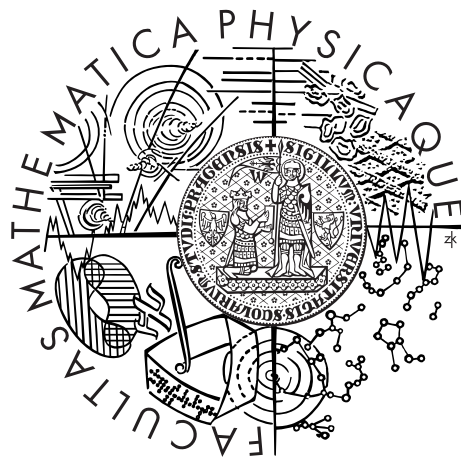


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

# DIPLOMOVÁ PRÁCE



Stanislava Benešová

## DES modelování turbulentního proudění

Katedra meteorologie a ochrany prostředí

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Josef Brechler, CSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Matematické modelování ve fyzice a technice

Praha 2014

Ráda bych touto cestou poděkovala doc. RNDr. Josefu Brechlerovi, CSc. za jeho rady, podnětné připomínky a věnovaný čas při vedení této diplomové práce a také prof. RNDr. Zbyňku Jaňourovi, DrSc. za jím poskytnuté přednášky a konzultace ohledně teorie turbulentního proudění.

Dále bych chtěla poděkovat Mgr. Vladimíru Fukovi, Ing. Petru Bauerovi, Ph.d. a Ing. Radku Mácovi za jejich rady ohledně numerické části této práce.

Nakonec děkuji svým rodičům a přátelům za jejich podporu během celého mého studia.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 30. 7. 2014

Stanislava Benešová

**Název práce:** DES modelování turbulentního proudění

**Autor:** Stanislava Benešová

**Katedra:** Katedra meteorologie a ochrany prostředí

**Vedoucí diplomové práce:** doc. RNDr. Josef Brechler, CSc., Katedra meteorologie a ochrany prostředí

**Abstrakt:** Diplomová práce se zabývá studiem hybridních RANS/LES metod pro modelování turbulentního proudění se zaměřením na metodu DES a její modifikace. V teoretické části práce se zaměřujeme na popis turbulentního proudění a klasických metod pro jeho modelování. Dále jsou popsány hybridní RANS/LES metody, jejich princip a kategorie. Nakonec je podrobně popsána metoda DES společně s jejím vylepšením v podobě DDES a IDDES. Praktická část práce se věnuje testování metod DES a DDES na benchmarkových úlohách. Je zde popsán používaný software OpenFOAM a numerické metody použité k diskretizaci rovnic, část je věnována generování výpočetní sítě. Metody DES a DDES jsou testovány na dvou úlohách: obtékání hladké desky s nulovým tlakovým gradientem a proudění v kanále se skokovým rozšířením. Výsledky simulace jsou porovnány s experimentálními daty, důraz byl kladen na dobrou modelaci rychlostního profilu v blízkosti stěny, chování turbulentní viskozity a koeficientu napětí.

**Klíčová slova:** turbulentní proudění, hybridní RANS/LES metody, Detached Eddy Simulation

**Title:** DES modeling of turbulent flow

**Author:** Stanislava Benešová

**Department:** Department of Meteorology and Environment Protection

**Supervisor:** doc. RNDr. Josef Brechler, CSc., Department of Meteorology and Environment Protection

**Abstract:** This thesis deals with the study of hybrid RANS/LES methods for modeling of turbulent flow with a focus on the DES method and its modifications. The theoretical part focuses on the description of turbulent flow and classical methods for its modeling. The following describes the hybrid RANS/LES methods, their principles and categories. Finally, the DES method is described in detail together with its improvement in form of DDES and IDDES methods. The practical part is devoted to the testing of DES and DDES on benchmark problems. We describe here used software OpenFOAM and numerical methods used to discretize the equations. One part is devoted to grid generation. The DES and the DDES methods are tested on two benchmarks: flat plate with zero pressure gradient and backward facing step. The simulation results are compared with experimental data, with a focus on good modeling of the velocity profile near wall, turbulent viscosity and skin friction coefficient.

**Keywords:** turbulent flow, hybrid RANS/LES methods, Detached Eddy Simulation

# Obsah

<b>Seznam použitých zkratk</b>	<b>3</b>
<b>Úvod</b>	<b>4</b>
<b>1 Základní pojmy</b>	<b>6</b>
1.1 Turbulentní proudění . . . . .	6
1.2 Metody řešení turbulentní proudění . . . . .	9
1.2.1 Direct Numerical Simulation . . . . .	9
1.2.2 Reynolds Averaged Navier-Stokes . . . . .	10
1.2.3 Příklady RANS modelů . . . . .	11
1.2.4 Large Eddy Simulation . . . . .	12
1.2.5 Příklady LES modelů . . . . .	13
<b>2 Hybridní RANS/LES metody</b>	<b>15</b>
2.1 Popis metod, klasifikace . . . . .	15
2.2 Unified modeling . . . . .	16
2.2.1 Blending models . . . . .	16
2.2.2 Interfacing models . . . . .	17
2.3 Segregated modeling . . . . .	19
<b>3 Metoda Detached Eddy Simulation a její modifikace</b>	<b>21</b>
3.1 Model Spalart-Allmaras . . . . .	21
3.2 Metoda Detached Eddy Simulation . . . . .	22
3.3 Delayed Detached Eddy Simulation . . . . .	22
3.4 Improved Delayed Detached Eddy Simulation . . . . .	23
3.4.1 Modifikace délkového měřítka . . . . .	23
3.4.2 Větev DDES . . . . .	24
3.4.3 Větev WMLES . . . . .	25
3.4.4 Propojení větví DDES a WMLES . . . . .	26
<b>4 Numerická realizace</b>	<b>27</b>
4.1 OpenFOAM . . . . .	27
4.1.1 Diskretizace rovnic . . . . .	29
4.2 Výpočetní síť . . . . .	31
<b>5 Testové úlohy</b>	<b>34</b>
5.1 Validace a verifikace . . . . .	34
5.2 Simulace . . . . .	37
5.2.1 Obtékání desky s nulovým tlakovým gradientem . . . . .	37

5.2.2 Proudění kanálem se skokovým rozšířením . . . . .	41
<b>Závěr</b>	<b>45</b>
<b>Příloha</b>	<b>46</b>
<b>Literatura</b>	<b>48</b>

# Seznam použitých zkratek

CFL - Courant-Friedrichs-Lewy  
DDES - Delayed Detached Eddy Simulation  
DES - Detached Eddy Simulation  
DNS - Direct Numerical Simulation  
DR - Departure Region  
ER - Euler Region  
FR - Focus Region  
FSM - Flow Simulaton Methodology  
GIS - Grid Induced Separation  
IDDES - Improved Delayed Detached Eddy Simulation  
LES - Large Eddy Simulation  
LR - LES Region  
MMS - Method of Manufactured Solutions  
MSD - Modeled Stress Depletion  
NS - Navier-Stokes  
OpenFOAM - Open Source Field Operation and Manipulation  
OR - Outer Region  
PDR - Parciální Diferenciální Rovnice  
PISO - Pressure Implicit with Splitting of Operators  
RANS - Reynolds Averaged Navier-Stokes  
RR - RANS Region  
SA - Spalart-Allmaras  
SGS - Subgrid-Scale  
SQA - Software Quality Assurance  
SST - Shear-Stress Transport  
TPITM - Temporal Partially-Integrated Transport Model  
VR - Viscous Region  
WMLES - Wall-Modeled Large Eddy Simulation

# Úvod

V meteorologii, medicíně, strojním inženýrství, dopravě a v mnoha dalších oblastech lidské činnosti se setkáváme s potřebou studovat a správně popsat chování turbulentního proudění tekutin. Díky rozvoji výpočetní techniky a matematické teorie lze mnohé z úloh, kde nás zajímá chování turbulence, počítačově simulovat. K tomuto účelu jsou nejčastěji používány metody Reynoldsovsky středovaných Navierových-Stokesových rovnic (RANS) a Simulace velkých vírů (LES).

Metoda RANS se používá všude tam, kde nám stačí přibližný popis turbulentního proudění, kde je modelována úloha s geometricky složitou oblastí nebo kde požadujeme rychlý výpočet. Pokud chceme získat přesnější výsledky simulace, detailnější popis turbulence a zachycení některých fyzikálních jevů v proudění, které metoda RANS není schopna modelovat, nabízí se nám metoda LES. Bohužel za vyšší přesnost se platí vyšší výpočetní náročností. Souvisí to s nutností používat jemnější síť a tím i menší časový krok. V případě geometricky složitého prostředí se výpočetní náročnost ještě zvyšuje, což je nevhodné pro praktické použití této metody, jelikož v praxi potřebujeme získat výsledky simulace v rozumné době. Existuje několik způsobů, jak snížit výpočetní náročnost LES a jedním z nich jsou i hybridní RANS/LES metody.

Tato práce si klade za cíl přiblížit čtenáři nový typ metod pro popis turbulentního proudění v podobě hybridních RANS/LES metod, podrobně popsat jednu z těchto metod, která je dnes hojně používána - konkrétně se jedná o metodu Detached Eddy Simulation (DES) - a tuto metodu otestovat na dvou benchmarkových úlohách.

První kapitola se věnuje vysvětlení základních pojmů týkajících se této práce jako jsou turbulentní proudění, metoda Direct Numerical Simulation (DNS) a metody RANS a LES. Je zde nastíněno, které faktory a jakým způsobem souvisí s výpočetní náročností. Metody RANS a LES jsou popsány podrobněji a jsou zde uvedeny konkrétní příklady modelů turbulence.

Ve druhé kapitole jsou představeny hybridní RANS/LES metody. V úvodu kapitoly je popsán základní princip fungování hybridních metod, zabýváme se otázkou jak lze propojit metody RANS a LES. Na základě způsobu propojení obou metod pak rozdělujeme hybridní metody do dvou kategorií - unified modeling a segregated modeling. Oba způsoby jsou popsány a v každé kategorii jsou uvedeny příklady modelů.

Třetí kapitola obsahuje podrobný popis metody DES. Nejprve je uveden RANS model Spalart-Allmaras, ze kterého je metoda odvozena. Dále jsou zde popsány modifikace metody DES, které byly navrženy pro odstranění jejích nedostatků.



Následuje praktická část práce, ve které se věnujeme implementaci metod DES a DDES a jejich testování na zvolených úlohách. Je představen software OpenFOAM, ve kterém je prováděna simulace, dále je popsána numerická diskretizace rovnic a je diskutován postup při navrhování výpočetní sítě. Část práce je věnována metodice pro hodnocení matematických modelů.

V poslední části jsou definovány testové úlohy - obtékání hladké desky s nulovým tlakovým gradientem a proudění v kanále se skokovým rozšířením - a předvedeny výsledky simulace. Výsledky jsou porovnávány s experimentálními daty a kriticky zhodnoceny na základě výše uvedené metodiky. Zároveň se snažíme zhodnotit, zda metoda DES odpovídá cílům kladeným na hybridní RANS/LES metody obecně - je dosahovaná přesnost podobná jako u LES metod a je výpočetní náročnost vyhovující pro praktické použití?

# Kapitola 1

## Základní pojmy

### 1.1 Turbulentní proudění

S turbulentním prouděním se setkáváme běžně - ať už v podobě tekoucí vody v řece, při proudění vzduchu kolem dopravních prostředků, při proudění krve v těle a pohybu vzduchu v plicích, při pozorování cigaretového kouře či v podobě mraků a proudění vzduchu v atmosféře. Šlo by jmenovat ještě mnoho příkladů, velká část proudění tekutin v přírodě i technice je totiž turbulentní. Přesto se jedná o jeden z posledních nedořešených problémů klasické fyziky.

Pro turbulentní proudění stále neexistuje žádná uspokojivá definice, můžeme jej však popsat jako:

- **nestálé, nepravidelné.**

Tyto vlastnosti jsou zřejmé z pozorování například již zmíněného cigaretového kouře.

- **obsahující pohyby široké škály měřítek.**

V turbulentním proudění lze sledovat vírové struktury různých velikostí, od šířky oblasti kde se proudění nachází, až po velmi malá měřítka, kdy se vír rozpadá a jeho kinetická energie se přemění v teplo.

- **vířivé a třídimenzionální.**

Vířivost je definována jako  $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$ , kde  $\mathbf{u}$  je rychlostní pole. Ve většině bodů proudící tekutiny je vířivost nenulová, pole vířivosti je nehomogenní, třídimenzionální a s časem se mění.

- **spojené s vysokými hodnotami Reynoldsova čísla.**

Reynoldsovo číslo ( $Re$ ) udává poměr mezi setrvačnými a vazkými silami v tekutině, tedy  $Re = UL/\nu$ , kde  $U$  a  $L$  je charakteristická rychlost a charakteristická délka, a  $\nu$  je kinematická viskozita tekutiny. V případě vysokého  $Re$  čísla není setrvačná síla proudění tlumena vazkostí tekutiny a může se rozvinout turbulence. V případě nízkého  $Re$  čísla naopak viskozita převládá a proudění přejde do laminárního režimu. Laminární proudění je takové, při kterém jsou proudnice rovnoběžné. Přechod od laminárního proudění k turbulentnímu je spojen s překročením kritické hodnoty Reynoldsova čísla značené  $Re_{kr}$ . Tato hodnota není stejná pro všechny typy úloh. Příkladem

kritického  $Re$  čísla je  $Re_{kr} = 2320$  pro proudění v trubici s kruhovým průřezem.

- **difuzivní.**

V turbulentním proudění dochází k promíchávání transportovaných veličin ve větší míře než u laminárního proudění.

- **disipativní.**

Kinetická energie proudění je vlivem viskozity přeměňována ve vnitřní energii tekutiny. Bez vnějšího zdroje energie turbulentní proudění zaniká.

- **spojité.**

Charakteristické pohyby turbulentního proudění jsou vyššího řádu než je střední dráha molekul a tak můžeme k turbulentnímu proudění přistupovat jako ke spojitému problému.

- **obsahující koherentní struktury.**

Koherentní struktury jsou struktury, které navzdory chaotické povaze turbulentního proudění vykazují jistou pravidelnost. Jako příklad může sloužit známá vírová struktura za obtékaným tělesem nazývaná Kármánova cesta vírů.

Ještě dodejme, že v případě turbulence nejde o vlastnost tekutiny jako takové, ale o vlastnost proudění.

Vraťme se k první vlastnosti, totiž že turbulentní proudění je nestálé a nepravidelné. Někdy se můžeme setkat s tím, že turbulentní proudění je nevhodně označeno jako náhodné. Představme si experiment, ve kterém necháme proudit tekutinu v rovné trubici takovou rychlostí, abychom dosáhli turbulentního režimu. Následně budeme měřit rychlost tekutiny ve vybraném místě trubice a ve vybraném časovém okamžiku. Ačkoli opakujeme experiment se stejnými počátečními i okrajovými podmínkami, naměřené hodnoty rychlosti se od sebe budou lišit. Rychlost se chová jako náhodná veličina, nelze však na základě tohoto pozorování tvrdit, že i turbulentní proudění je náhodné. Turbulentní proudění lze popsat Navierovými-Stokesovými rovnicemi, což spadá do deterministického náhledu fyziky, tedy že pokud známe rovnice popisující vývoj systému a pokud známe počáteční a okrajové podmínky pro veličiny vyskytující se v rovnicích, pak dokážeme přesně určit chování systému v kterémkoli časovém okamžiku. Jak to, že tedy při měření rychlosti v našem experimentu získáváme různé hodnoty rychlosti?

Důvod je takový, že zaprvé, nikdy nedokážeme nastavit přesně ty samé okrajové a počáteční podmínky a zadruhé, turbulentní proudění je citlivé na změny v těchto podmínkách. V případě fyzikálního experimentu mohou malé změny v okrajových a počátečních podmínkách vzniknout například díky nepatrným otřesům aparátu nebo díky mikroskopickým změnám na povrchu obtékaného tělesa. I při sebevětší snaze tyto změny nelze eliminovat. Citlivost turbulentního proudění na tyto malé změny lze vysvětlit z pohledu studia dynamických systémů a teorie chaosu, viz. Moon (1992).

Přesto je turbulentní proudění studováno i ze statistického hlediska, kdy se k proměnným jako je rychlost, tlak či teplota chováme jako k náhodným veličinám. Tento pohled na turbulentní proudění je historicky starší a i přes fyzikální nepřesnost přinesl mnoho důležitých výsledků o chování a vlastnostech turbulentního proudění.

Dále se zabýváme ještě druhou vlastností, tedy že turbulentní proudění obsahuje pohyby velké škály měřítek. Tyto pohyby si lze představit jako sadu vírů různých velikostí, které spolu navzájem interagují. Vír lze popsat jako pohyb tekutiny v kruhu nebo ve spirále, velký vír může obsahovat i menší víry. Mějme proudění s vysokým Reynoldsovým číslem,  $Re = UL/\nu$ . Největší víry mohou dosahovat velikosti srovnatelné s charakteristickou délkou  $L$ , nejmenší víry jsou charakterizované Kolmogorovým délkovým měřítkem  $\eta$ , které bude odvozeno níže.

S pohybem vírů souvisí i přenos kinetické energie v tekutině. Richardson (1922) představil koncept energetické kaskády, kdy největší víry nesoucí nejvíce kinetické energie jsou nestabilní a rozpadají se v menší víry, kterým předávají svou energii. Ty se následně rozpadají v menší a menší víry, dokud kinetická energie vírů nedisipuje ve vnitřní energii tekutiny.

Jak tyto nejmenší víry vypadají a jak se chovají shrnul ve svých třech hypotézách Kolmogorov (1941). Turbulentní proudění je většinou anisotropické, což je důsledek působení geometrie oblasti na proudění. První Kolmogorovova hypotéza říká, že pro dostatečně velká  $Re$  čísla jsou nejmenší pohyby statisticky isotropní. Podle jeho druhé hypotézy pak tyto pohyby mají univerzální tvar jednoznačně určený viskozitou tekutiny  $\nu$  a mírou disipace  $\varepsilon$ . Takto jsou definována Kolmogorovova měřítka nejmenších pohybů:

$$\begin{aligned}\eta &= \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4} && \text{-délkové měřítko,} \\ u_\eta &= (\varepsilon\nu)^{1/4} && \text{-rychlostní měřítko,} \\ \tau_\eta &= \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2} && \text{-časové měřítko.}\end{aligned}$$

Pokud si vyjádříme Reynoldsovo číslo pro pohyby malých měřítek, pak dostaneme, že  $Re_\eta = \frac{\eta u_\eta}{\nu} = 1$ . To nám říká, že molekulární viskozita je vzhledem k setrvačným silám nezanedbatelná a to vede k disipaci.

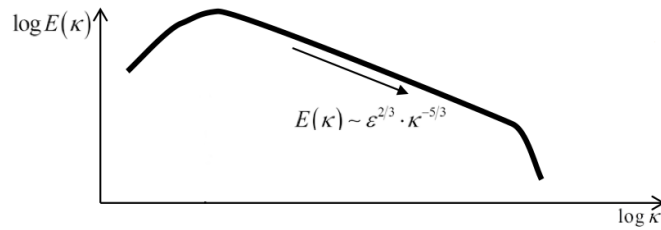
Třetí Kolmogorovova hypotéza se týká pohybů středního měřítka, které jsou velké ve srovnání s Kolmogorovovým měřítkem  $\eta$ , ale jsou malé ve srovnání s pohyby největších měřítek. Tato Kolmogorovova hypotéza říká, že pohyby středních měřítek při dostatečně vysokém  $Re$  čísle lze univerzálně a jednoznačně popsat pomocí míry disipace  $\varepsilon$ , nezávisle na viskozitě tekutiny  $\nu$ .

Na základě těchto hypotéz lze odvodit tvar energetického spektra  $E(k)$  turbulentního proudění pro pohyby středního měřítka:

$$E(k) = C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3},$$

kde  $k$  je vlnové číslo související s délkovým měřítkem pohybů  $l$  vztahem  $k = 2\pi/l$  a  $C$  je univerzální konstanta. Tvar energetického spektra si lze prohlédnout na obrázku 1.1.

Další vlastnosti turbulentního proudění a jeho popis lze nalézt například v knize Pope (2000).



Obrázek 1.1: Teoretický tvar energetického spektra.

## 1.2 Metody řešící turbulentní proudění

V této sekci si představíme klasické metody pro hledání numerického řešení turbulentního proudění.

K popisu turbulentního proudění slouží Navierovy-Stokesovy rovnice (NS). V celé práci budeme pro jednoduchost používat NS rovnice pro viskózní, nestlačitelnou Newtonovskou tekutinu s konstantní hustotou, bez vlivu vnějších sil. Tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0, \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}, \end{aligned}$$

kde  $u_i$  reprezentuje  $i$ -tou složku rychlosti,  $p$  je tlak,  $\rho$  je konstantní hustota a  $\nu$  je kinematická viskozita. V zápisu je použita Einsteinova sumační konvence, tedy pokud se v nějakém členu objevuje stejný index dvakrát, znamená to součet přes všechny hodnoty indexu, v našem případě od 1 do 3. První rovnice reprezentuje zákon zachování hmotnosti a druhá rovnice reprezentuje zákon zachování hybnosti. Odvození těchto rovnic lze nalézt např. v knize Ferziger et al. (1997).

Hledání řešení odpovídá nalezení rychlostního pole a tlaku splňující rovnice a odpovídající zadaným okrajovým a počátečním podmínkám. V případě NS rovnic nemáme teoretickou znalost, za jakých podmínek řešení existuje ani zda takové řešení bude jednoznačné. To je dobré si uvědomit při interpretaci získaných výsledků simulace proudění.

### 1.2.1 Direct Numerical Simulation

Metoda Direct Numerical Simulation (DNS) neboli metoda přímé simulace řeší NS rovnice dostupnými numerickými metodami přímo bez použití turbulentního modelu. To znamená, že řešení rovnic musí obsáhnout pohyby všech měřítek. Největší vírové struktury mají velikost danou geometrií modelované oblasti, velikost přibližně odpovídá charakteristickému měřítku úlohy  $L$ . Aby byla simulována veškerá kinetická energie, musí být krok sítě srovnatelný s Kolmogorovovým měřítkem  $\eta$ . Pro homogenní isotropickou turbulenci je pak vhodný počet uzlů sítě v jedné dimenzi roven  $L/\eta$  a dá se ukázat, že  $L/\eta \approx Re^{3/4}$ . Ve třech dimenzích je pak počet uzlů sítě přibližně  $Re^{9/4}$ . Je zřejmé, že výpočetní náročnost a nároky na paměť počítače jsou při použití metody DNS vysoké, pro běžné výpočty je metoda prakticky nepoužitelná.

Výsledky metody DNS však obsahují detailní informace o proudění, ekvivalentní s daty získanými pomocí laboratorního experimentu. Ačkoli je metoda nevhodná pro průmyslové aplikace, je často využívána k teoretickému studiu turbulentního proudění.

## 1.2.2 Reynolds Averaged Navier-Stokes

Pro praktické účely se často používá metoda Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS). Je založena na statistickém pohledu na turbulentní proudění. Pracujeme s proměnnými jako s náhodnými veličinami a je zkoumán vývoj proudění jako vývoj středních hodnot těchto veličin. Příkladem střední hodnoty veličiny  $\phi$  může být vztah

$$\bar{\phi}(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_T \phi(x, t) dt, \quad (1.1)$$

kde  $T$  označuje časový interval, přes který integrujeme. Střední hodnota je pak nezávislá na čase. Pro statisticky nestálé proudění je vhodné získat střední hodnotu jako:

$$\bar{\phi}(x, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi_i(x, t), \quad (1.2)$$

kde sčítáme členy ze souboru  $N$  realizací téhož experimentu. Zde je pak střední hodnota proměnná v čase.

Obecně nevíme, jaké rozdělení pravděpodobnosti odpovídá náhodným veličinám popisujících turbulentní proudění a tím pádem také nevíme, jak získat jejich střední hodnotu. Reynolds navrhl pravidla, která by střední hodnota měla splňovat, aniž by se muselo specifikovat rozdělení pravděpodobnosti.

Buď  $f$  a  $g$  dvě náhodné veličiny a  $c$  libovolná konstanta. Každou náhodnou veličinu lze rozdělit na její střední hodnotu a fluktuace, tedy  $f = \bar{f} + f'$ , podobně pro  $g$ . Reynoldsova pravidla pak vypadají následovně:

$$\begin{aligned} \overline{f + g} &= \bar{f} + \bar{g}, \\ \overline{cf} &= c\bar{f}, \\ \bar{c} &= c, \\ \overline{\frac{\partial f}{\partial s}} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial s}, \\ \overline{f'g} &= \bar{f}'\bar{g}, \end{aligned}$$

kde  $s$  reprezentuje prostorovou nebo časovou proměnnou. Z těchto základních pravidel se pak dají odvodit další vztahy pro střední hodnoty:

$$\begin{aligned} \overline{\bar{f}} &= \bar{f}, \\ \overline{f'} &= 0, \\ \overline{\bar{f}\bar{g}} &= \bar{f}\bar{g}, \\ \overline{f'g} &= 0, \\ \overline{\frac{\partial f'}{\partial s}} &= 0. \end{aligned}$$

Lze si všimnout, že definice střední hodnoty z (1.1) a (1.2) splňují Reynoldsova pravidla.

Aplikujeme-li výše zmíněná pravidla na středování NS rovnic a vyjádříme rovnice pro střední hodnoty, získáme rovnice, které se nazývají Reynoldsovsky středované Navierovy-Stokesovy rovnice, dále jen RANS:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{u}_i)}{\partial x_i} &= 0, \\ \frac{\partial(\bar{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}^{RANS}}{\partial x_j}, \end{aligned}$$

kde poslední člen na pravé straně je odvozen ze vztahu

$$\overline{u_i u_j} = \overline{(\bar{u}_i + u'_i)(\bar{u}_j + u'_j)} = \bar{u}_i \bar{u}_j + \overline{u'_i u'_j},$$

a tedy

$$\tau_{ij}^{RANS} = -\overline{u'_i u'_j}.$$

Neznámá  $\tau_{ij}^{RANS}$  je složkou tenzoru, který se nazývá Reynoldsův tenzor napětí.

Člen  $\overline{u'_i u'_j}$  nelze vyjádřit pomocí ostatních již daných proměnných. Pokud bychom si vyjádřili z pohybových rovnic transportní rovnici pro  $\overline{u'_i u'_j}$ , získáme nový neznámý člen, tentokrát tenzor třetího řádu ve tvaru  $\overline{u'_i u'_j u'_k}$ . Pokud bychom dále chtěli vyjádřit transportní rovnici pro  $\overline{u'_i u'_j u'_k}$ , dostaneme nový člen ve tvaru tenzoru čtvrtého řádu a tak dále. Vždy znovu získáme neuzavřený systém rovnic a tento problém se nazývá problém uzávěru. Je tedy nutné odvozování rovnic v určité hladině zastavit a tenzor nejvyššího řádu aproximovat pomocí členů řádu nižšího nebo jiným způsobem. Nejčastěji se aproximuje člen druhého řádu, následující podkapitola uvádí základní principy této aproximace.

RANS rovnice popisují vývoj středních hodnot veličin spojených s prouděním a veškeré fluktuace reprezentované v rovnicích Reynoldsovým tenzorem napětí je nutné modelovat. Modelovat úspěšně veškeré fluktuace ovšem není možné a řešení rovnic dává jen velmi přibližné výsledky. Výhodou tohoto přístupu je možnost používat daleko hrubší sítě ve srovnání s DNS metodou a tím pádem i nižší výpočtová náročnost. Metodu RANS lze použít pro velmi vysoká Reynoldsova čísla a složité oblasti.

Tato metoda se nejčastěji používá v průmyslových aplikacích, slouží jako první pohled na vývoj proudění, pro zjišťování průměrné síly působící na překážku, jako rychlou možnost předpovědi dalšího vývoje a podobně.

### 1.2.3 Příklady RANS modelů

Klasickým způsobem, jak modelovat člen  $\tau_{ij}^{RANS}$ , je využití Boussinesquovy hypotézy o turbulentní viskozitě. Ta předpokládá, že Reynoldsova napětí jsou úměrná gradientům průměrované rychlosti, podobně jako u Newtonova zákona viskozity. Tedy lze psát

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k, \quad (1.3)$$

kde  $\nu_t$  je konstanta úměrnosti nazývaná turbulentní viskozita a  $k$  je turbulentní kinetická energie rovna

$$k = \frac{1}{2} (\overline{u'_k u'_k}).$$

Poslední člen na pravé straně rovnice (1.3) zajišťuje rovnost obou stran pokud bychom provedli kontrakci, tj. položili  $i = j$  a sečetli přes  $i$ .

Modelování Reynoldsových napětí lze rozdělit na tři základní způsoby - algebraické modely, jednorovnicové modely a dvourovnicové modely.

Algebraické modely vyjadřují člen  $\overline{u'_i u'_j}$  pomocí algebraické rovnice. Tyto modely většinou vznikají na základě rozměrové analýzy. Řadí se sem například Prandtlův model směšovací délky. Ten vychází z myšlenky, že turbulentní viskozita je součinem charakteristické délky turbulence, tzv. směšovací délky, a rychlosti charakterizující turbulentní pohyby. Směšovací délka je pak úměrná tloušťce turbulentní oblasti  $l$  a rychlost turbulentních pohybů  $\mathcal{U}$  je úměrná rozdílu středních hodnot v oblasti:

$$\nu_t \approx \mathcal{U} l \approx l^2 \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y}.$$

Směšovací délka je pak určována z jednoduchého algebraického vztahu, v angličtině se tento typ modelů nazývá také „zero-equation“.

Jednorovnicové modely představují jednu transportní rovnici pro různé turbulentní veličiny, nejčastěji se jedná o transportní rovnici pro turbulentní kinetickou energii  $k$ . I v těchto modelech se využívá hypotéza o turbulentní viskozitě a rovnice pro turbulentní kinetickou energii se odvodí z NS rovnic. Dalším příkladem jednorovnicového modelu je model Spalart-Allmaras, který vyjadřuje transportní rovnici pro turbulentní viskozitu, podrobný popis je uveden ve třetí kapitole.

Dvourovnicové modely přidávají pro určení Reynoldsova tenzoru napětí ještě druhou transportní rovnici, nejznámější model je  $k - \varepsilon$  model, kde  $\varepsilon$  je míra disipace.

## 1.2.4 Large Eddy Simulation

Turbulentní proudění obsahuje pohyby široké škály měřítek. Pohyby velkých měřítek nesou hlavní podíl energie a jsou efektivnější v transportu zachovávaných veličin ve srovnání s pohyby malých měřítek. V metodě simulace velkých vírů - Large Eddy Simulation (LES) - jsou pohyby větších měřítek počítány přímo a pohyby menších měřítek modelovány. Oproti přístupu RANS je výsledkem znalost většího rozsahu pohybů než jen střední hodnoty a tím je dosaženo přesnějšího popisu. Na obrázku 1.2 je ilustrováno, kolik energie je řešeno přímo a kolik modelováno metodami RANS, LES a DNS.

Rozdělení pohybů na větší a menší měřítko je provedeno pomocí filtrování. Buď  $\phi$  libovolná veličina popisující proudění. Její filtrovanou hodnotu získáme jako konvoluci s jádrem filtru:

$$\hat{\phi}(x, t) = (G * \phi)(x, t) = \int G(r, x) \phi(x - r, t) dr,$$

kde  $G$  je jádro filtru, splňující

$$\int G(r, x) dr = 1.$$



Jako příklad uvádíme tvar funkce  $G$  pro Gaussovský filtr a Box filtr v jedné dimenzi. Přejít do tří dimenzí je přímočarý.

Gaussovský filtr:

$$G(r) = \left( \frac{6}{\pi \Delta^2} \right)^{1/2} \exp \left( -\frac{6r^2}{\Delta^2} \right),$$

Box filtr:

$$G(r) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & \text{pro } |r| \leq \frac{\Delta}{2}, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Každý filtr je spojen s délkovým parametrem  $\Delta$ , který určuje měřítko pohybů, které budou počítány přímo a které modelovány. Parametr  $\Delta$  musí jistě splňovat  $\Delta \geq h$ , kde  $h$  je krok sítě, jinak ho lze volit libovolně. Většinou však bývá volen tak, že jeho poměr s krokem sítě je řádu jednotek.

Každou veličinu lze rozdělit na její filtrovanou hodnotu a residuální hodnotu, tj.  $\phi(x, t) = \hat{\phi}(x, t) + \phi''(x, t)$ . Je dobré si povšimnout, že filtrované hodnoty  $\hat{\phi}(x, t)$  nesplňují Reynoldsova pravidla a tudíž  $\widehat{\phi''}(x, t) \neq 0$ . Použijeme operátor filtrování na NS rovnice a vyjádříme je pro filtrované hodnoty. Tím dostaneme rovnice tvaru:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\hat{u}_i)}{\partial x_i} &= 0, \\ \frac{\partial(\hat{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\hat{u}_i \hat{u}_j)}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}^{LES}}{\partial x_j}, \end{aligned}$$

kde

$$\tau_{ij}^{LES} = -(\widehat{u_i u_j} - \hat{u}_i \hat{u}_j).$$

Tento člen se nazývá sub-grid scale (SGS) Reynoldsův tenzor napětí. Skrze tento člen je vyjádřen vliv lokálně průměrovaných hodnot pohybů malých měřítek na pohyby velkých měřítek. Opět, stejně jako v případě RANS, se jedná o neuzavřenou soustavu rovnic a je nutné tento člen modelovat. Příklady modelů pro  $\tau_{ij}^{LES}$  budou uvedeny v následující sekci.

Metody LES leží z pohledu přesnosti popisu proudění mezi DNS a RANS metodami. DNS řeší pohyby všech měřítek až do Kolmogorova měřítka  $\eta$ , kdežto pohyby většího měřítka počítané v LES jsou obecně větší než  $\eta$ . V případě RANS řešíme přímo pouze průměrné hodnoty veličin a od toho je odvozena přesnost řešení daných metod.

Při porovnávání metod z pohledu výpočtové náročnosti leží LES opět mezi DNS a RANS, ale může se velmi blížit náročnosti DNS. V případě modelování proudění ve složitých geometriích je totiž v okolí stěn nutné počítat přímo i pohyby menšího měřítka, protože v oblastech blízkosti stěn i menší pohyby nesou důležitý podíl informace. Je tedy nutné dostatečně zjemnit síť a zmenšit parametr  $\Delta$ , abychom byli schopni zachytit i pohyby menších měřítek. V okolí stěn se pak výpočtová náročnost může blížit té při použití metody DNS.

### 1.2.5 Příklady LES modelů

Jedním z nejčastějších modelů používaných pro popis SGS tenzoru je model Smagorinskyho, založený na hypotéze o turbulentní viskozitě, podobně jako

u RANS modelů:

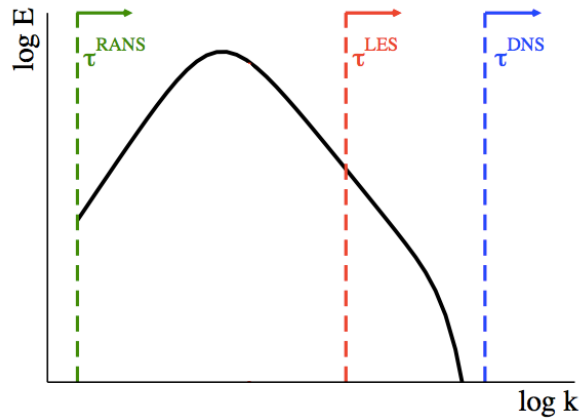
$$\tau_{ij}^{LES} = \nu_t \left( \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk}^{LES},$$

kde na základě rozměrové analýzy je definována turbulentní viskozita jako

$$\nu_t = C_S^2 \Delta^2 |\bar{S}|,$$

kde  $\bar{S} = 1/2 \left( \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_i} \right)$  a  $\Delta$  je délkové měřítko filtru. Parametr  $C_S$  se různí na základě typu proudění, pro isotropickou turbulenci je  $C_S \approx 0.2$ , jindy je  $C_S$  funkcí závislou na vlastnostech proudění. Délkové měřítko  $\Delta$  závisí na kroku sítě a je nejčastěji definováno jako  $(\Delta_x \Delta_y \Delta_z)^{1/3}$  nebo  $(\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2)^{1/2}$ .

Další typy modelů pro LES jsou označovány jako dynamické modely a strukturální modely, většinou se jedná o další algebraické nebo jednorovnicové modely a jejich podrobný popis lze najít v Ferziger et al. (1997).



Obrázek 1.2: Obrázek zachycuje, kolik turbulentní energie je metodami RANS, LES a DNS řešeno přímo (nalevo od přerušované čáry) a kolik modelováno (napravo od čáry). Obrázek převzat z Fröhlich et al. (2008).

# Kapitola 2

## Hybridní RANS/LES metody

### 2.1 Popis metod, klasifikace

Motivací pro vznik hybridních RANS/LES metod je snaha snížit výpočetní náročnost LES metod. Hlavní ideou jak toho dosáhnout je použít metodu RANS pro modelování proudění v blízkosti hranice a LES metodu ve zbytku oblasti. Metody RANS jsou schopné dobře popsat chování v mezní vrstvě a zároveň pro ně nepotřebujeme tak jemnou síť jako v případě LES. Přitom chceme zachovat alespoň přibližně přesnost řešení, které dosahujeme při použití klasické LES metody. Obě metody RANS a LES vykazují podobnost v přístupu řešení turbulentního proudění a podobnost ve své struktuře, což je výhodné ve smyslu snadnější implementace hybridních metod.

Nyní popíšeme způsob, jak vznikají hybridní RANS/LES metody. Podobnost metod RANS a LES je daná tvarem používaných rovnic:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\bar{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^{RANS}}{\partial x_j}, \\ \frac{\partial(\hat{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\hat{u}_i \hat{u}_j)}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^{LES}}{\partial x_j},\end{aligned}$$

kde

$$\tau_{ij}^{RANS} = \overline{u'_i u'_j} \quad \text{a} \quad \tau_{ij}^{LES} = \widehat{u_i u_j} - \hat{u}_i \hat{u}_j,$$

a zároveň můžeme pozorovat podobnost v přístupu tvorby modelů pro  $\tau_{ij}^{RANS}$  a  $\tau_{ij}^{LES}$ , viz předchozí kapitoly.

Dále je důležitý pojem implicitně zadaného filtru. Uvažujme, že daný turbulentní model pro LES je přesný, tj. zachycuje přesně všechny menší pohyby proudění. Z toho plyne, že musí platit rovnost  $\hat{u}_i = G * u_i$  pro filtrované hodnoty. Pak můžeme říct, že skrze filtrované rovnice proudění a skrze tuto rovnost turbulentní model určuje filtr  $G$ . Tedy říkáme, že filtr  $G$  je implicitně zadán pomocí turbulentního modelu.

Pokud si odmyslíme notaci pro střední a filtrované hodnoty a napíšeme si obecnou rovnici proudění s modelováním turbulence

$$\frac{\partial(\tilde{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\tilde{u}_i \tilde{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^{MOD}}{\partial x_j},$$

pak model, který zvolíme pro  $\tau_{ij}^{MOD}$ , určuje zda se jedná o metodu RANS nebo metodu LES. Obecně lze jako model pro RANS označit model, který závisí na

fyzikálních veličinách a veličinách zahrnujících vlastnosti geometrie. Model pro LES pak závisí na vlastnostech numerické sítě nebo, s využitím předpokladu o implicitně zadaném filtru, na uživatelem stanoveném délkovém měřítku.

Pro modelování proudění v různých částech výpočetní oblasti režimem RANS či LES stačí měnit vyjádření členu  $\tau_{ij}^{MOD}$ . Podle způsobu změny  $\tau_{ij}^{MOD}$  mezi modely RANS a LES lze hybridní metody dělit do dvou základních skupin. První skupinou jsou modely označené jako „unified modeling“. U těchto modelů je přechod od RANS k LES spojitý - v celé oblasti je použita stejná transportní rovnice pro řešenou rychlost a člen  $\tau_{ij}^{MOD}$  se mění spojitě. Tyto modely se dále dělí na „blending models“ a „interfaced models“.

U spojitěho přechodu mezi RANS a LES modely se ještě vyskytuje problém konzistence v tom smyslu, že na rozhraní požadujeme, aby se středovaná hodnota počítané veličiny rovnala její filtrované hodnotě, tedy že  $\bar{\phi} = \hat{\phi}$ , což jistě obecně neplatí. Jistým způsobem, jak tento problém řešit, je použít časový filtr pro LES. Tento způsob je znám jako Temporal Partially-Integrated Transport Model (TPITM), jeho princip a použití na známé hybridní modely je shrnut v článku Fadaei-Ghotbi et al. (2010). Často se však problém konzistence jednoduše přehlíží.

Druhá hlavní skupina hybridních modelů je označována jako „segregated modeling“. Zde je výpočetní oblast rozdělena uživatelem na části s režimem RANS a části s režimem LES. V každé části je použita jiná rovnice pro výpočet  $\tau_{ij}^{MOD}$ . Přechod mezi těmito oblastmi není obecně spojitý a je nutné zadat vhodné hraniční podmínky mezi danými oblastmi.

Podrobnější popis obou přístupů s konkrétními příklady metod bude uveden v následujících sekcích.

## 2.2 Unified modeling

Obecně má, podle Speziale (1996), unified model splňovat tři požadavky:

- na dostatečně hrubé síti přechází model v RANS model,
- na dostatečně jemné síti se model vypne a přechází v DNS metodu,
- nemělo by být nutné použít explicitní středování a filtrování.

Z první a druhé podmínky vyplývá, že modely jsou závislé na vlastnostech sítě. Třetí podmínka je pro zjednodušení tvorby modelů.

Základem všech modelů je stejná transportní rovnice pro řešenou rychlost, která bude teprve definována jako filtrovaná nebo středovaná v závislosti na použitém hybridním modelu. Zároveň musí být splněna podmínka, že všechny řešené veličiny jsou spojitě v celé výpočtové oblasti.

V následujících sekcích jsou uvedeny dva možné principy propojení RANS a LES modelů, u kterých výsledný model splňuje výše uvedené požadavky.

### 2.2.1 Blending models

Jedním ze způsobů přechodu mezi RANS a LES modely je jejich míšení (blending):

$$\tau_{ij}^{MOD} = f^{RANS} \tau_{ij}^{RANS} + f^{LES} \tau_{ij}^{LES},$$

kde  $f^{RANS}$  a  $f^{LES}$  jsou koeficienty míšení, závislé na lokálních vlastnostech proudění.

Prvním příkladem modelu spadajícího do této skupiny je model založený na principu tlumení RANS modelu, který je označován jako Flow Simulation Methodology (FSM). Model má následující tvar:

$$\tau_{ij}^{MOD} = f_{\Delta} \left( \frac{\Delta}{\eta} \right) \tau_{ij}^{RANS} \quad \text{pro } 0 \leq f_{\Delta} \leq 1.$$

Argumentem funkce  $f_{\Delta}$  je lokální krok sítě  $\Delta$  a Kolmogorovo délkové měřítko  $\eta$ . Tvar funkce  $f_{\Delta}$  je volen tak, aby pro dostatečně hrubou síť platilo  $f_{\Delta} = 1$  a pro dostatečně jemnou síť  $f_{\Delta} = 0$ , čímž budou splněny podmínky pro unified model související s vlastnostmi sítě. Pro  $\tau_{ij}^{RANS}$  lze použít libovolný model, nejvhodnější se zdají být algebraické modely se závislostí na rychlosti deformace.

Původní tvar  $f_{\Delta}$  je

$$f_{\Delta} \left( \frac{\Delta}{l_K} \right) = \left( 1 - \exp \left\{ -\beta \frac{\Delta}{l_K} \right\} \right)^n,$$

kde  $\beta = 0.001$ ,  $n = 1$ . Parametr  $\beta$  určuje, při jakém rozlišení bude příspěvek modelu zanedbán, parametr  $n$  určuje strmost funkce.

Tvar  $f_{\Delta}$  může být různý, např. lineární, nebo s různými  $\beta$  a  $n$ , avšak změna oproti původnímu tvaru nevykazuje zlepšení modelu. Zároveň lze různě definovat  $\Delta$  - pro anisotropickou síť lze volit místo aritmetického průměru geometrický nebo kubický průměr.

Dalším způsobem jak mísit modely je použít jejich vážený součet:

$$\phi^{model} = f \phi^{RANS} + (1 - f) \phi^{LES} \quad \text{pro } 0 \leq f \leq 1,$$

kde  $\phi$  reprezentuje míšenou veličinu, např. turbulentní viskozitu  $\nu_t$  nebo jiný parametr vyskytující se v rovnicích turbulentního modelu. Koeficient  $f$  je spojitá funkce. Konkrétní příklad tohoto typu míšení je založen na shear-stres transport (SST) turbulentním modelu pro RANS a jeho popis lze nalézt v článku Fröhlich et al. (2008).

Metody typu blending jsou výhodné tím, že uživatel nemusí definovat oblasti pro použití režimu RANS a LES. Na druhou stranu vzhledem k tomu, že jsou metody závislé na kroku sítě, je uživatel nucen vhodně navrhnout síť, což není triviální úkol.

Míšení modelů může vést ke vzniku nefyzikálních struktur v proudění, což může souviset s pojmem označovaným jak Modeled Stress Depletion (MSD). V oblasti přechodu mezi RANS a LES modelem je modelované napětí ve výpočtu tlumeno, zde například díky míšení modelů, tím je celkové napětí podhodnocené. Podrobnější popis k tomuto jevu bude uveden v kapitole o DES metodě.

## 2.2.2 Interfacing models

Další možný přístup je použití modelu RANS v jedné části výpočetní oblasti a modelu LES ve zbytku oblasti bez jejich míšení. Stále je v celé výpočetní oblasti

použita stejná transportní rovnice pro řešenou rychlost a přechod mezi oblastmi je spojitý. Rozhraní mezi oblastmi může být pevně definováno pro celý výpočetní čas, takový přístup se nazývá hard interfacing, nebo může být závislé na aktuálních vlastnostech proudění, které se s časem mění a takové modely se označují jako soft interfacing.

V případě hard interfacing je rozhraní předem definováno uživatelem. Uživatel většinou volí rozhraní v určité vzdálenosti od stěny nebo umístí rozhraní na konkrétní linii numerické sítě ležící pokud možno paralelně se stěnou.

V případě soft interfacing je rozhraní závislé na aktuálních vlastnostech proudění. Jednou možností je definovat vzdálenost od stěny v souřadnicovém systému závislém na řešení, pak rozhraní označené  $y^*$  je v těchto souřadnicích konstantní. Například lze rozhraní definovat jako

$$y^* = y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu},$$

kde  $u_\tau = \sqrt{\tau_{wall}/\rho}$  je frikční rychlost,  $y$  je vzdálenost od stěny a  $\tau_{wall}$  je střední smykové napětí na hranici.

Jako jiný příklad může sloužit definice rozhraní podle Breuer et al. (2007):

$$y^* = \frac{y\sqrt{k}}{\nu},$$

kde  $k$  je turbulentní kinetická energie.

Jednou velkou skupinou v interfacing modelech jsou metody vrstvení RANS a LES modelů. Pokud chceme modelovat turbulentní proudění ve složité geometrii, je nutné v okolí stěn zjemňovat síť, aby řešení bylo dobré. Protože zjemnění sítě zvyšuje výpočtovou náročnost, je žádoucí najít jiný způsob, jak počítat proudění v okolí stěn. Klasickým způsobem je aproximace vlivu okrajové podmínky na proudění pomocí nějaké stěnové funkce. Jiným možným způsobem je vyplnit vrstvu u stěny RANS modelem. Odtud pojem vrstvení modelů.

Tento princip vykazuje vysokou variabilitu, neboť kromě různého způsobu definování rozhraní (hard a soft interfacing), lze ještě kombinovat různé modely pro RANS a LES a způsoby jejich propojení. Propojování veličin vystupujících v modelech, jako je třeba turbulentní kinetická energie nebo míra disipace, je uskutečněno na daném rozhraní  $y^*$ .

Jako příklad je uveden princip použitý v článku Kriesner et al. (2007), jedná se o kombinování  $k$ - $\varepsilon$  modelu s modelem Smagorinskyho. Dané hraniční podmínky na rozhraní jsou

$$k = \frac{(C_S \Delta)^2 S^2}{0.3} \quad \text{a} \quad \varepsilon = (C_S \Delta)^2 S^3.$$

Jiná metoda patří do skupiny interfacing models je známá jako Detached Eddy Simulation. Narozdíl od metod vrstvení zde nejsou veličiny z modelů pro RANS a LES propojeny přímo na rozhraní, ale skrze transportní rovnici. Metoda vychází z jednorovnicového RANS modelu Spalart-Allmaras, kde transportní rovnice pro turbulentní viskozitu je daná jako:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + u_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} = & C_{b1} (1 - f_{t2}) \tilde{S} \tilde{\nu} + \frac{1}{\sigma} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) + C_{b2} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} \right] - \\ & - \left[ C_{w1} f_{w1} - \frac{C_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right] \left( \frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2, \end{aligned}$$

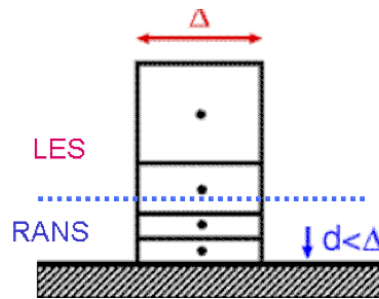
kde  $\tilde{\nu} \sim \nu_t$  a  $d$  reprezentuje vzdálenost od stěny. Ostatní parametry a vlastnosti tohoto modelu budou podrobněji popsány v další kapitole, pro pochopení principu propojení RANS a LES modelů nejsou důležité.

Hybridní model vznikne změnou parametru  $d$  za nový parametr  $\tilde{d}$ , který je definován jako

$$\tilde{d} = \min \{d, C_{DES}\Delta\},$$

kde  $C_{DES}$  je konstanta experimentem stanovená jako  $C_{DES} = 0.65$  a  $\Delta$  je parametr zahrnující v sobě krok sítě. Pro  $\tilde{d} = d$  se jedná o RANS model a pro  $\tilde{d} = C_{DES}\Delta$  se jedná o LES model. Zároveň je RANS model lokalizován v blízkosti stěny a LES model ve zbytku oblasti, jak je dobře vidět na obrázku 2.1.

Princip použitý v DES metodě lze použít i na jiné RANS modely, například na SST model.



Obrázek 2.1: Rozhraní pro DES metodu. Převzato z Fröhlich et al. (2008)

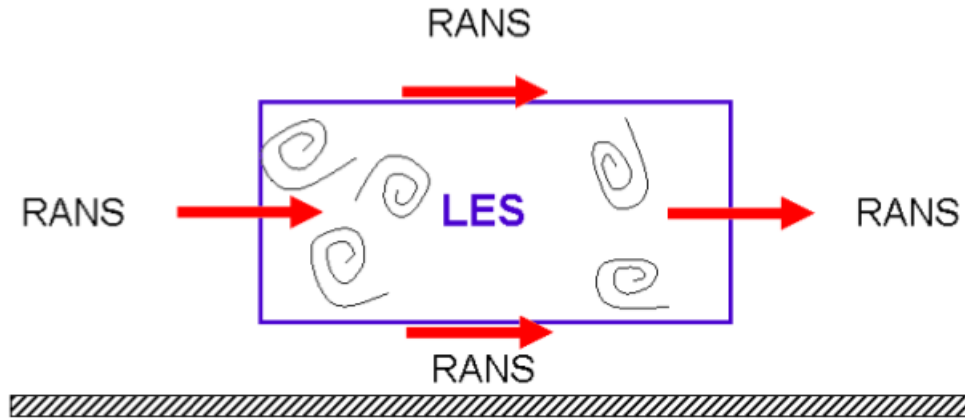
U hybridních modelů typu interfacing si uživatel může zvolit, zda rozhraní určí sám, nebo zda bude závislé na aktuálních vlastnostech proudění. Výhodou je také možnost zvolit různé modely typu RANS nebo LES, které budou použity, v závislosti na vhodnosti pro danou úlohu.

Při vrstvení RANS a LES modelů podél stěn se vyskytuje nesoulad v logaritmickém rychlostním profilu v důsledku náhlé změny délkového měřítka u modelu. Tento problém se vyskytuje nezávisle na použitých RANS a LES modelech. Zároveň se u těchto modelů může projevit MSD, stejně jako u blending modelů.

## 2.3 Segregated modeling

Další princip, jak propojovat LES a RANS modely, je označovaný jako segregated modeling. Výpočetní oblast uživatel na začátku výpočtu rozdělí na části, kde bude použit RANS model a kde LES model. Propojení modelů je definováno na rozhraní pomocí vhodných hraničních podmínek a propojují se pouze řešené veličiny jako rychlost a tlak. Ostatní proměnné jsou počítány zvlášť v každé oblasti. Díky tomu je přechod mezi RANS a LES modelem obecně nespojitý na rozhraní.

Hraniční podmínky se definují v závislosti na vzájemné poloze oblastí pro RANS a LES vzhledem ke směru proudění. Jako modelovou situaci si lze představit oblast s LES modelem vnořenou do oblasti s RANS modelem, viz. obrázek 2.2.



Obrázek 2.2: Ilustrace vzájemné polohy RANS a LES metod. Převzato z Fröhlich et al. (2008)

Obecně mohou nastat čtyři situace: za a) vtok tekutiny z oblasti RANS do oblasti LES, za b) výtok tekutiny z oblasti LES do oblasti RANS, za c) oblast RANS leží mezi pevnou stěnou a oblastí LES, a nakonec za d) oblast RANS leží mezi LES a volnou stěnou. V každém případě je nutné definovat hraniční podmínky zvlášť.

Pro případ a) musí RANS model dodat fluktuace do oblasti s LES modelem. Vzhledem k tomu, že RANS model je vhodnější pro popis statisticky stabilního proudění, hraniční podmínky budou záviset na tom, zda je proudění v oblasti LES dostatečně vyvinuté. Pokud se jedná o proudění, které není dostatečně vyvinuté v oblasti s LES modelem, je nutné na rozhraní dodefinovat fluktuace, aby se proudění mohlo v této oblasti dostatečně rozvinout. K tomu se využijí metody, které jsou používány pro samotný LES model. Fluktuace na vstupu do LES oblasti lze získat dvěma způsoby. První způsob je použití reálných dat pro podobná proudění upravených pro úlohu nebo z nějaké předchozí numerické simulace. Druhý způsob je uměle vytvořit fluktuace například použitím digitálních filtrů, náhodných vírů, Fourierových módů a podobně.

V případě b) je hlavním cílem, aby RANS model přenášel informace o průměrném proudění z předchozí oblasti. Jelikož LES model předává nestability v proudění, je nutné na rozhraní zajistit, aby se tyto nestability neodrážely zpět při průchodu z oblasti. Toho lze dosáhnout například tím, že naměřené fluktuace se zahrnou do středních hodnot získaných z RANS oblasti.

Pro případy c) a d) se postupuje následujícím způsobem. Pokud je oblast s RANS modelem mezi oblastí s LES modelem a pevnou stěnou, pak se využije způsobu unified modelů. Pokud je oblast s RANS modelem u volné hranice, pak se na tuto situaci dá dívat jako na případ b).

Výhodou segregated modelování je to, že modely RANS a LES jsou použity v podmínkách, pro které byly určeny. Tím vymizí problémy jako je MSD a dvojitá započítávání fluktuací. Nepříjemná je úloha uživatele stanovit opravdu vhodné oblasti pro modely RANS a LES.

Podrobnější popis hybridních metod, jejich klasifikace a další příklady lze nalézt v článku Fröhlich et al. (2008).



# Kapitola 3

## Metoda Detached Eddy Simulation a její modifikace

V této kapitole podrobně popíšeme odvození metody Detached Eddy Simulation (DES) z RANS modelu, její vlastnosti a modifikace.

### 3.1 Model Spalart-Allmaras

Model Spalart-Allmaras (SA) je jednorovnicový RANS model pro výpočet turbulentní viskozity. Definuje transportní rovnici pro neznámou  $\tilde{\nu}$ , která je úměrná turbulentní viskozitě  $\nu_t$  a je dána rovnicemi

$$\nu_t = \tilde{\nu} f_{v1}, \quad f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3}, \quad \chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu}.$$

Nejčastěji používaná verze transportní rovnice pro  $\tilde{\nu}$  je:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + u_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} = C_{b1} (1 - f_{t2}) \tilde{S} \tilde{\nu} + \frac{1}{\sigma} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) + C_{b2} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} \right] - \\ - \left[ C_{w1} f_{w1} - \frac{C_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right] \left( \frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2, \end{aligned} \quad (3.1)$$

kde

$$\tilde{S} = S + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v2}, \quad f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}},$$

a kde  $S$  je velikost vorticity  $S = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}$ ,  $d$  je vzdálenost od stěny a

$$f_w = g \left[ \frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right]^{1/6}, \quad g = r + C_{w2}(r^6 - r), \quad r = \min \left( \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} \kappa^2 d^2}, r_{lim} \right),$$

$$f_{t2} = C_{t3} \exp(-C_{t4} \chi^2), \quad \Omega_{ij} = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Konstanty vyskytující se v rovnicích jsou rovny

$$\begin{aligned} C_{b1} = 0.1355, \quad \sigma = 2/3, \quad C_{b2} = 0.622, \quad \kappa = 0.41, \\ C_{w1} = \frac{C_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1 + C_{b2}}{\sigma}, \quad C_{w2} = 0.3, \quad C_{w3} = 2, \\ C_{v1} = 7.1, \quad C_{t3} = 1.2, \quad C_{t4} = 0.5, \quad r_{lim} = 10. \end{aligned}$$

Okrajové podmínky pro  $\tilde{\nu}$  jsou předepsány jako

$$\begin{aligned}\tilde{\nu} &= 0 && \text{na stěně,} \\ \tilde{\nu} &= 3\nu && \text{ve volném proudu.}\end{aligned}$$

Hlavní transportní rovnice pro  $\tilde{\nu}$  je odvozená na základě experimentu, rozměrové analýzy, Galileovy invariance a pozorované závislosti na molekulární viskozitě. Definice konstant a přidaných funkcí vznikla na základě porovnání experimentů a numerických výsledků a následné kalibrace.

Existuje několik verzí metody SA, jejich popis lze nalézt na stránkách NASA Turbulence Modeling Resource, odkaz je uveden v použité literatuře.

## 3.2 Metoda Detached Eddy Simulation

Hybridní model typu interfacing nazvaný Detached Eddy Simulation (DES) je odvozen z modelu SA skrze změnu délkového měřítka  $d$ . Nové délkové měřítko  $\tilde{d}$  je definováno jako  $\tilde{d} = \min\{d, C_{DES}\Delta\}$ , kde  $C_{DES} = 0.65$  a  $\Delta$  je délkový parametr, který souvisí s krokem sítě. V tomto případě je  $\Delta = \max\{\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z\}$ . Definice  $\tilde{d}$  je zvolena tak, aby model RANS modeloval proudění v blízkosti stěny a model LES řešil separaci a turbulentní proudění dál od stěny. Ještě doplníme, že metoda DES může být podobným způsobem odvozena i z jiného RANS modelu. Jako úspěšný kandidát se často zmiňuje SST model, tvar tohoto DES-SST modelu lze najít v článku Panguluri et al. (2007).

Rozhraní mezi jednotlivými módy není ostré, ale existuje zde šedá zóna (grey area), kde model není ani čistý RANS model ani čistý LES model. V šedé zóně předpokládáme, že fluktuace rychlosti nejsou dostatečně rozvinuté díky chování turbulentní viskozity. S tím souvisí i nižší hodnota přímo řešeného turbulentního napětí, které modelované napětí v této oblasti nedokáže kompenzovat. Výsledkem je podhodnocené celkové turbulentní napětí a tento jev se označuje jako Modeled Stress Depletion (MSD). Důsledkem tohoto jevu může být nízká velikost tření u hranice nebo příliš brzká separace proudění, jev označovaný jako Grid Induced Separation (GIS). Odvození této metody lze nalézt v článku Spalart (1997).

## 3.3 Delayed Detached Eddy Simulation

Aby nedocházelo k jevu MSD, byla metoda DES modifikována autory článku Spalart (2006) do podoby, kterou dnes známe jako Delayed DES. Jak již název napovídá, chceme „zdržet“ přechod mezi RANS a LES režimem.

Pro zabránění příliš rychlého přechodu hybridního modelu k LES modelu je definována tlumící funkce  $f_d$  závislá na aktuálních vlastnostech proudění, konkrétně na turbulentní viskozitě  $\nu_t$ . Funkce  $f_d$  je následně zahrnuta do definice délkového měřítka  $\tilde{d}$ :

$$\tilde{d} = d - f_d \max\{0, d - C_{DES}\Delta\}, \quad (3.2)$$

kde

$$f_d = 1 - \tanh\left[(8r_d)^3\right] \quad \text{a} \quad r_d = \frac{\nu_t + \nu}{\sqrt{\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \kappa^2 d^2}}. \quad (3.3)$$

Výsledkem takto modifikovaného délkového měřítka je užší šedá zóna mezi RANS a LES režimem a snížení výskytu jevu MSD. Pro úplnou eliminaci MSD by před mezi RANS a LES musel být ostrý. Nově definovaná poloha rozhraní mezi modely RANS a LES je závislá na řešení, tím se stává závislá na čase. To má za nepříjemný důsledek vyšší citlivosti řešení na počátečních podmínkách.

### 3.4 Improved Delayed Detached Eddy Simulation

Metoda Improved Delayed Detached Eddy Simulation (IDDES) byla vytvořena s cílem zkombinovat metodu DDES a její použití jako stěnové funkce v modelech LES. Odvození této metody je popsáno v článku Shur (2008).

Stěnová funkce slouží k aproximaci hraničních podmínek pro turbulentní proudění dále od stěny, tím je možné vyhnout se zjemňování sítě v její blízkosti. Jako příklad jednoduché stěnové funkce uveďme logaritmický rychlostní profil:

$$u = \frac{u_\tau}{\kappa} \log \frac{y}{y_0},$$

kde  $u_\tau$  je frikční rychlost,  $\kappa$  je Kármánova konstanta a  $y_0$  je koeficient drsnosti. Modely LES se stěnovou funkcí jsou v anglické literatuře známy jako Wall-modeled LES (WMLES).

Metoda DES může být chápána jako stěnová funkce, aproximace hraniční podmínky je zde provedena pomocí RANS modelu. Problémem DES metody je nesoulad mezi logaritmickým rychlostním profilem v RANS regionu a LES regionu, což zároveň vede k tomu, že řešená frikční rychlost je přibližně o 15% nižší. Tento problém se vyskytuje beze změn i u metody DDES.

Metoda IDDES představuje ucelený soubor rovnic vytvořený s motivací překonat problém s nejednotným logaritmickým profilem. Další motivací je možnost automatického přecházení mezi klasickým použitím DDES metody a jejím použitím jako WMLES tak, aby různé druhy proudění a nebo různé regiony ve složité geometrii mohly být řešeny metodou, která je pro ně vhodnější.

IDDES obsahuje dvě větve pro DDES a WMLES a soubor empirických funkcí navržených pro správné fungování obou režimů. Zároveň obsahuje propojení těchto funkcí, aby bylo zajištěno správné přepínání mezi jednotlivými režimy.

#### 3.4.1 Modifikace délkového měřítka

Důležitou součástí IDDES metody je nová definice délkového měřítka  $\Delta$ , které nově závisí explicitně na vzdálenosti od stěny.

Délkové měřítko pro LES má nejčastěji následující podobu:

$$\Delta = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}.$$

V případě DES metody je délkové měřítko definované jako maximum velikosti stěny buňky, tedy

$$\Delta = \max \{ \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z \}.$$

Obě definice jsou obecně nevyhovující pro proudění ve stěnami omezené oblasti, souvisí to s nutností používat v SGS modelech jiné hodnoty konstant pro různé

úlohy, například v případě Smagoriskyho modelu konstanta  $C_S$  může nabývat hodnot přibližně od 0.1 do 0.25.

Proto se hledá nové délkové měřítko, které by bylo více fyzikální a díky kterému by se konstanty v modelech nemusely měnit. Nový tvar pro délkové měřítko od autorů metody IDDES je obecně definován jako

$$\Delta = f(\Delta x, \Delta y, \Delta z, d_w),$$

kde  $d_w$  je vzdálenost od stěny. Pro odvození funkce  $f$  byly uvažovány následující požadavky.

Výpočetní oblast se dá rozdělit na tři části podle vlastností výpočetní sítě. První část zahrnuje oblast volného proudění, kde je síť většinou isotropická a délkové měřítko je uvažováno jako v případě DES metody, tedy

$$\Delta_{free} = \Delta_{max} = \max \{ \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z \}.$$

Druhá část leží v bezprostředí blízkosti u stěn, kde je síť vysoce anisotropická. Délkové měřítko by nemělo záviset na výrazném zjemnění sítě v normálovém směru ( $y$ ), nově tedy bude závislé jen na krocích sítě v paralelních směrech ( $x, z$ ):

$$\Delta_{wall} = f(\Delta x, \Delta z).$$

Ve zbytku oblasti se pak délkové měřítko uvažuje jako lineární funkce  $d_w$ , zároveň se předpokládá, že se pohybuje v intervalu  $\Delta_{min} \ll \Delta \ll \Delta_{max}$ , kde  $\Delta_{min}$  se definuje analogicky jako  $\Delta_{max}$ .

Vztah pro délkové měřítko vyhovující výše uvedeným požadavkům je nakonec definován jako

$$\Delta = \min \{ \max [C_w d_w, C_w \Delta_{max}, \Delta_{wn}], \Delta_{max} \},$$

kde  $\Delta_{wn}$  je krok sítě v normálovém směru stěny a  $C_w = 0,15$  je konstanta určena na základě LES modelování vyvinutého turbulentního proudění kanálem.

### 3.4.2 Větev DDES

První větev IDDES modelu je samotná DDES metoda. Je aktivována v dané části oblasti pouze pokud proudění na vtoku do této části není turbulentní. Délkové měřítko je definováno podobně jako v případě DDES, a to konkrétně jako

$$l_{DDES} = l_{RANS} - f_d \max \{ 0, (l_{RANS} - l_{LES}) \},$$

kde  $l_{RANS} = d_w$  a  $l_{LES} = C_{DES} \Psi \Delta$ . Vztahy pro  $f_d, C_{DES}$  jsou stejné jako u DDES, viz. rovnice 3.2, resp. 3.3. V režimu LES metody DDES řešená turbulentní viskozita klesá se zjemňováním sítě a s lokálním Reynoldsovým číslem. V určitém momentu se DDES začne mylně chovat jako v blízkosti stěny. Z tohoto důvodu se zavádí korekční člen  $\Psi$ , který zamezuje takovému jevu. Pokud používáme SA model jako výchozí pro DES, pak pro  $\Psi$  platí

$$\Psi^2 = \min \left[ 10^2, \frac{1 - \frac{c_{b1}}{c_w \kappa^2 f_w^*} [f_{t2} + (1 - f_{t2}) f_{v2}]}{f_{v1} \max(10^{-10}, 1 - f_{t2})} \right],$$

kde všechny konstanty jsou tytéž jako v SA modelu, kromě konstanty  $f_w^*$ . Ta je určena jako  $f_w^* = 0.424$ . Korekce je neaktivní, tedy  $\Psi = 1$ , pokud řešená turbulentní viskozita je vyšší než  $10\nu$ .

### 3.4.3 Větev WMLES

Druhá větev metody IDDES používající DDES jako stěnovou funkci je aktivní pro části výpočetní oblasti, u kterých je proudění na vtoku nestálé a vykazuje turbulentní chování.

V této větvi je použito následující délkové měřítko:

$$l_{WMLES} = f_B(1 + f_e)l_{RANS} + (1 - f_B)l_{LES}.$$

Vystupuje zde empiricky odvozená funkce  $f_B$  definovaná jako

$$f_B = \min \{2exp(-9\alpha), 1\},$$

kde  $\alpha = 0.25 - \frac{d_w}{\Delta_{max}}$ . Takto zavedená funkce  $f_B$  je rovna jedné pro RANS režim a je rovna nule pro LES režim. Rozhraní mezi oběma módy leží ve vzdálenosti od stěny v rozmezí  $0.5\Delta_{max} < d_w < \Delta_{max}$ . Funkce  $f_e$  slouží ke zvětšování modelovaného Reynoldsova napětí, které je obecně při interakci RANS a LES režimů v oblasti rozhraní redukováno. Funkce  $f_e$  má následující tvar

$$f_e = \max \{(f_{e1} - 1), 0\} \Psi f_{e2},$$

kde funkce  $f_{e1}$  je navržena tak, aby se zamezilo nejednotnému logaritmickému rychlostnímu profilu a je dána vztahy

$$f_{e1} \left( \frac{d_w}{\Delta_{max}} \right) = \begin{cases} 2exp(-11,09\alpha^2) & \text{pro } \alpha \geq 0, \\ 2exp(-9,0\alpha^2) & \text{pro } \alpha < 0. \end{cases}$$

Funkce  $f_{e2}$  je pak dána jako

$$f_{e2} = 1.0 - \max \{f_t, f_l\}.$$

Tato funkce kontroluje intenzitu zvyšování komponenty RANS a to skrze funkce

$$f_t = \tanh[(c_t^2 r_{dt})^3], \quad f_l = \tanh[(c_l^2 r_{dl})^4].$$

Hodnoty  $r_{dt}$  a  $r_{dl}$  jsou turbulentní, resp. laminární vezre  $r_d$  a jsou dány následujícími vztahy:

$$r_{dt} = \frac{\nu_t}{\kappa^2 d_w^2 \max \left\{ \left[ \sum_{ij} (\partial u_i / \partial u_j)^2 \right]^{1/2}, 10^{-10} \right\}},$$

$$r_{dl} = \frac{\nu}{\kappa^2 d_w^2 \max \left\{ \left[ \sum_{ij} (\partial u_i / \partial u_j)^2 \right]^{1/2}, 10^{-10} \right\}}.$$

Konstanty  $c_t$  a  $c_l$  jsou pak dány v závislosti na použitém RANS modelu tak, aby  $f_{e2}$  bylo přibližně nulové pokud  $r_{dt}$  nebo  $r_{dl}$  je blízko jedné. Parametr  $r_{dt}$  je blízko jedné v logaritmické vrstvě proudění u hranice, naproti tomu  $r_{dl}$  bude blízko jedné v laminární podvstvě.

### 3.4.4 Propojení větví DDES a WMLES

Pro automatické přecházení mezi větvemi je ještě nutné modifikovat délkové měřítko pro DDES větev a to následujícím způsobem:

$$\tilde{l}_{DDES} = \tilde{f}_d l_{RANS} + (1 - \tilde{f}_d) l_{LES},$$

kde funkce  $\tilde{f}_d$  je vyjádřena jako

$$\tilde{f}_d = \max \{(1 - f_{dt}, f_B)\},$$

pro  $f_{dt} = 1 - \tanh[(8r_{dt})^3]$ . Obě větve metody IDDES se pak dají snadno propojit pomocí hybridního délkového měřítka  $l_{hyb}$  definovaného vztahem

$$l_{hyb} = \tilde{f}_d(1 + f_e)l_{RANS} + (1 - \tilde{f}_d)l_{LES}.$$

Lze nahlédnout, že v případě proudění s turbulentním chováním na vtoku bude  $r_{dt} \ll 1$  a tedy  $f_{dt}$  bude blízko jedné. Tím bude  $\tilde{f}_d$  rovno  $f_B$  a pro délkové měřítko platí  $l_{hyb} = l_{WMLES}$ . Naopak pro proudění na vtoku bez turbulentního obsahu se  $f_e$  redukuje na nulu a tedy  $l_{hyb} = \tilde{l}_{DDES}$ .

# Kapitola 4

## Numerická realizace

V následující praktické části diplomové práce se budeme věnovat implementaci metod DES a DDES a jejich následnému testování na simulaci dvou benchmarkových úloh. Metodu IDDES v tomto testování vynecháme. Je to z toho důvodu, že chceme zkoumat metodu DES (případně DDES) jako zástupce hybridních metod ve srovnání s klasickými LES metodami z pohledu výpočetní náročnosti a přesnosti řešení, metoda IDDES se zdá být na pomezí s LES metodami a porovnání by nemuselo být tak názorné.

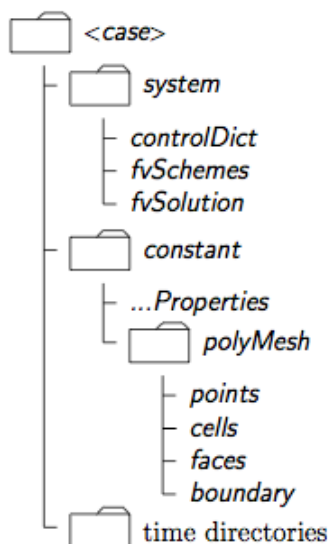
### 4.1 OpenFOAM

Pro testování metody DES a DDES na benchmarkových úlohách byl zvolen opensource software OpenFOAM (Open Source Field Operation and Manipulation). Jedná se o sadu numerických řešičů a řady pre-/post-processing utilit psaných v jazyce C++, určených pro řešení širokého spektra úloh z mechaniky kontinua, včetně úloh z dynamiky tekutin. Hlavní výhodou tohoto softwaru je možnost volně číst a upravovat kód jednotlivých částí programu tak, aby vyhovoval konkrétním potřebám uživatele. Další výhodou je možnost provádět výpočty paralelně.

Na řešení úloh v tomto softwaru je aplikován jednotný postup - preprocessing neboli zadání úlohy, výpočet a postprocessing, tedy úprava získaných dat. Práce se soubory a spouštění řešičů a utilit probíhá v příkazové řádce.

Pro zadání úlohy je vytvořen *case file* obsahující časové adresáře a adresáře *constant* a *system*. Časové adresáře jsou označeny číslem časového kroku, pro který je adresář vytvořen nebo během výpočtu uložen. Pro první výpočet většinou vytváříme adresář označený číslem 0. Adresář 0 obsahuje soubory se zadáním okrajových podmínek pro zkoumané veličiny například tlak  $p$  a rychlost  $U$ . Adresář *constant* obsahuje soubor se zadáním geometrie problému, v případě modelování turbulentního proudění obsahuje soubory s nastavením používaného modelu turbulence a hodnot veličin jako je například kinematičká viskozita  $\nu$ . Adresář *system* pak obsahuje soubor pro nastavení průběhu výpočtu jako je časový krok, délka výpočtu a v jakých intervalech chceme ukládat řešení a další soubory s nastavením řešiče a zvolených diskretizačních schémat. Strukturu zadání celého problému lze vidět na obrázku 4.1.

Geometrii problému lze zadat ručně vytvořením souboru *polyMesh* dle tutoriálu, což je vhodné pro jednoduché geometrie nebo lze konvertovat již vytvořenou



Obrázek 4.1: Struktura zadání úlohy, převzato z tutoriálu k OpenFOAM softwaru.

geometrii z jiných softwarů například z Fluentu, Gmsh a další. Kromě jednoduchých strukturovaných sítí lze v OpenFOAM vytvořit i složité nestrukturované sítě používané pro úlohy s komplexní geometrií. Pro vytvoření jednoduché sítě se šestihrannými buňkami slouží příkaz

-blockMesh.

Po zadání parametrů řešené úlohy a vytvoření sítě lze spustit výpočet, v našem případě pro výpočet turbulentního proudění nestlačitelné tekutiny pomocí algoritmu PISO (Pressure Implicite with Splitting of Operator) je určen příkaz

-pisoFoam.

Předpona před slovem Foam značí v tomto případě použitý algoritmus k řešení rovnic, je možné vybírat ze široké škály algoritmů vhodných pro různé typy proudění, například pro stacionární proudění nebo pro proudění Nenevtonovských tekutin atd.

Po dokončení výpočtu je možné zpracovat data dvěma způsoby. Jedním je vizualizace dat a jejich analýza ve vizualizačním programu ParaView. Pro uložení dat do formátu vhodného pro čtení v programu Paraview, jedná se o vtk formát, slouží příkaz

-paraFoam.

Druhým způsobem je zpracování dat pomocí utilit OpenFOAMu jako jsou například

-wallShearStress.

pro výpočet hodnot napětí na hranici nebo

-wallGradU.

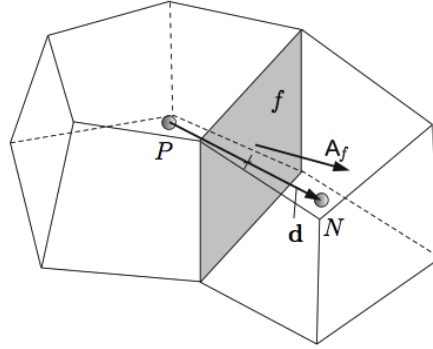
pro výpočet gradientu rychlosti u stěny. Následně lze opět provést vizualizaci dat pomocí ParaView.

Toto je základní způsob, jak zpracovat danou úlohu pomocí softwaru OpenFOAM. Další možnosti, které tento software nabízí, lze najít na domácích stránkách OpenFoam Foundation.



### 4.1.1 Diskretizace rovnic

OpenFOAM používá k diskretizaci rovnic metodu konečných objemů. Tato metoda spočívá v rozdělení výpočetní oblasti na konečný počet podoblastí, tzv. kontrolních objemů. Tyto kontrolní objemy se navzájem nepřekrývají, dotýkají se vzájemně ve vrcholech, na hranách nebo na celých stěnách. Hodnoty počítaných veličin jsou obvykle umístěny v geometrickém středu kontrolního objemu, na stěnách nebo ve vrcholech. Používaný systém rovnic je pak aplikovaný na každý kontrolní objem zvlášť a následně je vhodně diskretizován.



Obrázek 4.2: Popis situace - kontrolní objem s centrálním bodem  $P$  a sousední kontrolní objem s centrálním bodem  $N$ . Zdroj tutoriál OpenFOAM.

Pro lepší ilustraci problému se budeme držet obrázku 4.2, kde je vidět příklad kontrolního objemu. OpenFOAM ukládá hodnoty veličin  $\mathbf{u}$  a  $p$  v bodě  $\mathbf{P}$ . Stěna kontrolního objemu je označena písmenem  $\mathbf{f}$ . Vektor  $\mathbf{d}$  spojuje centrální bod  $\mathbf{P}$  s centrálním bodem  $\mathbf{N}$  sousedního kontrolního objemu. Normálový vektor ke stěně, která je společná oběma kontrolním objemům, je označen jako  $\mathbf{A}_f$ .

Rovnice používané v našem případě jsou filtrované/středované Navierovy-Stokesovy rovnice pro nestlačitelnou Newtonovskou tekutinu. Rovnice jsou v metodě konečných objemů používány v integrálním tvaru, kde integrujeme přes daný kontrolní objem. Protože se navíc jedná se o časově závislý problém, rozdělíme časový interval na jednotlivé časové kroky délky  $\Delta t$ . Pohybové rovnice pak integrujeme ještě přes časový krok. Systém rovnic ve vektorovém tvaru pro daný kontrolní objem a daný časový krok pak vypadá následovně:

$$\int_V \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} dV = \int_{\partial V} \bar{\mathbf{u}} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \left[ \frac{d}{dt} \int_V \bar{\mathbf{u}} dV + \int_V \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}) dV - \int_V \nabla \cdot (\nu + \nu_t)(\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{\mathbf{u}}^T) dV \right] dt =$$

$$= - \int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_V \frac{\nabla \bar{p}}{\rho} dV \right] dt$$

Rovnice se řeší pro každý kontrolní objem zvlášť, souvislost rovnic mezi kontrolními objemy je dosažena skrze fluktuace sousedními stěnami, které se musejí rovnat. V případě kontrolních objemů ležících na hranicích oblasti jsou toky vnějšími stěnami určeny okrajovou podmínkou. Zároveň musí být v celé oblasti dodržena rovnice kontinuity.

Jednotlivé integrály aproximujeme následujícím způsobem:

$$\text{Objemový integrál: } \int_{V_p} \phi dV \approx \phi_p V_p,$$

$$\text{Plošný integrál: } \int_f \phi dA \approx \phi_f \mathbf{A}_f,$$

$$\text{Integrál divergence: } \int_{V_p} \nabla \cdot \phi dV \approx \sum_f \mathbf{A}_f \cdot \phi_f,$$

$$\text{Integrál gradientu: } \int_{V_p} \nabla \phi dV \approx \sum_f A_f \phi_f,$$

kde  $V_p$  je kontrolní objem s centrálním bodem  $\mathbf{P}$ ,  $\phi_p$  je hodnota veličiny  $\phi$  v bodě  $\mathbf{P}$  a  $\phi_f$  je hodnota veličiny na stěně  $\mathbf{f}$ . Vektor  $\mathbf{A}_f$  je normálový vektor ke stěně  $\mathbf{f}$ . Hodnoty veličiny  $\phi$  na stěnách kontrolního objemu je nutné interpolovat z hodnot uložených v centrálních bodech daného a sousedního kontrolního objemu. Uvedené aproximace integrálů jsou druhého řádu přesnosti, důkaz lze nalézt v knize Ferziger et al. (1997).

Diskrétní tvar pro obecný konvektivní člen získáme takto:

$$\int_{V_p} \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}}\phi) dV \approx \sum_f \mathbf{A}_f \cdot (\bar{\mathbf{u}}\phi)_f = \sum_f F \phi_f,$$

kde  $F = \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{u}}_f$  vyjadřuje tok stěnou  $\mathbf{f}$ . Hodnoty  $\bar{\mathbf{u}}_f$  je nutné interpolovat z hodnot uložených v bodech  $\mathbf{P}$  a  $\mathbf{N}$ .

Podobným způsobem získáme diskrétní tvar pro obecný difúzní člen:

$$\int_{V_p} \nabla \cdot (\nu \nabla \phi) dV \approx \sum_f \mathbf{A} \cdot (\nu \nabla \phi)_f = \sum_f \nu_f \mathbf{A}_f \cdot (\nabla \phi)_f.$$

Hodnota  $\nu_f$  se získá pomocí vhodné interpolace. Hodnota členu  $\mathbf{A}_f \cdot (\nabla \phi)_f$  se pro ortogonální síť vypočte jako:

$$\mathbf{A}_f \cdot (\nabla \phi)_f = |\mathbf{A}_f| \frac{\phi_N - \phi_P}{|\mathbf{d}|}, \quad (4.1)$$

kde  $\mathbf{d}$  je vektor spojující body  $\mathbf{P}$  a  $\mathbf{N}$ . V případě, že je použita neortogonální síť, tedy vektory  $\mathbf{d}$  a  $\mathbf{A}_f$  nejsou paralelní, je nutné upravit vztah 4.1 na tvar s korekčním členem:

$$\mathbf{A}_f \cdot (\nabla \phi)_f = |\mathbf{A}_p| \frac{\phi_N - \phi_P}{|\mathbf{d}|} + \mathbf{A}_d \cdot (\tilde{\nabla} \phi)_f, \quad (4.2)$$

přičemž vektor  $\mathbf{A}_f$  rozložíme na část  $\mathbf{A}_p$  paralelní s vektorem  $\mathbf{d}$  a část  $\mathbf{A}_d$ .

Pohybové rovnice jsou PDR druhého řádu díky difúznímu členu, je tedy vhodné pro zajištění dostatečné přesnosti používat interpolační schémata taková, abychom dosáhli alespoň druhého řádu přesnosti v prostoru. Pro tento účel jsme zvolili lineární interpolaci (central differencing scheme), kde hodnotu  $\phi_f$  získáme jako

$$\phi_f = \lambda \phi_P + (1 - \lambda) \phi_N,$$

kde

$$\lambda = \frac{n}{|d|} \quad (4.3)$$

a  $n$  značí vzdálenost bodu  $\mathbf{P}$  od stěny  $\mathbf{f}$ . Metoda je druhého řádu přesnosti.

Pro časovou diskretizaci bylo zvoleno schéma zpětné diference druhého řádu (2. order Backward Differencing). Toto schéma používá tři časové kroky pro dosažení druhého řádu přesnosti:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{3/2\phi^{n+1} - \phi^n + 1/2\phi^{n-1}}{\Delta t}.$$

Pro stabilitu výpočtu je nutné volit časový krok tak, aby byla splněna CFL podmínka:

$$CFL = \Delta t \frac{u_i}{\Delta_i} \leq 1.$$

Stejným způsobem, jakým byla provedena diskretizace filtrovaných/ středovaných Navierových-Stokesových rovnic, se provede i diskretizace dynamické rovnice pro výpočet  $\tilde{\nu}$  z modelu Spalart-Allmaras, rovnice 3.1 .

Takto získáme lineární soustavu rovnic odpovídající rovnicím popisujícím turbulentní proudění metodou (D)DES. Jelikož se jedná o nestlačitelné proudění, veličiny  $\bar{\mathbf{u}}$  a  $\bar{p}$  jsou na sobě vzájemně závislé a je nutné použít vhodný algoritmus pro jejich řešení. Pro účely této práce byl zvolen algoritmus PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operators). Jedná se o vícekrokovou metodu a podrobný popis algoritmu lze najít v knize Ferziger et al. (1997).

## 4.2 Výpočetní síť

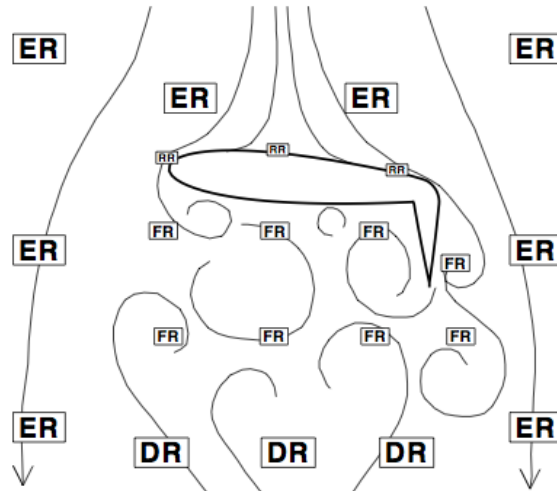
Metody DES a DDES jsou závislé na vlastnostech sítě. Proto je důležité pro každou úlohu navrhnout vhodnou výpočetní síť. Tento úkol je velmi složitý už při použití samotných metod typu RANS či LES, natož v případě jejich kombinace v jedné oblasti. Zároveň je metoda (D)DES navrhovaná pro modelování turbulentního proudění v geometricky složitých oblastech, což problém návrhu sítě dále komplikuje.

Článek „Průvodce po síti DES“, Spalart (2001), slouží jako neocenitelná pomůcka, jež poskytuje nejen návod pro vytvoření sítě, ale může sloužit i jako odpověď na otázku, co je vlastně vhodná výpočetní síť. V následujících odstavcích je stručně shrnut postup při návrhu výpočetní sítě popsany ve výše uvedeném článku.

Výpočetní oblast je možné rozdělit na několik regionů podle vlastností proudění. Pro lepší orientaci v pojmech je uveden příklad na obrázku 4.3.

Prvním z regionů je Eulerův region (ER), což je region neobsahující turbulentní proudění. Takový region často zabírá většinu výpočetní oblasti, ale zároveň obsahuje malý zlomek bodů sítě. Síť se je zde nejlépe isotropická, s krokem sítě voleným na základě geometrie. Tento postup je obecně vhodný i pro RANS metody.

Dalším regionem je RANS region (RR). Jedná se převážně o oblasti mezní vrstvy, zahrnující i počáteční separaci. Používá se stejný postup jako v případě návrhu sítě pro RANS, tedy isotropická síť, krok sítě je ale menší než v případě



Obrázek 4.3: Rozdělení oblasti na jednotlivé regiony, v tomto případě pro obtékání profilu křídla. ER-Euler Region, RR-RANS Region, FR-Focus Region, DR-Departure Region. Zdroj Spalart (2001)

ER. Přílišné zjemnění však vede k aktivaci LES. RR lze rozdělit ještě na viskózní region (VR) a RANS vnější region - RANS outer region (OR).

Viskózní region se nachází uvnitř RANS regionu. V normálovém směru od hranice chceme modelovat standartní vrstvy - viskózní podvrstvu, buffer zónu a logaritmickou vrstvu. První krok sítě od hranice by měl být zhruba  $\Delta y^+ = 2$  nebo méně. Poměr sousedních kroků  $\Delta y_{j+1}/\Delta y_j$  směrem od hranice by se pak měl pohybovat kolem hodnoty 1.25 pro dobré řešení logaritmického profilu. Pro první aproximaci řešení je možné použít  $\Delta y^+ \approx 5$  a  $\Delta y_{j+1}/\Delta y_j \approx 1.3$ . V paralelním směru k hranici je krok sítě v jednotkách  $\Delta x^+$  v podstatě neomezen, prakticky se používá krok sítě jako v ER. Délka kroku se může měnit v závislosti na geometrii, u stlačitelného proudění apod.

Pro vnější region OR v paralelním směru platí totéž co pro VR. V normálovém směru je vhodné navázat na poměr mezi  $\Delta y_{j+1}/\Delta y_j$  a udržovat krok sítě nepřekračující velikost  $\delta/10$ , kde  $\delta$  je tloušťka mezní vrstvy. S poměrem 1.25 se tedy rozpínání sítě zastaví někde kolem  $y = \delta/2$ . V praxi je bezpečnější tloušťku mezní vrstvy lehce nadhodnotit.

Posledním regionem je LES region (LR). Proudění v tomto regionu je vířivé a turbulentní a zároveň nepatří do mezní vrstvy. Tento region opět můžeme dále dělit na viskózní region (VR), focus region (FR) a departure region (DR).

Pro viskózní LES region platí totéž co pro viskózní region v případě RANS.

Focus region je taková oblast proudění v blízkosti tělesa, kde musí být dobře popsána separace. Focus region může volně přecházet do departure region nebo přímo ústí mimo oblast ve směru proudění. Jako FR můžeme považovat oblast, odkud se částice může prouděním dostat zpět do blízkosti tělesa, či kde lze zaznamenat zpětné toky. Při rozlišování FR a DR je vhodné FR raději protáhnout dále ve směru proudění pro jistotu lepšího řešení. Krok sítě je samozřejmě v případě FR kratší než v DR, je vhodné mezi těmito oblastmi krok sítě měnit spojitě. V případě DR lze použít podobnou síť jako v případě ER, pro lepší popis by bylo asi lepší zvolit hustší síť, ovšem tento region slouží spíše k vhodnému přechodu

mezi FR a okrajovou podmínkou na výstupu, než k získání přesných výsledků.

Nakonec je tedy potřeba zvolit vhodný krok sítě pro FR. Jelikož v tomto regionu platí  $\tilde{d} = \Delta = \max \{\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z\}$  je vhodné volit isotropickou síť, neboť zjemnění sítě v jednom směru se neprojeví ve výpočtu a je tudíž neefektivní. Krok sítě  $\Delta_0$  zvolený pro FR udává míru přesnosti (D)DES a není jednotný způsob, jak tuto velikost zvolit. Ideální je provést studii se zvoleným  $\Delta_0$  a  $\Delta_0/2$ .

Samozřejmě přechod mezi jednotlivými regiony není náhlý a existují zde šedé zóny, nezpůsobují však až na jednu výjimku žádné problémy. Výjimkou je šedá zóna mezi RR a FR, což ale není způsobeno návrhem sítě, ale vlastnostmi metody DES, které jsou popsány v příslušné kapitole a její modifikace v podobě DDES tento problém z části řeší.

Pro přesnost řešení je nutné zvolit také vhodný časový krok. V celé oblasti je použit stejný časový krok a pro jeho určení nás zajímá hlavně FR, neboť zde jsou řešeny pohyby s nejvyššími frekvencemi ve srovnání s ostatními regiony. Navrhuje se volit  $\Delta t = \Delta_0/U_{max}$ , kde  $U_{max}$  je odhadovaná nejvyšší rychlost ve FR, která je typicky 1.5 a více násobek rychlosti ve volném proudění.

# Kapitola 5

## Testové úlohy

### 5.1 Validace a verifikace

Matematické modely často používáme k predikci chování nějakého systému. Například při návrhu fyzikálního experimentu můžeme pomocí matematického modelu simulovat samotný experiment a díky výsledkům se rozhodnout, které veličiny měřit a ve kterých místech je vhodné je měřit. Někdy naopak nelze provést fyzikální experiment přímo a pro predikci chování systému nám slouží pouze matematický model. Hlavně v druhém případě nás zajímá důvěryhodnost takové predikce.

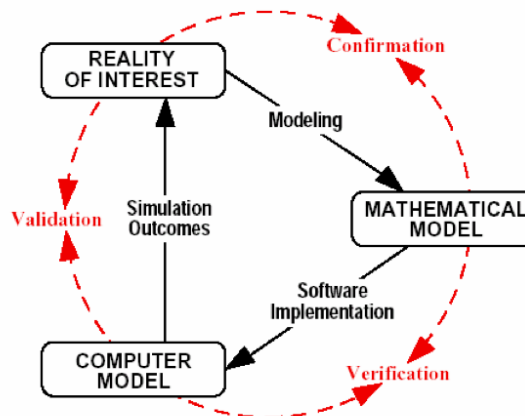
Na začátku ověřování správnosti získaných výsledků je nutné si uvědomit, že matematické modely jsou vždy nepřesné, ale mohou být užitečné pro modelování konkrétní situace. Proto je nutné hodnotit model v rámci jeho použití. Například v případě povodní budeme chtít předpověď počasí na další dvě hodiny, kterou získáme rychle a proto použijeme model, který dává sice jen přibližné výsledky, ale v krátkém čase. Model, který dává přesnější výsledky, ale výpočet trvá dlouho, je v tomto případě k ničemu.

Prvním krokem při hodnocení výsledků simulace je ověření, zda vůbec používáme správný model pro danou situaci. Jedná se o použité matematické rovnice, okrajové a počáteční podmínky, použité modely a konstitutivní vztahy - to všechno by mělo odpovídat způsobem popisovat řešený problém.

Dalším krokem jsou metody verifikace a validace. Verifikace modelu je proces, který určuje, zda je implementace modelu dostatečně přesná a výsledky odpovídají fyzikální podstatě problému. Metody validace určují míru přesnosti výsledků ve srovnání s realitou. Na obrázku 5.1 vidíme schéma procesu verifikace a validace, postupuje se ve směru hodinových ručiček. Vyvíjení matematického modelu je iterační proces - pokud výsledky validace či verifikace naznačují, že model neodpovídá realitě nebo není dobře provedena implementace modelu, je nutné se vrátit o krok zpět a model či numerické schéma pozměnit.

Proces verifikace můžeme dělit na dvě části - na verifikaci kódu a verifikaci řešení. Při verifikaci kódu je cílem identifikovat a odstranit chyby vzniklé při implementaci numerických algoritmů, které řeší matematický model. Verifikace řešení se pak snaží kvantifikovat chybu vzniklou použitím daných numerických algoritmů a výpočtem v počítači.

Určení numerické chyby při verifikaci řešení se provádí analýzou numerických algoritmů nebo studiem konvergence při zjemňování sítě či časového kroku.



Obrázek 5.1: Schéma procesu verifikace a validace. Zdroj Thacker (2004).

Chyby, které se mohou vyskytnout, jsou například nedostatečná časová či prostorová diskretizace a také zaokrouhlování čísel v počítači.

Při verifikaci kódu se v první části zabýváme kvalitou vytvořeného softwaru, v anglické literatuře software quality assurance (SQA). Testuje se, zda kód poskytuje stejné výsledky při použití různého hardwaru, operačních systémů a kompilátorů. To je prováděno pomocí statického a dynamického testování, kdy je nejprve analyzována forma a konzistence řešiče a poté identifikace chyb vzniklých během spuštění kódu. Další částí verifikace kódu je testování použitých numerických algoritmů. Pro tento účel modelujeme úlohy u kterých známe buď analytické řešení, nebo máme k dispozici velmi přesné numerické řešení a s takto známým řešením porovnáváme naše získané výsledky. Pokud nemáme k dispozici známé řešení, lze použít metodu umělých řešení - Method of Manufactured Solutions (MMS).

Metoda umělých řešení funguje na následujícím principu. Mějme parciální diferenciální rovnici, která reprezentuje náš matematický model:

$$\mathbf{D}\mathbf{u} = \mathbf{g}, \quad (5.1)$$

$\mathbf{D}$  je diferenciální operátor,  $\mathbf{u}$  je řešení a  $\mathbf{g}$  je zdrojový člen. Obvykle se postupuje tak, že se zvolí zdrojový člen, invertuje se operátor  $\mathbf{D}$  a tak získáme řešení. V metodě umělých řešení se nejprve navrhne řešení  $\mathbf{u}$  a z rovnice 5.1 se spočte zdrojový člen. Zároveň se spočte zdrojový člen numericky a výsledky se porovnají. Vhodné je navrhnout takové řešení, aby se otestovaly všechny části kódu. Podrobnější popis této metody lze nalézt v Salari et al. (2000).

Věnujme se dále metodám validace. Jak již bylo napsáno výše, validace určuje míru přesnosti získaných výsledků ve srovnání s realitou, v rámci plánovaného použití modelu. Nejprve je nutné určit proměnné, které chceme porovnávat a dále zda budeme dané veličiny porovnávat v celé oblasti nebo jen na konkrétním místě, v jakém čase, zda nás zajímají kladné a záporné odchylky nebo celková odchylka a podobně. Na základě toho pak volíme experimentální data a vhodné statistické metody pro porovnání numerických a experimentálních výsledků.

Při určování sledovaných proměnných hraje prim plánované použití metody. Například při modelování šíření znečištění nás zajímá pole koncentrací. Dále porovnáváme veličiny, které jsou důležité pro samotný model, například středované turbulentní veličiny. Nakonec porovnáváme veličiny, které slouží k ohodnocení,

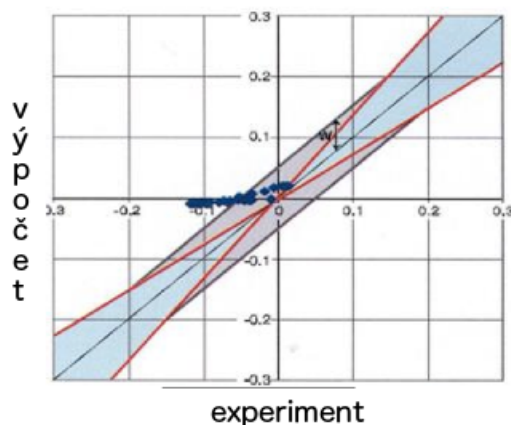
zda model funguje správně, jako například tvar energetického spektra, intenzita turbulence atd.

Experimentální data, se kterými získané výsledky porovnáváme, musí dostatečně přesně odpovídat modelovanému problému - experimentální data nemusí být přesnější než numerická data, při určování chyby modelu se musí počítat i s chybou přesnosti experimentu vůči realitě. Zároveň soubor experimentálních dat musí obsahovat ta data, která jsou relevantní s tím, které proměnné porovnáváme. V případě nedostatku dat je dobré zhodnotit, zda má porovnávání smysl.

Zvolená experimentální data následně porovnáváme s numerickými daty. Pro kvantifikaci shody mezi daty se používají různé statistické metody. Jako příklad uveďme míru shody, v anglické literatuře hit-rate. Mějme soubor experimentálních dat  $P_i$  a soubor numerických dat  $O_i$ , kde v obou případech  $i = 1, \dots, n$ . Míra shody  $q$  se určí jako

$$q = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_i, \text{ kde } N_i = \begin{cases} 1 & \text{pro } \frac{|P_i - O_i|}{|O_i|} \leq D \text{ nebo } |P_i - O_i| \leq W, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde  $D$  a  $W$  jsou parametry, jejichž hodnoty se navrhují vzhledem k úloze. Jejich význam je patrný z obrázku 5.2. Dvě paralelní čáry ve vzdálenosti  $\pm W$  určují oblast akceptovatelných výsledků vzhledem k absolutní odchylce  $W$ . Modrá oblast značí akceptovatelné výsledky vzhledem k relativní odchylce  $D$ . Čím blíže je hodnota  $q$ , tím lepší shoda. Další popis metod validace lze nalézt v Oberkampff et al. (2000).



Obrázek 5.2: Ilustrace míry shody mezi naměřenými a experimentálními daty. Převzato z Jaňour (2013).

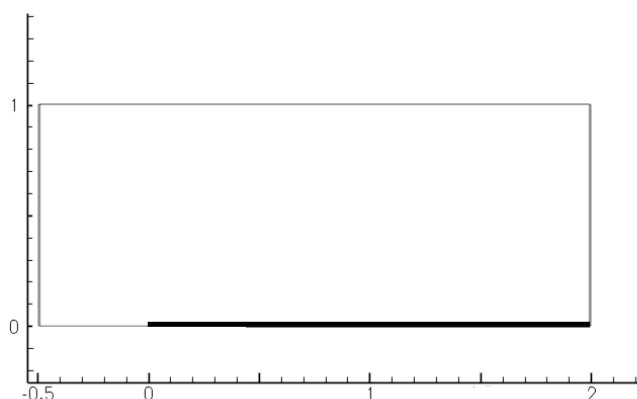


## 5.2 Simulace

V této části práce budeme testovat metody DES a DDES na dvou benchmarkových úlohách s cílem metody ohodnotit dle výše zmíněné metodiky. V rámci této diplomové práce se zabýváme pouze validací metod. Co se týče verifikace, očekáváme, že byla provedena autory kódu a v průběhu času dalšími uživateli. Lze odkázat například na článek Fisch et al. (2012), ve kterém se autoři zabývají verifikací pomocí metody umělých řešení. Pro validaci metod byly zvoleny úlohy obtékání hladké desky a proudění kanálem se skokovým rozšířením. Zdrojem pro experimentální data je databáze Ercoftac.

### 5.2.1 Obtékání desky s nulovým tlakovým gradientem

První úloha popisuje obtékání hladké desky s nulovým tlakovým gradientem (zero pressure gradient flat plate). Hladká deska o délce 2 je umístěna na spodní hranici oblasti s rozměry 1 x 2.5 x 0.1, situace je znázorněna na obrázku 5.3.

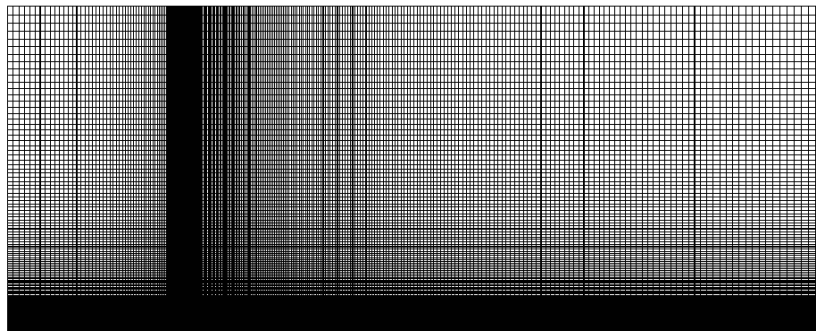


Obrázek 5.3: Geometrie úlohy s obtékanou hladkou deskou.

Proudění bylo modelováno s Reynoldsovým číslem  $Re = \frac{U_\infty L}{\nu} = 5 \cdot 10^6$ , přičemž charakteristická délka  $L = 1$  odpovídá výšce oblasti, charakteristická rychlost byla zvolena jako  $U_\infty = 25$  a viskozita je rovna  $\nu = 5 \cdot 10^{-6}$ . Okrajové podmínky pro rychlost  $\mathbf{u}$ , tlak  $p$  a parametr  $\tilde{\nu}$  z modelu Spalart-Allmaras byly zvoleny následovně:

- na vstupu:  $\mathbf{u} = (25, 0, 0)$  -bez/s náhodnými fluktuacemi,  $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ ,  $\tilde{\nu} = 3\nu$ ,
- na výstupu:  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} = 0$ ,  $p = 1$ ,  $\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial n} = 0$ ,
- na horní stěně a na dolní stěně před deskou:  $\mathbf{u} = (25, 0, 0)$ ,  $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ ,  $\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial n} = 0$ ,
- na desce:  $\mathbf{u} = (0, 0, 0)$ ,  $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ ,  $\tilde{\nu} = 0$ ,
- na bočních stěnách: cyklická okrajová podmínka pro všechny veličiny.

Pro výpočet byla navržnuta síť s počtem uzlů  $193 \times 273 \times 7$ . Síť je rovnoměrná ve směru  $z$ , nerovnoměrná ve směru  $x$  a  $y$ , viz obrázek 5.4. První krok ve směru



Obrázek 5.4: Výpočetní síť pro směry  $x$  a  $y$ .

$y$  je roven  $\Delta_y = 2 \cdot 10^{-4}$ , poměr kroků u spodní stěny je 1.3 a klesá k hodnotě 1 u vrchní stěny. Mezní vrstvu, jejíž odhadovaná maximální hodnota je 0.03, pokrývá 15 kroků sítě. Ve směru  $x$  je použito zjemnění kolem bodu  $x = 0$  pro lepší modelování přechodu mezi volnou hranicí a pevnou deskou. Nakonec časový krok byl zvolen jako  $\Delta_t = 1 \cdot 10^{-5}$  a potřebný časový interval pro rozvinutí proudění byl kolem  $T = 1$ . Délka časového intervalu záležela na vstupní podmínce pro rychlost. U použití turbulentní vstupní podmínky dosáhneme rozvinutého proudění rychleji, rozdíl v získaných výsledcích není patrný. U další úlohy už uvažujeme pouze turbulentní vstupní podmínku.

V této úloze je největší důraz kladen na rychlostní profil v mezní vrstvě. Při vysokém Reynoldsově čísle lze tento rychlostní profil popsat pomocí logaritmického zákona, tedy

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \log y^+ + C, \quad (5.2)$$

kde  $\kappa$  je Kármánova konstanta rovna  $\kappa = 0.41$  a  $C$  je konstanta, pro hladkou desku s hodnotou kolem  $C = 5.1$ . Veličiny  $y^+$  a  $u^+$  jsou definovány jako

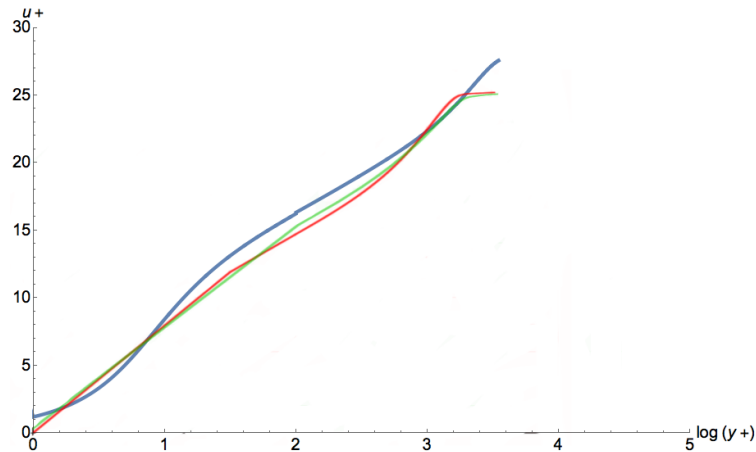
$$y^+ = \frac{yu^\tau}{\nu}, \quad u^+ = \frac{u}{u^\tau}, \quad \text{kde } u^\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (5.3)$$

a  $\tau_w$  je smykové napětí na hranici. Rychlostní profil odpovídá logaritmickému profilu až od určité vzdálenosti od pevné stěny, udává se  $y^+ > 30$ . Nejbliže stěně, tedy pro  $y^+ < 5$ , se nachází vrstva, která se označuje jako viskózní podvrstva. Pro tuto vrstvu teoreticky platí

$$u^+ = y^+. \quad (5.4)$$

Mezi viskózní podvrstvou a vrstvou s logaritmickým profilem, pro  $5 < y^+ < 30$ , se nachází přechodná zóna (buffer layer). Pro tuto zónu neplatí žádný ze vztahů 5.2, 5.4.

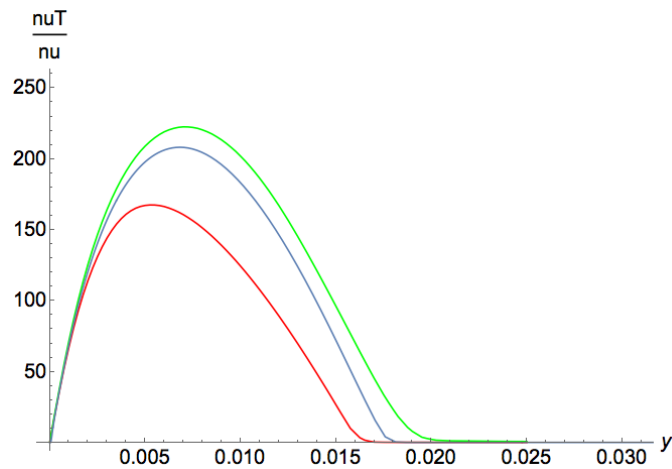
Na obrázku 5.5 vidíme rychlostní profil získaný metodou DES (červená čára) a DDES (zelená čára) v porovnání s experimentem.



Obrázek 5.5: Rychlostní profil. Červená - DES, zelená - DDES, modrá - experiment.

Je vidět, že metody DES a DDES dobře modelují profil rychlosti ve vrstvě s logaritmičným profilem. Viskózní podvrstva není modelovaná tak citlivě, jistě neplatí  $u^+ = y^+$ . Může to být důsledek tvaru použité sítě v těsné blízkosti u hranice.

Na dalším obrázku 5.6 je zobrazen průběh turbulentní viskozity  $\nu_t$  normované kinematickou viskozitou  $\nu$ . Graf je vytvořen pro  $x = 0.97$ .

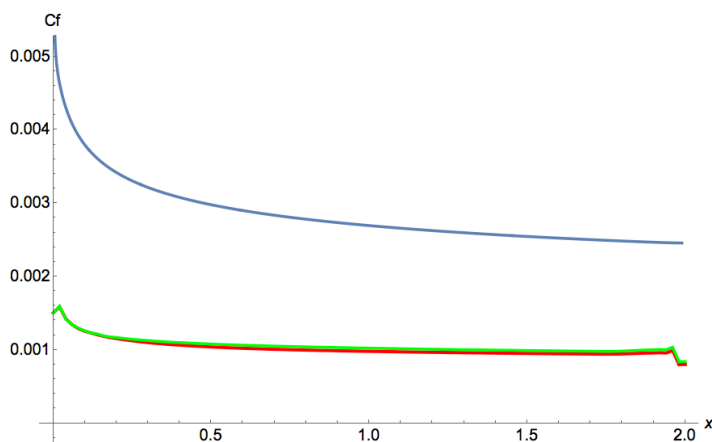


Obrázek 5.6: Turbulentní viskozita normovaná dynamickou viskozitou. Červená - DES, zelená - DDES, modrá - experiment.

Na tomto grafu si lze všimnout, že turbulentní viskozita pro DES je daleko menší než pro DDES. Nižší turbulentní viskozita může být způsobena šedou zónou mezi RANS a LES regionem a mít za následek jev MSD, viz 3. kapitola.

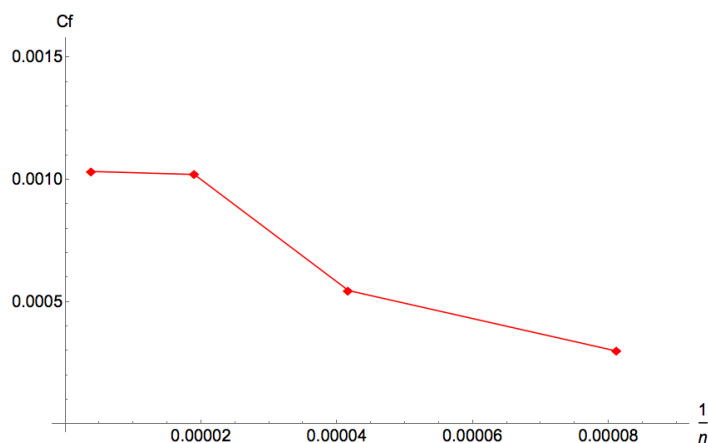
Obrázek 5.7 zachycuje koeficient tření  $C_f$  na obtékané desce. Koeficient tření je definován jako

$$C_f = \frac{\tau_w}{1/2\rho U_\infty^2}. \quad (5.5)$$



Obrázek 5.7: Koeficient tření. Červená - DES, zelená - DDES, modrá - experiment.

Koeficient tření je v případě DES a DDES výrazně nižší než očekávaná hodnota. Opět to může být způsobeno nedostatečně jemnou sítí v blízkosti hranice, podobně jako u rychlostního profilu. Tento názor lze podpořit následujícím obrázkem 5.8, který zachycuje hodnotu  $C_f$  modelovanou metodou DDES pro  $x = 0.97$  pro různě jemné sítě. Vidíme, že při zjemňování sítě koeficient roste. Na grafu zobrazujeme  $C_f$  v závislosti na  $1/n$ , kde  $n$  je počet uzlů sítě.

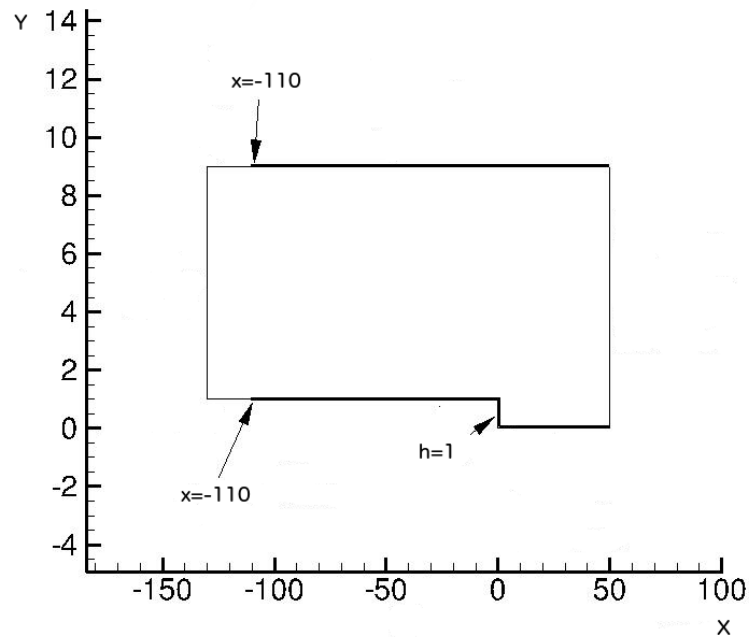


Obrázek 5.8: Koeficient tření pro  $x=0.97$  pro různě jemné sítě.

Tedy až na chování v těsné blízkosti u hranice ve viskózní podvrstvě, můžeme říci, že modely DES a DDES jsou v dobré shodě s realitou.

## 5.2.2 Proudění kanálem se skokovým rozšířením

Druhá úloha, která se často používá k testování metod, popisuje proudění kanálem se skokovým rozšířením (backward facing step). Geometrie úlohy je zobrazena na obrázku 5.9. Jedná se o kanál s rozměry  $x = 180$ ,  $y = 9$  a  $z = 7$ . Schod je umístěn v  $x = 0$ , výška schodu je  $h = 1$ .

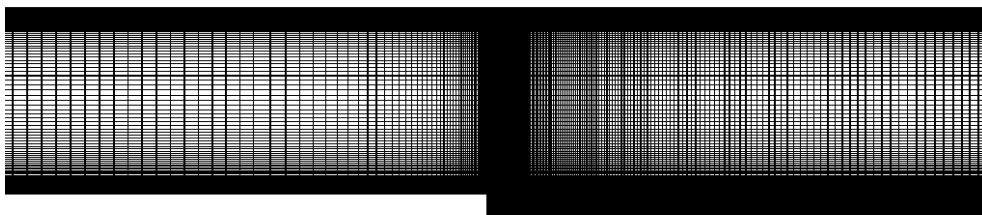


Obrázek 5.9: Geometrie úlohy

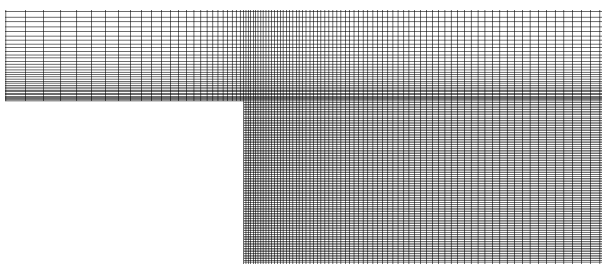
Reynoldsovo číslo pro tuto úlohu je  $Re = 36000$ , toto číslo je odvozeno vzhledem k výšce schodu  $h = 1$ , zvolená charakteristická rychlost má velikost  $U_\infty = 0.036$  a viskozita je rovna  $\nu = 1 \cdot 10^{-6}$ . Okrajové podmínky jsou v tomto případě předepsány takto:

- na vstupu:  $\mathbf{u} = (0.036, 0, 0)$  - s náhodnými fluktuacemi,  $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ ,  $\tilde{\nu} = 3\nu$ ,
- na výstupu:  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} = 0$ ,  $p = 0$ ,  $\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial n} = 0$ ,
- na vrchní a spodní pevné stěně:  $\mathbf{u} = (0, 0, 0)$ ,  $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ ,  $\tilde{\nu} = 0$ ,
- na vrchní a spodní volné stěně:  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} = 0$ ,  $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ ,  $\tilde{\nu} = 3\nu$ ,
- na bočních stěnách: cyklická okrajová podmínka pro všechny veličiny.

Síť pro tuto úlohu má rozměry 420 x 230 x 7. Oblast je rozdělena do několika bloků, aby bylo možné v daných částech oblasti použít různou hustotu sítě. Výška odhadované mezní vrstvy v oblasti kanálu před schodem je  $1.5h$ , tedy v našem případě 1.5. V této oblasti je první krok sítě ve směru  $y$  roven  $\Delta_y = 0.007$ , poměr rozpínání je přibližně 1.3 a mezní vrstvu pokrývá kolem 30 buněk sítě v normálovém směru. Síť v oblasti těsně za schodem je v  $x$  a  $y$  téměř isotropní, velikost kroku je  $\Delta_x \approx \Delta_y \approx 0.009$ . Síť ve střední části kanálu a v oblasti kolem schodu je vidět na obrázcích 5.10 a 5.11.



Obrázek 5.10: Výpočetní síť v oblasti  $x=-20$  až  $x=20$ .

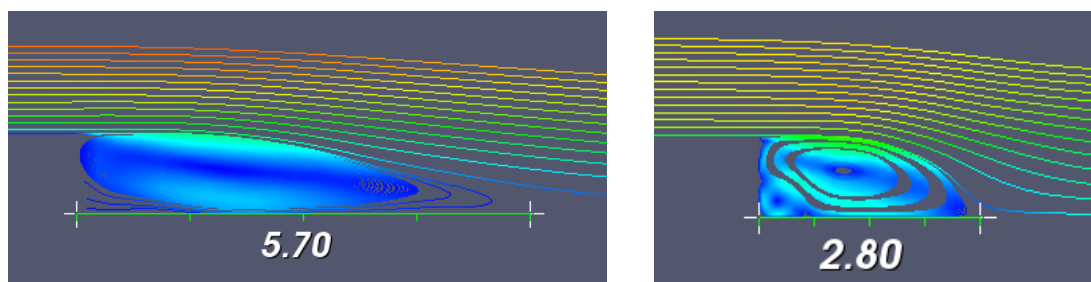


Obrázek 5.11: Síť kolem schodu. Oblast pro  $x=-1.5$  po  $x=4$ ,  $y=0$  po  $y=1.5$ .

Délka časového kroku je volena jako  $\Delta_t = 0.1$ , časový interval potřebný pro rozvinutí turbulentního proudění má velikost přibližně  $T = 4000$ .

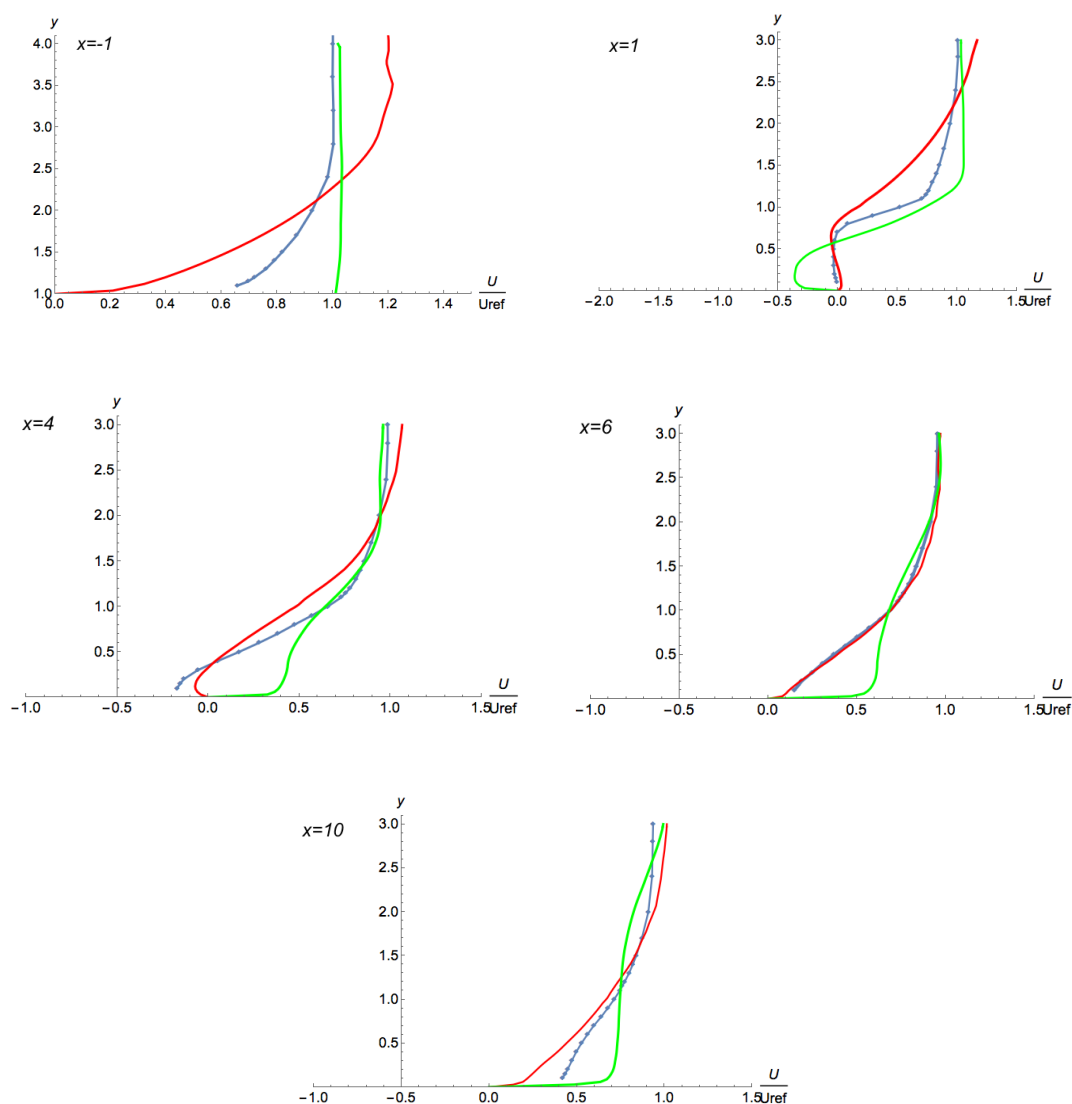
Při modelování tohoto problému je kladen důraz na určení délky recirkulační zóny za schodem, na koeficient tření na spodní stěně v okolí schodu a na rychlostní profil v blízkosti schodu.

Délka recirkulační zóny byla experimentem stanovena na  $x/h = 6.26 \pm 0.10$ . Na obrázcích 5.12 je znázorněný vír za schodem pomocí proudnic a délka recirkulační zóny pro metodu DES, resp. DDES.



Obrázek 5.12: Délka recirkulační zóny pro metodu DES (vlevo) a DDES (vpravo).

Následuje série grafů rychlostního profilu pro  $x/h = -4, 1, 4, 6, 10$ . Rychlost je normovaná charakteristickou rychlostí.



Obrázek 5.13: Rychlostní profil v různých částech kanálu v blízkosti schodu. Modrá - experiment, červená - DES, zelená - DDES.

V tabulce 5.14 je uvedena míra shody  $q$  při relativní odchylce  $D = 0.1$  pro rychlostní profily.

hit-rate $q$ pro $D = 0.1$	$x = -4$	$x = 1$	$x = 4$	$x = 6$	$x = 10$
DES	0.52	0.752	0.857	0.929	0.857
DDES	0.52	0.321	0.643	0.679	0.643

Obrázek 5.14: Míra shody pro rychlostní profily.

Metoda DES modeluje délku recirkulační zóny jako 5.8, což je 91.05% naměřené délky. Tento výsledek byl očekávaný. Základ modelu, metoda Spalart-Allmaras, modeluje délku recirkulační zóny jako 6.1 a zároveň přítomnost šedé

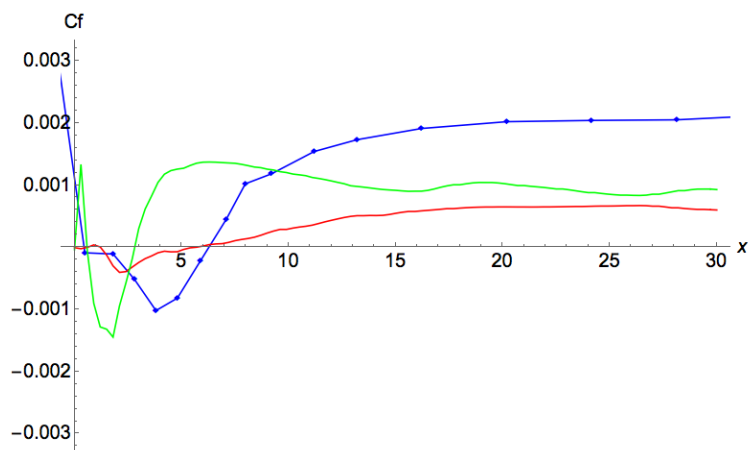
zóny mezi RANS a LES regionem může podhodnocovat frikční rychlost až o 15%, což se na délce recirkulační zóny může projevit.

Překvapivý je výsledek metody DDES, která podhodnocuje délku recirkulační zóny na méně než polovinu délky získané experimentem. Na vině bude s největší pravděpodobností stále ještě nevhodně navržená síť. Při různých obměnách sítě jsme získávali velmi různé délky recirkulační zóny - od hodnot jako 3.2, 6.9 až po momenty, kdy délka recirkulační zóny s časem stále rostla, viz. obrázková příloha.

Na základě poznámky v článku Fröhlich et al. (2008), ve kterém autoři zmiňují, že DDES může při použití různých počátečních podmínek dávat velmi rozdílné výsledky pro turbulentní napětí, byla naše úloha modelována jak pro turbulentní vstupní podmínku, tak pro stálou rychlost bez fluktuací. Rozdíl však byl pouze v délce časového intervalu, který je potřebný pro rozvinutí turbulence. Středované hodnoty, které porovnáваме s experimentem, nedošly větších změn.

V rámci ušetření času byly některé prvotní výpočty, hlavně pro testování vlivu sítě na řešení, prováděny ve 2D. Jak bylo zmíněno v první kapitole, turbulentní proudění je vždy třídídimenzionální a jeho modelování ve dvou rozměrech ovlivní kvalitu výsledků. V případě modelování proudění v kanále se skokovým rozšířením je jedním z parametrů, který bude ovlivněn, i délka recirkulační zóny. V případě modelu Spalart-Allmaras je délka zóny ve 2D vždy kratší, rozdíly pro různé modely lze najít například ve článku Haque et al. (2007). Bylo tedy přirozené hledat chybu v tom, že výpočet není prováděn ve 3D. Rozdíl v délce recirkulační zóny však byl pouze v řádu desetin, což neřeší náš problém.

Délka recirkulační zóny jistě souvisí i s koeficientem tření. Obrázek 5.15 obsahuje grafy koeficientu tření na spodní hranici za schodem. Stejně jako v první



Obrázek 5.15: Koeficient tření. Červená - DES, zelená - DDES, modrá - experiment.

úloze je koeficient tření získaný metodami DES a DDES nižší než ten naměřený.

Pokud porovnáme rychlostní profily na obrázcích 5.13, vidíme, že metoda DES se dobře shoduje s realitou. Jediný profil, kde je shoda poloviční, je v těsné blízkosti před schodem. Metoda DDES se shoduje s experimentem až od druhé poloviny mezní vrstvy, což je neuspokojivé.

Další obrázky k této úloze jsou uvedeny v příloze.



# Závěr

V této práci jsme se zabývali hybridními RANS/LES metodami pro modelování turbulentního proudění, motivací pro jejich vznik, jejich principy a kategoriemi a nakonec i konkrétními zástupci v podobě metod Detached Eddy Simulation a Delayed Detached Eddy Simulation.

Nejprve bylo popsáno turbulentní proudění a klasické způsoby, jak turbulenci modelovat. Dále byly představeny hybridní RANS/LES metody a podrobněji jsme se věnovali metodě DES a jejím modifikacím. Ve druhé části práce jsme se věnovali implementaci metod DES a DDES v softwaru OpenFOAM, numerické reprezentaci používaných rovnic a návrhu vhodné sítě. Poslední část práce byla věnovaná metodice hodnocení modelů a testování metod DES a DDES na dvou benchmarkových úlohách.

První úloha popisovala turbulentní proudění nad hladkou deskou. Metody DES a DDES řeší tuto úlohu podobně dobře, jsou patrné problémy ve viskózní podvrstvě a koeficient tření získaný modelováním je přibližně třikrát menší než očekávaná hodnota.

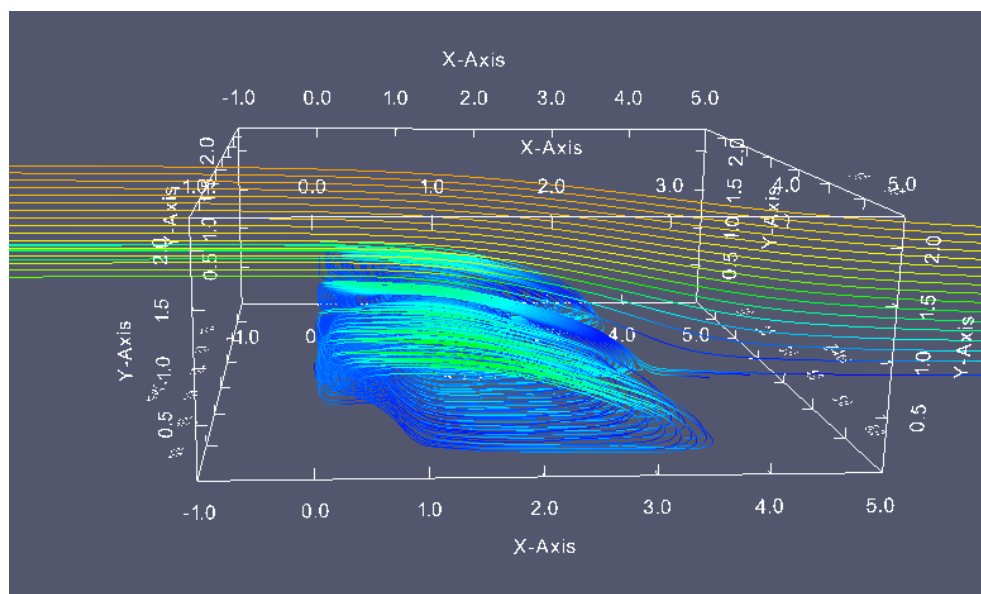
Druhá úloha řeší proudění kanálem se skokovým rozšířením. Problémem u této úlohy je podhodnocení délky recirkulační zóny, metoda DES odhaduje délku s 91.05% přesností, metoda DDES s 44.73% přesností. Další odchylku od reality představuje nižší koeficient tření na spodní stěně za schodem. Rychlostní profily získané metodou DES se velmi dobře shodují s experimentem, metoda DDES v oblasti blízko stěny neřeší proudění dostatečně.

Celkově se dá říci, že metody dobře fungují v oblasti volného proudění, problémy nastávají v mezní vrstvě. Vzhledem k vlastnostem metody DES jsou získané výsledky touto metodou očekávané, jisté odchylky od reality mohou být způsobené šedou zónou mezi RANS a LES regionem. Metoda DDES měla tyto problémy řešit, což se nepotvrdilo. Vzhledem k dostupné literatuře, která na mnoha příkladech dokazuje velmi dobré chování metody DDES, je pravděpodobně chyba způsobena špatným návrhem sítě či okrajových podmínek. Pro zjištění příčiny je potřeba další testování metody.

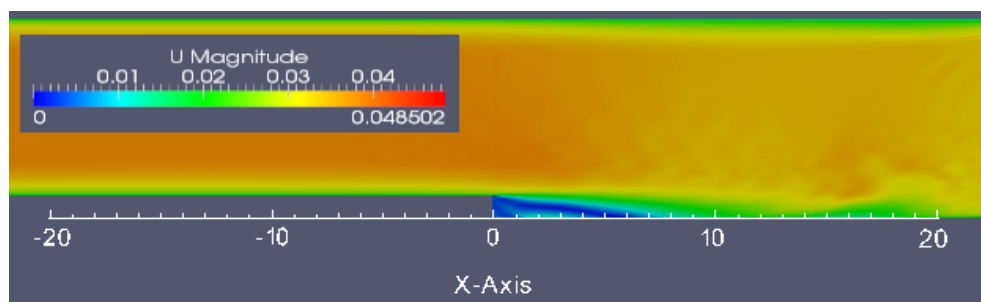
Vzhledem k nejistým výsledkům nebylo provedeno ani plánované porovnání s některou z klasických metod LES, abychom mohli zkoumat výhody přístupu hybridních RANS/LES metod. Společně s testováním metody DDES to zůstává předmětem dalšího studia.

## Příloha A

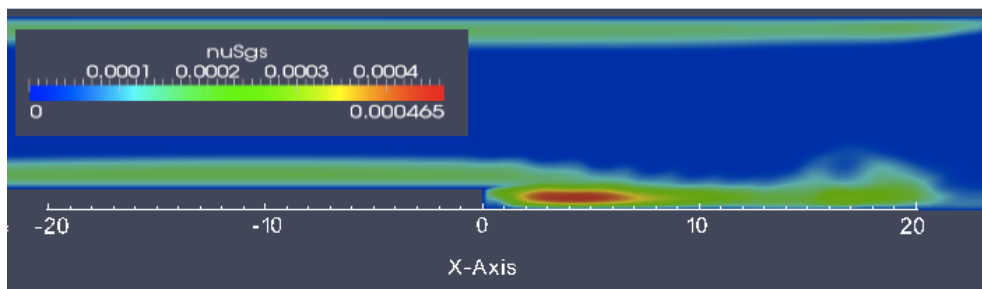
Na následujících stránkách jsou uvedeny obrázky proudění k předchozím úlohám, získaných vizualizačním programem ParaView.



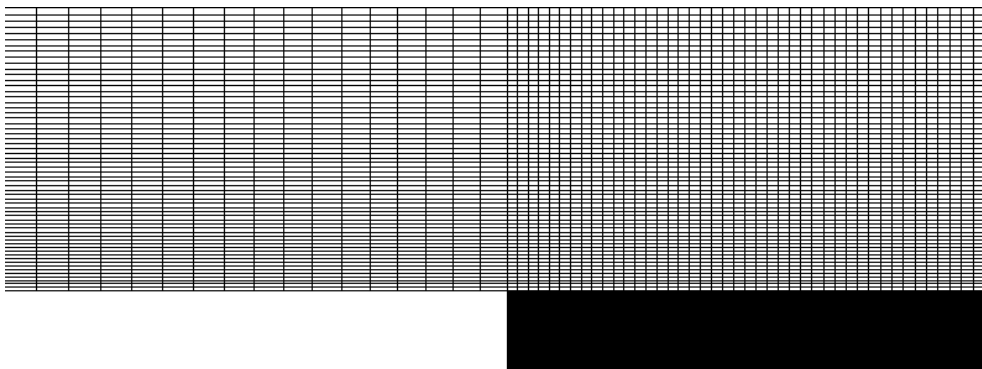
Obrázek 5.16: Zobrazení proudnic pro oblast za schodem ve 3D, proudnice procházejí linií umístěnou za schodem pro  $z = 3.5$ . Úloha proudění kanálem se skokovým rozšířením,  $Re = 36000$ ,  $t=4000$ , metoda DDES



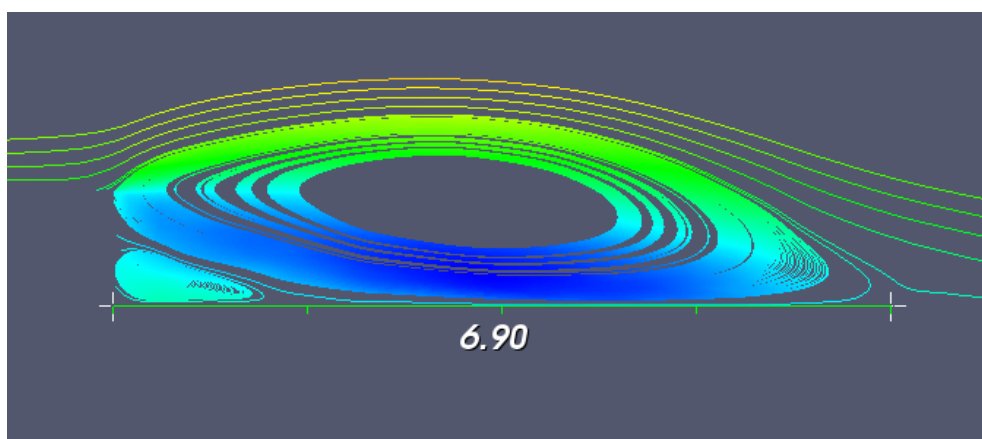
Obrázek 5.17: Rychlost proudění kanálem pro  $Re = 36000$ , průřez oblastí pro  $z = 3.5$ , střední oblast kanálu,  $t=4000$ ,metoda DDES



Obrázek 5.18: Turbulentní viskozita při proudění kanálem,  $Re = 36000$ , průřez oblastí pro  $z = 3.5$ , střední oblast kanálu,  $t=4000$ ,metoda DDES



Obrázek 5.19: Ukázka nevhodně zvolené sítě - přechody mezi oblastmi nejsou spojitě. Velikost oblasti:  $-6 < x < 6$ ,  $0 \leq y < 5$ .



Obrázek 5.20: Vír za schodem pro nevhodně zvolenou síť - vír překračuje délku recirkulační zóny a zároveň je vyšší než obtékaný schod, což je nefyzikální. Metoda DDES.

# Literatura

- Breuer M., Jaffrézic B., Arora, K. (2007). Hybrid LES–RANS technique based on a one-equation near-wall model. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, DOI 10.1007/s00162-007-0067-9.
- Fadai-Gothbi A., Friess C., Manceau R., Gatski T.B., Borée J. (2010). A Hybrid RANS–LES Model Based on Temporal Filtering. *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design Volume 111*, 225-234.
- Ferziger J., Perić M. (1997). *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag.
- Fisch R., Franke J., Wüchner R., Bletzinger K. U. (2012). Code Verification of OpenFOAM solvers using the Method of Manufactured Solutions. *7th Open-FOAM Workshop*, Darmstadt.
- Fröhlich J., von Terzi D. (2008). Hybrid LES/RANS Methods for the Simulation of Turbulent Flows. *Progress in Aerospace Sciences*, 44:349–377.
- Haque A., Ahmad F., Yamada S., Chaudhry S.R. (2000). Assessment of Turbulence Models for Turbulent Flow over Backward Facing Step. *Proceedings of the World Congress on Engineering 2007 Vol II*, London.
- Jaňour Z. (2013) Personal communication.
- Kolmogorov A.N. (1941). The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 30, 299-303.
- Kniesner B., Šarić S., Mehdizadeh A., Jakirlić S., Hanjalić K., Tropea C., Sternel D., Gauss F., Schäfer M. (2007). Wall treatment in LES by RANS models: method development and application to aerodynamic flows and swirl combustors. *ERCOTAC Bulletin*, 72:33–40.
- Moon F.C. (1992). *Chaotic and fractal dynamics: an introduction for applied scientists and engineers*. New York: Wiley.
- Oberkampf W. L., Trucano T. G. (2000). Validation Methodology in Computational Fluid Dynamics. *AIAA 2000-2549*.
- Panguluri S., Reasor D. A., LeBeau R. P. Jr (2007). Investigation of Grey Area Construction on the performance of Detached Eddy Simulation. *18th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, Miami.

- Pope S. B. (2000). *Turbulent Flows*. Cambridge University Press.
- Richardson L.F. (1922). *Weather Prediction by Numerical Process*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Salari K., Knupp P. (2000). Code Verification by the Method of Manufactured Solutions. *Technical Report SAND2000-1444*, Sandia National Laboratories., Sandia National Laboratories.
- Shur M. L., Spalart P.R., Strelets M. Kh., Travin A. (2005). A hybrid RANS-LES approach with delayed-DES and wall-modelled LES capabilities. *International Journal of Heat and Fluid Flow* 29,1638–1649.
- Spalart P. R., Jou W-H., Strelets M., Allmaras S. R., (1997). Comments on the Feasibility of LES for Wings, and on a Hybrid RANS/LES Approach. *Advances in DNS/LES, 1st AFOSR Int. Conf. On DNS/LES*, Greyden Press, Columbus.
- Spalart P. R., Deck S., Shur M.L., Squires K.D., Strelets M. Kh., Travin A. (2005). A new version of detached-eddy simulation, resistant to ambiguous grid densities. *Theor. Comput. Fluid Dyn.* 20: 181–195.
- Spalart P. R. (2001). Young person’s guide to Detached-Eddy Simulation grids. *NASA CR-2001- 211032*.
- Speziale C. G. (1996). Computing non-equilibrium turbulent flows with time-dependent RANS and VLES. *15th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, Monterey.
- Thacker B. H., Doebeling S. W., Hemez F.M., Anderson M. C., Pepin J. E., Rodriguez E. A. (2004). Concepts of Model Verification and Validation. *LA-14167-MS*.
- Verhoeven O. (2011). *Trailing Edge Noise Simulations using IDDES in Open-FOAM*. Master of Science Thesis, Delft University of Technology.

Webové stránky:

ERCOFTAC Classic Collection Database:  
<http://cfd.mace.manchester.ac.uk/ercoftac/index.html>

NASA Turbulence Modeling Resource, model Spalart-Allmaras:  
<http://turbmodels.larc.nasa.gov/spalart.html>

OpenFoam:  
<http://www.openfoam.org>