štěpán. *Stochastic Modeling in Economics and Finance*. Applied Optimization. Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [5] Gene H. Golub and Charles F. Van Loan. *Matrix Computations*. Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences. Johns Hopkins University Press, 2013.
- [6] Nalan Gülpinar, Berç Rustem, and Reuben Settergren. Multistage stochastic mean-variance portfolio analysis with transaction costs. In *Innovations in Financial and Economic Networks*, pages 46–63. Edward Elgar Publishers Ltd., UK, 2003.
- [7] Michiel Hazewinkel. *Encyclopaedia of Mathematics*. Number sv. 9 in Encyclopaedia of Mathematics. Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [8] Kjetil Høyland, Michal Kaut, and Stein W. Wallace. A heuristic for moment-matching scenario generation. *Computational Optimization and Applications*, 24(2–3):169–185, 2003.
- [9] Peter Kall and János Mayer. *Stochastic Linear Programming: Models, Theory, and Computation*. International Series in Operations Research & Management Science. Springer, second edition, 2010.
- [10] Vinay Kaura. Portfolio optimisation using value at risk. Master's thesis, Imperial College London, Department of Computing, 2005.
- [11] Alexander S. Kechris. *Classical descriptive set theory*. Springer, 1995.
- [12] Václav Kozmík. Efciencie portfolií při spojitém rozdělení výnosů. Master's thesis, Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, 2010.

- [13] Alessandro Laurent. *A Scenario Generation Algorithm for Multistage Stochastic Programming: Application for Asset Allocation Models with Derivatives*. PhD thesis, University of Lugano, Department of Finance, Switzerland, 2006.
- [14] Georg Ch. Pflug. Version-independence and nested distributions in multistage stochastic optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 20:1406–1420, 2009.
- [15] Georg Ch. Pflug and Alois Pichler. *Stochastic optimization methods in finance and energy. New financial products and energy market strategies*, chapter Approximations for Probability Distributions and Stochastic Optimization Problems, pages 343–388. International Series in Operations Research and Management Science 163. New York, NY: Springer. xxiii, 474 p., 2011.
- [16] Georg Ch. Pflug and Alois Pichler. A distance for multistage stochastic optimization models. *SIAM Journal on Optimization*, 22:1–23, 2012.
- [17] Georg Ch. Pflug and Werner Römisch. *Modeling, Measuring and Managing Risk*. World Scientific, 2007.
- [18] Andrzej Ruszczyński and Alexander Shapiro. Stochastic programming models. In Andrzej Ruszczyński and Alexander Shapiro, editors, *Stochastic Programming*, volume 10 of *Handbooks in Operations Research and Management Science*, pages 1 – 64. Elsevier, 2003.
- [19] Jörg-Rüdiger Sack and Jorge Urrutia, editors. *Handbook of Computational Geometry*. North-Holland Publishing Co., 2000.
- [20] Anna V. Timonina. Multi-stage stochastic optimization: The distance between stochastic scenario processes. *Computational Management Science*, 10:1–25, 2013.

Seznam tabulek

5.1	Deskriptivní statistiky dat.	32
5.2	Hodnoty uzlů ve stromu se třemi potomky, základní model, $T = 2$	34
5.3	Pravděpodobnosti přechodu ve stromu se třemi potomky, základní model, $T = 2$	35
5.4	Optimální investiční strategie ve stromu se třemi potomky, základní model, $T = 2$	35
5.5	Hodnoty uzlů ve stromu se dvěma potomky, základní model, $T = 2$	36
5.6	Pravděpodobnosti přechodu ve stromu se dvěma potomky, základní model, $T = 2$	36
5.7	Optimální investiční strategie ve stromu se dvěma potomky, základní model, $T = 2$	37
5.8	Hodnoty uzlů ve stromu se čtyřmi potomky, základní model, $T = 2$	38
5.9	Pravděpodobnosti přechodu ve stromu se čtyřmi potomky, základní model, $T = 2$	39
5.10	Optimální investiční strategie ve stromu se čtyřmi potomky, základní model, $T = 2$	40
5.11	Optimální hodnoty účelových funkcí, základní model, $T = 2$	41
5.12	Vzdálenosti optimálních hodnot účelových funkcí a vnořené vzdálenosti, základní model, $T = 2$	41
5.13	Optimální investiční strategie ve stromu se třemi potomky, základní model, $T = 3$	44
5.14	Optimální investiční strategie ve stromu se dvěma potomky, základní model, $T = 3$	45
5.15	Optimální investiční strategie ve stromu se čtyřmi potomky, základní model, $T = 3$	47
5.16	Optimální hodnoty účelových funkcí, základní model, $T = 3$	48
5.17	Vzdálenosti optimálních hodnot účelových funkcí a vnořené vzdálenosti, základní model, $T = 3$	48
5.18	Hodnoty uzlů ve stromu se třemi potomky, model zohledňující riziko, $T = 2$	50
5.19	Pravděpodobnosti přechodu ve stromu se třemi potomky, model zohledňující riziko, $T = 2$	51
5.20	Optimální investiční strategie ve stromu se třemi potomky, model zohledňující riziko, $T = 2$	52
5.21	Hodnoty uzlů ve stromu se dvěma potomky, model zohledňující riziko, $T = 2$	52
5.22	Pravděpodobnosti přechodu ve stromu se dvěma potomky, model zohledňující riziko, $T = 2$	53

5.23	Optimální investiční strategie ve stromu se dvěma potomky, model zohledňující riziko, $T = 2$.	53
5.24	Hodnoty uzlů ve stromu se čtyřmi potomky, model zohledňující riziko, $T = 2$.	55
5.25	Pravděpodobnosti přechodu ve stromu se čtyřmi potomky, model zohledňující riziko, $T = 2$.	56
5.26	Optimální investiční strategie ve stromu se čtyřmi potomky, model zohledňující riziko, $T = 2$.	57
5.27	Optimální hodnoty účelových funkcí, model zohledňující riziko, $T = 2$.	58
5.28	Vzdálenosti optimálních hodnot účelových funkcí a vnořené vzdálenosti, model zohledňující riziko, $T = 2$.	58
5.29	Optimální investiční strategie ve stromu se třemi potomky, model zohledňující riziko, $T = 3$.	60
5.30	Optimální investiční strategie ve stromu se dvěma potomky, model zohledňující riziko, $T = 3$.	61
5.31	Optimální investiční strategie ve stromu se čtyřmi potomky, model zohledňující riziko, $T = 3$.	63
5.32	Optimální hodnoty účelových funkcí, model zohledňující riziko, $T = 3$.	64
5.33	Vzdálenosti optimálních hodnot účelových funkcí a vnořené vzdálenosti, model zohledňující riziko, $T = 3$.	64

Seznam použitých zkratek

\mathcal{F}	filtrace
\boldsymbol{x}	vektor rozhodnutí
\boldsymbol{x}^t	historie rozhodnutí do času t
$\boldsymbol{\xi}$	vektor pozorování
$\boldsymbol{\xi}^t$	informace dostupná v čase t
d_{KA}	Kantorovičova vzdálenost
p_k	pravděpodobnost k -tého scénáře
B	počáteční majetek
G	cílová částka
y^k	přebytek peněz v čase T v k -tém scénáři
q^k	nedostatek peněz v čase T v k -tém scénáři
D^+	benefit za přebytek peněz v čase T v k -tém scénáři
D^-	penalizace za nedostatek peněz v čase T v k -tém scénáři
$x_{t,i}^k$	hodnota drženého i -tého aktiva v čase t v k -tém scénáři
$b_{t,i}^k$	hodnota nakoupeného i -tého aktiva v čase t v k -tém scénáři
$s_{t,i}^k$	hodnota prodaného i -tého aktiva v čase t v k -tém scénáři
c_b	transakční náklady spojené s nákupem určitého objemu akcií
c_s	transakční náklady spojené s prodejem určitého objemu akcií
CVaR_α	Conditional Value at Risk