Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Ing. et Bc. Vladimíra Pavlicová

Webová aplikace: Základní poznatky z matematiky na střední škole

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc.

Studijní program: Geografie

Studijní obor: Učitelství geografie a matematiky pro SŠ

Praha 2014

Chtěla bych poděkovat doc. RNDr. Jarmile Robové, CSc.,
za rady, nápady a připomínky k diplomové práci.

Zároveň bych ráda poděkovala svým rodičům
za poskytnutou podporu v průběhu celého studia.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 30. července 2014 Vladimíra Pavlicová

Název práce: Webová aplikace: Základní poznatky z matematiky na střední škole

Autor: Ing. et Bc. Vladimíra Pavlicová

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc.,
Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Předložená diplomová práce má za cíl sloužit jako interaktivní výukový materiál především pro žáky prvního ročníku středních škol, zaměřený na základní poznatky z matematiky. První část práce se věnuje analýze existujících webových stránek, které korespondují s tématem diplomové práce. Hodnocena je nejen jejich odborná kvalita, ale také rozsah využití interaktivních prvků. Ve druhé části práce je představen vytvořený výukový materiál, který má formu webové stránky. Obsahuje učivo o mocninách a odmocninách, mnohočlenech a lomených výrazech. V souladu s aktuálními trendy je důraz kladen na vizualizaci učiva (schémata, grafické prvky) a také interaktivitu. Webové stránky navíc umožňují individuální výuku, neboť součástí všech cvičení je i řešení, tudíž uživatel získává okamžitou zpětnou vazbu. Stránky jsou volně přístupné.

Klíčová slova: mocniny, mnohočleny, lomené výrazy, výuka matematiky

Title: Web application: Basic knowledge of mathematics at secondary school

Author: Ing. et Bc. Vladimíra Pavlicová

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc.,
Department of Mathematics Education

Abstract: The presented work is intended to serve as a teaching material in particular for pupils of the first year of secondary school, focusing on the basic knowledge of mathematics. The first part of the thesis is devoted to an analysis of existing web page, which corresponds to the theme of the diploma thesis. The evaluation takes into account the expertise as well as the scope of use of interactive elements. In the next part, the created teaching material in a form of web page is presented. It deals with the subject matter of powers, roots, polynomials and rational expressions. In accordance with current trend, the emphasis is put on both visualisation of curriculum (charts, use of graphics) and interactivity. All exercises to practise involve solution, therefore users are allowed to gain immediate feedback and thus to study individually. Web page is free available.

Keywords: powers, polynomials, rational expressions, maths education

Obsah

Úvod

Mocniny a odmocniny, mnohočleny a lomené výrazy patří mezi základy středoškolské matematiky, na které postupně navazují další matematické poznatky. Porozumění těmto základům a schopnost je aplikovat při řešení příkladů je tudíž klíčová, neboť tvoří nezbytný předpoklad pro úspěšné zvládnutí matematiky ve vyšších ročnících střední školy.

Předkládaná diplomová práce představuje výukový materiál určený pro žáky především prvního ročníku střední školy, který jim má pomoci osvojit si zmíněné znalosti a dovednosti základů matematiky. Forma práce je zvolena tak, aby pro uživatele byla nejen přínosná a efektivní, ale také atraktivní. V souladu s aktuálním trendy je proto důraz kladen na vizualizaci učiva (schémata, grafické prvky) a také interaktivitu. Cílem diplomové práce je tedy vytvořit interaktivní webové stránky, které budou sloužit jako výukový materiál zaměřený na základní poznatky z matematiky na střední škole.

Nejprve je v práci provedena analýza vybraných existujících webových stránek, které tematicky souvisejí s diplomovou prací. Výběr zahrnuje české i cizojazyčné výukové materiály, přičemž je hodnocena nejen odborná kvalita, ale také rozsah využití interaktivních prvků. Tato analýza slouží jako inspirace pro tvorbu vlastní webové stránky, jako zdroj příkladů (ne)dobré praxe.

Druhý oddíl diplomové práce obsahuje vlastní výukový materiál. Webové stránky jsou dočasně dostupné z adresy:

www.karlin.mff.cuni.cz/~pavlv7an/vladka

V budoucnu by měly být začleněny na Portál středoškolské matematiky, který zajišťuje katedra didaktiky matematiky Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Diplomová práce je rozšířením bakalářské práce na obdobné téma. Z důvodu předpokládaného začlenění na Portál však bylo nutné veškeré dříve napsané texty převést do formátu, který odpovídá dalším výukovým zdrojům uloženým na zmíněném Portálu.

Každá kapitola vlastního výukového materiálu, s výjimkou první, sestává ze dvou dílčích částí. Nejprve je uveden text vysvětlující učivo, který je pro větší názornost doprovázen vzorově vyřešenými příklady, příp. schématy. Na něj pak navazuje množství interaktivních cvičení, přičemž součástí každého cvičení je řešení. V práci se objevují mimo jiné slovní úlohy, jež činí často žákům potíže. S ohledem na jednoduchost a srozumitelnost zadání jsou některé slovní úlohy spíše teoretické.

V první kapitole jsou připomenuty základní pojmy a vztahy, které jsou nezbytné k pochopení dalšího učiva (číselné obory, druhá odmocnina z reálného čísla, absolutní hodnota reálného čísla, procenta, dělitelnost v oboru přirozených čísel). Předpokládá se, že tato kapitola slouží jen pro zopakování dříve získaných znalostí, proto neobsahuje interaktivní cvičení. Druhá kapitola se zaměřuje na mocniny (s přirozeným, celým i racionálním exponentem) a odmocniny. V následující kapitole je zaveden pojem výraz, přičemž pozornost je věnována zejména mnohočlenům. Čtvrtá kapitola se zabývá lomenými výrazy.

Součástí webových stránek je také popis jejich ovládání, ve kterém jsou vysvětleny funkce jednotlivých tlačítek a dalších prvků, které se na webu vyskytují. Dále je zařazen seznam použitých matematických symbolů a značek. Na konci je pak uveden interaktivní rejstřík.

Webové stránky plně umožňují individuální výuku, neboť jsou pernamentně dostupné z příslušné webové adresy, každý žák tedy může učivem procházet dle svých potřeb. Všechny úlohy i cvičení obsahují řešení, tudíž žák získává bezprostředně zpětnou vazbu. Pro diferenciaci učiva navíc slouží speciální tlačítko, které umožnuje zobrazení náročnějších cvičení či rozšiřujícího výkladu.

Tištěná verze diplomové práce ze své podstaty neobsahuje interaktivní prvky, které však tvoří podstatnou součást webových stránek. Z důvodu rozsahu práce jsou navíc v tištěné verzi uváděna pouze řešení vybraných cvičení (zejména těch náročnějších). Formátování a úprava výukového materiálu odpovídá potřebám webu, tudíž nemusí být vždy nejvhodnější pro tištěnou verzi.

Oddíl 1

Analýza existujících webových stránek

1. Cíle a kritéria

První oddíl je věnován analýze a zhodnocení existujících webových stránek, jež se obsahově váží k tématu diplomové práce. Chtěla bych tím poskytnout základní přehled o volně dostupných výukových materiálech, které může učitel využít v hodinách matematiky na střední škole či sami žáci ve volném čase jako doplňkový materiál pro pochopení a procvičení učiva.

Internet totiž poskytuje celou řadu alternativních zdrojů ke klasickým učebnicím a sbírkám matematiky, které především mladá generace stále častěji vyhledává. Jednotlivé webové stránky se však značně liší v kvalitě zpracování (ať již z hlediska odborného či grafického), na což je poukázáno v dalším textu.

Analýza stránek je vždy prováděna na podkladě následujících šesti kritérií: odbornost, didaktický aspekt, interaktivita, grafika, uživatelský komfort a celkový dojem. Hodnocení webových stránek se zaměřuje na učivo, které tematicky souvisí s diplomovou prací.

V rámci kritéria odbornosti je důraz kladen na správnost používaných tvrzení, terminologických pojmů i numerických výpočtů. Didaktický aspekt zahrnuje hlavně srozumitelnost výkladu, adekvátní začlenění odborných termínů, návaznost dílčích témat a také volbu názorných příkladů. Další kritérium si všímá množství a kvality interaktivních prvků na webových stránkách, jako jsou např. krokovaná řešení, automaticky opravované testy či dynamické prvky. Právě interaktivita by měla být jednou z hlavních předností online materiálů oproti tištěným učebnicím a sbírkám.

Dále zkoumaným hlediskem je grafika, tedy především design a atraktivita webových stránek, ale také preciznost zpracování matematických zápisů a symbolů. Uživatelský komfort se zaměřuje na přehlednost stránek, intuitivnost jejich ovládání, funkční spolehlivost a rychlost načítání. Celkový dojem je souhrnným ukazatelem, který bere v potaz všechna dílčí kritéria.

2. Vlastní analýza

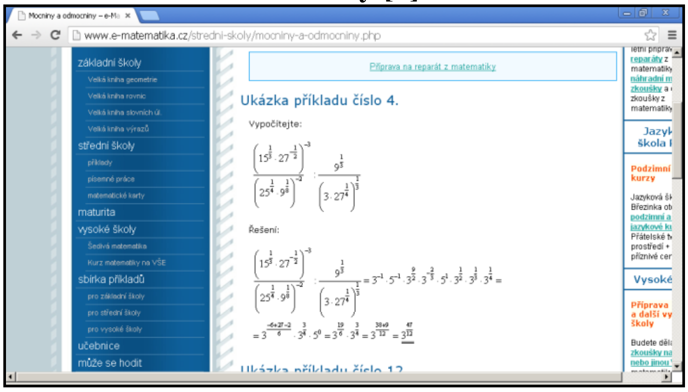
Celkem je v hodnocení zahrnuto 9 českých a také 3 anglicky psané online přístupné materiály. Jedná se o prohlížečem nejčastěji nabízené relevantní webové stránky po postupném zadání klíčových slov mocniny, lomené výrazy, dělitelnost. Hodnoceny jsou pouze ty části webových stránek, které jsou zdarma dostupné.

V každém hodnocení je nejprve uvedena příslušná webová adresa a pro větší přehlednost také náhled stránky. Dále následuje stručná tabulka, v níž jsou uvedena kritéria a jejich číselné ohodnocení (vyjádřené známkami 1 až 5, význam jako ve škole). Na ni pak navazuje podrobnější slovní evaluace. Každé webové stránce je v hodnocení věnován přibližně stejný rozsah. Souhrnné hodnocení je uvedeno v následující kapitole.

Analýza webových stránek byla provedena k datu 15. 10. 2013, tudíž se aktuální stav hodnocených stránek může odlišovat od uvedeného popisu. Dále je třeba vzít v úvahu, že hodnocení je do jisté míry subjektivní a odráží tedy zkušenosti, postoje a názory autorky.

[1] http://www.e-matematika.cz/

Obrázek 1: Náhled stránky [1]



Tabulka 1: Hodnocení [1]

Kritérium	Známka
Odbornost	3
Didaktický aspekt	3
Interaktivita	4
Grafika	2
Uživatelský komfort	2
Celkový dojem	3

Tato webová stránka poskytuje široké portfolio matematických služeb a materiálů, přičemž některé z nich jsou přístupné pouze za poplatek. Z hlediska obsahu pokrývá učivo základní, střední i vysoké školy. Nejedná se ovšem o ucelený souhrn, nýbrž se zaměřuje jen na dílčí témata. Na stránkách se objevují jak kapitoly věnované výkladu učiva, tak i procvičení příkladů.

Autoři webových stránek se snaží vysvětlovat matematiku co nejjednodušeji, aby jí porozuměli i žáci s velkými mezerami v předchozích znalostech, což vede k přílišnému používání laického jazyka bez adekvátních odborných termínů. Na stránce jsem neobjevila početní chyby, což je bezesporu pozitivum.

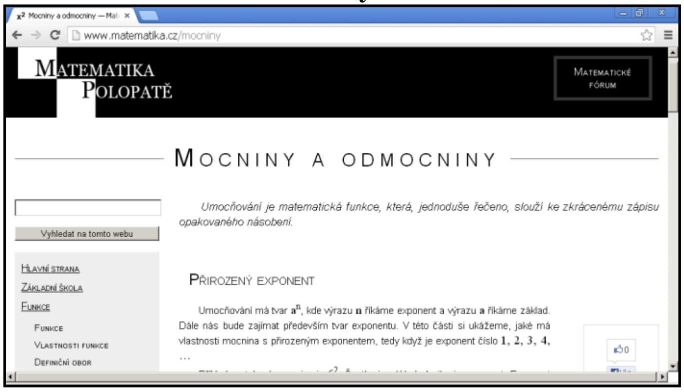
Z didaktického hlediska je největším problémem skutečnost, že na sebe jednotlivé kapitoly tematicky nenavazují a část obsahu středoškolské matematiky chybí úplně (např. lomené výrazy). Další nevýhodu vidím v tom, že v bezplatné verzi jsou přístupné jen vybrané příklady k procvičení, které však nejsou vždy didakticky vhodně zvoleny. Kladně hodnotím fakt, že u některých příkladů jsou detailně popsány dílčí kroky řešení.

Interaktivní prvky nejsou téměř ve zkoumaném tematickém celku zastoupeny. Grafika je docela pěkná, pouze zápis některých matematických výrazů by mohl být vyřešen lépe. Ovládání stránek je intuitivní, v levé části je přehledné menu. Učivo o dělitelnosti a také o výrazech je nutné hledat v sekci určené pro základní školy.

Celková kvalita stránek je podle mého názoru pouze průměrná. Příjemný dojem z grafického zpracování a uživatelský komfortu totiž kazí až nadměrně zjednodušené formulace a nedostatek interaktivních prvků.

[2] http://www.matematika.cz/

Obrázek 2: Náhled stránky [2]



Tabulka 2: Hodnocení [2]

Kritérium	Známka
Odbornost	3
Didaktický aspekt	2
Interaktivita	3
Grafika	2
Uživatelský komfort	1
Celkový dojem	2

Na webovém portálu „Matematika polopatě“ lze nalézt výukový materiál pokrývající relativně uceleně učivo střední školy (částečně též ZŠ a VŠ). Kromě něj zahrnuje také odkaz na matematické fórum, na kterém si žáci mohou vyžádat radu při řešení příkladů od ostatních uživatelů.

Výkladová část webových stránek se mi zdá poměrně zdařilá. Vysvětlující text je srozumitelný, logicky uspořádaný a zároveň obsahuje i odborné matematické výrazy. Doplněný je vždy několika vzorovými úlohami, které považuji za pěkné a názorné. Je škoda, že těchto úloh není předloženo více. Na stránkách se také vyskytují drobné terminologické nedostatky (např. odmocnina místo odmocnítka).

Matematické fórum se snaží využít interaktivní potenciál internetu. Ve vysvětlujícím textu však interaktivní prvky téměř nejsou zastoupeny. Didakticky vhodné je jedno z pravidel fóra, podle kterého by jiný uživatel neměl žadateli poradit s řešením příkladu, pokud sám žadatel neukáže snahu o vyřešení. Je však třeba počítat s tím, že odborná kvalita přispěvatelů se značně liší a proto lze na fóru nalézt dost chyb.

Grafika webových stránek je velmi jednoduchá, nepříliš atraktivní. Zápisy matematických výrazů jsou ovšem většinou precizní. Uživatel stránek může využít přehledné menu v levé části, případně odkaz na fórum umístěný vpravo nahoře, což je velmi pohodlné.

Souhrnně si myslím, že kvalita vysvětlujícího textu je relativně vysoká a žáci by ji tudíž mohli využít jako doplňující materiál k výuce ve škole (např. pochopení učiva při školní absenci). Matematické fórum však považuji za značně nejistý zdroj informací.

[3] http://maths.cz/

Obrázek 3: Náhled stránky [3]

Tabulka 3: Hodnocení [3]

Kritérium	**Známka**
Odbornost	3
Didaktický aspekt	3
Interaktivita	4
Grafika	2
Uživatelský komfort	3
Celkový dojem	3

Webová stránka „Matematika pro každého" je zaměřena na praktické vysvětlení a procvičení vzorových příkladů dílčích partií středoškolské, ale také vysokoškolské matematiky či učiva základní školy. Tematický rozsah těchto stránek je značně omezený stejně jako teoretické objasnění problematiky. Výhodu vidím v tom, že jeden vzorec je aplikován vždy na několika typových úlohách.

Z odborného hlediska lze webové stránce vyčíst především nedostatek teoretického základu. Ve značně stručném vysvětlujícím textu se navíc vyskytují terminologické nepřesnosti (např. negativní exponent) a další nedostatky (jako např. chybějící vysvětlení pojmu mocnina).

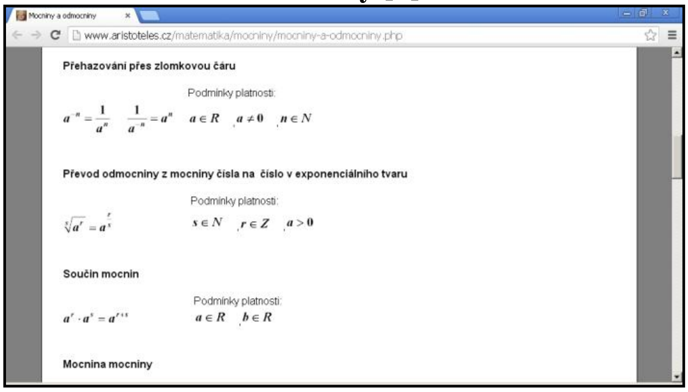
Největší předností z pohledu didaktiky je bezesporu ukázka vždy několika vzorových úloh s důsledně rozepsanými mezikroky řešení. Nevýhodou je však fakt, že webové stránky vysvětlují jen dílčí témata, obsah je proto značně omezený a navíc nekompaktní. Uživatel tak mnohdy nemá možnost prostudovat logicky předcházející či navazující učivo k vybranému tématu.

Interaktivní prvky se na této stránce téměř nevyskytují, což je vzhledem k potenciálu webu značný handicap. Grafika se mi zdá jednoduchá, ale úroveň matematických zápisů je vysoká. Lepšímu hodnocení uživatelského komfortu brání nepřehledné menu, ve kterém se špatně orientuje.

Celkový dojem ze stránek je vzhledem k uvedeným skutečnostem pouze dobrý. Myslím si, že webové stránky by mohly být žákům užitečné pouze jako doplněk k jiným výukovým materiálům, především pro pochopení a procvičení typových úloh dílčích matematických témat.

[4] http://www.aristoteles.cz/matematika/matematika.php

Obrázek 4: Náhled stránky [4]



Tabulka 4: Hodnocení [4]

Kritérium	**Známka**
Odbornost	3
Didaktický aspekt	5
Interaktivita	5
Grafika	3
Uživatelský komfort	4
Celkový dojem	4

Na této webové stránce jsou volně přístupné pouze některé materiály, a to zejména soupis různých matematických vzorců. Zadání příkladů k procvičení sice uživatel vidí, ale pro zjištění správného postupu řešení a výsledku musí zaplatit poplatek. Z hlediska obsahového zaměření se stránky věnují pouze dílčí tématům středoškolské matematiky.

Teoretické zdůvodnění a vysvětlení vzorců uvedených na webu zcela chybí. Rozsah materiálu pro posouzení odbornosti stránek je proto značně omezen. I přesto lze nalézt řadu chyb (např. nesprávně stanovené podmínky) či terminologických nepřesností (např. přehazování přes zlomkovou čáru).

Z didaktického aspektu není možné webové stránky doporučit. Obsah učiva je neúplný a neprovázaný. Chybí nejen vysvětlující text, ale také vzorové příklady. Úlohy, na kterých by si uživatel učivo procvičil, nejsou volně dostupné. Uvedené vzorce lze najít v každé učebnici, proto nevidím žádný smysl těchto stránek.

Interaktivní prvky ve zdarma přístupné části nejsou vůbec použity. Grafika stránek je podle mého názoru velmi jednoduchá a nepříliš atraktivní, matematické zápisy mají někdy nedostatky ve formátování. Orientace na stránkách se mi zdá relativně složitá a nepřehledná.

Souhrnně považuji kvalitu webových stránek za podprůměrnou a nevhodnou pro využití ve výuce či domácí přípravě. Učení se vzorců nazpaměť bez jejich hlubšího pochopení totiž v hodinách matematiky nemá žádný význam. Zvláště v tom případě, kdy se ve vzorcích vyskytují chyby a nepřesnosti.

[5] www.realisticky.cz

Obrázek 5: Náhled stránky [5]

Tabulka 5: Hodnocení [5]

Kritérium	Známka
Odbornost	1
Didaktický aspekt	1
Interaktivita	4
Grafika	1
Uživatelský komfort	1
Celkový dojem	1

Webové stránky poskytují uživateli ucelenou učebnici středoškolské matematiky, doplněnou sbírkou úloh. Každý tematický celek se skládá ze dvou druhů pracovních listů. Jeden z nich je určen žákům, tudíž jsou v něm uvedeny pouze definice, zadání příkladů apod. Druhý typ slouží jako pomocný materiál pro učitele, obsahuje proto navíc řešení příkladů, pedagogické poznámky a další doprovodné údaje.

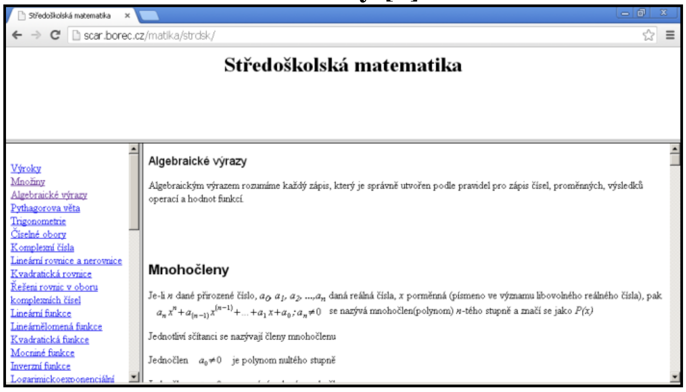
Úroveň odborného i didaktického zpracování učiva je vysoká. Teorie je vysvětlována srozumitelně a promyšleně, důraz je kladen na vlastní úvahy žáků. Vypracované materiály umožňují diferenciaci uvnitř třídy a tedy přizpůsobení tempa individuálním potřebám žáků. Za velmi cenné považuji detailní zpracování manuálů pro učitele, jenž pokaždé zahrnují odkaz na předcházející učivo, dále samotný vysvětlující text, zadání a podrobné řešení příkladů, pedagogické poznámky i shrnutí tématu. Právě pedagogické poznámky, tedy různé rady a úvahy na co si dát ve výuce pozor, na co zvláště upozornit a kde žáci nejčastěji chybují, představují podle mého názoru největší přidanou hodnotu těchto webových stránek. Nahrazují totiž mnohdy neexistující metodické příručky ke středoškolským učebnicím matematiky.

Grafika webových stránek je velmi pěkná a propracovaná. Jednotlivé pracovní listy lze navíc zobrazit ve formátu pdf, což uživatel ocení hlavně při tisku. Každý pracovní list je určen pro samostatnou vyučovací hodinu.

Webové stránky jsou velmi kvalitním materiálem, které může učitel využít přímo pro výuku. Jedinou nevýhodu vidím v nevyužití interaktivních prvků a také v tom, že naznačená koncepce nepodporuje kooperativní učení. Pro samostudium žáků jsou tyto materiály méně vhodné.

[6] http://scar.borec.cz/matika/strdsk/

Obrázek 6: Náhled stránky [6]



Tabulka 6: Hodnocení [6]

Kritérium	Známka
Odbornost	3
Didaktický aspekt	4
Interaktivita	4
Grafika	3
Uživatelský komfort	2
Celkový dojem	3

Na webových stránkách lze nalézt pouze teoretické shrnutí středoškolské matematiky, vzorové úlohy či přímo příklady k procvičení učiva nejsou uvedeny. Jak píše v úvodu sám autor, text je zamýšlen jen jako skripta k opakování, např. pro přípravu k maturitě. Stránky obsahově pokrývají celé učivo matematiky pro střední školy.

Webové stránky obsahují především definice, věty (bez důkazu) a různá tvrzení. V textu lze vyčíst celou řadu gramatických chyb stejně jako matematických nepřesností. Vzhledem k účelu a charakteru stránek bych očekávala větší důraz na korektnost formulací.

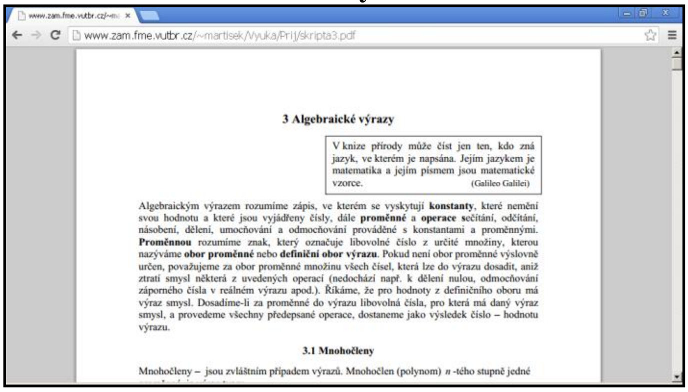
Také z didaktického pohledu vidím na stránkách celou řadu nedostatků. Ačkoli jsou definice a věty v matematice důležité, jejich pochopení se na střední škole ověřuje řešením příkladů. Ty však ve skriptech zcela chybí. Navíc, věty jsou uváděny bez důkazů i vysvětlení, což žáky motivuje spíše k prostému memorování než důkladnému porozumění.

Interaktivní prvky se na stránkách v podstatě neobjevují. Design není moc atraktivní, autor nepoužil barevné či jiné prvky pro vizuální rozčlenění textu, který proto splývá do jednoho nepřehledného celku. Na druhou stranu uživatel jistě ocení možnost využití menu v levé části stránky.

Podle mého názoru se webové stránky hodí pouze ke zběžnému zopakování učiva a utřídění si znalostí do jednotlivých tematických celků. I tak je potřeba dávat pozor na správnost uvedených definic a vět. Těm, kteří hledají materiál, díky němuž by pochopili určité dílčí téma, bych stránky rozhodně nedoporučila.

[7] http://www.zam.fme.vutbr.cz/~martisek/Vyuka.htm

Obrázek 7: Náhled stránky [7]



3 Algebraické výrazy

V knize přírody může číst jen ten, kdo zná jazyk, ve kterém je napsána. Jejím jazykem je matematika a jejím písmem jsou matematické vzorce. (Galileo Galilei)

Algebraickým výrazem rozumíme zápis, ve kterém se vyskytují **konstanty**, které nemění svou hodnotu a které jsou vyjádřeny čísly, dále **proměnné** a **operace** sečítání, odčítání, násobení, dělení, umocňování a odmocňování prováděné s konstantami a proměnnými. **Proměnnou** rozumíme znak, který označuje libovolné číslo z určité množiny, kterou nazýváme **obor proměnné** nebo **definiční obor výrazu**. Pokud není obor proměnné výslovně určen, považujeme za obor proměnné množinu všech čísel, která lze do výrazu dosadit, aniž ztratí smysl některá z uvedených operací (nedochází např. k dělení nulou, odmocňování záporného čísla v reálném výrazu apod.). Říkáme, že pro hodnoty z definičního oboru má výraz smysl. Dosadíme-li za proměnné do výrazu libovolná čísla, pro která má daný výraz smysl, a provedeme všechny předepsané operace, dostaneme jako výsledek číslo – hodnotu výrazu.

3.1 Mnohočleny

Mnohočleny – jsou zvláštním případem výrazů. Mnohočlen (polynom) n-tého stupně jedné

Tabulka 7: Hodnocení [7]

Kritérium	Známka
Odbornost	1
Didaktický aspekt	2
Interaktivita	4
Grafika	3
Uživatelský komfort	1
Celkový dojem	2

Podle autorů byly tyto stránky vytvořeny jako příručka pro přípravu k přijímacím zkouškám. Tematicky pokrývají velkou část obsahu středoškolské matematiky. Obsahují stručné teoretické vysvětlení problematiky, detailně vyřešený vzorový příklad a dále řadu úloh k procvičení spolu s výsledky.

Po odborné stránce dosahuje výukový materiál vysoké úrovně. Učivo je vysvětleno správně a srozumitelně, matematické pojmy jsou adekvátně používány. Podle mého názoru se v textu ani úlohách nevyskytují větší chyby či nedostatky, autoři vytvořili stránky promyšleně a precizně.

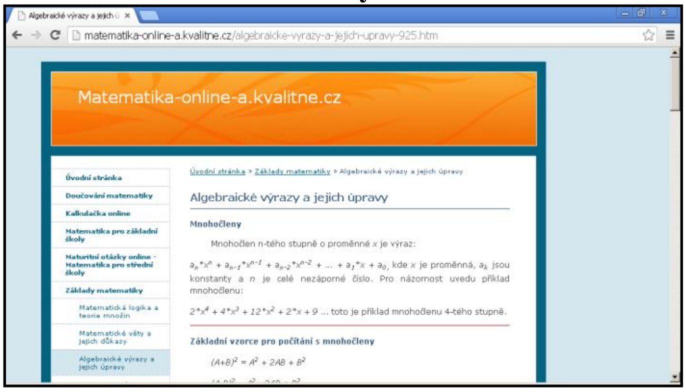
Jako určitou nevýhodu spatřuji přílišnou obsahovou stručnost stránek. Z didaktického hlediska by podle mě bylo vhodnější uvést více typových úloh stejně jako obšírnější vysvětlení některých pojmů a vztahů. Mnozí žáci by také jistě uvítali podrobné řešení příkladů k procvičení.

Vzhledově připomínají stránky klasickou tištěnou učebnici. Je sice pravda, že materiál lze stáhnout ve formátu pdf, což je pro uživatele pohodlné, avšak možnosti, jenž nabízí webové prostředí, zůstaly vesměs nevyužity. Autoři nezačlenili na stránky interaktivní prvky, nezabývali se ani designem. V textové části proto chybí nápaditější rozčlenění plochy, což snižuje nejen atraktivitu, ale i čitelnost materiálu.

Webové stránky bych doporučila jako doplněk ke školní výuce zejména žákům, kteří si chtějí doma ujasnit některé pojmy a vypočítat větší množství příkladů než je uvedeno v jejich učebnici. Nemusí mít obavy z kvality tohoto materiálu, jelikož je připraven s odbornou erudicí. Nicméně se mi zdá škoda, že tyto stránky nemají oproti klasickým tištěným učebnicím žádnou přidanou hodnotu.

[8] http://matematika-online-a.kvalitne.cz/

Obrázek 8: Náhled stránky [8]



Tabulka 8: Hodnocení [8]

Kritérium	**Známka**
Odbornost	3
Didaktický aspekt	4
Interaktivita	3
Grafika	4
Uživatelský komfort	4
Celkový dojem	4

Webové stránky se zaměřují spíše na řešení příkladů než-li na slovní objasnění problematiky. Přestože se na první pohled zdá, že lze na webu najít všechny partie středoškolské matematiky, skutečnost je jiná. Stránky se věnují pouze dílčím tématům, a to ve značně rozdílné kvalitě i obsahové šíři.

Odborná úroveň materiálu se vzhledem k relativní stručnosti teoretické části neposuzuje snadno. Podle mého názoru jsou tvrzení neúplná, vzorce jsou navíc uváděny bez důkazů. Na stránkách se vyskytují gramatické chyby, matematická terminologie je používána sporadicky.

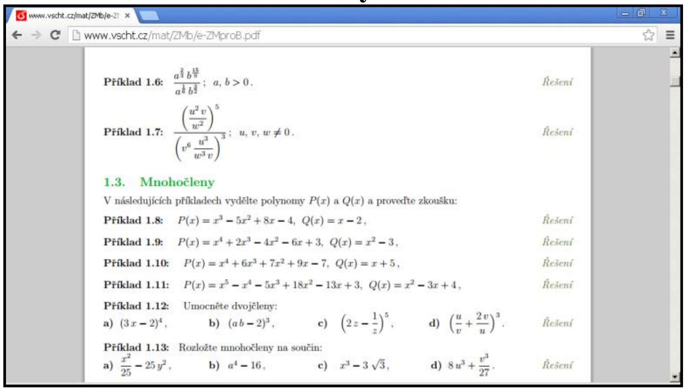
Z didaktického pohledu vidím největší problém v nedostatečném vysvětlení učiva. Autoři nevytvořili textovou část promyšleně a uceleně. Některá témata tak obsahují pouze nadpis. Výhodou je poměrně velké množství příkladů, které jsou uvedeny spolu s jejich řešením. Podle mě ovšem na stránkách chybí vhodně zvolené vzorové úlohy, na kterých by byly detailně vyloženy principy řešení.

Přestože se na webových stránkách vyskytují interaktivní prvky, jejich způsob použití se mi nezdá pro uživatele příliš atraktivní. Odkazy na řešení úloh někdy nefungují, relativně dlouho trvá načítání stránek. Velké množství reklamní plochy navíc odvádí pozornost, proto je uživatelský komfort nízký. Zápis matematických výrazů a symbolů je mnohdy tristní. Použití slovního vyjádření na místo korektních symbolů se mi zdá krajně nevhodné.

Webové stránky se zaměřují na řešení úloh středoškolské matematiky, teoretický základ stojí značně v pozadí. Kvalita zpracování ovšem neumožňuje kladné hodnocení ani doporučení materiálu pro doplnění školní výuky či domácí samostudium.

[9] http://www.vscht.cz/mat/ZMb/e-ZMproB.pdf

Obrázek 9: Náhled stránky [9]


www.vscht.cz/mat/ZMb/e-ZMproB.pdf

Příklad 1.6: $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}\, b^{\frac{15}{9}}}{a^{\frac{1}{6}}\, b^{\frac{3}{2}}}$; $a, b > 0$. *Řešení*

Příklad 1.7: $\dfrac{\left(\dfrac{u^2 v}{w^2}\right)^5}{\left(v^6 \dfrac{u^3}{w^3 v}\right)^3}$; $u, v, w \neq 0$. *Řešení*

1.3. Mnohočleny

V následujících příkladech vydělte polynomy $P(x)$ a $Q(x)$ a proveďte zkoušku:

Příklad 1.8: $P(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4,\ Q(x) = x - 2$, *Řešení*

Příklad 1.9: $P(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 6x + 3,\ Q(x) = x^2 - 3$, *Řešení*

Příklad 1.10: $P(x) = x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 9x - 7,\ Q(x) = x + 5$, *Řešení*

Příklad 1.11: $P(x) = x^5 - x^4 - 5x^3 + 18x^2 - 13x + 3,\ Q(x) = x^2 - 3x + 4$, *Řešení*

Příklad 1.12: Umocněte dvojčleny:
a) $(3x-2)^4$, **b)** $(ab-2)^3$, **c)** $\left(2z - \frac{1}{z}\right)^5$, **d)** $\left(\frac{u}{v} + \frac{2v}{u}\right)^3$. *Řešení*

Příklad 1.13: Rozložte mnohočleny na součin:
a) $\frac{x^2}{25} - 25y^2$, **b)** $a^4 - 16$, **c)** $x^3 - 3\sqrt{3}$, **d)** $8u^3 + \frac{v^3}{27}$. *Řešení*

Tabulka 9: Hodnocení [9]

Kritérium	**Známka**
Odbornost	1
Didaktický aspekt	2
Interaktivita	3
Grafika	1
Uživatelský komfort	2
Celkový dojem	2

Webová stránka je dle autorů e-sbírka příkladů určená pro studenty Chemicko-inženýrské fakulty na Vysoké škole chemicko-technologické v Praze. Tematický obsah sbírky je proto značně omezený, zahrnuje kapitoly věnované úpravě výrazů, řešení rovnic a nerovnic a komplexním číslům.

Vzhledem k charakteru a účelu výukového materiálu lze na stránkách nalézt pouze zadání a detailní řešení matematických úloh. Autoři předpokládají teoretické znalosti uživatelů. Obtížnost úloh se mi zdá spíše vyšší, tudíž je tato sbírka vhodná pro procvičení již osvojeného učiva. Úlohy jsou nápadité, výsledky bez chyb. Odbornou kvalitu sbírky tedy hodnotím jako výbornou.

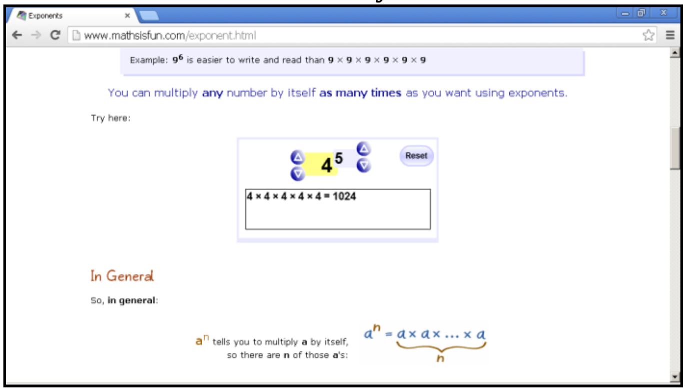
Z pohledu didaktiky oceňuji podrobné rozpracování postupu řešení úloh. Další výhodou vidím v tom, že řešení lze vidět až po spuštění příslušného odkazu, což umožňuje uživatelům nejprve přemýšlet samostatně. Škoda, že se však objeví řešení všech příkladů v daném bloku najednou.

Na stránkách sice fungují interaktivní prvky, ale pouze základní (např. nelze použít zpětný odkaz na zadání příkladu). Kvalita technického zpracování sbírky je vysoká, matematické zápisy jsou precizní. Grafika je sice jednoduchá, ovšem stránky působí velmi přehledně. Uživatel jistě uvítá možnost uložení stránek ve formátu pdf, a to včetně řešení úloh zobrazeného na konci dokumentu.

Elektronická sbírka je podle mého názoru velmi pečlivě připravená, autoři si dali záležet jak na výběru úloh, tak i na samotném zpracování materiálu. Použít se tudíž dá nejen jako opakování pro vysokoškolské studenty, kterým je primárně určena, ale i na střední škole. Zajímavé úlohy s podrobně zpracovaným postupem řešení lze začlenit přímo do výuky či je ponechat k domácí přípravě žáků.

[10] http://www.mathsisfun.com

Obrázek 10: Náhled stránky [10]



Tabulka 10: Hodnocení [10]

Kritérium	**Známka**
Odbornost	2
Didaktický aspekt	1
Interaktivita	1
Grafika	1
Uživatelský komfort	1
Celkový dojem	1

Tato anglicky psaná webová stránka, jak již samotný název napovídá, se snaží dokázat, že matematika může být zábavná. Už při letmém pohledu na stránky uživatele upoutá veselá grafika a množství interaktivních prvků. Výuka se tak podobá hře, při které žáci objevují tajemství matematiky. Ačkoli by se mohlo zdát, že jsou webové stránky určené mladším dětem, v obsahu kapitoly algebra lze nalézt celé učivo, jenž se u nás běžně vyučuje v prvním ročníku střední školy (mimo jiné mocniny, lomené výrazy, číselné obory).

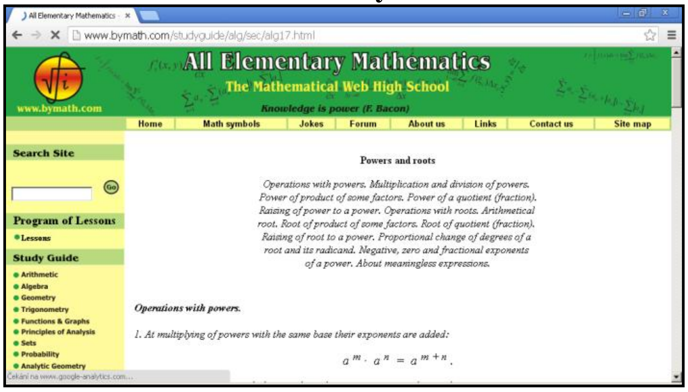
Z didaktického hlediska považuji webové stránky za nadprůměrné. Velké množství interaktivních příkladů, na kterých si uživatel může různé pojmy a vzorce prakticky vyzkoušet, tzv. si je osahat, přispívají k hlubšímu pochopení učiva. Jednotlivá témata na sebe logicky navazují, v závěru každé stránky je uveden odkaz na testové úlohy (zpracované opět interaktivně), které umožňují ověření nabytých vědomostí a tím i sebekontrolu uživatele.

Přestože je důraz kladen na vizualizaci učiva, hravost a atraktivitu, ani odborná stránka nezůstala autory opomenuta. Na stránce se adekvátně používají matematické pojmy, testové úlohy vyznačující se vzrůstající obtížností jsou bez chyb. Drobný nedostatek vidím v tom, že vzorce nejsou odvozovány obecně, ale důsledně na konkrétním příkladu.

Na stránkách oceňuji názorné grafické zpracování stejně jako velké množství interaktivních prvků. Pro uživatele je používání stránek příjemné díky přehledné struktuře stránek. Celkově si myslím, že webové stránky mají vysokou úroveň a jejich využití ve výuce matematiky by bylo přínosné. Navíc, stránky mají potenciál žáky zaujmout a tím navodit pozitivní vztah k matematice jako takové.

[11] http://www.bymath.com

Obrázek 11: Náhled stránky [11]



Tabulka 11: Hodnocení [11]

Kritérium	Známka
Odbornost	2
Didaktický aspekt	2
Interaktivita	2
Grafika	2
Uživatelský komfort	3
Celkový dojem	2

Webový portál v angličtině nabízí dle úvodních informací studium kompletní středoškolské matematiky z pohodlí domova. V jeho obsahu lze tak mimo jiné najít témata z algebry, geometrie či pravděpodobnosti. V levé části stránky se nachází menu, které se skládá ze čtyřech oddílů – programu lekcí, výkladu učiva, vzorových úloh a také testových příkladů.

Přestože stránky uvádějí, že lze díky nim nastudovat matematiku, aniž by bylo nutné dojít do školy, skutečnost je podle mého názoru jiná. U mnohých vzorců chybí nejen odvození v obecné rovině, ale dokonce i ukázka použití na konkrétní úloze. Některé základní pojmy navíc nejsou objasněny vůbec (např. mocnina).

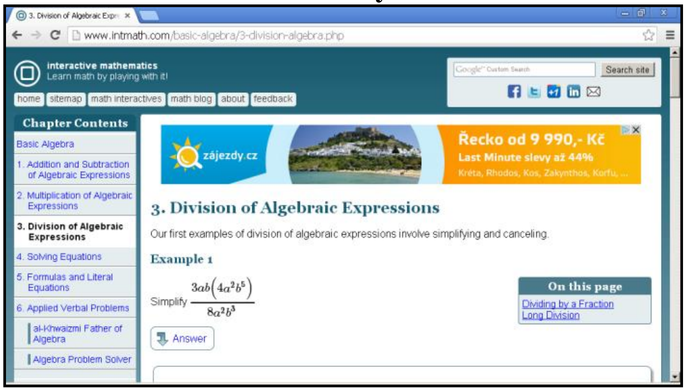
Výhrady mám také k členění učiva. Ačkoli jsou na stránkách kromě teorie uvedeny i vzorové úlohy obsahující nápovědu, postup řešení a výsledek, nacházejí se v jiném oddílu. Uživatel si tak aplikaci některých vzorců nemůže vyzkoušet rovnou, ale musí chvíli hledat v menu. Méně zdatný student matematiky navíc ani nemusí poznat, která vzorová úloha se vztahuje k danému vzorci. Obdobné výtky platí také pro testové příklady. Kvůli těmto nedostatkům hodnotím odborné i didaktické zpracování stránek pouze jako mírně nadprůměrné.

Interaktivní prvky se nachází převážně v oddílu věnovaném typovým úlohám, potenciál webového prostředí tak není plně využit. Grafika je velmi jednoduchá, zápis některých matematických výrazu není úhledný. Z pohledu uživatele se mi zdá nepohodlné a nepřehledné již zmíněné oddělení výkladu od příkladů.

Z obsahu webové stránky lze podle mého názoru využít zejména oddíl vzorových úloh, které umožňují nejen kontrolu výsledku, ale i postupu řešení. Ostatní části webu již nejsou zpracované tak dobře.

[12] http://www.intmath.com/

Obrázek 12: Náhled stránky [12]



Tabulka 12: Hodnocení [12]

Kritérium	Známka
Odbornost	2
Didaktický aspekt	1
Interaktivita	1
Grafika	1
Uživatelský komfort	2
Celkový dojem	1

Webová stránka psaná v angličtině se věnuje nejen středoškolské matematice, ale obsahuje i učivo probírané na vysoké škole (např. Taylorovy či Fourierovy řady). V záhlaví uvedený slogan, který ve volném překladu znamená učení se matematiky hrou, dobře vyjadřuje koncepci stránek. Důraz je kladen na interaktivitu a možnost vyzkoušet si modelovat nejrůznější situace za pomoci webu (např. grafy funkcí).

Odbornost stránek dosahuje vysoké úrovně, i přesto lze však najít drobné nedostatky. Přestože jsou matematické termíny používány korektně a ve výpočtech se nevyskytují početní chyby, autoři nepracují s definicemi či větami. Pojmový aparát je vysvětlován na konkrétních příkladech. Vzorce jsou nejprve ukázány na typové úloze, pak až uvedeny v obecném tvaru (bez abstraktního odvození).

Z didaktického hlediska hodnotím stránky jako velmi nadprůměrné. Učivo na sebe logicky navazuje, vysvětleno je srozumitelně a navíc se na stránkách objevuje množství interaktivních vzorových úloh (s detailním postupem řešení). Originální je podle mého názoru tzv. online řešitel algebry, tedy aplikace umožňující automatické vypočítání zadaného příkladu (např. výpočet součtu mocnin, ale i složitějších algebraických rovnic či nerovnic).

Stránky naplno využívají interaktivní potenciál webu, což zvyšuje jejich atraktivitu. Grafické zpracování stránek sází na jednoduchost, preciznost a také přehlednost. Z pohledu uživatele mě ovšem připadá nepohodlné velké množství reklamních inzerátů a také poněkud delší načítání některých příkladů.

Souhrnně si myslím, že stránky jsou přes drobné nedostatky připraveny velmi kvalitně a lze je proto bez obav využít ve výuce či domácí přípravě. Zejména počet interaktivních prvků a jejich forma umožňují učit (se) matematiku zábavně.

3. Souhrnné hodnocení

Na internetu lze najít poměrně velké množství webových stránek věnovaných matematice, které se ovšem značně liší odbornou i didaktickou úrovní, ale také kvalitou grafického zpracování, tudíž je nutné každý materiál kriticky zhodnotit.

Výsledky provedené analýzy vybraných webových stránek přehledně shrnuje níže uvedená

Tabulka 13. Je z ní jasně patrné, že pro výuku lze bez větších výhrad doporučit pouze tři webové stránky (pro větší přehlednost jsou tyto stránky barevně zvýrazněny).

Tabulka 13: Souhrnné hodnocení analyzovaných webových stránek

Odbornost	Didaktický aspekt	Interaktivita	Grafika	Uživatelský komfort	Celkový dojem
[1] http://www.e-matematika.cz/					
3	3	4	2	2	3
[2] http://www.matematika.cz/					
3	2	3	2	1	2
[3] http://maths.cz/					
3	3	4	2	3	3
[4] http://www.aristoteles.cz/matematika/matematika.php					
3	5	5	3	4	4
[5] www.realisticky.cz					
1	1	4	1	1	1
[6] http://scar.borec.cz/matika/strdsk/					
3	4	4	3	2	3
[7] http://www.zam.fme.vutbr.cz/~martisek/Vyuka.htm					
1	2	4	3	1	2
[8] http://matematika-online-a.kvalitne.cz/					
3	4	3	4	4	4
[9] http://www.vscht.cz/mat/ZMb/e-ZMproB.pdf					
1	2	3	1	2	2
[10] http://www.mathsisfun.com					
2	1	1	1	1	1
[11] http://www.bymath.com					
2	2	2	2	3	2
[12] http://www.intmath.com/					
2	1	1	1	2	1

Na základě uvedených dat lze doporučit webovou stránku [5], jenž podle mě ocení zejména učitelé. Ti mohou tento materiál využít jako vzor pro přípravu vlastního vyučování, ale také zdroj rad do výuky. Doporučila bych také webové stránky [10] a [12], jejichž hlavní přínos vidím v hravosti, interaktivitě a tím i budování kladného vztahu k matematice. Zároveň tyto stránky vykazují vysokou úroveň z odborného a didaktického hlediska, jsou tedy vhodné pro začlenění do výuky i domácí samostudium (jistou nevýhodou pro žáky je však skutečnost, že jsou psány v angličtině). S drobnými výtkami bych žákům pro domácí přípravu doporučila webové stránky [7] a [9].

Oddíl 2

Vlastní webové stránky

Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Ing. et Bc. Vladimíra Pavlicová

Webová aplikace: Základní poznatky z matematiky na střední škole

Katedra didaktiky matematiky
Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc.
Studijní program: Geografie, Učitelství geografie a matematiky pro SŠ

Úvodní strana

Mocniny a odmocniny, mnohočleny a lomené výrazy jsou součástí základů středoškolské matematiky, na které postupně navazují další matematické poznatky. Porozumění těmto základům a schopnost znalosti aplikovat na příkladech je klíčová, neboť tvoří nezbytný předpoklad pro úspěšné zvládnutí matematiky ve vyšších ročnících střední školy.

Cílem těchto stránek je, aby si jejich uživatel osvojil zmíněné znalosti a dovednosti formou, která pro něj bude efektivní i atraktivní. V souladu s aktuálními trendy je proto důraz kladen na vizualizaci učiva (schémata, grafické prvky) a také interaktivitu, které moderní technologie umožňují.

Každá kapitola obsahuje nejprve vysvětlující text doprovázený vzorově vyřešenými příklady. Na něj pak, s výjimkou první kapitoly, navazuje množství interaktivních cvičení, které slouží k samostatnému procvičení učiva. U všech cvičení je k dispozici řešení. V první kapitole jsou připomenuty základní pojmy a vztahy (číselné obory, druhá odmocnina z reálného čísla, absolutní hodnota reálného čísla, procenta a dělitelnost v oboru přirozených čísel), které jsou nutné pro pochopení dalšího učiva. Jelikož se předpokládá, že je tato kapitola opakováním dříve získaných poznatků, neobsahuje interaktivní cvičení.

Součástí práce je také popis ovládání stránek, v němž jsou vysvětleny funkce jednotlivých tlačítek a dalších prvků, které se na webu vyskytují. Dále je zařazen seznam použitých matematických symbolů a značek. Poslední položku menu tvoří interaktivní rejstřík.

1. Základní pojmy a vztahy

První kapitola se zaměřuje na vysvětlení základních pojmů a vztahů, které jsou nezbytné k pochopení dalšího výkladu. Učební texty jsou v této části poměrně stručné a zahrnují pouze vzorově vyřešené příklady (nikoli však interaktivní cvičení jako v dalších kapitolách), jelikož se předpokládá, že slouží jen pro zopakování dříve získaných poznatků.

V úvodní části jsou připomenuty číselné obory a jejich vlastnosti. Další část se potom zabývá druhou odmocninou z reálného čísla. Následuje definice absolutní hodnoty reálného čísla a její geometrická interpretace. Ve čtvrté části jsou uvedeny příklady na procenta. Poslední část se věnuje dělitelnosti v oboru přirozených čísel, a to zejména hledání největšího společného dělitele a nejmenšího společného násobku čísel.

Členění této kapitoly:

1.1 Číselné obory

Definice

Číselným oborem rozumíme číselnou množinu, na které jsou bez omezení definovány početní operace sčítání a násobení.

Číselný obor je tedy **uzavřený vzhledem ke sčítání a násobení** - to znamená že součet, resp. součin, libovolných dvou čísel z dané číselné množiny patří do této množiny.

Příklad 1.1

Rozhodni, zda zadaná číselná množina, na které jsou definovány početní operace sčítání a násobení, tvoří číselný obor:

$\{1; 2; 3\}$

Řešení

Musíme ověřit, že součet, resp. součin, každých dvou čísel ze zadané množiny patří do této množiny.

- $1 + 2 = 3$. V pořádku, číslo 3 patří do zadané množiny.
- $1 + 3 = 4$. Číslo 4 nepatří do zadané množiny.

Množina $\{1; 2; 3\}$, na které jsou definovány početní operace sčítání a násobení, netvoří číselný obor. Ukázali jsme totiž, že není uzavřená vzhledem ke sčítání (obdobně by navíc bylo možné ukázat, že není uzavřená ani vzhledem k násobení).

Definice

Pokud jsou bez omezení definovány početní operace sčítání a násobení na číselné množině, která obsahuje čísla $1, 2, 3, \ldots$ (tj. **všechna přirozená čísla**), hovoříme o **oboru přirozených čísel**. Značíme jej $\mathbf{N}$.

Opačné číslo k přirozenému číslu a je takové číslo $-a$, pro které platí $a + (-a) = 0$.

Příklad 1.2

Urči opačné číslo k číslu:

a) 5 b) -232 c) 0

Řešení

a) Opačným číslem k číslu 5 je číslo -5.
b) Opačným číslem k číslu -232 je číslo 232.
c) Opačným číslem k číslu 0 je číslo 0.

Definice

Pokud jsou bez omezení definovány početní operace sčítání, odčítání a násobení na číselné množině, která obsahuje všechna přirozená čísla, všechna čísla opačná k přirozeným číslům a nulu (tj. **všechna celá čísla**), hovoříme o **oboru celých čísel**. Značíme jej $\mathbf{Z}$.

Definice

Pokud jsou bez omezení definovány početní operace sčítání, odčítání, násobení a dělení nenulovým číslem na číselné množině, která obsahuje čísla, jež lze zapsat ve tvaru

$$\frac{a}{b}, \text{ kde } a \in \mathbf{Z},\ b \in \mathbf{N}$$

(tj. **všechna racionální čísla**), hovoříme o **oboru racionálních čísel**. Značíme jej $\mathbf{Q}$.

Racionální čísla jsou tedy čísla, která mají konečný desetinný rozvoj (např. $5,8269$) nebo nekonečný periodický desetinný rozvoj (např. $14,\overline{236}$).

Definice

Pokud jsou bez omezení definovány početní operace sčítání, odčítání, násobení a dělení nenulovým číslem na číselné množině, která obsahuje všechna racionální čísla a čísla, která mají nekonečný neperiodický desetinný rozvoj (tj. **všechna reálná čísla**), hovoříme o **oboru reálných čísel**. Značíme jej $\mathbf{R}$.

Reálná čísla, která mají nekonečný neperiodický desetinný rozvoj, označujeme jako **iracionální** (neboť nepatří do množiny racionálních čísel).

Příkladem iracionálního čísla je číslo π, tj. **Ludolfovo číslo**, které představuje podíl obvodu kružnice a jejího průměru. Jeho přibližná hodnota je $3,14$.

Následující schéma shrnuje, jak lze rozlišit reálná čísla, která mají desetinný rozvoj.

Přestože většina čísel, se kterými ve škole počítáme, patří do oboru racionálních čísel, iracionálních čísel je ve skutečnosti více než čísel racionálních.

Poznámka

Každé reálné číslo můžeme znázornit jako bod na číselné ose. Zároveň každý bod na číselné ose reprezentuje jedno reálné číslo.

Příklad 1.3

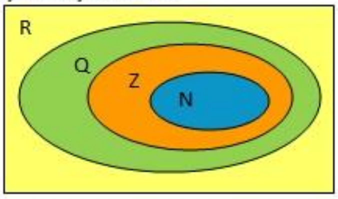
Urči, zda dané číslo patří do příslušného číselného oboru:

Číslo | Číselný obor	$\mathbf{N}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{R}$
-5				
$12,35$				
0				
2π				
$-7,\overline{45}$				
$1\,235$				

Řešení

Číslo | Číselný obor	$\mathbf{N}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{R}$
-5	ne	ano	ano	ano
$12,35$	ne	ne	ano	ano
0	ne	ano	ano	ano
2π	ne	ne	ne	ano
$-7,\overline{45}$	ne	ne	ano	ano
$1\,235$	ano	ano	ano	ano

Vztah mezi číselnými obory ilustruje schéma:



Poznámka

Zápis $a \in \mathbf{N}$ vyjadřuje, že číslo a je prvkem oboru přirozených čísel. Čteme "a náleží $\mathbf{N}$".

Na závěr si uvedeme vlastnosti početních operací, které platí v každém z uvedených číselných oborů.

Pro všechna čísla a, b, c z číselného oboru platí:

asociativnost sčítání

$a + (b + c) = (a + b) + c$

komutativnost sčítání

$a + b = b + a$

existence neutrálního prvku vzhledem ke sčítání

$0 + a = a$ (s výjimkou oboru přirozených čísel)

distributivnost násobení vzhledem ke sčítání

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

asociativnost násobení

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

komutativnost násobení

$a \cdot b = b \cdot a$

existence neutrálního prvku vzhledem k násobení

$1 \cdot a = a$

Neutrální prvek vzhledem k početní operaci je tedy takové číslo, které neovlivní výsledek této operace.

Poznámka

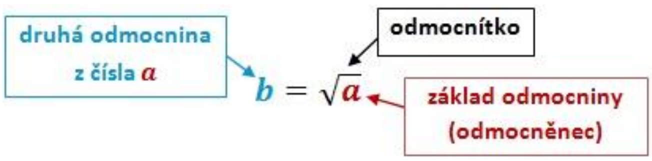
V oboru přirozených čísel existuje neutrální prvek jen vzhledem k násobení. Existence neutrálního prvku vzhledem ke sčítání v něm neplatí, protože do oboru přirozených čísel nezahrnujeme číslo 0.

1.2 Druhá odmocnina z reálného čísla

Definice

Druhá odmocnina z nezáporného reálného čísla a je nezáporné reálné číslo b, pro které platí, že $b \cdot b = a$. Značíme $b = \sqrt{a}$.

Číslo a označujeme jako **základ odmocniny (odmocněnec)**, symbol $\sqrt{}$ se nazývá **odmocnítko**.



Říkáme, že "odmocněním čísla a dostaneme číslo b".

Z definice vyplývají dvě důležitá tvrzení.

1. Druhá odmocnina je definována pouze z *nezáporného* čísla.
2. Druhá odmocnina je vždy *nezáporná*.

Druhá vlastnost zaručuje jednoznačnost. Přestože platí $3 \cdot 3 = 9$ a zároveň $(-3) \cdot (-3) = 9$, druhá odmocnina z devíti je dle definice vždy nezáporné číslo, proto $\sqrt{9} = 3$.

Příklad 1.4

Odmocni:

a) $\sqrt{16}$ b) $\sqrt{\frac{1}{25}}$ c) $\sqrt{-4}$ d) $\sqrt{0,01}$

Řešení

a) $\sqrt{16} = 4$, protože $4 \cdot 4 = 16$.

b) $\sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}$, protože $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$.

c) Tato odmocnina není v oboru reálných čísel definována. Lze určit jen odmocninu z nezáporného čísla.

d) $\sqrt{0,01} = 0,1$, protože $0,1 \cdot 0,1 = 0,01$.

Pro všechna nezáporná reálná čísla a, b platí:

1. $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
2. $a \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot a \cdot b}$
3. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ pro $b \neq 0$

Příklad 1.5

Odmocni:

a) $\sqrt{\frac{64}{49}}$ b) $\sqrt{0,04}$ c) $\sqrt{3 \cdot 81 \cdot 12}$ d) $\sqrt{75}$

Řešení

a) $\sqrt{\frac{64}{49}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{49}} = \frac{8}{7}$

b) $\sqrt{0,04} = \sqrt{0,01 \cdot 4} = \sqrt{0,01} \cdot \sqrt{4} = 0,1 \cdot 2 = 0,2$

c) $\sqrt{3 \cdot 81 \cdot 12} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{3 \cdot 12} = 9 \cdot \sqrt{36} = 9 \cdot 6 = 54$

d) $\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5 \cdot \sqrt{3}$

V příkladu 1.5 d) jsme provedli **částečné odmocnění**.

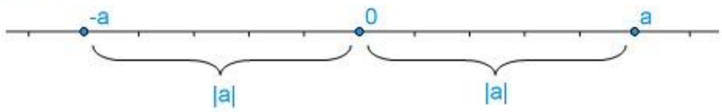
1.3 Absolutní hodnota reálného čísla

Definice

Symbolem $|a|$ označujeme **absolutní hodnotu reálného čísla** a, přičemž platí:

1. pro $a \geq 0$ je $|a| = a$
2. pro $a < 0$ je $|a| = -a$

Absolutní hodnotu reálného čísla a lze interpretovat také geometricky. Představuje totiž vzdálenost obrazu čísla a od obrazu nuly na číselné ose.



Mezi důležité vlastnosti absolutní hodnoty reálného čísla patří následující vlastnosti.

Pro všechna reálná čísla a, b platí:

1. $|a| \geq 0$ 2. $|a| = |-a|$ 3. $\sqrt{a \cdot a} = |a|$ 4. $|a-b| = |b-a|$

Uvedené vztahy lze vyjádřit také geometricky. Například první vztah říká, že vzdálenost obrazu libovolného reálného čísla od nuly na číselné ose je vždy nezáporná. Čtvrtý vztah uvádí, že absolutní hodnota z rozdílu dvou čísel se rovná vzdálenosti jejich obrazů na číselné ose.

Příklad 1.6

Vypočítej:

a) $\left|-\frac{1}{8}\right|$ b) $|8-7\cdot 6|$ c) $|9\cdot 2-5|$ d) $|-5+(-11)-7|$

Řešení

a) $\left|-\frac{1}{8}\right| = \frac{1}{8}$

b) $|8-7\cdot 6| = |8-42| = |-34| = 34$

c) $|9\cdot 2-5| = |18-5| = |13| = 13$

d) $|-5+(-11)-7| = |-5-11-7| = |-23| = 23$

Příklad 1.7

Znázorni na číselné ose všechna reálná čísla, pro něž platí:

a) $|a| \geq 3$ b) $|a| < 1$ c) $|a| < -2,5$ d) $|a-1| > 4$ e) $|5-a| \leq 2$

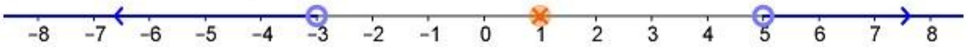
Řešení

a) Vzdálenost čísla a od nuly na číselné ose je větší nebo rovna 3.

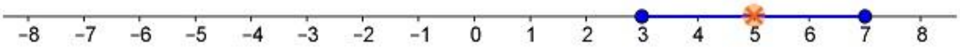
b) Vzdálenost čísla a od nuly na číselné ose je menší než 2.

c) Vzdálenost čísla a od nuly na číselné ose je menší než $-2,5$. Nelze, vzdálenost nemůže být záporná.

d) Vzdálenost čísla a od 1 je větší než 4.



e) Lze přepsat jako $|a-5| \leq 2$.
Vzdálenost čísla a od 5 je menší nebo rovna 2.



1.4 Procenta

S procenty se v běžném životě často setkáváme, např. prodejci inzerují, o kolik procent snížili cenu svého zboží.

Definice

Jedno **procento** z celku představuje jednu setinu z daného celku. Procento označujeme symbolem $\%$.

Poznámka

$100\,\%$ tvoří celek (neboli základ). $1\,\%$ tvoří $\frac{1}{100}$, tj. $0,01$ základu.

Příklad 1.8

Vyjádři procenty tyto části základu:

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{10}$ c) $\frac{6}{5}$ d) $\frac{5}{2}$

Řešení

a) $\frac{1}{4}$ ze $100\,\%$ je $25\,\%$, jelikož $\frac{1}{4} \cdot 100\,\% = 25\,\%$.

b) $\frac{3}{10}$ ze $100\,\%$ je $30\,\%$, jelikož $\frac{3}{10} \cdot 100\,\% = 30\,\%$.

c) $\frac{6}{5}$ ze $100\,\%$ je $120\,\%$, jelikož $\frac{6}{5} \cdot 100\,\% = 120\,\%$.

d) $\frac{5}{2}$ ze $100\,\%$ je $250\,\%$, jelikož $\frac{5}{2} \cdot 100\,\% = 250\,\%$.

Při řešení příkladů, ve kterých se objevují procenta, je často výhodné využít *trojčlenku*.

Příklad 1.9

Slovní úloha

Kniha stála původně 245 Kč, po slevě jen 196 Kč. O kolik procent byla zlevněna?

Řešení

Pomocí trojčlenky vypočítáme, kolik procent z původní částky činí 196 Kč. Platí zde vztah přímé úměry, neboť čím je korunová částka nižší, tím menší je procentní vyjádření. Následně odvodíme, o kolik procent byla kniha zlevněna.

245 Kč ... 100 %
196 Kč ... x %

$$196 \div 245 = x \div 100\,\% \quad / \cdot 100$$

$$x = \frac{196}{245} \cdot 100\,\%$$

$$x = 80\,\%$$

Kniha stála po slevě 80 % původní ceny, tedy byla zlevněna o 20 %.

Příklad 1.10

Slovní úloha

Předvánočního zájezdu do Vídně se zúčastnilo 39 žáků, tedy 6 % žáků školy. Kolik žáků má škola celkem?

Řešení

39 žáků ... 6 %
x žáků ... 100 %

$$x \div 39 = 100\,\% \div 6\,\% \quad / \cdot 39$$

$$x = \frac{100\,\%}{6\,\%} \cdot 39$$

$$x = 650$$

Škola má celkem 650 žáků.

1.5 Dělitelnost v oboru přirozených čísel

Uvažujme čísla $a, b \in \mathbf{N}$. Číslo a je **násobkem** čísla b (číslo b je **dělitelem** čísla a) právě tehdy, když existuje přirozené číslo n tak, že $a = n \cdot b$.

násobek čísla b $\quad a = n \cdot b \quad$ **dělitel čísla a**

Definice

Množina, která obsahuje všechny dělitele čísla a, se nazývá **množina všech dělitelů** a značí se $D(a)$.

Příklad 1.11

Najdi množinu všech dělitelů čísla:

a) 16 b) 24 c) 17

Řešení

a) $16 = 1 \cdot 16$ $\quad 16 = 2 \cdot 8$ $\quad 16 = 4 \cdot 4$

Množina všech dělitelů čísla 16: $D(16) = \{1; 2; 4; 8; 16\}$

b) $24 = 1 \cdot 24$ $\quad 24 = 2 \cdot 12$ $\quad 24 = 3 \cdot 8$ $\quad 24 = 4 \cdot 6$

Množina všech dělitelů čísla 24: $D(24) = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$

c) $17 = 1 \cdot 17$

Množina všech dělitelů čísla 17: $D(17) = \{1; 17\}$

Z příkladu je patrné, že každé číslo je dělitelné číslem 1 a samo sebou. Některá čísla mají dokonce více dělitelů.

Definice

Přirozené číslo, které má právě dva různé dělitele (číslo 1 a samo sebe), se nazývá **prvočíslo.**
Přirozené číslo, které má alespoň tři různé dělitele, se nazývá **složené číslo.**

Poznámka

Číslo 1 nepovažujeme za prvočíslo ani za složené číslo.

Každé složené číslo lze vyjádřit jako součin prvočísel. Takový zápis označujeme jako **prvočíselný rozklad** složeného čísla. Prvočíselný rozklad určuje přirozené číslo jednoznačně.

V případě, že přirozené číslo n není dělitelné žádným prvočíslem p, pro které platí $p \leq \sqrt{n}$, pak je n prvočíslo.

Příklad 1.12

Najdi prvočíselný rozklad čísla:

a) 40 b) 126

Řešení

a) $40 = \mathbf{2} \cdot 20$

$\mathbf{2} \cdot 10$

$\mathbf{2} \cdot \mathbf{5}$

Prvočíselný rozklad: $40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$.

b) $126 = \mathbf{2} \cdot \underbrace{63}_{\mathbf{3} \cdot \underbrace{21}_{\mathbf{3} \cdot \mathbf{7}}}$

Prvočíselný rozklad: $126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$.

Znalosti o množině všech dělitelů čísla a prvočíselném rozkladu využijeme při hledání **společného dělitele** dvou či více čísel (tj. dělitele, který dělí všechna zvolená čísla).

> **Definice**
>
> Čísla, která mají společného dělitele většího než jedna, nazýváme **soudělná**.
> Čísla, která mají jediného společného dělitele - číslo 1, nazýváme **nesoudělná**.

Například čísla 12 a 25 jsou nesoudělná: $D(12) = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$, $D(25) = \{1; 5; 25\}$.
Naopak čísla 12 a 18 jsou soudělná: $D(12) = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$, $D(18) = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$. Tato dvojice čísel má dokonce několik společným dělitelů větších než jedna. Největším z nich je číslo 6.

Největší společný dělitel čísel a, b, který značíme $NSD(a, b)$, je mnohdy užitečný. Například pokud krátíme zlomek největším společným dělitelem čitatele a jmenovatele, dostaneme zlomek v základním tvaru.

$$\frac{\cancel{12}^{\,6}}{\cancel{18}_{\,6}} = \frac{2}{3}$$

Největšího společného dělitele určíme pomocí množiny všech dělitelů nebo prostřednictvím prvočíselného rozkladu (postup je uveden v následujícím příkladu).

Příklad 1.13

Urči největšího společného dělitele daných čísel pomocí prvočíselného rozkladu:

a) 72 a 54 b) 300, $2\,100$ a 420

Řešení

a) Nejprve určíme prvočíselný rozklad čísel:

$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

$54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

Největší společný dělitel čísel je součin všech prvočísel, která se vyskytují v každém prvočíselném rozkladu, přičemž v tomto součinu uvedeme dané prvočíslo tolikrát, kolikrát se nejméně vyskytuje v každém rozkladu.

$NSD(72, 54) = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$

b) Nejprve určíme prvočíselný rozklad čísel:

$300 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$

$2\,100 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$

$420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

$NSD(300, 2\,100, 420) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

Při převodu zlomků na společného jmenovatele je výhodné využít **nejmenší společný násobek čísel** a, b, který značíme $nsn(a, b)$ (terminologie je obdobná jako v předchozím výkladu). Porovnej:

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{18} = \frac{3+2}{36} = \frac{5}{36}$$

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{18} = \frac{18+12}{216} = \frac{30}{216} = \frac{5}{36}$$

Nejmenší společný násobek čísel můžeme najít tak, že si vypíšeme několik prvních násobků každého čísla a mezi nimi vybereme nejmenší společný (**množinu všech násobků** označíme $N(a)$):

$N(12) = \{12; 24; 36; 48; 60; \ldots\}$

$N(18) = \{18; 36; 54; 72; 90; \ldots\}$

Vidíme, že nejmenším společným násobkem čísel 12 a 18 je číslo 36. Zároveň je třeba poznamenat, že množina všech násobků je nekonečná, nelze tedy zapsat výčtem všech prvků (což vyjadřujeme symbolem "$\ldots$").

Obvykle je výhodnější pro určení nejmenšího společného násobku použít prvočíselný rozklad (postup je uveden v následujícím příkladu).

Příklad 1.14

Urči nejmenší společný násobek daných čísel pomocí prvočíselného rozkladu:

a) 45 a 150 b) 28, 49 a 270

Řešení

a) Nejprve určíme prvočíselný rozklad čísel:

$45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$

$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$

Nejmenší společný násobek je součin prvočísel, která se vyskytují v alespoň jednom prvočíselném rozkladu, přičemž v tomto součinu uvedeme dané prvočíslo tolikrát, kolikrát se nejvíce vyskytuje v jednom z rozkladů.

$nsn(45, 150) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 450$

b) Nejprve určíme prvočíselný rozklad čísel:

$28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$

$49 = 7 \cdot 7$

$270 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$

$nsn(28, 49, 270) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 = 26\,460$

2. Mocniny a odmocniny

Tato kapitola se dělí na čtyři dílčí celky. Nejprve se dozvíme, co je mocnina s přirozeným mocnitelem a jaká početní pravidla pro ni platí. V další části definici mocniny rozšíříme, budeme se věnovat mocninám s celým mocnitelem. Ve třetím celku navážeme na pojem druhá odmocnina z reálného čísla, který byl připomenut v první kapitole. Zavedeme n-tou odmocninu z reálného čísla a uvedeme si pravidla, která lze při počítání s odmocninami využít. Na základě těchto znalostí definujeme v poslední části mocninu s racionálním exponentem jako zobecnění předchozích případů.

Nejdříve je vždy uveden učební text, ve kterém jsou pro lepší pochopení začleněny i vzorově vyřešené příklady.
Na učební text pak navazují interaktivní cvičení – v nich si můžeš rozmanitou formou učivo procvičit.

Členění této kapitoly:

2.1 Mocniny s přirozeným mocnitelem

V matematice se setkáváme se složitými výpočty, přesto se matematici snaží zapisovat své výsledky a výpočty co nejelegantněji, aby byly stručné a přehledné. Proto se místo zápisu $2+2+2+2$ používá elegantnější zápis $2 \cdot 4$. Obdobně místo součinu $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ píšeme 2^4, tedy zápis pomocí mocniny.

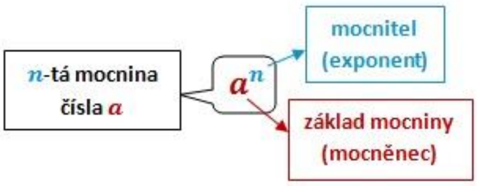
A jak vlastně **mocninu s přirozeným mocnitelem** definujeme?

Definice

Pro každé reálné číslo a a každé přirozené číslo n je:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ činitelů}}$$

Číslo a nazýváme **základ mocniny (mocněnec)**, n je **mocnitel (exponent)** a a^n je **mocnina**.



Říkáme, že "umocníme číslo a na n-tou".

Tedy $2^4 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{4 \text{ činitelé}} = 16$.

Z uvedené definice dále vyplývá, že:

1. pro každé reálné číslo a platí $a^1 = a$
$\forall a \in \mathbf{R} : a^1 = a$

2. pro každé přirozené číslo n platí $1^n = 1$ a $0^n = 0$
$\forall n \in \mathbf{N} : 1^n = 1 \wedge 0^n = 0$

Příklad 2.1

Umocni:

a) 3^3 b) $(-2)^5$ c) $(5,7)^1$ d) 0^4 e) 1^7

Řešení

a) $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$
b) $(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$
c) $(5,7)^1 = 5,7$
d) $0^4 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$
e) $1^7 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

Nyní se podíváme, kdy je **mocnina reálného čísla a s přirozeným mocnitelem** n kladné a kdy záporné číslo.

- Je-li základ mocniny kladné reálné číslo ($a > 0$), tak je mocnina vžy kladná, což vidíme přímo z definice (součin kladných čísel je kladné číslo).
- Je-li základ mocniny záporné reálné číslo ($a < 0$), tak mohou nastat dva případy.
  - Pokud je mocnitel sudé číslo, mocnina je číslo kladné (součin sudého počtu záporných čísel je číslo kladné), např. $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$.
  - Je-li však mocnitel liché číslo, pak mocnina je číslo záporné (součin lichého počtu záporných čísel je číslo záporné), např. $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$.
- Je-li základ mocniny číslo nula, pak je mocnina rovna nule.

$a > 0$	$a^n > 0$
$a < 0$	$a^n > 0$ pro n sudé $a^n < 0$ pro n liché
$a = 0$	$a^n = 0$

Pozor! Je rozdíl mezi zápisem $(-2)^4$ a -2^4. V prvním případě je $a = -2$, tj. $a < 0$, a zároveň n je sudé, proto je tato mocnina číslo kladné. Druhý případ lze přepsat jako $(-1) \cdot 2^4 = -1 \cdot 16 = -16$, tudíž výsledek je číslo záporné.

Příklad 2.2

Rozhodni, zda se jedná o kladné číslo:

a) 25^{13} — Ano, protože $a > 0$.
b) $(-5)^3$ — Ne, protože $a < 0$ a n je liché.
c) $\left(\frac{1}{8}\right)^{201}$ Řešení — Ano, protože $a > 0$.
d) $(-7)^{126}$ — Ano, protože $a < 0$ a n je sudé.
e) -6^{12} — Ne, protože mocnina 6^{12} je kladné číslo, které pak vynásobíme -1.
f) $(-0,2)^9$ — Ne, protože $a < 0$ a n je liché.
g) -8^{15} — Ne, protože mocnina 8^{15} je kladné číslo, které pak vynásobíme -1.

Abychom mohli počítat i o něco složitější příklady, uvedeme si pravidla pro počítání s **mocninami s přirozeným exponentem**, které lze odvodit z definice mocniny.

Pro každá dvě reálná čísla a, b a pro každá přirozená čísla k, l platí:

1. $a^k \cdot a^l = a^{k+l}$
2. $\left(a^k\right)^l = a^{k \cdot l}$
3. $\dfrac{a^k}{a^l} = a^{k-l},\ a \neq 0,\ k > l$
4. $(a \cdot b)^k = a^k \cdot b^k$
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^k = \dfrac{a^k}{b^k},\quad b \neq 0$

Důkaz:

1. $$a^k \cdot a^l = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ činitelů}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{l \text{ činitelů}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k+l \text{ činitelů}} = a^{k+l}$$

2. $$\left(a^k\right)^l = (\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ činitelů}})^l = \underbrace{(\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ činitelů}}) \cdot (\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ činitelů}}) \cdot \ldots \cdot (\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ činitelů}})}_{l\text{–krát}} =$$

$$= (\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \cdot l \text{ činitelů}}) = a^{k \cdot l}$$

3. $$\frac{a^k}{a^l} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{k \text{ činitelů}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{l \text{ činitelů}}} \overset{k>l}{=} \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{l \text{ činitelů}} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{k-l \text{ činitelů}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{l \text{ činitelů}}} = a^{k-l}$$

4. $$(a \cdot b)^k = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{k\text{–krát}} = (\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ činitelů}}) \cdot (\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{k \text{ činitelů}}) = a^k \cdot b^k$$

5. $$\left(\frac{a}{b}\right)^k = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a}{b}\right)}_{k\text{–krát}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{k \text{ činitelů}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{k \text{ činitelů}}} = \frac{a^k}{b^k}$$

Příklad 2.3

Vypočítej s využitím výše uvedených pravidel:

a) $(-2)^3 \cdot (-2)^2$ b) $\left(5^3\right)^1$ c) $\dfrac{7^6}{7^4}$ d) $(-2 \cdot 3)^2$ e) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^4$

Řešení

a) $(-2)^3 \cdot (-2)^2 = (-2)^{3+2} = (-2)^5 = -32$

b) $\left(5^3\right)^1 = 5^{3 \cdot 1} = 5^3 = 125$

c) $\dfrac{7^6}{7^4} = 7^{6-4} = 7^2 = 49$

d) $(-2 \cdot 3)^2 = (-2)^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$

e) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \dfrac{1^4}{2^4} = \dfrac{1}{16}$

A jakým způsobem sčítáme a odčítáme mocniny?

> Sčítat a odčítat můžeme jen ty mocniny, které mají *stejný základ* a *stejného mocnitele*.

Příklad 2.4

Vypočítej:

a) $6 \cdot 4^2 - 5 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^2$

b) $(-2)^3 + 3 \cdot (-2)^3$

c) $2^2 + 2^3 + 3 \cdot 2^2$

d) $5^2 - 3^2 + 5^3 + 3^4 - 2 \cdot 5^3$

Řešení

a) $6 \cdot 4^2 - 5 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^2 = (6 - 5 + 2) \cdot 4^2 = 3 \cdot 4^2 = 3 \cdot 16 = 48$

b) $(-2)^3 + 3 \cdot (-2)^3 = (1 + 3) \cdot (-2)^3 = 4 \cdot (-2)^3 = 4 \cdot (-8) = -32$

c) $2^2 + 2^3 + 3 \cdot 2^2 = 4 \cdot 2^2 + 2^3 = 4 \cdot 4 + 8 = 24$

d) $5^2 - 3^2 + 5^3 + 3^4 - 2 \cdot 5^3 = 5^2 - 3^2 - 5^3 + 3^4 = 25 - 9 - 125 + 81 = -28$

Cvičení k této části.

Cvičení - Mocniny s přirozeným mocnitelem

Cvičení 2.1

Přiřaď:

	$\frac{1}{16}$	8	0	$\frac{1}{27}$	1	$\frac{1}{3}$	-1	
a) $1^6 =$	○	○	○	○	●	○	○	Správně!
b) $(-1)^{17} =$	○	○	○	○	○	○	●	Správně!
c) $2^3 =$	○	●	○	○	○	○	○	Správně!
d) $\left(\frac{1}{3}\right)^1 =$	○	○	○	○	○	●	○	Správně!
e) $0^4 =$	○	○	●	○	○	○	○	Správně!
f) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 =$	●	○	○	○	○	○	○	Správně!
g) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 =$	○	○	○	●	○	○	○	Správně!

Cvičení 2.2

Rozhodni, zda se jedná o kladné číslo:

a) 9^3	● ano	○ ne	Správně!
b) $(-9)^3$	○ ano	● ne	Správně!
c) $\left(\frac{1}{9}\right)^5$	● ano	○ ne	Správně!
d) $\left\|-\frac{1}{9}\right\|^5$	● ano	○ ne	Správně!
e) $(-6)^4$	● ano	○ ne	Správně!
f) $\left(-\frac{1}{6}\right)^6$	● ano	○ ne	Správně!
g) $(-6+2)^3$	○ ano	● ne	Správně!
h) $\left(\frac{-1}{-7}\right)^5$	● ano	○ ne	Správně!
i) $(-3\cdot 2)^3$	○ ano	● ne	Správně!

Cvičení 2.3

Přiřaď:

	3^1	$\left(\frac{1}{10}\right)^4$	$\sqrt{3}$	$0,09$	3^{12}	3^7	$3\sqrt{3}$	$2^4\cdot 5^4$	
a) $\left(3^4\right)^3 =$	○	○	○	○	●	○	○	○	Správně!
b) $3^4\cdot 3^3 =$	○	○	○	○	○	●	○	○	Správně!
c) $\frac{3^4}{3^3} =$	●	○	○	○	○	○	○	○	Správně!
d) $(10)^4 =$	○	○	○	○	○	○	○	●	Správně!
e) $\frac{2^4}{20^4} =$	○	●	○	○	○	○	○	○	Správně!
f) $\left(\sqrt{3}\right)^3 =$	○	○	○	○	○	○	●	○	Správně!
g) $(0,3)^2 =$	○	○	○	●	○	○	○	○	Správně!
h) $\frac{3}{\sqrt{3}} =$	○	○	●	○	○	○	○	○	Správně!

Cvičení 2.4

Rozhodni, zda se jedná o kladné číslo:

a) $(-5)^4$	● ano	○ ne	Správně!
b) -5^4	○ ano	● ne	Správně!
c) $(-8)^{75}$	○ ano	● ne	Správně!
d) $\left\|-8^{75}\right\|$	● ano	○ ne	Správně!
e) -12^{24}	○ ano	● ne	Správně!
f) $(-12)^{24}$	● ano	○ ne	Správně!

Cvičení 2.5

Vypočítej:

a) $\dfrac{5^8}{5^2 \cdot 5^4} =$

b) $\dfrac{\left(5^3 \cdot 2^4\right)^2}{5^2 \cdot 5^3 \cdot 2^7} =$

c) $\dfrac{(-2)^6 \cdot 3^5}{2^5 \cdot (-3)^3} =$

d) $\dfrac{(-2)^5 \cdot (-2)^2 \cdot 2^2}{(-2)^9} =$

e) $\dfrac{\left[(-3)^3 \cdot (-2)\right]^3}{|-2|^5 \cdot |(-3)^7|} =$

f) $\left(\dfrac{7^2}{3}\right)^4 \cdot \dfrac{\left[(-2)^3 + |-11|\right]^6 \cdot (-3)^3}{(-7)^7 \cdot (-3)^5} =$

Cvičení 2.6

Vypočítej:

a) $4 \cdot 3^4 - 2 \cdot 3^3 - 5 \cdot 3^4 + 8 \cdot 3^3 =$

b) $2^4 - 6 \cdot 2^2 + 2^3 + 9 \cdot 2^2 - 3^3 =$

c) $(-2)^2 \cdot 3^2 - 5 \cdot (-2)^2 =$

d) $\dfrac{3^3 + 3^4 - 2 \cdot 3^3}{2^2 \cdot 5^2 + 5} =$

Cvičení 2.7

Vyjádři pomocí mocnin o základu 2, 3 nebo 5:

a) $\dfrac{27^5 \cdot 16^2}{4^6 \cdot 9} \cdot \dfrac{64}{81^3} =$

b) $\dfrac{32^2 \cdot 9}{6 \cdot 24^3} \div \dfrac{54^3}{18^4 \cdot 81} =$

c) $\dfrac{(8 \cdot 3)^3}{3^{10} \cdot 2^7} \cdot \left(\dfrac{27}{25}\right)^3 \cdot 5^7 =$

d) $\dfrac{10^2 \cdot 36^4}{45^2 \cdot 32^5} \div \dfrac{27^4 \cdot 125^2}{12^2 \cdot 60^6} =$

Cvičení 2.8

Vypočítej za předpokladu, že $x, y \in \mathbf{R} - \{0\}$:

a) $\dfrac{5x^2y^4}{2(xy^2)^2} \cdot \dfrac{(2xy)^3}{10xy^2} =$

b) $\left(\dfrac{3x^3y^2}{2xy^2}\right)^2 \cdot \dfrac{(2xy^2)^3}{3(xy)^4} =$

c) $\dfrac{x^5y^6}{(3x^2y^4)^2} \div \left(\dfrac{xy^2}{3x^3y^4}\right)^3 =$

Cvičení 2.9

Vypočítej za předpokladu, že $x, y, z \in \mathbf{R} - \{0\}$ a $a, b, c \in \mathbf{N}$.

a) $\left(x^{2a+b} \cdot y^a\right)^c \left(x^c \cdot y^b\right)^a = x^{[2ac+bc]} \cdot y^{ac} \cdot x^{ac} \cdot y^{ab} = x^{[3ac+bc]} \cdot y^{ac+ab}$

b) $\dfrac{x^{[a+b]} \cdot z^{3b}}{y^{[2a+3]}} \cdot \dfrac{x^b}{y^2 \cdot z^{2b}} = \dfrac{x^{[a+2b]} \cdot z^b}{y^{[2a+5]}}$

c) $\dfrac{x^{2b}\cdot y^{[3a+2]}}{z^{2a}} \div \dfrac{y\cdot x^{b}}{z^{[4a+c]}} = \dfrac{x^{2b}\cdot y^{[3a+2]}}{z^{2a}} \cdot \dfrac{z^{[4a+c]}}{y\cdot x^{b}} = x^{b} \cdot y^{[3a+1]} \cdot z^{[2a+c]}$

d) $\left(\dfrac{x^{[3+5a]}\cdot y^{a}}{z^{a}}\right)^{b} \cdot \left(\dfrac{z^{[b+c]}}{y^{b}\cdot x^{2b}}\right)^{a} = \dfrac{x^{[3b+5ab]}\cdot y^{ab}}{z^{ab}} \cdot \dfrac{z^{[ab+ac]}}{y^{ab}\cdot x^{2ab}} = x^{[3b+3ab]} \cdot z^{ac}$

2.2 Mocniny s celým mocnitelem

Víme už, co je mocnina s přirozeným mocnitelem a jaká pravidla pro ni platí. Co se ale stane, když za exponent dosadíme celé číslo?

Nejdříve se znovu podíváme na pravidla pro počítání s mocninami s přirozeným mocnitelem . Když si jednotlivá pravidla pečlivě pročteme, zjistíme, že ve všech může být mocnitelem libovolné přirozené číslo. Jenom v jednom je pro exponent připojena další podmínka. O které tvrzení se jedná? Přeci o pravidlo *dělení mocnin se stejným základem*! K tomuto tvrzení je připojena podmínka, že pro mocnitele $k, l \in \mathbf{N}$ platí: $k > l$

Zkusme se podívat, co se stane, pokud tato podmínka nebude platit. Tedy když $k = l$ nebo $k < l$.

1. $k = l$

Je zřejmé, že rovnost $\dfrac{a^k}{a^k} = 1$ platí pro každé nenulové reálné číslo a a pro libovolné přirozené číslo k.
Využijeme-li navíc vztah $0 = k - k$, který zjevně platí, pak můžeme psát:

$$1 = \frac{a^k}{a^k} = a^{k-k} = a^0$$

Odtud definujeme:

Definice

Pro každé reálné nenulové číslo a platí $a^0 = 1$.

Poznámka

Požadujeme, aby číslo a bylo nenulové, protože význam zápisu 0^0 není definován.

Z uvedených vztahů je vidět, že námi zkoumané pravidlo $\dfrac{a^k}{a^l} = a^{k-l}$ platí i v případě, že $k = l$, $k, l \in \mathbf{N}$.

2. $k < l$

Pro každé nenulové reálné číslo a a pro všechna přirozená čísla k, l taková, že $k < l$, platí:

$$\frac{a^k}{a^l} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{k \text{ činitelů}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{l \text{ činitelů}}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{k \text{ činitelů}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ činitelů}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{l-k \text{ činitelů}}} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{l-k \text{ činitelů}}} = \frac{1}{a^{l-k}}$$

, kde $l - k$ je přirozené číslo

Odtud tedy definujeme **mocninu s celým mocnitelem**:

Definice

Pro každé nenulové reálné číslo a a pro každé celé číslo m je $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$.

Podle uvedené definice platí následující:

$$\frac{a^k}{a^l} = \frac{1}{a^{l-k}} = a^{-(l-k)} = a^{-l+k} = a^{k-l},$$

přičemž $k - l$ je záporné celé číslo. Pak ale vidíme, že pravidlo $\frac{a^k}{a^l} = a^{k-l}$ platí i v případě, že $k < l$, $k, l \in \mathbf{N}$.

Příklad 2.5

Umocni:

a) 5^0 b) 0^0 c) 2^{-3} d) $(0,1)^{-3}$

Řešení

a) $5^0 = 1$ (podle definice)

b) Význam tohoto zápisu není definován.

c) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

d) $(0,1)^{-3} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-3} = \left(\frac{10}{1}\right)^{3} = 1\,000$

A nyní si můžeme uvést pravidla pro počítání s **mocninami s celým mocnitelem**. Pozorný čtenář si jistě všimne, že tato pravidla odpovídají pravidlům pro počítání s mocninami s přirozeným mocnitelem. Pouze zmizela podmínka pro exponent v pravidle 3 o dělení mocnin se stejným základem.

Pro každá dvě nenulová reálná čísla a, b a pro každá celá čísla k, l platí:

1. $a^k \cdot a^l = a^{k+l}$
2. $\left(a^k\right)^l = a^{k \cdot l}$
3. $\frac{a^k}{a^l} = a^{k-l}$
4. $(a \cdot b)^k = a^k \cdot b^k$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k}$

Příklad 2.6

Vypočítej za předpokladu, že x, y, z jsou nenulová reálná čísla:

a) $\left(2x^3y^{-4}z^{-2}\right)\cdot\left(3x^{-3}y^6z^{-3}\right)$ b) $\left(3x^{-2}y^4z^{-3}\right)^{-2}\cdot\left(9x^{-3}y^6z^3\right)$ c) $\dfrac{16x^7y^{-3}}{z^{-2}}\div\left(\dfrac{2^{-1}y^5}{x^4z^{-3}}\right)^{-3}$

Řešení

a) $\left(2x^3y^{-4}z^{-2}\right)\cdot\left(3x^{-3}y^6z^{-3}\right) = 6x^{[3+(-3)]}\cdot y^{[-4+6]}\cdot z^{[-2+(-3)]} = 6x^0y^2z^{-5} = \dfrac{6y^2}{z^5}$

b) $\left(3x^{-2}y^4z^{-3}\right)^{-2}\cdot\left(9x^{-3}y^6z^3\right) = \left(3^{[1\cdot(-2)]}\cdot x^{[-2\cdot(-2)]}\cdot y^{[4\cdot(-2)]}\cdot z^{[-3\cdot(-2)]}\right)\cdot\left(9x^{-3}y^6z^3\right) =$

$= \left(\dfrac{1}{9}x^4y^{-8}z^6\right)\cdot\left(9x^{-3}y^6z^3\right) = 1\cdot x^{[4+(-3)]}\cdot y^{[-8+6]}\cdot z^{[6+3]} = xy^{-2}z^9 = \dfrac{xz^9}{y^2}$

c) $\dfrac{16x^7y^{-3}}{z^{-2}}\div\left(\dfrac{2^{-1}y^5}{x^4z^{-3}}\right)^{-3} = \dfrac{16x^7y^{-3}}{z^{-2}}\cdot\left(\dfrac{y^5}{2x^4z^{-3}}\right)^3 = \dfrac{16x^7y^{-3}}{z^{-2}}\cdot\dfrac{y^{[5\cdot 3]}}{2^3x^{[4\cdot 3]}z^{[-3\cdot 3]}} =$

$= \dfrac{16x^7y^{-3}}{z^{-2}}\cdot\dfrac{y^{15}}{8x^{12}z^{-9}} = 2x^{[7-12]}\cdot y^{[-3+15]}\cdot z^{[0-(-2-9)]} = 2x^{-5}y^{12}z^{11} = \dfrac{2y^{12}z^{11}}{x^5}$

Na závěr si ještě uvedeme přehledný způsob, jakým v matematice i v dalších přírodních vědách **zapisujeme velká čísla**. Využíváme k tomu mocniny se základem 10. Zápis vypadá takto:

$$a\cdot 10^n,\ \text{kde } 1\leq a<10,\ n\in\mathbf{Z}$$

Exponent n odpovídá řádu první platné číslice zapisovaného čísla.

> **Poznámka**
>
> Tento typ zápisu se nazývá **semilogaritmický tvar**.

Příklad 2.7

Zapiš ve tvaru $a\cdot 10^n$, kde $1\leq a<10$, $n\in\mathbf{Z}$:

a) $31\,423$ b) 550 c) $0,002\,8$ d) $0,000\,907$

Řešení

a) $31\,423 = 3{,}142\,3\cdot 10^4$

4 3 2 1

b) $550 = 5{,}5\cdot 10^2$

2 1

c) $0{,}002\,8 = 2{,}8\cdot 10^{-3}$

-1-2-3

d) $0{,}000\,907 = 9{,}07\cdot 10^{-4}$

-1-2-3-4

Cvičení k této části.

Cvičení - Mocniny s celým mocnitelem

Cvičení 2.10

Přiřaď:

	2	-2	1	8	-8	$-2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	
a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} =$	○	○	○	●	○	○	○	Správně!
b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} =$	○	○	○	○	●	○	○	Správně!
c) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2} =$	●	○	○	○	○	○	○	Správně!
d) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-3} =$	○	○	○	○	○	●	○	Správně!
e) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-3} =$	○	○	○	○	○	○	●	Správně!
f) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{0} =$	○	○	●	○	○	○	○	Správně!
g) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} =$	○	●	○	○	○	○	○	Správně!

Cvičení 2.11

Vyber odpovídající výsledek:

a) $3^{-3} \cdot 3^{5} =$

- ○ 3^{-15}
- ○ 3^{-2} ✔ Správně!
- ● 3^{2}

b) $\left(2^{2}\right)^{-3} =$

- ● 2^{-6}
- ○ 2^{-5} ✔ Správně!
- ○ 2^{-1}

c) $\frac{5^{4}}{5^{-3}} =$

- ○ 5^{-12}
- ○ 5^{1} ✔ Správně!
- ● 5^{7}

d) $a^2 \cdot a^4 \cdot a^{-3} =$

- a^{-24}
- a^3 Správně!
- a^5

e) $a^{2n+1} \cdot a^{3-n} =$

- a^{n+4}
- a^{6n-n} Správně!
- a^{n-3}

f) $\dfrac{a^4}{a^2 \cdot a^{-3}} =$

- a^{-6}
- a^5 Správně!
- a^{-1}

g) $\dfrac{a^{3n+4}}{a^{2n-2}} =$

- a^{n+2}
- a^{6n-8} Správně!
- a^{n+6}

Cvičení 2.12

Vypočítej:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} - \left(-\frac{1}{5}\right)^{-2} =$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} + 3^{-1} - \sqrt{3}\left(\sqrt{3}\right)^{-3} =$

c) $\left(\sqrt{5}\right)^{-2} + \left(-\sqrt{5}\right)^{-2} + \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-3} - \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-3} =$

d) $(-0,5)^{-2} - (0,5)^{-2} + (0,2)^{-3} + (-0,2)^{-3} =$

Cvičení 2.13

Zjednoduš následující výrazy za předpokladu, že $a, b, c, d \in \mathbf{R} - \{0\}$:

a) $\left(3a^4b^{-6}c^{-4}d^2\right) \cdot \left(6a^{-2}b^6c^{-3}d^4\right) =$

b) $\dfrac{7a^2b^{-4}c^3d^7}{14a^{-3}b^{-7}c^4d^5} =$

c) $\dfrac{15a^{-3}b^6c^{-7}}{2b^7d^{-3}} \cdot \dfrac{8a^2b^{-4}d^2}{5ac^{-6}} =$

d) $\dfrac{\left(3a^{-2}b^3c^4d^{-5}\right)^3}{a^{-4}b^{-3}d^2} \cdot \left(\dfrac{3a^{-3}b^4}{c^{-5}d^2}\right)^{-2} =$

e) $\left(\dfrac{2ab^{-3}}{c^{-4}d^2}\right)^{-2} \div \left(\dfrac{a^5c^{-3}}{2b^{-2}d^2}\right)^{-3} =$

f) $\dfrac{\left(b^{-4}d^2\right)^{-3}}{5a^{-6}b^2c^4} \div \left(\dfrac{a^2bc^5}{5a^3b^{-4}d^6}\right)^2 =$

Cvičení 2.14

Vyber odpovídající zápis:

a) $1\,740\,000 =$

- ○ $1,74 \cdot 10^5$
- ◉ $1,74 \cdot 10^6$ Správně!
- ○ $1,74 \cdot 10^4$

b) $23,5 =$

- ○ $2,35 \cdot 10^2$
- ○ $2,35 \cdot 10^{-2}$ Správně!
- ◉ $2,35 \cdot 10$

c) $6\,000 =$

- $6{,}0 \cdot 10^3$
- $6{,}0 \cdot 10^2$ Správně!
- $6{,}0 \cdot 10^4$

d) $0{,}000\,8 =$

- $8{,}0 \cdot 10^{-3}$
- $8{,}0 \cdot 10^3$ Správně!
- $8{,}0 \cdot 10^{-4}$

e) $0{,}000\,062 =$

- $6{,}2 \cdot 10^{-6}$
- $6{,}2 \cdot 10^{-5}$ Správně!
- $6{,}2 \cdot 10^{-4}$

f) $0{,}345 =$

- $3{,}45 \cdot 10^{-1}$
- $3{,}45 \cdot 10^{-3}$ Správně!
- $3{,}45 \cdot 10^{-2}$

Cvičení 2.15

Přepiš následující údaje tak, aby jejich číselná hodnota byla ve tvaru $a \cdot 10^n$, kde $1 \leq a \leq 10$, $n \in \mathbb{Z}$:

a) Světlo se pohybuje ve vakuu rychlostí $v = 300\,000$ km/s.

? $v = 3 \cdot 10^5$ km/s.

b) Obvod o rovníku je přibližně $6\,371\,000$ m.

? $o = 6{,}371 \cdot 10^6$ m.

c) Průměr d červené krvinky se pohybuje kolem $0{,}000\,007\,2$ m.

? $d = 7{,}2 \cdot 10^{-6}$ m.

Cvičení 2.16

Daná čísla nejdříve zapiš ve tvaru $a \cdot 10^n$, kde $1 \leq a \leq 10$, $n \in \mathbb{Z}$, a poté vypočítej:

a) $\dfrac{0{,}000\,45}{3\,000} \cdot \dfrac{20\,000}{0{,}01} =$

b) $\dfrac{0{,}5}{1\,500\,000} \cdot \dfrac{240\,000}{0{,}004} =$

c) $\dfrac{25\,000}{10} \div \dfrac{0,000\,005}{0,000\,8} =$

d) $\dfrac{3\,000\,000}{20\,000} \div \dfrac{0,000\,015}{0,005\,3} =$

Cvičení 2.17

Zjedoduš za předpokladu, že $x, y, z \in \mathbf{R} - \{0\}$ a $a, b, c \in \mathbf{Z}$:

a) $\left(x^{[a-b]} \cdot y^{[2a+2b]}\right) \cdot \left(x^{b} \cdot y^{-2b}\right) = x^{a} \cdot y^{2a} = \left(x \cdot y^{2}\right)^{a}$

b) $\dfrac{\left(x^{-b} \cdot y^{2b}\right)^{c}}{\left(x^{a} \cdot z^{3}\right)^{b}} \cdot \dfrac{\left(x^{b} \cdot z\right)^{a}}{\left(x^{3c} \cdot y^{-4c}\right)^{b}} = \dfrac{x^{-bc} \cdot y^{2bc}}{x^{ab} \cdot z^{3b}} \cdot \dfrac{x^{ab} \cdot z^{a}}{x^{3bc} \cdot y^{-4bc}} = \dfrac{y^{6bc} \cdot z^{[a-3b]}}{x^{4bc}}$

c) $\dfrac{x^{2a} \cdot z^{-b}}{y^{[4a-1]}} \div \dfrac{z^{[2-b]} \cdot x^{[a+b]}}{y^{[2b-3]}} = \dfrac{x^{2a} \cdot z^{-b}}{y^{[4a-1]}} \cdot \dfrac{y^{[2b-3]}}{z^{[2-b]} \cdot x^{[a+b]}} = \dfrac{x^{[a-b]}}{y^{[4a-2b+2]} \cdot z^{2}}$

d) $\left[\dfrac{\left(x^{2a} \cdot y^{3}\right)^{-c} x}{z^{c}}\right]^{-b} \cdot \left(\dfrac{z^{4c}}{x^{-1} \cdot y^{2c}}\right)^{b} = \dfrac{x^{2abc} \cdot y^{3bc} \cdot x^{-b}}{z^{-bc}} \cdot \dfrac{z^{4bc}}{x^{-b} \cdot y^{2bc}} = x^{2abc} \cdot y^{bc} \cdot z^{5bc} =$

$= \left(x^{2a} \cdot y \cdot z^{5}\right)^{bc}$

Cvičení 2.18

Vypočítej:

a) $\dfrac{(-5)^{-2} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{-3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot 2^{-3} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^{-2}}{\left(\frac{1}{27}\right)^{0}} = \dfrac{\frac{1}{25} \cdot (-125) + 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot 36}{1} =$

$= -5 + \dfrac{1}{2} \cdot 36 = -5 + 18 = 13$

b) $\dfrac{2^{-2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}+\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}\cdot 3^{-3}-\left(-\frac{1}{5}\right)^{0}}{2\cdot(-3)^{-2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4}-\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}}=\dfrac{\frac{1}{4}\cdot 16+5\cdot 81\cdot\frac{1}{27}-1}{2\cdot\frac{1}{9}\cdot 81-9}=$

$=\dfrac{4+5\cdot 3-1}{2\cdot 9-9}=\dfrac{4+15-1}{18-9}=\dfrac{18}{9}=2$

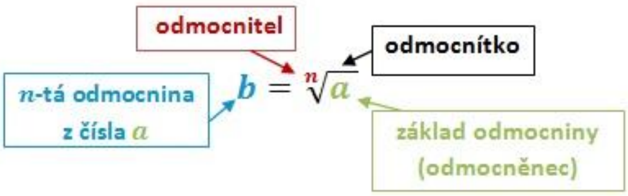
2.3 Odmocniny z reálného čísla

V první kapitole jsme si připomněli pojem druhá odmocnina z reálného čísla. Nyní tyto znalosti rozšíříme definováním n-té odmocniny z reálného čísla, $n \in \mathbf{N}$.

Definice

Pro libovolné $n \in \mathbf{N}$ definujeme n-**tou odmocninu** z nezáporného reálného čísla a jako nezáporné reálné číslo b, pro které platí $b^n = a$. Značíme $b = \sqrt[n]{a}$.

Číslo a označujeme jako **základ odmocniny (odmocněnec)**, číslo n nazýváme **odmocnitel** a symbol $\sqrt{}$ je **odmocnítko**.



Říkáme, že "odmocněním čísla a dostaneme číslo b".

V souladu s dříve zavedeným značením budeme pro druhou odmocninu užívat zkrácený zápis $b = \sqrt{a}$ namísto zápisu $b = \sqrt[2]{a}$.

Poznámka

Z definice vyplývá, že n-tá odmocnina je definována pouze z *nezáporného* čísla a zároveň že n-tá odmocnina je vždy *nezáporná*.

Příklad 2.8

Odmocni:

a) $\sqrt[3]{27}$ b) $\sqrt[4]{16}$ c) $\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$ d) $b = \sqrt[4]{0,0001}$

Řešení

a) $\sqrt[3]{27} = 3$, jelikož $3^3 = 27$

b) $\sqrt[4]{16} = 2$, jelikož $2^4 = 16$

c) $\sqrt[3]{\frac{1}{125}} = \frac{1}{5}$, jelikož $\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$

d) $\sqrt[4]{0,000\,1} = 0,1$, jelikož $(0,1)^4 = 0,000\,1$

Pro počítání s odmocninami platí následující pravidla:

Pro všechna nezáporná reálná čísla a, b a pro všechna přirozená čísla m, n platí:

1. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

2. $\sqrt[n]{a_1} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a_m} = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_m}$

3. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, pro $b \neq 0$

(Tvrzení 2 představuje zobecnění tvrzení 1.)

Příklad 2.9

Odmocni:

a) $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$ b) $\sqrt{36\pi^4}$ c) $\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{4}$ d) $\sqrt[3]{\frac{54}{125}}$

Řešení

a) $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}} = \sqrt[5]{\frac{96}{3}} = \sqrt[5]{32} = 2$

b) $\sqrt{36\pi^4} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{\pi^4} = 6\pi^2$

c) $\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{10 \cdot 25 \cdot 4} = \sqrt[3]{1\,000} = 10$

d) $\sqrt[3]{\frac{54}{125}} = \frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{\sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{2}}{5} = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{2}}{5}$

V příkladu 2.9 d) jsme provedli **částečné odmocnění**.

Pro všechna přirozená čísla n, pro všechna celá čísla z a pro všechna kladná reálná čísla a platí:

1. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^z = \sqrt[n]{a^z}$

2. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = a$

(Tvrzení 2 je speciální případ tvrzení 1 pro $z = n$.)

Pro všechna přirozená čísla m, n, p a pro všechna nezáporná reálná čísla a platí:

1. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

2. $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$

Příklad 2.10

Zjednoduš:

a) $\left(\sqrt[7]{\frac{1}{2}}\right)^7$ b) $\sqrt[6]{4^2}\cdot\sqrt[6]{4^4}$ c) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$ d) $\sqrt[6]{4^9}$

Řešení

a) $\left(\sqrt[7]{\frac{1}{2}}\right)^7=\sqrt[7]{\left(\frac{1}{2}\right)^7}=\frac{1}{2}$

b) $\sqrt[6]{4^2}\cdot\sqrt[6]{4^4}=\sqrt[6]{4^2\cdot 4^4}=\sqrt[6]{4^6}=4$

c) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}=\sqrt{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3\cdot 2]{2}=\sqrt[6]{2}$

d) $\sqrt[6]{4^9}=\sqrt[3\cdot 2]{4^{3\cdot 3}}=\sqrt[2]{4^3}=\sqrt{64}=8$

Příklad 2.11

Vyjádři ve tvaru jediné odmocniny za předpokladu, že $a>0$:

a) $\sqrt[5]{a}\cdot\sqrt{a^3}$ b) $\sqrt[4]{a\cdot\sqrt[3]{a}}$

Řešení

a) Každou odmocninu zapíšeme ve tvaru odmocniny, kde odmocnitel je 10 (což je nejmenší společný násobek čísel 2 a 5).

$$\sqrt[5]{a}\cdot\sqrt{a^3}=\sqrt[5\cdot 2]{a^2}\cdot\sqrt[2\cdot 5]{\left(a^3\right)^5}=\sqrt[10]{a^2}\cdot\sqrt[10]{\left(a^3\right)^5}=\sqrt[10]{a^2\cdot a^{15}}=\sqrt[10]{a^{17}}$$

b) $\sqrt[4]{a\cdot\sqrt[3]{a}}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^3}\cdot\sqrt[3]{a}}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^3\cdot a}}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^4}}=\sqrt[4\cdot 3]{a^4}=\sqrt[3]{a}$

> **Poznámka**
>
> Podle definice n-té odmocniny z nezáporného reálného čísla má smysl také zápis $\sqrt[1]{a^m}$, přičemž $\sqrt[1]{a^m}=a^m$.

Usměrňování zlomku

V případě, že se ve jmenovateli zlomku vyskytuje odmocnina, upravujeme obvykle zlomek tak, aby ve jmenovateli žádné odmocniny nebyly. Tento postup se nazývá **usměrňování zlomku**. Zlomek usměrníme vhodným *rozšířením*, tedy vynásobením čitatele i jmenovatele zlomku stejným nenulovým číslem (tím se hodnota původního zlomku nezmění). Při usměrňování zlomku je někdy výhodné využít vzorec pro rozdíl druhých mocnin.

zlomek, který chceme usměrnit

$$\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}}_{=1}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

čitatel zlomku

jmenovatel zlomku

Příklad 2.12

Usměrni zlomky:

a) $\frac{3}{4\sqrt{3}}$ b) $\frac{1}{\sqrt[3]{7}}$ c) $\frac{3}{1-\sqrt{2}}$ d) $\frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

Řešení

a) $\frac{3}{4\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{4 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{7}} \cdot \frac{\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{7}} = \frac{\sqrt[3]{49}}{7}$

c) $\frac{3}{1-\sqrt{2}} \cdot \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{3\left(1+\sqrt{2}\right)}{1^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{3\left(1+\sqrt{2}\right)}{1-2} = -3\left(1+\sqrt{2}\right)$

Využili jsme vzorec $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, kde $a = 1$, $b = \sqrt{2}$.

d) $\frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{4\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{4\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{5-3} = \frac{4\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{2} =$

$= 2\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$

Využili jsme vzorec $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, kde $a = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{3}$.

Cvičení k této části.

Cvičení - Odmocniny z reálného čísla

Cvičení 2.19

Přiřaď:

	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	2	3	4	5	
a) $\sqrt[5]{32} =$	○	○	●	○	○	○	Správně!
b) $\sqrt[4]{81} =$	○	○	○	●	○	○	Správně!
c) $\sqrt[3]{125} =$	○	○	○	○	○	●	Správně!
d) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} =$	○	●	○	○	○	○	Správně!
e) $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} =$	●	○	○	○	○	○	Správně!
f) $\sqrt[3]{64} =$	○	○	○	○	●	○	Správně!

Cvičení 2.20

Vypočítej:

a) $\sqrt[6]{27} \cdot \sqrt[6]{9} =$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}} =$

c) $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{-5} =$

d) $\sqrt[4]{\dfrac{81}{16}} \cdot \sqrt[3]{0,008} =$

Cvičení 2.21

Rozhodni, zda pro $a > 0$ platí:

a) $\sqrt[4]{a^5} = a \cdot \sqrt[4]{a}$	● ano	○ ne	Správně!
b) $\sqrt[7]{a^{10}} = a^3 \cdot \sqrt[7]{a}$	○ ano	● ne	Správně!
c) $\sqrt[6]{a^{17}} = a^2 \cdot \sqrt[6]{a^5}$	● ano	○ ne	Správně!
d) $\sqrt[3]{a^{11}} \cdot \sqrt[3]{a^8} = a^{18} \cdot \sqrt[3]{a}$	○ ano	● ne	Správně!
e) $\dfrac{\sqrt[3]{a^{21}}}{a \cdot \sqrt[5]{a^6}} = \dfrac{a^7 \cdot \sqrt[3]{0}}{a^2 \cdot \sqrt[5]{a}}$	○ ano	● ne	Správně!
f) $\dfrac{\sqrt[4]{a^{24}}}{\sqrt[11]{a^{23}}} = \dfrac{a^6}{a^2 \cdot \sqrt[11]{a}}$	● ano	○ ne	Správně!

Cvičení 2.22

Vypočítej:

a) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^4 =$

b) $\left(\sqrt[3]{\dfrac{2}{3^3}}\right)^5 =$

c) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{1}} =$

d) $\sqrt[6]{81} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{3^2}} =$

e) $\dfrac{\sqrt[12]{2^6}}{\sqrt[20]{16^5}} =$

Cvičení 2.23

Usměrni zlomky:

a) $\dfrac{6}{\sqrt{6}} =$

b) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{3}} =$

c) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} =$

d) $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{10}+3} =$

Cvičení 2.24

Vyjádři ve tvaru jediné odmocniny:

a) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3} =$

b) $3\sqrt[3]{3} =$

c) $\dfrac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt[3]{2}} =$

d) $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt[3]{100}} =$

Cvičení 2.25

Vypočítej:

a) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{250} =$

b) $\dfrac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{243}} =$

c) $6 \cdot \sqrt[3]{270} - 9 \cdot \sqrt[3]{80} =$

Cvičení 2.26

Vyjádři ve tvaru jediné odmocniny za předpokladu, že $a > 0$:

a) $a^4 \cdot \sqrt{a^{-2} \cdot \sqrt[3]{a^{-5}}} = a^4 \cdot \sqrt{\sqrt[3]{\left(a^{-2}\right)^3} \cdot \sqrt[3]{a^{-5}}} = a^4 \cdot \sqrt{\sqrt[3]{a^{-6} \cdot a^{-5}}} = a^4 \cdot \sqrt[6]{a^{-11}} =$

$= \sqrt[6]{\left(a^4\right)^6} \cdot \sqrt[6]{a^{-11}} = \sqrt[6]{a^{24} \cdot a^{-11}} = \sqrt[6]{a^{13}}$

b) $a \cdot \sqrt{\frac{1}{a} \cdot \sqrt{\frac{1}{a^3}}} = a \cdot \sqrt{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{a^3}}} = a \cdot \sqrt{\sqrt{\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a^3}}} = a \cdot \sqrt{\sqrt{\frac{1}{a^5}}} = a \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{a^5}} =$

$= \sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{a^5}} = \sqrt[4]{a^4 \cdot \frac{1}{a^5}} = \sqrt[4]{\frac{1}{a}}$

Cvičení 2.27

Odmocni:

a) $\left(\sqrt[4]{\frac{1}{3^7}} - \sqrt[4]{3}\right) \cdot \sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{\frac{1}{3^7}} \cdot \sqrt[4]{27} - \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{\frac{1}{3^7} \cdot 3^3} - \sqrt[4]{3 \cdot 3^3} =$

$= \sqrt[4]{\frac{1}{3^4}} - \sqrt[4]{3^4} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^4} - 3 = \frac{1}{3} - 3 = \frac{1}{3} - \frac{9}{3} = -\frac{8}{3}$

b) $\sqrt[3]{12} \cdot \left(\sqrt[3]{18} + \sqrt[3]{4}\right) - 2 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} - 2 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{108} =$

$= \sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{18} + \sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{4} - 2 \cdot \sqrt[3]{6} - 2 \cdot \sqrt[3]{216} =$

$= \sqrt[3]{2^2 \cdot 3} \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 3^2} + \sqrt[3]{2^2 \cdot 3} \cdot \sqrt[3]{2^2} - 2 \cdot \sqrt[3]{6} - 2 \cdot \sqrt[3]{6^3} =$

$= \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3} + \sqrt[3]{2^3 \cdot 2 \cdot 3} - 2 \cdot \sqrt[3]{6} - 2 \cdot 6 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot \sqrt[3]{6} - 2 \cdot \sqrt[3]{6} - 12 = 6 - 12 = -6$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{25} \cdot \sqrt[6]{125} \cdot \sqrt[10]{5^5}} \cdot \sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{625}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{5^2} \cdot \sqrt[6]{5^3} \cdot \sqrt[10]{5^5}} \cdot \dfrac{\sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{625}} =$

$= \sqrt[3]{\sqrt[2\cdot 2]{5^2} \cdot \sqrt[2\cdot 3]{5^3} \cdot \sqrt[2\cdot 5]{5^5}} \cdot \sqrt[4]{\frac{5^2}{5^4}} = \sqrt[3]{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{25}} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{5}\right)^3} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{5^2}} =$

$= \sqrt{\sqrt[3]{5^3}} \cdot \sqrt[2\cdot 2]{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} = \sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 1$

2.4 Mocniny s racionálním exponentem

Z předcházejícího výkladu umíme počítat s mocninami s celým exponentem. Zároveň víme, že každé racionální číslo lze vyjádřit ve tvaru zlomku $\frac{m}{n}$, kde $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$. Lze tedy rozšířit definici mocniny i na racionální exponent? Má smysl zápis $a^{\frac{m}{n}}$?

Pravidla pro počítání s odmocninami možná některým připomněla pravidla pro mocniny. Podívejme se tedy, jestli mezi mocninami a odmocninami neexistuje souvislost. Pro libovolné kladné reálné číslo a si zvolme např. $\sqrt[3]{a^{-12}}$. Podle výše zmíněných pravidel může tuto odmocninu upravit:

$$\sqrt[3]{a^{-12}} = \sqrt[3]{\left(a^{-4}\right)^3} = a^{-4}$$

$$\sqrt[3]{a^{-12}} = a^{-4} = a^{-\frac{12}{3}}$$

Zdá se tedy, že pro libovolné $m = k \cdot n$, kde $m, k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$ a pro všechna kladná reálná čísla a platí:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{k \cdot n}} = \sqrt[n]{\left(a^k\right)^n} = a^k = a^{\frac{m}{n}}$$

Zřejmě lze tudíž mocninu s racionálním exponentem definovat vztahem:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Takto definovaná mocnina s racionálním eponentem je rozšířením mocniny s celým mocnitelem, jelikož pro všechna celá čísla m platí:

$$a^{\frac{m}{1}} = \sqrt[1]{a^m} = a^m$$

Definice

Pro každé kladné reálné číslo a, pro každé celé číslo m a pro každé přirozené číslo n definujeme **mocninu s racionálním exponentem** vztahem:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Mocnina s racionálním exponentem je určena pro každé racionální číslo r jednoznačně, přestože lze číslo r zapsat ve tvaru zlomku nekonečně mnoha způsoby. Pokud totiž číslo r vyjádříme zlomkem v základním tvaru jako $\frac{m}{n}$, kde $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, pak pro libovolné jiné vyjádření téhož racionálního čísla (za předpokladu, že $t > 0$) platí:

$$\frac{s}{t} = \frac{p \cdot m}{p \cdot n}, \text{ kde } s \in \mathbf{Z} \text{ a } t, p \in \mathbf{N}$$

Odtud lze vyjádřit:

$$a^{\frac{s}{t}} = \sqrt[t]{a^s} = \sqrt[p \cdot n]{a^{p \cdot m}} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Příklad 2.13

Zapiš ve tvaru mocniny s racionálním exponentem:

a) $\sqrt[3]{6^4}$ b) $\sqrt[5]{12^2}$ c) $\sqrt{6^5}$ d) $\sqrt[4]{0,01}$

Řešení

a) $\sqrt[3]{6^4} = 6^{\frac{4}{3}}$

b) $\sqrt[5]{12^2} = 12^{\frac{2}{5}}$

c) $\sqrt{6^5} = 6^{\frac{5}{2}}$

d) $\sqrt[4]{0,01} = (0,01)^{\frac{1}{4}}$

Pro počítání s mocninami s racionálním exponentem platí stejná pravidla, jako pro počítání s mocninami, jejichž mocnitel je celé číslo.

Pro každá dvě kladná reálná čísla a, b a pro každá racionální čísla k, l platí:

1. $a^k \cdot a^l = a^{k+l}$
2. $\left(a^k\right)^l = a^{k \cdot l}$
3. $\dfrac{a^k}{a^l} = a^{k-l}$
4. $(a \cdot b)^k = a^k \cdot b^k$
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^k = \dfrac{a^k}{b^k}$

Příklad 2.14

Nejprve zapiš ve tvaru mocniny s racionálním exponentem, poté zjednoduš:

a) $\left(\sqrt[7]{\frac{1}{2}}\right)^7$ b) $\sqrt[6]{4^2} \cdot \sqrt[6]{4^4}$ c) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$ d) $\sqrt[6]{4^9}$

Řešení

a) $\left(\sqrt[7]{\frac{1}{2}}\right)^7 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{7}} = \frac{1}{2}$

b) $\sqrt[6]{4^2} \cdot \sqrt[6]{4^4} = 4^{\frac{2}{6}} \cdot 4^{\frac{4}{6}} = 4^{\left[\frac{2}{6}+\frac{4}{6}\right]} = 4^{\frac{6}{6}} = 4^1 = 4$

c) $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right]} = 2^{\frac{1}{6}}$

d) $\sqrt[6]{4^9} = 4^{\frac{9}{6}} = 4^{\frac{3}{2}} = 4^1 \cdot 4^{\frac{1}{2}} = 4 \cdot 2 = 8$

Tyto úlohy jsme již řešili pomocí pravidel pro odmocniny v příkladu 2.10.

Příklad 2.15

Vyjádři ve tvaru jediné odmocniny za předpokladu, že $a > 0$:

a) $\sqrt[5]{a}\cdot\sqrt{a^3}$ b) $\sqrt[4]{a\cdot\sqrt[3]{a}}$

Řešení

a) $\sqrt[5]{a}\cdot\sqrt{a^3} = a^{\frac{1}{5}}\cdot a^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{2+15}{10}} = a^{\frac{17}{10}} = \sqrt[10]{a^{17}}$

b) $\sqrt[4]{a\cdot\sqrt[3]{a}} = \sqrt[4]{a\cdot a^{\frac{1}{3}}} = \left(a\cdot a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = a^{\left[1\cdot\frac{1}{4}\right]}\cdot a^{\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\right]} = a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{1}{12}} = a^{\frac{3+1}{12}} = a^{\frac{4}{12}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$

Tyto úlohy jsme již řešili pomocí pravidel pro odmocniny v příkladu 2.11.

Cvičení k této části.

Cvičení - Mocniny s racionálním mocnitelem

Cvičení 2.28

Rozhodni, zda platí:

a) $\sqrt[5]{7^6} = 7^{\frac{6}{5}}$	(•) ano	( ) ne	Správně!
b) $19^{\frac{12}{7}} = \sqrt[7]{19^{12}}$	(•) ano	( ) ne	Správně!
c) $\sqrt{25^3} = 25^{\frac{3}{1}}$	( ) ano	(•) ne	Správně!
d) $(0,4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0,4}$	(•) ano	( ) ne	Správně!
e) $\sqrt[6]{5^{-4}} = -5^{\frac{4}{6}}$	( ) ano	(•) ne	Správně!
f) $\left(\frac{1}{15}\right)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1^{-3}}{\sqrt[4]{15}}$	( ) ano	(•) ne	Správně!

Cvičení 2.29

Přiřaď:

	$0,04$	$0,4$	2	3	4	9	
a) $16^{\frac{1}{4}} =$	○	○	●	○	○	○	Správně!
b) $16^{\frac{2}{4}} =$	○	○	○	○	●	○	Správně!
c) $81^{\frac{5}{10}} =$	○	○	○	○	○	●	Správně!
d) $(0,0016)^{\frac{1}{2}} =$	●	○	○	○	○	○	Správně!
e) $(0,064)^{\frac{1}{3}} =$	○	●	○	○	○	○	Správně!
f) $27^{\frac{2}{6}} =$	○	○	○	●	○	○	Správně!

Cvičení 2.30

Vypočítej:

a) $2^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{\frac{4}{3}} \cdot 2^{\frac{7}{6}} =$

b) $\dfrac{\left(5^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{3}{2}}}{5^{\frac{4}{10}}} =$

c) $\dfrac{\left(45^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{17}{4}}}{5^{\frac{7}{10}}} \cdot 9^{-\frac{6}{5}} =$

d) $\dfrac{\left(3^{\frac{30}{7}} \cdot 4^{\frac{18}{7}}\right)^{\frac{7}{6}}}{36^{\frac{5}{2}}} =$

Cvičení 2.31

Vyjádři ve tvaru jediné odmocniny:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2^4} \cdot \sqrt[6]{2^4} =$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[6]{36}} \cdot \sqrt[4]{6^3} =$

c) $\dfrac{1}{10\,000} \cdot \sqrt[4]{5 \cdot \sqrt[3]{2^4 \cdot 5}} =$

d) $\dfrac{\sqrt[5]{144} \cdot \sqrt[10]{4^6}}{\sqrt{27}} \cdot \sqrt[5]{\sqrt{4}} =$

Cvičení 2.32

Vypočítej:

a) $\left[5 \cdot \left(5 \cdot 5^4\right)^{\frac{3}{4}}\right] =$

b) $2^{\frac{4}{3}} \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^4 =$

c) $\left(\dfrac{4}{27}\right)^{\frac{1}{3}} \div \left(\dfrac{32}{81}\right)^{\frac{1}{4}} =$

d) $\dfrac{3^{\frac{5}{4}} \cdot 8^{\frac{12}{9}} \cdot (0,5)^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{5}{10}\right)^{\frac{6}{18}} \cdot 3^{\frac{1}{4}}} =$

Cvičení 2.33

Zjednoduš za předpokladu, že $a \neq 0$, $b \neq 0$:

a) $$\frac{a^{0,2} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{14}{8}} \cdot a^{1,5}}{a^{0,5} \cdot \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^4} = \frac{a^{\frac{1}{5}} \cdot a^{-\frac{7}{4}} \cdot a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{4}{3}}} = \frac{a^{\frac{4-35+30}{20}}}{a^{\frac{3+8}{6}}} = \frac{a^{-\frac{1}{20}}}{a^{\frac{11}{6}}} = a^{\frac{-3+110}{60}} = a^{\frac{107}{60}}$$

b) $$\left[\frac{a^{\frac{4}{3}} \cdot b^{0,75}}{\left(a^2\right)^{0,8}}\right]^{2,5} = \left(\frac{a^{\frac{4}{3}} \cdot b^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{8}{5}}}\right)^{\frac{5}{2}} = \left(a^{\frac{20-24}{15}} \cdot b^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{5}{2}} = \left(a^{-\frac{4}{15}} \cdot b^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{5}{2}} = a^{-\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{15}{8}}$$

Cvičení 2.34

Pro $a \neq 0$ vyjádři ve tvaru jediné odmocniny:

a) $$\frac{1}{a} \cdot \sqrt[7]{a^6 \cdot \sqrt[5]{a^4 \cdot \sqrt{a^6}}} = a^{-1} \cdot \left[a^6 \cdot \left(a^4 \cdot a^{\frac{6}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}\right]^{\frac{1}{7}} = a^{-1} \cdot a^{\frac{6}{7}} \cdot \left(a^{\frac{8+6}{2}}\right)^{\frac{1}{35}} =$$

$$= a^{\frac{-7+6}{7}} \cdot \left(a^7\right)^{\frac{1}{35}} = a^{-\frac{1}{7}} \cdot a^{\frac{7}{35}} = a^{\frac{-5+7}{35}} = a^{\frac{2}{35}} = \sqrt[35]{a^2}$$

b) $$\frac{\sqrt[4]{a^5 \cdot \sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt{a^9 \cdot \sqrt[3]{a}}} = \frac{\left(a^5 \cdot a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}}{\left(a^9 \cdot a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{a^{\frac{5}{4}} \cdot a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{9}{2}} \cdot a^{\frac{1}{6}}} = a^{\frac{5-18}{4}} = a^{-\frac{13}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{a^{13}}}$$

3. Mnohočleny

Tato kapitola se dělí na tři dílčí celky. V prvním celku se dozvíme, co to jsou výrazy a kde se s nimi lze setkat. Ve druhém celku se podíváme na speciální případ výrazu, a to mnohočlen. Naučíme se mnohočleny sčítat, odčítat, násobit i dělit. Třetí celek je věnován rozkladu mnohočlenu na součin.

Nejdříve je vždy uveden učební text, ve kterém jsou pro lepší pochopení začleněny i vzorově vyřešené příklady. Na učební text pak navazují interaktivní cvičení – v nich si můžeš rozmanitou formou učivo procvičit.

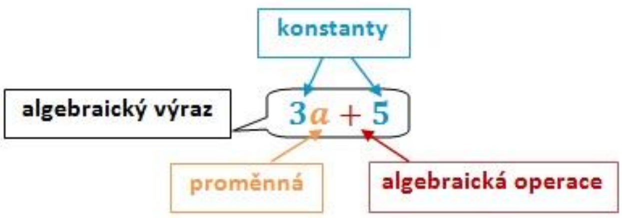
Členění této kapitoly:

3.1 Výrazy

S **výrazy** se v matematice běžně setkáváme, jsou to např. $3a+5$, $x^{-2}-12$, $(x-y)^2$, $\sqrt{72(x^3+y)}$. Vyskytují se v nich konkrétní čísla (např. 3, 5, -12, 72), která označujeme jako **konstanty**, ale také reprezentanti čísel, tzv. proměnné (např. a, x, y). **Proměnné**, které zapisujeme libovolnými písmeny, zastupují čísla z určitého číselného oboru. Tento obor nazýváme **obor proměnné**. Např. ve výrazu $u-2$ zastupuje proměnná u, jejíž obor proměnné jsou přirozená čísla, čísla 1, 2, 3, 4, atd. Tento výraz tak po dosazení konkrétních hodnot za proměnnou (z oboru proměnné) lze napsat následovně: $1-2$, $2-2$, $3-2$, $4-2$, atd. Konstanty a proměnné jsou ve výrazech svázány prostřednictvím matematických operací.

Definice

Algebraický výraz je každý matematický zápis, který je tvořen z konstant a proměnných, mezi nimiž jsou pomocí algebraických operací (např. sčítání, násobení) a závorek vytvořeny smysluplné vztahy.



Výrazem není zápis $7^2-(2-$ či $5a^3+$, protože nesplňuje požadavek smysluplnosti z definice.

Poznámka

Opačným výrazem k výrazu $\dfrac{(a-1)^3+4}{5}$ je výraz $-\dfrac{(a-1)^3+4}{5}$.

Poznámka

V této kapitole pracujeme s algebraickými výrazy, tj. s výrazy, v nichž za každou proměnnou dosazujeme z číselného oboru. Existují ale i nealgebraické výrazy, jako je výraz $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$.
S nealgebraickými výrazy se setkáváme např. ve výrokové logice. Většinou lze z kontextu poznat, kdy výraz je či není algebraický. Proto můžeme slovo *algebraický* vynechat.

Příklad 3.1

Ve výrazu $2\pi r$ rozliš konstanty a proměnné. Následně urči obor proměnné.

Řešení

Pomocí výrazu $2\pi r$ lze vypočítat obvod kruhu.
Konstantami jsou čísla 2 a π (jejich hodnota je stále stejná, konstantní).
Proměnnou je v tomto případě písmeno r, vyjadřující poloměr daného kruhu (poloměr se pro různé kruhy může měnit, proměňovat, a s ním i obvod kruhu).

A jaký je obor proměnné r pro výraz $2\pi r$? Díváme-li se na tento výraz jako na vztah pro výpočet obvodu kruhu, tak obor proměnné je tvořen všemi kladnými reálnými čísly (poloměr kruhu, tedy proměnná r, nemůže nabývat záporných hodnot ani nuly). Jestliže však výraz $2\pi r$ chápeme obecněji, jako výraz se dvěma konstantami a jednou proměnnou, pak do oboru proměnné zahrnujeme všechna reálná čísla.

Poznámka

Pozorný čtenář jistě zpozoroval, že řecké písmeno π [pí] jsme označili jako konstantu. Jak už víme z tématu o číselných oborech, symbol π reprezentuje iracionální Ludolfovo číslo (jeho přibližná hodnota je 3,14).

Při řešení příkladů, ve kterých se objevují výrazy, je třeba dbát na to, abychom neprováděli nepřípustné operace (např. dělení nulou, umocňování nuly na nultou, odmocňování záporného čísla v oboru reálných čísel, atd.).

Definice

Hodnotou výrazu pro dané hodnoty proměnných rozumíme výsledek získaný po dosazení těchto hodnot za všechny proměnné a provedení veškerých přípustných operací.

Příklad 3.2

Urči hodnotu výrazu pro dané hodnoty proměnných:

a) $\dfrac{a+5}{4-a}$, pro $a = 3$

b) $x^2 \cdot \sqrt{y-2}$, pro $x = -2$, $y = 6$

c) $\dfrac{|k-5|}{(l+1)^2 \cdot \sqrt{k}}$, pro $k = 4$, $l = 2$

d) $\dfrac{\sqrt{6-p}}{|-2+q|}$, pro $p = 5$, $q = 2$

Řešení

a) Po dosazení $a = 3$ do výrazu dostaneme:
$$\frac{3+5}{4-3} = \frac{8}{1} = 8$$

b) Po dosazení $x = -2$, $y = 6$ do výrazu dostaneme:
$$(-2)^2 \cdot \sqrt{6-2} = 4 \cdot \sqrt{4} = 4 \cdot 2 = 8$$

c) Po dosazení $k = 4$, $l = 2$ do výrazu dostaneme:
$$\frac{|4-5|}{(2+1)^2 \cdot \sqrt{4}} = \frac{|-1|}{3^2 \cdot 2} = \frac{1}{9 \cdot 2} = \frac{1}{18}$$

d) Pro zadané hodnoty proměnných nelze určit hodnotu výrazu. Po dosazení za proměnnou q ve jmenovateli by nastala nepřípustná operace, a to dělení nulou.

Kromě oboru proměnné zavádíme i definiční obor proměnné. Nejprve si však musíme říct, za jakých podmínek má výraz smysl.

Výraz má smysl pro ty hodnoty proměnných, pro které lze vypočítat jeho hodnotu.

Definice

Do **definičního oboru proměnné** patří jen taková čísla z oboru proměnné, pro které má výraz smysl.

Příklad 3.3

Urči definiční obor proměnné r ve výrazu $2\pi r$.

Řešení

Pokud výraz $2\pi r$ chápeme jako vztah pro výpočet obvodu kruhu, pak je definiční obor proměnné r tvořen všemi kladnými reálnými čísly.
Jestliže však výraz $2\pi r$ chápeme obecněji, jako výraz se dvěma konstantami a jednou proměnnou, pak do definičního oboru patří všechna reálná čísla.
Do definičního oboru proměnné v tomto příkladu tedy patří všechny hodnoty z oboru proměnné, což ovšem neplatí vždy.

Poznámka

Není-li v zadání úlohy obor proměnné uveden, bereme obvykle v úvahu obor reálných čísel. Pak mluvíme o tzv. **reálné proměnné**. Z tohoto oboru vynecháme ty hodnoty, pro které výraz nemá smysl, a tím dostaneme definiční obor proměnné.

Poznámka

Do **definičního oboru výrazu s více proměnnými** patří jen taková čísla, pro která má daný výraz smysl.

Příklad 3.4

Urči podmínky, za kterých má daný výraz smysl:

a) $V_1 = \dfrac{1+x}{2-x}$ b) $V_2 = \dfrac{x \cdot \sqrt{x-5}}{y^2-9}$ c) $V_3 = \dfrac{\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{y+3} \cdot (|z-6|-2)}$

Řešení

a) Výraz V_1 obsahuje proměnnou x.

- Výraz má smysl, pokud je jmenovatel nenulový (v opačném případě by nastala nepřípustná operace dělení nulou).
  Výraz tedy má smysl pro všechna $x \in \mathbf{R}$, pro která je $2 - x \neq 0$, tj. $x \neq 2$.
- Podmínky: $x \in \mathbf{R} - \{2\}$

b) Výraz V_2 obsahuje proměnné x a y.

- Pro proměnnou x musí platit, že $x - 5 \geq 0$, tj. $x \geq 5$.
  Zaručíme tím, že odmocňujeme nezáporné číslo.
- Zároveň pro proměnnou y musí platit, že $y^2 - 9 \neq 0$, tedy $y^2 \neq 9$, tj. $y \neq \pm 3$.
  Tím vyloučíme případ dělení nulou.
- Podmínky: $x \in \mathbf{R} \wedge x \geq 5$, $y \in \mathbf{R} - \{\pm 3\}$

c) Výraz V_3 obsahuje proměnné x, y a z.

- Pro proměnnou x musí platit, že $x^2 + 2 \geq 0$, tj. $x^2 \geq -2$.
  V opačném případě bychom odmocňovali záporné číslo, což je v oboru reálných čísel nepřípustná operace.
  Uvedenou podmínku splňují všechna $x \in \mathbf{R}$, protože druhá mocnina libovolného čísla je vždy větší nebo rovna nule.
- Zároveň musí pro proměnnou y platit, že $y + 3 > 0$, tj. $y > -3$.
  Musíme totiž zaručit, že výraz pod odmocninou je nezáporné číslo a zároveň že je jmenovatel nenulový (přitom platí, že součin je roven nule právě tehdy, když alespoň jeden z činitelů je roven nule). Výraz pod odmocninou tedy musí být kladné číslo.
- Také druhý činitel ve jmenovateli musí být různý od nuly, aby měl výraz smysl.
  Pro proměnnou z tedy musí platit, že $|z - 6| - 2 \neq 0$, tj. $|z - 6| \neq 2$, tedy $z \neq 4 \wedge z \neq 8$.
- Podmínky: $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R} \wedge y > -3$, $z \in \mathbf{R} - \{4, 8\}$

S výrazy se v matematickém textu setkáváme často. Výraz totiž nahrazuje zdlouhavý slovní popis. Srovnej: Podíl pětinásobku součtu dvou reálných čísel a druhé odmocniny z jejich rozdílu jednoduše zapíšeme jako $\frac{5(x + y)}{\sqrt{x - y}}$.

Příklad 3.5

Zapiš jako výraz se zvolenými proměnnými (např. x, y, z):
a) součet šestinásobku třetí mocniny prvního čísla a třetiny absolutní hodnoty druhého čísla
b) rozdíl druhé odmocniny z dvojnásobku prvního čísla a druhé mocniny čtyřnásobku druhého čísla
c) součin dvojnásobku prvního čísla a čtvrtiny druhé odmocniny z druhého čísla
d) podíl čtvrté mocniny prvního čísla a absolutní hodnoty dvojnásobku druhého čísla
e) rozdíl $25\,\%$ ze základu z a trojnásobku $18\,\%$ z tohoto základu

Řešení

a) $6x^3 + \frac{1}{3}|y|$ b) $\sqrt{2x} - (4y)^2$ c) $2x \cdot \frac{1}{4}\sqrt{y}$ d) $\frac{x^4}{|2y|}$ d) $0,25z - 3 \cdot 0,18z$

S výrazy se setkáváme také v souvislosti se vzorci, a to nejen v matematice, ale i v dalších vědách - fyzice, chemii, zeměpisu (např. vzorec pro objem kvádru, výpočet rychlosti podle dráhy a času, vzdálenost dvou míst na Zemi podle jejich souřadnic). Výrazy nám pomáhají i při zápisu řešení slovních úloh.

Příklad 3.6

Slovní úloha
Třída 2.B, do které chodí 24 žáků, měla naplánovanou školní exkurzi. Uvažujme, že pokladník na dopravu dohromady vybral k Kč (což je cena za 24 zpátečních obyčejných jízdenek) a předal je učiteli. V den exkurze se 3 žáci nedostavili. Učitel využil množstevní slevu a koupil pro přítomné žáky hromadnou zpáteční jízdenku. Tím ušetřil čtvrtinu z celkové vybrané částky, přičemž každý zúčastněný žák ušetřil 9 Kč oproti původnímu plánu. Jakou částku vybral celkově pokladník? Jakou částku vybíral od každého spolužáka?

Řešení

Počet žáků ve třídě ... 24
Celková cena za dopravu ... k Kč
Původní cena za dopravu na žáka ... $\frac{k}{24}$ Kč
Celková cena za dopravu po slevě ... $0,75k$ Kč
Skutečná cena za dopravu na žáka ... $\frac{0,75k}{21}$ Kč
Rozdíl původní a skutečné ceny za dopravu na žáka ... 9 Kč, tedy

$$9 = \frac{k}{24} - \frac{0,75k}{21}$$

$$9 = \frac{21k - 24 \cdot \frac{3}{4}k}{504} = \frac{21k - 18k}{504} = \frac{3k}{504} = \frac{k}{168}$$

$$k = 168 \cdot 9 = 1\,512$$

Původní cena na žáka ... $\frac{k}{24} = \frac{1\,512}{24} = 63$ Kč.

Pokladník celkově vybral $1\,512$ Kč. Od každého spolužáka vybíral 63 Kč.

Cvičení k této části.

Cvičení - Výrazy

Cvičení 3.1

Urči podmínky, za kterých má daný výraz smysl:

a) $3x + \frac{5y}{4\sqrt{y}}$

b) $\frac{(x-2)(x+3)}{(y-5)(y+4)}$

c) $\frac{x\sqrt{x-3}}{y\sqrt{y+2}}$

d) $\frac{\sqrt{x+5}}{(y^2-4)\sqrt{y^2+5}}$

e) $\dfrac{\sqrt{|x-3|}}{|x-4|-3}$

Cvičení 3.2

Urči, zda zadané hodnoty proměnných patří do definičního oboru výrazu:

a) $\dfrac{\sqrt{a-3}}{a(a^2-2)}$	$a=3$	◉ ano	○ ne	Správně!
b) $\dfrac{x+y}{y^2\sqrt{2-x}}$	$x=4,\ y=2$	○ ano	◉ ne	Správně!
c) $\dfrac{2k}{\sqrt{4k}}+3l$	$k=1,\ l=0$	◉ ano	○ ne	Správně!
d) $\dfrac{\sqrt{r-5}}{\sqrt{s+2}}$	$r=5,\ s=-2$	○ ano	◉ ne	Správně!
e) $\dfrac{u^2}{u(u+4)}$	$u=-4$	○ ano	◉ ne	Správně!
f) $\sqrt{\dfrac{z}{\sqrt{7+z}}}$	$z=-6$	○ ano	◉ ne	Správně!

Cvičení 3.3

Urči hodnotu výrazu dle zadaných podmínek:

a) $\dfrac{a^3+a-2}{\sqrt{a+11}}+\dfrac{|a-2|}{-a^2}$ pro $a=-2$

b) $\dfrac{\sqrt{20-k}}{|-5-k|}$ pro $k=-5$

c) $\dfrac{\sqrt{6+s-s^2}}{s-|-s^3-s^2|}$ pro $s=3$

Cvičení 3.4

Zapiš jako výraz se zvolenými proměnnými (např. x, y):

a) součet trojnásobku absolutní hodnoty prvního čísla a dvojnásobku druhé odmocniny z druhého čísla

$3|x|+2\sqrt{y}$

b) rozdíl pětiny čtvrté mocniny prvního čísla a třetí mocniny dvojnásobku druhého čísla

$\frac{1}{5}x^4-(2y)^3$

c) součin šestiny absolutní hodnoty prvního čísla a druhé odmocniny z druhého čísla

$\frac{1}{6}|x|\sqrt{y}$

d) podíl druhé mocniny čtyřnásobku prvního čísla a trojnásobku absolutní hodnoty druhého čísla

$\frac{(4x)^2}{3|y|}$

Cvičení 3.5

Slovní úloha

Předpokládejme, že jde turista rychlostí v km/h. Zapiš pomocí výrazu rychlost jiného turisty, který jde

a) o 2 km/h rychleji,

$v + 2$ km/h

b) o pětinu větší rychlostí,

$$v + \frac{1}{5} \cdot v \text{ km/h} = \frac{5+1}{5} \cdot v \text{ km/h} = \frac{6}{5} \cdot v \text{ km/h} = 1,2v \text{ km/h}$$

c) o 15 % větší rychlostí,

$$v + \frac{15}{100} \cdot v \text{ km/h} = \frac{100+15}{100} \cdot v \text{ km/h} = \frac{115}{100} \cdot v \text{ km/h} = 1,15v \text{ km/h}$$

d) dvakrát rychleji.

$2v$ km/h

Cvičení 3.6

Slovní úloha

Uvažujme situaci, že Petra, která učí v mateřské školce, koupila 3 sáčky bonbónů, které chce rozdělit mezi k dětí ve své třídě jako odměnu. V každém sáčku bylo m bobónů. Následující den Petra v práci zjistila, že l dětí z její třídy chybí a navíc že 5 % z celkového počtu bonbónů ráno snědl manžel. Pomocí výrazu zapiš počet bonbónů připadajících na jedno dítě podle Petřina původního plánu a podle skutečného stavu v práci.

Cvičení 3.7

Slovní úloha

Součet dvou přirozených čísel je 64. Trojnásobek prvního čísla je roven druhému číslu. Urči tato čísla.

Cvičení 3.8

Slovní úloha

Sýrová pizza stojí x Kč. Zeleninová pizza je o 25 % levnější, zatímco šunková pizza je o pětinu dražší než sýrová. V prodejně si lze koupit nejen celou pizzu, ale také polovinu, čtvrtinu nebo osminu, přičemž cena se proporčně snižuje. Jana s Pavlem si spolu objednali polovinu sýrové, čtvrtinu zeleninové a pět osmin šunkové pizzy a zaplatili 138 Kč. Kolik stojí sýrová pizza?

Cvičení 3.9

Urči součet čtyř po sobě jdou přirozených čísel takových, že:

a) největší je rovno $3a$

b) nejmenší je rovno $4z-3$

Cvičení 3.10

Zapiš jako výraz se zvolenými proměnnými (např. x, y):

a) druhá mocnina podílu pětinásobku druhé mocniny prvního čísla a druhé odmocniny z druhého čísla

$$\left(\frac{5x^2}{\sqrt{y}}\right)^2$$

b) druhá odmocnina z podílu třetí mocniny prvního čísla a druhé odmocniny ze čtyřnásobku druhého čísla

$$\sqrt{\frac{x^3}{\sqrt{4y}}}$$

c) druhá mocnina podílu druhé odmocniny ze součtu dvou čísel a součtu druhých odmocnin z těchto dvou čísel

$$\left(\frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)^2$$

d) podíl trojnásobku druhé odmocniny ze součtu prvního a druhého čísla a absolutní hodnoty čtyřnásobku prvního čísla

$$\frac{3\sqrt{x+y}}{|4x|}$$

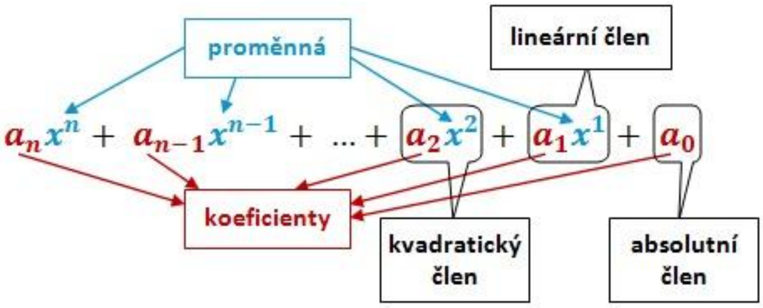
3.2 Mnohočleny, početní operace

Definice

Nechť je n přirozené číslo nebo nula, $a_0, a_1, \cdots, a_n$ jsou reálná čísla a x je reálná proměnná. Pak **mnohočlen (polynom) n-tého stupně s jednou proměnnou** x je výraz, který můžeme zapsat jako $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$, kde $a_n \neq 0$.

Příkladem mnohočlenu, tedy speciálního výrazu, je např. $3x^4 - 5x^2 + \frac{1}{2}$, což lze detailně rozepsat jako $3x^4 + 0x^3 + (-5)x^2 + 0x^1 + \frac{1}{2}x^0$. Polynomem ovšem není výraz $6x^3 + 2x + \dfrac{4}{x^2} = 6x^3 + 2x + 4x^{-2}$ (exponent proměnné může být jen nezáporné celé číslo).

Čísla $a_0, a_1, \cdots, a_n$ se nazývají **koeficienty mnohočlenu**, sčítanci a_kx^k se nazývají **členy mnohočlenu**. Pro některé členy mnohočlenu máme speciální pojmenování. Člen a_0 se nazývá **absolutní člen** mnohočlenu. Člen a_1x^1 se nazývá **lineární člen** a člen a_2x^2 se nazývá **kvadratický člen** mnohočlenu.



Stupeň mnohočlenu odpovídá nejvyššímu exponentu proměnné v mnohočlenu.

- **Mnohočlen 1. stupně** (tj. výraz $a_1x^1 + a_0$, také lze zapsat jako $ax + b$) se nazývá **lineární**.
- **Mnohočlen 2. stupně** (tj. výraz $a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$, také lze zapsat jako $ax^2 + bx + c$) se nazývá **kvadratický**.
- Mnohočlen nultého stupně je každé reálné číslo různé od nuly.
- Číslo nula nazýváme nulový mnohočlen, jeho stupeň nedefinujeme.

Mnohočlen s jedním členem označujeme jako **jednočlen**, se dvěma členy jako **dvojčlen**, se třemi členy jako **trojčlen**, atd.

Například výraz $4x^2 - 2x + 5$ je kvadratický mnohočlen, tj. mnohočlen 2. stupně, s proměnnou x.
Jedná se o trojčlen (má tři sčítance). Koeficient u kvadratického členu je 4, koeficient u lineárního členu je -2.
Absolutní člen je roven 5.

Mnohočleny mohou mít obecně i více proměnných. Jako příklad mnohočlenu se dvěma proměnnými lze uvést výrazy $3x^5 + 2y^4 - 6x^3y^2 + 7$, $12x^2 - 8y$. Příkladem mnohočlenu se třemi proměnnými jsou výrazy $x + y^4 - z^{12} - 4$, $2xy^6z - 4yz^3 + x^2y$.

Sčítání, odčítání a násobení mnohočlenů

Z předcházející kapitoly víme, že sčítat a odčítat můžeme jen ty mocniny, které mají stejný základ a stejného mocnitele. U mnohočlenů bude platit obdobné pravidlo.

Součet dvou mnohočlenů vypočítáme tak, že sečteme všechny členy obou mnohočlenů.
U odpovídajících si členů daných mnohočlenů sečteme jednotlivé koeficienty (přičemž některé koeficienty můžou být rovny nule) a opíšeme proměnné.

Poznámka

Odpovídající si členy mnohočlenů jsou takové členy, které mají tytéž proměnné i se stejnými mocniteli.

Příklad 3.7

Vypočítej:

a) $(2x^2 - 3x) + (-5x^2 + 7x)$ b) $(3x^3 + 2y - 3xy + 5) + (2x^4 + x^3 - 5xy - 2)$

Řešení

a) $(2x^2 - 3x) + (-5x^2 + 7x) = 2x^2 + (-5x^2) + (-3x) + 7x = -3x^2 + 4x$

b) $(3x^3 + 2y - 3xy + 5) + (2x^4 + x^3 - 5xy - 2) =$

$= 3x^3 + 1x^3 + 2y + 0y - 3xy - 5xy + 5 - 2 + 0x^4 + 2x^4 =$

$= 4x^3 + 2y - 8xy + 3 + 2x^4 = 2x^4 + 4x^3 + 2y - 8xy + 3$

Rozdíl dvou mnohočlenů vypočítáme tak, že určíme součet prvního mnohočlenu a opačného mnohočlenu k druhému mnohočlenu.

Opačný mnohočlen k danému mnohočlenu je mnohočlen, který má tytéž členy, ale s opačnými znaménky (např. opačným mnohočlenem k mnohočlenu $4a^5 - 2a + 3$ je mnohočlen $-4a^5 + 2a - 3$).

Příklad 3.8

Vypočítej:

a) $(4a^3 + 5a) - (6a^3 - 2a)$ b) $(4a^2 - 2b^3 - 3a^3b + 5) - (2a^2 + 3a - 6a^3b - 2)$

Řešení

a) $(4a^3 + 5a) - (6a^3 - 2a) = (4a^3 + 5a) + (-6a^3 + 2a) = 4a^3 + (-6a^3) + 5a + 2a =$
$= -2a^3 + 7a$

b) $(4a^2 - 2b^3 - 3a^3b + 5) - (2a^2 + 3a - 6a^3b - 2) = (4a^2 - 2b^3 - 3a^3b + 5) +$
$+ (-2a^2 - 3a + 6a^3b + 2) = 4a^2 - 2a^2 - 2b^3 + 0b^3 - 3a^3b + 6a^3b + 5 + 2 + 0a - 3a =$
$= 2a^2 - 2b^3 + 3a^3b + 7 - 3a = 2a^2 - 3a - 2b^3 + 3a^3b + 7$

Součin dvou mnohočlenů vypočítáme tak, že každý člen prvního mnohočlenu vynásobíme každým členem druhého mnohočlenu a všechny tyto součiny sečteme.

$$(x + y) \cdot (a + b) = xa + xb + ya + yb$$

Příklad 3.9

Vypočítej:

a) $(3x^2 - 5) \cdot (2x^2 + x)$ b) $(2x^2 - xy + 7) \cdot (x - 2y^3 + 2)$

Řešení

a) $(3x^2 - 5) \cdot (2x^2 + x) = 3x^2 \cdot 2x^2 + 3x^2 \cdot x + (-5) \cdot 2x^2 + (-5) \cdot x = 6x^4 + 3x^3 - 10x^2 - 5x$

b) $(2x^2 - xy + 7) \cdot (x - 2y^3 + 2) = 2x^2 \cdot x + 2x^2 \cdot (-2y^3) + 2x^2 \cdot 2 + (-xy) \cdot x + (-xy) \cdot (-2y^3) +$
$+ (-xy) \cdot 2 + 7 \cdot x + 7 \cdot (-2y^3) + 7 \cdot 2 = 2x^3 - 4x^2y^3 + 4x^2 - x^2y + 2xy^4 - 2xy + 7x - 14y^3 + 14 =$
$= 2x^3 + 4x^2 + 7x - 14y^3 - 4x^2y^3 - x^2y + 2xy^4 - 2xy + 14$

Počítáme-li součet, rozdíl nebo součin tří a více mnohočlenů, postupujeme obdobně.

Pokud umíme mnohočleny násobit, můžeme vypočítat i jejich n-tou mocninu pro všechna $n \in \mathbf{N}$. Druhou a třetí mocninu dvojčlenu můžeme také určit podle následujících vzorců.

Pro všechna $a, b \in \mathbf{R}$ platí:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Poznámka

Je výhodné si tyto vzorce zapamatovat, neboť jejich použití usnadní mnohé výpočty, což dokládá následující příklad.

Příklad 3.10

Vypočítej:
$(x^2-4)^2$

Řešení

Využijeme vzorec $(a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2$. V tomto případě je $a = x^2$, $b = 4$.
$(x^2-4)^2 = \left(x^2\right)^2 - 2\cdot x^2\cdot 4 + 4^2 = x^4 - 8x^2 + 16$

Jiný způsob řešení
Použijeme definici mocniny reálného čísla.
$(x^2-4)^2 = (x^2-4)(x^2-4) = x^2\cdot x^2 + x^2\cdot(-4) - 4\cdot x^2 - 4\cdot(-4) = x^4 - 4x^2 - 4x^2 + 16 = x^4 - 8x^2 + 16$

Součtem, rozdílem a součinem libovolných mnohočlenů je vždy mnohočlen.

Dělení mnohočlenů

Podíl mnohočlenu a jednočlenu vypočítáme tak, že jednočlenem vydělíme každý člen mnohočlenu a jednotlivé podíly pak sečteme.

Příklad 3.11

Vypočítej za předpokladu, že $t \in \mathbf{R} - \{0\}$:
$(3t^3 - 6t^2u + 9tu) \div 3t$

Řešení

$(3t^3 - 6t^2u + 9tu) \div 3t = (3t^3 \div 3t) + (-6t^2u \div 3t) + (9tu \div 3t) = t^2 - 2tu + 3u$

Podílem mnohočlenů nemusí být vždy mnohočlen.

Jestliže podílem mnohočlenů je mnohočlen, mluvíme o **dělení mnohočlenů beze zbytku** (viz předchozí příklad). Jestliže podílem mnohočlenů není mnohočlen, mluvíme o **dělení mnohočlenů se zbytkem** (viz následující příklad). Vzniklý výraz si můžeme rozdělit na dvě části. První část tvoří výraz, který je mnohočlenem, tzv. neúplný podíl. Druhou částí je výraz, který není mnohočlenem, označujeme jej jako zbytek.

Poznámka

Terminologie je obdobná jako u dělení čísel. Příkladem dělení čísel beze zbytku je např. výraz $\frac{8}{2} = 4$. Jako příklad dělení čísel se zbytkem lze uvést výraz $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$.

Příklad 3.12

Vypočítej za předpokladu, že $k \in \mathbf{R} - \{0\}$:
$(6k^4 + k^2 - 8) \div 2k$

Řešení

$$(6k^4 + k^2 - 8) \div 2k = (6k^4 \div 2k) + (k^2 \div 2k) + (-8 \div 2k) = 3k^3 + \frac{1}{2}k - \frac{4}{k}$$

Mnohočlen $3k^3 + \frac{1}{2}k$ je neúplný podíl. Člen $-\frac{4}{k}$ je zbytek (mocnina u proměnné v mnohočlenu může nabývat pouze libovolných kladných hodnot nebo nuly. V tomto členu je rovna -1, jelikož $-\frac{4}{k} = -4k^{-1}$, proto tento výraz není mnohočlenem).

A jak vypočítáme **podíl mnohočlenů**? Omezíme se jen na případy mnohočlenů s jednou proměnnou, kdy bude zároveň platit, že stupeň mnohočlenu, který dělíme, je vyšší nebo roven stupni mnohočlenu, který je dělitelem. Postup je pak následující:

1. Nejdříve si členy obou mnohočlenů uspořádáme sestupně (tj. na prvním místě bude člen s proměnnou s nejvyšším exponentem).

2. První člen dělence vydělíme prvním členem dělitele, výsledek je prvním členem podílu mnohočlenů.

3. Pak tímto dílčím výsledkem vynásobíme všechny členy dělitele a tento výraz odečteme od dělence.

4. Tím dostaneme nový mnohočlen. Pokud je tento nový mnohočlen vyššího nebo stejného stupně jako dělitel, zopakujeme celý postup.

5. Takto pokračujeme, dokud nedostaneme mnohočlen nižšího stupně než je dělitel nebo nulu.

> **Poznámka**
>
> Ve výrazu $6 \div 3 = 2$ je dělencem číslo 6, dělitelem číslo 3 a číslo 2 je jejich podíl.

Příklad 3.13

Vypočítej a stanov podmínky:

a) $(-2x^3 + 4x^4 + 6) \div (-1 + x^2)$ b) $(x^3 + 5x - 3 - 3x^2) \div (x - 1)$

Řešení

a) Při řešení postupujeme dle návodu:

1. $(4x^4 - 2x^3 + 6) \div (x^2 - 1)$

2. $4x^4 \div x^2 = 4x^2$

3. $4x^2 \cdot (x^2 - 1) = 4x^4 - 4x^2$

$(4x^4 - 2x^3 + 6) - (4x^4 - 4x^2) = -2x^3 + 4x^2 + 6$

Tyto kroky se většinou zapisují následovně (tučně je vyznačen dělenec, dělitel a podíl každého kroku):

$$\begin{array}{l}
(\mathbf{4x^4} - 2x^3 + 6) \div (\mathbf{x^2} - 1) = \mathbf{4x^2} \\
\underline{-(4x^4 - 4x^2)} \\
\qquad -2x^3 + 4x^2 + 6
\end{array}$$

4.
$$\begin{array}{l}
(4x^4 - 2x^3 + 6) \div (\mathbf{x^2} - 1) = 4x^2 - \mathbf{2x} \\
\underline{-(4x^4 - 4x^2)} \\
\qquad -\mathbf{2x^3} + 4x^2 + 6 \\
\qquad \underline{-(-2x^3 + 2x)} \\
\qquad\qquad 4x^2 - 2x + 6
\end{array}$$

5.
$$\begin{array}{l}
(4x^4 - 2x^3 + 6) \div (\mathbf{x^2} - 1) = 4x^2 - 2x + \mathbf{4} \\
\underline{-(4x^4 - 4x^2)} \\
\qquad -2x^3 + 4x^2 + 6 \\
\qquad \underline{-(-2x^3 + 2x)} \\
\qquad\qquad \mathbf{4x^2} - 2x + 6 \\
\qquad\qquad \underline{-(4x^2 - 4)} \\
\qquad\qquad\qquad -2x + 10
\end{array}$$

V tomto případě je mnohočlen $4x^2 - 2x + 4$ neúplný podíl, výraz $-2x + 10$ je zbytek (ve schématu dělení dále nepokračujeme, protože mnohočlen $-2x + 10$ je nižšího stupně než mnohočlen $x^2 - 1$).
Pro všechna $x \in \mathbf{R}$, pro která je $x^2 - 1 \neq 0$, tj. $x \neq \pm 1$, platí:

$$(4x^4 - 2x^3 + 6) \div (x^2 - 1) = 4x^2 - 2x + 4 + \frac{-2x + 10}{x^2 - 1}$$

O správnosti výsledku se můžeme přesvědčit zkouškou:

$$\left(4x^2 - 2x + 4 + \frac{-2x + 10}{x^2 - 1}\right) \cdot (x^2 - 1) = 4x^4 - 4x^2 - 2x^3 + 2x + 4x^2 - 4 - 2x + 10 = 4x^4 - 2x^3 + 6$$

b) V tomto případě použijeme pouze zkrácený, schematický zápis:

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 3x^2 + 5x - 3) \div (x - 1) = x^2 - 2x + 3 \\
\underline{-(x^3 - x^2)} \\
\quad - 2x^2 + 5x - 3 \\
\quad \underline{-(-2x^2 + 2x)} \\
\qquad\qquad 3x - 3 \\
\qquad\qquad \underline{-(3x - 3)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

V tomto případě se jedná o dělení beze zbytku.
Pro všechna $x \in \mathbf{R}$, pro která je $x - 1 \neq 0$, tj. $x \neq 1$, platí:

$$(x^3 - 3x^2 + 5x - 3) \div (x - 1) = x^2 - 2x + 3$$

O správnosti výsledku se můžeme přesvědčit zkouškou: $(x^2 - 2x + 3) \cdot (x - 1) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$

Cvičení k této části.

Cvičení - Mnohočleny, početní operace

Cvičení 3.11

Rozhodni, zda jsou následující tvrzení o mnohočlenu $27x^2 - 6x + 14$ pravdivá:

a) Jedná se o mnohočlen třetího stupně.	○ ano	◉ ne	Správně!
b) Jedná se o trojčlen.	◉ ano	○ ne	Správně!
c) Absolutní člen je roven 27.	○ ano	◉ ne	Správně!
d) Koeficient u kvadratického členu je roven 27.	◉ ano	○ ne	Správně!
e) Koeficient u lineárního členu je roven -6.	◉ ano	○ ne	Správně!

Cvičení 3.12

Rozhodni, zda jsou následující tvrzení o mnohočlenu $3y^7 - 12y^5 + 5y^2 - 8$ pravdivá:

a) Jedná se o mnohočlen čtvrtého stupně.	ano	● ne	Správně!
b) Jedná se o čtyřčlen.	● ano	ne	Správně!
c) Absolutní člen je roven -8.	● ano	ne	Správně!
d) Koeficient u lineárního členu je roven 0.	● ano	ne	Správně!
e) Koeficient u kvadratického členu je roven -12.	ano	● ne	Správně!

Cvičení 3.13

Vypočítej:

a) $(7a^3 - 2a^2 - 11a + 14) + (3a^4 - 6a^3 + 5a^2 + 8a - 6) =$

b) $(3a^3 - 2a^2b + 6b^2 - 5ab) + (-2a^3 - a^2 + 3b^2 + 10ab) =$

c) $(5a^4 - 3a^2 + 2a - 6) - (7a^3 - 2a^2 + 8a + 3) =$

d) $(12a^3b - 7ab^2 - 3a^2 + b) - (9a^3b + 2a^2b - 5a^2 - 3b) =$

Cvičení 3.14

Vypočítej:

a) $(4t^3 + 2t - 1) \cdot (2t^2 - 4t + 3) =$

b) $(2t^2u - 3tu + u^2 - 2) \cdot (2t + 3u) =$

c) $(3u + 2v)^2 =$

d) $(2u - 3)^3 =$

e) $(u - 3v)^2 =$

f) $(3 + t)^3 =$

Cvičení 3.15

Vypočítej a stanov podmínky, za kterých má dělení mnohočlenů smysl:

a) $(4x^3 - 2x^2y^3 + 16x^2y) \div 2x^2 =$

b) $(6x^2y - 12xy + 3x - 9) \div 3y =$

c) $(2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 6x) \div (2x + 3) =$

d) $(x^3 - 3x^2 - 20x + 30) \div (x - 5) =$

e) $(8x^4 + 4x^2 - 2x + 6) \div (2x^2 - 4) =$

f) $(6x^5 + 17x^3 - 21x^2 + 5x - 7) \div (3x^2 + 1) =$

Cvičení 3.16

Vypočítej:

a) $\left(5a^{n+2} + 3a^n - 7a\right) + \left(2a^{n+2} - 6a^n + 3a\right) =$
$= 5a^{n+2} + 2a^{n+2} + 3a^n - 6a^n - 7a + 3a = 7a^{n+2} - 3a^n - 4a$

b) $\left(12a^{2n-3} + 6a^{2n-2} - 5a^{2n-1} + 3a^{2n}\right) - \left(2a^{2n-3} - 3a^{2n-2} - 7a^{2n-1} + 2a^{2n}\right) =$
$= (12a^{2n-3} + 6a^{2n-2} - 5a^{2n-1} + 3a^{2n}) + (-2a^{2n-3} + 3a^{2n-2} + 7a^{2n-1} - 2a^{2n}) =$
$= 12a^{2n-3} - 2a^{2n-3} + 6a^{2n-2} + 3a^{2n-2} - 5a^{2n-1} + 7a^{2n-1} + 3a^{2n} - 2a^{2n} = 10a^{2n-3} + 9a^{2n-2} + 2a^{2n-1} + a^{2n}$

c) $2a^2 - \left(3b - b^2\right) + \left\{3b^2 - 2a - \left[a^2 - (4 - 5b)\right] + 1\right\} =$
$= 2a^2 - 3b + b^2 + \left\{3b^2 - 2a - \left[a^2 - 4 + 5b\right] + 1\right\} =$
$= 2a^2 - 3b + b^2 + \left(3b^2 - 2a - a^2 + 4 - 5b + 1\right) = 2a^2 - 3b + b^2 + 3b^2 - 2a - a^2 + 4 - 5b + 1 =$
$= 2a^2 - a^2 - 2a + b^2 + 3b^2 - 3b - 5b + 4 + 1 = a^2 - 2a + 4b^2 - 8b + 5 = a^2 - 2a + 1 + 4b^2 - 8b + 4 =$
$= (a - 1)^2 + (2b - 2)^2$

d) $3a^3 - \left\{b^3 - \left[-3ab^2 - \left(2a^3 + 3a^2b\right)\right] - 6ab^2\right\} = 3a^3 - \left\{b^3 - \left[-3ab^2 - 2a^3 - 3a^2b\right] - 6ab^2\right\} =$
$= 3a^3 - \left(b^3 + 3ab^2 + 2a^3 + 3a^2b - 6ab^2\right) = 3a^3 - b^3 - 3ab^2 - 2a^3 - 3a^2b + 6ab^2 =$
$= 3a^3 - 2a^3 - 3a^2b - 3ab^2 + 6ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$

Cvičení 3.17

Vypočítej:

a) $p^2q(p+q+2) - p^3(q-3) - (2p^2q+3p^3) = p^3q + p^2q^2 + 2p^2q - p^3q + 3p^3 - 2p^2q - 3p^3 =$
$= p^3q - p^3q + 3p^3 - 3p^3 + p^2q^2 + 2p^2q - 2pq = p^2q^2$

b) $2p(2p-3q) + 5q(2p+1) - (5q-q^2) = 4p^2 - 6pq + 10pq + 5q - 5q + q^2 =$
$= 4p^2 + 4pq + q^2 = (2p+q)^2$

c) $p^2q(1+2q) - 2p\left\{q^2(p+3q) - \left[2q - q\left(2-3q^2\right)\right]\right\} =$
$= p^2q + 2p^2q^2 - 2p\left\{pq^2 + 3q^3 - \left[2q - 2q + 3q^3\right]\right\} =$
$= p^2q + 2p^2q^2 - 2p\left(pq^2 + 3q^3 - 3q^3\right) = p^2q + 2p^2q^2 - 2p^2q^2 = p^2q$

d) $2p(q-q^2) + 2q\left[p - 2(p+q^2) - q(3q-p)\right] = 2pq - 2pq^2 + 2q\left[p - 2p - 2q^2 - 3q^2 + pq\right] =$
$= 2pq - 2pq^2 + 2q\left[-p - 5q^2 + pq\right] = 2pq - 2pq^2 - 2pq - 10q^3 + 2pq^2 =$
$= -2pq^2 + 2pq^2 + 2pq - 2pq - 10q^3 = -10q^3$

3.3 Rozklad mnohočlenu na součin

Definice

Rozkladem mnohočlenu na součin rozumíme vyjádření daného mnohočlenu jako součinu jednodušších, většinou již dále nerozložitelných, mnohočlenů.

Existuje několik způsobů rozkladu mnohočlenu na součin:

1. Rozklad na součin vhodným vytknutím před závorku

Před závorku vytkneme výraz, který se vyskytuje ve všech členech mnohočlenu.

Příklad 3.14

Rozlož mnohočlen na součin vhodným vytknutím před závorku:

a) $3x - 6y + 6z^2$ b) $xy - yz$ c) $x(2-y) + 3(2-y) - z(2-y)$
d) $x^3 - x^2y + 2x - 2y$ e) $2x(y-3) + (y-3)$

Řešení

a) $3x - 6y + 6z^2 = 3(x - 2y + 2z^2)$
b) $xy - yz = y(x-z)$
c) $x(2-y) + 3(2-y) - z(2-y) = (2-y)(x+3-z)$
d) $x^3 - x^2y + 2x - 2y = x^2(x-y) + 2(x-y) = (x-y)(x^2+2)$
e) $2x(y-3) + (y-3) = 2x(y-3) + 1(y-3) = (y-3)(2x+1)$

2. Rozklad na součin pomocí vzorce

Většinou používáme následující vzorce (s některými už jsme se setkali u součinu mnohočlenů):

Pro všechna $a, b \in \mathbf{R}$ platí:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Poznámka

Abychom dodrželi přesné znění definice rozkladu mnohočlenu, tedy že mnohočlen vyjádříme jako *součin* jednodušších mnohočlenů, měli bychom správně psát např. $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)(a+b)$. Pro větší přehlednost ale budeme i v dalším textu používat zkrácený zápis, tedy $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$.

Příklad 3.15

Rozlož mnohočlen na součin s využitím vzorců:

a) $x^2 - 4x + 4$ b) $y^3 + 27$ c) $25x^2 - 9y^4$ d) $8x^3 - 125$

Řešení

a) $x^2 - 4x + 4 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = (x-2)^2$

b) $y^3 + 27 = y^3 + 3^3 = (y+3)\left(y^2 - y \cdot 3 + 3^2\right) = (y+3)(y^2 - 3y + 9)$

c) $25x^2 - 9y^4 = \left(5x\right)^2 - \left(3y^2\right)^2 = \left(5x + 3y^2\right)\left(5x - 3y^2\right)$

d) $8x^3 - 125 = (2x)^3 - 5^3 = (2x-5)\left[(2x)^2 + 2x \cdot 5 + 5^2\right] = (2x-5)(4x^2 + 10x + 25)$

3. Rozklad kvadratického trojčlenu na součin

V tomto případě chceme rozložit kvadratický trojčlen $x^2 + px + q$, kde $x \in \mathbf{R}$, p, $q \in \mathbf{Z}$, na součin dvou lineárních dvojčlenů $(x-r)(x-s)$, kde r, $s \in \mathbf{Z}$. Ne vždy taková čísla r, s existují. Pokud však existují, tak pro ně platí: $x^2 + px + q = (x-r)(x-s) = x^2 - rx - sx + rs = x^2 - (r+s)x + rs$

Porovnáním koeficientů příslušných lineárních a absolutních členů zjistíme, že $q = rs \wedge p = -(r+s)$. Z těchto dvou podmínek určíme čísla r, s, jestliže existují.

Příklad 3.16

Rozlož kvadratický trojčlen na součin dvou lineárních dvojčlenů s celočíselnými koeficienty:

a) $x^2 - 7x + 12$ b) $x^2 + 2x - 6$ c) $x^2 - 2x - 15$ d) $x^2 + 9x + 8$

Řešení

a) V kvadratickém trojčlenu je $p = -7$, $q = 12$.

- Pokud existují $r, s \in \mathbf{Z}$ taková, že $x^2 + px + q = (x-r)(x-s)$, tak pro ně musí platit, že $12 = rs \wedge -7 = -(r+s)$.
- Aby byla splněna první podmínka, přichází v úvahu tyto možnosti: $12 = 12 \cdot 1 = (-12) \cdot (-1) = 6 \cdot 2 = (-6) \cdot (-2) = 4 \cdot 3 = (-4) \cdot (-3)$
- Obě podmínky musí být splněny současně. Vybíráme proto z předchozích možností tu, která vyhovuje i druhé podmínce, což je $-7 = -(4+3)$, tj. $r = 4$, $s = 3$.
- Výsledek je tedy: $x^2 - 7x + 12 = (x-4)(x-3)$
- Lze psát také $x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$, neboť násobení je komutativní. Čísla p, q jsou ovšem určena jednoznačně!

b) V kvadratickém trojčlenu je $p = 2$, $q = -6$.

- Hledáme čísla $r, s \in \mathbf{Z}$ taková, že $-6 = rs \wedge 2 = -(r+s)$.
- První podmínce vyhovuje $-6 = (-6) \cdot 1 = 6 \cdot (-1) = (-3) \cdot 2 = 3 \cdot (-2)$.
- Žádná kombinace ovšem nesplňuje druhou podmínku (po dosazení jednotlivých kombinací z první podmínky nikdy nenastane rovnost levé a pravé strany rovnice).
- Tento kvadratický trojčlen proto nelze rozložit na součin dvou lineárních dvojčlenů s celočíselnými koeficienty.

c) V kvadratickém trojčlenu je $p = -2$, $q = -15$.

- Hledáme čísla $r, s \in \mathbf{Z}$ taková, že $-15 = rs \wedge -2 = -(r+s)$.
- První podmínce vyhovuje $-15 = (-15) \cdot 1 = 15 \cdot (-1) = (-5) \cdot 3 = 5 \cdot (-3)$.
- A druhá podmínka je splněna pro $-2 = -(5-3)$, tj. $r = 5$, $s = -3$.
- Výsledek je tedy: $x^2 - 2x - 15 = (x-5)\big(x-(-3)\big) = (x-5)(x+3)$

d) V kvadratickém trojčlenu je $p = 9$, $q = 8$.

- Hledáme čísla $r, s \in \mathbf{Z}$ taková, že $8 = rs \wedge 9 = -(r+s)$.
- První podmínce vyhovuje $8 = 8 \cdot 1 = (-8) \cdot (-1) = 4 \cdot 2 = (-4) \cdot (-2)$.
- A druhá podmínka je splněna pro $9 = -(-8-1)$, tj. $r = -8$, $s = -1$.
- Výsledek je tedy: $x^2 + 9x + 8 = \big(x-(-8)\big)\big(x-(-1)\big) = (x+8)(x+1)$

> **Poznámka**
>
> Uvedený rozklad kvadratického trojčlenu na součin platí i v případě, že koeficienty trojčlenu jsou z oboru reálných čísel. Hledané koeficienty lineárních dvojčlenů pak také patří do oboru reálných čísel. Tento rozklad je znám také pod názvem *Viètovy vzorce*.

Rozklad mnohočlenu na součin není vždycky patrný na první pohled. Někdy dokonce nelze v oboru reálných čísel vůbec provést (např. mnohočlen $a^2 + b^2$).

Cvičení k této části.

Cvičení - Rozklad mnohočlenu na součin

V následujících cvičeních vždy předpokládáme, že proměnné jsou z oboru reálných čísel.

Cvičení 3.18

Přiřaď odpovídající si výrazy:

	$xy^2(x+2y-5)$	$xy(x+2y-5)$	$x^2(x+2y-5)$	$x(x+2y-5)$	
a) $x^3+2x^2y-5x^2=$	○	○	●	○	Správně!
b) $x^2+2xy-5x=$	○	○	○	●	Správně!
c) $x^2y+2xy^2-5xy=$	○	●	○	○	Správně!
d) $x^2y^2+2xy^3-5xy^2=$	●	○	○	○	Správně!

Cvičení 3.19

Rozlož mnohočlen na součin vhodným vytknutím před závorku:

a) $4t-2tu-12t^2=$

b) $3t^2-t=$

c) $t^3-4t^2-3t+12=$

d) $2t^2-tu-12t+6u=$

Cvičení 3.20

Rozhodni, zda platí:

a) $a^2-b^2=(a-b)(a-b)$	○ ano	● ne	Správně!
b) $(a-b)^2=(a-b)(a-b)$	● ano	○ ne	Správně!
c) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$	● ano	○ ne	Správně!
d) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	● ano	○ ne	Správně!
e) $a^3-b^3=(a-b)(a^2-ab+b^2)$	○ ano	● ne	Správně!
f) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$	● ano	○ ne	Správně!

Cvičení 3.21

Rozlož mnohočlen na součin s využitím vzorců:

a) $9x^2 + 6x + 1 =$

b) $x^4 - 25 =$

c) $27z^3 + 8 =$

d) $125y^3 - 1 =$

e) $64x^3 - 48x^2y + 12xy^2 - y^3 =$

Cvičení 3.22

Přiřaď odpovídající si výrazy:

	$(k+5)(k-3)$	$(k-5)(k+3)$	$(k-5)(k-3)$	$(k+5)(k+3)$	
a) $k^2 - 8k + 15 =$	○	○	●	○	Správně!
b) $k^2 + 8k + 15 =$	○	○	○	●	Správně!
c) $k^2 + 2k - 15 =$	●	○	○	○	Správně!
d) $k^2 - 2k - 15 =$	○	●	○	○	Správně!

Cvičení 3.23

Rozlož kvadratický trojčlen na součin dvou lineárních dvojčlenů s celočíselnými koeficienty:

a) $x^2 - 10x + 24$

b) $k^2 - k - 2$

c) $m^2 + 9m + 14$

d) $p^2 - 5p + 12$

Cvičení 3.24

Rozlož následující mnohočleny na součin:

a) $(3x+2)^2 + 3x = 9x^2 + 12x + 4 + 3x = 9x^2 + 3x + 12x + 4 = 3x(3x+1) + 4(3x+1) =$
$= (3x+1)(3x+4)$

b) $-27x^2 - 12y^2 + 36xy = -3(9x^2 + 4y^2 - 12xy) = -3(9x^2 - 12xy + 4y^2) = -3(3x-2y)^2$

c) $4x^2 - 4 + 6x = 4x^2 - 1 - 3 + 6x = (2x-1)(2x+1) + 3(-1+2x) = (2x-1)(2x+1+3) =$
$= (2x-1)(2x+4)$

d) $x^2 - 15 - 2x = x^2 - 9 - 6 - 2x = (x-3)(x+3) - 2(3+x) = (x+3)(x-3-2) = (x+3)(x-5)$

Cvičení 3.25

Jaké nejmenší hodnoty může nabývat výraz $p^2 + 4p + q^2 - 6q + r^2$?

Upravíme výraz tak, aby se v něm objevovaly druhé mocniny (ty jsou vždy nezáporné).
$p^2 + 4p + q^2 - 6q + r^2 = p^2 + 4p + 4 - 4 + q^2 - 6q + 9 - 9 + r^2 =$
$= (p+2)^2 - 4 + (q-3)^2 - 9 + r^2 = (p+2)^2 + (q-3)^2 + r^2 - 13$

Výraz může nabývat nejmenší hodnoty -13, protože druhá mocnina libovolného čísla je vždy větší nebo rovna nule.

4. Lomené výrazy

Tato kapitola se dělí na čtyři dílčí celky. V prvním celku se dozvíme, co jsou to lomené výrazy, za jakých podmínek mají smysl a jak je lze krátit. Poté se zaměříme na další početní operace, konkrétně ve druhé podkapitole na součin a podíl lomených výrazů. Ve třetím celku se naučíme lomené výrazy rozšiřovat, následně sčítat a odčítat, ale také využít pro řešení slovních úloh. Poslední celek je věnován vyjádření neznámé ze vzorce. Tato dovednost nám bude užitečná nejen v matematice, ale i v dalších vědních disciplínách.

Nejdříve je vždy uveden učební text, ve kterém jsou pro lepší pochopení začleněny i vzorově vyřešené příklady. Na učební text pak navazují interaktivní cvičení – v nich si můžeš rozmanitou formou učivo procvičit.

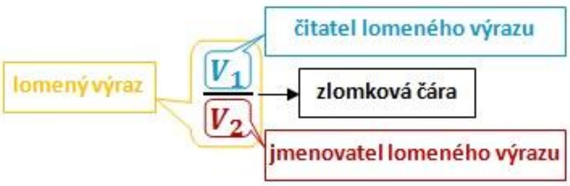
Členění této kapitoly:

4.1 Zavedení lomených výrazů a jejich krácení

V předcházející kapitole jsme definovali pojem výraz a určovali jsme, za jakých podmínek má smysl. Podrobněji jsme se zabývali jedním typem výrazu, a to mnohočlenem (polynomem). Tyto znalosti nyní opět využijeme. Podíváme se na další typ výrazu, kterým je lomený výraz. Nebude-li uvedeno jinak, předpokládáme, že všechny proměnné jsou z oboru reálných čísel.

Definice

Pojmem **lomený výraz** označujeme výraz ve tvaru zlomku.



V_1 a V_2 jsou libovolné výrazy, přičemž pro všechny hodnoty proměnných je $V_2 \neq 0$.

Poznámka

Aby měl lomený výraz smysl, musí být jeho jmenovatel nenulový.

Z definice vyplývá, že lomený výraz může mít tvar podílu mnohočlenů, jako například

$$\frac{x^5 - 3x^3 + 2}{8x^4 + 11x^2 - 2x} \text{ či } \frac{5}{3a^2 - 7},$$

nebo se jedná o podíl dvou výrazů, z nichž alespoň jeden není mnohočlenem, například

$$\frac{4x^2 - 1 + x^{-3}}{x^{-2} + 6}.$$

S lomenými výrazy pracujeme obdobně jako se zlomky.

Příklad 4.1

Urči podmínky, za kterých má daný lomený výraz smysl:

a) $\frac{x+5}{x+3}$ b) $\frac{4}{5z-2}$ c) $\frac{\sqrt{s-2}}{s^2+4}$

Řešení

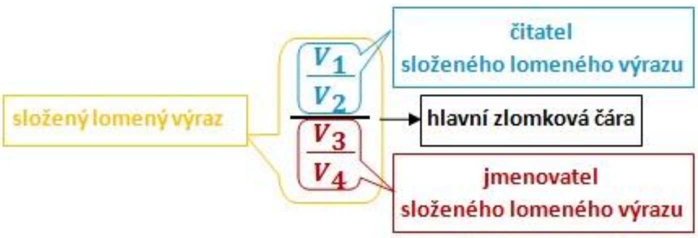
a) Lomený výraz má smysl, pokud je jmenovatel různý od nuly (v opačném případě bychom dělili nulou, což je nepřípustná operace), tedy $x+3 \neq 0$, tj. $x \neq -3$. Podmínky: $x \in \mathbf{R} - \{-3\}$

b) Lomený výraz má smysl, pokud $5z - 2 \neq 0$, tedy $z \neq \frac{2}{5}$. Podmínky: $z \in \mathbf{R} - \left\{\frac{2}{5}\right\}$

c) Lomený výraz má smysl, pokud $s^2 + 4 \neq 0$, tj. $s^2 \neq -4$. Tato podmínka je splněna vždy (druhá mocnina libovolného čísla je nezáporné číslo). Zároveň musíme zaručit, že v čitateli lomeného výrazu odmocňujeme nezáporné číslo, tedy $s - 2 \geq 0$, tj. $s \geq 2$. Podmínky: $s \geq 2$

Určení podmínek, za kterých má lomený výraz smysl, je nezbytnou součástí řešení každého příkladu.

> **Definice**
>
> **Složený lomený výraz** je lomený výraz, který má v čitateli i jmenovateli také lomený výraz.



V_1, V_2, V_3, V_4 jsou libovolné výrazy, přičemž pro všechny hodnoty proměnných je $V_2 \neq 0$, $V_3 \neq 0$, $V_4 \neq 0$.

Složený lomený výraz lze jednoduše přepsat na dva lomené výrazy, a to dělence a dělitele, pokud nahradíme hlavní zlomkovou čáru znakem pro dělení "$\div$". Terminologie přitom odpovídá učivu o zlomcích.

$$\frac{\frac{V_1}{V_2}}{\frac{V_3}{V_4}} = \overbrace{\boxed{\frac{V_1}{V_2}}}^{\text{dělenec složeného lomeného výrazu}} \div \underbrace{\boxed{\frac{V_3}{V_4}}}_{\text{dělitel složeného lomeného výrazu}}$$

V_1, V_2, V_3, V_4 jsou libovolné výrazy, přičemž pro všechny hodnoty proměnných je $V_2 \neq 0$, $V_3 \neq 0$, $V_4 \neq 0$.

> **Poznámka**
>
> *Hlavní zlomkovou čáru* poznáme podle toho, že se nachází ve stejné úrovni jako znak pro rovnost "=" či znaménko před složeným lomeným výrazem "$\pm$", příp. dle její délky (neboť je nejdelší).

Příklad 4.2

Urči podmínky, za kterých má daný složený lomený výraz smysl:

a) $\dfrac{\frac{x^2-4}{x+1}}{\frac{x-2}{3x-3}}$ b) $\dfrac{5-a}{\frac{2a-8}{a^4+7}}$

Řešení

a) $\dfrac{\frac{x^2-4}{x+1}}{\frac{x-2}{3x-3}} = \dfrac{x^2-4}{x+1} \div \dfrac{x-2}{3x-3}$

- Jmenovatel dělence složeného lomeného výrazu nesmí být roven nule, tedy $x+1 \neq 0$, tj. $x \neq -1$.
- Ani jmenovatel dělitele složeného lomeného výrazu nesmí být roven nule, tedy $3x-3 \neq 0$, tj. $3x \neq 3$, proto $x \neq 1$.
- Zároveň dělitel složeného lomeného výrazu musí být nenulový (nelze dělit nulou), tj. $\dfrac{x-2}{3x-3} \neq 0$.

  Připomeňme si, že pokud zlomek nesmí být nulový, pak musíme zaručit, že je jeho čitatele nenulový, tedy $x-2 \neq 0$, tj. $x \neq 2$.
- Podmínky: $x \in \mathbf{R} - \{-1; 1; 2\}$

b) Také tento výraz je složený lomený výraz, můžeme si ho totiž přepsat do tvaru:

$$\frac{\frac{5-a}{1}}{\frac{2a-8}{a^4+7}} = \frac{5-a}{1} \div \frac{2a-8}{a^4+7}$$

- Jmenovatel dělence složeného lomeného výrazu musí být nenulový - tato podmínka je splněna vždy.
- Jmenovatel dělitele složeného lomeného výrazu nesmí být nulový, tedy $a^4+7 \neq 0$, tj. $(a^2)^2 \neq -7$. Druhá mocnina libovolného čísla je nezáporná, tato podmínka je tedy splněna vždy.
- Zároveň dělitel složeného lomeného výrazu musí být nenulový, tedy $\dfrac{2a-8}{a^4+7} \neq 0$, tj. $2a-8 \neq 0$, proto $2a \neq 8$, tj. $a \neq 4$.
- Podmínky: $a \in \mathbf{R} - \{4\}$

Krácení lomených výrazů

Krátit lomený výraz znamená dělit jeho čitatele i jmenovatele stejným výrazem.

$$\frac{V_1 \cdot V_3}{V_2 \cdot V_3} = \frac{\frac{V_1 \cdot V_3}{V_3}}{\frac{V_2 \cdot V_3}{V_3}} = \frac{V_1}{V_2}$$

V_1, V_2, V_3 jsou libovolné výrazy, přičemž pro všechny hodnoty proměnných je $V_2 \neq 0$, $V_3 \neq 0$.

Krácení často provádíme při zjednodušování lomených výrazů. Aby bylo možné lomený výraz krátit, musí být jeho čitatel i jmenovatel zapsán ve tvaru součinu! Pokud tomu tak není, snažíme se lomený výraz nejprve vhodně upravit (což ovšem ne vždy lze). Využíváme k tomu zejména pravidla pro počítání s mocninami a rozklad mnohočlenů na součin pomocí vzorců či vytknutím společného mnohočlenu.

Poznámka

Krácení obvykle zjednodušeně zapisujeme následujícím způsobem:

$$\frac{V_1 \cdot \cancel{V_3}}{V_2 \cdot \cancel{V_3}} = \frac{V_1}{V_2}$$

V_1, V_2, V_3 jsou libovolné výrazy, přičemž pro všechny hodnoty proměnných je $V_2 \neq 0$, $V_3 \neq 0$.

Příklad 4.3

Zjednoduš lomené výrazy s využitím krácení:

a) $\frac{6a^2b}{3ab^2}$ b) $\frac{(c+2)(d^2-4)}{(d-5)(c+2)}$ c) $\frac{(c+2)d^2-4}{(d-5)(c+2)}$ d) $\frac{a^2-4}{(a-2)(a^2+4)}$

Řešení

a) $\frac{6a^2b}{3ab^2} = \frac{2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{a} \cdot a \cdot \cancel{b}}{\cancel{3} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{b} \cdot b} = \frac{2a}{b}$

Původní lomený výraz jsme krátili výrazem $3ab$.
Výraz má smysl pro $a \in \mathbf{R} - \{0\}$, $b \in \mathbf{R} - \{0\}$.

b) $\frac{(c+2)(d^2-4)}{(d-5)(c+2)} = \frac{\cancel{(c+2)}(d^2-4)}{(d-5)\cancel{(c+2)}} = \frac{d^2-4}{d-5}$

Původní lomený výraz jsme krátili výrazem $c+2$.
Výraz má smysl pro $c \in \mathbf{R} - \{-2\}$, $d \in \mathbf{R} - \{5\}$.

c) Lomený výraz nelze krátit. Čitatel není ve tvaru součinu, ani ho nelze na vhodný součin upravit.
Výraz má smysl pro $c \in \mathbf{R} - \{-2\}$, $d \in \mathbf{R} - \{5\}$.

d) Lomený výraz nelze přímo krátit. Čitatele lomeného výrazu nejprve upravíme na součin dle vzorce pro rozdíl druhých mocnin, až poté krátíme (výrazem $a-2$).

$$\frac{a^2-4}{(a-2)(a^2+4)} = \frac{\cancel{(a-2)}(a+2)}{\cancel{(a-2)}(a^2+4)} = \frac{a+2}{a^2+4}$$

Výraz má smysl pro $a \in \mathbf{R} - \{2\}$ (neboť výraz a^2+4 je vždy kladný).

Při krácení lomeného výrazu vlastně hledáme výraz, kterým lze čitatele i jmenovatele lomeného výrazu beze zbytku dělit. V případě, že ve jmenovateli a čitateli lomeného výrazu jsou mnohočleny, určujeme **společného dělitele** těchto **mnohočlenů**.

Mnohočleny mohou mít i více společných dělitelů. Dohodneme se proto, že v dalším textu budeme společným dělitelem daných mnohočlenů označovat součin všech výrazů, které jsou činiteli v každém rozkladu daných mnohočlenů na součin. Postup je zřejmý z následujícího příkladu.

Příklad 4.4

Urči společného dělitele daných mnohočlenů:

a) $4u\left(u^2-v^2\right)$ a $u^2(8u+8v)$ b) $\frac{1}{18}u^3$ a $\frac{1}{9}u^2$

Řešení

a) Oba mnohočleny rozložíme na součin.
$4u\left(u^2-v^2\right)=2^2\cdot u\cdot(u+v)\cdot(u-v)$
$u^2(8u+8v)=u^2\cdot 2^3\cdot(u+v)$
V obou rozkladech se vyskytuje výraz u, $u+v$ a 2^2, (jelikož platí, že $2^3=2\cdot 2^2$). Jako společný dělitel mnohočlenů označíme dle dohody jejich součin, tj. výraz $2^2\cdot u\cdot(u+v)=4u(u+v)$.

b) Oba mnohočleny rozložíme na součin.
$$\frac{1}{18}u^3=\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\cdot u^3$$
$$\frac{1}{9}u^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot u^2$$
Společných dělitelem mnohočlenů je dle dohody výraz $\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot u^2=\frac{1}{9}u^2$.

Poznámka

U lomených výrazů nepoužíváme termín *největší* společný dělitel mnohočlenů, protože ne vždy známe konkrétní hodnoty proměnných.

Cvičení k této části.

Cvičení - Zavedení lomených výrazů a jejich krácení

Cvičení 4.1

Urči, zda má pro dané hodnoty proměnné lomený výraz smysl:

a) $\frac{a-5}{a^2+2a-1}$	pro $a=5$	◉ ano	○ ne	Správně!
b) $\frac{a^3+6}{a(a-8)}$	pro $a=8$	○ ano	◉ ne	Správně!
c) $\frac{a(2a+8)}{(a+3)(a-3)}$	pro $a=0$	◉ ano	○ ne	Správně!
d) $\frac{\sqrt{a-5}}{a^2-4a+4}$	pro $a=0$	○ ano	◉ ne	Správně!
e) $\frac{a\cdot\sqrt{14-a}}{a^2-1}$	pro $a=-1$	○ ano	◉ ne	Správně!

Cvičení 4.2

Urči podmínky, za kterých má daný lomený výraz smysl:

a) $\frac{2r-8}{3r+6}$

b) $\frac{14-2r}{r^2-7r}$

c) $\frac{\sqrt{r-10}}{r^2-25}$

d) $\frac{\frac{1}{2}r^3-\frac{2}{5}r}{r^6+4}$

Cvičení 4.3

Urči, zda má pro dané hodnoty proměnné smysl složený lomený výraz V:

$$V = \frac{\frac{3u-18}{u^2-81}}{\frac{u^2-5u}{u^2+4}}$$

a) $u = 9$	○ ano	◉ ne	Správně!
b) $u = 6$	◉ ano	○ ne	Správně!
c) $u = -9$	○ ano	◉ ne	Správně!
d) $u = 0$	○ ano	◉ ne	Správně!
e) $u = -2$	◉ ano	○ ne	Správně!
f) $u = 5$	○ ano	◉ ne	Správně!
g) $u = -5$	◉ ano	○ ne	Správně!

Cvičení 4.4

Urči podmínky, za kterých má daný složený lomený výraz smysl:

a) $\dfrac{\frac{2z+10}{z-10}}{\frac{6z+36}{z^3-4z}} =$

b) $\dfrac{\frac{4z+3}{z^2-1}}{4z^2-9} =$

c) $\dfrac{\frac{3z-12}{z^2+9}}{\frac{2z+7}{4z^2-4z}} =$

Cvičení 4.5

Urči společného dělitele daných mnohočlenů:

a) $8k(k^2-4)$ a $12k^2(k+2)^3$

b) $(k-7)^3(k+4)$ a $9k^3(k^2-16)(k-7)^2$

c) $14(p^2-2pk+k^2)(3p+k)$ a $21(p^2-k^2)(36p+12k)(p+1)$

Cvičení 4.6

Rozhodni, zda pro $t \in \mathbf{R} - \left\{-1; -\frac{1}{5}; 0; 1; 6\right\}$ platí:

a) $\dfrac{(t+1)(t-6)}{5t(t-6)} = \dfrac{t+1}{5t}$	☑ ano	☐ ne	Správně!
b) $\dfrac{(t+1)(t-6)}{5t+(t-6)} = \dfrac{t+1}{5t}$	☐ ano	☑ ne	Správně!
c) $\dfrac{(t+1)(t-6)}{5t+(t-6)} = \dfrac{t+1}{5t+1}$	☐ ano	☑ ne	Správně!
d) $\dfrac{(t+1)(t-6)}{(t+1)(t-6)} = 0$	☐ ano	☑ ne	Správně!
e) $\dfrac{(t+1)(t-6)}{(t+1)(t-6)} = 1$	☑ ano	☐ ne	Správně!

Cvičení 4.7

Zjednoduš lomené výrazy s využitím krácení:

a) $\dfrac{8x^2+8xy}{8(x+y)^2} =$

b) $\dfrac{9-6x+x^2}{x^2-9} =$

c) $\dfrac{24x^2-54y^2}{12x+18y} =$

d) $\dfrac{y^3-1}{5y^2x-10yx+5x}=$

e) $\dfrac{xy+4x-y-4}{2y^2-32}=$

f) $\dfrac{2xy-3x+10y-15}{2xy-10y-3x+15}=$

Cvičení 4.8

Zjednoduš lomené výrazy s využitím krácení:

a) $\dfrac{x^8-16}{2x^4+8}=\dfrac{\left(x^4\right)^2-4^2}{2(x^4+4)}=\dfrac{(x^4+4)(x^4-4)}{2(x^4+4)}=\dfrac{x^4-4}{2}$

- Výraz má smysl pro taková $x\in\mathbf{R}$, pro která je $x^4+4\neq0$, tedy $\left(x^2\right)^2\neq-4$.
  Druhá mocnina reálného čísla je vždy číslo nezáporné, proto nemusíme vyloučit žádné x z definičního oboru.
- Podmínky: $x\in\mathbf{R}$

b) $\dfrac{x^2+2x}{2x^3+16}=\dfrac{x(x+2)}{2(x^3+8)}=\dfrac{x(x+2)}{2(x+2)(x^2-2x+4)}=\dfrac{x}{2(x^2-2x+4)}$

Výraz má smysl pro taková $x\in\mathbf{R}$, pro která je $x+2\neq0\wedge x^2-2x+4\neq0$.

- První podmínka znamená, že $x\neq-2$.
- Druhou podmínku zjistíme doplněním na čtverec:
  $x^2-2x+4=(x^2-2x+1)+3=(x-1)^2+3$.
  Víme, že $x^2-2x+4\neq0$, tj. $(x-1)^2+3\neq0$, tj. $(x-1)^2\neq-3$.
  Jelikož je druhá mocnina reálného čísla vždy číslo nezáporné, nemusíme kvůli druhé podmínce vyloučit žádné x z definičního oboru.
- Podmínky: $x\in\mathbf{R}-\{-2\}$

c) $\dfrac{64x^2-121}{64x^2-176x+121}=\dfrac{(8x+11)(8x-11)}{(8x-11)^2}=\dfrac{8x+11}{8x-11}$

Podmínky: $x\in\mathbf{R}-\left\{\dfrac{11}{8}\right\}$

4.2 Součin, podíl a mocniny lomených výrazů

Dříve, než se začneme věnovat násobení, dělení a umocňování lomených výrazů, je potřeba zdůraznit, že při všech výpočtech se snažíme lomené výrazy *zjednodušit* (např. prostřednictvím krácení). Kromě toho nezapomínáme na skutečnost, že *stanovení podmínek*, za kterých má lomený výraz smysl, je vždy nezbytnou součástí řešení!

Násobení lomených výrazů

Pro libovolné výrazy V_1, V_2, V_3, V_4, přičemž pro všechny hodnoty proměnných je $V_2 \neq 0$, $V_4 \neq 0$, lze **součin lomených výrazů** zapsat jako

$$\frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1 \cdot V_3}{V_2 \cdot V_4}.$$

Součin lomených výrazů lze zapsat jako lomený výraz, do jehož čitatele (resp. jmenovatele) zapíšeme součin čitatelů (resp. jmenovatelů) těch lomených výrazů, které násobíme.

V případě následujícího součinu dvou lomených výrazů lze také krátit dle schématu:

$$\frac{\cancel{V_1} \cdot V_2}{\cancel{V_3}} \cdot \frac{\cancel{V_3}}{\cancel{V_1} \cdot V_4} = \frac{V_2}{V_4}$$

Příklad 4.5

Vypočítej:

a) $\dfrac{3p+6}{2q^3} \cdot \dfrac{4q^2}{p^2+2p}$ b) $\dfrac{3p+q}{5p} \cdot \dfrac{4q^2}{3p^2+p}$ c) $\dfrac{p^2-2pq+q^2}{p^2-q^2} \cdot \dfrac{p^2+q^2}{2} \cdot \dfrac{4}{2p-2q}$

Řešení

a) *Vhodný postup* (výrazy co nejdříve krátíme):

$$\frac{3p+6}{2q^3} \cdot \frac{4q^2}{p^2+2p} = \frac{(3p+6)\cdot 4q^2}{2q^3 \cdot (p^2+2p)} = \frac{3(p+2)\cdot 4q^2}{2q^3 p(p+2)} = \frac{3\cdot 2}{q \cdot p} = \frac{6}{pq}$$

Výpočet má smysl za předpokladu, že $p \in \mathbf{R} - \{-2; 0\}$, $q \in \mathbf{R} - \{0\}$.

Nevhodný postup (nejprve roznásobíme, poté krátíme) - je zdlouhavý, proto se zvyšuje riziko chyby:

$$\frac{3p+6}{2q^3} \cdot \frac{4q^2}{p^2+2p} = \frac{(3p+6)\cdot 4q^2}{2q^3 \cdot (p^2+2p)} = \frac{12pq^2+24q^2}{2p^2q^3+4pq^3} = \frac{12q^2(p+2)}{2pq^3(p+2)} = \frac{2\cdot 6\cdot q^2\cdot(p+2)}{2\cdot p\cdot q^2\cdot q\cdot(p+2)} = \frac{6}{pq}$$

Výpočet má smysl za předpokladu, že $p \in \mathbf{R} - \{-2; 0\}$, $q \in \mathbf{R} - \{0\}$.

b) $$\frac{3p+q}{5p} \cdot \frac{4q^2}{3p^2+p} = \frac{(3p+q)\cdot 4q^2}{5p \cdot p(3p+1)} = \frac{12pq^2+4q^3}{5p^2(3p+1)} = \frac{12pq^2+4q^3}{15p^3+5p^2}$$

V tomto případě krátit nelze.

Výpočet má smysl za předpokladu, že $p \in \mathbf{R} - \left\{-\frac{1}{3}; 0\right\}$.

c) $$\frac{p^2-2pq+q^2}{p^2-q^2} \cdot \frac{p^2+q^2}{2} \cdot \frac{4}{2p-2q} = \frac{(p-q)^2}{(p-q)(p+q)} \cdot \frac{p^2+q^2}{2} \cdot \frac{4}{2(p-q)} = \frac{p^2+q^2}{p+q}$$

V tomto postupu jsme krátili dle výše uvedeného schématu.
Výpočet má smysl za předpokladu, že $p \in \mathbf{R}$, $q \in \mathbf{R}$ a zároveň $p \neq \pm q$.

Dělení lomených výrazů

Dělení lomených výrazů převedeme na jejich násobení, které již umíme. Postupujeme tedy obdobně jako při počítání se zlomky, např.

$$4 \div \frac{2}{5} = 4 \cdot \frac{5}{2}$$

(číslo 4 násobíme převrácenou hodnotou čísla $\frac{2}{5}$).

Obecně platí následující:

$$A \div B = A \cdot \frac{1}{B}, \text{ pro } B \neq 0$$

Odvození vztahu pro podíl lomených výrazů:

$$\frac{V_1}{V_2} \div \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{1}{\frac{V_3}{V_4}} = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{1}{\frac{V_3}{V_4}} \cdot \underbrace{\frac{V_4}{V_4}}_{\cdot 1} = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{1 \cdot V_4}{\frac{V_3}{V_4} \cdot V_4} = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{V_4}{V_3}$$

(Význam symbolů a podmínky jsou uvedeny v následujcím tvrzení.)

Pro libovolné výrazy V_1, V_2, V_3, V_4, přičemž pro všechny hodnoty proměnných je $V_2 \neq 0$, $V_3 \neq 0$, $V_4 \neq 0$, lze **podíl lomených výrazů** zapsat jako

$$\frac{V_1}{V_2} \div \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{V_4}{V_3}.$$

Pozor! Při určování podmínek, za kterých má lomený výraz smysl, musíme také zaručit, že je lomený výraz $\frac{V_3}{V_4}$ nenulový, tedy že $V_3 \neq 0$. Někdy je výhodnější určovat podmínky až po úpravě výrazů.

Poznámka

Dělení lomených výrazů je třeba převést na jejich násobení, až poté je vhodné krátit!
Pozorně prostuduj:

$$\frac{V_1}{V_2} \div \frac{V_2}{V_1} \neq 1$$

$$\frac{V_1}{V_2} \div \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1 \cdot V_1}{V_2 \cdot V_2}$$

(V_1, V_2 jsou libovolné výrazy, přičemž pro všechny hodnoty proměnných je $V_1 \neq 0$, $V_2 \neq 0$.)

Příklad 4.6

Vypočítej:

a) $\dfrac{12u^3v^2}{14r^2s^2} \div \dfrac{18u^2v^2}{21r^2s}$

b) $\dfrac{px^2 - py^2}{x^2 + 2xy + y^2} \div \dfrac{px^2 - 2pxy + py^2}{x + y}$

c) $\dfrac{\dfrac{15u^2 + 15v^2}{6u^2 - 12uv + 6v^2}}{\dfrac{20u^2 + 40uv + 20v^2}{8u^2 - 8v^2}}$

Řešení

a) $\dfrac{12u^3v^2}{14r^2s^2} \div \dfrac{18u^2v^2}{21r^2s} = \dfrac{12u^3v^2}{14r^2s^2} \cdot \dfrac{21r^2s}{18u^2v^2} = \dfrac{u}{s}$

Výpočet má smysl za podmínek, že $r \in \mathbf{R} - \{0\}$, $s \in \mathbf{R} - \{0\}$, $u \in \mathbf{R} - \{0\}$, $v \in \mathbf{R} - \{0\}$.

b) $\dfrac{px^2 - py^2}{x^2 + 2xy + y^2} \div \dfrac{px^2 - 2pxy + py^2}{x + y} = \dfrac{px^2 - py^2}{x^2 + 2xy + y^2} \cdot \dfrac{x + y}{px^2 - 2pxy + py^2} =$

$= \dfrac{p(x^2 - y^2)}{(x + y)^2} \cdot \dfrac{x + y}{p(x^2 - 2xy + y^2)} = \dfrac{(x - y)(x + y)}{x + y} \cdot \dfrac{1}{(x - y)^2} = \dfrac{1}{x - y}$

Výpočet má smysl za podmínek, že $p \in \mathbf{R} - \{0\}$, $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$, přičemž $x \neq \pm y$.

c) $\dfrac{\dfrac{15u^2 + 15v^2}{6u^2 - 12uv + 6v^2}}{\dfrac{20u^2 + 40uv + 20v^2}{8u^2 - 8v^2}} = \dfrac{15u^2 + 15v^2}{6u^2 - 12uv + 6v^2} \div \dfrac{20u^2 + 40uv + 20v^2}{8u^2 - 8v^2} =$

$= \dfrac{15u^2 + 15v^2}{6u^2 - 12uv + 6v^2} \cdot \dfrac{8u^2 - 8v^2}{20u^2 + 40uv + 20v^2} = \dfrac{15(u^2 + v^2)}{6(u - v)^2} \cdot \dfrac{8(u - v)(u + v)}{20(u + v)^2} = \dfrac{3(u^2 + v^2)}{3(u - v)} \cdot \dfrac{4}{4(u + v)} =$

$= \dfrac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2}$

Výpočet má smysl za podmínek, že $u \in \mathbf{R}$, $v \in \mathbf{R}$, přičemž $u \neq \pm v$.

Umocňování lomených výrazů

Díky znalosti definice mocniny reálného čísla snadno určíme i **mocninu lomeného výrazu**.

Definice

Pro libovolné výrazy V_1, V_2 , přičemž pro všechny hodnoty proměnných je $V_2 \neq 0$, a pro každé přirozené číslo n je:

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^n = \underbrace{\frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{V_1}{V_2} \cdot \ldots \cdot \frac{V_1}{V_2}}_{n \text{ činitelů}}$$

Pro libovolné výrazy V_1, V_2, přičemž pro všechny hodnoty proměnných je $V_2 \neq 0$, a pro každé přirozené číslo n platí:

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^n = \frac{V_1^{\,n}}{V_2^{\,n}}$$

Umocnit lomený výraz přirozeným číslem n znamená umocnit jeho čitatele a jmenovatele tímto číslem n.

Definice

Pro libovolné výrazy V_1, V_2, přičemž pro všechny hodnoty proměnných je $V_1 \neq 0$, $V_2 \neq 0$, a pro každé celé číslo m je:

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{-m} = \frac{V_2^{\,m}}{V_1^{\,m}}$$

Příklad 4.7

Vypočítej:

a) $\left[\dfrac{(z+1)^2}{2}\right]^5 \cdot \dfrac{64}{(z+1)^6}$ b) $\left(\dfrac{z+2}{z-2}\right)^{-2} \cdot (z^2-4)$

Řešení

a) $$\left[\frac{(z+1)^2}{2}\right]^5 \cdot \frac{64}{(z+1)^6} = \frac{\left[(z+1)^2\right]^5}{2^5} \cdot \frac{64}{(z+1)^6} = \frac{(z+1)^{10}}{2^5} \cdot \frac{2^6}{(z+1)^6} = 2(z+1)^4$$

Výpočet má smysl za předpokladu, že $z \in \mathbf{R} - \{-1\}$.

b) $$\left(\frac{z+2}{z-2}\right)^{-2} \cdot (z^2-4) = \frac{(z-2)^2}{(z+2)^2} \cdot \frac{z^2-4}{1} = \frac{(z-2)(z-2)}{(z+2)(z+2)} \cdot \frac{(z+2)(z-2)}{1} = \frac{(z-2)^3}{z+2}$$

Výpočet má smysl za předpokladu, že $z \in \mathbf{R} - \{\pm 2\}$.

Cvičení k této části.

Cvičení - Součin, podíl a mocniny lomených výrazů

Cvičení 4.9

Rozhodni, zda pro libovolné výrazy V_1, V_2, V_3, V_4, přičemž pro všechny hodnoty proměnných je $V_1 \neq 0$, $V_2 \neq 0$, $V_3 \neq 0$, $V_4 \neq 0$ a $V_1 \neq V_2$, platí:

a) $\frac{V_1}{V_3} \cdot \frac{V_2}{V_4} = \frac{V_1 \cdot V_4}{V_3 \cdot V_2}$	ano	ne	Správně!
b) $\frac{V_1}{V_3} \cdot \frac{V_2}{V_4} = \frac{V_1 \cdot V_2}{V_3 \cdot V_4}$	ano	ne	Správně!
c) $\frac{V_1}{V_2} \cdot V_3 = \frac{V_1 \cdot V_3}{V_2 \cdot V_3}$	ano	ne	Správně!
d) $\frac{1}{V_1} \cdot \frac{V_2}{V_3} = \frac{V_2}{V_1 \cdot V_3}$	ano	ne	Správně!
e) $\frac{V_1 \cdot V_2}{V_3 \cdot V_4} \cdot \frac{V_3}{V_2} = \frac{V_1}{V_4}$	ano	ne	Správně!
f) $\frac{V_1 - V_2}{V_3} \cdot \frac{V_3}{V_2 - V_1} = -1$	ano	ne	Správně!

Cvičení 4.10

Vypočítej:

a) $\frac{4ab^2}{a+b} \cdot \frac{a^2+2ab+b^2}{8a^2b} =$

b) $\frac{5a^2+5a}{9+3a} \cdot \frac{a^2-9}{5a-10} \cdot \frac{6a-12}{2a^2+2a} =$

c) $\frac{2a^2-4ab+2b^2}{(8a^2-8b^2)(a-b)} \cdot (4a+4b) =$

d) $7a \cdot \frac{16-a^2}{21a^2+14a} \cdot \frac{9a+6}{a-4} =$

Cvičení 4.11

Přiřaď:

	$\frac{V_2}{V_1}$	1	$\frac{V_1^{\,5}}{V_2^{\,5}}$	$\frac{V_1}{V_2}$	$\frac{V_2^{\,5}}{V_1^{\,5}}$	
a) $\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^5 =$	○	○	●	○	○	Správně!
b) $\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{-1} =$	●	○	○	○	○	Správně!
c) $\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^1 =$	○	○	○	●	○	Správně!
d) $\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{-5} =$	○	○	○	○	●	Správně!
e) $\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{-1} \cdot \frac{V_1}{V_2} =$	○	●	○	○	○	Správně!

Cvičení 4.12

Vypočítej:

a) $\left(\frac{4p^2}{3q}\right)^3 \cdot \left(\frac{9q}{2p}\right)^2 =$

b) $\left(\frac{p^2q-q}{p+1}\right)^4 \cdot \left(\frac{15}{5pq^2-5q^2}\right)^3 =$

c) $\left(\frac{2p+3}{p-5}\right)^{-2} \cdot \frac{4p^2+12p+9}{25-5p} =$

d) $\frac{(p^3+27)^3}{(p-3)^2} \cdot (p+3)^{-3} =$

Cvičení 4.13

Rozhodni, zda pro libovolné výrazy V_1, V_2, V_3, V_4, přičemž pro všechny hodnoty proměnných je $V_2 \neq 0, V_3 \neq 0, V_4 \neq 0$ a $V_1 \neq V_2$, platí:

	ano	ne	
a) $\frac{V_1}{V_3} \div \frac{V_2}{V_4} = \frac{V_1 \cdot V_4}{V_3 \cdot V_2}$	◉ ano	○ ne	Správně!
b) $\frac{V_1}{V_3} \div \frac{V_2}{V_4} = \frac{V_1}{V_3} \cdot \left(\frac{V_2}{V_4}\right)^{-1}$	◉ ano	○ ne	Správně!
c) $\frac{\frac{V_1}{V_2}}{V_3} = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{1}{V_3}$	◉ ano	○ ne	Správně!
d) $\frac{V_1}{V_2} \div V_3 = \frac{V_1 \cdot V_3}{V_2 \cdot V_3}$	○ ano	◉ ne	Správně!
e) $V_1 \div \frac{V_2}{V_3} = \frac{V_1 \cdot V_3}{V_2}$	◉ ano	○ ne	Správně!
f) $\frac{V_1 - V_2}{V_3} \div \frac{V_4}{V_1 - V_2} = \frac{V_4}{V_3}$	○ ano	◉ ne	Správně!
g) $\frac{\frac{V_1}{V_3}}{\frac{V_2}{V_4}} = \frac{V_1}{V_3} \cdot \frac{V_2}{V_4}$	○ ano	◉ ne	Správně!

Cvičení 4.14

Vypočítej:

a) $\dfrac{49t^2 - 1}{14t^3 + 2t^2} \div \dfrac{1 - 7t}{14t^2} =$

b) $\dfrac{tu - 2t + 5u - 10}{2 - u} \div (t^2 + 10t + 25)^2 =$

c) $\dfrac{\dfrac{8t^3 - 125}{(t-1)^3}}{\dfrac{2t-5}{t^3 - 3t^2 + 3t - 1}} =$

d) $\dfrac{\dfrac{6t^2 + 6tu}{7u - 7u^2}}{\dfrac{18u^2 + 18tu}{21t - 21tu}} \cdot \left(\dfrac{t}{u}\right)^{-2} =$

Cvičení 4.15

Vypočítej:

a) $$\frac{\dfrac{9u^2+24uv+16v^2}{4u^2-25v^2}}{\dfrac{24u+32v}{2u-5v}} \cdot \frac{\dfrac{(2u-2v)^3}{6u^2+8uv+20v^2+15uv}}{\dfrac{u^3-3u^2v+3uv^2-v^3}{8u^3+60u^2v+150uv^2+125v^3}} =$$

$$= \left(\frac{9u^2+24uv+16v^2}{4u^2-25v^2} \div \frac{24u+32v}{2u-5v}\right) \cdot \left(\frac{(2u-2v)^3}{6u^2+8uv+20v^2+15uv} \div \frac{u^3-3u^2v+3uv^2-v^3}{8u^3+60u^2v+150uv^2+125v^3}\right) =$$

$$= \frac{(3u+4v)^2}{(2u+5v)(2u-5v)} \cdot \frac{2u-5v}{8(3u+4v)} \cdot \frac{2^3(u-v)^3}{2u(3u+4v)+5v(4v+3u)} \cdot \frac{8u^3+60u^2v+150uv^2+125v^3}{u^3-3u^2v+3uv^2-v^3} =$$

$$= \frac{3u+4v}{2u+5v} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{8(u-v)^3}{(3u+4v)(2u+5v)} \cdot \frac{(2u+5v)^3}{(u-v)^3} = 2u+5v$$

Podmínky: $u \in \mathbf{R}$, $v \in \mathbf{R}$ a zároveň $u \neq \pm\frac{5}{2}v \wedge u \neq -\frac{4}{3}v \wedge u \neq v$

b) $$\frac{\dfrac{64u^3+125}{12u+15+8uv+10v}}{\dfrac{8u+8v}{128}} \div \frac{\dfrac{3u+2uv-3v-2v^2}{8v^3+36v^2+54v+27}}{\dfrac{u^2-v^2}{48+32v}} =$$

$$= \left(\frac{64u^3+125}{12u+15+8uv+10v} \div \frac{8u+8v}{128}\right) \div \left(\frac{3u+2uv-3v-2v^2}{8v^3+36v^2+54v+27} \div \frac{u^2-v^2}{48+32v}\right) =$$

$$= \left(\frac{(4u)^3+5^3}{3(4u+5)+2v(4u+5)} \cdot \frac{128}{8(u+v)}\right) \div \left(\frac{u(3+2v)-v(3+2v)}{(2v+3)^3} \cdot \frac{16(3+2v)}{(u+v)(u-v)}\right) =$$

$$= \left(\frac{(4u+5)(16u^2-20u+25)}{(4u+5)(3+2v)} \cdot \frac{16}{u+v}\right) \div \left(\frac{(3+2v)(u-v)}{(2v+3)^3} \cdot \frac{16(3+2v)}{(u+v)(u-v)}\right) =$$

$$= \frac{(4u+5)(16u^2-20u+25)}{(4u+5)(3+2v)} \cdot \frac{16}{u+v} \cdot \frac{(2v+3)^3}{(3+2v)(u-v)} \cdot \frac{(u-v)(u+v)}{16(3+2v)} = 16u^2-20u+25$$

Podmínky: $u \in \mathbf{R} - \left\{-\frac{5}{4}\right\}$, $v \in \mathbf{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ a zároveň $u \neq \pm v$

4.3 Rozšiřování lomených výrazů, jejich součet a rozdíl

V této části se budeme věnovat sčítání a odčítání lomených výrazu. Abychom tyto operace zvládli, potřebujeme umět lomené výrazy rozšiřovat.

Rozšiřování lomených výrazů

Pro libovolné výrazy V_1, V_2, V_3, přičemž pro všechny hodnoty proměnných je $V_2 \neq 0$, $V_3 \neq 0$, lze **rozšiřování lomeného výrazu** vyjádřit jako:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1 \cdot V_3}{V_2 \cdot V_3}$$

Rozšířit lomený výraz znamená vynásobit jeho čitatele i jmenovatele stejným nenulovým výrazem. Lomený výraz tedy násobíme "vhodně zvolenou jedničkou", jelikož $\dfrac{V_3}{V_3} = 1$.

Následující schéma znázorňuje vztah mezi rozšiřováním a krácením lomených výrazů:

rozšiřování →

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1 \cdot V_3}{V_2 \cdot V_3}$$

← **krácení**

Příklad 4.8

Uprav lomený výraz vhodným rozšířením tak, aby jeho jmenovatel odpovídal jmenovateli uvedenému v závorce:

a) $\dfrac{a}{a-4}\left[\dfrac{?}{a^2-4a}\right]$ b) $\dfrac{a+2}{3-a}\left[\dfrac{?}{a-3}\right]$ c) $\dfrac{a+4}{4-a}\left[\dfrac{?}{16-a^2}\right]$

Řešení

a) Lomený výraz rozšíříme výrazem a.

$$\frac{a \cdot a}{(a-4) \cdot a} = \frac{a^2}{a^2-4a}$$

Rozšířený lomený výraz má smysl za podmínky, že $a \in \mathbf{R} - \{0, 4\}$.

b) Lomený výraz rozšíříme výrazem -1.

$$\frac{(a+2) \cdot (-1)}{(3-a) \cdot (-1)} = \frac{-a-2}{a-3}$$

Rozšířený lomený výraz má smysl za podmínky, že $a \in \mathbf{R} - \{3\}$.

c) Lomený výraza rozšíříme výrazem $4+a$.

$$\frac{(a+4)(4+a)}{(4-a)(4+a)} = \frac{(a+4)^2}{16-a^2}$$

Rozšířený lomený výraz má smysl za podmínky, že $a \in \mathbf{R} - \{\pm 4\}$.

Příklad 4.9

Uprav lomené výrazy vhodným rozšířením tak, aby měly oba ve jmenovateli stejný výraz:

a) $\frac{2}{b^3}$ a $\frac{3}{b(b+1)}$

Řešení

a) První lomený výraz rozšíříme jmenovatelem druhého výrazu, druhý lomený výraz jmenovatelem prvního výrazu

$$\frac{2\cdot b(b+1)}{b^3\cdot b(b+1)}=\frac{2b(b+1)}{b^4(b+1)} \quad \text{a} \quad \frac{3\cdot b^3}{b(b+1)\cdot b^3}=\frac{3b^3}{b^4(b+1)}.$$

Získali jsme lomené výrazy se stejným výrazem ve jmenovateli. Vidíme ovšem, že oba nově vzniklé lomené výrazy lze krátit výrazem b, čímž dostaneme

$$\frac{2(b+1)}{b^3(b+1)} \quad \text{a} \quad \frac{3b^2}{b^3(b+1)},$$

tudíž opět dva lomené výrazy, které odpovídají zadání. Které řešení tedy platí? Správné jsou obě varianty, ale preferujeme druhé vyjádření (mocnina b^3 je nižší než b^4).
Podmínky: $b\in\mathbf{R}-\{-1;0\}$

V předchozím příkladě jsme vlastně ve jmenovateli hledali **společný násobek mnohočlenů** - takový výraz, který lze beze zbytku dělit původními mnohočleny. Postup, jak ho určit, ilustruje také následující příklad.

Příklad 4.10

Urči společný násobek mnohočlenů:

a) $4a^2(b+1)^2$ a $6a^4(b+1)$ b) $20(a-2)^2$ a $15(a^2-4)$

Řešení

a) Oba mnohočleny rozložíme na součin.
$4a^2(b+1)^2=2\cdot 2\cdot a\cdot a\cdot(b+1)\cdot(b+1)$
$6a^4(b+1)=2\cdot 3\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot(b+1)$
Jako společný násobek označíme součin, jehož činitelé jsou činiteli alespoň v jednom rozkladu výrazů, přičemž mocnitelé u těchto činitelů korespondují s nejvyšším počtem jejich výskytů v těchto rozkladech, tj. $2^2\cdot 3^1\cdot a^4\cdot(b+1)^2=12a^4(b+1)^2$.
Společným násobkem zadaných mnohočlenů je výraz $12a^4(b+1)^2$.

b) Oba mnohočleny rozložíme na součin.
$20(a-2)^2=2\cdot 2\cdot 5\cdot(a-2)\cdot(a-2)$
$15(a^2-4)=3\cdot 5\cdot(a+2)\cdot(a-2)$
Společným násobkem zadaných mnohočlenů je výraz $2^2\cdot 3^1\cdot 5^1\cdot(a-2)^2\cdot(a+2)^1=60(a+2)(a-2)^2$.

Poznámka

U lomených výrazů nepoužíváme termín *nejmenší* společný násobek, protože neznáme konkrétní hodnoty proměnných, tedy ani hodnotu výrazů.

Sčítání lomených výrazů

Pro libovolné výrazy V_1, V_2, V_3, V_4, přičemž pro všechny hodnoty proměnných je $V_2 \neq 0$, $V_4 \neq 0$, platí pro **součet lomených výrazů:**

$$\frac{V_1}{V_2} + \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1 \cdot V_4 + V_3 \cdot V_2}{V_2 \cdot V_4}$$

Při sčítání lomených výrazů používáme převod na společného jmenovatele, obdobně jako u sčítání zlomků. Často je výhodnější nechat jmenovatele v průběhu řešení ve tvaru součinu než jej roznásobovat.

Příklad 4.11

Vypočítej:

a) $\frac{x-9}{3} + \frac{x+3}{x}$

b) $\frac{3-x}{x^2-9} + \frac{1}{x^2+3x} + \frac{1}{x}$

Řešení

a) Společný jmenovatel je $3 \cdot x$, proto:

$$\frac{x-9}{3} + \frac{x+3}{x} = \frac{(x-9)\cdot x + (x+3)\cdot 3}{3\cdot x} = \frac{x^2-9x+3x+9}{3x} = \frac{x^2-6x+9}{3x} = \frac{(x-3)^2}{3x}$$

Výpočet má smysl za podmínky, že $x \in \mathbf{R} - \{0\}$.

b) Společný jmenovatel je $(x+3)(x-3)x$, proto:

$$\frac{3-x}{x^2-9} + \frac{1}{x^2+3x} + \frac{1}{x} = \frac{3-x}{(x+3)(x-3)} + \frac{1}{x(x+3)} + \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{(3-x)\cdot x + 1\cdot(x-3) + 1\cdot(x+3)(x-3)}{(x+3)(x-3)x} = \frac{3x-x^2+x-3+x^2-9}{x(x+3)(x-3)} = \frac{4x-12}{x(x+3)(x-3)} =$$

$$= \frac{4(x-3)}{x(x+3)(x-3)} = \frac{4}{x(x+3)}$$

Výpočet má smysl za podmínky, že $x \in \mathbf{R} - \{-3; 0; 3\}$.

Odčítání lomených výrazů

Pro odčítání lomených výrazů nepotřebujeme znát žádné nové pravidlo, stačí pouze využít tvrzení pro součet lomených výrazů a výrazy vhodně upravit.

*

$$\frac{V_1}{V_2} - \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1}{V_2} + \frac{(-V_3)}{V_4} = \frac{V_1V_4 + (-V_3)V_2}{V_2V_4} = \frac{V_1V_4 - V_3V_2}{V_2V_4}$$

(Význam symbolů a podmínky jsou uvedeny v následujícím tvrzení.)

Pro libovolné výrazy V_1, V_2, V_3, V_4, přičemž pro všechny hodnoty proměnných je $V_2 \neq 0$, $V_4 \neq 0$, platí pro **rozdíl lomených výrazů:**

$$\frac{V_1}{V_2} - \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1 \cdot V_4 - V_3 \cdot V_2}{V_2 \cdot V_4}$$

Pro připomenutí ještě zdůrazněme, že znaménko "−" před lomeným výrazem se vztahuje k celému výrazu, což ilustruje následující příklad:

$$-\frac{x(x+1)-(x^2+1)+3x}{x+2}=\frac{-x(x+1)+x^2+1-3x}{x+2}$$

Příklad 4.12

Vypočítej:

a) $\frac{16}{2p^2-8p}-\frac{2}{p-4}$ b) $p-\frac{p^2-q}{p}$

Řešení

a) $\frac{16}{2p^2-8p}-\frac{2}{p-4}=\frac{16}{2p(p-4)}-\frac{2}{p-4}=\frac{16\cdot 1-2\cdot 2p}{2p(p-4)}=\frac{16-4p}{2p(p-4)}=\frac{4(4-p)}{2p(p-4)}=$

$=\frac{(-1)\cdot 4\cdot(-1)\cdot(4-p)}{2p(p-4)}=\frac{-4(p-4)}{2p(p-4)}=\frac{-4}{2p}$

Výpočet má smysl za podmínky, že $p\in\mathbf{R}-\{0;4\}$.

b) $p-\frac{p^2-q}{p}=\frac{p}{1}-\frac{p^2-q}{p}=\frac{p\cdot p-(p^2-q)\cdot 1}{p}=\frac{p^2-(p^2-q)}{p}=\frac{p^2-p^2+q}{p}=\frac{q}{p}$

Výpočet má smysl za podmínky, že $p\in\mathbf{R}-\{0\}$.

Při řešení úloh, ve kterých se objevují lomené výrazy, obvykle využíváme sčítání, násobení, vytýkání apod. Jelikož jsou lomené výrazy speciálním typem výrazů, lze je opět využít při řešení slovních úloh.

Příklad 4.13

Vypočítej:

a) $\left(\frac{2}{a+1}-\frac{4a}{a^2-1}\right)\cdot\left(\frac{1}{a}-1\right)$ b) $\frac{18a}{6a^2-6b^2}+\frac{\frac{ab-b^2}{a^3+a^2b+5a+5b}}{\frac{a^2-2ab+b^2}{3a^2+15}}$

Řešení

a) $\left(\frac{2}{a+1}-\frac{4a}{a^2-1}\right)\cdot\left(\frac{1}{a}-1\right)=\left(\frac{2}{a+1}-\frac{4a}{(a-1)(a+1)}\right)\cdot\left(\frac{1-1\cdot a}{a}\right)=\frac{2\cdot(a-1)-4a}{(a+1)(a-1)}\cdot\frac{1-a}{a}=$

$=\frac{2a-2-4a}{(a+1)(a-1)}\cdot\frac{1-a}{a}=\frac{-2a-2}{(a+1)(a-1)}\cdot\frac{1-a}{a}=\frac{-2(a+1)}{(a+1)(a-1)}\cdot\frac{(a-1)\cdot(-1)}{a}=\frac{-2}{1}\cdot\frac{-1}{a}=\frac{2}{a}$

Výpočet platí za podmínky, že $a\in\mathbf{R}-\{-1;0;1\}$.

$$\text{b) } \frac{18a}{6a^2-6b^2}+\frac{\dfrac{ab-b^2}{a^3+a^2b+5a+5b}}{\dfrac{a^2-2ab+b^2}{3a^2+15}}=\frac{18a}{6a^2-6b^2}+\frac{ab-b^2}{a^3+a^2b+5a+5b}\div\frac{a^2-2ab+b^2}{3a^2+15}=$$

$$=\frac{18a}{6(a^2-b^2)}+\frac{b(a-b)}{a^2(a+b)+5(a+b)}\cdot\frac{3a^2+15}{a^2-2ab+b^2}=\frac{3a}{a^2-b^2}+\frac{b(a-b)}{(a+b)(a^2+5)}\cdot\frac{3(a^2+5)}{(a-b)^2}=$$

$$=\frac{3a}{(a-b)(a+b)}+\frac{b\cdot 3}{(a+b)\cdot(a-b)}=\frac{3a+3b}{(a-b)(a+b)}=\frac{3(a+b)}{(a-b)(a+b)}=\frac{3}{a-b}$$

Výpočet platí za podmínky, že $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$ a zároveň $a \neq \pm b$.

Příklad 4.14

Slovní úloha

Předpokládejme, že se tuňákové konzervy běžně prodávají v balení po x kusech, přičemž cena za balení činí k Kč. V rámci mimořádné nabídky lze koupit za stejnou cenu větší balení, ve kterém je o y konzerv více než obvykle. Jakou částku lze využitím této akce ušetřit za každou tuňákovou konzervu?

Řešení

Ušetřenou částku (označíme ji u) vypočítáme jako rozdíl ceny za jednu konzervu bez slevy a ve slevě:

$$u=\frac{k}{x}-\frac{k}{x+y}=\frac{k\cdot(x+y)-k\cdot x}{x\cdot(x+y)}=\frac{kx+ky-kx}{x(x+y)}=\frac{ky}{x(x+y)}$$

Využitím mimořádné nabídky lze ušetřit $\dfrac{ky}{x(x+y)}$ Kč za jednu konzervu.

Cvičení k této části.

Cvičení - Rozšiřování lomených výrazů, jejich součet a rozdíl

Cvičení 4.16

Rozhodni, zda je výraz ve třetím sloupci společným násobkem předchozích dvou mnohočlenů:

	1. mnohočlen	2. mnohočlen	Společný násobek?			
a)	$4a(a+1)$	$2a^2(a+1)$	$4a^2(a+1)$	(•) ano	( ) ne	Správně!
b)	$9a^3(a-1)$	$3a(a-1)^2$	$9a(a-1)^2$	( ) ano	(•) ne	Správně!
c)	$a(a+1)$	$a^2(a-1)$	$a^2(a^2-1)$	(•) ano	( ) ne	Správně!
d)	$5(a^2+2a+1)$	$a(a+1)^2$	$5a(a+1)^2$	(•) ano	( ) ne	Správně!
e)	$4(a-2)^3$	$16(a^2-4a+4)$	$16(a-2)^2$	( ) ano	(•) ne	Správně!
f)	a^2-25	$a-5$	$(a-5)^2$	( ) ano	(•) ne	Správně!

Cvičení 4.17

Urči společný násobek daných mnohočlenů:

a) $25b^3(b+1)$ a $15b(b^2+2b+1)$

b) $64(b^2-81)$ a $8b(b+9)^2$

c) $18(a+3)b^3$ a $4(b+3)^2b$

Cvičení 4.18

Urči čitatele místo otazníku tak, aby platila rovnost:

a) $\dfrac{2x}{x-5} = \dfrac{?}{5-x}$

- $2x$
- $2-x$
- $-2x$

Správně! Rozšiřujeme výrazem (-1).

b) $\dfrac{x-3}{6-x} = \dfrac{?}{x-6}$

- $3-x$
- $-3-x$
- $-3+x$

Správně! Rozšiřujeme výrazem (-1).

c) $\dfrac{3+x}{2x+5} = \dfrac{?}{2x^2+5x}$

- $3+x^2$
- $3x+x$
- $3x+x^2$

Správně! Rozšiřujeme výrazem x.

d) $\dfrac{7}{x-1} = \dfrac{?}{x^2-1}$

- $7x$
- $7(x+1)$
- $7(x-1)$

Správně! Rozšiřujeme výrazem $(x+1)$.

e) $\dfrac{1}{x+2} = \dfrac{?}{(x+2)^2}$

- $x+2$
- $x-2$
- 1^2

Správně! Rozšiřujeme výrazem $(x+2)$.

Cvičení 4.19

Vhodným rozšířením uprav lomené výrazy tak, aby měly společného jmenovatele:

a) $\dfrac{1}{2-y}$, $\dfrac{2}{2+y}$ a $\dfrac{3}{y}$

b) $\dfrac{2+y}{y-5}$, $\dfrac{8}{y}$ a $\dfrac{14+y}{y^2-5y}$

c) $\dfrac{6}{y-3}$, $\dfrac{y-3}{2y+6}$ a $\dfrac{1+y}{y^2-9}$

Cvičení 4.20

Rozhodni, zda pro libovolné výrazy V_1, V_2, V_3, V_4, přičemž pro všechny hodnoty proměnných je $V_2 \neq 0$, $V_3 \neq 0$, $V_4 \neq 0$ a $V_3 \neq -V_4$, platí :

a) $\dfrac{V_1}{V_3}+\dfrac{V_2}{V_4}=\dfrac{V_1+V_2}{V_3+V_4}$	○ ano	◉ ne	Správně!
b) $\dfrac{V_1}{V_3}+\dfrac{V_2}{V_4}=\dfrac{V_1V_3+V_2V_4}{V_3V_4}$	○ ano	◉ ne	Správně!
c) $\dfrac{V_1}{V_3}-\dfrac{V_2}{V_4}=\dfrac{V_1V_4-V_2V_3}{V_3V_4}$	◉ ano	○ ne	Správně!
d) $\dfrac{V_1}{V_3}+V_2=\dfrac{V_1+V_2V_3}{V_3}$	◉ ano	○ ne	Správně!
e) $V_1-\dfrac{V_2}{V_3}=\dfrac{V_1-V_2}{V_3}$	○ ano	◉ ne	Správně!
f) $\dfrac{V_1}{V_3}-\dfrac{1}{V_2}=\dfrac{V_1V_2-V_3}{V_3V_2}$	◉ ano	○ ne	Správně!

Cvičení 4.21

Vypočítej:

a) $\dfrac{u+8}{u^2-2u}+\dfrac{4}{u}=$

b) $\dfrac{2u}{u+5}+\dfrac{10}{u-5}+2=$

c) $\dfrac{u-2}{u^2+2u+1}-\dfrac{3}{u^2+u}=$

d) $\dfrac{u+v}{v}-\dfrac{2u-v}{u+v}=$

e) $\dfrac{u+v}{u}+\dfrac{v^2}{u^2-uv}-\dfrac{u}{u-v}=$

f) $\dfrac{2}{u-1}-\dfrac{4u}{u^2-1}+\dfrac{u-1}{u+1}-1=$

Cvičení 4.22

Vypočítej:

a) $\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{y}\right)\div\left(\dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{y}\right)=$

b) $\left(\dfrac{x}{x+9}+\dfrac{1}{x+5}\right)^2\cdot\left(\dfrac{x+3}{x^2+5x+9x+45}\right)^{-3}=$

c) $\dfrac{x-\dfrac{2x-6}{x+2}}{3+\dfrac{x^2-3x}{x+2}}=$

d) $\dfrac{\dfrac{x+1}{y-3}-\dfrac{x-1}{y+3}}{\dfrac{x}{y-3}-\dfrac{x}{y+3}}=$

Cvičení 4.23

Slovní úloha

Pavel chce zlepšit svou fyzickou kondici, proto zvažuje, že každý den uplave x km. Během týdne navštěvuje sportovní centrum, ve kterém měří bazén m metrů, zatímco o víkendu chodí plavat do aquaparku, v němž je bazén o n metrů delší. O kolik bazénů více musí Pavel uplavat ve sportovním centru než v aquaparku, aby splnil svůj limit?

Cvičení 4.24

Slovní úloha

Jedním z ukazatelů životní úrovně obyvatelstva je hrubý domací produkt (HDP) na osobu. Zjednodušeně jej můžeme vypočítat jako podíl výše HDP a velikosti populace. HDP lze přitom chápat jako celkové výdaje jednotlivých sektorů (domácností, firem, státu) na nákup finálních statků a služeb.

Předpokládejme, že v zemi A i v zemi B činí výše HDP p stejných peněžních jednotek. Populace v zemi A čítá a osob, zatímco v zemi B žije o b obyvatel méně. Která země má vyšší životní úroveň?
O kolik vzhledem ke druhé zemi?

Cvičení 4.25

Vypočítej:

a) $$\frac{1-\dfrac{p^2+q^2}{p^2-q^2}}{\dfrac{p+q}{p-q}-\dfrac{p-q}{p+q}}\cdot\frac{(1-q)^2}{2q^2-q^3-q}=$$

$$=\left[\frac{1\cdot\left(p^2-q^2\right)-\left(p^2+q^2\right)}{p^2-q^2}\div\frac{(p+q)\cdot(p+q)-(p-q)\cdot(p-q)}{(p-q)(p+q)}\right]\cdot\frac{(1-q)^2}{q(2q-q^2-1)}=$$

$$=\frac{p^2-q^2-p^2-q^2}{p^2-q^2}\cdot\frac{(p-q)(p+q)}{\left(p^2+2pq+q^2\right)-\left(p^2-2pq+q^2\right)}\cdot\frac{(1-q)^2}{-q(q^2-2q+1)}=$$

$$=\frac{-2q^2}{(p-q)(p+q)}\cdot\frac{(p-q)(p+q)}{4pq}\cdot\frac{(1-q)^2}{-q(q-1)^2}=\frac{-q}{1}\cdot\frac{1}{2p}\cdot\frac{(1-q)(1-q)(-1)(-1)}{-q(q-1)^2}=$$

$$=1\cdot\frac{1}{2p}\cdot\frac{(q-1)^2}{(q-1)^2}=\frac{1}{2p}$$

Podmínky: $p\in\mathbf{R}-\{0\}$, $q\in\mathbf{R}-\{0;1\}$ a zároveň $p\neq\pm q$

b) $\dfrac{\dfrac{1-p}{1-p+p^2}+\dfrac{1+p}{1+p+p^2}}{\dfrac{1+p}{1+p+p^2}-\dfrac{1-p}{1-p+p^2}} \div \dfrac{\dfrac{p^2-2p+p-2}{p^2+2p+1}}{\dfrac{p^4-2p^3}{p+1}} =$

$$= \left[\frac{(1-p)\cdot(1+p+p^2)+(1+p)\cdot(1-p+p^2)}{(1-p+p^2)(1+p+p^2)} \div \frac{(1+p)\cdot(1-p+p^2)-(1-p)\cdot(1+p+p^2)}{(1+p+p^2)(1-p+p^2)}\right] \div$$

$$\div \left[\frac{p^2-2p+p-2}{p^2+2p+1} \div \frac{p^4-2p^3}{p+1}\right] =$$

$$= \left[\frac{1+p+p^2-p-p^2-p^3+1-p+p^2+p-p^2+p^3}{(1-p+p^2)(1+p+p^2)} \cdot \frac{(1+p+p^2)(1-p+p^2)}{1-p+p^2+p-p^2+p^3-1-p-p^2+p+p^2+p^3}\right] \div$$

$$\div \left[\frac{p(p-2)+p-2}{(p+1)^2} \cdot \frac{p+1}{p^3(p-2)}\right] =$$

$$= \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2p^3}\right) \div \left[\frac{(p-2)(p+1)}{(p+1)^2} \cdot \frac{p+1}{p^3(p-2)}\right] = \frac{1}{p^3} \div \frac{1}{p^3} = \frac{1}{p^3} \cdot \frac{p^3}{1} = 1$$

Podmínky: $p \in \mathbf{R} - \{-1; 0; 2\}$

4.4 Vyjádření neznámé ze vzorce

Vzorce se využívají nejen v matematice či fyzice, ale v podstatě ve všech vědních oborech. Ne vždy jsou ovšem uvedeny ve tvaru, který potřebujeme, proto je musíme vhodně upravit.

Chceme-li např. zjistit délku strany b obdélníku, jehož obsah S a délku strany a známe (např. $S = 20\ \mathrm{cm}^2$, $a = 4$ cm), nelze vzorec pro obsah $S = ab$ přímo použít. Můžeme ovšem do tohoto vzorce dosadit konkrétní hodnoty a následnými úpravami dojít k požadovanému výsledku:

$$20\ \mathrm{cm}^2 = 4\ \mathrm{cm} \cdot b \ \Rightarrow\ \frac{20}{4}\ \mathrm{cm} = b \ \Rightarrow\ b = 5\ \mathrm{cm}$$

Druhou možností je nejprve ze vzorce **vyjádřit** hledanou **neznámou** a až poté dosadit konkrétní hodnoty. Při vyjadřování neznámé ze vzorce přitom považujeme všechny ostatní proměnné za konstanty. V našem příkladě se tedy snažíme vyjádřit neznámou proměnnou b ze vzorce $S = ab$, ve kterém všechny další proměnné, tj. S a a, bereme jako konstanty:

$$S = ab \ \Rightarrow\ b = \frac{S}{a}$$

Po dosazení zadaných hodnot dostáváme:

$$b = \frac{20}{4}\ \mathrm{cm} \ \Rightarrow\ b = 5\ \mathrm{cm}$$

Druhá možnost je výhodnější, a to z několika důvodů. Za prvé, při změně konkrétních vstupních hodnot lze snadno přepočítat hodnotu hledané neznámé, např. pro $S = 28\ \mathrm{cm}^2$, $a = 7$ cm rychle zjistíme, že

$$b = \frac{28}{7}\ \mathrm{cm} \ \Rightarrow\ b = 4\ \mathrm{cm}.$$

V mnoha případech máme také od počátku zadané různé varianty konkrétních hodnot proměnných a vyjádření neznámé ze vzorce nám ušetří čas řešení. V neposlední řadě je také mnohdy užitečné vidět a zkoumat, jaká závislost platí mezi neznámou a ostatními proměnnými ve vzorci.

Vyjádření neznámé ze vzorce spočívá v osamostatnění hledané proměnné pomocí matematicky korektních úprav, přičemž všechny ostatní proměnné ve vzorci považujeme za konstanty.

Na vzorec lze nahlížet jako na rovnici. Korektní úpravy při vyjádření neznámé ze vzorce jsou tedy ekvivaletní úpravy rovnice.

Při vyjadřování neznámé ze vzorce využíváme pouze dříve získané matematické znalosti, zejména z kapitoly týkající se výrazů a lomených výrazů. Důležité je uvědomit si prioritu matematických operací. Při úpravách vzorců však platí stejná pravidla, jako při úpravách výrazů.

Příklad 4.15

Ze vzorce pro povrch S rotačního kužele $S = \pi r(r+s)$, kde r je poloměr jeho podstavy, vyjádři délku strany s kužele:

Řešení

V uvedeném vzorci považujeme povrch S a poloměr podstavy r kužele za konstanty. Iracionální číslo π, jehož přibližná hodnota činí $3,14$, je také konstantou (viz téma Výrazy). Pomocí postupných, matematicky korektních úprav, se snažíme osamostatnit neznámou s.

$$S = \pi r(r+s)$$
$$S = \pi r^2 + \pi rs$$
$$S - \pi r^2 = \pi rs$$
$$\frac{S - \pi r^2}{\pi r} = s$$

Poloměr r podstavy rotačního kužele je vždy kladné číslo, proto lze bez omezení dělit.

Vyjádření neznámé s ze vzorce pro povrch S kužele má tvar $s = \dfrac{S - \pi r^2}{\pi r}$.

Příklad 4.16

Obecný vzorec pro výpočet objemu V jehlanu je

$$V = \frac{1}{3} S_p \cdot v,$$

kde S_p značí obsah podstavy a v výšku jehlanu. Za předpokladu, že podstavu jehlanu tvoří pravidelný šestiúhelník o straně a, jehož obsah lze vyjádřit vztahem

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2,$$

doplň chybějící údaje v následující tabulce:

výška v (cm)	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$
objem V (cm^3)	$1,5$	6	27	75
strana a (cm)				

Řešení

Nejprve si vyjádříme ze vzorce neznámou a. Stačí si uvědomit, že dle zadání platí $S_p = S$. Poté upravujeme:

$$V = \frac{1}{3}S_p \cdot v = \frac{1}{3}S \cdot v$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 v$$

$$V = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 v$$

$$a^2 = \frac{2V}{\sqrt{3}v}$$

$$a = \sqrt{\frac{2V}{\sqrt{3}v}}$$

Nyní dopočítáme délku strany a pro konkrétní zadané hodnoty. Například pro výšku $v = \sqrt{3}$ cm a objem jehlanu $V = 1,5\ \mathrm{cm}^3$ platí pro délku strany a:

$$a = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,5}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}}\ \text{cm} = \sqrt{\frac{3}{3}}\ \text{cm}$$

$$a = 1\ \text{cm}$$

výška v (cm)	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$
objem V (cm^3)	$1,5$	6	27	75
strana a (cm)	1	2	3	5

Cvičení k této části.

Cvičení - Vyjádření neznámé ze vzorce

Cvičení 4.26

Vzorec pro objem V válce lze zapsat ve tvaru

$$V = \frac{\pi d^2}{4} v,$$

kde v značí výšku válce a d průměr jeho podstavy. Rozhodni, zda lze z tohoto vzorce odvodit následující vztahy:

a) $V = \frac{1}{4}\pi v d^2$	(•) ano	( ) ne	Správně!
b) $v = \frac{V}{4\pi d^2}$	( ) ano	(•) ne	Správně!
c) $v = V \div \frac{\pi d^2}{4}$	(•) ano	( ) ne	Správně!
d) $d^2 = \frac{V}{v} \cdot \frac{4}{\pi}$	(•) ano	( ) ne	Správně!
e) $d = 2\sqrt{\frac{V}{\pi v}}$	(•) ano	( ) ne	Správně!

Cvičení 4.27

Ze vzorce pro povrch S kvádru $S = 2(ab + ac + bc)$, kde a, b, c jsou strany kvádru, vyjádři stranu c:

Cvičení 4.28

Ve fyzice se lze v rámci tématu optika setkat s tzv. zobrazovací rovnicí vyjadřující vzájemné vztahy mezi vzdáleností předmětu a, vzdáleností jeho obrazu a' a ohniskovou vzdáleností f od čočky, která má tvar:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}$$

Na základě uvedeného vzorce doplň chybějící údaje v tabulce:

předmětová vzdálenost a (cm)	20	18	4	12
ohnisková vzdálenost f (cm)	15	12	2	16
obrazová vzdálenost a' (cm)				

Cvičení 4.29

Rovnoměrně zpomalený pohyb hmotného bodu lze popsat následujícími rovnicemi:

$$(1)\ s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2 \quad (2)\ v = v_0 - at$$

Vyjádři závislost času t na dráze s a počáteční rychlosti v_0 za předpokladu, že konečná rychlost v je nulová (proměnná a značí zrychlení):

Cvičení 4.30

Odborníci pracují v rámci geografie služeb s tzv. Reillyho modelem, který zjednodušeně tvrdí, že poměr atraktivity dvou měst z hlediska nákupních příležitostí je pro dojíždějící zákazníky přímo úměrný podílu počtu obyvatel těchto měst a nepřímo úměrný podílu vzdáleností, kterou musí zákazníci překonat.
Díky tomuto modelu lze mimo jiné vymezit bod rovnováhy mezi městy I a J, tj. maximální vzdálenost d_{xj} od města J, ze které jsou ochotni zákazníci přijet do tohoto města na nákupy, a to podle vzorce

$$d_{xj} = \frac{d_{ij}}{1 + \sqrt{\frac{P_i}{P_j}}},$$

kde P_i značí počet obyvatel města I, P_j počet obyvatel města J a d_{ij} vzdálenost mezi těmito městy. Vyjádři z tohoto vzorce vztah pro počet obyvatel města I a následně rozhodni, při které variantě A až F v tabulce nabývá neznámá P_i nejmenší hodnoty:

Varianta	A	B	C	D	E	F
P_j	8 000	8 000	8 000	8 000	8 000	8 000
d_{xj} (km)	100	50	100	50	100	50
d_{ij} (km)	160	160	140	140	120	120

Nejprve si ze vzorce vyjádříme neznámou P_i.

$$d_{xj} = \frac{d_{ij}}{1 + \sqrt{\frac{P_i}{P_j}}}$$

$$d_{xj} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{P_i}{P_j}}\right) = d_{ij}$$

$$1 + \sqrt{\frac{P_i}{P_j}} = \frac{d_{ij}}{d_{xj}}$$

$$\sqrt{\frac{P_i}{P_j}} = \frac{d_{ij}}{d_{xj}} - 1$$

$$\frac{P_i}{P_j} = \left(\frac{d_{ij}}{d_{xj}} - 1\right)^2$$

$$P_i = \left(\frac{d_{ij}}{d_{xj}} - 1 \right)^2 \cdot P_j$$

Pro určení varianty, při které nabývá neznámá P_i nejmenší hodnoty při konstantní hodnotě P_j , není potřeba dosazovat do vztahu všechny hodnoty z tabulky. Stačí si pořádně prohlédnout vztah pro P_i . Lze z něj vyčíst, že hodnota P_i bude tím menší, čím více se bude poměr $\frac{d_{ij}}{d_{xj}}$ blížit 1. Na základě těchto úvah je jasné, že nejmenší hodnoty nabývá neznámá P_i ve variantě E.

Ovládání stránek

Webové stránky obsahují pro větší přehlednost řadu grafických prvků. Učební texty využívají například barevné rámečky pro odlišení jednotlivých částí textu. V modrém rámečku jsou uvedeny definice, oranžový rámeček je určen pro důležitá tvrzení a vztahy. Poznámky mají šedou barvu rámečku.

V celé práci se navíc objevuje 5 druhů tlačítek. Po kliknutí na příslušné tlačítko se:

 zobrazí první nebo další krok řešení cvičení

 zobrazí všechny kroky řešení cvičení

 skryje řešení cvičení

 odkryje nebo skryje rozšiřující učivo

 odkryje nebo skryje celé řešení cvičení

Kromě těchto tlačítek se v práci objevují další dva druhy cvičení. Obsahují vždy i řešení, jak ilustrují ukázky:

Přiřaď:

	$\frac{1}{16}$	8	0	$\frac{1}{27}$	1	$\frac{1}{3}$	-1	
a) $1^6 =$	○	○	○	○	◉	○	○	**Správně!**
b) $(-1)^{17} =$	○	○	○	◉	○	○	○	**Chybně!**

Rozhodni, zda se jedná o kladné číslo:

a) 9^3	◉ **ano**	○ **ne**	 **Správně!**
b) $(-9)^3$	◉ **ano**	○ **ne**	 **Chybně!**

Seznam použitých matematických symbolů a značek

$\neq$	nerovná se, je různé od
$\div$	podíl
$\pm$	plus nebo mínus
$a < b$	číslo a je menší než číslo b
$a \leq b$	číslo a je menší nebo rovno číslu b
$a > b$	číslo a je větší než číslo b
$a \geq b$	číslo a je větší nebo rovno číslu b
$a \wedge b$	konjunkce, čteme "a a zároveň b"
$a \vee b$	disjunkce, čteme "a nebo b"
$\{a\}$	množina obsahující prvek a
$a \in \mathbf{A}$	a je prvkem množiny $\mathbf{A}$
$\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$	průnik množin $\mathbf{A}, \mathbf{B}$
$\mathbf{N}$	obor přirozených čísel; množina všech přirozených čísel
$\mathbf{Z}$	obor celých čísel; množina všech celých čísel
$\mathbf{Q}$	obor racionálních čísel; množina všech racionálních čísel
$\mathbf{R}$	obor reálných čísel; množina všech reálných čísel
$\lvert a \rvert$	absolutní hodnota čísla a
a^n	n-tá mocnina čísla a
$\sqrt{a}$	druhá odmocnina z čísla a
$\sqrt[n]{a}$	n-tá odmocnina z čísla a
%	procento
$\forall$	obecný kvatifikátor, čteme "pro všechna"
$\exists$	existenční kvantifikátor, čteme "existuje"
$D(a)$	množina všech dělitelů čísla a
$NSD(a, b)$	největší společný dělitel čísel a, b
$N(a)$	množina všech násobků čísla a
$nsn(a, b)$	nejmenší společný násobek čísel a, b
V_n	výraz
π	Ludolfovo číslo

Rejstřík

Závěr

Náročnost středoškolské matematiky pro žáky lze vidět v tom, že na sebe jednotlivé partie matematiky navazují. Osvojení znalostí a dovedností týkajících se základních matematických poznatků je totiž nutný předpoklad pro úspěšné zvládnutí učiva vyšších ročníků. K osvojení zmíněných znalostí a dovedností žák potřebuje především píli a otevřenou mysl. Usnadnit studium však může vhodný výukový materiál, který disponuje nejen odbornou a didaktickou kvalitou, ale také atraktivní formou zpracování.

Pro současnou generaci žáků představují počítače, tablety a další moderní technologie běžnou součást života. Na tuto skutečnost je třeba reagovat i při tvorbě nových učebních materiálů. Přestože lze na internetu najít celou řadu webových stránek zabývajících se mocninami, mnohočleny či lomenými výrazy, jen málo z nich lze doporučit. Některé totiž nevyhovují kvůli chybám v řešení příkladů, nesprávné terminologii či jsou pouze statickým materiálem, který oproti tištěným učebnicím neposkytuje žádnou přidanou hodnotu.

Z těchto důvodů bylo cílem diplomové práce vytvořit interaktivní webové stránky, které budou sloužit jako výukový materiál zaměřený na základní poznatky z matematiky na střední škole. Podle mého názoru se podařilo tento cíl splnit, vytvořené webové stránky umožňují osvojení si učiva o mocninách a odmocninách, mnohočlenech a lomených výrazech, a to prostřednictvím formy, která je pro uživatele přínosná a atraktivní (vizualizace učiva, interaktivita, okamžitá zpětná vazba). Webové stránky, které by měly být v budoucnu začleněny na Portál středoškolské matematiky, jsou dočasně dostupné z adresy:

www.karlin.mff.cuni.cz/~pavlv7an/vladka

V průběhu psaní diplomové práce jsem narazila na celou řadu potíží, které jsem musela překonat. Tato práce vznikla jako rozšíření bakalařské práce na obdobné téma, původně napsané texty však bylo potřeba důkladně zrevidovat, upravit a zejména přepsat do formátu, který odpovídá Portálu. V rámci psaní webové stránky jsem si proto prohloubila znalosti týkající se html kódu. Zároveň jsem se seznámila s LATEXem, který pro mě, studentku oboru Učitelství geografie a matematiky pro SŠ, byl novinkou. V neposlední řadě jsem si uvědomila, jak obtížné může být zavést některé základní matematické pojmy tak, aby bylo vyjádření stručné a jednoduché, ale zároveň správné.

Cílem práce bylo provést didaktickou analýzu učiva a vytvořit takový výukový materiál, který usnadní žákům zejména prvního ročníku střední školy studium matematiky. Práce proto obsahuje množství původních cvičení, při jejichž vymýšlení jsem se inspirovala v uvedené literatuře.

Vzhledem k pozitivním ohlasům na bakalářskou práci obdobného zaměření, kterých se mi dostalo od kolegů již působích na školách, věřím, že i předkládáná diplomová práce bude pro žáky přínosná. Myslím si, že interaktivní forma zpracování, stejně jako dostupnost práce online a bez omezení, má potenciál žáky zaujmout a tím zvýšit jejich motivaci pro studium matematiky.

Seznam použité literatury

Bibliografické zdroje

- Bušek, I., Calda, E.: *Matematika pro gymnázia. Základní poznatky z matematiky*. Praha: Prometheus, 2002.
- Janeček, F.: *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy. Výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy*. Praha: Prometheus, 1997.
- Kubát, J.: *Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Prometheus, Praha, 2004.
- Odvárko, O.: *Základní poznatky. Matematika pro střední odborné školy*. Praha: Prometheus, 2012.
- Petáková, J. *Matematika: příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Praha: Prometheus, 2003.
- Polák, J.: *Přehled středoškolské matematiky*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1991.
- Rosická, M., Eliášová, L.: *Sbírka příkladů z matematiky k přijímacím zkouškám na VŠE*. Praha: EKOPRESS, 2002.
- Rybička, J.: *LATEX pro začátečníky*. Brno: Konvoj, 2003.
- Toušek, V., Kunc, J., Vystoupil J. a kol.: *Ekonomická a sociální geografie*. Plzeň: Aleš Čeněk, 2008.

Elektronické zdroje

- Nesnesitelně snadná matematika. Dostupné z adresy http://www.e-matematika.cz/.
- Matematika.cz. Dostupné z adresy http://www.matematika.cz/.
- Matematika pro každého. Dostupné z adresy http://maths.cz/.
- Aristoteles.cz. Dostupné z adresy http://www.aristoteles.cz/matematika/matematika.php.
- Krynický, M. Elektronické učebnice matematiky a fyzky. Dostupné z adresy www.realisticky.cz.
- Středoškolská matematika. Dostupné z adresy http://scar.borec.cz/matika/strdsk/.

- Martišek, D., Faltusová: Matematika. Příručka pro přípravu k přijímacím zkouškám. Dostupné z adresy http://www.zam.fme.vutbr.cz/~martisek/Vyuka.htm.
- Matematika pro každého online. Dostupné z adresy http://matematika-online-a.kvalitne.cz/.
- Turzík, D., Dubcová, M., Pavlíková, P.: E-sbírka příkladů. Seminář z matematiky. Dostupné z adresy http://www.vscht.cz/mat/ZMb/e-ZMproB.pdf.
- Math is fun. Dostupné z adresy http://www.mathsisfun.com.
- All Elementary Mathematics. Dostupné z adresy http://www.bymath.com.
- Interactive Mathematics. Dostupné z adresy http://www.intmath.com/.

Seznam tabulek

Seznam obrázků

Nakládání s prací

Souhlasím s vystavením své práce na webových stránkách Katedry didaktiky matematiky MFF UK v Praze. Dále souhlasím s jejími pozdějšími úpravami za účelem jejího zapojení do struktury matematického portálu, který vznikne z této a podobných diplomových prací. Portál vytvoří a bude spravovat právě a jedině Katedra didaktiky matematiky MFF UK, či osoba jí pověřená.

Vladimíra Pavlicová