Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Alexander Till

Long range dependence v časových řadách

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Michaela Prokešová, Ph.D.

Studijní program: Matematika
Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Praha 2014

Ďakujem predovšetkým mojej vedúcej, RNDr. Michaele Prokešovej, Ph.D., a tiež RNDr. Michalovi Peštovi, Ph.D., za konštruktívne nápady a pripomienky pri písaní tejto práce.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne .... Alexander Till

....

Název práce: Long range dependence v časových řadách
Autor: Alexander Till
Katedra/Ústav: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí diplomové práce: RNDr. Michaela Prokešová, Ph.D.

Abstrakt: Diplomová práce demonstruje potřebu studia long range dependence, představuje frakcionální Gaussovský šum a diskutuje možné definice dlouhé paměti, a to pomocí prostředků ergodické teorie a pomocí momentových charakteristik a spektrální hustoty. Tyto definice jsou konfrontované s modelem frakcionálního Gaussovského šumu a intuitivní představou o long range memory. Zkoumané jsou taky souvislosti a vztahy mezi jednotlivými určujícími kritériemi. Práce je omezena na studium procesů s diskrétním časem.

Klíčová slova: long range dependence, frakcionální Gaussovský šum, silný mixing, druhé momenty

Title: Long range dependence in time series
Author: Alexander Till
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: RNDr. Michaela Prokešová, Ph.D.

Abstract: The diploma thesis demonstrates the necessity of a study of long range dependence, introduces fractional Gaussian noise and discusses possible definitions of long memory. It is done by notions of ergodic theory and by second moment characteristics and spectral density. These definitions are confronted with the model of fractional Gaussian noise and with intuitive understanding of long range memory. Relations and connections between these criteria are studied as well. The work is restricted to the study of discrete time processes.

Keywords: long range dependence, fractional Gaussian noise, strong mixing, second order theory

Názov práce: Long range dependence v časových řadách
Autor: Alexander Till
Katedra/Ústav: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedúca diplomovej práce: RNDr. Michaela Prokešová, Ph.D.

Abstrakt: Diplomová práca demonštruje potrebu štúdia long range dependence, predstavuje frakcionálny Gaussovský šum a diskutuje možné definície dlhej pamäti, a to pomocou prostriedkov ergodickej teórie a pomocou momentových charakteristík a spektrálnej hustoty. Tieto definície sú konfrontované s modelom frakcionálneho Gaussovského šumu a intuitívnou predstavou o long range memory. Skúmané sú tiež súvislosti a vzťahy medzi jednotlivými určujúcimi kritériami. Práca je obmedzená na štúdium procesov s diskrétnym časom.

Kľúčové slová: long range dependence, frakcionálny Gaussovský šum, silný mixing, druhé momenty

Obsah

Úvod 1

1 Motivácia 2

1.1 Motivačná úloha . . . 2
1.2 Frakcionálny Brownov pohyb . . . 5
1.3 Frakcionálny Gaussovský šum . . . 9

2 Ergodická teória a dlhá pamäť 12

2.1 Ergodicita . . . 12
2.2 Mixing . . . 21
2.3 Silný mixing . . . 26

3 Momentové charakteristiky a dlhá pamäť 31

3.1 Slowly varying funkcie . . . 31
3.2 Regularly varying funkcie . . . 38
3.3 Druhé momenty a spektrálna hustota . . . 43

Záver 54

Literatúra 56

Úvod

Práca sa zaoberá definíciou dlhej pamäti v časových radách, kde sa obmedzuje na procesy s diskrétnym časom. Zo značnej časti je založená na práci Samorodnitsky (2006). Diskutované sú dva prístupy k long range dependence: z pohľadu momentových charakteristík a spektrálnej hustoty náhodného procesu, a definícia pomocou pojmov ergodickej teórie.

Práca je členená do troch kapitol. Prvá demonštruje potrebu štúdia dlhej pamäti a predstavuje model frakcionálneho Gaussovského šumu. Druhá je venovaná ergodickej teórii a jej využitiu v kontexte long range dependence. V tretej kapitole sa kladú podmienky predovšetkým na druhé momenty a spektrálnu hustotu procesov.

V prvej kapitole je čitateľ oboznámený s počiatkami štúdia dlhej pamäti. Následne je uvedený frakcionálny Brownov pohyb a z neho odvodený model frakcionálneho Gaussovského šumu.

Druhá kapitola je venovaná pojmom ergodicita, mixing a silný mixing, a ich dostatočnosti pri charakterizácii long range dependence.

Tretia kapitola oboznamuje čitateľa so slowly a regularly varying funkciami, ktoré sú vzápätí využité pri hľadaní vhodnej definície dlhej pamäti. Uvažované sú rôzne obmedzenia na autokoreláciu a úzko súvisiacu spektrálnu hustotu.

Predpokladáme, že čitateľ má znalosti na úrovni absolventa magisterského štúdia na MFF UK so zameraním na pravdepodobnosť a náhodné procesy.

Kapitola 1

Motivácia

1.1 Motivačná úloha

Počiatky štúdia dlhej pamäti súvisia s javom pozorovaným na ročných minimách prietokov vody rieky Níl pri Káhire z rokov 622 až 1281. Britský hydrológ Harold Hurst skúmal správanie špecifickej štatistiky týchto dát. Pozorovania miním prietokov označme ako $X_1, X_2, \ldots, X_n$ a definujme postupnosť čiastočných súčtov tejto postupnosti vzťahom $S_m = X_1 + \ldots + X_m$, $m = 0, 1, \ldots$ s $S_0 = 0$. Skúmanú štatistiku možno zapísať ako

$$\frac{R}{S}(X_1, \ldots, X_n) = \frac{\max_{0 \le i \le n}(S_i - \frac{i}{n} S_n) - \min_{0 \le i \le n}(S_i - \frac{i}{n} S_n)}{(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \frac{1}{n} S_n)^2)^{\frac{1}{2}}}. \tag{1.1}$$

Všimnime si, že $\max_{0 \le i \le n}(S_i - \frac{i}{n} S_n)$ meria, ako ďaleko sa postupnosť čiastočných súčtov dostane nad priamu čiaru, ktorú by postupnosť $\{S_m\}$ sledovala, ak by boli minimá prietokov každý rok rovnaké. Čitateľ pravej strany (1.1) teda je rozdiel najvyššej a najnižšej úrovne, ktorú $\{S_m\}$ dosiahne v porovnaní s lineárnym rastom. Menovateľ zlomku v (1.1) je výberová smerodatná odchýlka, a celá štatistika v (1.1) sa nazýva R/S štatistika. V literatúre sa často označuje anglicky ako rescaled range.

Nech je $X_1, X_2, \ldots$ postupnosť náhodných veličín. Aplikujme R/S štatistiku na prvých n pozorovaní a nech n rastie. Ako sa bude R/S štatistika správať?

Uvažujme priestor $D[0,1]$ funkcií sprava spojitých s limitami zľava na intervale $[0,1]$ so Skorohodovou topológiou J_1. Definujme funkciu $f : D[0,1] \mapsto \mathbb{R}$ predpisom

$$f(\boldsymbol{x}) = \sup_{0 \le t \le 1} (x(t) - tx(1)) - \inf_{0 \le t \le 1} (x(t) - tx(1)),$$

kde $\boldsymbol{x} = (x(t), 0 \leq t \leq 1) \in D[0,1]$. Funkcia f je spojitá. Chceme ju použiť na proces čiastočných súčtov, čo je verzia postupnosti čiastočných súčtov s hodnotami v $D[0,1]$.
Predpokladajme, že $X_1, X_2, \ldots$ je stacionárna náhodná postupnosť s konečným rozptylom a strednou hodnotou μ. Proces čiastočných súčtov definujeme ako

$$S^{(n)}(t) = S_{[nt]} - [nt]\mu, 0 \leq t \leq 1. \tag{1.2}$$

Donskerova veta hovorí, že ak sú $X_1, X_2, \ldots$ nezávislé rovnako rozdelené náhodné veličiny, tak

$$\frac{1}{\sqrt{n}} S^{(n)} \to \sigma_* B \text{ slabo v } D[0,1], \tag{1.3}$$

kde σ_*^2 je rovné rozptylu pozorovaní σ^2 a B označuje Brownov pohyb, tj $B = B_{\frac{1}{2}}$, viď časť (1.2).
V ďalšom texte budeme rozpätím prvých n pozorovaní myslieť čitateľ zlomku v (1.1). Všimnime si, že rozpätie prvých n pozorovaní možno zapísať ako $f(S^{(n)})$. Potom, za platnosti Donskerovej vety, podľa Mann-Waldovej vety (veta o spojitom zobrazení) platí

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(\text{rozpätie prvých } n \text{ pozorovaní}) = f\left(\frac{1}{\sqrt{n}} S^{(n)}\right)$$

a

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{n}} S^{(n)}\right) \to f(\sigma_* B).$$

Ďalej môžeme písať

$$\begin{aligned} f(\sigma_* B) &= \sigma_* \left[\sup_{0 \leq t \leq 1} (B(t) - tB(1)) - \inf_{0 \leq t \leq 1} (B(t) - tB(1)) \right] \\ &= \sigma_* \left[\sup_{0 \leq t \leq 1} Bb(t) - \inf_{0 \leq t \leq 1} Bb(t) \right], \end{aligned}$$

kde Bb značí Brownov most na intervale $[0,1]$. Ak je navyše postupnosť $X_1, X_2, \ldots$ ergodická, výberová smerodatná odchýlka je konzistentným odhadom smerodatnej odchýlky populácie, tj

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \frac{1}{n} S_n \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \to \sigma \text{ skoro isto.}$$

Za platnosti týchto predpokladov platí, že

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{R}{S}(X_1, X_2, \ldots) \to \frac{\sigma_*}{\sigma} \left[\sup_{0 \le t \le 1} Bb(t) - \inf_{0 \le t \le 1} Bb(t) \right].$$

Čiže R/S štatistika za vyššie uvedených podmienok rastie s odmocninou rozsahu pozorovaní, $\sqrt{n}$.
Pre minimá prietokov Nílu však hodnota R/S štatistiky rástla rýchlosťou $n^{0{,}74}$. Tomuto úkazu sa hovorí Hurstov fenomén a demoštruje potrebu zamietnutia týchto, v praxi často používaných, predpokladov.
Vhodným modelom sa ukazuje byť frakcionálny Gaussovský šum, bližšie popísaný v sekcii (1.3).
Priblížme si najskôr frakcionálny Brownov pohyb. Jedná sa o centrovaný gaussovský proces $\{B_H(t)\}_{t \ge 0}$ s $B_H(0) = 0$, stacionárnymi prírastkami a $E(B_H(t) - B_H(s))^2 = \sigma^2 |t - s|^{2H}$, $\sigma > 0$ a $0 < H \le 1$. Frakcionálny Brownov pohyb je sebepodobný, teda $\{B_H(ct)\} \overset{d}{=} \{c^H B_H(t)\}$ pre $c > 0$. Viac informácií o frakcionálnom Brownovom pohybe možno nájsť v časti (1.2).
Frakcionálny Gaussovský šum je diskrétnym procesom prírastkov frakcionálneho Brownovho pohybu, $X_j = B_H(j) - B_H(j-1)$, $j = 1, 2, \ldots$. Je stacionárny, s autokovariančnou funkciou

$$Cov(X_{j+n}, X_j) = \frac{\sigma^2}{2}[(n+1)^{2H} + (n-1)^{2H} - 2n^{2H}]$$

pre $j = 1, 2, \ldots$, $n \ge 0$. Z vety (1.15) vieme, že

$$\rho_n = Corr(X_{j+n}, X_j) \sim H(2H-1)n^{-2(1-H)} \text{ pre } n \to \infty. \tag{1.4}$$

Teda $\rho_n \to 0$ pre $n \to \infty$. To podľa vety (2.28) znamená, že frakcionálny Gaussovský šum je mixujúci, a tým pádom aj ergodický. Vďaka sebepodobnosti frakcionálneho Brownovho pohybu platí

$$Var(X_1 + \ldots + X_n) = Var B_H(n) = \sigma^2 n^{2H}$$

pre $n \in \mathbb{N}$.
Uvažujme frakcionálny Gaussovský šum $X_1, X_2, \ldots$ a pozrime sa, ako sa chová R/S štatistika. Pretože menovateľ výrazu na pravej strane rovnice (1.1) je integrovateľný a frakcionálny Gaussovský šum je ergodický, podľa vety (2.12) konverguje menovateľ z (1.1) skoro isto, a to k smerodatenej odchýlke pozorovaní,

σ. Pre čitateľ R/S štatistiky platí, že

$$\begin{aligned}
&\max_{0\le i\le n}\left(S_i-\frac{i}{n}S_n\right)-\min_{0\le i\le n}\left(S_i-\frac{i}{n}S_n\right)\\
&\quad=\max_{0\le i\le n}\left(B_H(i)-\frac{i}{n}B_H(n)\right)-\min_{0\le i\le n}\left(B_H(i)-\frac{i}{n}B_H(n)\right)\\
&\quad\overset{d}{=} n^H\left(\max_{0\le i\le n}\left(B_H(\frac{i}{n})-\frac{i}{n}B_H(1)\right)-\min_{0\le i\le n}\left(B_H(\frac{i}{n})-\frac{i}{n}B_H(1)\right)\right).
\end{aligned}$$

Využili sme sebepodobnosť frakcionálneho Brownovho pohybu a skutočnosť, že pre frakcionálny Gaussovský šum je $S_i = B_H(i)$ pre všetky i. Zo spojitosti trajektórií frakcionálneho Brownovho pohybu ďalej platí

$$\begin{aligned}
&\max_{0\le i\le n}\left(B_H(\frac{i}{n})-\frac{i}{n}B_H(1)\right)-\min_{0\le i\le n}\left(B_H(\frac{i}{n})-\frac{i}{n}B_H(1)\right)\\
&\quad\to\sup_{0\le t\le 1}\left(B_H(t)-tB_H(1)\right)-\inf_{0\le t\le 1}\left(B_H(t)-tB_H(1)\right)
\end{aligned}$$

skoro isto. Tým sme dostali, že

$$n^{-H}\frac{R}{S}(X_1,\dots,X_n)\to\frac{1}{\sigma}\left(\sup_{0\le t\le 1}(B_H(t)-tB_H(1))-\inf_{0\le t\le 1}(B_H(t)-tB_H(1))\right),$$

a teda R/S štatistika pre frakcionálny Gaussovský šum rastie ako n^H, kde n je veľkosť výberu. Voľbou vhodného parametra H tak vieme vysvetliť Hurstov fenomén. Toto je tiež dôvod, prečo sa parametru H frakcionálneho Brownovho pohybu hovorí aj Hurstov index či Hurstov parameter.

1.2 Frakcionálny Brownov pohyb

V tejto časti zadefinujeme frakcionálny Brownov pohyb a uvedieme niektoré jeho vlastnosti.

Definícia 1.1. Nech je $X = \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ reálny náhodný proces. Povieme, že X je sebepodobný s indexom H, $H > 0$, ak pre každé $a > 0$ platí

$$\{X(at)\}_{t\in\mathbb{R}}\overset{d}{=}\{a^HX(t)\}_{t\in\mathbb{R}},$$

symbolom $\overset{d}{=}$ značíme rovnosť distribúcií.

Poznámka 1.2. Indexu H z definície (1.1) sa tiež hovorí Hurstov index, poprípade Hurstov exponent.

Poznámka 1.3. Všimnime si, že sebepodobný proces X s indexom H nemôže byť stacionárny (výnimkou je degenerovaný proces $X \equiv 0$). Pre nedegerovaný proces X existuje také $t \in \mathbb{R}$, že $X(t) \neq 0$ s kladnou pravdepodobnosťou, a tak pre všetky $a > 0$ je

$$X(t) \stackrel{d}{=} X(at) \stackrel{d}{=} a^H X(t).$$

Vidíme, že práve uvedený vzťah pri $a \to \infty$ neplatí.

Definícia 1.4. Nech je $X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ reálny náhodný proces. Povieme, že X má stacionárne prírastky, ak pre každé $h > 0$ platí

$$\{Z(t+h) - Z(h)\}_{t \in \mathbb{R}} \stackrel{d}{=} \{Z(t) - Z(0)\}_{t \in \mathbb{R}}.$$

Veta 1.5. Nech je X náhodný proces sebepodobný s indexom H so stacionárnymi prírastkami a konečným rozptylom. Potom platí:

1. $X(0) = 0$ skoro isto.
2. pre $H \neq 1$ je $EX(t) = 0$ pre všetky $t \in \mathbb{R}$.
3. $X(-t) \stackrel{d}{=} -X(t)$
4. $EX^2(t) = |t|^{2H}\sigma^2$, kde $\sigma^2 = EX^2(1)$
5. autokovariančná funkcia procesu X, $\Gamma_H(s,t) = EX(s)X(t)$ je daná vzťahom
$$\Gamma_H(s,t) = \frac{\sigma^2}{2}\left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right).$$
6. pre index sebepodobnosti H platí $H \leq 1$

Dôkaz:

1. pre každé $a > 0$ platí $X(0) = X(a0) \stackrel{d}{=} a^H X(0)$.

2. pretože je X sebepodobný, platí

$$EX(2t) = 2^H EX(t).$$

Zo stacionarity prírastkov zase vyplýva, že

$$EX(2t) = E(X(2t) - X(t)) + EX(t) = 2EX(t).$$

3.

$$X(-t) = X(-t) - X(0) \stackrel{d}{=} X(0) - X(t) = -X(t)$$

4. podľa bodu 3. tejto vety a sebepodobnosti procesu X platí

$$EX^2(t) = EX^2(|t|\,\mathrm{sgn}(t)) = |t|^{2H} EX^2(\mathrm{sgn}(t)) = |t|^{2H} EX^2(1).$$

5. podľa 4. bodu a stacionarity prírastkov je

$$\begin{aligned}\Gamma_H(s,t) &= \frac{1}{2}\left\{EX^2(s) + EX^2(t) - E(X(t) - X(s))^2\right\} \\ &= \frac{\sigma^2}{2}\left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right)\end{aligned}$$

6. pre $E|X(2)|$ platí

$$E|X(2)| = E|X(2)-X(1)+X(1)| \leq E|X(2)-X(1)|+E|X(1)| = 2E|X(1)|$$

a zároveň $E|X(2)| = 2^H E|X(1)|$, teda $2^H \leq 2$, čiže $H \leq 1$.

□

Lemma 1.6. Nech je $0 < H \leq 1$ a $s, t \in \mathbb{R}$. Potom je funkcia

$$R_H(s,t) = |s|^{2H} + |t|^{2H} - |s-t|^{2H}$$

pozitívne semidefinitná.

Dôkaz: Taqqu (2003), str. 8-9. □

Definícia 1.7. Sebepodobný proces s indexom $0 < H < 1$, ktorý je gaussovský a má stacionárne prírastky, nazveme frakcionálny Brownov pohyb. Označíme ho ako $\{B_H(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$. Povieme, že je štandardný, ak $\sigma^2 = VarB_H(1) = 1$.

Poznámka 1.8. Frakcionálny Brownov pohyb je dobre definovaný. Existenciu zabezpečuje Daniell-Kolmogorova veta a fakt, že pre $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a $\Gamma_H(s,t) = \frac{\sigma^2}{2}\left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right)$, $s, t \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ existuje centrovaný gaussovský náhodný vektor $(X(t_1), \ldots, X(t_n))$ s kovariančnou maticou $(\Gamma_H(t_i, t_j))_{1 \le i,j \le n}$. Pretože rozdelenie centrovaného gaussovského procesu je určené kovariančnou funkciou, pre pevné H sa centrované frakcionálne Brownove pohyby líšia len multiplikatívnou konštantou.

Veta 1.9. Nech je náhodný proces $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ taký, že

- $\{X(t)\}$ je gaussovský so strednou hodnotou 0 a $X(0) = 0$,
- $EX^2(t) = \sigma^2|t|^{2H}$, $\sigma > 0$, $0 < H < 1$,
- $\{X(t)\}$ má stacionárne prírastky.

Potom je proces $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ frakcionálny Brownov pohyb.

Dôkaz: Proces X je gaussovský s nulovou strednou hodnotou, takže jeho konečnerozmerné rozdelenia sú určené kovariančnou funkciou. V dôkaze bodu 5. vety (1.5) sme videli, že táto kovariančná funkcia musí byť tvaru

$$\Gamma_H(s,t) = \frac{\sigma^2}{2}\left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right),$$

čo je kovariančná funkcia frakcionálneho Brownovho pohybu. $\square$

Lemma 1.10. Nech pre náhodný proces $\{X_t\}_{t\ge 0}$ platí, že pre každé $T > 0$ existujú konštanty $\alpha, \beta, D > 0$ také, že

$$E|X_t - X_s|^\alpha \le D|t-s|^{1+\beta},$$

kde $0 \le s, t \le T$. Potom existuje spojitá verzia X.

Dôkaz: Stroock, Varadhan (1979), str. 51. $\square$

Veta 1.11. Frakcionálny Brownov pohyb má spojitú verziu.

Dôkaz: Voľbou $\alpha > \frac{1}{H}$, H je Hurstov index procesu, získavame z lemmy (1.10)

$$E|B_H(t) - B_H(s)|^\alpha = E|B_H(1)|^\alpha |t-s|^{\alpha H},$$

čím sme ukázali existenciu spojitej verzie. $\square$

Poznámka 1.12. V ďalšom texte budeme uvažovať práve takúto verziu frakcionálneho Brownovho pohybu.

Veta 1.13. Frakcionálny Brownov pohyb nie je diferencovateľný v zmysle L^2.

Dôkaz: Platí, že

$$E\left|\frac{B_H(t)-B_H(s)}{t-s}\right|^2 = \sigma^2|t-s|^{2H-2} \to \infty,$$

$t, s \in \mathbb{R}$ a $\sigma^2 = EB_H^2(1)$. □

1.3 Frakcionálny Gaussovský šum

V tejto časti sa budeme bližšie zaoberať postupnosťami prírastkov sebepodobných procesov so stacionárnymi prírastkami.

Definícia 1.14. Nech je $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ frakcionálny Brownov pohyb s Hurstovým indexom H, $0 < H < 1$. Potom proces $\{Y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$,

$$Y_k = X(k+1) - X(k), k \in \mathbb{Z}$$

nazveme frakcionálny Gaussovský šum.

Veta 1.15. Nech je $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ sebepodobný proces so stacionárnymi prírastkami s Hurstovým indexom H, $0 < H < 1$. Potom pre postupnosť prírastkov $\{Y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$,

$$Y_k = X(k+1) - X(k), k \in \mathbb{Z},$$

platí

1. $\{Y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ je stacionárny.
2. $EY_k = 0$.
3. $EY_k^2 = \sigma^2 = EX(1)^2$.
4. autokovariančná funkcia $\gamma(k)$ procesu $\{Y_k\}$ je daná vzťahom

$$\gamma(k) = EX_iX_{i+k} = \frac{\sigma^2}{2}(|k+1|^{2H} - 2|k|^{2H} + |k-1|^{2H}).$$

5. pre $k \neq 0$ je

$$\gamma(k) \begin{cases} = 0 & \text{pre } H = \frac{1}{2} \\ < 0 & \text{pre } 0 < H < \frac{1}{2} \\ > 0 & \text{pre } \frac{1}{2} < H < 1. \end{cases}$$

6. pre $H \neq \frac{1}{2}$ je

$$\gamma(k) \sim \sigma^2 H(2H-1)|k|^{2H-2} \text{ pre } k \to \infty.$$

Dôkaz:

1. platí z definície $\{Y_k\}$
2. vyplýva z definície $\{Y_k\}$ a bodu 2. vety (1.5)
3. platí podľa bodov 4. a 5. vety (1.5) a vzťahu $Y_k = X(k+1) - X(k), k \in \mathbb{Z}$
4. z definície $\{Y_k\}$ a bodu 5. vety (1.5)
5. pre $\frac{1}{2} < H < 1$ je funkcia $f(x) = x^{2H}$ rýdzo konvexná. Potom pre $k \geq 1$ platí

$$\begin{aligned} \frac{(k+1)^{2H} + (k-1)^{2H}}{2} &= \frac{f(k+1) + f(k-1)}{2} > f\left(\frac{k+1+k-1}{2}\right) \\ &= f(k) = k^{2H}. \end{aligned}$$

Po odčítaní k^{2H} a vynásobení σ^2 by sme získali na pravej strane nerovnosti 0, zatiaľ čo na ľavej strane $\gamma(k)$. Tým sme ukázali, že pre $\frac{1}{2} < H < 1$ platí $\gamma(k) > 0$. Prípad $0 < H < \frac{1}{2}$ je analogický a $H = \frac{1}{2}$ je zrejmý. Prípadom $k = 0$ sa zaoberá bod 3. tejto vety a pre $k \leq -1$ je $\gamma(k) = \gamma(-k)$.

6. pretože $\gamma(k) = \gamma(-k)$, môžeme sa obmedziť na $k > 0$. Podľa bodu 4. tejto vety je pre $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \gamma(k) &= \frac{\sigma^2}{2}((k+1)^{2H} - 2k^{2H} + (k-1)^{2H}) \\ &= \frac{\sigma^2}{2} k^{2H-2} \left[k^2 \left(\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{2H} - 2 + \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{2H} \right) \right]. \end{aligned}$$

Platí,že

$$\left[k^2\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^{2H}-2+\left(1-\frac{1}{k}\right)^{2H}\right)\right]\to 2H(2H-1) \text{ pre } k\to\infty,$$

čím je dôkaz hotový.

$\square$

Model frakcionálneho Gaussovského šumu je značne špecifický. Obecnejším procesom sa budeme venovať v nasledujúcich kapitolách.

Kapitola 2

Ergodická teória a dlhá pamäť

2.1 Ergodicita

Poznámka 2.1. Všeobecne pod pojmom transformácia chápeme ľubovoľné zobrazenie. V tejto kapitole však budeme transformáciou rozumieť také zobrazenie, ktoré má obor hodnôt a definičný obor totožné.
Najjednoduchšou transformáciou množiny X je identické zobrazenie $\mathcal{I}, \mathcal{I}(x) = x$ pre všetky $x \in X$.
Pretože $T(x) \in X$ pre všetky $x \in X$, môžeme definovať n-tú iteráciu x, $T^n(x)$ ako

$$T^0 = \mathcal{I}$$
$$T^{n+1} = T \circ T^n \text{ pre } n \geq 0.$$

Invertibilná transformácia je transformácia, ktorá je prostá a na. T^{-1} je tiež transformácia.

Definícia 2.2. Nech $(X, \mathcal{F}, \mu)$ je merateľný priestor, transformácia $T : X \mapsto X$ je merateľná transformácia, ak vzor $T^{-1}(A)$ každej množiny $A \in \mathcal{F}(X)$ patri $\mathcal{F}(X)$,

$$T^{-1}(A) \in \mathcal{F}(X).$$

Invertibilná merateľná transformácia je taká invertibilná transformácia T, že T a T^{-1} sú merateľné.
Transformácia T je mieru zachovávajúca, ak je merateľná a platí

$$\mu\left(T^{-1}(A)\right) = \mu(A)$$

pre všetky $A \in \mathcal{F}(X)$. Tiež hovoríme, že μ je invariantná miera transformácie T.

Definícia 2.3. Nech je T transformácia, $T : X \mapsto X$, X je množina. Podmnožina $A \subset X$ je pozitívne invariantná, prípadne pozitívne T-invariantná, ak pre $x \in A$ platí $T(x) \in A$.
Ak navyše platí $T^{-1}(A) = A$, hovoríme, že A je striktne invariantná, prípadne striktne T-invariantná. Používané je aj označenie s vypustením slova striktne, invariantná či T-invariantná.

Definícia 2.4. Mieru zachovávajúca transformácia T je ergodická, ak pre každú merateľnú T-invariantnú množinu A platí, že buď $\mu(A) = 0$, alebo $\mu(A^c) = 0$.

Poznámka 2.5. Často budeme využívať operátor posunutia. Ten obojstrannú postupnosť $(a_k)_{k=-\infty}^{\infty}$ zobrazí na postupnosť $(a_{k+1})_{k=-\infty}^{\infty}$.

Definícia 2.6. Náhodný proces X je ergodický, ak jemu prislúchajúce zobrazenie posunutia definované na príslušnom stavovom priestore je ergodická transformácia.

Označenie 2.7. V nasledujúcej časti budeme používať označenie

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) \text{ pre } n \geq 1,$$

$$f_*(x) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)),$$

$$f^*(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)).$$

Lemma 2.8. Nech T je mieru zachovávajúca transformácia na pravdepodobnostnom priestore $(X, \mathcal{F}, P)$. Potom sú funkcie $f_*(x)$ a $f^*(x)$, $x \in X$, T-invariantné.

Dôkaz: Výraz $f_n(T(x)) = \sum_{i=1}^{n} f(T^i(x))$ môžeme zapísať ako

$$f_n(T(x)) = f_{n+1}(x) - f(x).$$

Potom platí

$$\frac{1}{n} f_n(T(x)) = \frac{n+1}{n} \frac{1}{n+1} f_{n+1}(x) - \frac{1}{n} f(x). \tag{2.1}$$

Pretože $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} f(x) = 0$ a $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$, lim inf a lim sup výrazov strán (2.1) dáva výsledok $f_*(T(x)) = f_*(x)$ a $f^*(T(x)) = f^*(x)$. □

Dôsledok 2.9. Priamym dôsledkom predchádzajúcej lemmy je, že ak limita $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existuje, tak je T-invariantná.

Lemma 2.10. Nech je g merateľná funkcia a p je prirodzené číslo, $p \geq 1$. Ak existuje merateľná funkcia τ, $\tau : X \mapsto \{1, 2, \ldots, p\}$ taká, že

$$g_{\tau(x)}(x) \leq 0,$$

potom pre všetky $n \geq p$ platí

$$g_n(x) \leq \sum_{i=n-p}^{n-1} |g(T^i(x))|.$$

Dôkaz: Sliva (2008), str. 178-179 □

Lemma 2.11. Nech je f merateľná funkcia a p je prirodzené číslo, $p \geq 1$.

- Označme E_p

  $$E_p = \{x \in X : f_n(x) \geq 0 \text{ pre všetky } n, 1 \leq n \leq p\}.$$

  Potom pre všetky prirodzené $n \geq p$ a pre skoro všetky $x \in X$ platí

  $$f_n(x) \leq \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) I_{E_p}(T^i(x)) + \sum_{i=n-p}^{n-1} |f(T^i(x))|.$$

- Pre každé r reálne označme E_p^r

  $$E_p^r = \{x \in X : \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) \geq r \text{ pre všetky } n, 1 \leq n \leq p\}.$$

  Potom platí vzťah

  $$\int f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_{E_p^r} f \, \mathrm{d}\mu + r(1 - \mu(E_p^r)).$$

Dôkaz: Použijeme lemma (2.10) na funkciu

$$g(x) = f(x) - f(x)I_{E_p}(x)$$

s funkciou τ definovanou ako

$$\tau(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in E_p \\ \min\{1 \leq k \leq p : f_k(x) < 0\} & \text{pre } x \notin E_p. \end{cases}$$

Chceme overiť, že funkcie $g(x), \tau(x)$ spĺňajú predpoklady lemmy (2.10). Najprv ukážeme, že

$$f_{\tau(x)}(x) \leq \sum_{i=0}^{\tau(x)-1} f(T^i(x))I_{E_p}(T^i(x)) \text{ skoro isto.} \tag{2.2}$$

Pre $x \in E_p$ získavame v (2.2) rovnosť. Pre $x \notin E_p$ je $f_{\tau(x)}(x) < 0$, teda stačí ukázať, že pravá strana (2.2) je nezáporná. To platí, pretože každý jej prvok je nezáporný: pre $T^i(x) \notin E_p$ je i-tý člen sumy v (2.2) rovný 0, pre $T^i(x) \in E_p$ je $f(T^i(x)) = f_1(T^i(x)) \geq 0$. Tým sme dokázali platnosť (2.2).
Z definície g vyplýva, že

$$g_{\tau(x)}(x) = f_{\tau(x)}(x) - \sum_{i=0}^{\tau(x)-1} f(T^i(x))I_{E_p}(T^i(x)),$$

a podľa (2.2) je $g_{\tau(x)}(x) \leq 0$. Tým sme overili, že takto definované $g(x), \tau(x)$ spĺňajú predpoklady lemmy (2.10), z ktorej dostávame

$$g_n(x) \leq \sum_{i=n-p}^{n-1} |g(T^i(x))|,$$

čo je

$$f_n(x) - \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))I_{E_p}(T^i(x)) \leq \sum_{i=n-p}^{n-1} |f(T^i(x)) - f(T^i(x))I_{E_p}(T^i(x))|.$$

Sumu na pravej strane posledného výrazu môžeme odhadnúť ako

$$\sum_{i=n-p}^{n-1} |f(T^i(x)) - f(T^i(x))I_{E_p}(T^i(x))| \leq \sum_{i=n-p}^{n-1} |f(T^i(x))|,$$

a teda

$$f_n(x) \leq \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) I_{E_p}(T^i(x)) + \sum_{i=n-p}^{n-1} |f(T^i(x))|,$$

čím sme dokázali prvú časť tvrdenia.
Dôkaz druhej časti začneme pozorovaním, že

$$E_p^r = \{x : (f-r)_n(x) \geq 0, \text{ pre všetky} 1 \leq n \leq p\}.$$

Z prvej časti lemmy pre $f - r$ vyplýva, že

$$(f-r)_n(x) \leq \sum_{i=0}^{n-1} (f-r)(T^i(x)) I_{E_p^r}(T^i(x)) + \sum_{i=n-p}^{n-1} |(f-r)(T^i(x))|.$$

Majúc na pamäti, že T zachováva mieru, integráciou strán poslednej nerovnosti dostávame

$$n \int f - r \, \mathrm{d}\mu \leq n \int_{E_p^r} f - r \, \mathrm{d}\mu + \sum_{i=n-p}^{n-1} \int |f - r| \, \mathrm{d}\mu. \tag{2.3}$$

Po násobení strán (2.3) $\frac{1}{n}$ získavame limitným prechodom $n \to \infty$

$$\int f - r \, \mathrm{d}\mu \leq \int_{E_p^r} f - r \, \mathrm{d}\mu,$$

čím je dokončená druhá časť dôkazu. $\square$

Veta 2.12. Nech je $(X, \mathcal{S}, \mu)$ pravdepodobnostný priestor a nech T je transformácia zachovávajúca mieru na $(X, \mathcal{S}, \mu)$. Ak je funkcia $f : X \mapsto \mathbb{R}$ integrovateľná, potom platí

- limita
$$\widetilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))$$
existuje pre všetky $x \in X \setminus N$, kde N je nulová množina závisiaca na f, $\mu(N) = 0$.

- $$\widetilde{f}(Tx) = \widetilde{f}(x) \text{ skoro isto.}$$

- pre každú merateľnú T-invariantnú množinu A je

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \int_A \widetilde{f} \, \mathrm{d}\mu.$$

Špeciálne, pre T ergodickú je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) = \int f \, \mathrm{d}\mu \text{ skoro isto.}$$

Dôkaz: Predpokladáme, že T je ergodická transformácia. Ukážeme, že pre každú f integrovateľnú je

$$\int f \, \mathrm{d}\mu \leq f_*(x) \text{ skoro isto.} \tag{2.4}$$

Označme

$$A = \{x : f_*(x) < \int f \, \mathrm{d}\mu\}.$$

Chceme ukázať, že množina A je nulová, tj $\mu(A) = 0$.
Predpokladajme, že $\mu(A) > 0$. Potom platí, že

$$A = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \{x : f_*(x) < r < \int f \, \mathrm{d}\mu\}.$$

Ďalej označme

$$C_r = \{x : f_*(x) < r < \int f \, \mathrm{d}\mu\}.$$

Pretože $\mu(A) > 0$, existuje $r \in \mathbb{Q}$ také, že $\mu(C_r) > 0$. Toto C_r je T-invariantné mod μ, (tj. okrem množiny miery 0), pretože

$$T^{-1}(C_r) = \{x : f_*(T(x)) < r < \int f(T(x)) \, \mathrm{d}\mu(x)\},$$

$f_*(T(x)) = f_*(x)$ podľa lemmy (2.8) a $\int f(T(x)) \, \mathrm{d}\mu(x) = \int f(x) \, \mathrm{d}\mu(x)$, lebo T zachováva mieru. Pretože $\mu(C_r) > 0$ a T je ergodická, je $\mu(C_r) = 1$. Ďalej preto, lebo

$$E_p^r = \{x : \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) \geq r, \text{ pre všetky } 1 \leq n \leq p\}$$

a $\mu(C_r) = 1$, platí

$$\mu\left(\bigcap_{p-1}^{\infty} E_p^r\right) = 0.$$

Potom však

$$\lim_{p\to\infty} \mu(E_p^r) = 0,$$

a teda podľa druhej časti lemmy (2.11) je

$$\int f \,\mathrm{d}\mu \leq r,$$

čím sme dospeli k sporu. Čiže $\mu(A) = 0$ a sme dokázali vzťah (2.4). Použitím (2.4) na funkciu $-f$ dostávame

$$\int -f \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} -f(T^i(x)) \text{ skoro isto,}$$

čo možno zapísať ako

$$\int f \,\mathrm{d}\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) \text{ skoro isto.}$$

Spolu so vzťahom (2.4) to znamená, že

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) \text{ skoro isto.}$$

□

Veta 2.13. Nech je T konečná mieru zachovávajúca transformácia na pravdepodobnostnom priestore $(X, \mathcal{S}, \mu)$. Potom je T ergodická práve vtedy, keď pre všetky merateľné množiny $A, B \in X$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu(T^{-i}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Dôkaz: Nech je T ergodická transformácia a A, B su merateľné podmnožiny X. Potom je $\mathbb{I}_A$ integrovateľná a podľa Birkhoffovej vety je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{I}_A(T^i(x)) = \mu(A) \text{ skoro isto.}$$

Potom však

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{I}_A(T^i(x))\mathbb{I}_B(x) = \mu(A)\mathbb{I}_B(x) \text{ skoro isto.}$$

Pretože platí

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{I}_A(T^i(x))\mathbb{I}_B(x) \right| \leq 1 \text{ skoro isto}$$

pre všetky $n > 0$, môžeme použiť Lebesgueovu vetu o zámene limity a integrálu,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \int \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{I}_A(T^i(x))\mathbb{I}_B(x)\, \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{I}_A(T^i(x))\mathbb{I}_B(x)\, \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int \mu(A)\mathbb{I}_B(x)\, \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \mu(A)\mu(B).
\end{aligned}$$

Tiež platí

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{I}_A(T^i(x))\mathbb{I}_B(x)\, \mathrm{d}\mu(x) &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int \mathbb{I}_{T^{-i}(A)\cap B}(x)\, \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu(T^{-i}(A) \cap B).
\end{aligned}$$

Teda

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu(T^{-i}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Pre dôkaz druhej implikácie si všimnime, že pre množinu A T-invariantnú je

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu(T^{-i}(A) \cap A) = \mu(A)$$

a pre $B = A$ je z predpokladu vety

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu(T^{-i}(A) \cap A) = \mu(A)\mu(A).$$

Odtiaľ dostávame, že $\mu(A) = \mu(A)^2$, a teda $\mu(A) = 0$ alebo $\mu(A^c) = 0$, čiže T je ergodická transformácia. $\square$

Veta 2.14. Stacionárny náhodný proces X nie je ergodický práve vtedy, keď sa dá vyjadriť ako

$$X = \begin{cases} Y & \text{s pravdepodobnosťou } p \\ Z & \text{s pravdepodobnosťou } 1-p, \end{cases} \tag{2.5}$$

kde $p \in (0,1)$ a Y, Z sú stacionárne náhodné procesy s rôznymi konečne-rozmernými rozdeleniami.

Dôkaz: Nech X nie je ergodický a nech A je podmnožina priestoru generovaného procesom X invariantná vzhľadom k ľavému posunutiu a nech $p = P(A) \in (0,1)$. Potom (2.5) platí pre Y, Z kanonické na priestore postupností s pravdepodobnostnými mierami $P_1 = \frac{1}{p}P|_A$, respektíve $P_2 = \frac{1}{1-p}P|_{A^c}$. Pretože A je invariantná vzhľadom k posunutiu, tiež P_1 a P_2 nie sú ovplyvnené posunutím, a teda procesy Y, Z sú stacionárne. Keďže množiny A a A^c sú disjunktné, miery P_1, P_2 sú rôzne a potom aj konečne-rozmerné rozdelenia procesov Y, Z sú rôzne.
Predpokladajme, že vzťah (2.5) platí. Potom existuje ohraničená merateľná funkcia f taká, že $Ef(Y) \neq Ef(Z)$. Podľa vety (2.12) platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(X)) = \begin{cases} L_1 & \text{s pravdepodobnosťou } p \\ L_2 & \text{s pravdepodobnosťou } 1-p. \end{cases}$$

L_1 a L_2 sú náhodné veličiny s $EL_1 = Ef(Y)$ a $EL_2 = Ef(Z)$. Keďže však $Ef(Y) \neq Ef(Z)$, veta (2.12) zlyháva, čo znamená, že X nie je ergodická. $\square$

Práve dokázané tvrdenie (2.14) je dôvodom, prečo sa o stacionárnych neergodických procesoch vraví, že majú nekonečnú pamäť. Stacionárnym ergodickým náhodným procesom sa zase hovorí ako procesom s konečnou pamäťou.
V ďalšej časti budeme hľadať kritérium, podľa ktorého by sme procesy s konečnou pamäťou rozdelili na procesy s dlhou, respektíve krátkou pamäťou.

2.2 Mixing

Definícia 2.15. Nech je T mieru zachovávajúca transformácia na pravdepodobnostnom priestore $(X, \mathcal{S}, \mu)$. Povieme, že T je mixujúca, ak pre každé A, B merateľné podmnožiny X je

$$\lim_{n\to\infty} \mu(T^{-n}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Poznámka 2.16. Všimnime si, že definícia (2.15) sa dá pre B s $\mu(B) > 0$ zapísať ako

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu(T^{-n}(A) \cap B)}{\mu(B)} = \mu(A),$$

teda v B bude asymptoticky pri iterovaní T ležať časť A proporcionálna jej veľkosti v X.

Poznámka 2.17. V súvislosti s vetou (2.13) môžeme ergodicitu chápať ako mixing v (aritmetickom) priemere.

Poznámka 2.18. Vieme, že dva javy, reprezentované merateľnými množinami A, B sú nezávislé, ak $\mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$. Preto sa môžeme na mixing pozerať ako na asymptotickú nezávislosť, kde jeden z javov iterujeme transformáciou T.

Definícia 2.19. Stacionárny náhodný proces X je mixujúci, ak jemu prislúchajúce zobrazenie posunutia definované na príslušnom stavovom priestore je mixujúca transformácia. Posunutie môže byť definované na ľubovoľnom stavovom priestore, na ktorom je proces X merateľný.

Definícia 2.20. Nech je T mieru zachovávajúca transformácia na pravdepodobnostnom priestore $(X, \mathcal{S}, \mu)$. Povieme, že T je slabo mixujúca, ak pre každú dvojicu merateľných množín A, B, $A, B \in X$, platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |\mu(T^{-i}(A) \cap B) - \mu(A)\mu(B)| = 0.$$

Ak pre A, B merateľné množiny označíme

$$a_i = a_i(A, B) = \mu(T^{-i}(A) \cap B),$$

môžeme mixing vyjadriť ako konvergenciu postupností

$$a_i(A, B) \to \mu(A)\mu(B) \text{ pre } i \to \infty.$$

Ergodicitu zase možno zapísať ako

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} a_i(A, B) \to \mu(A)\mu(B) \text{ pre } n \to \infty.$$

Slabému mixingu zodpovedá

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} |a_i(A, B) - \mu(A)\mu(B)| \to 0 \text{ pre } n \to \infty.$$

Definícia 2.21. Nech je $\{a_i\}$ ohraničená postupnosť reálnych čísel a a je reálne číslo. Povieme, že $\{a_i\}$ konverguje k a v Cesarovom zmysle, ak platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} a_i = a.$$

Povieme, že $\{a_i\}$ konverguje k a silne v Cesarovom zmysle, ak platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} |a_i - a| = 0.$$

Vzťah medzi konvergenciou bodovou, Cesaro a silnou Cesaro vystihuje nasledujúca lemma.

Lemma 2.22. Nech je $\{a_i\}$ ohraničená postupnosť. Potom konvergencia implikuje silnú Cesaro konvergenciu a silná Cesaro konvergencia implikuje Cesaro konvergenciu.

Dôkaz: Silva (2008), str. 202-203

$\square$

Lemma 2.23. Nech je T mieru zachovávajúca transformácia na pravdepodobnostnom priestore. Platí

- Ak je T slabo mixujúca, tak je ergodická.
- Ak je T mixujúca, tak je aj slabo mixujúca.

Dôkaz:

- Pre T slabo mixujúcu konverguje postupnosť
$$a_i(A, B) = \mu(T^{-i}(A) \cap B)$$
silno v Cesarovom zmysle k $\mu(A)\mu(B)$, a teda podľa lemmy (2.22) konverguje k $\mu(A)\mu(B)$ aj v Cesarovom zmysle. Takže T je ergodická.
- Pre T mixujúcu konverguje postupnosť $a_i(A, B)$ k $\mu(A)\mu(B)$. Podľa lemmy (2.22) potom konverguje k $\mu(A)\mu(B)$ aj silno v Cesarovom zmysle. Teda T je slabo mixujúca.

$\square$

Nech je X stacionárny proces a nech Y je definovaná ako $Y_n = g(X_n)$ pre všetky n, $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ je merateľná funkcia. Je zrejmé, že aj proces Y je stacionárny. Pretože Y vznikol transformáciou procesu X, X by si mal pamätať aspoň toľko, čo Y. Pre g prostú takú, že aj g^{-1} je merateľná, intuícia hovorí, že procesy X a Y majú rovnako dlhú pamäť, teda ak jeden proces má dlhú pamäť, tak ju má aj druhý proces. Túto vlastnosť procesy s dlhou pamäťou definovanou pomocou pojmov ergodickej teórie majú, a to priamo z definície. X je ergodický, resp. mixujúci práve vtedy, keď Y je ergodický, resp. mixujúci.

Pozrime sa, čo pojmy mixing a ergodicita znamenajú pre gaussovské procesy. Začneme niekoľkými pomocnými tvrdeniami.

Definícia 2.24. Nech je T merateľná transformácia na pravdepodobnostnom priestore $(X, \mathcal{S}, \mu)$. Definujme unitárny operátor U_T na priestore merateľných komplexných funkcií na X predpisom
$$U_T(f(x)) = f(T(x)),$$
f je merateľná komplexná funkcia na X. Povieme, že U_T je unitárny operátor adjungovaný transformácii T.

Uvažujme pravdepodobnostný priestor $(M, \mathcal{S}, \mu)$, gaussovský proces X a

$$Y = \sum_k a_k X(s_k) \in L^2(M, \mathcal{S}, \mu),$$

$a_k \in \mathbb{R}$ a $s_k \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$. Z vlastností gaussovských náhodných veličín vieme, že Y má normálne rozdelenie. Označme $H_1^{(r)}$ uzáver veličín Y v $L^2(M, \mathcal{S}, \mu)$. O vlastnostiach $H_1^{(r)}$ hovorí nasledujúce lemma.

Lemma 2.25.

- Priestor $H_1^{(r)}$ je uzavretý reálny podpriestor priestoru $L^2(M, \mathcal{S}, \mu)$ a je invariantný vzhľadom k unitárnemu operátoru U_T adjungovanému k transformácii T.
- Každá náhodná veličina $Y \in H_1^{(r)}$ má Gaussovo pravdepodobnostné rozdelenie.
- Existuje izomorfizmus $\theta_1^{(r)}$ reálneho priestoru funkcií $\phi(\lambda) \in L^2(S^1, F)$, $\phi(\lambda) = \phi(-\lambda)$ a priestoru $H_1^{(r)}$ taký, že
$$U_T(\theta_1^{(r)}(\phi)) = \theta_1^{(r)}(e^{i\lambda}\phi).$$
S^1 označuje jednotkovú kružnicu a F je spektrálna distribučná funkcia X.

Dôkaz:

- Toto tvrdenie je zrejmé z definície $H_1^{(r)}$ a U_T.
- Ak postupnosť Y_n konverguje k Y v norme v $L^2(M, S, \mu)$, potom ich korešpondujúce distribučné funkcie konvergujú slabo, a teda ich charakteristické funkcie konvergujú rovnomerne na každom konečnom intervale. Charakteristická funkcia normálneho rozdelenia môže konvergovať len k charakteristickej funkcii rovnakého typu, čím sme dokázali druhú časť lemmy.
- Pre $Y = \sum_k a_k X(s_k)$ položme $\phi(\lambda) = \sum_k a_k e^{i\lambda s_k}$. Platí $\phi(\lambda) = \overline{\phi(-\lambda)}$ a tiež $EY^2 = \int |\phi(\lambda)|^2 \mathrm{d}\, F(\lambda)$, kde sme využili vzťah $EX(s_k)X(s_k + t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda s} \mathrm{d}\, F(\lambda)$. Týmto sme definovali bijektívnu lineárnu izometriu $\theta_1^{(r)}$ množiny trigonometrických polynómov $\phi(\lambda)$, $\phi(\lambda) = \overline{\phi(-\lambda)}$ a množiny náhodných veličín Y. Pre $\theta_1^{(r)}$ platí $\theta_1^{(r)}(e^{i\lambda}\phi) = U_T\theta_1^{(r)}(\phi)$. Spojitým rozšírením $\theta_1^{(r)}$ získame hľadané izomorfné zobrazenie.

$\square$

Označme $H_1^{(c)}$ priestor komplexných náhodných veličín tvaru

$$Y = Y_1 + iY_2,\ Y_1, Y_2 \in H_1^{(r)}.$$

Každému $Y \in H_1^{(c)}$ možno priradiť funkciu $\phi_1(\lambda) + i\phi_2(\lambda)$, kde $\phi_j(\lambda) = \theta_1^{(r)}(Y_j)$, $j = 1, 2$, $\theta_1^{(r)}$ je ako v lemme (2.25). Prislúchajúce zobrazenie označme ako $\theta_1^{(c)}$. Uveďme podobný výsledok ako pre $\theta_1^{(r)}$.

Lemma 2.26. Zobrazenie $\theta_1^{(c)}$ charakterizuje izomorfizmus priestoru $L^2(S^1, F)$ a $H_1^{(c)}$ a platí

$$\theta_1^{(c)}(e^{i\lambda}\phi) = U_T\theta_1^{(c)}(\phi).$$

Dôkaz: Nech je $\phi \in L^2(S^1, F)$ ľubovoľná. Možno ju zapísať ako $\phi(\lambda) = \phi_1(\lambda) + i\phi_2(\lambda)$, kde

$$\phi_1(\lambda) = \frac{1}{2}(\phi(\lambda) + \overline{\phi(-\lambda)}), \qquad \phi_2(\lambda) = \frac{1}{2i}(\phi(\lambda) - \overline{\phi(-\lambda)}).$$

Platí $\phi_1(\lambda) = \overline{\phi_1(-\lambda)}$ a $\phi_2(\lambda) = \overline{\phi_2(-\lambda)}$. Z lemmy (2.25) vieme, že normálne náhodné veličiny $Y_1, Y_2 \in H_1^{(r)}$ korešpondujú funkciám ϕ_1, ϕ_2. Spolu s linearitou $\theta_1^{(c)}$ to znamená, že $Y \in H_1^{(c)}$ korešponduje funkcii ϕ. Zvyšok vety plynie priamo z (2.25). $\square$

Lemma 2.27. Nech je X reálny stacionárny gaussovský proces s autokovariančnou funkciou $\{R_k\}_{k\geq 0}$ a spektrálnou distribučnou funkciou F na intervale $(-\pi, \pi\rangle$. Platí, že X je ergodický práve vtedy, keď je F spojitá.

Dôkaz: Dokážeme, že pre F nespojitú X nie je ergodický.
Nech je λ_0, $-\pi \leq \lambda_0 < \pi$ také, že $F(\lambda_0) = F(-\lambda_0) > 0$. Náhodná veličina $Y(\lambda_0)$ taká, že $(\theta_1^{(c)})^{-1}Y_{\lambda_0} = e_{\lambda_0}$, kde $e_{\lambda_0}(\lambda)$ je rovné 1 pre $\lambda = \lambda_0$ a rovné 0 inak, je nenulová komplexná náhodná veličina, ktorej reálna aj imaginárna časť má netriviálne Gaussovo rozdelenie. To vyplýva z lemmy (2.25). Potom platí

$$(\theta_1^{(c)})^{-1}U_TY(\lambda_0) = e^{i\lambda}e_{\lambda_0}(\lambda) = e^{i\lambda_0}e_{\lambda_0}(\lambda) = e^{i\lambda_0}(\theta_1^{(c)})^{-1}Y(\lambda_0).$$

Teda $U_T Y(\lambda_0) = e^{i\lambda_0} Y(\lambda_0)$ a potom aj $U_T|Y(\lambda_0)| = |Y(\lambda_0)|$. To znamená, že funkcia $|Y(\lambda_0)|$ je invariantná vzhľadom k T. Pretože má $Y(\lambda_0)$ normálne rozdelenie, $|Y(\lambda_0)|$ nie je konštanta mod 0. Tvrdenie plynie z faktu, že pre X ergodickú je invariantná funkcia konštanta na ľubovoľnej množine miery 1. To platí, pretože pre ľubovoľné a je množina $C_a = \{x : T(x) < a\}$ invariantná, a teda $\mu(C_a) = 0$ alebo $\mu(C_a) = 1$.
Dôkaz opačnej implikácie možno nájsť v Cornfeld, Fomin, Sinai (1982), str. 368-369. □

Lemma 2.28. Nech je X reálny stacionárny gaussovský proces s autokovariančnou funkciou $\{R_k\}_{k\geq 0}$ a spektrálnou distribučnou funkciou F na intervale $(-\pi, \pi\rangle$. Proces X je mixujúci práve vtedy, keď $R_k \to 0$ pre $k \to \infty$.

Dôkaz: Cornfeld, Fomin, Sinai (1982), str. 369-371. □

Požiadavka $R_k \to 0$ pri $k \to \infty$ je však nedostatočná, ako sme videli na príklade frakcionálneho Gaussovského šumu.

Definícia dlhej pamäti pre stacionárne procesy ako procesy s konečnou pamäťou (tj. ergodické), ktoré nie sú mixujúce, sa neujala. Na príklade frakcionálneho Gaussovského šumu sme videli, že podmienka $R_k \to 0$ pri $k \to \infty$, ekvivalentná s mixingom, nie je dostatočne silná. Teraz uvedieme príklad takejto podmienky, označovanej ako silný mixing.

2.3 Silný mixing

Definícia 2.29. Nech je $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ pravdepodobnostný priestor a $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sú σ-algebry, $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{F}$. Potom definujeme miery závislosti $\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, $\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ako

$$\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup\{|P(A \cap B) - P(A)P(B)|, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\},$$

$$\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup\{|Corr(f, g)|, f \in L^2(\mathcal{A}), g \in L^2(\mathcal{B})\}.$$

Definícia 2.30. Nech je $\{X_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ stacionárny náhodny proces na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Pre $n \geq 1$ definujme $\alpha_X(n)$, $\rho_X(n)$ ako

$$\alpha_X(n) = \sup\{|P(A \cap B) - P(A)P(B)|, A \in \sigma(X_k, k \leq 0), B \in \sigma(X_k, k \geq n)\},$$

$$\rho_X(n) = \rho(\sigma(X_k, k \leq 0), \sigma(X_k, k \geq n))$$

Povieme, že proces X je silne mixujúci, ak $\alpha_X(n) \to 0$ pre $n \to \infty$. Proces X je ρ-mixujúci, ak $\rho_X(n) \to 0$ pre $n \to \infty$.

Poznámka 2.31. Všimnime si, že silný mixing nám hovorí, že v istom zmysle proces nie je veľmi odlišný od postupnosti nezávislých rovnako rozdelených veličín. Menovite, minulosť a budúcnosť procesu sú asymptoticky nezávislé.

Lemma 2.32. Nech sú $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ σ-algebry, $p, q \in (0, \infty]$ a nech je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$. Potom pre $X \in L_p(\mathcal{A})$, $Y \in L_q(\mathcal{B})$ platí

$$|EXY - EXEY| \leq 8(\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}))^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}||X||_p||Y||_q. \tag{2.6}$$

Dôkaz: Bradley (2007), str. 71-73. □

Lemma 2.33. Nech je $\{X_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ stacionárny proces s $EX_0 = 0$ a $Var(S_n) \to \infty$ pre $n \to \infty$. Nech platí, ze pre nejaké $K < \infty$ a $\delta > 0$ je

$$E|S_n|^{2+\delta} \leq K(Var(S_n))^{1+\frac{\delta}{2}},$$

$$||E(S_n|\mathcal{F}_0)||_1 = o(\sigma_n) \text{ pre } n \to \infty, \tag{2.7}$$

a nech existuje kladná náhodná veličina η taká, že

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\frac{S_n^2}{\sigma_n^2}|\mathcal{F}_{-n}\right) = \eta \text{ v } L_1, \tag{2.8}$$

$\mathcal{F}_\rangle = \sigma(X_k, k \leq i)$. Potom platí vzťah

$$\frac{S^{(n)}}{\sigma_n} \to \sqrt{n}B \text{ slabo v } D[0,1],$$

$S^{(n)}$ označuje proces čiastočných súčtov ako v (1.2).

Dôkaz: Merlevède, Peligrad, Utev (2006), str. 27-28. □

Veta 2.34. Nech je $\{X_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ stacionárny, silne mixujúci proces s $EX_0 = 0$ a $E|X|^{2+\delta} < \infty$ pre $\delta > 0$. Ďalej nech $Var(S_n) \to \infty$ pre $n \to \infty$ a nech pre nejaké $K < \infty$ platí

$$E|S_n|^{2+\delta} \leq K(Var(S_n))^{1+\frac{\delta}{2}} \tag{2.9}$$

pre všetky $n \geq 1$. Potom pre proces čiastočných súčtov $S^{(n)}$ z (1.2) platí

$$\frac{1}{(Var(S_n))^{\frac{1}{2}}} S^{(n)} \to B \text{ slabo v } D[0,1],$$

B označuje Brownov pohyb. Ak navyše pre autokovariančnú funkciu $R_n = Cov(X_0, X_n)$, $n = 0, 1, \dots$ platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} |R_n| < \infty,$$

tak limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Var(S_n)}{n}$$

existuje, je kladná a konečná a platí (1.3).

Dôkaz: Pre dôkaz prvej časti vety overíme predpoklady tvrdenia (2.33).
Vďaka stacionarite platí

$$E|E(S_n|\mathcal{F}_0)| \leq E|E(S_{n+m}|\mathcal{F}_0)| + \sigma_m \leq E|E(S_n|\mathcal{F}_{-m})| + 2\sigma_m.$$

Pretože $\sigma_n^2 \to \infty$, vzťah (2.7) bude platiť, ak ukážeme, že

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{E|E(S_n|\mathcal{F}_{-m})|}{\sigma_n} = 0. \tag{2.10}$$

Vďaka vzťahu (2.6) a predpokladu (2.9) pre kladné konštanty c, c_1 platí

$$\begin{aligned}
E(E(S_n|\mathcal{F}_{-m}))^2 &= Cov(S_n, E(S_n|\mathcal{F}_{-m})) \\
&\leq c\alpha^{1-\frac{2}{2+\delta}}(m)(E|S_n|^{2+\delta})^{\frac{1}{2+\delta}}(E|E(S_n|\mathcal{F}_{-m})|^{2+\delta})^{\frac{1}{2+\delta}} \\
&\leq c\alpha^{1-\frac{2}{2+\delta}}(m)(E|S_n|^{2+\delta})^{\frac{2}{2+\delta}} \\
&\leq c_1\alpha^{1-\frac{2}{2+\delta}}(m)K^{\frac{2}{2+\delta}}Var(S_n)
\end{aligned}$$

pre všetky $m = 1, 2, \dots$. Z toho spolu s $Var(S_n) \to \infty$ a $\alpha(m) \to 0$, $m, n \to \infty$, vyplýva (2.10).
Ostáva overiť podmienku (2.8). K tomu použijeme identitu

$$E|XE(Y|\mathcal{F})| = Cov(|X|(\mathbb{I}_{E(Y|\mathcal{F})>0} - \mathbb{I}_{E(Y|\mathcal{F})\leq 0}), Y).$$

Aplikáciou na $X = 1, Y = \frac{S_n^2}{\sigma_n^2} - 1$ a $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{-n}$ získavame

$$\begin{aligned} E|E(\frac{S_n^2}{\sigma_n^2} - 1|\mathcal{F}_{-n})| &= Cov((\mathbb{I}_{E(Y|\mathcal{F}_{-n})>0} - \mathbb{I}_{E(Y|\mathcal{F}_{-n})\leq 0}), Y) \\ &\leq c_2 \alpha^{1-\frac{2}{2+\delta}}(n)(E(|Y|^{\frac{2+\delta}{2}}))^{\frac{2}{2+\delta}} \\ &\leq c_3 \alpha^{1-\frac{2}{2+\delta}}(n)(E|S_n|^{2+\delta})^{\frac{2}{2+\delta}} \\ &\leq c_4 \alpha^{1-\frac{2}{2+\delta}}(n)\sigma_n^2, \end{aligned}$$

kde c_2, c_3, c_4 sú kladné konštanty. Odtiaľ vyplýva, že vzťah (2.8) platí s $\eta = 1$. Pre náznak dôkazu druhej časti vety odkážeme čitateľa na Bradley (1998), str. 2. □

Práve dokázaná veta hovorí, že čo do platnosti centrálnej limitnej vety sa silne mixujúce procesy správajú podobne ako postupnosť nezávislých náhodných veličín. Preto ich môžeme považovať za procesy s krátkou pamäťou. Nedostatkom vety (2.34) sú ďalšie podmienky kladené na momenty procesu. Tie sa pokúsime odstrániť zavedením ešte silnejšej formy mixingu.

Definícia 2.35. Nech je $\{X_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ stacionárny náhodný proces na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Pre $n \geq 1$ definujme $\alpha_X^*(n)$, $\rho_X^*(n)$ ako

$$\alpha_X^*(n) = \sup_{S,T}\{\alpha(\sigma(X_k, k \in S), B \in \sigma(X_k, k \in T))\},$$

$$\rho_X^*(n) = \sup_{S,T}\{\rho(\sigma(X_k, k \in S), B \in \sigma(X_k, k \in T))\},$$

kde v oboch prípadoch je supremum z množín $S, T \subset \mathbb{Z}$ takých, že

$$\mathrm{dist}(S,T) = \inf_{k_1\in S, k_2\in T} |k_1 - k_2| \geq n.$$

Povieme, že proces X je prepletene silne mixujúci, ak $\alpha_X^*(n) \to 0$ pre $n \to \infty$. Proces X je ρ^*-mixujúci ak $\rho_X^*(n) \to 0$ pre $n \to \infty$.

Poznámka 2.36. Slovo prepletene je v názve kvôli skutočnosti, že množiny S, T nemusia byť "spojené"a každá množina môže mať prvky "medzi"prvkami druhej množiny. Pripúšťame také množiny, že existuje $s_1 \in S$ také, že existujú $t_1, t_2 \in T$ tak, že platí $t_1 < s_1 < t_2$, podobne pre množinu T.

Veta 2.37. Nech je $\{X_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ stacionárny, prepletene silne mixujúci proces s $EX_0 = 0$ a $E|X|^2 < \infty$. Ďalej nech $Var(S_n) \to \infty$ pre $n \to \infty$. Potom pre proces čiastočných súčtov $S^{(n)}$ platí

$$\frac{1}{(Var(S_n))^{\frac{1}{2}}} S^{(n)} \to B \text{ slabo v } D[0,1],$$

B označuje Brownov pohyb. Limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Var(S_n)}{n}$$

existuje, je kladná a konečná a platí (1.3).

Dôkaz: Peligrad (1998), str. 3, 8. Veta aj dôkaz sú uvedené s podmienkou ρ^*-mixingu. Ekvivalenciu podmienok mixingu možno nájsť vo vete 1(c) v práci Bradley (1993), str. 2-5. □

Nasledujúca veta hovorí o tom, kedy sú gaussovské procesy silne mixujúce.

Veta 2.38. Nech je $\{X_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ stacionárny gaussovský proces so spektrálnou hustotou spojitou a kladnou na intervale $(-\pi, \pi]$. Potom je proces X silne mixujúci.

Dôkaz: Rosenblatt (1972), str. 557-558. Dôkaz v skutočnosti platí pre ρ^*-mixing, ktorý je ekvivalentný s prepletene silným mixingom (veta 1(c), Bradley (1993), str. 2-5), ktorý implikuje silný mixing. □

V zmysle uvedených výsledkov sa za procesy s dlhou pamäťou pokladajú procesy s konečnou pamäťou, ktoré nie sú silne mixujúce, respektíve prepletene silne mixujúce. Táto definícia spĺňa podmienku, že ak sú procesy X, Y vo vzťahu $Y_n = g(X_n)$, g je bijekcia, tak X má dlhú pamäť práve vtedy, keď Y má dlhú pamäť. Nevýhodou tohto prístupu je, že podmienky silného a prepletene silného mixingu nie sú obecne jednoducho overiteľné. Takisto správanie silne mixujúcich procesov nie nutne korešponduje s postupnosťami nezávislých rovnako rozdelených veličín pri inej agregácii ako sume.

Kapitola 3

Momentové charakteristiky a dlhá pamäť

Jedným z možných pohľadov na dlhú pamäť je pomocou korelácií a ich pomalého rozpadu. Tento prístup je v značnej obľube vďaka jednoduchej interpretácii a tiež preto, že korelácia je jedným z najľahšie merateľných a odhadnuteľných charakteristík modelov.
V tejto kapitole sa, z pochopiteľných dôvodov, obmedzíme na slabo stacionárne procesy.
S témou druhých momentov a ich úlohou pri definícii dlhej pamäti úzko súvisí ďalší možný spôsob uchopenia tejto problematiky, a to správanie spektrálnej hustoty patričného procesu v počiatku.
Nasledujúca časť je venovaná teórii o slowly varying funkciách a regularly varying funkciách, ktorú budeme potrebovať v ďalších sekciách.

3.1 Slowly varying funkcie

Definícia 3.1. Nech je l kladná merateľná funkcia definovaná na okolí nekonečna, $\langle X, \infty)$. Ak platí, že

$$\frac{l(\lambda x)}{l(x)} \to 1 \text{ pre } x \to \infty \tag{3.1}$$

pre každé $\lambda > 0$, povieme, že l je slowly varying.

Poznámka 3.2. Voľbou $l(x) = l(X)$ na intervale $(0, X)$ môžeme požiadavku na okolie nekonečna $\langle X, \infty)$ zmeniť na predpoklad, že l je definovaná na $(0, \infty)$.

Dôležitým výsledkom teórie o slowly varying funkciách je veta o rovnomernej konvergencii. Pred ňou uvedieme ešte jedno pomocné tvrdenie.

Lemma 3.3. Nech je A množina kladnej Lebesgueovej miery, $A \subset \mathbb{R}$. Potom množina rozdielov

$$\{a - a' : a, a' \in A\}$$

obsahuje otvorený interval, v ktorom leží počiatok 0.

Dôkaz: Bingham, Goldie, Teugels (1989), str. 2-3. □

Veta 3.4. Nech je funkcia l slowly varying. Potom platí, že

$$\frac{l(\lambda x)}{l(x)} \to 1 \text{ pre } x \to \infty$$

rovnomerne na každej kompaktnej podmnožine $(0, \infty)$, ktorej patrí λ.

Dôkaz: Z praktických dôvodov označme $h(x) = \log l(e^x)$. Potom predpoklad z vety (3.4) možno zapísať ako

$$h(x + u) - h(x) \to 0 \text{ pre } x \to \infty$$

pre každé $u \in \mathbb{R}$, dokazovať budeme rovnomernú konvergenciu na kompaktných podmožinách $\mathbb{R}$ s u.
Najprv ukážeme, že pre každú postupnosť $\{x_n\}$, $x_n \to \infty$ pre $n \to \infty$ a každú ohraničenú postupnosť $\{u_n\}$ platí

$$h(x_n + u_n) - h(x_n) \to 0 \text{ pre } n \to \infty. \tag{3.2}$$

Zvoľme $\epsilon > 0$ a označme $B = 1+\sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$. $B < \infty$, pretože $\{u_n\}$ je ohraničená. Pre každé $u \in \langle -B, B\rangle$, $n \geq 1$ položme

$$\begin{aligned} A_{n,u} = \langle -B, B\rangle \quad \cap \quad & \{v : \forall k \geq n, |h(x_k + u + v) - h(x_k + u)| \leq \frac{\epsilon}{3}, \\ & |h(x_k + u_k + v) - h(x_k + u_k)| \leq \frac{\epsilon}{3}\} \end{aligned}$$

a zafixujme $u \in \langle -B, B\rangle$. Potom sú množiny $A_{n,u}$ merateľné a $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n,u} = \langle -B, B\rangle$. Teda existuje také $N(u)$ prirodzené také, že $A_{N(u),u}$ má kladnú (Lebesgueovu) mieru. Podľa lemmy (3.3) množina rozdielov

$$\{v_1 - v_2 : v_1, v_2 \in A_{N(u),u}\}$$

obsahuje interval $(-V(u), V(u))$ pre nejaké $V(u)$ kladné reálne. Potom pre každé n také, že $n \geq N(u)$ a $|u_n - u| < V(u)$ možno nájsť $v', v'' \in A_{N(u),u}$ také, že $u + v' = u_n + v''$. Takže platí

$$\begin{aligned} &|h(x_n + u_n) - (x_n + u)| \\ &\qquad \leq |h(x_n + u + v') - h(x_n + u_n)| + |h(x_n + u + v') - h(x_n + u)| \\ &\qquad = |h(x_n + u_n + v'') - h(x_n + u_n)| + |h(x_n + u + v') - h(x_n + u)| \\ &\qquad \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \frac{2}{3}\epsilon. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Intervaly $(u - V(u), u + V(u))$ sú otvorené a pokrývajú interval $\langle -B, B\rangle$. Je možné vybrať konečné pokrytie $(u^j - V(u^j), u^j + V(u^j))$ pre nejakú konečnú množinu $\{u^1, \ldots, u^r\} \subset \langle -B, B\rangle$. Označme $N_1 = \max(N(u^1), \ldots, N(u^r))$. Existuje N_2 také, že platí

$$|h(x_n + u^j) - h(x_n)| < \frac{\epsilon}{3} \tag{3.4}$$

pre $n \geq N_2$ a $j = 1, \ldots, r$. Potom pre každé $n \geq N_2$ pre u_n platí $|u_n - u^j| < V(u^j)$ pre nejaké j, a pre $n \geq N(u^j)$ platí $|h(x_n + u_n) - h(x_n + u^j)| \leq \frac{2}{3}\epsilon$, vďaka (3.3). Spolu so vzťahom (3.4) to znamená, že $|h(x_n + u_n) - h(x_n)| < \epsilon$, čím sme ukázali platnosť (3.2).
Uvažujme ľubovoľný kompaktný interval $\langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$. Pre každé n prirodzené možno nájsť $u_n \in \langle a, b\rangle$ také, že

$$|h(n + u_n) - h(n)| > \min\left\{n, \sup_{u \in \langle a,b\rangle} |h(n + u_n) - h(n)| - \frac{1}{n}\right\}. \tag{3.5}$$

Z už dokázaného vzťahu (3.2) vieme, že $h(n + u_n) - h(n) \to 0$ pre $n \to \infty$, z čoho vyplýva, že supremum z (3.5) je pre veľké n konečné a konverguje k 0. Teda $h(n + u) - h(n) \to 0$ pre $n \to \infty$ lokálne rovnomerne v u.
Podľa práve dokázaného ďalej platí

$$\begin{aligned} &\sup_{u \in \langle a,b\rangle} |h(x + u) - h(x)| \\ &\qquad \leq \sup_{u \in \langle a,b\rangle} |h(x + u) - h([x])| + |h(x) - h([x])| \\ &\qquad \leq \sup_{u \in \langle a,b+1\rangle} |h([x] + u) - h([x])| + \sup_{u \in \langle 0,1\rangle} |h([x] + u) - h([x])| \\ &\qquad \to 0 \end{aligned}$$

pre $[x] \to \infty$. □

Poznámka 3.5. Konvergenciou rovnomerne na každej kompaktnej podmnožine s λ v skutočnosti dokazujeme lokálnu rovnomernú konvergenciu.

O tvare slowly varying funkciách hovorí veta o reprezentácii. K jej dôkazu budeme potrebovať nasledujúce pomocné tvrdenie.

Lemma 3.6. Nech je l kladná, merateľná funkcia definovaná na intervale $\langle A, \infty)$ taká, že

$$\frac{l(\lambda x)}{l(x)} \to 1 \text{ pre } x \to \infty$$

pre každé λ kladné. Potom je l ohraničená na všetkých konečných intervaloch dostatočne vzdialených od A vpravo. Ak položíme $h(x) = \log l(e^x)$, funkcia h je tiež ohraničená na všetkých intervaloch dostatočne ďaleko vpravo.

Dôkaz: Podľa vety (3.4) existuje X také, že

$$|h(x+u) - h(x)| < 1 \text{ pre } x \geq X,\ u \in \langle 0, 1\rangle.$$

Potom však je $|h(x)| \leq 1 + |h(X)|$ na intervale $\langle X, X+1\rangle$, a vďaka indukcii aj $|h(x)| \leq n + |h(X)|$ na $\langle X, X+n\rangle$. Odtiaľ vyplýva platnosť tvrdenia pre funkciu h. Tvrdenie je platné aj pre funkciu l, pretože l možno zapísať ako $l(x) = \exp h(\log x)$ a platí tvrdenie pre h. $\square$

Poznámka 3.7. Práve dokázaná lemma hovorí, že existuje $X > 0$ také, že je l lokálne ohraničená na $\langle X, \infty)$, pričom lokálnou ohraničenosťou myslíme, že je ohraničená na každej kompaktnej podmnožine danej množiny. Pretože je l merateľná a lokálne ohraničená, je aj lokálne integrovateľná na $\langle X, \infty)$, tj $l \in L^1_{loc}\langle X, \infty)$.

Veta 3.8. Funkcia l je slowly varying práve vtedy, ked sa l dá zapísať ako

$$l(x) = c(x) \exp\left\{\int_a^x \frac{\epsilon(u)}{u}\,\mathrm{d}u\right\} \tag{3.6}$$

pre $x \geq a$, kde a je konštanta, $a > 0$, c je merateľná funkcia taká, že $c(x) \to c$, $c \in (0, \infty)$ a $\epsilon(x) \to 0$ pre $x \to \infty$.

Poznámka 3.9. Podobne ako v dôkaze vety (3.4) položíme $h(x) = \log l(e^x)$ a budeme dokazovať, že pre h platí (3.2) práve vtedy, keď sa dá h zapísať ako

$$h(x) = d(x) + \int_b^x e(v)\,\mathrm{d}v \tag{3.7}$$

pre $x \geq b$, kde $b = \log a$, $d(x) = c_1(e^x)$, $e(x) = \epsilon(e^x)$ a platí, že $d(x) \to d$, $d \in \mathbb{R}$ a $e(x) \to 0$ pre $x \to \infty$.

Dôkaz: Ak platí (3.6), tak je

$$\frac{l(\lambda x)}{l(x)} = \frac{c(\lambda x)}{c(x)} \exp\left\{\int_x^{\lambda x} \frac{\epsilon(u)}{u}\,\mathrm{d}u\right\}.$$

Zvoľme ľubovoľný interval $\langle a, b\rangle$, $0 < a < b < \infty$, a ľubovoľné $\epsilon > 0$. Potom pre x dostatočne veľké a každé $\lambda \in \langle a, b\rangle$ leží pravá strana medzi

$$(1-\epsilon)\exp\{-\epsilon \max(|\log a|, |\log b|)\}$$

a

$$(1+\epsilon)\exp\{\epsilon \max(|\log a|, |\log b|)\},$$

z čoho vyplýva platnosť (3.1). Tým sme dokázali jednu implikáciu.
Podľa lemmy (3.6) je h ohraničená a merateľná, a teda integrovateľná na konečných intervaloch dostatočne ďaleko napravo. Preto pre dostatočne veľké X môžeme písať

$$h(x) = \int_x^{x+1} (h(x) - h(t))\,\mathrm{d}t + \int_X^{x} (h(t+1) - h(t))\,\mathrm{d}t + \int_X^{X+1} h(t)\,\mathrm{d}t$$

pre $x \geq X$. Posledný člen na pravej strane je konštanta, označme ju c, $\int_X^{X+1} h(t)\,\mathrm{d}t = c$. Ak položíme $e(x) = h(x+1) - h(x)$, tak $e(x) \to 0$ s $x \to \infty$. Platí, že prvý člen pravej strany

$$\int_x^{x+1} (h(x) - h(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (h(x) - h(x+u))\,\mathrm{d}u,$$

čo konverguje k 0 s $x \to \infty$, podľa vety (3.4). Tým sme dokázali vzťah (3.7) s $d(x) = c + \int_0^1 (h(x) - h(x+u))\,\mathrm{d}u$. $\square$

Poznámka 3.10. V prípade, že nás zaujíma len limitné chovanie slowly varying funkcie l, môžeme miesto nej uvažovať slowly varying funkciu tvaru

$$l_1(x) = c \exp\left\{\int_a^x \frac{\epsilon(u)}{u}\,\mathrm{d}u\right\} \tag{3.8}$$

pre $x \geq a$, konštantu $0 < c < \infty$ a $\epsilon(x) \to 0$ s $x \to \infty$. Takýmto slowly varying funkciám hovoríme normalizované slowly varying funkcie.
Zaujímavé je, že pre ne platí

$$\epsilon(x) = \frac{xl_1'(x)}{l_1(x)} \text{ skoro isto}$$

a, naopak, pre danú funkciu l_1 spojitú, $o(1)$, s $\epsilon(x) = \frac{xl_1'(x)}{l_1(x)}$ získame integrovaním tvar (3.8), teda takáto l_1 je normalizovaná.

Uvažujme funkciu f kladnú, definovanú na intervale $\langle X, \infty)$ pre $X > 0$. Podobne ako v prípade slowly varying funkcií možno definičný obor rozšíriť na $(0, \infty)$ položením $f(x) = f(X)$ na $(0, X)$. Označme S množinu všetkých $\lambda > 0$ takých, že

$$\frac{f(\lambda x)}{f(x)} \to g(\lambda) \text{ pre } x \to \infty, \tag{3.9}$$

kde $g(\lambda) > 0$. Ak $\lambda, \mu \in S$, tak

$$\frac{f(\lambda\mu x)}{f(x)} = \frac{f(\lambda\mu x)}{f(\mu x)}\frac{f(\mu x)}{f(x)} \to g(\lambda)g(\mu) \text{ pre} \lambda \to \infty.$$

Teda $\lambda\mu$ je prvkom S a platí

$$g(\lambda\mu) = g(\lambda)g(\mu)$$

pre $\lambda, \mu \in S$. Zo vzťahu (3.9) možno nahliadnuť, že ak $\lambda \in S$, tak aj $\frac{1}{\lambda} \in S$ a $g(\frac{1}{\lambda}) = \frac{1}{g(\lambda)}$. Čiže S tvorí multiplikatívnu podgrupu na $(0, \infty)$.
Podobne ako na predchádzajúcich stránkach, z praktických dôvodov prejdeme k aditívnej notácii. Označme $h(x) = \log f(e^x)$, $k(u) = \log g(e^u)$ a $T = \{\log \lambda : \lambda \in S\}$. Potom je

$$h(x + u) - h(x) \to k(u) \tag{3.10}$$

pre $x \to \infty$ a pre všetky $u \in T$, $T \subset \mathbb{R}$. Analogicky s S je T aditívna podgrupa $\mathbb{R}$ a platí

$$k(u + v) = k(u) + k(v)$$

pre $u, v \in T$.
Nasledujúca veta charakterizuje možné limitné funkcie g. Ukážeme, že pre f rozumnú a S nie príliš malú je $g(\lambda) = \lambda^\rho$ pre nejaké ρ reálne. V dôkaze budeme potrebovať pomocné tvrdenie.

Lemma 3.11. Nech je k aditívna merateľná funkcia. Potom je $k(x)$ tvaru $k(x) = cx$ pre nejakú konštantu c.

Dôkaz: Bingham, Goldie, Teugels (1989), str. 5. $\square$

Veta 3.12. Nech je $f > 0$ merateľná funkcia a nech

$$\frac{f(\lambda x)}{f(x)} \to g(\lambda) \text{ pre } x \to \infty, \tag{3.11}$$

platí pre všetky λ na množine kladnej (Lebesgueovej) miery. Potom

1. (3.11) platí pre všetky $\lambda > 0$,
2. existuje ρ reálne také, že $g(\lambda) = \lambda^\rho$ pre všetky $\lambda > 0$,
3. $f(x) = x^\rho l(x)$, kde l je slowly varying funkcia.

Dôkaz:

1. Pre dôkaz použijeme aditívnu notáciu. Vzťah (3.10) platí pre T aditívnu podgrupu $\mathbb{R}$ a T je kladnej miery. Podľa lemmy (3.3) obsahuje T interval $(-\delta, \delta)$ pre nejaké $\delta > 0$. Pretože je T podgrupa aditívna, obsahuje aj $(-n\delta, n\delta)$ pre $n = 1, 2, \ldots$, a teda $T = \mathbb{R}$, čím sme dokázali prvý bod.
2. Uvažujme limity vo výrazoch (3.11) a (3.10) podľa Heineho. Funkcie g a k sú bodové limity postupnosti merateľných funkcií, a teda sú tiež merateľné. Pretože $T = \mathbb{R}$ a k je aditívna, tak podľa lemmy (3.11) platí, že pre nejaké ρ reálne je $k(u) = \rho u$. Prechodom k multiplikatívnemu značeniu dostávame, že $g(\lambda) = \lambda^\rho$.
3. Pre dôkaz bodu 3. položme $l(x) = \frac{f(x)}{x^\rho}$. Potom je

   $$\frac{l(\lambda x)}{l(x)} \to 1$$

   pre $x \to \infty$ pre všetky $\lambda > 0$.

$\square$

3.2 Regularly varying funkcie

Definícia 3.13. Nech je f kladná merateľná funkcia taká, že pre všetky $\lambda > 0$ platí

$$\frac{f(\lambda x)}{f(x)} \to \lambda^{\rho}$$

pre $x \to \infty$ a $\rho \in \mathbb{R}$. Povieme, že f je regularly varying s indexom ρ, píšeme $f \in R_{\rho}$.
Množinu všetkých regularly varying funkcií označíme R, $R = \bigcup_{\rho \in \mathbb{R}} R_{\rho}$.

Poznámka 3.14. Všimnime si, že slowly varying funkcie odpovedajú množine R_0, v označení z definície (3.13).

Definícia 3.15. Nech je f kladná merateľná funkcia taká, že pre všetky $\lambda > 0$ platí

$$\frac{f(\lambda x)}{f(x)} \to \lambda^{\rho}$$

pre $x \to 0_+$ a nejaké $\rho \in \mathbb{R}$. Povieme, že f je regularly varying v počiatku s indexom ρ, píšeme $f \in R_{\rho}(0+)$.

Poznámka 3.16. Vzťah $f(x) \in R_{\rho}(0+)$ sa dá ekvivalentne zapísať ako $f(\frac{1}{x}) \in R_{-\rho}$.

Priamym dôsledkom vety (3.8) je, že pre f regularly varying s indexom ρ platí

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{\rho} l(x) \\ &= x^{\rho} c(x) \exp\left\{\int_a^x \frac{\epsilon(u)}{u}\,\mathrm{d}u\right\} \text{ pre } x \geq a, \end{aligned} \tag{3.12}$$

kde $a > 0$, $\epsilon(x) \to 0$ a $c(x) \to c$ s $x \to \infty$, $c \in (0, \infty)$. V zmysle poznámky (3.10) môžeme povedať, že

$$f(x) = (c + o(1)) \exp\left\{\int_1^x \frac{\rho + o(1)}{u}\,\mathrm{d}u\right\}$$

s c kladnou konečnou konštantou pri predefinovaní f na nejakej kompaktnej podmnožine intervalu $(0, \infty)$. V aditívnej notácii, $h(x) = \log f(e^x)$, píšeme

$$h(x) = d + o(1) + \int_0^x (\rho + o(1))\,\mathrm{d}u,$$

kde $d = \log c$, $d \in \mathbb{R}$. Spomeňme ešte dôsledok tohto vzťahu.

Dôsledok 3.17. Nech je f regularly varying funkcia s indexom ρ, $\rho \neq 0$. Potom pre $x \to \infty$ je

$$f(x) \to \begin{cases} \infty & \text{pre } \rho > 0 \\ 0 & \text{pre } \rho < 0. \end{cases}$$

Obdoba vety (3.4) pre regularly varying funkcie znie nasledovne.

Veta 3.18. Nech je f funkcia regularly varying s indexom ρ a pre $\rho > 0$ nech je f ohraničená na každom intervale $(0, X\rangle$. Potom platí

$$\frac{f(\lambda x)}{f(x)} \to \lambda^\rho \text{ rovnomerne v } \lambda \begin{cases} \text{na každom} \langle a, b\rangle, 0 < a \leq b < \infty \text{ pre } \rho = 0 \\ \text{na každom} (0, b\rangle, 0 < b < \infty \text{ pre } \rho > 0 \\ \text{na každom} \langle a, \infty), 0 < a < \infty \text{ pre } \rho < 0. \end{cases}$$

Dôkaz: Prípad $\rho = 0$ je dokázaný pre vetu (3.4).
Predpokladajme, že je $\rho > 0$. Bez ujmy na všeobecnosti uvažujme $\lambda \in (0, 1\rangle$. Zvoľme $\epsilon \in (0, 1)$ ľubovoľne a položme $\Delta = (\frac{\epsilon}{8})^{\frac{1}{\rho}}$. Potom platí

$$0 < \lambda^\rho < \frac{\epsilon}{2}, \qquad 0 < 4\lambda^{\rho+1} \leq \frac{\epsilon}{2} \tag{3.13}$$

pre $(0 < \lambda \leq \Delta)$. Možno nájsť také X_1, že pre funkcie c, ϵ z vyjadrenia f ako (3.12) platí

$$\frac{c}{2} \leq c(x) \leq 2c, \qquad \epsilon(x) \leq 1 \tag{3.14}$$

pre $x \geq X_1$. Potom pre $0 < \lambda \leq \Delta$ a $x \geq \frac{X_1}{\lambda}$ platí (3.14) pre x, aj pre λx, pretože $\frac{f(\lambda x)}{f(x)} \leq 4\lambda^{\rho+1}$. Za týchto podmienok z (3.13) vyplýva, že

$$\left| \frac{f(\lambda x)}{f(x)} - \lambda^\rho \right| \leq 4\lambda^{\rho+1}, \tag{3.15}$$

s $0 < \lambda \leq \Delta$ a $x \geq \frac{X_1}{\lambda}$. Položme $M = \sup_{0<t\leq X_1} f(t)$, $M < \infty$. Je možné nájsť X_2 také, že $\frac{M}{f(x)} < \frac{\epsilon}{2}$ pre všetky $x \geq X_2$. Použitím (3.13) dostávame

$$\left| \frac{f(\lambda x)}{f(x)} - \lambda^\rho \right| < \epsilon \tag{3.16}$$

pre $0 < \lambda \leq \Delta$, $X_2 \leq x \leq \frac{X_1}{\lambda}$. Pre funkciu l slowly varying, $l(x) = \frac{f(x)}{x^\rho}$ môžeme podľa vety (3.4) nájsť X_3 také, že

$$\left| \frac{l(\lambda x)}{l(x)} - 1 \right| < \epsilon$$

pre $\Delta \leq \lambda \leq 1$ a $x \geq X_3$. Potom platí

$$\left| \frac{f(\lambda x)}{f(x)} - \lambda^\rho \right| = \lambda^\rho \left| \frac{l(\lambda x)}{l(x)} - 1 \right| \leq \epsilon$$

pre $\Delta \leq \lambda \leq 1$, $x \geq X_3$. Spolu s (3.15) a (3.16) to znamená, že

$$\left| \frac{f(\lambda x)}{f(x)} - \lambda^\rho \right| \leq 2\epsilon$$

pre $0 < \lambda \leq 1$ a $x \geq \max\{X_2, X_3\}$, čím sme dokázali rovnomernú konvergenciu. Prípad $\rho < 0$ sa dokazuje podobne ako pre $\rho > 0$. □

Definícia 3.19. Nech je f kladná merateľná funkcia. Povieme, že f patrí do Zygmundovej triedy Z, ak pre každé $\alpha > 0$ je $x^\alpha f(x)$ nakoniec rastúca a $x^{-\alpha} f(x)$ nakoniec klesajúca.

Veta 3.20. Zygmundova trieda Z je totožná s množinou normalizovaných slowly varying funkcií z poznámky (3.10).

Dôkaz: Nech f patrí do Zygmundovej triedy. Zvoľme X_α pre každé $\alpha > 0$ tak, že $x^\alpha f(x)$ je rastúca a $x^{-\alpha} f(x)$ je klesajúca pre $x \geq X_\alpha$. V aditívnom zápise označme $h(x) = \log f(e^x)$, $T_\alpha = \log X_\alpha$. Potom je funkcia $h(x) + \alpha x$ neklesajúca a funkcia $h(x) - \alpha x$ nerastúca na $(T_\alpha, \infty\rangle$. Pre $\alpha = 1$ platí pre $y > x \geq T_1$ vzťah

$$-(y - x) \leq h(y) - h(x) \leq (y - x),$$

a teda je h absolútne spojitá na $\langle T_1, \infty)$. (tj.

$$\sum_{k=1}^{n} |h(y_k) - h(x_k)| < \epsilon$$

na všetkých množinách disjunktných intervalov $\{(x_k, y_k)\}$ takých, že $\sum_{k=1}^{n}(y_k - x_k) < \delta(\epsilon)$.) Potom platí

$$h(x) = h(T_1) + \int_{T_1}^{x} e(t)\,\mathrm{d}t$$

pre $T_1 \leq x < \infty$, kde e je merateľná funkcia a $e = h'$ skoro všade na $\langle T_1, \infty)$. V bodoch, kde $h'(x)$ neexistuje, dodefinujeme $e(x) = 0$. Z definície T_α vyplýva, že v bodoch, kde $h'(x)$ existuje a $x > T_\alpha$ platí $-\alpha \leq h'(x) \leq \alpha$. Teda $e(x) \to 0$ pre $x \to \infty$. Čiže platí

$$f(x) = f(X_1) \exp\left\{\int_{X_1}^{x} \frac{e(\log u)}{u}\,\mathrm{d}u\right\}$$

pre $x \geq X_1$, čím sme ukázali, že f je normalizovaná slowly varying.
To, že každá normalizovaná slowly varying funkcia patrí do Zygmundovej triedy vyplýva z vyjadrenia f, viď poznámka (3.10). □

O asymptotickom správaní integrálov regularly varying funkcií hovorí Karamatova veta. K jej dôkazu budeme potrebovať Potterovu vetu. Jej predmetom pozornosti je ohraničenosť výrazu $\frac{f(x)}{f(y)}$ pre regularly varying funkcie.

Veta 3.21. 1. Nech je l slowly varying. Potom pre ľubovoľné konštanty $A > 1$, $\delta > 0$ existuje také X, $X = (A, \delta)$, že

$$\frac{l(y)}{l(x)} \leq A \max\left\{\left(\frac{y}{x}\right)^{\delta}, \left(\frac{y}{x}\right)^{-\delta}\right\}$$

pre $x, y \geq X$.

2. Nech je l slowly varying a nech pre každú kompaktnú podmnožinu $\langle a, b\rangle$, $\langle a, b\rangle \subset \langle 0, \infty)$, existuje konštanta $\epsilon > 0$ taká, že $l(x) > 0$ na $\langle a, b\rangle$ alebo $l(x) < 0$ na $\langle a, b\rangle$ a platí $l(x) < \infty$ na $\langle a, b\rangle$. Potom pre každé $\delta > 0$ existuje $A' = A'(\delta) > 1$ také, že

$$\frac{l(y)}{l(x)} \leq A' \max\left\{\left(\frac{y}{x}\right)^{\delta}, \left(\frac{y}{x}\right)^{-\delta}\right\}$$

pre $x, y \in (0, \infty)$.

3. Nech je f regularly varying s indexom ρ. Potom pre ľubovoľné konštanty $A > 1$, $\delta > 0$ existuje také X, $X = X(A, \delta)$, že

$$\frac{l(y)}{l(x)} \leq A \max\left\{\left(\frac{y}{x}\right)^{\rho+\delta}, \left(\frac{y}{x}\right)^{\rho-\delta}\right\}$$

pre $x, y \geq X$.

Dôkaz:

1. Toto tvrdenie je priamym dôsledkom vety (3.8).

2. Zvoľme $A > 1$, $\delta > 0$ a nech je X také, že platí bod 1. Potom z lokálnej ohraničenosti f existuje $A^* \geq 1$ také, že

$$\frac{l(y)}{l(x)} \leq A^*$$

pre $0 \leq x, y \leq X$. Potom pre $0 < x \leq X < y$ je

$$\frac{l(y)}{l(x)} = \frac{l(y)}{l(X)} \frac{l(X)}{l(x)} \leq A \left(\frac{y}{X}\right)^\delta A^* \leq AA^* \left(\frac{y}{x}\right)^\delta.$$

Podobne je pre $0 < y \leq X < x$

$$\frac{l(y)}{l(x)} \leq AA^* \left(\frac{y}{x}\right)^{-\delta}.$$

Položíme $A' = AA^*$, a tým sme dokázali bod 2.

3. Vyplýva z bodu 1. a vyjadrenia f ako $f(x) = x^\rho l(x)$, kde $l(x)$ je slowly varying.

$\square$

Veta 3.22. Nech je l slowly varying a je $X > 0$ konštanta taká, že $l(x)$ je lokálne ohraničená na $\langle X, \infty)$. Potom pre $\alpha > -1$ platí

$$\int_X^x t^\alpha l(t)\,\mathrm{d}t \sim x^{\alpha+1} \frac{l(x)}{\alpha + 1} \tag{3.17}$$

pre $x \to \infty$.

Dôkaz: Zvoľme $\delta \in (0, \alpha + 1)$. Nech je $X(2, \delta)$ ako vo vete (3.21) v bode 1. Položme $X' = \max\{X, X(2, \delta)\}$. Potom je, s využitím substitúcie $u = \frac{t}{x}$,

$$\frac{1}{x^{\alpha+1} l(x)} \int_{X'}^x t^\alpha l(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{l(ux)}{l(x)} \mathbb{I}_{\langle \frac{X'}{x}, 1\rangle}(u) u^\alpha\,\mathrm{d}u. \tag{3.18}$$

Integrand na pravej strane konverguje k u^α a podľa vety (3.21) je zhora ohraničená výrazom $2u^{\alpha-\delta}$. Potom podľa vety o zámene limity a integrálu konverguje pravá strana (3.18) k

$$\int_0^1 u^\alpha \, \mathrm{d}u = \frac{1}{\alpha+1}.$$

Týmto sme dokázali požadované tvrdenie, kde však miesto dolnej hranice X používame X'. Pretože však pravá strana 3.17 konverguje k ∞, môžeme na ľavej strane nahradiť X' za X. □

Definícia 3.23. Nech je $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ postupnosť reálnych čísel. Povieme, že $\{a_n\}$ je regularly varying s indexom ρ, ak existuje funkcia f regularly vaying s indexom ρ taká, že $a_n = f(n)$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

3.3 Druhé momenty a spektrálna hustota

Teraz sme pripravení sa venovať dlhej pamäti v spojitosti s druhými momentami náhodného procesu.

Nech je $X = (X_1, X_2, \ldots)$ centrovaný stacionárny náhodný proces a nech má X konečný rozptyl σ^2. Označme autokovariančnú funkciu $R_n = Cov(X_1, X_{n+1})$ a autokorelačnú funkciu $\rho_n = \frac{R_n}{\sigma^2}$, $n = 1, 2, \ldots$. Potom môžeme vyjadriť rozptyl čiastočnej sumy procesu X, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, ako

$$\begin{aligned} VarS_n &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Cov(X_i, X_j) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1} n\rho_{|i-j|} \\ &= \sigma^2 \left(n + 2\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\rho_i \right). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Z tohto vyjadrenia možno usúdiť, že správanie $VarS_n$ úzko súvisí s rýchlosťou rozpadu autokorelácie procesu X. Predpokladajme, že je postupnosť autokorelácií spočítateľná,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\rho_n| < \infty. \tag{3.20}$$

Potom podľa Lebesgueovej vety o zámene limity a integrálu limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{VarS_n}{n} = \sigma^2 \left(1 + 2\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i \right) = \sigma_*^2 \tag{3.21}$$

existuje a je konečná, označme ju ako σ_*^2. Ak limita σ_*^2 nie je nulová, tak rozptyl postupnosti čiastočných súčtov $VarS_n$ rastie lineárne s počtom členov n. Predpokladajme, že autokorelačná funkcia procesu X je regularly varying,

$$\rho_n = n^{-d}L(n),$$

kde $L(n)$ je slowly varying, $n \geq 1$ a $0 \leq d < 1$. Rozptyl S_n možno zapísať ako

$$VarS_n = \sigma^2 \left(n + 2n \sum_{i=1}^{n-1} i^{-d}L(i) - 2 \sum_{i=1}^{n-1} i^{1-d}L(i) \right). \tag{3.22}$$

Použitím vety (3.22) na jednotlivé sumy v (3.22) dostávame vzťah

$$VarS_n \sim n + \frac{(n-1)^{1-d}L(n-1)}{(1-d)} + \frac{(n-1)^{2-d}L(n-1)}{(2-d)}$$

s $n \to \infty$, čo po zjednodušení je

$$VarS_n \sim \frac{2\sigma^2}{(1-d)(2-d)} L(n)n^{2-d}, \tag{3.23}$$

kde $n \to \infty$. To znamená, že rozptyl postupnosti čiastočných súčtov rastie pre autokorelačnú funkciu regularly varying rýchlejšie ako v prípade spočítateľných členov autokorelácie. Toto zodpovedá modelu frakcionálneho Gaussovského šumu s indexom H, $H > \frac{1}{2}$, kde je asymptotika $VarS_n$ daná vzťahom (1.4).

Z pohľadu správania sa rozptylu postupnosti čiastočných súčtov stacionárneho náhodného procesu je rozptyl s lineárnym rastom v závislosti na počte členov správanie blízke postupnosti nezávislých rovnako rozdelených veličín. V časti o mixingu sme videli, že za platnosti ďalších podmienok, ako silný mixing a predpoklad konečnosti určitých momentov, platí záver funkcionálnej centrálnej limitnej vety. Keď však rozptyl postupnosti čiastočných súčtov rastie ako regularly varying funkcia s indexom väčším ako 1, je konvergencia k Brownovmu pohybu vylúčená, a to bez ohľadu na použitú normalizáciu. To vyplýva z Lampertiho vety (pozri Embrechts, Maejima (2002), str. 13-15).

To je dôvod, prečo je často divergencia sumy korelácií považovaná za definíciu dlhej pamäti. Konečnosť sumy korelácií 3.20 je potom indikátorom krátkej pamäti. Ďalsou možnosťou, ako oddeliť procesy s dlhou a krátkou pamäťou je uvažovať o tom, ako rýchlo rastie rozptyl postupnosti čiastočných súčtov. Podľa tohto prístupu má slabo stacionárny proces krátku pamäť, ak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{VarS_n}{n} < \infty. \tag{3.24}$$

Proces s dlhou pamäťou má v tomto prípade limitu (3.24) nekonečnú a sumabilita korelácií nie je nutná. Nech rastie rozptyl postupnosti čiastočných súčtov najviac lineárne, a píšme

$$\frac{VarS_n}{n} = \sigma^2 \left(1 + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{j} \rho_i . \right) \tag{3.25}$$

Potom ak

$$\sum_{n=0}^{K} \rho_n < \infty \tag{3.26}$$

konverguje pre $K \to \infty$, tak platí (3.21) aj bez podmienky (3.20), pretože konvergencia implikuje Cesaro konvergenciu, viď lemma (2.22). Príkladom takejto situácie je proces s

$$\rho_n = \frac{\sin(na)}{na},$$

$n = 1, 2, \dots$ a $a \in (0, \pi)$. Poznamenajme, že ani konvergencia (3.26) nie je nutná, o čom svedčí proces s

$$\rho_n = \frac{1}{2}(-1)^n,$$

$n = 1, 2, \dots$.

Pozrime sa bližšie na autokovariančnú funkciu procesu zo spektrálnej stránky. Pripomeňme, že spektrálna distribučná funkcia F je miera na intervale $(-\pi, \pi]$ a platí

$$R_k = \int_{(-\pi,\pi]} \cos(kx)\, F(dx), k \geq 0.$$

V prípade, že platí podmienka (3.20), tak má F spojitú hustotu vzhľadom k Lebesgueovej miere na $(-\pi, \pi]$. Tú budeme označovat ako spektrálnu hustotu, píšeme $f(x)$, a platí

$$f(x) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \cos(nx) \right), -\pi < x < \pi. \tag{3.27}$$

Nech spektrálna distribučná funkcia F je neatomická v bodoch $0, \pi$, potom pre

$i \leq j$ platí

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{j} \rho_i &= \frac{1}{\sigma^2} \int_{(-\pi,\pi]} \sum_{i=1}^{j} \rho_i \cos(ix)\, F(dx) \\
&= \frac{1}{2\sigma^2} \int_{(-\pi,\pi]} \frac{1}{\sin x} (\sin((j+1)x) + \sin(jx) - \sin(x))\, F(dx) \\
&= \frac{1}{2\sigma^2} \int_{(-\pi,\pi]} \frac{\sin((j+1)x)}{\sin(x)}\, F(dx) + \frac{1}{2\sigma^2} \int_{(-\pi,\pi]} \frac{\sin(jx)}{\sin(x)}\, F(dx) - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ďalej pre $n \geq 1$ platí

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2\sigma^2} \int_{(-\pi,\pi]} \frac{\sin((j+1)x)}{\sin(x)}\, F(dx) \\
&= \frac{1}{2\sigma^2} \int_{(-\pi,\pi]} \frac{1}{\sin(x)} \sum_{j=1}^{n-1} \sin((j+1)x)\, F(dx) \\
&= \frac{1}{4\sigma^2} \int_{(-\pi,\pi]} \frac{1}{\sin^2(x)} (\cos(x) + \cos(2x) - \cos(nx) - \cos((n+1)x))\, F(dx).
\end{aligned}$$

Analogicky môžeme písať

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2\sigma^2} \int_{(-\pi,\pi]} \frac{\sin(jx)}{\sin(x)}\, F(dx) \\
&= \frac{1}{4\sigma^2} \int_{(-\pi,\pi]} \frac{1}{\sin^2(x)} (1 + \cos(x) - \cos((n-1)x) - \cos(nx))\, F(dx).
\end{aligned}$$

Spolu so vzťahom (3.25) sme týmto získali vyjadrenie

$$\frac{VarS_n}{n} = a_{n-1} + 2a_n + a_{n+1} + o(1), \tag{3.28}$$

s koeficientami

$$a_n = \frac{1}{2n} \int_{(-\pi,\pi]} \frac{1 - \cos(nx)}{x^2}\, F(dx), n = 1, 2, \ldots. \tag{3.29}$$

Sme pripravení uviesť túto vetu.

Veta 3.24. Nech je X slabo stacionárny proces so spektrálnou distribučnou funkciou F a nech má F hustotu na intervale $(-\epsilon, \epsilon)$ pre nejaké $\epsilon > 0$ a nech táto hustota má verziu spojitú v počiatku, označme f. Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{VarS_n}{n} = 2\pi f(0).$$

Dôkaz: Predpokladajme, že F nemá atóm v π. Potom je

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2n}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\frac{1-\cos(nx)}{x^2}f(x)\,\mathrm{d}x + o(1) \\ &= \frac{f(0)}{n}\int_0^{\epsilon}\frac{1-\cos(nx)}{x^2}\,\mathrm{d}x + o(1) \\ &= f(0)\int_0^{n\epsilon}\frac{1-\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x + o(1) \\ &\to f(0)\int_0^{\infty}\frac{1-\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}f(0), \end{aligned}$$

pre $n \to \infty$. Tvrdenie vety vyplýva zo vzťahu (3.28). Nakoniec si uvedomme, že pridaním atómu v π sa rýchlosť rastu rozptylu S_n nezmení. $\square$

Práve dokázaná veta je dôvodom, prečo sa niekedy dlhá pamäť definuje pomocou podmienky, že proces má spektrálnu hustotu spojitú v počiatku. Všimnime si, že procesy s najviac lineárnym rastom rozptylu postupnosti čiastočných súčtov nevyžadujú podmienku spojitej spektrálnej hustoty v 0. Názornou ukážkou takéhoto procesu je proces so spektrálnou hustotou $f(x) = 1 + \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, $-\pi < x < \pi$.

Ako je to v prípade, keď $VarS_n$ rastie rýchlejšie ako lineárne? O tom hovorí nasledujúca veta.

Veta 3.25. Nech je X slabo stacionárny proces so spektrálnou distribučnou funkciou F a nech má F hustotu na intervale $(-\epsilon, \epsilon)$ pre nejaké $\epsilon > 0$ a táto hustota má verziu f takú, že

$$f(x) = x^{-(1-d)}L_1(x),$$

$0 < x < \epsilon$, L_1 je slowly varying v počiatku a $0 < d < 1$. Potom platí

$$VarS_n \sim \frac{4\Gamma(d)\cos\left(\frac{\pi d}{2}\right)}{(1-d)(2-d)}L_1\left(\frac{1}{n}\right)n^{2-d}, n \to \infty. \tag{3.30}$$

Dôkaz: Podobne ako v dôkaze vety (3.24) stačí uvažovať spektrálne distribučné funkcie bez atómu v bode π. Budeme vychádzať zo vzťahov (3.28) a (3.29). Pre a_n platí

$$\begin{aligned} a_n \sim \frac{1}{n}\int_0^{\epsilon}\frac{1-\cos(nx)}{x^2}f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{n}\int_0^{\epsilon}\frac{1-\cos(nx)}{x^{3-d}}L_1(x)\,\mathrm{d}x \\ &= n^{1-d}\int_0^{n\epsilon}\frac{1-\cos(x)}{x^{3-d}}L_1\left(\frac{x}{n}\right)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Podľa vety (3.21) existuje konštanta $C > 0$ taká, že

$$\frac{L_1\left(\frac{x}{n}\right)}{L_1\left(\frac{1}{n}\right)} \leq Cx^{-\frac{d}{2}}$$

pre $n \geq 1$ a $0 < x < n\epsilon$. Potom podľa Lebesgueovej vety o zámene limity a integrálu môžeme písať

$$\begin{aligned} a_n &\sim n^{1-d} L_1\left(\frac{1}{n}\right) \int_0^\infty \frac{1-\cos(x)}{x^{3-d}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\Gamma(d)\cos\left(\frac{\pi d}{2}\right)}{(1-d)(2-d)} L_1\left(\frac{1}{n}\right) n^{1-d} \end{aligned}$$

pre $n \to \infty$. Spolu so vzťahom (3.28) dostávame tvrdenie vety. $\square$

Výsledky (3.23) a (3.30) hovoria oba o asymptotike $VarS_n$. Ich porovnaním vidno, že pre $0 < d < 1$ vedú predpoklady

$$\rho_n \sim n^{-d} L(n), \text{pre } n \to \infty \tag{3.31}$$

a existencia spektrálnej hustoty f na okolí nuly s

$$f(x) \sim x^{-(1-d)} L\left(\frac{1}{x}\right) \frac{\sigma^2}{2\Gamma(d)\cos\left(\frac{\pi d}{2}\right)} \text{ pre } x \to 0_+ \tag{3.32}$$

k rovnakému asymptotickému správaniu rozptylu postupnosti čiastočných súčtov. Overíme to pre proces frakcionálneho Gaussovho šumu. Jeho autokovariančná funkcia je daná bodom 4 vety (1.15) a podľa vzťahu (3.27) platí

$$f(x) = \frac{\sigma^2}{2} C(H)(1-\cos(x)) \sum_{j=-\infty}^{\infty} |2\pi j + x|^{-(2H+1)}, \tag{3.33}$$

kde koeficient $C(H)$ je

$$C(H) = \frac{2H(1-2H)}{\Gamma(2-2H)} \frac{1}{\cos(\pi H)},$$

$H \neq \frac{1}{2}$. Môžeme písať

$$\begin{aligned}
\int_{(-\pi,\pi]} \cos(nx) f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{\sigma^2}{2} C(H) \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{-(2H+1)} (1-\cos(x)) \cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\sigma^2}{2} C(H) \int_0^{\infty} x^{-(2H+1)} (1-\cos((n+1)x))\,\mathrm{d}x \\
&+ \frac{\sigma^2}{2} C(H) \left[\int_0^{\infty} x^{-(2H+1)} (1-\cos((n-1)x))\,\mathrm{d}x - 2\int_0^{\infty} x^{-(2H+1)} (1-\cos(nx))\,\mathrm{d}x \right] \\
&= \frac{\sigma^2}{2} C(H) \int_0^{\infty} x^{-(2H+1)} (1-\cos(x))\,\mathrm{d}x \left[(n+1)^{2H} + |n-1|^{2H} - 2n^{2H} \right] \\
&= \frac{\sigma^2}{2} \left[(n+1)^{2H} + |n-1|^{2H} - 2n^{2H} \right],
\end{aligned}$$

čím sme overili platnosť (3.33). Z tohto vyjadrenia vidno, že pre $\frac{1}{2} < H < 1$

$$f(x) \sim \frac{\sigma^2}{4} C(H) x^{-(2H-1)} \text{ pre } x \to 0_+.$$

Predpoklady vety (3.25) možno overiť z asymptotiky autokorelačnej funkcie z vety (1.15), bod 6. Pre autokovariančnú funkciu a spektrálnu hustotu frakcionálneho Gaussovho šumu vzťahy (3.31) a (3.32) skutočne platia.
O každej z podmienok (3.23), (3.31), (3.32) sa dá uvažovať pri definícii dlhej pamäti. O tom, že nie sú ekvivalentné, svedčí príklad procesu so spektrálnou hustotou v okolí nuly s predpisom

$$f(x) = (1 + \cos\left(\frac{1}{x}\right)) x^{-(1-d)} L_1\left(\frac{1}{x}\right) \frac{\sigma^2}{2\Gamma(d)\cos\left(\frac{\pi d}{2}\right)}.$$

Táto funkcia nie je regularly varying, zatiaľ čo podmienku (3.23) spĺňa.

Skonštruujme proces, ktorý bude spĺňať (3.32), ale (3.31) platiť nebude. Nech je $0 < \epsilon < \frac{\pi}{2}$ a funkcia g je kladná integrovateľná na $(0, \epsilon)$. Položme

$$f(x) = g(|x|)\mathbb{I}_{0<|x|<\epsilon} + g(|\pi - x|)\mathbb{I}_{\pi-\epsilon<|x|<\pi},$$

kde $x \in (-\pi, \pi)$. Pre takto definovanú spektrálnu hustotu f platí (3.32). Platí

$$\begin{aligned}
R_n &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \cos(nx) g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \cos(n(\pi - x)) g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= (1 + (-1)^n) R'_n,
\end{aligned}$$

kde je $R_n' = \int \cos(nx) g(x)\,\mathrm{d}x$. Autokovariančná funkcia tohto procesu nespĺňa (3.31), pretože $R_n = 0$ pre n nepárne.

Konštrukciu opačného prípadu začneme so spektrálnou hustotou g spĺňajúcou (3.32) a autokovariančnou funkciou ako v (3.31). Takýto proces existuje, to vieme z príkladu frakcionálneho Gaussovho šumu. Zostrojíme funkciu g_1 nezápornú, spojitú a integrovateľnú na $(0,\pi)$ takú, že budú platiť podmienky

$$\limsup_{x\to 0+} x^2 g_1(x) \geq 0, \tag{3.34}$$

$$\int_0^{\pi} \cos(nx) g_1(x)\,\mathrm{d}x = o\left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) g(x)\,\mathrm{d}x\right), n \to \infty. \tag{3.35}$$

Keď definujeme f ako $f(x) = g(x) + g_1(|x|)$ pre $x \in (-\pi,\pi)$, tak f nebude spĺňať (3.32), vylučuje to (3.34). Vďaka platnosti (3.31) pre g a podmienke (3.35) bude pre f platiť (3.31). Zostáva zostrojiť vhodnú funkciu g_1. Položme

$$g_1(x) = 2^{2j} \text{ pre } \frac{1}{2^j} \leq x \leq \frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^{2j}}, \tag{3.36}$$

kde $j = 0, 1, \ldots$. Všimnime si, že v ľavom krajnom bode intervalu, tj $x = 2^{-j}$, má g_1 hodnotu $g_1(x) = x^{-2}$. To zabezpečuje, že (3.34) platí. Ďalej platí

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{\pi} \cos(nx) g_1(x)\,\mathrm{d}x\right| &\leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{2j} \left|\int_{2^{-j}}^{2^{-j}+2^{-2j}} \cos(nx)\,\mathrm{d}x\right| \\
&= \frac{2}{n}\sum_{j=0}^{\infty} 2^{2j} \left|\sin\left(\frac{n}{2}2^{-2j}\right)\cos\left(n(2^{-j}+2^{-2j-1})\right)\right| \\
&\leq \frac{2}{n}\sum_{j=0}^{\infty} 2^{2j} \left|\sin\left(\frac{n}{2}2^{-2j}\right)\right| \\
&= \frac{2}{n}\sum_{j\leq \log_2\log_2 n} 2^{2j} \left|\sin\left(\frac{n}{2}2^{-2j}\right)\right| + \frac{2}{n}\sum_{j>\log_2\log_2 n} 2^{2j} \left|\sin\left(\frac{n}{2}2^{-2j}\right)\right|.
\end{aligned}$$

Sčítance z posledného riadka môžeme zhora ohraničiť ako

$$\begin{aligned}
\frac{2}{n}\sum_{j\leq \log_2\log_2 n} 2^{2j} \left|\sin\left(\frac{n}{2}2^{-2j}\right)\right| &\leq \frac{2}{n}\sum_{j\leq \log_2\log_2 n} 2^{2j} \\
&\leq \frac{c_1}{n}(\log_2 n)^2
\end{aligned}$$

pre nejaké $0 < c_1 < \infty$, a

$$\begin{aligned} \frac{2}{n} \sum_{j > \log_2 \log_2 n} 2^{2j} \left| \sin\left(\frac{n}{2} 2^{-2j}\right) \right| &\leq \frac{2}{n} \sum_{j > \log_2 \log_2 n} 2^{2j} \left(\frac{n}{2} 2^{-2j}\right) \\ &\leq \frac{c_2}{n} (\log_2 n)^2 \end{aligned}$$

pre nejaké $0 < c_2 < \infty$. Z práve ukázaného vyplýva (3.35). Na záver si uvedomme, že g_1 definovaná v (3.36) nie je spojitá, čo sa však dá napraviť vhodným dodefinovaním medzi skokmi.
Práve sme videli, že podmienky (3.31) a (3.32) nie sú ekvivalentné. Uveďme ešte znenie vety, ktorá hovorí o prípade, kedy ekvivalentné sú.

Veta 3.26. Nech je X slabo stacionárny proces so spektrálnou hustotou f a autokovariančnou funkciou ρ.

- Ak pre f platí (3.31) a L patrí do Zygmundovej triedy, tak pre ρ platí (3.32).
- Ak ρ spĺňa (3.32) a L patrí do Zygmundovej triedy, tak pre f platí (3.31).

Podobne ako pri definovaní dlhej pamäti pomocou pojmov ergodickej teórie a mixingu, aj pri definícii dlhej pamäti využitím momentov a spektrálnych vlastností by sme intuitívne čakali, že pre proces X stacionárny s konečným rozptylom a bijekciu g, $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $Eg(X_i)^2 < \infty$, a proces $Y_n = g(X_n)$, $n = 0, 1, \ldots$, budeme pozorovať rovnaký typ dlhej pamäti. Skutočnosť je však iná, ako čoskoro ukážeme pre dlhú pamäť definovanú pomocou vzťahu (3.31). Využijeme pri tom Hermitovské polynómy.

Definícia 3.27. Nech je n celé nezáporné a x reálne číslo. Definujme n-tý Hermitovský polynóm $H_n(x)$ predpisom

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Ak označíme hustotu normovaného normálneho rozdelenia φ a $\varphi^{(k)}$ jej k-tu deriváciu podľa x, môžeme $H_n(x)$ zapísať ako

$$H_n(x) = (-1)^n \frac{\varphi^{(n)}(x)}{\varphi(x)}, \; n = 0, 1, \ldots.$$

Derivovaním podľa x dostávame

$$\begin{aligned} H_n'(x) &= (-1)^n \left(\frac{\varphi^{(n)}(x)}{\varphi(x)} - \frac{\varphi^{(n)}(x)\varphi'(x)}{\varphi^2(x)} \right) \\ &= -H_{n+1}(x) + xH_n(x), \end{aligned}$$

odkiaľ získavame vzťah

$$H_{n+1}(x) = xH_n(x) - H_n'(x). \tag{3.37}$$

Ďalej platí $H_n'(x) = nH_{n-1}(x)$, čo sa dá jednoducho dokázať matematickou indukciou použitím rozvoja (3.37). Potom platí

$$H_{n+1}(x) = xH_n(x) - nH_{n-1}(x). \tag{3.38}$$

Pretože $H_0(x) = 1$, vidíme, že stupeň polynómu $H_n(x)$ je n. Vzťah (3.38) možno použiť pri dôkaze vyjadrenia H_n ako

$$H_n(x) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n!}{m!(n-2m)!}(-2)^{-m}x^{n-2m}.$$

Ak uvažujeme veličinu X so štandardným normálnym rozdelením, tak

$$EH_n(X) = 0 \text{ pre } n \geq 1 \text{ a } VarH_n(X) = n!.$$

Ak majú veličiny X, Y združené normálne rozdelenie s nulovou strednou hodnotou, jednotkovou variančnou maticou, koreláciou ρ, tak

$$EH_n(X)H_m(Y) = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \rho n! & n = m \end{cases}. \tag{3.39}$$

Dôkaz tohto tvrdenia možno nájsť v Nualart (2006), strana 5, respektíve 6, rovnako ako aj dôkaz nasledujúceho. Ďalšia užitočná vlastnosť Hermitovských polynómov je, že tvoria ortogonálnu bázu priestoru $L^2(\mathbb{R}, \mu_G)$, kde μ_G označuje mieru veličiny s normovaným normálnym rozdelením. Vďaka tomu je pre X štandardne normálne rozdelenú a funkciu g takú, že $Eg(X)^2 < \infty$ možné zapísať $g(X)$ Hermitovským rozvojom ako

$$g(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} H_n(X) \tag{3.40}$$

s koeficientami $a_n = E(H_n(X)g(X))$. Táto suma konverguje v L^2 a najnižšie $n \geq 1$ s $a_n \neq 0$ sa nazýva Hermitovský stupeň funkcie g. Teraz sme pripravení sa vrátiť ku konštrukcii príkladu, kde zachovanie dlhej pamäti definovanej pomocou (3.31) zlyhá pri bijektívnej transformácii.

Nech je X stacionárny gaussovský proces s nulovou strednou hodnotou, jednotkovou variančnou maticou a autokorelačnou funkciou ρ_n spĺňajúcou (3.31), teda $\rho_n \sim n^{-d}L(n)$, $d \in (0,1)$. Nech je funkcia $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ merateľná taká, že $Eg(X_i)^2 < \infty$. Definujme stacionárny proces Y predpisom $Y_n = g(X_n)$ pre $n = 0, 1, \ldots$. Očakávame, že proces X si bude pamätať aspoň toľko, čo proces Y, dokonca pre g bijektívnu čakáme, že budú mať procesy X, Y rovnaký "typ" pamäti. Nech je k Hermitovský stupeň g. Zostrojme bijekciu g takú, že $kd > 1$.

Nech je $a > 0$ také, že

$$ae^{-a} \int_a^\infty x e^x e^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x = \int_0^a x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x.$$

Položme

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{a}x & 0 \leq x < a \\ e^{x-a} & x \geq a \end{cases}$$

a definujme $g(x) = -g(-x)$ pre $x < 0$. Takto definovaná g je merateľná, nepárna, bijektívna a $Eg(X)^2 < \infty$. Vďaka vhodnej voľbe a navyše platí $E(H_n(X)g(X)) = 0$ pre $n = 1$. Platí to aj pre $n = 2$, pretože g je nepárna. Teda g má Hermitovský stupeň $k \geq 3$. Potom pre $d > \frac{1}{3}$ je $kd > 1$. Z rozvoja (3.40), konvergencie v L^2 a vzťahu (3.39) pre autokovariančnú funkciu $R^{(Y)}$ procesu Y, platí

$$R^{(Y)} = \sum_{n=k}^{\infty} a_n^2 \rho_j^n \sim ak^2 \rho_j^k \text{ pre } j \to \infty.$$

Ak je g bijekcia a $kd > 1$, tak sa autokorelačná funkcia procesu Y je spočítateľná, zatiaľ čo autokorelačná funkcia procesu X nie je.

Záver

V práci sme predstavili viacero možností ako definovať long range dependence.

V druhej kapitole sme pojmom ergodicita rozdelili stacionárne náhodné procesy s konečnou pamäťou od tých s nekonečnou. Definícia dlhej pamäti mixingom sa neujala, pretože zlyhala na modeli frakcionálneho Gaussovského šumu, ktorý sa dobre osvedčil v motivačnej úlohe. Silný mixing už týmto nedostatkom netrpí, avšak pre platnosť centrálnej limitnej vety sa vyžaduje aj podmienka na vyšší než druhý moment procesu. Preto môže byť výhodné a užitočné označiť za procesy s krátkou pamäťou tie, ktoré sú prepletene silne mixujúce. Devízou tohto prístupu k dlhej pamäti je, že sa typ pamäti zachová pod bijektívnou transformáciou. Naopak, pri zmene agregačnej funkcie zo sumy na inú sa nemusia procesy s krátkou pamäťou správať ako postupnosti nezávislých rovnako rozdelených veličín. Slabou stránkou je aj overiteľnosť týchto charakteristík, ktorá je jednoduchá v prípade gaussovských procesov, ale obecne je náročná.

Ďalší spôsob uchopenia long range dependence predstavuje prístup pomocou druhých momentov. Na príklade centrovaného stacionárneho procesu sme videli, že správanie rozptylu postupnosti čiastočných súčtov súvisí s rozpadom autokorelačnej funkcie. Práve na ňu sme kládli väčšinu podmienok. Veľkej obľube sa teší kritérium $\sum_{n=0}^{\infty} |\rho_n| < \infty$. Ďalšími príkladmi takejto podmienky sú predpoklad autokorelácie tvaru $\rho_n = n^{-d}L(n)$ s $L(n)$ slowly varying a $0 \leq d < 1$, či $\lim_{n\to\infty} \frac{VarS_n}{n} < \infty$. Poslednú podmienku dáva do súvislosti so spektrálnou hustotou veta (3.24), konkrétne s jej správaním v počiatku. Diskutované sú vzájomné vzťahy medzi podmienkami na príkladoch konkrétnych procesov a sú overené pre model frakcionálneho Gaussovského šumu. Na predpoklade $\rho_n \sim n^{-d}L(n)$ pre $n \to \infty$, $d \in (0,1)$ sme demonštrovali nedostatok tohto prístupu, a to nezachovanie typu pamäti pri bijektívnej transformácii procesu. Veľkou výhodou však stále je jednoduchosť overenia týchto kritérií.

Zachovanie, respektíve nezachovanie, typu pamäti pri transformovaní procesu jasne ukazuje, nakoľko rôzne sú uvažované pohľady na long range memory. V prípade gaussovských procesov môže byť vhodnejšie využiť momentové charakteristiky, keďže ich korelácia nesie plnú informáciu o závislostnej štruktúre procesu.

Literatúra

Bingham, N.C., Goldie, C.M., Teugels, J.L.: *Regular variation*, Cambridge University Press, Cambridge 1989.

Bradley, R.C.: *Equivalent mixing conditions for random fields*, The Annals of Probability, Volume 21, Number 4, 1993, str. 1921-1926.

Bradley, R.C.: *On the growth of variances in a central limit theorem for strongly mixing sequences*, Bernoulli News, Volume 5, Number 1, 1998, str. 67-80.

Bradley, R.C.: *Introduction to Strong Mixing Conditions, Volume 1*, Kendrick Press, Utah 2007.

Cornfeld, I.P., Fomin, S.V., Sinai, Ya.G.: *Ergodic Theory*, Springer, New York 1982.

Embrechts, P., Maejima, M.: *Selfsimilar Processes*, Princeton University Press, Oxford 2002.

Merlevède, F., Peligrad, M., Utev, S.: *Recent advances in invariance principles for stationary sequences*, Probability Surveys, Volume 3, 2006, str. 1-36.

Nualart, D.: *The Malliavin Calculus and Related Topics*, Springer, Berlin 2006.

Rosenblatt, M.: *Central limit theorem for stationary processes*, Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume 2, 1972, str. 551–561
Peligrad, M.: *Maximum of partial sums and an invariance principle for a class of weak dependent random variables*, Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 126, Number 4, 1998, str. 1181-1189.

Samorodnitsky, G.: *Long Range Dependence*, Foundations and Trends in Stochastic Systems, Volume 1, Issue 3, str. 163-257, 2006

Silva, C.E.: *Invitation to Ergodic Theory*, American Mathematical Society, United States of America 2008.

Stroock, D.W., Varadhan, S.R.S.: *Multidimensional Diffusion Processes*, Springer-Verlag, Berlin 1979.

Taqqu, M.S.: *Fractional Brownian Motion and Long-Range Dependence*, Theory and Applications of Long-Range Dependence, Birkhäuser, Boston 2003, str. 5-38.