

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Bc. Michal Zamboj

Matematická teorie žonglování

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: MDUSSS

Praha 2014

Rád by som z celého srdca poďakoval a cítim sa zviazaný vedúcemu mojej diplomovej práce RNDr. Antonínovi Slavíkovi, Ph.D., ktorý s entuziazmom podporoval výber tejto témy a najmä za cenné rady a početné pripomienky pri vypracovaní. Moja vďaka ďalej patrí mojej manželke a rodine, ktorá pri mne stála počas písania práce a výrazne ma podporovala počas štúdia. V neposlednom rade sa chcem poďakovať aj celej žonglérskej komunite za inšpiráciu a záujem o moju prácu.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona

V dne

.....

Název práce: Matematická teorie žonglování

Autor: Bc. Michal Zamboj

Katedra / Ústav: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.

Abstrakt: Diplomová práce je rozšířením stejnojmenné bakalářské práce. Věnuje se grafickému zobrazení žonglovací posloupnosti pomocí cyklického diagramu. Užitím Burnsideovy věty a cyklických diagramů je nalezen počet všech generátorů žonglovacích posloupností. Dále je popsán vztah žonglování a teorie vrkočů. Z empirického zkoumání trajektorií míčků je vytvořen matematický model vnitřních a vnějších hodů. Na reálném modelu žebříku jsou vytvořené vrkoče žonglovacích posloupností a zkoumané jejich vlastnosti. Rovněž je načrtnut důkaz věty o žonglovatelnosti libovolného vrkoče.

Klíčová slova: žonglování, posloupnost, siteswap, vrkoč, diagram

Title: The mathematical theory of juggling

Author: Bc. Michal Zamboj

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.

Abstract: This diploma thesis extends the bachelor thesis of the same name. It deals with the graphic representation of juggling sequences by the cyclic diagram. Using the Burnside theorem and cyclic diagrams, we calculate the number of all generators of juggling sequences. The relation between juggling and the theory of braids is described as well. The mathematical model of inside and outside throws is made from an empirical observation of trajectories of balls. Braids of juggling sequences and their attributes are provided using a real model of ladder. A sketch of the proof of the theorem that any braid is juggleable is given as well.

Keywords: juggling, sequence, siteswap, braid, diagram

Názov práce: Matematická teória žonglovania

Autor: Bc. Michal Zamboj

Katedra / Ústav: Katedra didaktiky matematiky

Vedúci diplomovej práce: RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.

Abstrakt: Diplomová práca je rozšírením bakalárskej práce rovnomeného názvu. Venuje sa grafickému zobrazeniu žonglovacej postupnosti pomocou cyklického diagramu. Užitím Burnsideovej vety a cyklických diagramov je nájdený počet všetkých generátorov žonglovacích postupností. Ďalej je popísaný vzťah žonglovania a teórie vrkočov. Z empirického skúmania trajektórií loptičiek je vytvorený matematický model vnútorných a vonkajších hodov. Na reálnom modeli rebríku sú vytvorené vrkoče žonglovacích postupností a skúmané ich vlastnosti. Taktiež je načrtnutý dôkaz vety o žonglovateľnosti ľubovoľného vrkoču.

Kľúčové slová: žonglovanie, postupnosť, siteswap, vrkoč, diagram

Obsah

Úvod	1
1 Siteswapový zápis	3
1.1 Prosté žonglovanie	4
1.2 Žonglovacia postupnosť a funkcia	5
1.3 Grafické skúšky platnosti siteswapu	20
1.3.1 Základný diagram	20
1.3.2 Rebríkový diagram	21
1.3.3 Cyklický diagram	22
1.3.4 Cyklický diagram s ohodnotenými hranami výškami hodov . .	23
1.4 Generovanie siteswapov	25
1.4.1 Operácie so siteswapmi	25
1.4.2 Vyhľadovací algoritmus	28
1.5 Počet žonglovacích postupností	30
1.5.1 Vlastnosti generátorov žonglovacích postupností	31
1.5.2 Burnsideova veta	35
1.5.3 Počet generátorov žonglovacích postupností	38
1.5.4 Počet žonglovacích postupností	49
2 Žonglovacie vrkoče	54
2.1 Vnútorne a vonkajšie hody	56
2.2 Úvod do matematickej teórie vrkočov	61
2.3 Vrkoče a žonglovanie	68
2.3.1 Vrkoče siteswapov	68
Záver	83
Zoznam použitých zdrojov	84
Zoznam príloh	87

Úvod

Táto diplomová práca vznikla ako pokračovanie práce bakalárskej s rovnomeným názvom. Pojednáva o matematických súvislostiach a princípoch v žonglovaní a prehlbuje tak pomerne mladú „Matematickú teóriu žonglovania“.

V záujme súvislosti textu boli z bakalárskej práce prevzaté s minimálnymi korekciami a kontextovými úpravami nasledovné časti: 1.1, 1.2, 1.3.1, 1.3.2, 1.4.1, 1.4.2, 1.5.4. Nové časti prvej kapitoly sú venované znázorneniu žonglovania pomocou cyklického diagramu, z toho vyplývajúcim generujúcim vlastnostiam a prepojeniam na teóriu grafov. Podstatnú časť textu prvej kapitoly tvorí výpočet všetkých generátorov žonglovacích postupností predpísanej dĺžky pomocou Burnsideovej vety. Tú vopred stručne pripomíname, aby bol text zrozumiteľný i pre čitateľa bez predošlých znalostí v tejto oblasti.

Druhá kapitola poukazuje na silné väzby medzi žonglovaním a teóriou uzlov, obzvlášť špeciálneho prípadu vrkočov. Na množstve praktických príkladov podáva matematickú definíciu pohybu loptičiek pri prevádzaní vnútorných a vonkajších hodov. Pre hlbšie skúmanie žonglovacích postupností je užitočný pojem vrkočovej grupy a jej generátorov. Za použitia rebríkového diagramu a jeho reálneho modelu sú popísané vzťahy medzi siteswapmi a vrkočmi. Na záver je uvedený náznak dôkazu vety, že každý uzol sa dá teoreticky žonglovať pomocou žonglovacích postupností.

Všetky použité žonglovacie postupnosti sú simulované v *Juggling Lab 0.6.1*. Na vytvorenie diagramov bol využitý software *Wolfram Mathematica 9 for Students*. Pre ďalšie grafické úpravy boli využité programy *Geogebra 4.2* a *GIMP 2.8.3*.

Motiváciou k vytvoreniu a rozširovaniu tejto práce bola, okrem osobného zánietenia v žonglovaní, najmä komplexnosť žonglovania ako javu a zároveň jeho priehľadnosť pri matematických aplikáciách. Okrem vzájomného prispievania žonglovania a matematiky k ich samostatnému rozvoju je žonglovanie možné použiť ako di-

daktickú metódu pre rozvoj intelektuálnej i fyzickej stránky súčasne. Atraktívnosť žonglovania a jeho matematických vlastností je okrem iného i vhodným nástrojom pre popularizáciu matematiky.

1 Siteswapový zápis

Napriek tomu, že pojem žonglovanie chápeme obširnejšie, jeho matematické skúmanie viac odpovedá lexikografickej definícii vyhadzovania väčšieho počtu predmetov. Nie však úplne, nakoľko budeme popisovať aj žonglovanie s jedným, s dvoma, alebo dokonca so žiadnym objektom v triviálnom prípade. Za objekt si zvolíme loptičku, akýkoľvek iný predmet by vlastnosti popisu nezmenil. Zavedieme si ideálny matematický model, v ktorom budeme veľké množstvo fascinujúcich žonglérskych kúskov vynechávať. Žonglér bude vyhadzovať a chytať loptičky vždy z rovnakého miesta v priestore a budeme sa vyhýbať rozdielnosti pri hodoch za chrbtom, popod nohu a podobne. Celý priebeh žonglovania zapíšeme postupnosťou, z ktorej vieme jednoznačne zistiť o aké žonglovanie ide, aký vzor žonglér hádže a počet loptičiek v danom žonglovaní. Každý člen postupnosti bude popisovať hod loptičky a pozícia tohto člena bude označovať daný úder - moment v čase. Pre jednoduchosť zavedieme čas na vyhodenie, chytenie a čas medzi chytením a následným vyhodením ako nulový. Hody sú vykonávané vždy v nejaký časový moment, ktorý nazveme úder. Zaujímavým pozorovaním je, že medzi jednotlivými údermi vo všeobecnosti nemusí byť rovnaký časový rozdiel. My však tento časový rozdiel budeme pre jednoduchosť považovať za konštantnú jednotku času. Tento princíp je veľmi prirodzený a názorný, ukážeme si, že žongléri tak napríklad číslom 3 vyjadrujú klasickú kaskádu s tromi loptičkami.

Definícia 1.1. Každému hodu priradíme číslo $h \in \mathbb{N}_0$ tak, že h označuje počet úderov v čase, za ktoré loptička dopadne. Číslo h nazveme *výška hodu*.

Výška hodu $h = 1$ teda znamená, že loptička dopadne za 1 úder. Výška hodu 0 znamená, že žiadna loptička v ruke nie je (nedopadla), a preto sa nevykoná žiaden hod na daný úder.

Akékoľvek ďalšie fyzikálne javy ako ojazdná výška hodu a rýchlosť loptičky, nás nebudú zaujímať a vplyvy ako gravitačné zrýchlenie a podobne budeme zane-

dbávať. Navyše budeme predpokladať, že žonglér vždy žongloval a bude žonglovať do nekonečna. Predídeme tak neprijemnostiam pri začiatku a konci žonglovania, keď má žonglér v rukách viac loptičiek. Definície a vety tejto kapitoly sa opierajú predovšetkým o článok BUHLER - EISENBUD - GRAHAM - WRIGHT (3) a publikáciu POLSTER (16).

1.1 Prosté žonglovanie

Pre jednoduchosť začneme s popisom žonglovania, pri ktorom žonglér vždy vyhodí nanaajvyš jednu loptičku na každý úder. Takéto žonglovanie nazveme *prosté*.

Definícia 1.2. Vlastnosti *prostého* žonglovania:

- (i) Loptičky sú žonglované do konštantných úderov, a teda začiatky hodov odpovedajú diskretným momentom v čase.
- (ii) Uvažujeme, že žonglér vždy žongloval a nikdy neprestane.
- (iii) Na každý úder je chytená a hodená najviac jedna loptička. Ak je loptička chytená, je následne aj hodená.

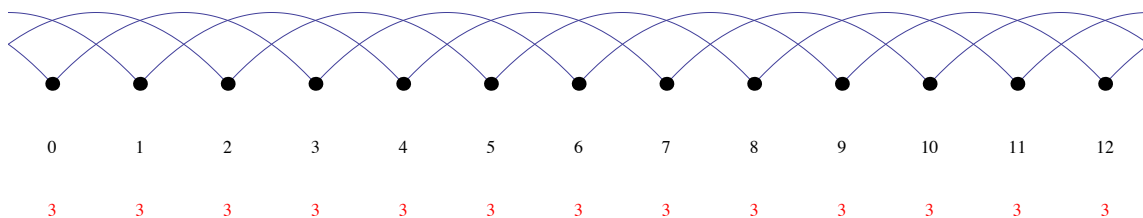
V tomto okamihu je vhodné si uvedomiť, že nami popísané žonglovanie je nezávislé na počte rúk. Môžeme predpokladať, že žonglér vyhadzuje každú loptičku z jednej a tej istej ruky. Bežný žonglér však žongluje dvomi rukami, a preto je pre názornosť dobré si predstaviť, že na každý úder prebieha hod z inej ruky. Pri hode o nepárnej výške teda vyhadzujeme loptičku z jednej ruky a po danom počte úderov dopadne do ruky druhej. Naopak pri párnych výškach hodov vyhadzujeme i chytáme loptičku do rovnakej ruky.

1.2 Žonglovacia postupnosť a funkcia

Žongléri obyčajne popisujú siteswapmi jednotlivé triky - vzory. Siteswap je jednoduchá postupnosť výšok hodov¹ a skúsení žongléri dokážu v mysli, v priebehu žonglovania, bez problémov skladať tieto postupnosti čísel za sebou tak, ako im to vyhovuje. Na druhú stranu, vznik siteswapov podnietil vývoj nových trikov v žonglovaní. Taktiež je tento popis prínosný pri tréningu, pretože žonglér, uvedomujúc si rytmus, dokáže časom pomerne presne hodiť konkrétnu „výšku“. Napríklad pri žonglovaní so štyrmi loptičkami sa môže učiť hody pre šesť loptičiek. Ukážeme si, ako sa takáto postupnosť konštruuje, a čo pre ňu musí platiť, aby spĺňala jednotlivé podmienky žonglovania. Následne si vyjadríme počet loptičiek, s ktorými žonglujeme pri danej postupnosti. Na jednoduchom diagrame si znázorníme priebeh žonglovania.

Veźmime si konštantnú postupnosť hodov o výške 3 na každý úder (Obrázok 1).

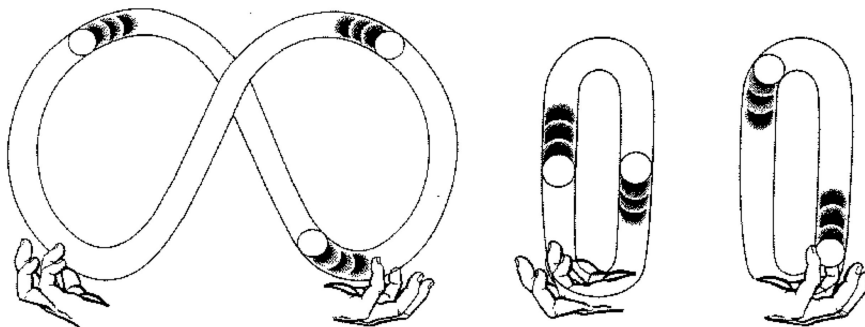
...33333...



Obr. 1: Kaskáda s tromi loptičkami.

Každá loptička, ktorá dopadne je znovu vyhodená a dopadne za 3 údery. V žonglovaní tejto postupnosti sú 3 loptičky, pretože medzi vyhodením a dopadom jednej loptičky prebehnú 2 ďalšie údery, na ktoré dopadnú a do výšky 3 budú vyhodené

¹V žonglovaní sa výšky hodov väčšie ako 9 obyčajne označujú malými písmenami latinskej abecedy ($10 = a, 11 = b, \dots$). Je to z toho dôvodu, že napríklad číslo 11, by sme mohli interpretovať v postupnosti ako dva hody o výške 1, preto miesto 11 píšeme b . Hody, ktoré by presiahli abecedu sa zvyčajne nevyskytujú v reálnych prípadoch. Táto konvencia platí aj pre žonglérsky software.



Obr. 2: Kaskáda s 3 a fontána so 4 loptičkami, pri pohľade na žongléra spredu.

Zdroj: www.cecm.sfu.ca/organics/papers/buhler/paper/html/

2 loptičky. Konštantnú postupnosť o výške všetkých hodov n nazývame *triviálna* a číslo n zároveň odpovedá počtu loptičiek v našom žonglovaní.

Žongléri nazývajú takéto žonglovanie pre nepárne výšky hodov *kaskáda*² a pre párne výšky *fontána*³ (Obrázok 2). Plyní to z toho, že pri žonglovaní dvomi rukami sa na každý úder strieda ruka, z ktorej loptičky vyhadzujeme. Pri kaskáde žonglér hádže loptičky oblúkmi vždy do druhej ruky a pri fontáne dopadne loptička do ruky, z ktorej bola vyhodaná. Kaskáda je prvý žonglérsky vzor, ktorý sa učia začínajúci žongléri. Taktiež vždy, keď sa žonglér pri svojom tréningu učí žonglovať viac loptičiek, začína kaskádou alebo fontánou.

Doporučujeme čitateľovi použiť software *Juggling Lab*⁴, ktorý okrem iného simuluje žonglovanie vstupnej postupnosti.

Definícia 1.3 (Prostá žonglovacia funkcia). Nech je daná funkcia $\psi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}_0$, ktorá $\forall i \in \mathbb{Z}$ priradí výšku hodu $\psi(i)$. Ďalej definujme *dopadovú* funkciu $\bar{\psi} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tak, že $\bar{\psi}(i) = i + \psi(i)$. Ak $\bar{\psi}$ je permutáciou celých čísel, hovoríme, že ψ je *prostá žonglovacia funkcia* a nekonečná postupnosť:

$$\dots \psi(-3)\psi(-2)\psi(-1)\psi(0)\psi(1)\psi(2)\psi(3) \dots$$

môže byť žonglovaná.

²Príloha A - /siteswapy/01_kaskada.jml

³Príloha A - /siteswapy/01_fontana.jml

⁴*Juggling Lab* je priložený na CD médiu, viď Príloha A, alebo je možné ho spustiť online na <http://jugglinglab.sourceforge.net/>. V tom prípade odporúčame čitateľovi vybrať „Full Applet“, do poľa „Pattern“ sa vkladá žonglovacia postupnosť

Rozdeľme žonglovanie na menšie časti a budeme skúmať jednotlivé vzory, sekvencie hodov, ktoré žonglér vykonáva. V ďalšom texte sa budeme venovať konečným postupnostiam a vlastnosť (ii) zachováme tým, že postupnosť sa bude periodicky opakovať.

Definícia 1.4 (Prostá žonglovacia postupnosť (siteswap)). Nech $\{h_k\}_{k=0}^{p-1}$ je konečná postupnosť nezáporných celých čísel, potom táto postupnosť sa nazýva *prostá žonglovacia postupnosť*, alebo *siteswap* práve vtedy, keď funkcia $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}_0$, ktorá priradí $\forall i \in \mathbb{Z} : \phi(i) = h_{i \bmod p}$, je prostá žonglovacia funkcia.

Siteswap zapisujeme v tvare:

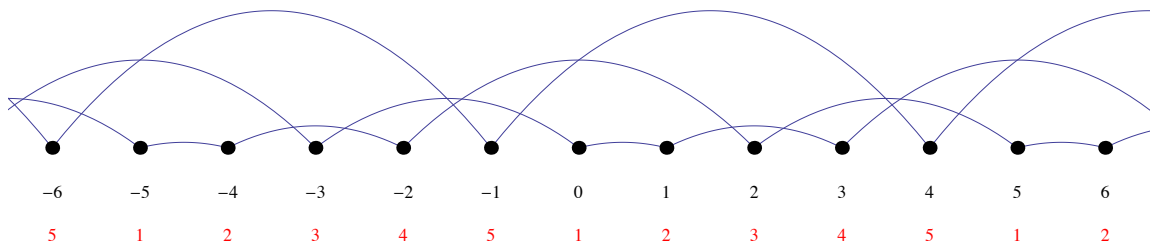
$$h_0 h_1 \dots h_{p-1}$$

Je zrejmé, že každá prostá žonglovacia postupnosť je tvorená prostou žonglovacou funkciou. Naopak to však neplatí. Nie každá prostá žonglovacia funkcia vznikne z prostej žonglovej postupnosti (siteswapu).

Príklad 1.1. Majme danú postupnosť hodov $\{h_i\}_{i=0}^{p-1}$, kde $p = 5$ a $h_i = i + 1$ (Obrázok 3).

$$\begin{array}{cccccc} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \end{array}$$

Vytvorili sme postupnosť hodov⁵, ktoré spĺňujú vlastnosti prostého žonglovania. Táto postupnosť zároveň spĺňa definíciu žonglovej postupnosti. Nekonečné žonglovanie



Obr. 3: Siteswap 12345.

⁵Príloha A - /siteswapy/02_12345.jml

dostaneme periodickým opakovaním tejto postupnosti.

Príslušná žonglovacia funkcia je $\phi(i) = h_{i \bmod p}$:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \dots & h_{-3} & h_{-2} & h_{-1} & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & \dots \\ \dots & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \end{array}$$

Dopadová funkcia $\bar{\phi}(i) = \phi(i) + i$ je permutáciou celých čísel:

$$\dots 0 \ 2 \ 4 \ 1 \ 3 \ 5 \ 7 \ 9 \ 6 \ 8 \ 10 \ \dots$$

Všimnime si, že aj postupnosť:

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5$$

je žonglovacou postupnosťou a prináleží jej rovnaká žonglovacia funkcia, vzhľadom na periódu.

Definícia 1.5. Žonglovaciú postupnosť, ktorá má najmenšiu periódu pri jej žonglovaní nazveme *minimálna žonglovacia postupnosť*, alebo *žonglovací vzor*, či len *vzor*.

Na zápis žonglovacej postupnosti nám postačí jej vzor, ktorým je postupnosť jednoznačne daná a periodicky sa opakuje.

Definícia 1.6. Všetky hody jednej loptičky v daných úderoch vytvárajú *orbitu* danej loptičky.

Každá loptička v našom žonglovaní je nekonečne mnoho krát chytená a žonglovaná. Orbita je v diagrame znázornená naväzujúcimi oblúkmi.

Veta 1.1 ((16), s. 10). *Počet orbít je rovný počtu loptičiek v žonglovaní.*

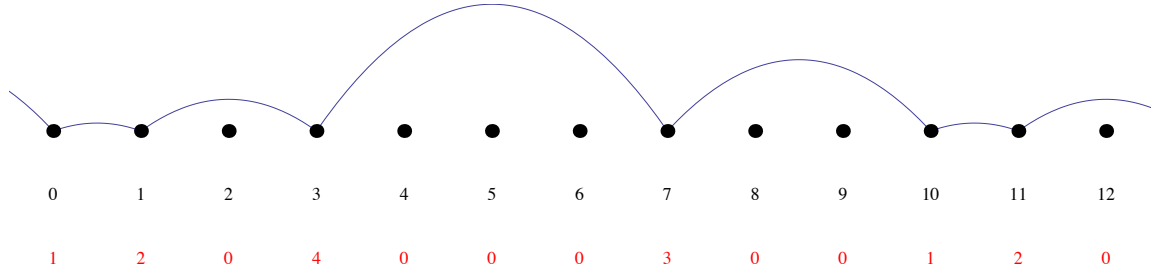
Dôkaz. Dôkaz plyní priamo z definície orbity. □

Príklad 1.2 (Obrázky 4,5 a 6). V našom príklade žonglovacej postupnosti 12345 vidíme že loptička, ktorá dopadne na úder 0 je hodená do výšky 1 a dopadne na úder 1, následne je hodená do výšky 2 a dopadne na úder 3, vyhodená je do výšky 4, a dopadne na úder 7, v ktorom je vyhodená do výšky 3 a dopadne na úder 10, v ktorom

je vyhodená opäť do výšky 1 a hody v jej orbite sa ďalej opakujú. Podobnú, akurát posunutú orbitu opisuje loptička, ktorá dopadne na úder 2 . Loptička, ktorá dopadne na úder 4 je hodená do výšky 5 a dopadne na úder 9, keď je znova hodená do výšky 5 a tieto hody sa opakujú.

Orbita prvej loptičky⁶

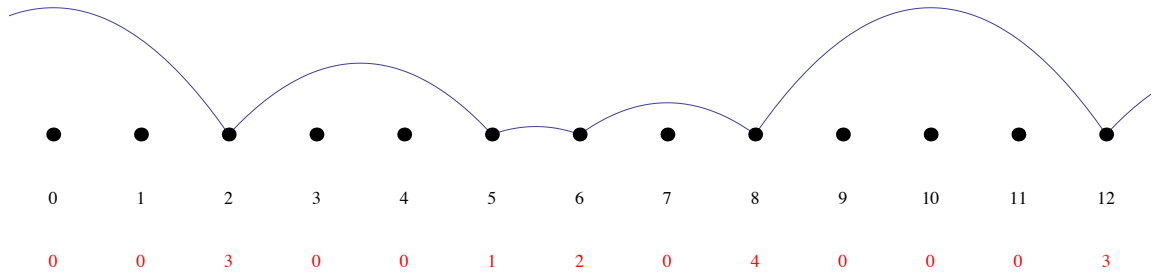
$$O^I: h_0 = 1 \quad h_1 = 2 \quad h_3 = 4 \quad h_7 = 3$$



Obr. 4: O^I

Orbita druhej loptičky

$$O^{II}: h_2 = 3 \quad h_5 = 1 \quad h_6 = 2 \quad h_8 = 4$$



Obr. 5: O^{II}

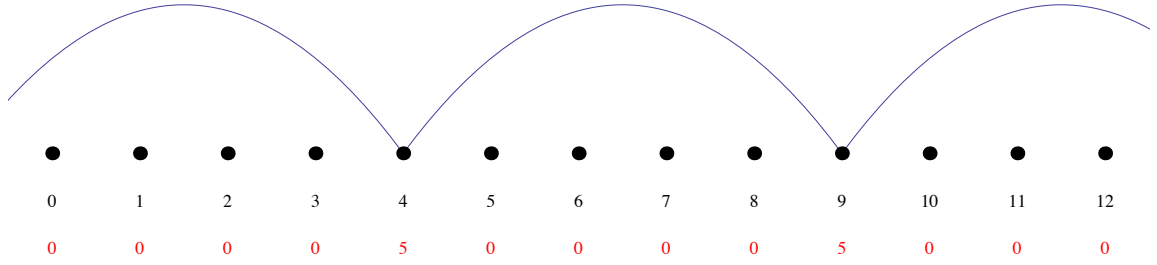
Orbita tretej loptičky⁷

$$O^{III}: h_5 = 5$$

Veta 1.2 (O aritmetickom priemere, (16), s. 15). *Počet loptičiek potrebných pre žonglovanie daného siteswapu $\{h_k\}_{k=0}^{p-1}$ je rovný jeho aritmetickému priemere $\frac{\sum_{k=0}^{p-1} h_k}{p}$.*

⁶Príloha A - /siteswapy/02_o1_12345.jml

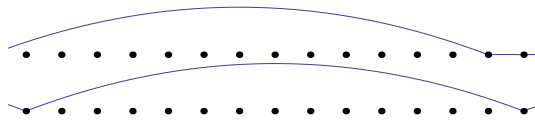
⁷Príloha A - /siteswapy/02_o3_12345.jml



Obr. 6: O^{III}

Dôkaz. Vezmime si najvyšší hod v danej postupnosti (výška hodu je ohraničená) $H = \max\{h_k | k \in 0, \dots, p-1\}$. Vyberme si v našom žonglovaní interval úderov I taký, že $|I| > H$. Takýto interval je dostatočne široký pre to, aby tam dopadol aj najvyšší hod H . Ak by bol hod o tejto výške hodený na posledný úder pred začiatkom intervalu, jeho dopad by patril úderu v intervale I . Každá loptička teda dopadne v danom intervale I aspoň raz a počet orbít o je konečný. Súčet výšok hodov h_i na intervale I patriacich jednej orbite ohraničíme zdola. Ak by sme opäť volili najvyšší hod na posledný úder pred začiatkom intervalu a po jeho dopade volíme výšky hodov v orbite tej istej loptičky ako 1 dostávame dolnú hranicu $|I| - H + 1$. Naopak hornú hranicu $|I| + H - 1$ dostaneme ak volíme orbitu loptičky tak, že prechádza prvým úderom intervalu I a zároveň na posledný úder je prevedený hod o výške H (Obrázok 7). Pre $\forall i \in \mathbb{Z}$, uvažujúc postupnosť periodicky sa opakujúcu, môžeme písať:

$$\frac{o(|I| - H + 1)}{|I|} \leq \frac{\sum_{k=(i \bmod p); i \in I} h_k}{|I|} \leq \frac{o(|I| + H - 1)}{|I|}$$



Obr. 7: Dolná hranica a horná hranica.

a pre $|I| \rightarrow \infty$ je $\lim_{|I| \rightarrow \infty} \frac{o(|I| - H + 1)}{|I|} = o$, rovnako tak $\lim_{|I| \rightarrow \infty} \frac{o(|I| + H - 1)}{|I|} = o$. Interval I si rozdelíme na r podintervalov dĺžky p , že $r \in \mathbb{Z}$, pričom nám ostane nejaký zvyšok na „konci“ intervalu, ktorý je ale v limitnom prípade zanedbateľný

(menší ako p) a môžeme vyjadriť:

$$\lim_{|I| \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=(i \bmod p); i \in I} h_k}{|I|} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r \cdot \sum_{k=0}^{p-1} h_k}{r \cdot p} = \frac{\sum_{k=0}^{p-1} h_k}{p}.$$

Aritmetický priemer postupnosti je teda rovný počtu orbít.

□

Táto vlastnosť siteswapov je jedna z najdôležitejších pre žonglérov. Rýchlo si vďaka nej dokážu zrátať potrebný počet loptičiek pre daný siteswap, respektíve im to môže pri vymýšľaní nových siteswapov, ktoré hľadajú tak, aby aritmetický priemer bol celočíselný.

Veta 1.3 (Skúška aritmetického priemeru, (16), s. 16). *Ak je konečná postupnosť nezáporných celých čísel žonglovacia postupnosť, potom jej aritmetický priemer je celé číslo.*

Dôkaz. Plynie bezprostredne z Vety o aritmetickom priemere.

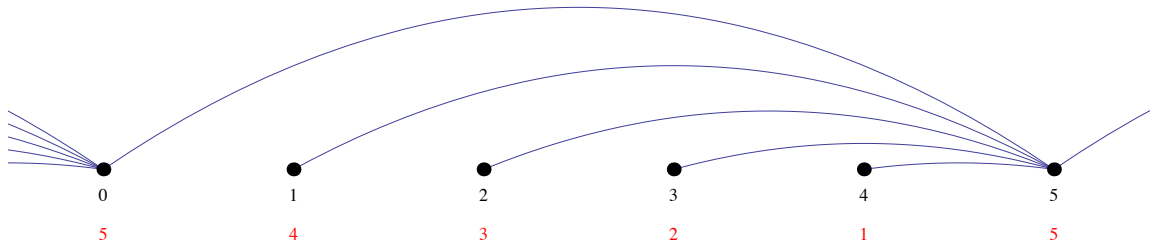
□

Príklad 1.3. Siteswap 12345, ktorému sme sa venovali pri orbitách má $\frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$ loptičky.

Dôležitým pozorovaním je, že celočíselný aritmetický priemer nie je postačujúcou podmienkou pre validný siteswap, takže obrátená veta neplatí. Že tomu tak je si ukážeme na príklade:

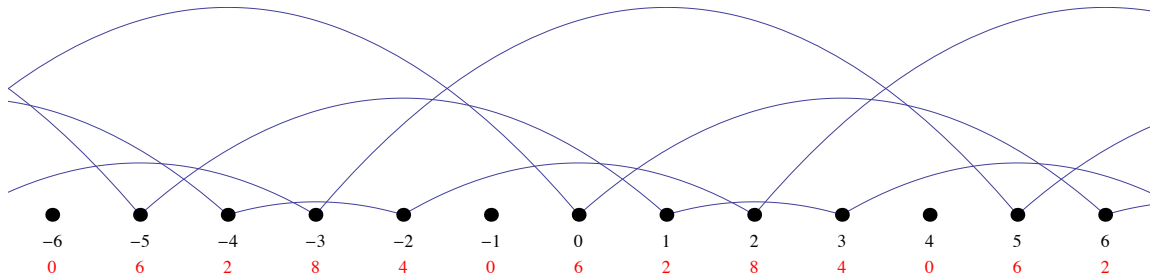
Príklad 1.4 (Obrázok 8). Majme postupnosť 54321, ktorá má aritmetický priemer 3 rovnako ako v predošlom prípade, avšak každý hod by dopadol na piaty úder a to je v rozpore s vlastnosťou (iii) prostého žonglovania.

Dokážeme si však podobnú vetu, ktorá je z matematického hľadiska netriviálna a hrá dôležitú úlohu v teórii konečných grup. Uvedieme dôkaz pre konečné postupnosti. Vetu dokázal Marshall Hall (6) v roku 1952 na Kalifornskej univerzite. Ešte pred tým je však vhodné poukázať na správanie siteswapov, ak výšky hodov budeme miesto zo \mathbb{Z} brať zo \mathbb{Z}_p , kde p je dĺžka siteswapu.



Obr. 8: Postupnosť splňujúca podmienku aritmetického priemeru, ale v rozpore s vlastnosťami prostého žonglovania.

Príklad 1.5. Vezmime si pre ilustráciu opäť postupnosť 12345, o ktorej vieme, že je platný siteswap. Dĺžka siteswapu je $p = 5$. Ak by sme výšku hodu $h_0 = 1$ zväčšili o dĺžku periódy na $1 + 5 = 6$, tak miesto toho, aby dopadla na úder 1, do hodu h_1 , dopadne na úder 6, do hodu h_6 , z konštrukcie žonglovej postupnosti je výška hodu $h_6 = h_{6 \bmod 5} = h_1$. Loptička teda dopadne na úder, v ktorom sa nachádza rovnaký hod, ako pred zmenou. Hod, ktorý mal dopadnúť na úder 6 bol h_5 , jeho dopad sa však vďaka periodickému opakovaniu posúva až na úder 11. Podobne aj všetky ďalšie údery $0 + k \cdot p, \forall k \in \mathbb{Z}$. Ukázali sme si teda, že každému hodu v našom siteswape môžeme pripočítať periódu a stále máme splnené vlastnosti prostého žonglovania (Obrázok 9)⁸.



Obr. 9: Siteswap 62840 vytvorený z 12345 pričítaním periódy k 1. a 3. hodu a odčítaním (pre zdôvodnenie vid' text za Vetou 2.5) periódy od posledného hodu.

Definícia 1.7. Generátorom žonglovej postupnosti nazývame postupnosť $\{h_k \bmod p\}_{k=0}^{p-1}$.

Veta 1.4 (Skúška permutácie, (16), s. 22). *Nech $\{h_k\}_{k=0}^{p-1}$ je postupnosť nezáporných*

⁸Príloha A - /siteswapy/03_62840.jml

celých čísel dĺžky p , potom táto postupnosť je žonglovacou postupnosťou práve vtedy, keď funkcia $\phi : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$ definovaná predpisom $\phi(k) = (k + h_k) \bmod p, k \in \mathbb{Z}_p$ je permutáciou v \mathbb{Z}_p .

Dôkaz. Z definície žonglovacej postupnosti $\{h_k\}_{k=0}^{p-1}$ je hneď vidieť, že prostá žonglovacia funkcia $\phi(k) = h_k \bmod p$ pre $k \in \mathbb{Z}$ ňou tvorená, musí mať dopadovú funkciu $\bar{\phi}(k) = h_k \bmod p + k$, ktorá vytvára permutáciu v \mathbb{Z} , teda dopady hodov sú rôzne. Pozrime sa bližšie na interval $\{0, \dots, p-1\}$. Dopad každého z hodov tejto postupnosti musí byť na inú pozíciu niektorej z ďalších postupností. Ak by sme totiž mali dva hody na údery $k \in \{0, \dots, p-1\}$, ktoré by dopadli na rovnakú pozíciu nejakých ďalších postupností, tak môžu nastať dve možnosti: buď dostaneme dva dopady na rovnakú pozíciu jednej postupnosti, alebo dopady na rovnaké pozície dvoch rôznych postupností. Prvý prípad vedie okamžite k sporu. V druhom prípade by sa dopady líšili len o násobok periódy p , presnejšie hod na úder k dopadne na úder $h_k + k$ a hod na úder l dopadne na $h_k + k + np$, kde $k, l \in \{0, \dots, p-1\}$ a $n \in \mathbb{Z}$, a taktiež by sme došli k sporu s treťou vlastnosťou prostého žonglovania, keďže hod na úder $k + np$ by dopadol na rovnaký úder ako hod na úder l . Ukázali sme, že zvyšky po delení $(h_k + k) \bmod p$ tvoria permutáciu na \mathbb{Z}_p .

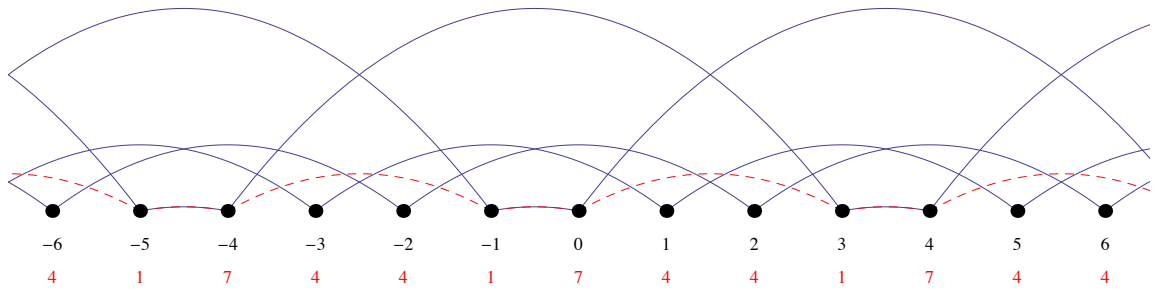
Naopak, majme permutáciu $\phi : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$ danú predpisom $\phi(k) = (k + h_k) \bmod p$, ktorá odpovedá časom dopadu loptičiek. Potrebujeme rozšíriť túto funkciu tak, aby sme našli dopadovú funkciu k prostej žonglovacej funkcii na celom \mathbb{Z} . $h_k + k = h_k \bmod p + k$ nadobúda rôzne celočíselné hodnoty pre $k \in \{0, \dots, p-1\}$ a zároveň aj zvyšky po delení periódou p sú rôzne. Označme celú časť podielu čísla k periódou p ako $n(k)$. Rozšírenie konečnej postupnosti na celé \mathbb{Z} vytvoríme práve následným pričítaním dĺžky postupnosti. Vznikne nám teda nekonečná postupnosť $h_k \bmod p + k + n(k)p = h_k \bmod p + k = \bar{\phi}(k)$ pre $k \in \mathbb{Z}$, ktorá je permutáciou na celom \mathbb{Z} . To je hľadaná dopadová funkcia a $h_k \bmod p, k \in \mathbb{Z}$ je prostá žonglovacia funkcia. Teda $\{h_k\}_{k=0}^{p-1}$ je prostá žonglovacia postupnosť. \square

Veta 1.5. *Generátor žonglovacej postupnosti je žonglovacia postupnosť.*

Dôkaz. Stačí si uvedomiť, že $(h_k \bmod p+k) \bmod p = (h_k+k) \bmod p$ pre $k \in \mathbb{Z}_p$. Keďže podľa predchádzajúcej vety je $(h_k+k) \bmod p$ permutáciou, a teda aj $(h_k \bmod p+k) \bmod p$ je permutáciou. Z toho plynie, že $h_k \bmod p$ je žonglovacou postupnosťou. \square

Dôsledkom tejto vety je, že od hodov siteswapu môžeme periódu aj odčítať (hody sú nezáporné). To sa prevedie použitím generátora a následným pričítaním periódy k hodom.

Príklad 1.6 (Obrázok 10). Majme danú žonglovaciu postupnosť 7441⁹. Jej generátorom je postupnosť 7441 mod 4 = 3001¹⁰.



Obr. 10: Siteswap 7441 a jeho generátor 3001 (červená).

Veta 1.6 („Obrátená“ veta o aritmetickej postupnosti). *Nech je daná postupnosť nezáporných celých čísel $\{h_k\}_{k=0}^{p-1}$, tak, že jej aritmetický priemer je celé číslo, potom existuje permutácia tejto postupnosti, ktorá je žonglérskou postupnosťou.*

Veta a dôkaz sú obdobou dokumentu TAYLOR (20).

Dôkaz sa skladá z dvoch častí. Najprv musíme dokázať nasledovné Lemma, ktoré neskôr aplikujeme.

Lemma 1.7. *Nech je daná postupnosť nezáporných celých čísel, ktorá môže byť preusporiadaná na prostú žonglovaciu postupnosť. Ak zameníme dva členy postupnosti*

⁹Príloha A - /siteswapy/04_7441.jml

¹⁰Príloha A - /siteswapy/04_gen_3001.jml

tak, že aritmetický priemer novej postupnosti je celé číslo, potom táto postupnosť môže byť opäť preusporiadaná na žonglovaciu postupnosť.

Dôkaz. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že vstupná postupnosť je už usporiadaná na žonglovaciu postupnosť. Z Vety o skúške permutáciou plynie, že postupnosť $\phi(k) \bmod p = (h_k + k) \bmod p, \forall k$ je permutáciou v \mathbb{Z}_p . Dôsledkom uvedenej vety sú aj ďalšie výpočty, v ktorých užívame celočíselný zvyšok po delení (mod). Uvedená tabuľka ukazuje po zmene stav, v ktorom sme zmenili výšku hodov, ale ešte nebola prevedená zmena ich dopadov.

úder	0	1	...	$p-1$	→	0	...	i	...	j	...	$p-1$
výška hodu	h_0	h_1	...	h_{p-1}	→	h_0	...	1x_i	...	1x_j	...	h_{p-1}
dopad	$\phi(0)$	$\phi(1)$...	$\phi(p-1)$	→	$\phi(0)$...	$\phi(i)$...	$\phi(j)$...	$\phi(p-1)$

Zmeňme výšku hodov h_i a h_j na 1x_i a 1x_j tak, že aritmetický priemer novej postupnosti je celé číslo. Potom platí:

$$\begin{aligned}
 (h_i + h_j) \bmod p &= ({}^1x_i + {}^1x_j) \bmod p, \\
 (\phi(i) + \phi(j)) \bmod p &= (h_i + i + h_j + j) \bmod p = \\
 ((h_i + h_j) \bmod p + i + j) \bmod p &= (({}^1x_i + {}^1x_j) \bmod p + i + j) \bmod p = \\
 ({}^1x_i + i + {}^1x_j + j) \bmod p.
 \end{aligned}$$

Nasledujúcim spôsobom preusporiadame novú postupnosť na žonglovaciu postupnosť:

Dopadová funkcia $\phi(k)$ sa zobrazí na ${}^1\phi(k)$, kde $\phi(k) = {}^1\phi(k)$ pre $k \neq i, j$ a pre $k = i, j$ rozoberieme prípady jednotlivo.

- i) Ak $({}^1x_i + i) \bmod p = \phi(i) \bmod p$ potom aj $({}^1x_j + j) \bmod p = \phi(j) \bmod p$, tak dostávame platný siteswap a nemusíme nič meniť, ${}^1\phi(i) = \phi(i)$ a ${}^1\phi(j) = \phi(j)$, potom ${}^1\phi(k)$ je zrejme permutáciou pre $k \in \mathbb{Z}_p$.
- ii) Ak $({}^1x_i + i) \bmod p = \phi(j) \bmod p$, tak položíme ${}^1\phi(i) = \phi(j)$ a ${}^1\phi(j) = \phi(i)$.
- iii) Ak $({}^1x_i + j) \bmod p = \phi(j) \bmod p$, tak položíme ${}^1\phi(i) = \phi(i)$ a ${}^1\phi(j) = \phi(j)$ ale zameníme hody 1x_i s 1x_j .

iv) Ak ${}^1x_i + j = \phi(i)$, tak položíme ${}^1\phi(i) = \phi(j)$ a ${}^1\phi(j) = \phi(i)$ a zároveň zameníme 1x_i s 1x_j .

Po každej z týchto výmen sa nám pre údery iné ako i a j nič nezmenilo, nemusíme nič viac ošetriť, a teda dostávame správnu žonglovaciu postupnosť. Ak by ani jeden prípad nenastal, tak hody výšok 1x_i a 1x_j dopadnú zároveň s iným hodom siteswapu a musíme ošetriť ďalšie hody postupnosti nasledovne:

v) Položme ${}^1d = (\phi(i) - {}^1x_i) \bmod p$, potom ${}^1d \neq i, j$ (ostatné prípady sme už totiž ošetrili) a 1d je úderom, na ktorý musí byť vykonaný hod výšky 1x_i tak, aby dopadol na úder $\phi(i)$, respektíve na pozíciu $\phi(i) \bmod p$ v novom siteswape. Preusporiadame jednotlivé hody nasledovne: hod o výške 1x_i s dopadom na úder $\phi(i)$ sa vykoná na úder 1d , teda ${}^1\phi({}^1d) = \phi(i)$. Hod o výške h_{1_d} presunieme do času i a priradíme mu čas dopadu ${}^1\phi(i) = \phi(j)$. Dopad na úder $\phi({}^1d)$ priradíme hodu vykonanému v čase j , a teda ${}^1\phi(j) = \phi({}^1d)$. V tabuľke je uvedený predošlý stav a zmena na stav v preusporiadanej postupnosti.

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 \dots & i & \dots & j & \dots & {}^1d & \dots & \dots & i & \dots & j & \dots & {}^1d & \dots \\
 \dots & {}^1x_i & \dots & {}^1x_j & \dots & h_{1_d} & \dots & \rightarrow & \dots & h_{1_d} & \dots & {}^1x_j & \dots & {}^1x_i & \dots \\
 \dots & \phi(i) & \dots & \phi(j) & \dots & \phi({}^1d) & \dots & & \dots & {}^1\phi(i) & \dots & {}^1\phi(j) & \dots & {}^1\phi({}^1d) & \dots
 \end{array}$$

Na úder 1d máme teda z konštrukcie správny hod aj čas dopadu a ostáva nám ošetriť údery i a j . Zo vzťahov:

$$(\phi(i) + \phi(j)) \bmod p = ({}^1x_i + i + {}^1x_j + j) \bmod p \text{ a } {}^1d = \phi({}^1d) - h_{1_d} = (\phi(i) - {}^1x_i) \bmod p$$

dostávame sčítaním a úpravou

$$(\phi(j) + \phi({}^1d)) \bmod p = (h_{1_d} + i + {}^1x_j + j) \bmod p$$

a pre údery i a j je teda splnený prvý vzťah pre hody h_{1_d} a 1x_j . Pokračujeme ďalej rovnakými operáciami pre tieto hody.

Je potrebné ukázať, že náš postup v prípade v) je konečný, a teda naozaj vedie k vytvoreniu novej žonglovacej postupnosti. Ak by sme sa dostali do prípadov i-iv), tak by sme previedli príslušné preusporiadanie a proces by sme ukončili. Postupujme teda ďalej, za predpokladu, že sme sa nedostali do žiadneho jednoduchého

prípade, položíme ${}^2x_i = h_{1_d}$ a volíme nový úder ${}^2d = ({}^1\phi(i) - {}^2x_i) \bmod p$. Keďže ${}^1d = \phi({}^1d) - h_{1_d} = \phi({}^1d) - {}^2x_i = {}^1\phi(j) - {}^2x_i$ a ${}^1\phi(i) \neq {}^1\phi(j)$, tak ${}^1d \neq {}^2d$. Hod 2x_i teda presunieme do úderu 2d a dopadu k tomuto úderu priradíme ${}^2\phi({}^2d) = {}^1\phi(i)$ (analogicky ako pri presúvaní hodu 1x_i v predošlom prípade). Ak by sme sa následne v nejakom ďalšom kroku n dostali do stavu, kde by v preusporiadanej postupnosti na úder i platilo pre nejaké ${}^n\phi_i$ a ${}^nx_i : ({}^n\phi_i - {}^nx_i) \bmod p = {}^1d$, tak po prevedení výmeny¹¹

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} i & \dots & j & \dots & {}^1d & \dots & \dots & i & \dots & j & \dots & {}^1d & \dots \\ {}^nx_i & \dots & {}^1x_j & \dots & {}^1x_i & \dots & \rightarrow & \dots & {}^1x_i & \dots & {}^1x_j & \dots & {}^nx_i & \dots \\ {}^n\phi(i) & \dots & {}^n\phi(j) & \dots & {}^n\phi({}^1d) & \dots & \dots & {}^n\phi(j) & \dots & {}^n\phi({}^1d) & \dots & {}^n\phi(i) & \dots \end{array}$$

dostávame $({}^n\phi({}^1d) + {}^n\phi(j)) \bmod p = (\phi(i) + {}^n\phi(j)) \bmod p = ({}^1x_i + i + {}^1x_j + j) \bmod p = (\phi(i) + \phi(j)) \bmod p$ a musí platiť ${}^n\phi(j) \bmod p = \phi(j) \bmod p$. Tento prípad ale nemôže nastať, nakoľko hod s dopadom na pozíciu $\phi(j) \bmod p$ je prevedený na úder 2d . Rovnakou úvahou by sme pokračovali pre všetky údery a žiaden krok sa teda nemôže zopakovať. Z predpokladanej konečnosti žonglovacej postupnosti je Lemma dokázané. \square

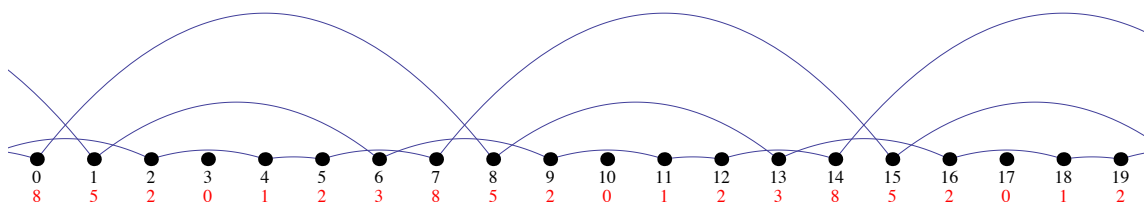
Dôkaz vety 2.6. Nech je daná postupnosť $h_0 \dots h_{p-1}$ s celočíselným aritmetickým priemerom a triviálny siteswap o dĺžke p pozostávajúci z nulových hodov. Zámeňou prvej 0 za h_0 a druhej 0 za $p - h_0$ dostaneme postupnosť, ktorú vieme podľa Lemmy preusporiadať na siteswap. Vymeňme teraz člen $p - h_0$ za h_1 a tretiu 0 za $p - h_0 - h_1$. Takto postupujeme až kým vymeníme predposlednú 0 za h_{p-2} a ostala nám posledná 0, ktorú zameníme za $p - h_0 - h_1 - \dots - h_{p-2}$, čo sa ale v \mathbb{Z}_p musí rovnať h_{p-1} , nakoľko $\sum_{k=0}^{p-1} h_k$ je deliteľný p , keďže postupnosť $\{h_k\}_{k=0}^{p-1}$ má celočíselný priemer. \square

Pre aplikáciu v žonglovaní je táto veta veľmi prínosná. Žonglér sa tak pri učení náročného siteswapu s väčším počtom loptičiek môže naučiť podobný siteswap s men-

¹¹V poslednom kroku tabuľky schválne nepíšeme nové indexovanie v kroku $n + 1$, ponechávame značenie z predošlého kroku, z ktorého je dôkaz ľahšie čitateľný.

ším počtom. Stačí mu od jedného z hodov odčítať dĺžku siteswapu alebo pozmeniť dva hody tak, aby mu vyšiel celočíselný aritmetický priemer. Napríklad siteswap 7531 so štyrmi loptičkami sa môže učiť pomocou siteswapov 3531, či 7131 (v oboch prípadoch sme odčítali 4 od jedného z hodov). Taktiež si môže pretvoriť danú postupnosť dvomi novými číslami alebo rovno vytvoriť z vybranej ľubovoľnej postupnosti hodov splňujúcej celočíselný aritmetický priemer nový siteswap.

Príklad 1.7 (Obrázok 11). Majme daný platný siteswap 8520123¹². Budeme si postupne voliť čísla, ktoré zmeníme a vytvoríme si tak, na základe dokázanej Lemmy, nový siteswap.



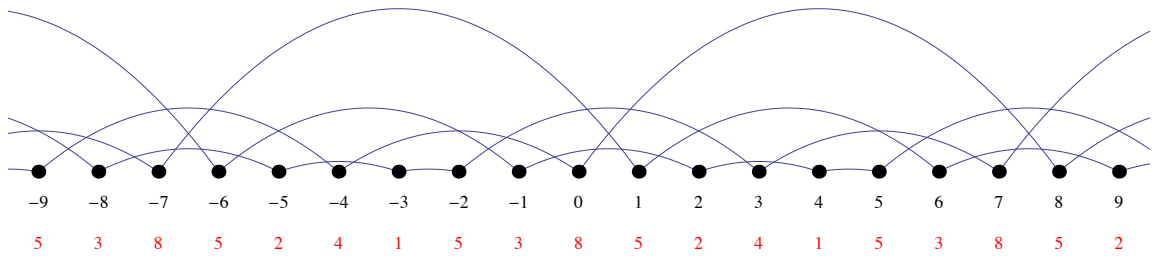
Obr. 11: Siteswap 8520123.

Aritmetický priemer siteswapu je $\frac{8+5+2+0+1+2+3}{7} = 3$. Na žonglovanie sú potrebné 3 loptičky. Pri žonglovaní 2 rukami je hod 2 prakticky len podržanie loptičky a na hod 0 sa nič nestane. Pokúsime sa ich vymeniť tak, aby sme mali 4 loptičky. Zmeňme 0 zo štvrtej pozície na 4 a 2 zo šiestej pozície na 5 (Obrázok 12).

$$\begin{array}{l|cccccccc}
 i & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 h_i & 8 & 5 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & \rightarrow & 8 & 5 & 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \\
 \phi(i) & 1 & 6 & 4 & 3 & 5 & 0 & 2 & & 1 & 6 & 4 & 3 & 5 & 0 & 2
 \end{array}$$

Dostali sme sa do jednoduchého prípadu, keď (podľa Lemmy) $x_i + i = \phi(j)$ a stačí nám zameniť $\phi(i)$ za $\phi(j)$. Urobme ďalej zámenu hodu 5 za 1 a hodu 2 za 6. Počet loptičiek sa nám nezmení (Obrázok 13).

¹²Príloha A - /siteswapy/05_1.8520123.jml, /siteswapy/05_2.8524153.jml, /siteswapy/05_3.3864115.jml



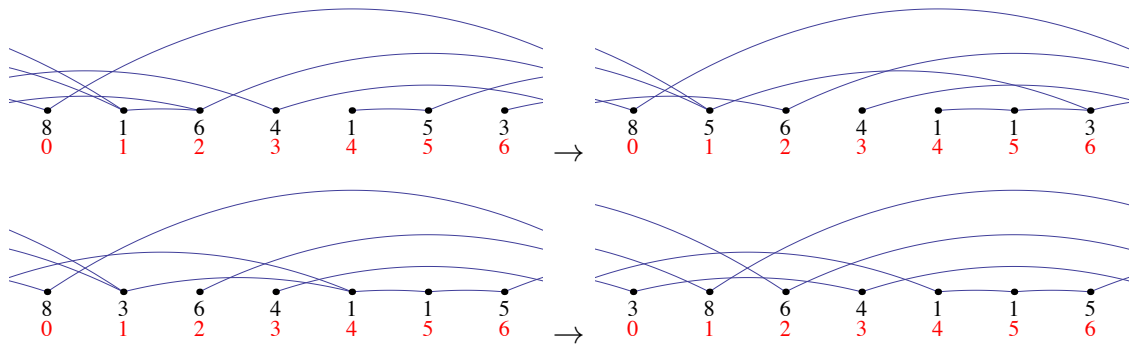
Obr. 12: Siteswap 8524153.

i	0	1	2	3	4	5	6		0	1	2	3	4	5	6
h_i	8	5	2	4	1	5	3	\rightarrow	8	1	6	4	1	5	3
$\phi(i)$	1	6	4	0	5	3	2		1	6	4	0	5	3	2

Ani jedna z jednoduchých možností na výmenu medzi údermi 1 a 2 nenastáva. Musíme ošetriť hod $d = 6 - 1 = 5$, opäť sa dostaneme do netriviálneho prípadu a pokračujeme k ďalšiemu kroku, $d' = 4 - 5 = 6$, $d'' = 0$

0 1 2 3 4 5 6 0 1 2 3 4 5 6 0 1 2 3 4 5 6
 8 5 6 4 1 1 3 \rightarrow 8 3 6 4 1 1 5 \rightarrow 3 8 6 4 1 1 5
 1 4 3 0 5 6 2 1 3 2 0 5 6 4 3 2 1 0 5 6 4

až sa napokon dostávame do prípadu, keď nemusíme už nič meniť. Výsledný siteswap nám vyšiel 3864115.



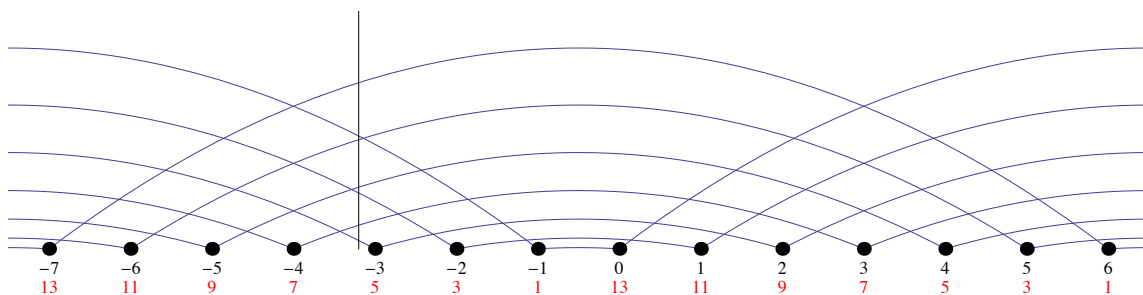
Obr. 13: Prechod pri zmene žonglovacej postupnosti.

1.3 Grafické skúšky platnosti siteswapu

Ukázali sme si niekoľko dôležitých vlastností pre žonglovacie postupnosti. Okrem toho sme si dokázali skúšku platnosti siteswapu pomocou aritmetického priemeru a najmä skúšku permutácie. V ďalšej podkapitole sa budeme snažiť vytvárať vlastné siteswapy jednoduchými operáciami. Aby sme si dokázali rýchlo skontrolovať, či je nami vytvorený siteswap možné žonglovať, ukážeme si ešte predtým zopár jednoduchých grafických skúšok správnosti, bezprostredne plynúcich z predchádzajúcej časti. Samotní žongléri tieto skúšky často používajú.

1.3.1 Základný diagram

Základný diagram (Obrázok 14)¹³ používame intuitívne už v predošlých odstavcoch. Jeho vytvorenie je veľmi jednoduché, body na pomyselnaj priamke sú celočíselnou osou určujúc čas (úder), oblúky označujú hody. To priamo odpovedá vlastnosti (i) a (ii) prostého žonglovania.



Obr. 14: Siteswap db97531 o siedmich loptičkách s vyznačením priesečníkov s orbitami loptičiek.

Ak do bodu (úderu i) vedie oblúk (dopadne loptička), musí z neho oblúk aj vychádzať (loptička je vyhodena do výšky h_i a dopadne do úderu $i + h_i$). Ak do bodu žiaden oblúk nevedie, žiaden oblúk z neho nevychádza ($h_i = 0$). Do každého bodu vedie nanajvýš jeden oblúk. Tým je splnená aj vlastnosť (iii).

Každý oblúk odpovedá trajektórii (orbite) jednej loptičky. Trajektória je súvislá, oblúky na seba naväzujú.

¹³Príloha A - /siteswapy/06_db97531.jml

Ak preložíme grafom zvislú priamku, neprechádzajúcu priesečníkom dvoch oblúkov, tak počet priesečníkov danej priamky s oblúkmi nám určuje počet loptičiek daného žonglovania.

Ak existuje priesečník dvoch oblúkov, tak loptičky prechádzajú rovnakou výškou. Loptička, ktorá prechádza časťou oblúka ďalej od osi prechádza vyššie.

Graf je veľmi užitočný pri riešení matematických problémov, avšak len pre krátke postupnosti, nakoľko sú údery na priamke.

Pre praktické žonglovanie dvomi rukami je však graf pomerne ťažko čitateľný, nepoukazuje na, pre žonglérov, podstatné údaje, ako napríklad, do ktorej ruky loptičká dopadá (párne/nepárne hody).

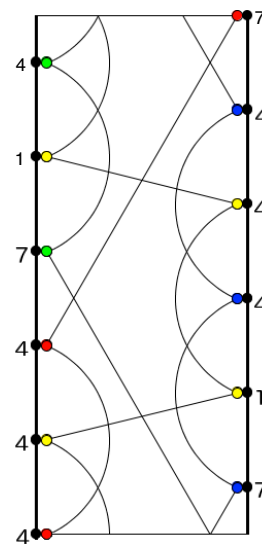
1.3.2 Rebríkový diagram

Grafické znázornenie žonglovania, ktoré je pre žongléra veľmi intuitívne, nám podáva rebríkový diagram (Obrázok 15)¹⁴. Žonglovanie zobrazujeme na dvoch priamkach, ktoré reprezentujú časové osi úderov pre hody v oboch rukách. Čas plynie zdola hore a prechádzame údery pravej a ľavej ruky, pričom úsečky značia hod do druhej ruky (o nepárnej výške) a oblúky hod do ruky tej istej (o párnej výške).

Z každého bodu, do ktorého vchádza úsečka alebo oblúk hodu, vychádza úsečka alebo oblúk hodu nasledovného.

Ak do bodu nevchádza žiaden hod, žiaden z neho ani nevychádza. Každá loptička má teda zrejme vlastnú spojitú

trajektóriu vytvorenú z oblúkov a úsečiek. Ak pretne rebríkový graf horizontálnou priamkou, neprechádzajúcou priesečníkom úsečiek, alebo oblúkov reprezentujúcich hody, tak počet priesečníkov s grafom je rovnaký ako počet loptičiek.



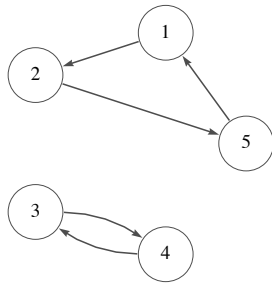
Obr. 15: Rebríkový diagram siteswapu 74414.

¹⁴Príloha A - /siteswap/07_74414.jml

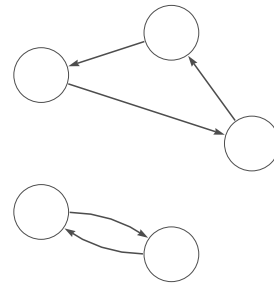
Rebríkový graf je veľmi názorný pre žonglérovo práve kvôli tomu, že rozlišuje hody z oboch rúk. Stred úsečky, či oblúku je najvyšším bodom v danom hode. Rebríkový diagram pre nás bude užitočnou pomôckou pri vytváraní vrkočov¹⁵.

1.3.3 Cyklický diagram

Cyklický diagram (Obrázok 16a)¹⁶ je grafické zobrazenie žonglovania, ktoré sa dá jednoducho interpretovať v teórii grafov. Je preto z matematického hľadiska zaujímavý a my sa mu budeme tiež venovať v širších súvislostiach. Diagram nám vo svojej základnej forme zobrazuje generátor žonglovacej postupnosti. Zostavenie je podobné ako u základného diagramu. Na rozdiel od priamky ho však zobrazujeme na kružnici. Body na kružnici odpovedajú úderom. Budeme ich nazývať *vrcholy* a ich počet je rovný dĺžke periódy p . Zvolíme si úder 1 a orientáciu¹⁷. Hodom o výškach h_i priradíme orientované šípky - *hrany*, začínajúce v danom vrchole V_i prislúchajúcemu úderu $i \in \{1, \dots, p\}$ a končiacie vo vrchole V_{h_i+i} . V konštrukcii siteswapu sme uvažovali interval úderov $\{0, \dots, p-1\}$, aby sme s tým neboli v rozpore, tak stotožníme údery 0 a p . Ak hod presiahne dĺžku periódy, postupujeme ďalej po kružnici. Koncový vrchol hrany bude teda vrchol $V_{(h_i+i) \bmod p}$ na kružnici. Dĺžkou hrany z vrcholu V_i je číslo $h_i \bmod p$.



(a) Cyklický diagram siteswapu 63641.



(b) Generátor siteswapu 63641.

Obr. 16

¹⁵Vid' kapitola Žonglovacie vrkoče.

¹⁶Príloha A - /siteswap/08_63641.jml, /siteswap/08_gen_13141

¹⁷V texte používame orientáciu v protismere hodinových ručičiek.

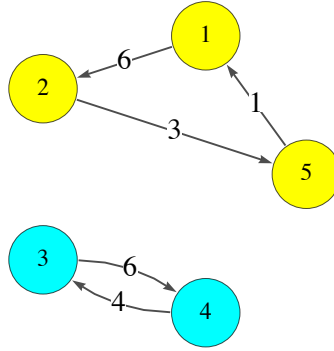
Aby sme zabezpečili podmienku (iii) z vlastností prostého žonglovania, musí opäť platiť, že ak z jedného úderu - vrcholu hrana vychádza, musí doň hrana aj vchádzať. To platí v tomto prípade aj pre nulové hody (hod je reprezentovaný slučkou vychádzajúcou aj vchádzajúcou do toho istého úderu). Do každého bodu cyklického diagramu vchádza práve jedna šípka a jedna šípka z neho vychádza.

Každá orbita siteswapu (takže i generátoru) tvorí v diagrame cyklus, pričom slučku považujeme tiež za cyklus. V ďalšom výklade bude nutné precízne rozlíšiť cyklický diagram a generátor. Každému cyklickému diagramu vieme jednoznačne priradiť generátor. Generátor je však nezávislý na otočení (posunutí v čase) a preto mu prináleží celá trieda cyklických diagramov, ktoré sa líšia len otočením. V grafickom znázornení preto generátor zobrazujeme ako rovinný orientovaný graf, ktorý pozostáva len z cyklov (Obrázok 16b). Cyklický diagram má navyše očíslované vrcholy (Obrázok 16a).

1.3.4 Cyklický diagram s ohodnotenými hranami výškami hodov

To, že cyklický diagram zobrazuje len generátor sa môže v niektorých aplikáciách, najmä v praktickom žonglovaní, javiť ako zásadná nevýhoda voči ostatným znázorneniam. Uvedieme si ohodnotenie hrán diagramu, ktoré nám uľahčí prácu. Ohodnotenie znázorňujeme popisom na hrane.

Aby sme jednoznačne zobrazili celý siteswap, ohodnotíme každú hranu začínajúcu vo vrchole V_i výškou hodu h_i . Siteswap je rovnako ako generátor nezávislý na otočení grafu, preto ho zobrazujeme s neoznačenými vrcholmi. Takýto diagram nám podáva navyše informáciu o presných výškach hodov. Vďaka tomu môžeme analyticky spočítať počet loptičiek každej orbity, a tiež celkový počet loptičiek siteswapu. Vezmime si jeden uzavretý cyklus v diagrame, všetky ostatné hody zmeníme na nulové. Ostal nám cyklus, ktorý reprezentuje aspoň jednu orbitu a stále je žonglovacou postupnosťou, nakoľko nulové hody tvoria v diagrame slučky. Pomocou vety o aritmetickom priemere spočítame počet loptičiek b opisujúcich rovnaké orbity.



Obr. 17: Cyklický diagram 63641 s hranami ohodnotenými výškou hodu.

Príklad 1.8 (Obrázok 17). V cyklickom diagrame siteswapu 63641 máme 2 cykly¹⁸. Pomocou vety o aritmetickom priemere spočítame počet prekrývajúcich sa orbít. V cykle prechádzajúcom vrcholmi $1 \rightarrow 2 \rightarrow 5$ spočítame súčet hodnôt hrán a ostatným hranám priradíme hodnotu 0. Počet orbít v danom cykle je

$$b(O^I) = \frac{6+3+1+0+0}{5} = 2.$$

Rovnakým spôsobom dopočítame počet prekrývajúcich sa orbít cyklu nad vrcholmi 3 a 4. Dostávame

$$b(O^{II}) = \frac{0+0+0+6+4}{5} = 2 \text{ orbity.}$$

Celkový počet loptičiek daného siteswapu je $b(O^I) + b(O^{II}) = 4$.

Cyklické diagramy sú výborným prostriedkom pre hľadanie generátorov žonglovacích postupností o danej perióde. Na vytvorenie generátora nám stačí pospájať vrcholy hranami tak, aby sme splnili podmienku jednej vchádzajúcej a vychádzajúcej hrany. Navyše ich nakreslenie je veľmi jednoduché a rýchle pre akokoľvek dlhé žonglovacie postupnosti. Nevýhodou je, že počet loptičiek u všeobecného siteswapu nie je okamžite viditeľný. Tento nedostatok, však vieme ľahko odstrániť ohodnotením hrán. Pre žongléra je nevýhodou aj to, že priamo nevidí, z ktorej ruky práve vyhadzuje loptičku. Ak na zmenu vopred neupozorníme, tak v ďalších aplikáciách využívame ohodnotenie hrán pomocou ich výšky.

¹⁸Príloha A - /siteswapy/08_o1.63641.jml, siteswapy/08_o2.63641.jml

1.4 Generovanie siteswapov

Bruce „Boppo“ Tiemann pri komentovaní vzniku siteswapu hovorí o tom, že slovo siteswap (z anglického „site“: strana a „swap“: zameniť) pochádza z pozorovania trikov, pri ktorých sa mení poradie, v akom loptičky dopadajú do rúk. Ako príklad uvádza siteswap 531¹⁹, kde máme tri farby loptičiek: modrú, červenú, zelenú. Modrú vyhodíme do výšky 5, následne červenú do výšky 3 a zelenú do výšky 1. Na ďalší úder je na rade zelená do výšky 5, červená do výšky 3 a napokon modrá do výšky 1. Vidíme, že poradie loptičiek sa nám obrátilo.

1.4.1 Operácie so siteswapmi

V nadchádzajúcej časti si ukážeme, ako žonglovacie postupnosti vytvárať obmenou už známych postupností pomocou operácií. Následne, vďaka takto definovaným operáciám použijeme takzvaný vyhladzovací algoritmus na generovanie všetkých žonglovacích postupností o nami zvolených podmienkach.

Veta 1.8 (Zámena strán²⁰, (16), s. 19). *Nech $h = \{h_k\}_{k=0}^{p-1}$ je postupnosť nezáporných celých čísel dĺžky $p \geq 2$. i a j sú úder v danej postupnosti také, že $\phi(i) \geq j$. Potom pre novú postupnosť x , v ktorej je výška hodu na úder i rovná $x_i = h_j + j - i$ a výška hodu na úder j rovná $x_j = h_i + i - j$, platí ekvivalencia:*

(i) *x je siteswapom práve vtedy, keď $\{h_k\}_{k=0}^{p-1}$ je siteswapom.*

(ii) *Aritmetický priemer x je rovnaký ako aritmetický priemer h .*

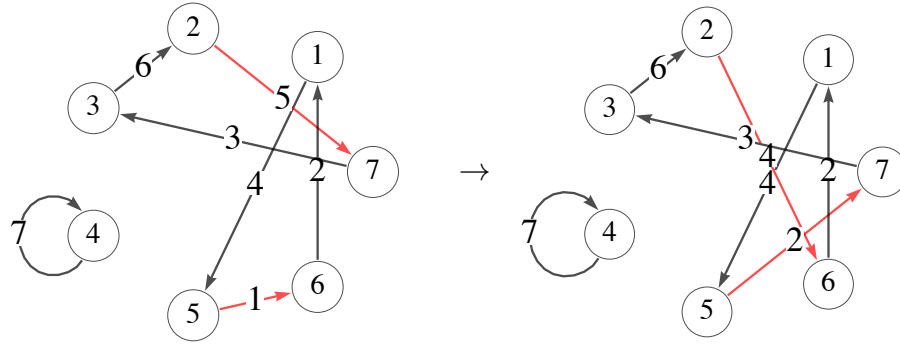
(iii) *Počet loptičiek žonglovaných v x je rovnaký, ako počet loptičiek pre h*

a takto definovanú operáciu nazývame zámena strán v úderoch i a j .

¹⁹Príloha A - /siteswapy/09_531.jml

²⁰Slovom siteswap označujeme žonglovaciu postupnosť (tak ako aj žonglérska komunita v praktickom žonglovaní), v niektorej literatúre sa tak označuje aj operácia, ktorú v tomto texte nazývame *zámena strán*.

Dôkaz. (i) je zřejmé tvrdenie, stačí si uvedomiť, že $x_i + i = h_j + j$ a $x_j + j = h_i + i$. (ii) plynie zo vzťahu $h_i + h_j = (h_j + j - i) + (h_i + i - j) = x_i + x_j$. (iii) je zřejmá z (ii), keďže pri zachovaní aritmetického priemeru je počet loptičiek rovnaký. □



Obr. 18: Záměna strán 2. a 5. hodu. Hodom na úderý 2 a 5 sme zamenili úderý, v ktoré dopadnú.

Príklad 1.9 (Obrázok 18²¹). Nech je daný siteswap 4567123. Prevedieme záměnu strán v úderoch 1 a 4.

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ & & & & & & & & \rightarrow & & & & & & & \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & & & 4 & 6 & 7 & 2 & 2 & 3 \end{array}$$

Věta 1.9 (Cyklická záměna, (16), s. 19). Nech $h = \{h_k\}_{k=0}^{p-1}$ je postupnosť nezáporných celých čísel dĺžky $p \geq 2$. Pre postupnosť $x' = h_{p-1}h_0h_1 \dots h_{p-2}$ platí ekvivalencia:

- (i) x' je siteswapom práve vtedy, keď $\{h_k\}_{k=0}^{p-1}$ je siteswapom.
- (ii) Aritmetický priemer x' je rovnaký ako aritmetický priemer h .
- (iii) Počet loptičiek žonglovaných v x' je rovnaký, ako počet loptičiek pre h .

A takto definovanú operáciu nazývame cyklická výměna.

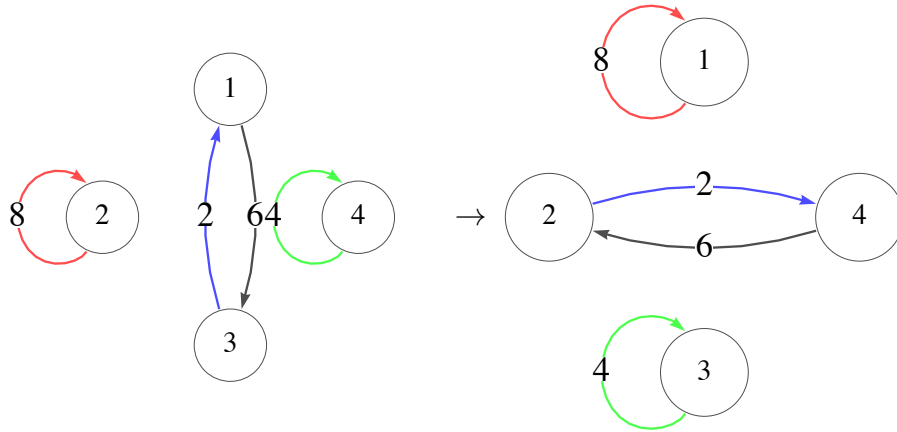
Dôkaz. (i) plynie zo skúšky permutácie, (ii) a (iii) sú zřejmé. □

²¹Príloha A - /siteswapy/10_1.4567123.jml, /siteswapy/10_2.4467223.jml

Cyklická záměna nám dovoľuje začať siteswap ktorýmkoľvek hodom. Cyklické diagramy žonglovacích postupností sú pri cyklickej zámene rovnaké.

Príklad 1.10 (Obrázok 19²²). Cyklická záměna siteswapu 6824.

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 8 & 2 & 4 & 6 \end{array}$$



Obr. 19: Cyklická záměna. Spôsobuje otočenie diagramu.

Veta 1.10 (Vertikálna záměna, (16), s. 23). *Nech $h = \{h_k\}_{k=0}^{p-1}$ je postupnosť nezáporných celých čísel, d je celé číslo také, že $d \geq -\min(h_0, \dots, h_k)$. Postupnosť h je žonglovacou postupnosťou práve vtedy, keď $h' = \{h_k + d\}_{k=0}^{p-1}$ je žonglovacou postupnosťou. Takto definovanú záměnu medzi h a h' nazývame vertikálna záměna o veľkosti d .*

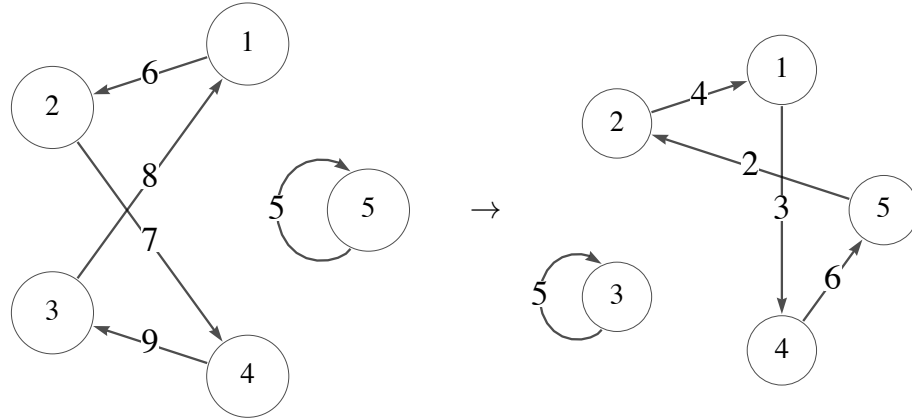
Dôkaz. Vertikálna záměna je priamym dôsledkom skúšky permutácie. □

V praxi si tak pričítaním konštanty d vieme vytvoriť nový siteswap. Počet loptičiek sa podľa vety o aritmetickom priemere zmení o veľkosť d .

Príklad 1.11 (Obrázok 20²³). Vertikálna záměna siteswapu 67895 o veľkosti -3 vytvára siteswap 34562. Zo siteswapu pre 7 loptičiek sme vytvorili siteswap pre 4 loptičky.

²²Príloha A - /siteswapy/11.6824.jml

²³Príloha A - /siteswapy/12.1.67895.jml, /siteswapy/12.2.34562.jml



Obr. 20: Vertikálna zámena. Vytvára otočený diagram.

1.4.2 Vyhľadovací algoritmus

Vytvorili sme si dostatok nástrojov na to, aby sme plynule prechádzali medzi siteswapmi. Vezmime si teraz ľubovoľnú žonglovaciu postupnosť o dĺžke p , na ktorú potrebujeme n loptičiek. Budeme sa snažiť ju upravovať do nejakého základného tvaru tak, aby sa nám počet loptičiek, ani perióda nezmenili. Cyklická zámena, ani zámena strán nám počet loptičiek, ani periódu nijak neovplyvnili, takže ich môžeme ľubovoľne používať. Za základný tvar si vezmime konštantnú postupnosť (fontánu, alebo kaskádu) o perióde p . Ukážeme si algoritmus, ktorý nám danú žonglovaciu postupnosť „vyhladí“ do tohto tvaru. Navyše, keď si uvedomíme, že zámena strán sa dá použiť aj naopak a cyklická výmena aplikovaním p krát posunie postupnosť do pôvodného stavu, zistíme, že dôsledkom tohto algoritmu je nasledovná veta:

Veta 1.11 (Veta o generovaní všetkých žonglovacích postupností, (16), s. 21). *Žonglovacia postupnosť môže byť prevedená na akúkoľvek žonglovaciu postupnosť o rovnakom počte loptičiek a dĺžke použitím operácií zámena strán a cyklická výmena.*

Dôkaz. Plynie priamo z viet o zámene strán a cyklickej zámene pri použití Vyhľadovacieho algoritmu popísaného nižšie. □

Vyhľadovací algoritmus ((16), s. 20)

Majme danú vstupnú postupnosť $h = \{h_k\}_{k=0}^{p-1}$ nezáporných celých čísel o dĺžke $p \geq 1$.

1. Ak h je konštantná postupnosť, ukončí program a výstupom je táto postupnosť. Inak pokračuj
2. preved' cyklické zámény tak, aby hod s najväčšou výškou bol na úder 0 a hod s menšou, než najväčšou výškou bol na úder 1. Ak sa výšky hodov h_0 a h_1 líšia len o 1, ukončí program a výstupom je táto postupnosť, ktorá nie je siteswapom. Inak pokračuj
3. preved' zámenu strán hodov h_0 a h_1 a h prepíš na novú postupnosť. Vráť sa na krok 1.

Dôkaz funkčnosti algoritmu. Konečnosť algoritmu je zaistená krokom 3, nakoľko zámene strán znižuje výšku najvyššieho hodu. Ak je na vstupe daná žonglovacia postupnosť tak zo zavedenia zámene strán a cyklickej zámene plynie, že na výstupe bude taktiež žonglovacia postupnosť (plynie z (i) vo vetách o zámene strán a cyklickej zámene) o rovnakej dĺžke a počte loptičiek (plynie z (ii) vo vetách o zámene strán a cyklickej zámene). Rovnako, ak je na vstupe nežonglovacia postupnosť, tak aj na výstupe dostaneme postupnosť nežonglovaciú. \square

Príklad 1.12. Vezmime si napríklad postupnosť 4174^{24} dĺžky 4.

$4174 \rightarrow 7441 \rightarrow 5641 \rightarrow 6415 \rightarrow 5515 \rightarrow 5155 \rightarrow 2455 \rightarrow 5245 \rightarrow 3445 \rightarrow 5344 \rightarrow 4444$

Algoritmus prebehol do konca a zistili sme, že na vstupe bola žonglovacia postupnosť o 4 loptičkách.

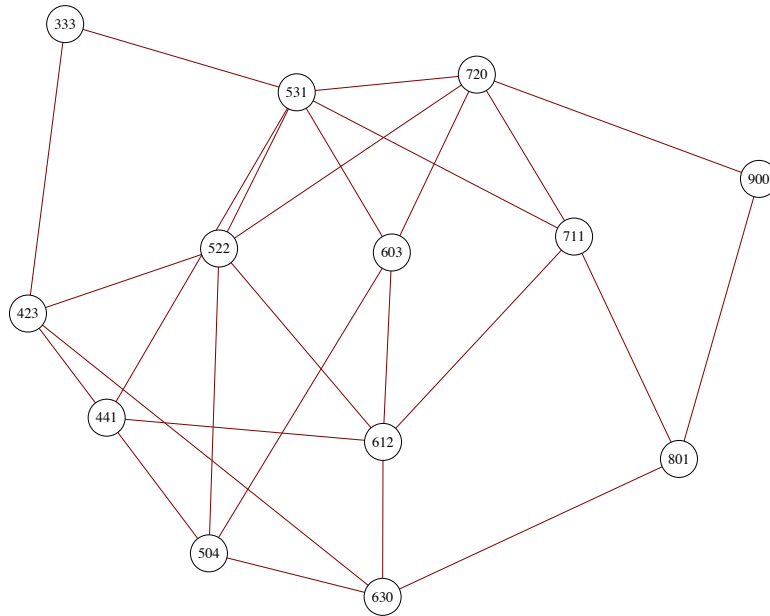
Príklad 1.13. Vezmime si postupnosť 124. Je zjavné, že nebude žonglovacou, keďže nespĺňa ani nutnú podmienku celočíselného aritmetického priemeru.

$124 \rightarrow 412 \rightarrow 232 \rightarrow 322$

Na výstupe sme dostali nekonštantnú postupnosť, čo je očakávaný výsledok.

²⁴Príloha A - /siteswapy/13_4174.jml

Vygenerujme si teraz všetky žonglovacie postupnosti pre 3 loptičky²⁵ s periódou 3 (Obrázok 21). Vezmime si najvyšší možný hod pre n loptičiek v siteswape periódy p . Bude ním hod $n \cdot p$ v postupnosti $(n \cdot p)00 \dots 0$. V našom prípade je to siteswap 900. Začneme najvyšším hodom a postupným prevádzaním zámény strán a cyklických zámien prejdeme všetkými možnosťami, až po vyhladenú postupnosť 333.



Obr. 21: Graf prechodu všetkých možností žonglovacích postupností pre 3 loptičky na perióde 3. Jednotlivé vrcholy sú žonglovacie postupnosti, hrany spájajú možný prechod medzi postupnosťami užitím zámény strán a cyklických zámien.

1.5 Počet žonglovacích postupností

Jednou z hlavných otázok v matematike žonglovania je počet všetkých žonglovacích postupností, ktoré môže žonglér predvádzať. Počet loptičiek, dĺžka žonglovacej postupnosti, maximálna výška hodu. To všetko ovplyvňuje výsledok tejto úlohy. Samozrejme, ak by sme neobmedzili ani jeden z týchto vplyvov, odpoveď by bola nekonečno. Ak by sme obmedzili len jeden faktor, stále by existovalo nekonečne veľa mo-

²⁵Príloha A - /siteswapy/18_lopticky/

žností (v prípade vynechania triviálnych možností ako počet loptičiek 0 a podobne). Rovnako, výsledok nekonečno obdržíme, ak by sme obmedzili maximálnu výšku hodu a počet loptičiek (opäť vynecháme triviálne možnosti). Pokúsme sa najprv spočítať počet všetkých generátorov.

1.5.1 Vlastnosti generátorov žonglovacích postupností

V tejto podkapitole si uvedieme niekoľko ďalších zaujímavých vlastností cyklických diagramov a generátorov a ukážeme si ako spočítať počet všetkých generátorov žonglovacích postupností pre danú periódu.

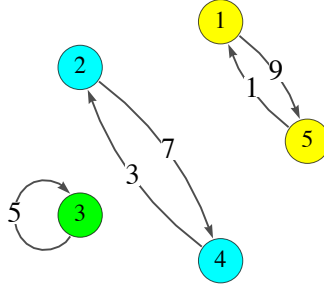
Pri zostavovaní žonglovacej postupnosti sme využili permutácie aby sme splnili podmienku dopadu jednej loptičky v jeden úder. Vďaka cyklickým diagramom poukážeme na hlavnú rolu permutácie v žonglovaní. Prosté zobrazenie konečnej množiny X do seba sa nazýva permutácia množiny X . Nech je X množina vrcholov cyklického diagramu. Hrana diagramu priradí jednoznačne každému začiatočnému vrcholu nejaký koncový vrchol. V tomto ponímaní môžeme brať cyklický diagram ako grafické znázornenie permutácie. Cyklom danej permutácie nazývame postupnosť prvkov V_1, \dots, V_k , pre ktoré platí $\pi(V_1) = V_2, \pi(V_2) = V_3, \dots, \pi(V_k) = V_1$. Sú to teda vrcholy prepojené hranami. Každú permutáciu vieme rozložiť na disjunktné cykly a pomocou cyklov ju zapísať.

Príklad 1.14 (Obrázok 22²⁶). Cyklický diagram siteswapu 97531 (s ohľadom na poradie hodov) znázorňuje permutáciu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

ktorú zapíšeme pomocou cyklov ako $(15)(24)(3)$.

²⁶Príloha A - /siteswapy/14_97531.jml



Obr. 22: Cyklický diagram siteswapu 97531.

Počet všetkých cyklických diagramov o n vrcholoch spočítame ako počet n -prvkových permutácií. Je ich preto $n!$. Počet permutácií n objektov rozložených do m orientovaných cyklov dokážeme spočítať pomocou Stirlingových čísel 1. druhu²⁷. Budeme ich značiť $S_1(n, m)$. Stirlingové číslo teda udáva počet cyklických diagramov na n vrcholoch obsahujúcich m cyklov. V Tabuľke 1 sú uvedené Stirlingove čísla 1. druhu pre niekoľko začiatočných hodnôt.

	1	2	3	4	5	... m
1	1					
2	1	1				
3	2	3	1			
4	6	11	6	1		
5	24	50	35	10	1	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots
n						

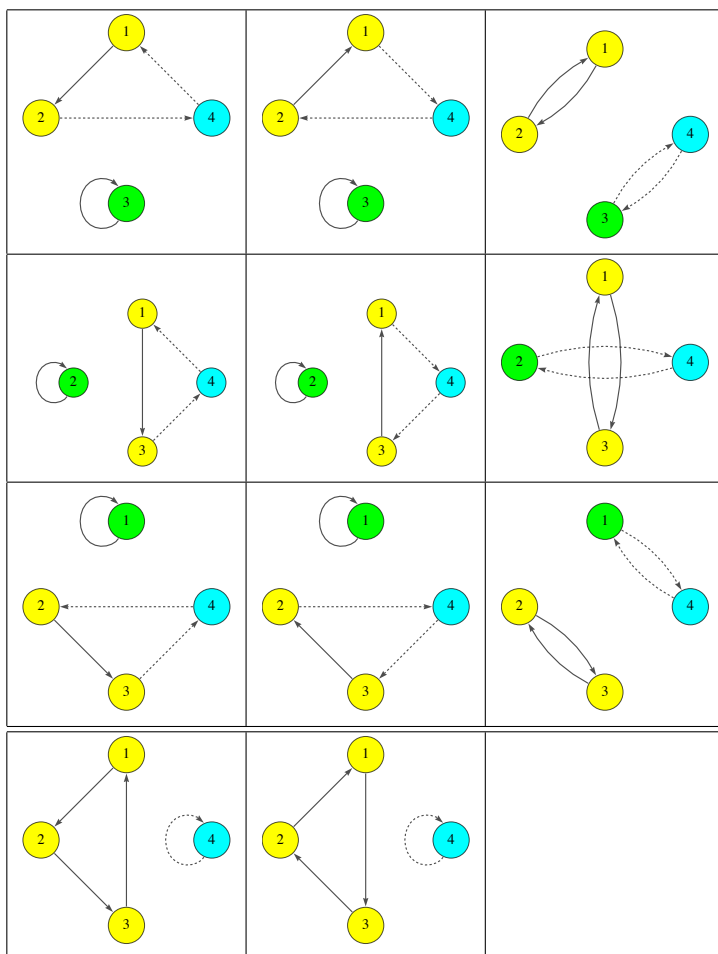
Tabuľka 1: Stirlingove čísla 1. druhu $S_1(n, m)$.

Čísla $S_1(n, m)$ môžeme zadať pomocou rekurentného vzťahu:

$$S_1(n + 1, m) = nS_1(n, m) + S_1(n, m - 1).$$

Interpretovať v našom kontexte grafov ho môžeme takto (Obrázok 23): Ak zväčšíme graf o n vrcholoch o ďalší vrchol V na pozícii $n + 1$, tak V sa bude nachádzať buď v nejakom cykle, alebo sám bude tvoriť cyklus (slučku). Máme práve n možností ako ho vložiť za niektorý z n vrcholov grafu. Ak je nový vrchol slučkou, tak sám tvorí m -tý cyklus a stačí nám ho priradiť ku grafu o n vrcholoch a $m - 1$ cykloch, preto $S_1(n, m - 1)$. Spolu dostávame $S_1(n + 1, m) = nS_1(n, m) + S_1(n, m - 1)$.

²⁷Používame Stirlingove čísla v absolútnej hodnote.



Obr. 23: $S_1(4, 2)$ vytvorené z $S_1(3, 2)$ a $S_1(3, 1)$.

Súčet Stirlingových čísel 1. druhu pre n prvkov cez všetky cykly m je veľmi jednoduché počítať.

Veta 1.12. Platí, že

$$\sum_{m \in \{1, \dots, n\}} S_1(n, m) = n!.$$

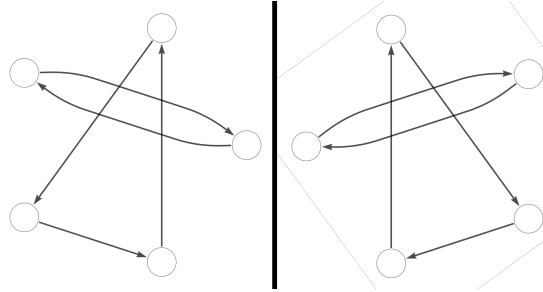
Dôkaz. Dôkaz je triviálny, stačí si uvedomiť, že sčítame počet n -prvkových permutácií cez všetky rozloženia do m cyklov. Celkovo ich musí byť rovnako ako všetkých n -prvkových permutácií, teda $n!$. □

Zamyslime sa nad tým, čo sa stane ak zmeníme orientáciu všetkých hrán v danom diagrame (Obrázok 24²⁸). Dostaneme nový cyklický diagram, a teda aj nový

²⁸Príloha A - /siteswapy/15_23122.jml, /siteswapy/15_33342.jml

generátor žonglovacej postupnosti. Nazvime ho opačným generátorom žonglovacej postupnosti. Opačný generátor získame ako osovo súmerný obraz pôvodného diagramu.

Definícia 1.8. Nech g je generátor žonglovacej postupnosti. *Opačným generátorom g^{-1}* nazývame generátor, ktorého cyklický diagram má orientáciu všetkých hrán opačnú ako g .



Obr. 24: Generátor 23122 a jemu opačný generátor 33342.

Pomocou opačných generátorov môžu žongléri generovať siteswapy pomerne jednoducho a rýchlo. Stačí nakresliť jeden generátor a následne otočiť všetky hrany diagramu, dostaneme tak rovno 2 generátory. Počet cyklov v generátore a opačnom generátore bude zrejme zhodný. Každý generátor je žonglovacou postupnosťou a nakoľko každý cyklický diagram je reprezentovaný nejakým generátorom, tak aj opačný generátor bude žonglovacou postupnosťou.

Veta 1.13. *Podiel súčtu hodov generátora g a opačného generátora g^{-1} s dĺžkou periódy p generátora je celočíselný a rovný nanajvýš dĺžke periódy.*

Dôkaz. Nech p je perióda generátora g . Ku každej nenulovej hrane v cyklickom diagrame existuje hrana opačná. Ak má hrana v g dĺžku k , tak hrana opačná má dĺžku $n - k$ a ich súčet $k + (n - k) = n$. Počet nulových hrán generátora g označme z . Súčet všetkých hodov g a g^{-1} je $n(n - z)$ a celkový podiel je

$$\frac{n(n - z)}{n} = n - z \leq n.$$

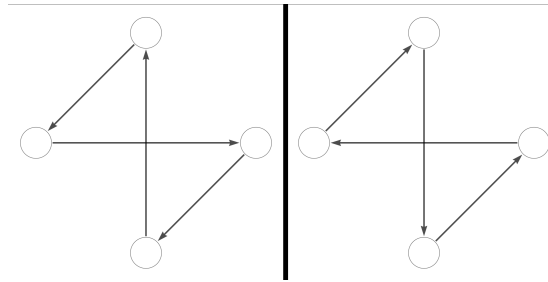
□

Veta 1.14. Podiel súčtu hodov generátora g a opačného generátora g^{-1} s dĺžkou periódy p je rovný $p - z$, kde z je počet nulových hodov generátora g .

Dôkaz. Plynie bezprostredne z dôkazu predošlej vety. □

Generátor je reprezentant cyklických diagramov, ktoré sú identické až na otočenie. Pre niektoré diagramy platí, že zmenou orientácie hrán na opačnú a otočením získame diagram pôvodný. Pre generátor reprezentujúci takýto diagram platí $g \sim g^{-1}$, kde \sim znamená, že jeden generátor vieme previesť na druhý cyklickou zámenou (Obrázok 25²⁹).

Definícia 1.9. Samodružným generátorom nazývame generátor g , pre ktorý platí $g \sim g^{-1}$.



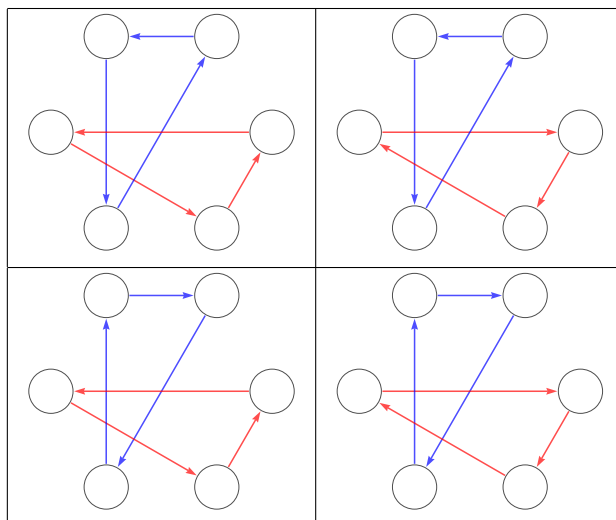
Obr. 25: Samodružný generátor 1223.

Všetky generátory, ktoré pozostávajú zo slučiek a dvojcyklov sú zrejme samodružné. Pomocou generátorov a opačných generátorov však nie je možné vyskúmať počet všetkých možností. Ak by sme mali napríklad dva cykly, každý aspoň o troch prvkoch, tak sú 4 možnosti ich vzájomnej orientácie. Aj táto myšlienka sa dá generalizovať. Pre m cyklov, každý aspoň o troch prvkoch je 2^m možností ich vzájomnej orientácie (Obrázok 26).

1.5.2 Burnsideova veta

Aby sme spočítali počet všetkých generátorov žonglovacích postupností, bude vhodné reprezentovať ich cyklickými diagrammi. Následne nasadíme algebraické nástroje

²⁹Príloha A - /siteswapy/16_1223.jml



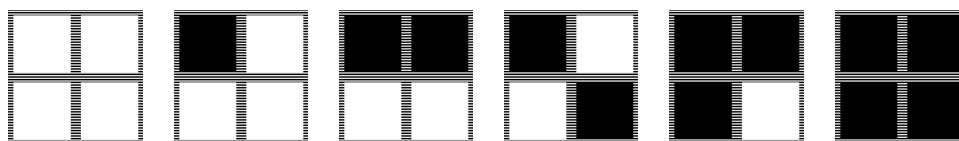
Obr. 26: Vzájomné orientácie dvoch trojcyklov.

na výpočet všetkých diagramov. V nasledujúcich riadkoch nebudeme uvádzať dôkazy všetkých viet ani prísne definovať pojmy, to nie je cieľom tohto textu, ide nám v podstate o intuitívne pochopenie a efektívne využitie algebraického aparátu. Čitateľovi so záujmom o dôslednejší prístup doporučujeme napríklad *Základy algebry* od Davida Stanovského (18), ktorými bol inšpirovaný aj náš postup.

Uvedme si pre začiatok motivačný príklad, ktorý na prvý pohľad so žonglovaním vôbec nesúvisí, no pomôže nám pri interpretácii zložitejších pojmov.

Príklad 1.15 ((18), s. 102). Nech je daná šachovnica 2×2 . Zistite, koľkými spôsobmi je možné ofarbiť políčka šachovnice dvomi farbami. Dve ofarbenia sú totožné, ak je možné jedno z druhého dostať otočením štvorca.

Príklad sa dá vyriešiť veľmi jednoducho zakreslením všetkých možností (Obrázok 27).



Obr. 27: Ofarbenia šachovnice 2×2 dvomi farbami.

S týmto riešením sa samozrejme neuspokojíme. Pokúsme sa nájsť všeobecný po-

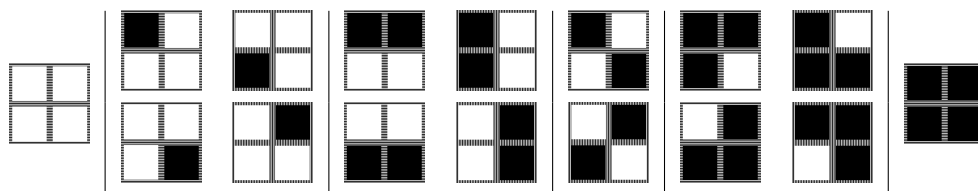
stup pri riešení podobných úloh. Asi nikomu by sa totiž nechcelo vykresľovať všetky možnosti pre šachovnicu 4×4 ofarbenú tromi farbami.

Množinu všetkých ofarbení dvomi farbami štvorca z príkladu pomenujme X . Uvažujme množinu symetrií G , ktoré zachovávajú štvorec, a teda je možné nimi vytvoriť jeho rovnaké ofarbenie. V našom prípade³⁰ sú to identita a otočenia o $\frac{\pi}{2}$, π , $3\frac{\pi}{2}$. Definujme grupu $\mathbf{G} = (G, \cdot, {}^{-1}, 1)$, ktorej prvkami budú dané rotácie, s operáciou skladania rotácií, opačným prvkom otočením o opačný uhol a identitou ako jednotkovým prvkom.

Môžeme si predstaviť, že prvky grupy \mathbf{G} hýbu prvkami množiny X , inak povedané: otáčajú jednotlivé ofarbenia šachovnice. Hovoríme, že *grupa \mathbf{G} pôsobí na množine X* . Zaveďme ďalej reláciu ekvivalencie \sim na X tak, že pre $x, y \in X$ je $x \sim y$, ak $\exists g \in G$ také, že $g(x) = y$. Dva prvky sú teda ekvivalentné ak je jeden možné dostať pomocou otočenia druhého. Množinu X vieme takto rozložiť na triedy ekvivalencie, ktoré nazveme *orbity*³¹ a značíme

$$[x] = \{y \in X : x \sim y\}.$$

V našom príklade nájdeme celkovo 6 orbít, do ktorých sa množina všetkých ofarbení rozpadne (Obrázok 28). Ak pre nejaký prvok $x \in X$ platí, že $g(x) = x$ pri akcii



Obr. 28: Orbity ofarbenia šachovnice 2×2 dvomi farbami.

³⁰V zadaní motivačnej úlohy je uvedené, že totožné ofarbenia je možné dostať otočením. Rovnako to bude aj pri vyšetrovaní prípadov v cyklických diagramoch. Pri väčšej všeobecnosti by sme však mohli úlohu jednoducho rozšíriť aj o ďalšie symetrie.

³¹Upozorňujeme na to, že pojem orbita je na tomto mieste v inom zmysle ako orbita žonglovacej postupnosti (viď Definícia 1.6).

(pôsobení) nejakého prvku $g \in G$, nazývame ho *pevným bodom prvku g* . Množinu všetkých pevných bodov daného prvku g značíme

$$X_g = \{x \in X : g(x) = x\}.$$

Identita zachováva všetky ofarbenia, preto $X_{id} = X$. Počet pevných bodov zachovaných pri pôsobení identity je $|X_{id}| = |X| = 2^4 = 16$.

Otočenie o π zachováva ofarbenie všetkých políčok jednou farbou (čiernou i bielou) a ofarbenie diagonálnych políčok (taktiež 2 možnosti) a $|X_\pi| = 4$.

Otočenia o $\frac{\pi}{2}$ a $3\frac{\pi}{2}$ sú zachované len pri jednofarebných ofarbeniach. Preto $|X_{\frac{\pi}{2}}| = |X_{3\frac{\pi}{2}}| = 2$.

Konečne máme zavedené všetky pojmy na to, aby sme mohli sformulovať Burnsideovu vetu, vďaka ktorej dokážeme úlohy podobného typu vyriešiť.

Veta 1.15 (Burnsideova, ((18), Veta 19.4.)). *Ak pôsobí konečná grupa \mathbf{G} na konečnú množinu X , potom*

$$|X/\sim| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g|,$$

kde X/\sim je množina všetkých tried ekvivalencie \sim (orbít).

Tvrdenie môžeme preložiť v príklade takto: „Počet rôznych typov ofarbenia je rovný priemernému počtu pevných bodov pri pôsobení otočení z grupy \mathbf{G} “. Riešenie úlohy použitím Burnsideovej vety si na záver znázorníme v prehľadnej tabuľke (Tabuľka 2).

Dosadením do vzorca dostávame počet možných ofarbení:

$$\frac{1}{1 + 2 + 1}(16 + 2 \cdot 2 + 4) = 6.$$

1.5.3 Počet generátorov žonglovacích postupností

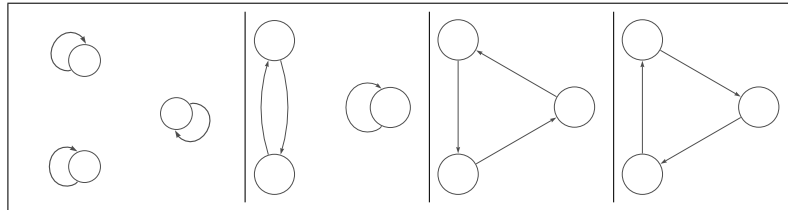
Počet všetkých generátorov spočítame pomocou Burnsideovej vety. Označme množinu všetkých cyklických diagramov žonglovacích postupností danej dĺžky p ako X .

g	#	$ X_g $
id	1	16
$\circlearrowleft \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}$	2	2
$\circlearrowleft \pi$	1	4

Tabuľka 2: V prvom stĺpci sú prvky grupy \mathbf{G} , v druhom stĺpci počet prvkov rovnakého typu, v treťom stĺpci je počet pevných bodov daných prvkov.

V reči teórie grafov je X množina všetkých rovinných orientovaných grafov na p vrcholech, ktoré obsahujú len cykly a slučky. Dva cyklické diagramy sú ekvivalentné ak jeden z druhého získame otočením. To znamená, že pôsobiaci grupa \mathbf{G} v našom prípade pozostáva z otočení o $k\frac{2\pi}{p}$ pre $k \in \{0, \dots, p-1\}$. Otočenia značíme $\circlearrowleft k$, v prípade identity (pre $k = 0$) ponecháme značenie id . Budeme sa zaoberať hľadáním pevných bodov pre dané otočenie. Pevným bodom je každý diagram, ktorý sa pri danom otočení nezmení (nezmení sa ani orientácia cyklov) pri zachovaní poradia vrcholov.

Príklad 1.16. Pre siteswapy o perióde 3 existujú práve 4 generátory. Úlohu môžeme vyriešiť opäť jednoduchým vykreslením všetkých možností (Obrázok 29).



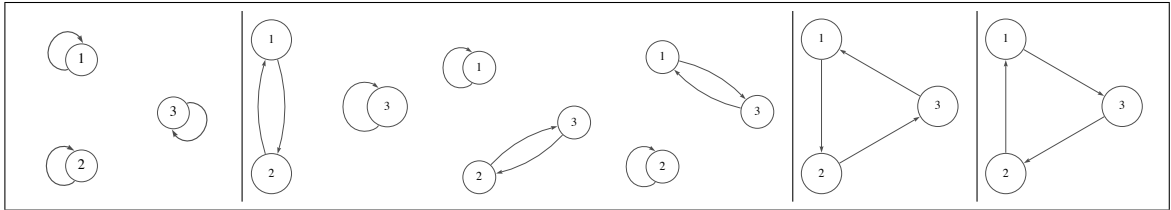
Obr. 29: Generátory siteswapov o perióde 3.

Riešenie s využitím Burnsideovej vety je nasledovné:

Grupa otočení \mathbf{G} pozostáva z troch prvkov: $\{id, \circlearrowleft 1, \circlearrowleft 2\}$.

Množina X , na ktorú bude grupa \mathbf{G} pôsobiť pozostáva zo všetkých cyklických diagramov (Obrázok 30).

Pre id je každý diagram zároveň aj pevným bodom. Počet pevných bodov identity



Obr. 30: Cyklické diagramy o perióde 3.

je tým pádom $|X_{id}| = |X| = 3!$. Pre obe rotácie $\circlearrowleft 1, \circlearrowleft 2$ sú pevnými bodmi všetky diagramy, ktoré pozostávajú z rovnako dlhej hrany vychádzajúcej z každého vrcholu. Tie sú práve tri: slučka, hrana dĺžky 1 a hrana dĺžky 2. Preto platí $|X_1| = |X_2| = 3$. Vytvoríme opäť tabuľku pre náš výpočet (Tabuľka 3):

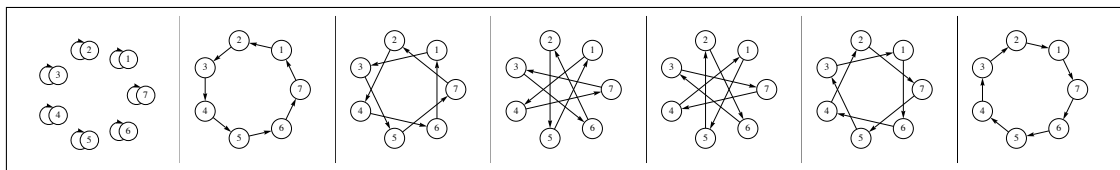
g	#	$ X_g $
id	1	$3!$
$\circlearrowleft 1, \circlearrowleft 2$	2	3

Tabuľka 3

Môžeme dosadiť do vzorca a vypočítať počet generátorov:

$$\frac{3! + 2 \cdot 3}{3} = 4$$

Rovnakým spôsobom ako pre diagram o 3 vrcholoch by sme ale mohli pokračovať pre ľubovoľný graf o prvočíselnom počte vrcholov. Stačí si totiž uvedomiť, že pevné body pri akejkoľvek rotácii rôznej od identity sú zachované len v prípade, že všetky hrany majú rovnakú dĺžku (Obrázok 31).



Obr. 31: Pevné body neidentických rotácií pre diagramy o 7 vrcholoch.

Pozorovanie 1. Počet generátorov dĺžky p , kde p je prvočíslo je (Tabuľka 4)

$$\frac{p! + p \cdot (p - 1)}{p} = (p - 1)! + p - 1$$

Pre zložené čísla sa situácia značne skomplikuje. Ukážeme si použitie Burnsideovej vety pre diagramy o 6 vrcholoch. Vykreslenie všetkých možností tejto úlohy by už požadovalo výraznú dávku entuziazmu a trpezlivosti.

g	$\#$	$ X_g $
id	1	$p!$
$\circlearrowleft 1, \dots, \circlearrowleft (p-1)$	$p-1$	p

Tabuľka 4

Príklad 1.17. Spočítajme počet všetkých generátorov periódy 6 (Tabuľka 5).

Grupa rotácií \mathbf{G} obsahuje id a otočenia $\circlearrowleft 1, \dots, \circlearrowleft 5$.

Pre identitu je opäť každý graf zároveň aj pevným bodom, preto

$$|X_{id}| = |X| = 6!.$$

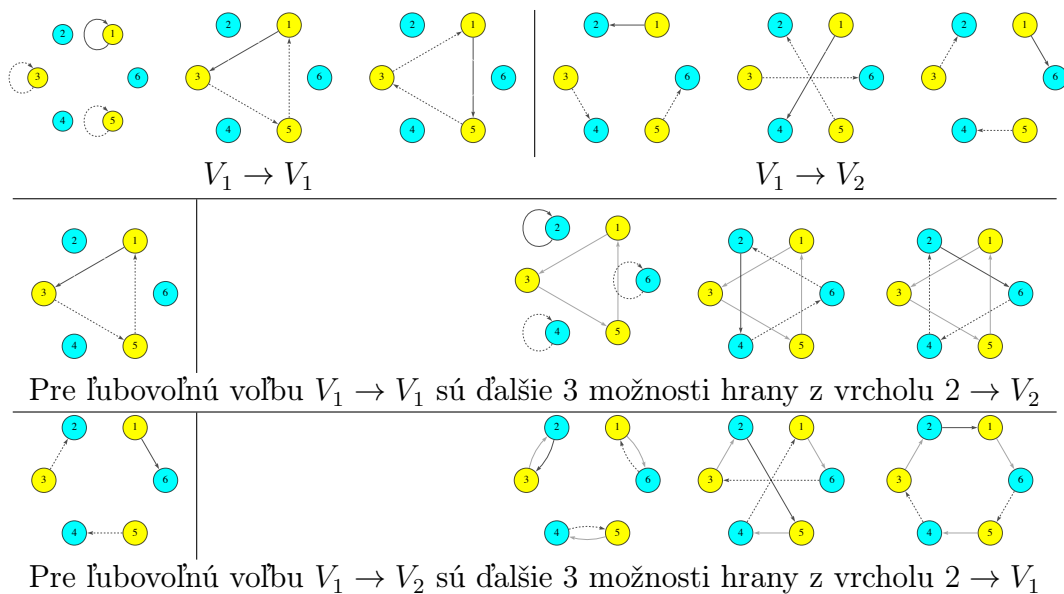
Pre $\circlearrowleft 1$ sú pevnými bodmi všetky diagramy s hranami rovnakej dĺžky. Ak by sme totiž otočili graf pomocou $\circlearrowleft 1$, tak v prvom vrchole musí byť rovnaká hrana, aká v ňom bola pred otočením. V predošlom vrchole musí byť taktiež rovnaká hrana ako pred otočením. A toto platí pre každý vrchol. Týmto princípom môžeme postupovať aj pre $\circlearrowleft 5$, stačí si uvedomiť, že to je $\circlearrowleft 1$ v zápornom zmysle.

$$|X_1| = |X_5| = 6.$$



Obr. 32: Rozklady množiny vrcholov pre $\circlearrowleft 2, \circlearrowleft 3, \circlearrowleft 4$.

Pre $\circlearrowleft 2$ sa diagram rozdelí na dve trojice vrcholov: $V_1 = \{1, 3, 5\}$ a $V_2 = \{2, 4, 6\}$, z ktorých musí smerovať rovnaká hrana (Obrázok 32a). Hrana z prvého vrcholu (respektíve ľubovoľného vrcholu z V_1) smeruje buď do V_1 alebo V_2 a v oboch prípadoch má 3 možnosti kde skončí (Obrázok 33). Spolu je $2 \cdot 3$ možností umiestnenia hrany. Tým sme ale vytvorili aj hrany z vrcholov 3 a 5. Potrebujeme ešte vytvoriť hrany z vrcholu 2 (respektíve ľubovoľného vrcholu z V_2). Tá bude smerovať do množiny vrcholov, v ktorej ešte nekončí žiadna hrana (je to teda opačná množina oproti prvému výberu). Tu už ostávajú len 3 možnosti výberu koncového vrcholu. Spolu



Obr. 33

dostávame $3 \cdot 3 \cdot 2$ možností. Tým sme vytvorili aj hrany z vrcholov 4 a 6 a diagram je kompletný. Rovnako by sa nám rozpadla množina vrcholov pre $\odot 4$. Preto

$$|X_2| = |X_4| = 3^2 \cdot 2$$

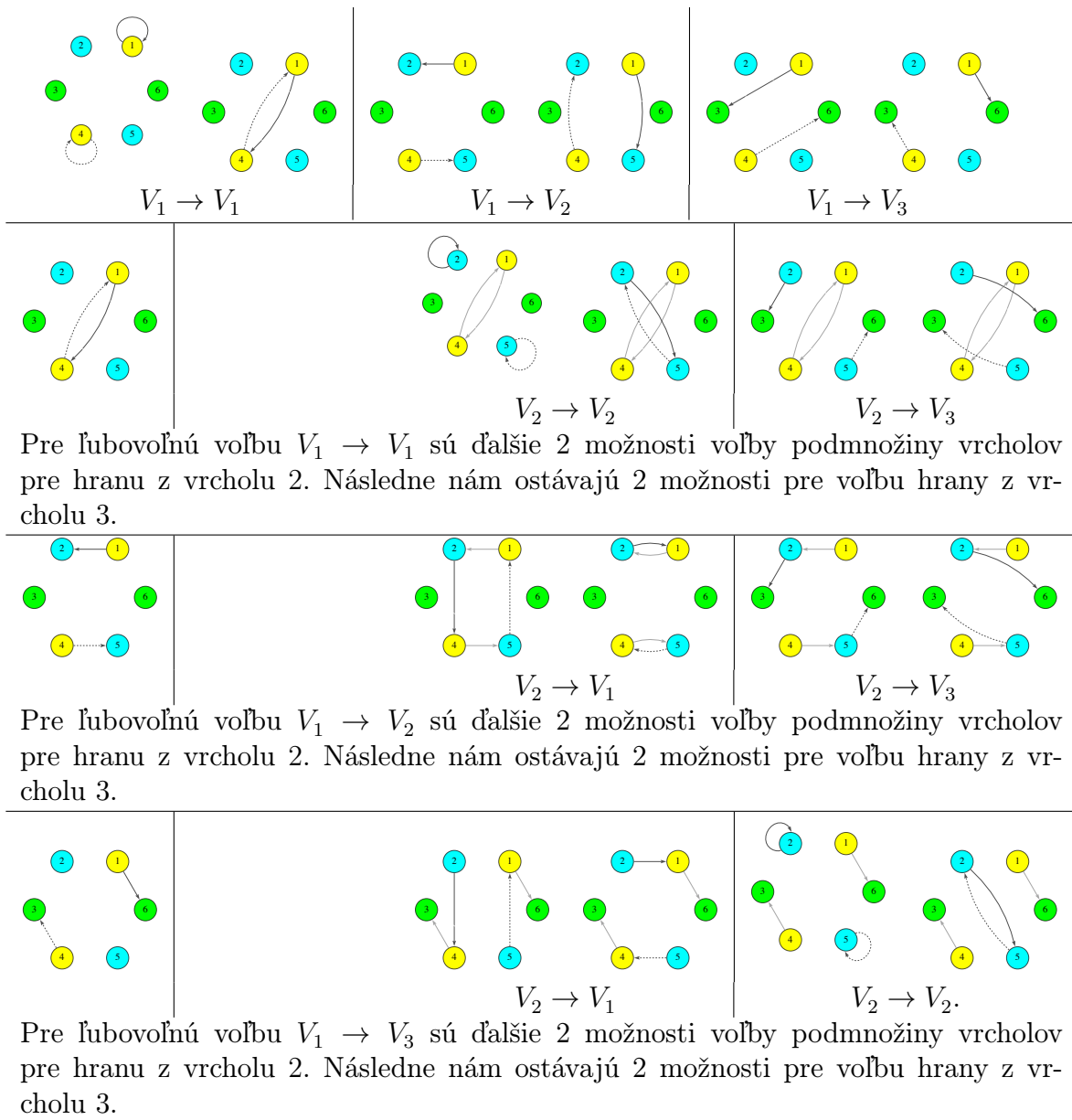
Pre $\odot 3$ rozložíme množinu vrcholov na tri dvojice: $V_1 = \{1, 4\}$, $V_2 = \{2, 5\}$ a $V_3 = \{3, 6\}$ (Obrázok 32b). Postupujeme podobne ako v predošlom prípade (Obrázok 34). Z vrcholu 1 vyberáme, do ktorej z podmnožín V_1, V_2, V_3 bude hrana smerovať a v každej podmnožine máme 2 možnosti výberu koncového vrcholu. Rovnako dlhá hrana bude vychádzať z vrcholu 4. Pre vrchol 2 máme už len 2 možnosti výberu podmnožiny a v každej podmnožine 2 vrcholy. Tým zaistíme aj hranu vo vrchole 5. Pre 3. vrchol a tým pádom aj 6. vrchol ostala posledná podmnožina a v nej 2 možnosti. Pevných bodov pre $\odot 3$ je celkovo³²:

$$|X_3| = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 2) \cdot 2 = 2^3 \cdot 3!$$

Pomocou Burnsideovej vety spočítame počet všetkých generátorov:

$$\frac{6! + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 3^2 \cdot 2! + 2^3 \cdot 3!}{1 + 2 + 2 + 1} = \frac{816}{6} = 136.$$

³²Pravá strana rovnice sa dá prepísať aj ako $3 \cdot 2^4$, no v súvislosti s ďalším postupom je uvedený zápis vhodnejší.



Obr. 34

g	#	$ X_g $
id	1	$6!$
$\circlearrowleft 1, \circlearrowleft 5$	2	6
$\circlearrowleft 2, \circlearrowleft 4$	2	$3^2 \cdot 2$
$\circlearrowleft 3$	1	$2^3 \cdot 3!$

Tabuľka 5

Takýto postup môžeme zovšeobecniť a dokázať vzťah, ktorého autorom je Antti Karttunen (8), avšak metóda jeho postupu nám nie je známa. Zdefinujme si vopred ešte niekoľko pojmov z teórie grup.

Definícia 1.10. Hovoríme, že grupa \mathbf{G} je generovaná prvkom $g \in \mathbf{G}$ ak jej nosná množina $G = \{g^n, n \in \mathbb{N}\}$.

Definícia 1.11. Grupa \mathbf{G} sa nazýva *cyklická*, ak je generovaná jedným prvkom.

Grupa rotácií, s ktorou pracujeme je zrejme cyklická, keďže je generovaná napríklad prvkom $\odot 1$. Zároveň je izomorfná aditívnej grupe \mathbb{Z}_n , kde n je počet prvkov (dĺžka periódy). Pre lepšiu názornosť si tak môžeme predstaviť rotácie ako celé čísla $0, \dots, n-1$, ich skladaniu v kladnom zmysle odpovedá operácia sčítania, v zápornom zmysle operácia odčítania. Skladanie rotácií je zrejme komutatívne. Grupa \mathbf{G} je teda abelovská.

Uvedomme si, ako sme spočítali v predošlom príklade počet diagramov o 6 vrcholoch napríklad pre rotáciu $\odot 4$ (Obrázok 32a). Jednoducho sme povedali, že tieto diagramy zostavíme rovnako ako pre rotáciu $\odot 2$. Rotácie $\odot 2, \odot 4$ a *id* tvoria podgrupu \mathbf{H} grupy \mathbf{G} generovanú $\odot 2$ alebo $\odot 4$. Prvky podgrupy sú „násobkami“ jeden druhého a je teda zrejmé, že budú uzavreté na operáciu skladania. Vo všeobecnosti môžeme uviesť nasledovné tvrdenie, v ktorom využijeme Bézoutovu rovnosť.

Veta 1.16 (Bézoutova rovnosť ((18), Veta 3.3.)). *Pre každú dvojicu prirodzených čísel a, b existujú celé čísla u, v splňajúce*

$$NSD(a, b) = au + bv.$$

Veta 1.17 ((18), str. 86). *Podgrupy grupy \mathbb{Z}_n sú práve $a\mathbb{Z}_n = \{az : z \in \mathbb{Z}_n\}, a \in \mathbb{Z}$.*

Dôkaz. Vďaka Bézoutovej rovnosti máme $NSD(a, n) = au + nv = (au \bmod n)$ a $NSD(a, n)$ generuje podgrupu $a\mathbb{Z}_n$. □

Každá podgrupa je tak generovaná jedným svojim (nenulovým) prvkom, napríklad $\circlearrowleft 2$ generuje podgrupu \mathbf{H} v predošlom prípade. V cyklických grupách totiž platí:

Veta 1.18 ((18), Veta 15.5.). *Každá podgrupa cyklickej grupy je cyklická.*

Definícia 1.12. Rádom grupy \mathbf{G} je počet prvkov jej nosnej množiny. Značíme ho $|G|$.

Definícia 1.13. Rádom prvku g v grupe \mathbf{G} je počet prvkov grupy generovanej týmto prvkom. Značíme ho $ord(g)$.

Rád prvku $ord(\circlearrowleft 2)$ generujúceho podgrupu \mathbf{H} v grupe rotácií nad množinou $\{id, \circlearrowleft 1, \dots, \circlearrowleft 5\}$ je $|H| = 3$. Inak povedané, je to najmenšie k také, že $k \cdot \circlearrowleft 2 = id$. Pre počítanie rádu prvku v cyklických grupách sa používa Eulerova funkcia:

Definícia 1.14. Eulerova funkcia $\varphi(n)$ značí pre $n > 1$ počet čísel intervalu $1, \dots, n - 1$ nesúdeliteľných s číslom n . Pre $n = 1$ definujeme $\varphi(1) = 1$.

Veta 1.19 ((18), Tvrdenie 3.9.). *Ak $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ je prvočíselný rozklad čísla $n > 1$, potom platí*

$$\varphi(n) = p_1^{k_1-1}(p_1 - 1)p_2^{k_2-1}(p_2 - 1) \dots p_m^{k_m-1}(p_m - 1).$$

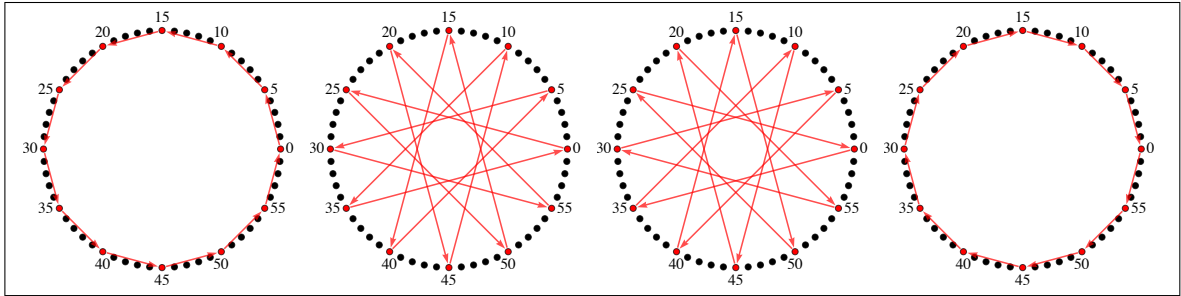
Príklad 1.18. $\varphi(60) = \varphi(2^2 \cdot 3 \cdot 5) = 2^1 \cdot (2 - 1) \cdot 3^0 \cdot (3 - 1) \cdot 5^0 \cdot (5 - 1) = 16$.

Veta 1.20 ((18), Dôsledok 15.7.). *Grupa \mathbb{Z}_n obsahuje pre každé k také, že $k|n$ práve $\varphi(k)$ prvkov rádu k .*

Vďaka tomuto tvrdeniu dokážeme nájsť rotácie, ktoré majú rovnaké vlastnosti. To znamená tie otočenia, ktoré generujú rovnaké diagramy, a teda zachovávajú počet pevných bodov.

Príklad 1.19 (Obrázok 35). Nech je daný cyklický diagram o 60 vrcholoch. Zistíte počet rotácií, ktoré zachovávajú rovnaký počet pevných bodov ako $\circlearrowleft 5$.

Číslo 5 delí 60. Podľa predošlej vety obsahuje grupa rotácií práve $\varphi(5) = 4$ prvky. Sú nimi $\{\circlearrowleft 5, \circlearrowleft 25, \circlearrowleft 35, \circlearrowleft 55\}$, ktoré generujú rovnaké podgrupy (Obrázok 35).



Obr. 35: Podgrupa rotácií generovaná $\{\circlearrowleft 5, \circlearrowleft 25, \circlearrowleft 35, \circlearrowleft 55\}$.

Po takejto dôkladnej príprave dokážeme spočítať počet generátorov ľubovoľnej periódy.

Veta 1.21. *Počet generátorov žonglovacej postupnosti dĺžky p je:*

$$G(p) = \frac{1}{p} \sum_{d|p} \varphi\left(\frac{p}{d}\right) \left(\frac{p}{d}\right)^d d!$$

Dôkaz. Nech je daná grupa \mathbf{G} pozostávajúca z prvkov $id, \circlearrowleft 1, \dots, \circlearrowleft (p-1)$ a množina X všetkých cyklických diagramov na p vrcholoch. Pri pôsobení grupy \mathbf{G} na množinu X je X_g množina pevných bodov pôsobenia prvku g . Použitím Burnsideovej vety dostávame počet všetkých neidentických cyklických diagramov rovný

$$\frac{1}{|\mathbf{G}|} \sum_{g \in \mathbf{G}} |X_g| = \frac{1}{p} \sum_{g \in \mathbf{G}} |X_g|.$$

Postupujeme podobne ako v príklade pre generátory dĺžky 6. Budeme hľadať pevné body pre danú rotáciu g . Každá rotácia g , rádu $ord(g) = k$ nám rozloží graf na $d = \frac{p}{k}$ množín vrcholov. Vytvorením hrany z 1. vrcholu si môžeme vybrať jednu z d množín vrcholov a v každej z nich je k možností, v ktorom vrchole hrana skončí. Pre prvý výber hrany máme $k \cdot d = p$ možností. Súčasne s prvou hranou vytvoríme rovnakú hranu z každého vrcholu v rovnakej rozkladovej množine. Pre výber druhej hrany z 2. vrcholu opäť vyberáme jednu z množín, do ktorých bude smerovať, v tomto prípade nám ich ostalo voľných už len $d-1$ a v každej z nich opäť k možností koncového vrcholu hrany. Rovnakým spôsobom budeme pokračovať, až kým nevyčerpáme všetky hrany, celkovo teda d - krát. Spolu máme pre prvok g rádu k

$$|X_g| = k^d d! = k^{\frac{p}{k}} \left(\frac{p}{k}\right)! \text{ možností.}$$

Počet prvkov rovnakého rádu k spočítame pomocou Eulerovej funkcie $\varphi(k)$. Ak budeme sčítať všetky prvky cez ich rád a dosadíme do Burnsideovej vety, dostávame

$$\frac{1}{p} \sum_{g \in G} |X_g| = \frac{1}{p} \sum_{k|p} \varphi(k) (k)^{\frac{p}{k}} \left(\frac{p}{k}\right)!$$

Prevedieme substitúciu $k = \frac{p}{d}$ a dostávame dokazovaný vzorec

$$\frac{1}{p} \sum_{d|p} \varphi\left(\frac{p}{d}\right) \left(\frac{p}{d}\right)^d d!$$

□

Príklad 1.20. Ako sme mohli očakávať, počet generátorov bude pri zväčšovaní periódy rásť veľmi rýchlo. Silu vyjadreného vzorca si môžeme ukázať na výsledku pre spomínaných 60 vrcholov grafu. Počet generátorov periódy 60 je

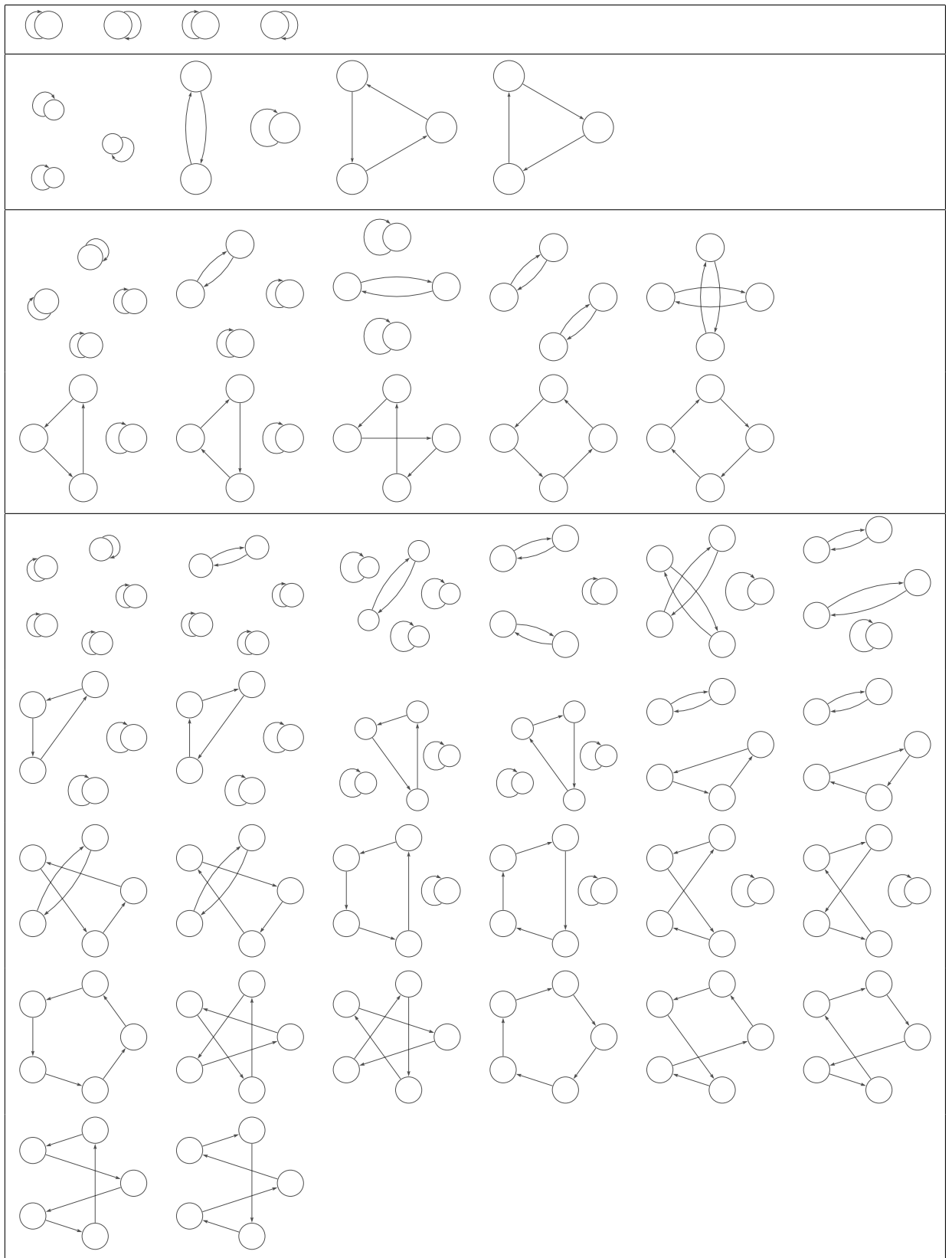
138 683 118 545 689 835 737 939 019 720 389 406 345 907 623 657 512 698 795 667 111 474 180 725 129 470 672.

Počet všetkých cyklických diagramov o 60 vrcholoch je 60!

8 320 987 112 741 390 144 276 341 183 223 364 380 754 172 606 361 245 952 449 277 696 409 600 000 000 000 000.

Podiel počtu diagramov a počtu generátorov je približne 60, s odchýlkou až na 39. desatinnom mieste. To znamená, že počet generátorov je približne rovný 59!.

Na záver ešte uvádzame tabuľku všetkých generátorov po periódu 5 (Obrázok 36), ktorú je možné použiť pri vytváraní vlastných siteswapov.



Obr. 36
48

1.5.4 Počet žonglovacích postupností

Aj keď sa nám podarilo spočítať počet generátorov pre danú periódu, tak aplikovať náš postup na všetky žonglovacie postupnosti nie je jednoduchá úloha. Využijeme miesto toho šikovnú metódu za pomoci takzvaných žonglovacích kariet. Rozmyslime si však ešte predtým, aké obmedzujúce podmienky je vhodné klásť na siteswapy, ktorých počet chceme získať.

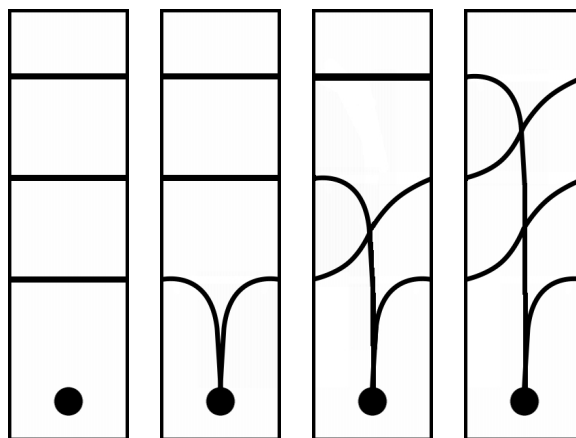
Ak máme danú žonglovaciu postupnosť dĺžky p , tak ohraničením maximálnej výšky hodu h dostávame nanajvýš $(h + 1)^p$ možností, čo je počet všetkých p -tic výšok hodov vrátane nulového hodu. Maximálny počet loptičiek bude zrejme podľa vety o aritmetickej postupnosti v tomto prípade h , keďže postupnosť s najvyššími hodnotami by bola $h \dots h$.

Rovnako ohraničením počtu loptičiek l dostávame konečný počet možností. Možný najvyšší hod by bol hod $l \cdot p$ v postupnosti $(l \cdot p) 0 \dots 0$ a ako bolo už ukázané, pre tento prípad máme žonglovacích postupností konečne mnoho, nanajvýš $(l \cdot p + 1)^p$.

Zafixovaním presného počtu loptičiek l pri postupnosti dĺžky p dostávame taktiež samozrejme konečne mnoho možností. Je ich určite menej ako možností pre maximálne l loptičiek.

Počet žonglovacích postupností s ohraničenou dĺžkou, počtom loptičiek a maximálnou výškou hodu je tým pádom taktiež konečný.

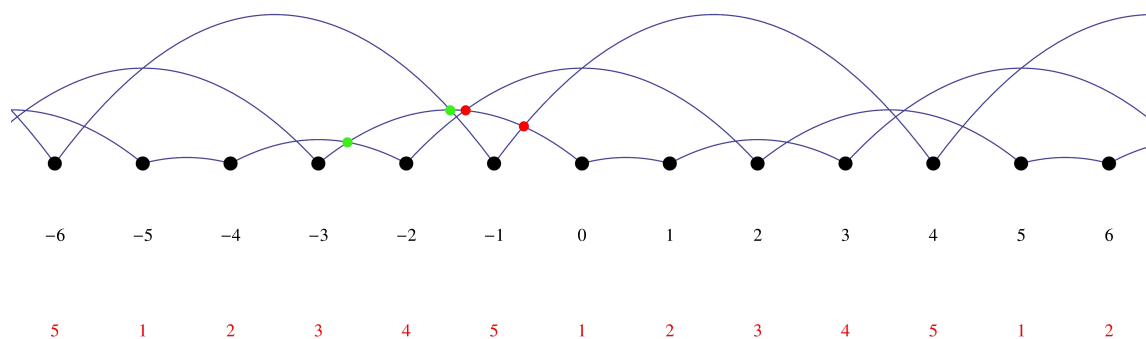
Označme počet všetkých siteswapov pre nanajvýš l loptičiek o perióde p ako $S(l, p)$. Na spočítanie presného výsledku použijeme princíp žonglovacích kariet (Obrázok 37). Žonglovaciu postupnosť dĺžky p o l loptičkách môžeme jednoznačne reprezentovať ako p -ticu zostavenú z $l + 1$ typov kariet a naopak, každá takáto p -tica odpovedá žonglovacej postupnosti. Karty spolu vytvárajú diagram podobný tomu základnému. Každá karta obsahuje práve jeden úder a vodorovné úsečky, alebo oblúky smerom dole a hore, v celkovom počte rovnakom ako počet loptičiek (orbít). Všetky karty na seba naväzujú. Do každého úderu môže viesť len jedna orbita, a preto



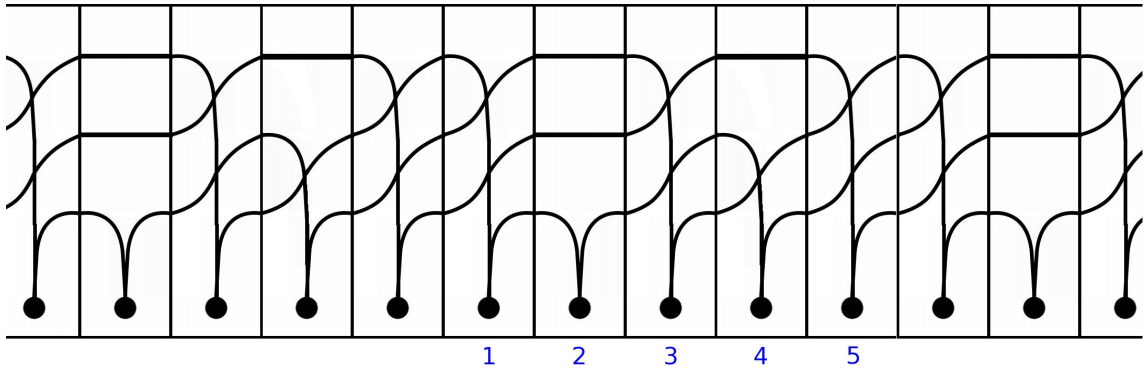
Obr. 37: Žonglovacie karty K_0 , K_1 , K_2 a K_3 pre 3 loptičky.

môže mať každá karta najviac jeden oblúk zahnutý dole, do bodu označujúceho úder. Oblúk hore posúva loptičku vždy o jeden stupeň vyššie na nasledovnej karte. Usporiadanie oblúkov a priamok je na kartách nasledovné: najnižšie sú po rade všetky oblúky hore, potom nasleduje oblúk dole a nad ním sú vodorovné úsečky. Existuje $l+1$ takýchto kariet (stačí spočítať všetky možnosti oblúku dole a pričítať nulovú kartu). Nulový hod bude obsahovať karta úsečiek - *nulová karta*. Každá iná karta obsahuje nejaký hod.

Vytvoríme na konkrétnom príklade z danej žonglovacej postupnosti súbor žonglovacích kariet.



Obr. 38: Základný diagram siteswapu 12345 s vyznačením priesečníkov nad spätným oblúkom z úderu 0.



Obr. 39: Karty žonglovacej postupnosti 12345.

Príklad 1.21 (Obrázky 38 a 39). Vezmime si postupnosť 12345. Na základnom diagrame zistíme koľko krát sa loptička „prepadla“ a „stúpila“. Pôjdeme od daného úderu (v Obrázku 38 vyberáme úder 0) naspäť po oblúku hodu, ktorý práve dopadol a počítame priesečníky s ostatnými oblúkmi. Ak nami volený oblúk pretína iný oblúk a prechádza po spätočnej ceste zvnútra von, nakreslíme červený bod, ak prechádza do vnútra iného oblúku, kreslíme bod zelený. Sčítame počet červených bodov c a spomedzi kariet priradíme danému úderu kartu K_{c+1} . Hodu výšky nula priradíme vždy kartu K_0 .

Na úder 0 teda použijeme kartu K_3 , úderu 1 priradíme kartu K_1 , pokračujeme kartami K_3 , K_2 a K_3 .

Nasledujúce vety plynú bezprostredne z predošlej konštrukcie.

Veta 1.22 ((16), s. 40). *Počet všetkých možností ako vytvoriť žonglovaciu postupnosť o dĺžke p a nanajvýš l loptičkách je:*

$$S(l, p) = (l + 1)^p$$

Všimnime si, že ak by sme v každom ťahu vybrali kartu obsahujúcu aspoň jednu horizontálnu úsečku, nami vytvorená žonglovacia postupnosť by obsahovala menej ako l loptičiek.

Veta 1.23 ((16), s. 40). *Počet všetkých možností ako vytvoriť žonglovaciu postupnosť o dĺžke p a l loptičkách je:*

$$\overline{S(l, p)} = S(l, p) - S(l - 1, p) = (l + 1)^p - l^p$$

V tomto výsledku sú však stále obsiahnute možnosti, ktoré by žongléra neuspokojili. Pokúsime sa teda náš výsledok vylepšiť. V prvom rade obmedzíme cyklickú výmenu. Pre periódu postupnosti p jestvuje p cyklických zámen danej postupnosti. Taktiež nás nebudú zaujímať postupnosti, ktoré nie sú vzorom. Napríklad 737373 je pre nás rovnaký siteswap ako jeho vzor 73³³. Všetky minimálne podpostupnosti našej postupnosti sú zrejme dĺžky d takej, že d delí p . $MS(l, p)$ nazveme počet všetkých minimálnych žonglovacích postupností bez cyklickej zámeny dĺžky p o l loptičkách. Počet všetkých žonglovacích postupností dĺžky p o l loptičkách je rovný súčtu všetkých takýchto minimálnych podpostupností s pripočítaním ich cyklických zámen. Z toho plynie vzťah:

$$S(l, p) = (l + 1)^p - l^p = \sum_{d|p} d \cdot MS(l, d)$$

Pre vyjadrenie $MS(l, d)$ použijeme Möbiovu inverziu:

Ak f a g sú funkcie definované na \mathbb{N} tak, že

$$f(p) = \sum_{d|p} g(d), \forall p \in \mathbb{N}$$

potom

$$g(p) = \sum_{d|p} \mu\left(\frac{p}{d}\right) f(d)$$

kde μ je Möbiova funkcia:

$$\mu(q) = \begin{cases} 1 & \text{ak } q = 1 \text{ alebo } q \text{ má párny počet rozdielnych prvočíselných deliteľov} \\ -1 & \text{ak } q \text{ má nepárny počet rozdielnych prvočíselných deliteľov} \\ 0 & \text{ak } q \text{ obsahuje viacnásobné prvočíselné delitele} \end{cases}$$

Dôkaz Möbiovej inverzie je možné nájsť v HALL (7).

Veta 1.24 ((16), s. 40). *Počet minimálnych žonglovacích postupností dĺžky p o l loptičkách bez cyklickej zámeny je:*

$$MS(l, p) = \frac{1}{p} \sum_{d|p} \mu\left(\frac{p}{d}\right) ((l + 1)^d - l^d)$$

³³Príloha A - /siteswapy/17_737373.jml, /siteswapy/17_73.jml

Dôkaz. Plynie bezprostredne z predošlého textu. □

Príklad 1.22. Zistíme počet všetkých žonglovacích postupností dĺžky $p = 5$ pre a) maximálne $l = 7$, b) práve $l = 7$ loptičkách. c) počítajme len minimálne postupnosti o práve 7 loptičkách bez cyklických zámen.

a) zo vzťahu $S(l, p) = (l + 1)^p$ nám okamžite plynie výsledok $S(7, 5) = 32768$

b) počítame $\overline{S(7, 5)} = S(7, 5) - S(6, 5) = 32768 - 16807 = 15961$

c) vyjadríme si pre $d = 1, 5$;

$\mu\left(\frac{5}{1}\right) = \mu(5) = -1$, pretože 5 má len jedného prvočíselného deliteľa a to samého seba.

$$\mu\left(\frac{5}{5}\right) = \mu(1) = 1$$

$$MS(7, 5) = \frac{1}{5} \sum_{d|5} \mu\left(\frac{5}{d}\right) ((7+1)^d - 7^d) = \frac{1}{5} ((-1)(8-7) + 1(8^5 - 7^5)) = 3192$$

Pozrime sa ešte na správanie MS pri malých periódach:

$$MS(l, 1) = 1 \text{ je to jedine siteswap } l$$

$MS(l, 2) = l$ sú to zrejme všetky siteswapy:

$(2l)0, (2l-1)1, (2l-2)2 \dots (l+1)(l-1)$ jednoduchým výpočtom pomocou vzorca získavame hodnoty:

$$MS(l, 3) = l(l+1)$$

$$MS(l, 4) = l(l^2 + l + 1)$$

$$MS(l, 5) = l(l^3 + 2l^2 + 2l + 1)$$

$$MS(l, 6) = l\left(l^4 + \frac{5}{2}l^3 + \frac{10}{3}l^2 + 2l + \frac{1}{6}\right)$$

2 Žonglovacie vrkoče

„Hutnosť fenoménov okolo nás, rád, pravidelnosť, cyklické opakovania a obnova sa ku mne začínajú prihovárať čím ďalej tým silnejšie. Vedomie ich prítomnosti mi prináša upokojenie a poskytuje mi oporu. Vo svojich obrazoch sa snažím dosvedčiť, že žijeme v krásnom, usporiadanom svete, a nie v chaose bez merítok ako sa občas zdá.“

M. C. Escher

5.3.1965, príhovor pri príležitosti predávania kultúrnej ceny mesta Hilversum

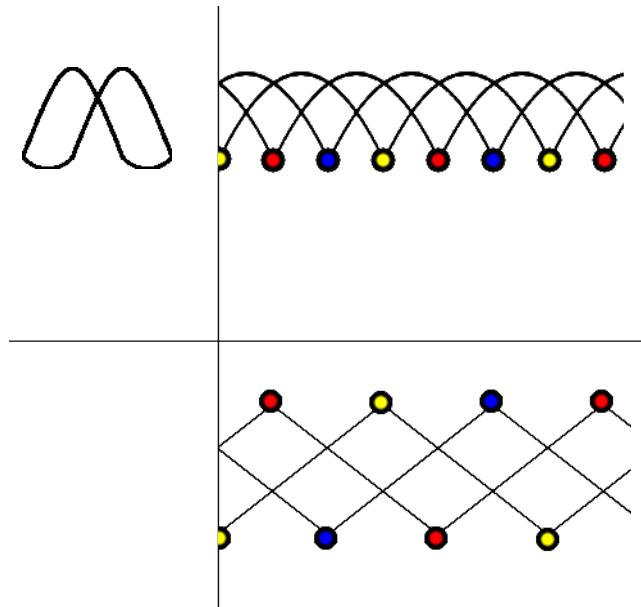


Obr. 40: Drevorez „Uzol“ od M. C. Eschera z roku 1965.

Zdroj: <http://uploads2.wikiart.org/images/m-c-escher/knots-colour.jpg>

Nie, Escher pravdepodobne netrúvil svoj voľný čas žonglovaním, no bol matematickým géniom, čo sa týka grafickej kultúry. Niet teda divu, že svoju pozornosť venoval pri umeleckej tvorbe aj uzlom. My sa taktiež necháme teóriou uzlov inšpirovať a poukážeme na silné súvislosti so žonglovaním. Vráťme sa preto na úplný

začiatok, keď ešte nebol ani hypotetický žonglér, ani čitateľ, zaťažený siteswapovým zápisom a budeme postupovať empirickým spôsobom.



(a) Priemety trajektórií loptičiek pri žonglovaní kaskády s tromi loptičkami.



(b) Priestorový vrkoč, ktorý vznikne pri žonglovaní kaskády s tromi loptičkami.

Obr. 41

Predstavme si žongléra žonglujúceho s loptičkami a kráčajúceho smerom vzad po rovine konštantnou rýchlosťou. Po pravej ruke a pred ním sa nachádzajú kolmé steny. Budeme zaznamenávať trajektórie loptičiek v priestore. Môžeme si napríklad predstaviť, že loptičky sú horiace a zanechávajú dymovú stopu. Trajektórie loptičiek vytvoria sústavu priestorových kriviek, ktorú nazývame *vrkoč*³⁴. Premietneme následne vrkoč kolmo do všetkých troch rovín. Prvým priemetom - na zem (pôdorysom) je nám už známy rebríkový diagram, ktorý presne odpovedá vrkočovému diagramu študovanému v teórii vrkočov. Druhým priemetom - na bočnú stenu (nárysom) je základný diagram. A napokon tretím priemetom - na prednú stenu (bokorysom) bude taktiež priemet uzlu.

³⁴Anglicky „braid“. Presnú definíciu vrkoču uvádzame v časti 2.2.

Príklad 2.1 (Obrázok 41). Na obrázku vidíme ako sa zobrazujú jednotlivé trajektórie pri žonglovaní kaskády s tromi loptičkami.

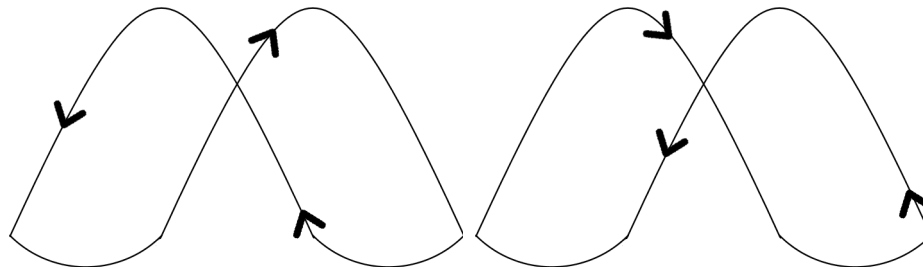
Teória vrkočov je relatívne mladá matematická disciplína. Jej priekopníkom je Emil Artin a svoje výsledky zhrnul v práci „Theory of braids“ (1). V súvislosti so žonglovaním je vrkočom venovaných niekoľko prác, o ktoré sa budeme opierať aj my. Sú to najmä, nami už mnohokrát spomínaná, kniha Burkarda Polstera (16), ďalej „Braids and Juggling Patterns“ od Macauleyho (11), „Juggling Braids and Links“ autorov Devadossa a Mugna (4) a „Jugglinks“ od Tawneyho (19). V prvom rade budeme sledovať, ako sa žonglovanie zobrazuje na vrkoče, a potom naopak, aké vrkoče vieme žonglovať.

2.1 Vnútorne a vonkajšie hody

Každý, kto sa snaží naučiť žonglovať, sa po pochopení rytmickej stránky žonglovania dostane k podstatnej otázke - ako loptičky hádzať tak, aby sa vo vzduchu nezrážali. V siteswapovom modeli žonglovania sme sa tejto problematike nemuseli venovať, nemala by totiž žiaden vplyv na ďalšie úvahy. V realite si nevystačíme s konštatovaním, že každá loptička je chytená a následne hodená z rovnakého miesta v priestore. Takto hodené loptičky by sa stretávali na parabole, ktorú opisujú ich dráhy. Práve preto je potrebné rozlíšiť vnútorné a vonkajšie hody, ktoré dosiahneme miernym pohybom rúk. Pri žonglovaní základnej kaskády chytáme loptičku v polohe ruky odchýlenej von od stredu tela, loptičku následne prenesieme rukou bližšie k stredu tela a vyhodíme. Takýto hod sa nazýva *vnútorným hodom* (Obrázok 42a³⁵), ktorý je pre človeka prirodzený. Takto hodené loptičky sa vo vzduchu nestretnú. Pri hádzaní siteswapov sa všeobecne predpokladá, že sú hádzané vnútornými hodmi, ak nie je povedané inak. Ak by sme však robili opačné pohyby rukami, pri ktorých chytáme loptičku v polohe ruky bližšie k stredu tela a vyhadzujeme z polohy odchýlenej

³⁵Príloha A - /siteswapy/18_hod.i.jml

jemne von od tela, loptičky sa opäť nestretnú. Takýto *hod* nazývame *vonkajší*³⁶ (Obrázok 42b³⁷). Kaskády a fontány hádzané vonkajšími hodmi nazývame reverzné.



(a) Kaskáda s vnútornými hodmi. (b) Kaskáda s vonkajšími hodmi.

Obr. 42

Vrkoč kaskády s tromi loptičkami, či už základnej alebo reverznej zostavíme pomerne jednoducho. Vznikne vrkoč všeobecne známy a často používaný napríklad pri úprave vlasov - takzvaný zapletaný vrkoč (Obrázok 43). Vrkočom prechádzame zľava doprava, pričom ľavá ruka je v diagrame hore, pravá dole. Zaujímavým pozorovaním je, že reverznú kaskádu dostaneme, ak budeme vrkočom prechádzať na opačnú stranu, teda sprava doľava (poloha rúk sa nemení). Rovnako tak by platilo, že ak by sme žongléra žonglujúceho základnú kaskádu natočili na video a pustili ho v spätnom chode, tak by žonglovaný vzor bol reverznou kaskádou³⁸.



Obr. 43: Zapletaný vrkoč.

Príklad 2.2 (Obrázok 44³⁹). Popíšeme si, ako bude vyzeráť vrkoč pre kaskádu s piatimi loptičkami (44a). Všetky hody kaskády sú rovnakej výšky a ich trajektórie sú rovnaké, ako pri žonglovaní troch loptičiek. Loptičky vyhadzujeme postupne: žltá, tmavozelená, červená, biela a modrá. Každá loptička chytená v danom okamihu sa nachádza na okraji vzoru, teda šnúrka reprezentujúca jej trajektóriu je na okraji

³⁶Hovorovo zaužívané sú aj anglické termíny „inside“ a „outside throws“. V *Juggling Labe* je možné použiť nastavenie Hand movement → Inside/ Outside throws

³⁷Príloha A - /siteswapy/18_hod.o.jml

³⁸Príloha A - /siteswapy/19.3.i.jml, /siteswapy/19.3.o.jml

³⁹Príloha A - /siteswapy/20.5.i.jml, /siteswapy/20.5.o.jml

vrkoču. Na prvý úder vyhadzujeme z ľavej ruky žltú loptičku, tá prechádza popod červenú a modrú, ktoré postupne dopadnú do ľavej ruky. Zelenú a bielu loptičku sme postupne hádzali z pravej ruky a ich trajektórie pôjdu popod trajektóriu žltej loptičky. Rovnako postupujeme po dopade loptičky do pravej ruky. Reverznú kaskádu dostaneme opäť spätným prechádzaním vrkoču, respektíve rovinovou súmernosťou⁴⁰.



(a) Vrkoč kaskády pre 5 loptičiek s vnútornými hodmi.



(b) Osovo súmerný vrkoč kaskády pre 5 loptičiek s vonkajšími hodmi.

Obr. 44

Fontána s dvomi loptičkami žonglovanými v dvoch rukách vytvorí zrejme dve priame trajektórie. Situácia so štyrmi loptičkami sa už komplikuje. Popíšme si ju preto opäť podrobnejšie.

Príklad 2.3. Pri fontáne so štyrmi loptičkami⁴¹ žongluje žonglér 2 loptičky v každej ruke a neprehadzuje ich do druhej ruky, to znamená, že vrkoč sa nám rozdelí na dva užšie vrkoče, jeden pre pravú a jeden pre ľavú ruku. V základnej fontáne sú hody z oboch rúk vnútorné a predpokladajme, že žonglér hádže asynchrónne (raz jednou a potom druhou rukou) (Obrázok 45). Prechádzaním vrkoča sprava doľava dostávame reverznú fontánu (Obrázok 46). Ak si navyše uvedomíme, že každý hod z pravej ruky je nezávislý na hodoch z ľavej ruky a opačne, tak nám nič nebráni použiť rôzne kombinácie vnútorných a vonkajších hodov pre každú ruku osobitne.

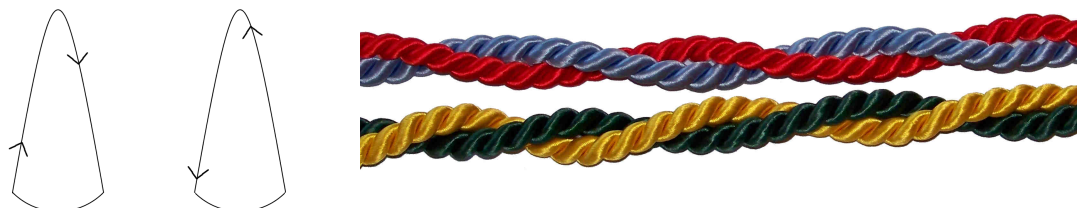
Môžeme si tak zvoliť napríklad v ľavej ruke vnútorné hody a v pravej ruke hody vonkajšie (Obrázok 47). Spätné prechádzanie vrkoča nám zamení orientáciu hodov v rukách. To však stále nie je všetko. Pri žonglovaní dvoch loptičiek v jednej ruke môžeme striedať vnútorné a vonkajšie hody, výsledný vzor sa v žonglérskej terminológii

⁴⁰Osová rovina je kolmá k smeru prechádzania vrkoča.

⁴¹Príloha A - /siteswapy/21.4.i.jml, /siteswapy/21.4.o.jml, /siteswapy/21.4.c.jml, /siteswapy/21.4.io.jml



Obr. 45: Pohľad spredu a vrkoč fontány so 4 loptičkami pri vnútorných hodoch.



Obr. 46: Pohľad spredu a vrkoč fontány so 4 loptičkami pri vonkajších hodoch.

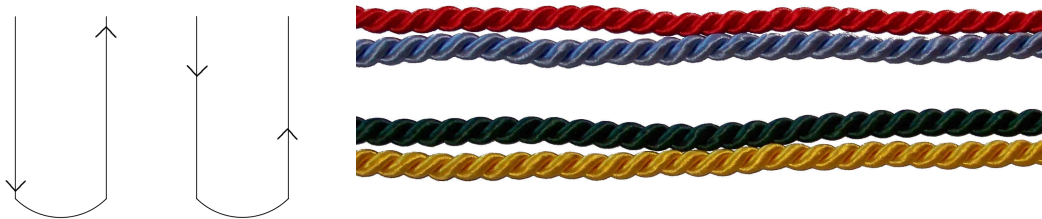
nazýva „stĺpce“. Vrkoč, ktorý vznikne pri žonglovaní stĺpcov sa skladá len z priamych šnúrok (Obrázok 48).



Obr. 47: Pohľad spredu a vrkoč fontány so 4 loptičkami pri vnútorných hodoch v ľavej a vonkajších hodoch v pravej ruke.

Zároveň pri žonglovaní stĺpcov v dvoch rukách vieme rozlíšiť ešte dva rôzne prípady. Ak hádzeme postupne vnútorný, vnútorný, vonkajší a vonkajší hod, vznikne iný žonglérsky trik ako pri žonglovaní vnútorný, vonkajší, vonkajší a vnútorný hod, ak začíname žonglovať na 1. úder rovnakou rukou. Pri takomto žonglovaní však dostávame rovnaký vrkoč, preto ich nebudeme v ďalšom texte rozlišovať. Celkovo máme pri žonglovaní fontány so štyrmi loptičkami tri možnosti voľby vnútorných a vonkajších hodov v každej ruke. Spolu teda $3^2 = 9$ možností orientácie. Uvádzame ich v Tabuľke 6.

Ak by sme chceli podrobne špecifikovať všetky možné žonglovacie vzory, mohli by sme ruke priradiť toľko polôh v priestore, koľko loptičiek je žonglovaných



Obr. 48: Pohľad spredu a vrkoč fontány so 4 loptičkami pri žonglovaní stĺpcov.

Tabuľka 6: 9 možností voľby orientácie hodov.

a k tomu v každej polohe určiť vnútornú a vonkajšiu pozíciu. Tým by sme docielili napríklad vzor stĺpce s tromi loptičkami v jednej ruke a vybočovalo by to z nášho rámca vnútorných a vonkajších hodov (Obrázok 49⁴²). Ostaňme zatiaľ pre jednoduchosť pri nami definovanom koncepte.



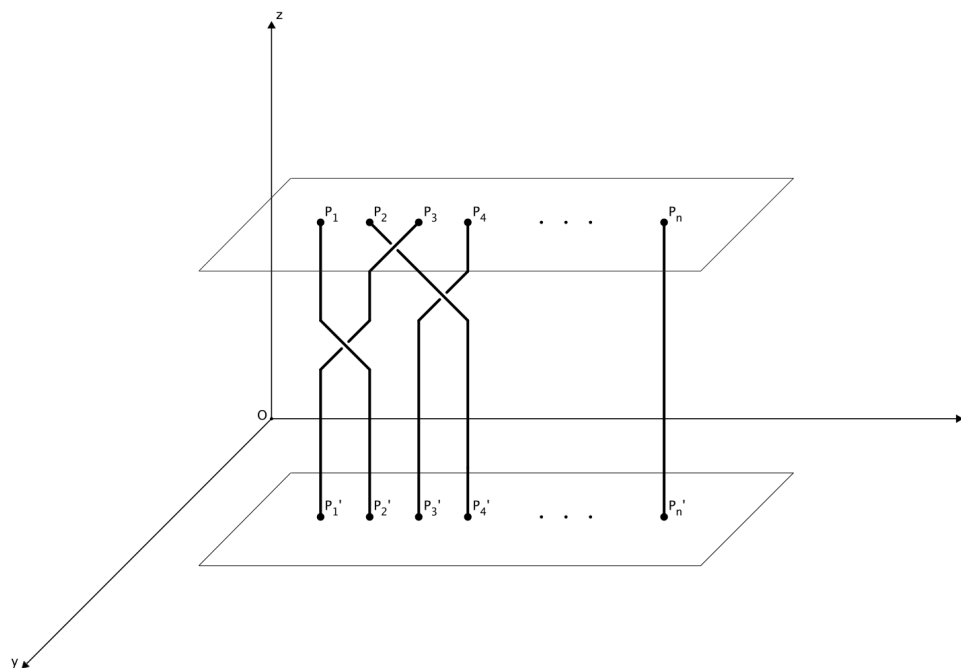
Obr. 49: Príklady vrkočov troch loptičiek žonglovaných v pravej ruke.

⁴²Príloha A - /siteswapy/22_60.i.jml, /siteswapy/22_60.o.jml, /siteswapy/22_60.c.jml

2.2 Úvod do matematickej teórie vrkočov

Aby sme mohli bez komplikácií pokračovať v popisovaní vzťahu medzi žonglovaním a vrkočmi, uvedieme v nasledovnej časti ich matematickú definíciu a niekoľko ďalších vlastností. Čitateľovi so záujmom o hlbšie zoznámenie sa s problematikou vrkočov a uzlov všeobecne doporučujeme okrem už spomenutej Artinovej práce (1) napríklad Murasugi (15) alebo Moran (14), z ktorých sme čerpali i my.

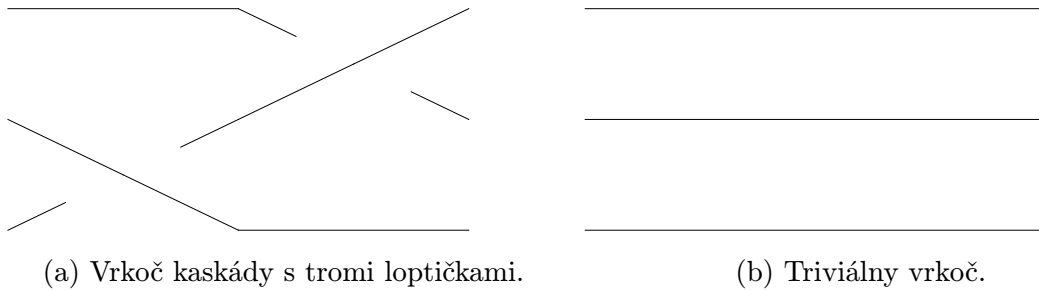
Pri popise vrkoču vychádzame z trojrozmerného priestoru, v ktorom sa na-



Obr. 50

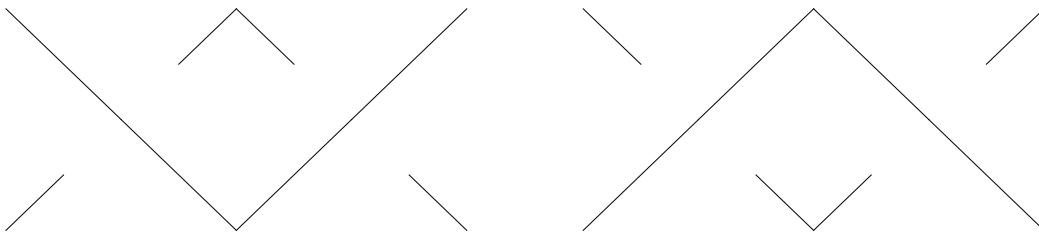
chádzajú dve rovnobežné roviny (Obrázok 50). Vytkneme vo vrchnej rovine n bodov P_1, P_2, \dots, P_n rovnomerne rozdelených na priamke a premietneme ich kolmo do druhej roviny. Priemetmi sú body P'_1, P'_2, \dots, P'_n . Body P_1, P_2, \dots, P_n nazývame *začiatkové vrcholy*, body P'_1, P'_2, \dots, P'_n *koncové vrcholy* vrkoča. Pre každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ prepojíme body P_i a $P'_{\pi(i)}$, kde π je permutácia množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, krivkou v páse medzi danými rovinami. Každú krivku nahradíme lomenou čiarou tak, že v každom

horizontálnom reze rovinou sa pretnú nanajvýš dve takéto lomené čiary a žiadna čiara nepretína sama seba. Túto lomenú čiary nazývame *šnúrkou*. Vrkoč vytvorený z n šnúrok nazývame n -vrkoč. Vrkoče zobrazujeme vo vrkočovom diagrame, ktorý je priemetom vrkoču do roviny, v ktorej sa nachádzajú jeho začiatkové a koncové body. Podľa konvencie prechádzame vrkočový diagram zhora dole, pričom indexy bodov stúpajú smerom doprava, alebo zľava doprava, pričom indexy bodov stúpajú smerom dole⁴³ (Obrázok 51a). *Triviálnym vrkočom* nazývame vrkoč, ktorého šnúrky



Obr. 51

sú priamky spájajúce body P_1 a P'_1 , P_2 a P'_2 , ..., P_n a P'_n (Obrázok 51b). Dva vrkoče sú ekvivalentné, ak existuje spojitá deformácia jedného na druhý, to znamená preovnanie šnúrok bez toho, aby sa v nejakom okamihu vzájomne pretli (Obrázok 52).



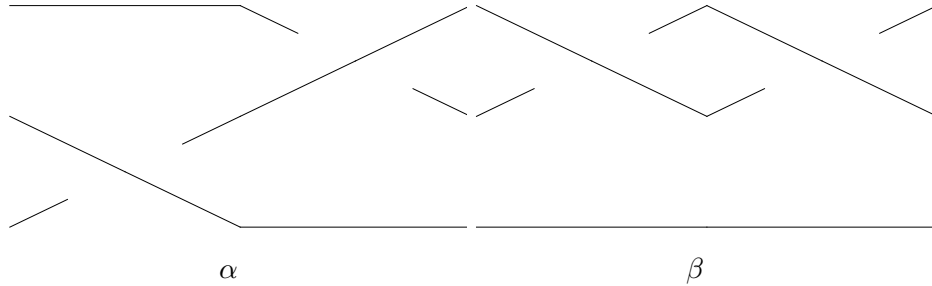
Obr. 52: Dva ekvivalentné vrkoče.

Veta 2.1 ((15), str. 201). *Ak sú dva vrkoče ekvivalentné, tak permutácie, ktoré priradia ich začiatčným vrcholom koncové vrcholy sú ekvivalentné.*

Dôkaz. Tvrdenie je zrejmé z definície ekvivalentných vrkočov. Ak by totiž neboli koncové vrcholy zhodné, neexistovala by spojitá deformácia jedného na druhý. \square

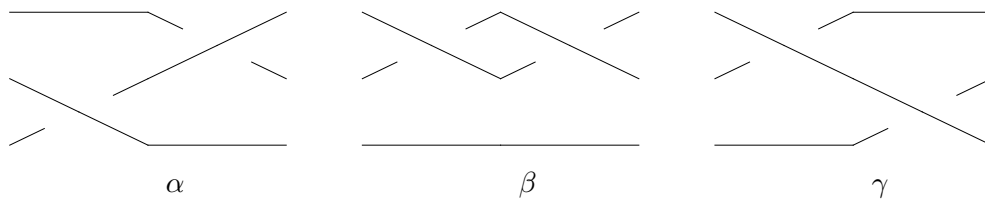
⁴³My sa v texte držíme varianty zľava doprava.

Veľmi intuitívne môžeme na vrkočoch zaviesť operáciu skladania. Nech je B_n množina všetkých n -vrkočov, až na ekvivalenciu a $\alpha, \beta \in B_n$. Zložením vrkočov $\alpha\beta$ rozumíme vrkoč, ktorý vznikne „prilepením“ koncových bodov vrkoču α k začiatočným vrcholom vrkoču β (Obrázok 53). Všimnime si, že množina B_n je uzavretá na ope-



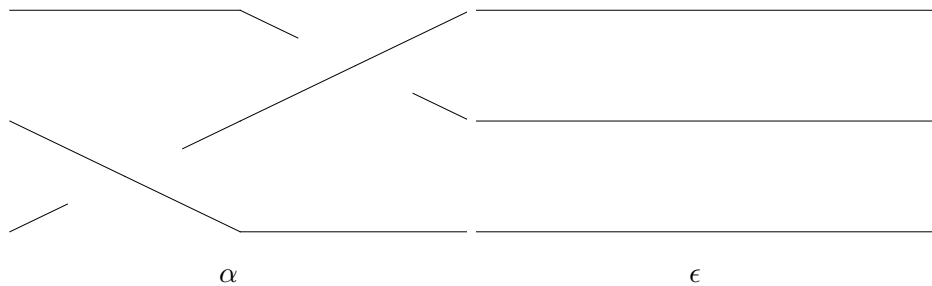
Obr. 53: Zloženie dvoch vrkočov.

ráciu skladania. Skladanie vrkočov je zrejme asociatívne (Obrázok 54). Výsledkom



Obr. 54: Asociativita skladania vrkočov: $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$.

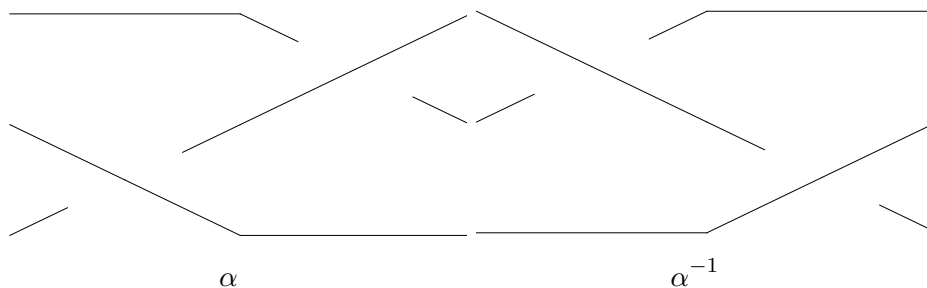
zloženia vrkoču α a triviálneho vrkoču ϵ je $\alpha\epsilon = \alpha = \epsilon\alpha$ (Obrázok 55). Nech je vrkoč



Obr. 55: Zloženie vrkoča α s triviálnym vrkočom ϵ .

α^{-1} rovinovo súmerný k vrkoču α podľa roviny, v ktorej sme definovali koncové vrcholy vrkoču α (vrkočový diagram je osovo súmerný podľa priamky prechádzajúcej koncovými vrcholmi α), potom zložením $\alpha\alpha^{-1}$ a tiež $\alpha^{-1}\alpha$ dostávame triviálny vrkoč ϵ (Obrázok 56). Nahliadnuť sa to dá zľahka deformovaním vrkoču v mieste spojenia

(v strede) a postupne ďalším deformovaním šnúrok smerom na strany. Vrkoč α^{-1} nazývame *opačný vrkoč* k α .

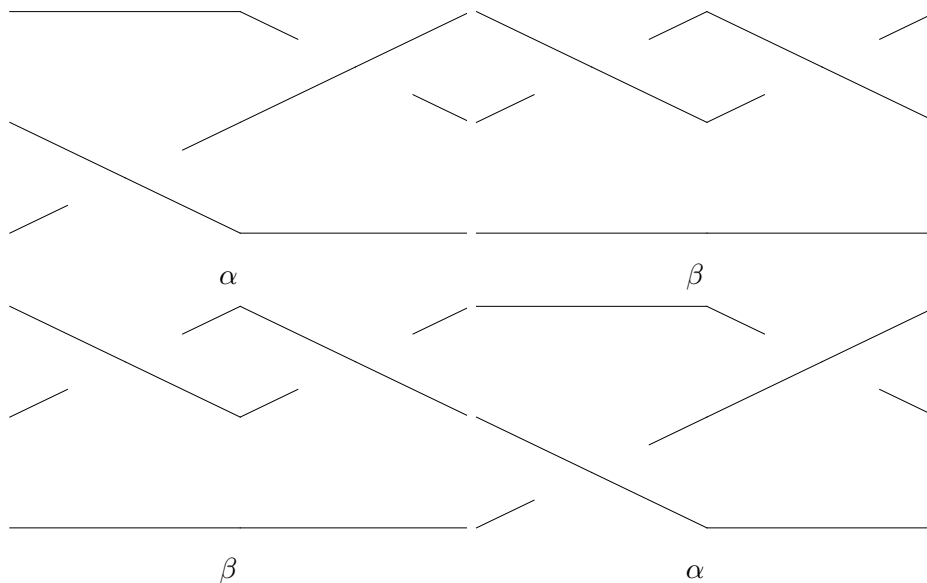


Obr. 56: Zloženie vrkočov $\alpha\alpha^{-1}$ je triviálny vrkoč.

Veta 2.2 (Vrkočová grupa, ((15), str. 201-203).). *Množina B_n všetkých n -vrkočov s operáciou skladania tvorí grupu \mathbf{B}_n .*

Dôkaz. Tvrdenie vety je zrejmé z predošlého textu. □

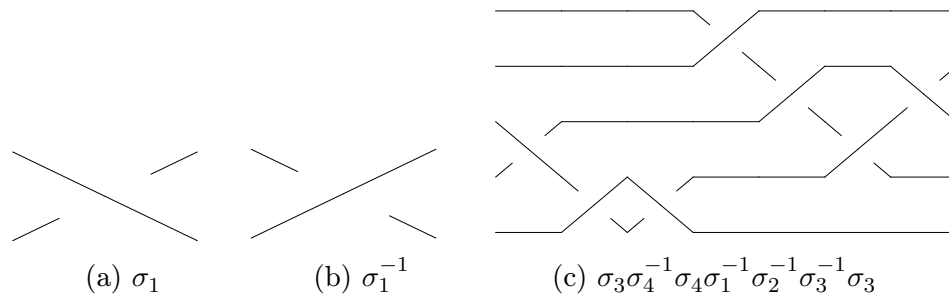
Základnou vlastnosťou, ktorú skúmame u grúp je komutatívita. Všimnime si, že vrkočová grupa nie je komutatívna (Obrázok 57). Vrkočovú grupu vieme vygenero-



Obr. 57: Zloženie vrkočov $\alpha\beta$ a $\beta\alpha$ nie sú ekvivalentné vrkoče.

vať a zároveň popísať pomocou dvoch typov vrkočov, ktoré nazývame *vrkočové gene-*

rátory⁴⁴. V oboch vrkočových generátoroch sa krížia šnúrky na pozícií i a $i+1$, pričom prvý značíme σ_i a prechádza v ňom šnúrka z pozície i do pozície $i+1$ ponad druhú šnúrku (Obrázok 58a). V druhom type vrkočového generátora, značíme σ_i^{-1} , prechádza šnúrka z pozície i do pozície $i+1$ popod druhú šnúrku (Obrázok 58b). Zrejme každý n -vrkoč dokážeme vygenerovať vrkočmi σ_i a σ_i^{-1} , pre $i \in 1, 2, \dots, n-1$. Formálnym zložením vrkočových generátorov vytvoríme zároveň takzvané *vrkočové slovo*, ktorým vrkoč jednoznačne určíme (Obrázok 58c). Všimnime si, že vrkočové slovo



Obr. 58: Vrkočové generátory a vrkočové slovo.

opačného vrkoču vznikne z pôvodného opačným skladaním vrkočových generátorov a zároveň zamenením σ_i a σ_i^{-1} . Napríklad v Obrázku 56 je $\alpha = \sigma_2 \sigma_1^{-1}$ a $\alpha^{-1} = \sigma_1 \sigma_2^{-1}$. Popis vrkočovými slovami nám umožňuje algebraicky upravovať a rozpoznávať ekvivalentné vrkoče.

Veta 2.3 (Artinova, ((15), str. 207)). *Vo vrkočovej grupe \mathbf{B}_n platia základné rovnice:*

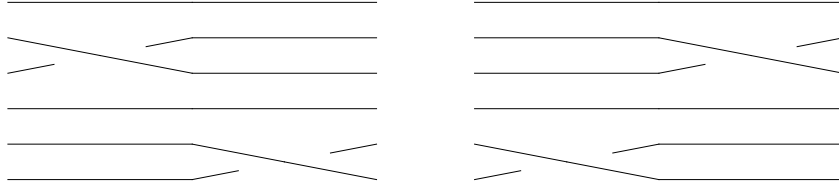
$$(i) \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \text{ pre } |i - j| \geq 2, i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$(ii) \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \text{ pre } i \in \{1, 2, \dots, n-2\}$$

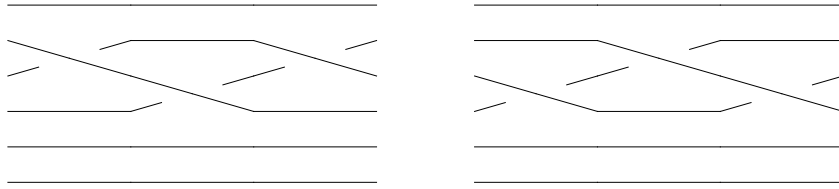
Dôkaz. Vetu nebudeme formálne dokazovať, z Obrázkov 59 a 60 je vidieť, že sa jedná o intuitívne zrejmé tvrdenie. □

Tieto rovnice vieme použiť na úpravu vrkočov, otázkou však stále ostáva, ako rozpoznať dva ekvivalentné vrkoče, ktoré sú zapísané iným vrkočovým slovom. Inak povedané, existuje algoritmus, ktorým vieme upraviť vrkoče na rovnaký tvar? Situáciu

⁴⁴V bežnom kontexte sa používa skrátenejší pojem generátory. Z dôvodu, aby si čitateľ nepomýlil pojmy generátora žonglovacej postupnosti a vrkočového generátora, budeme užívať dlhší tvar.



Obr. 59: $\sigma_2\sigma_5 = \sigma_5\sigma_2$



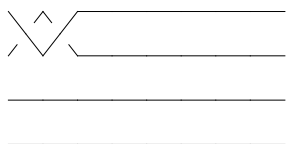
Obr. 60: $\sigma_2\sigma_3\sigma_2 = \sigma_3\sigma_2\sigma_3$

si zjednodušíme tým, že budeme upravovať vrkoč na triviálny tvar. Uviedli sme si, že zložením n -vrkoča $\alpha\alpha^{-1}$ dostávame vrkoč triviálny. Ak máme ďalej $\alpha = \beta$, tak musí taktiež platiť, že zložením $\omega = \alpha\beta^{-1}$ dostávame triviálny vrkoč. Navyše ak začiatočný vrchol šnúrkovej zloženej vrkoča ω bol bod P_i tak koncový bod bude mať rovnaký index, teda P_i' . Takýto vrkoč nazývame *rýdzi vrkoč*⁴⁵. Jedným z algoritmov, ktorý dokáže zistiť, či je rýdzi vrkoč ekvivalentný triviálnemu vrkoču vynašiel už Emil Artin a nazval ho „česanie vrkoču“. Autor však sám na konci svojej práce (1) odrádza od ručného testovania vrkočov za pomoci tohto algoritmu slovami: „Aj keď sme dokázali, že každý vrkoč môže byť deformovaný do podobnej normálovej formy, autor je presvedčený, že akýkoľvek pokus o uskutočnenie tejto práce živou osobou, by viedol len k násilným protestom a diskriminácii proti matematikom.“ Ukážeme si výrazne rýchlejšiu a mladšiu metódu, ktorú predviedol Dehornoy v roku 1997 (5). Algoritmus je založený na takzvanom odstraňovaní rúčok⁴⁶. Rúčky sú špeciálne kríženia dvoch typov. Sú orientované smerom hore a prechádzajú vždy ponad, alebo vždy popod ostatné šnúrkové (Obrázok 61). Algoritmus opovedá na otázku, či je daný vrkoč triviálny podľa schémy na Obrázku 62. Nie je našim cieľom dokazovať konečnosť ani správnosť algoritmu, uveďme si však príklad jeho použitia.

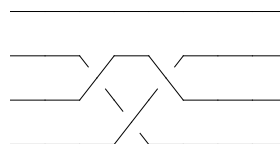
Príklad 2.4 (Obrázok 63). Majme daný rýdzi vrkoč $\sigma_1\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_2\sigma_2^{-1}\sigma_3\sigma_2$.

⁴⁵ Anglicky „pure braid“.

⁴⁶ Anglicky „handle“.

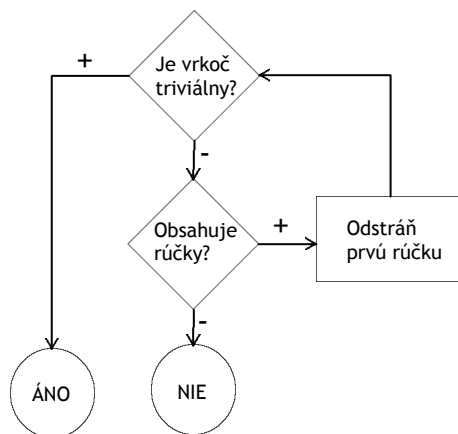


Prvý typ rúčky (2. šnúrka).



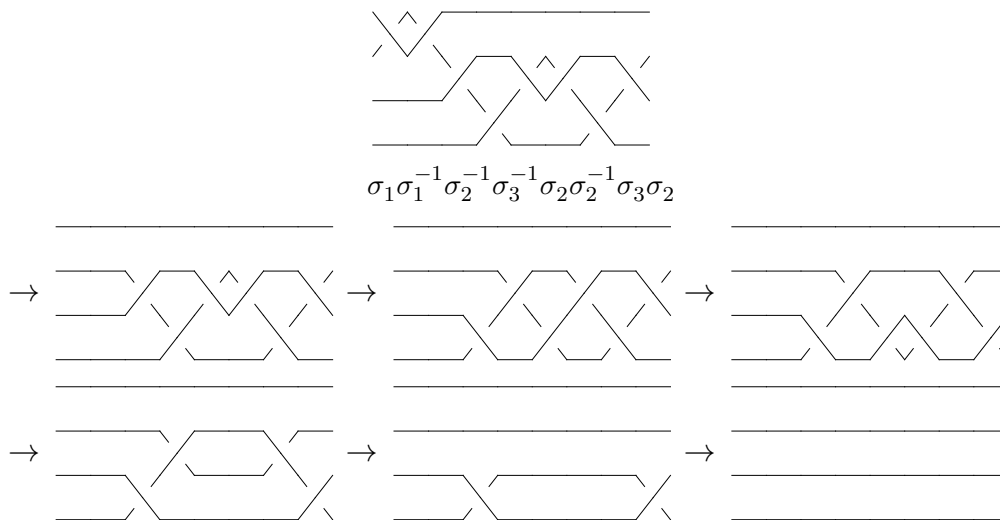
Druhý typ rúčky (3. šnúrka).

Obr. 61



Obr. 62: Schéma Dehornoyovho algoritmu.

Odstraňujeme postupne tie rúčky, ktoré končia ako prvé. Prvý typ rúčky „vyrovnávame“, druhý typ „pretočíme“. Spôsob odstránenia je ukázaný v postupnosti obrázkov.



Obr. 63: Dehornoyova metóda odstraňovania rúčok.

Vrkoč sme postupnými úpravami dokázali pretvoriť na triviálny. Je s ním teda ekvivalentný.

2.3 Vrkoče a žonglovanie

Po vyčerpávajúcej teórii sa poďme pustiť do aplikácie teórie vrkočov na žonglovanie. V prvom rade sa budeme znovu obmedzovať na žonglovacie triky (vzory), ktoré sú obmedzené konečným počtom hodov. Aby sme popísali celý vrkoč, ktorý takýmto žonglovaním vytvoríme, musíme trik opakovať, až kým sa nedostaneme všetkými loptičkami do rovnakej pozície z akej sme začínali. Budeme preto vytvárať a používať len rýdze vrkoče.

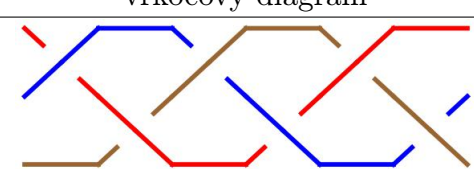
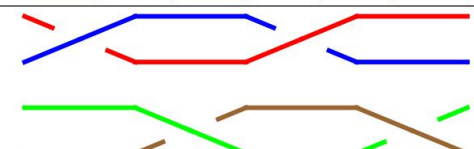
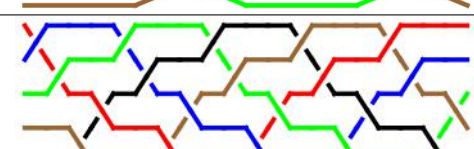
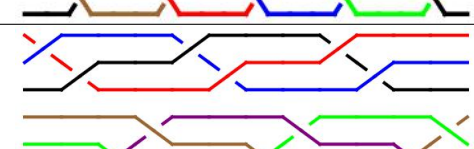
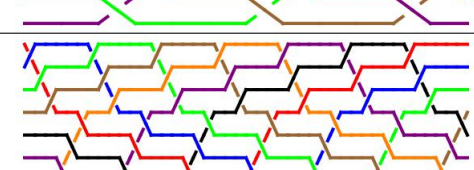
Jednoduchým tvrdením je, že každú kaskádu a fontánu dokážeme „rozuzliť“ reverznou kaskádou a fontánou. Nakoľko vzájomne reverzné kaskády a fontány vytvárajú opačné vrkoče, tak ich zložením dostávame triviálny vrkoč. Všimnime si rozdiel medzi rebríkovým diagramom a vrkočovým diagramom trajektórií loptičiek. Vrkočový diagram nám dáva dodatočnú informáciu o tom, či loptička prechádza popod alebo ponad nejakú inú.

Zápis kaskád a fontán pomocou vrkočových slov s vrkočovým diagramom uvádzame v Tabuľke 7.

Pozorovanie 2. Vrkoče (základných a reverzných) kaskád a fontán nie sú ekvivalentné triviálnemu vrkoču. Ani v kaskádach ani vo fontánach nenájdeme žiadnu rúčku a teda podľa Dehornoyovho algoritmu nemôžu byť ekvivalentné triviálnemu vrkoču.

2.3.1 Vrkoče siteswapov

Pozrime sa na to, ako sa budú správať vrkoče pri žonglovaní (prostých) siteswapov. Opäť sa necháme inšpirovať rebríkovým diagramom. Ešte pred tým, než pri-

b	vrkočové slovo	vrkočový diagram
3	$\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2$	
4	$\sigma_1^{-1}\sigma_3\sigma_1^{-1}\sigma_3$	
5	$\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_4\sigma_3 \dots \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_4\sigma_3$	
6	$\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_5\sigma_4 \dots \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_5\sigma_4$	
7	$\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_6\sigma_5\sigma_4 \dots \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_6\sigma_5\sigma_4$	
\vdots		
$2n$	$\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1} \dots \sigma_{n-1}^{-1}\sigma_{2n-1}\sigma_{2n-2} \dots \sigma_{n+1}$ n -krát	
$2n + 1$	$\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1} \dots \sigma_n^{-1}\sigma_{2n}\sigma_{2n-1} \dots \sigma_{n+1}$ $(2n + 1)$ -krát	

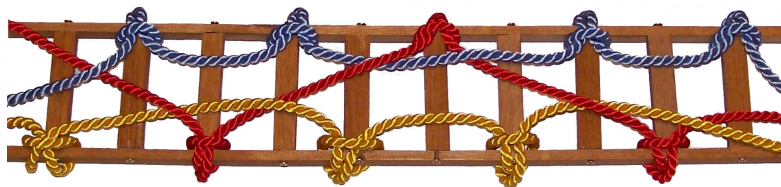
Tabuľka 7: Vrkočové slová a digramy pre kaskády a fontány o b loptičkách.

stúpime k problému, musíme upraviť siteswapový model žonglovania, ktorý budeme využívať v tejto časti. Žonglér bude žonglovať s dvomi rukami a loptičky budú vždy hádzané vnútornými hodmi. Aby sme toho dosiahli, tak hod v daný úder prebieha tak, že loptičku chytáme malý okamih pred úderom a vyhadzujeme malý okamih po údere. Začneme jednoduchými príkladmi vrkočov zapletenými na rebríku.

Príklad 2.5 (Obrázok 64⁴⁷). Vytvoríme vrkoč a popíšme jednotlivé šnúrky (orbity) siteswapu 423 o troch loptičkách. Vrkoč zostavený pomocou rebríkového diagramu vidíme na obrázku.

Žltá loptička hodená do výšky 4 z pravej ruky prechádza popod červenú loptičku

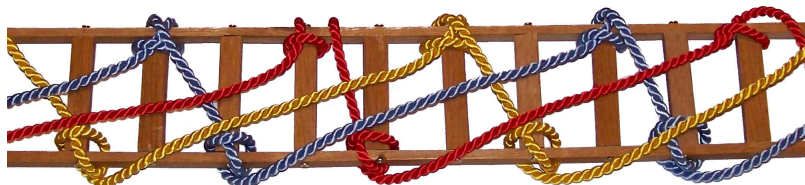
⁴⁷Príloha A - /siteswapy/23_423_i.jml



Obr. 64: Vrkoč siteswapu 423.

dopadajúcu do pravej ruky. Modrá loptička je hodená do výšky 2 z ľavej ruky a nekríži sa so žiadnou inou. Následne červená loptička je hodená do výšky 3 z pravej ruky a prechádza popod žltú loptičku dopadajúcu do pravej ruky. Modrá loptička je hodená z ľavej ruky a prechádza popod červenú loptičku dopadajúcu do ľavej ruky. Všimnime si obzvlášť hody o výške dva, ktoré sa počas svojho letu neprekrížia so žiadnym iným.

Príklad 2.6 (Obrázok 65⁴⁸). Ukážme si ďalej siteswap 51 alebo v žonglérskych terminológii „sprchu“ s tromi loptičkami. Hody o výške 5 sú vždy hádzané z pravej ruky a hody o výške 1 z ľavej ruky.



Obr. 65: Vrkoč siteswapu 51.

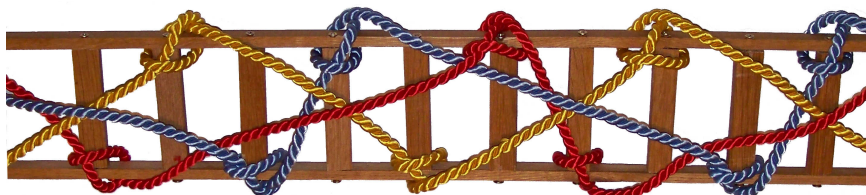
Hody o výške 1 budú vždy prechádzať popod prebiehajúce hody o výške 5, naopak všetky hody o výške 5 prechádzajú ponad hody o výške 1.

Pozorovanie 3. Zhrňme doposiaľ odpozorované výsledky. Časť šnúrky, ktorá odpovedá hodu o výške 1 bude krížiť všetky ostatné šnúrky prechádzajúc popod ne. Časť šnúrky, ktorá odpovedá hodu o výške 2 nebude krížiť žiadnu šnúrku. Nakoľko hod o výške 1 je najnižší hod a hod o výške 2 je najnižší hod do rovnakej ruky a po ňom nemôže nasledovať hod o výške 1 (z vlastností prostého žonglovania), tak žiadna ďalšia loptička nemôže byť vyhodená popod ne. Čo sa praktického žonglovania týka,

⁴⁸Príloha A - /siteswapy/24_51.i.jml

tak hod výšky 2 je obyčajne prevádzaný ako podržanie loptičky v ruke po dobu dvoch úderov a nie je to v žiadnom rozpore s naším modelom.

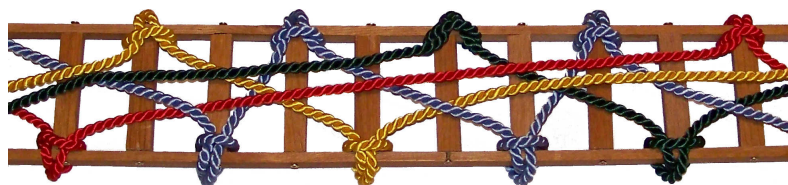
Príklad 2.7 (Obrázok 66⁴⁹). Zaujímavý diagram vytvorí siteswap 531.



Obr. 66: Vrkoč siteswapu 531.

Červená loptička je hodená do výšky 5 z pravej ruky a prechádza popod dopadajúcu modrú loptičku. Žltá loptička je vyhodенá z ľavej ruky do výšky 3 a prechádza popod už vyhodенú červenú loptičku, ktorá smeruje do ľavej ruky. Modrá loptička je hodená do výšky 1 z pravej ruky a prebieha popod všetky ostatné loptičky. Všimnime si, že v jednom momente sa všetky šnúrky prekrížia v jednom bode⁵⁰. To znamená, že v danom okamihu sú nad sebou až tri loptičky. Nič však nebráni tomu aby sme vrkoč mierne deformovali tým, že jednu šnúrku posunieme stranou. Celkový vrkoč sa nezmení.

Príklad 2.8 (Obrázok 67⁵¹). V predošlých príkladoch sa vždy stalo, že vyhadzovaná loptička prešla popod dopadajúcu a za pár úderov sa situácia u rovnakých dvoch loptičiek vymenila. Že to nie je pravidlo ukazuje vrkoč siteswapu 9313 o 4 loptičkách.



Obr. 67: Vrkoč siteswapu 9313.

Na prvý úder je vyhodенá červená loptička do výšky 9 z pravej ruky a dopadne

⁴⁹Príloha A - /siteswapy/25_531_i.jml

⁵⁰Rozumieme kolmý priemet.

⁵¹Príloha A - /siteswapy/26_9313_i.jml

až na posledný (10.) úder zobrazovaného úseku v obrázku. Ak budeme sledovať modrú loptičku, tak bude prechádzať za túto dobu jeden krát ponad a tri krát popod červenú loptičku.

Sledovaním týchto príkladov môžeme dôjsť k popisu vrkočov⁵², ktoré vznikajú siteswapmi s vnútornými hodmi⁵³.

Pravidlá pohybu loptičky pri použití vnútorných hodov

- (i) Práve vyhodená loptička vnútorným hodom prechádza popod všetky loptičky, ktoré boli vyhodené skôr a dopadnú skôr ako daná loptička. Pričom uvažované loptičky dopadajú do rovnakej ruky, z akej vyhadzujeme.
- (ii) Práve vyhodená loptička vnútorným hodom nepárnej výšky prechádza popod všetky loptičky, ktoré boli vyhodené skôr a dopadnú neskôr ako daná loptička.
- (iii) Práve vyhodená loptička vnútorným hodom párnej výšky prechádza popod všetky loptičky, ktoré boli vyhodené skôr a dopadnú neskôr ako daná loptička. Pričom uvažované loptičky dopadajú do rovnakej ruky, z akej vyhadzujeme.

Aby sme ešte pre úplnú korektnosť zamedzili logickej slučke, uvažujeme, že žonglér začal vyhadzovaním loptičiek v nekonečnej minulosti.

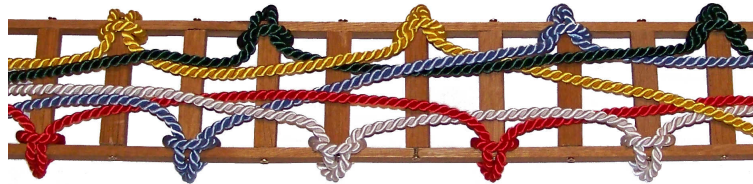
Aby sme mohli siteswapy a ich vrkoče skladať, potrebujeme vytvoriť rýdži vrkoč. Pre zobrazenie siteswapu na rýdži vrkoč ho musíme zopakovať toľkokrát, kým sa nedostane do začiatočnej pozície, čo sa poradia loptičiek a rúk týka. Počet opakovaní spočítame pomocou orbít žonglovacej postupnosti o perióde p nasledovne: Počet periód, ktoré ubehnú za čas, kým jedna loptička prejde svojou orbitou a začne sa opakovať dostaneme ako súčet výšok všetkých hodov tejto loptičky, vydelený

⁵²Tento model nie je fyzikálne presný, ak by sme chceli hody presne popísať, museli by sme zdefinovať odchýlky rúk a dĺžku držania loptičky, pre jednoduchosť sa uspokojíme s danými pravidlami. Pre „rozumné“, teda prakticky realizovateľné, výšky hodov náš model vyhovuje.

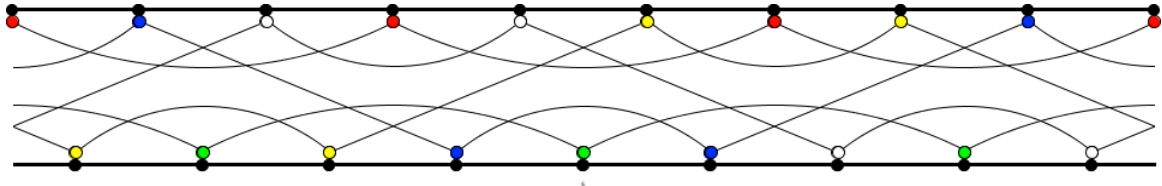
⁵³Žongléri používajú špeciálny termín „vanilla siteswaps“.

periódou. Počet ubehnutých periód je teda rovný počtu loptičiek prechádzajúcich podobné orbity $b(O_i)$. V jednom siteswape sa však môže nachádzať viac rôznych orbít, a preto počítame počet ubehnutých periód ako najmenší spoločný násobok počtov loptičiek jednotlivých podobných orbít $NSN(b(O_1), b(O_2), \dots, b(O_m))$. Ak je však perióda siteswapu nepárna, potrebujeme ešte ošetriť, aby vzor začínal z rovnakej ruky. To znamená, že počet ubehnutých úderov musí byť párny a preto hľadáme najmenší spoločný násobok počtu loptičiek jednotlivých rovnakých orbít a čísla 2. Celkový počet ubehnutých úderov je potom pre p párne $p \cdot NSN(b(O_1), b(O_2), \dots, b(O_m))$ a pre p nepárne $p \cdot NSN(2, b(O_1), b(O_2), \dots, b(O_m))$.

Príklad 2.9 (Obrázky 68a a 68b⁵⁴). Napokon ešte jeden príklad siteswapu 645 o piatich loptičkách.



(a) Vrkoč siteswapu 645.



(b) Rebríkový diagram siteswapu 645. Všetkých 18 úderov.

Obr. 68

Počet opakovaní siteswapu, kým by sa dostal do začiatkovej pozície spočítame pomocou návodu v texte vyššie. Hodu o výške 6 odpovedajú $b(O_1) = \frac{6}{3} = 2$ loptičky a druhá trieda podobných orbít je tvorená hodmi 4 a 5, ktorými prebiehajú $b(O_2) = \frac{4+5}{3} = 3$ loptičky. Periódou siteswapu je nepárna a dostávame $NSN(2, 3, 2) = 6$. Potrebujeme tak $p \cdot NSN(2, 3, 2) = 18$ úderov, kým sa loptičky vrátia na rovnakú pozíciu v žonglovacej postupnosti.

⁵⁴Príloha A - /siteswapy/27_645_i.jml, /siteswapy/27_o1_645_i.jml, /siteswapy/27_o2_645_i.jml

Takto vytvorené vrkoče siteswapov môžeme medzi sebou skladať v prípade, že poradie hodených loptičiek na konci prvého siteswapu je zhodné s poradím hodených loptičiek na začiatku druhého siteswapu tak, že všetky loptičky musia dopadnúť a byť vyhodené v rovnakom poradí.

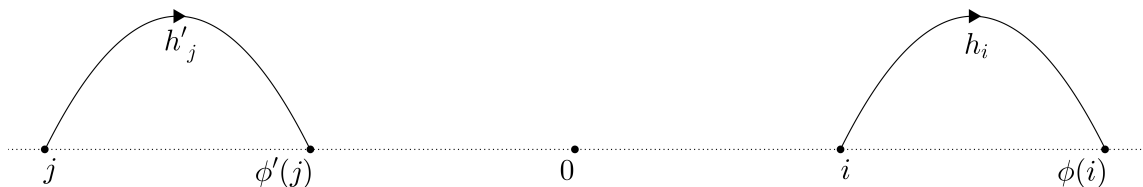
Ďalšou prirodzenou otázkou je, či je opačný vrkoč daného siteswapu tiež siteswapom a ako sú prevádzané jeho hody. Rebríkový diagram sa zmení na opačný a je tak zrejmé diagramom nejakého siteswapu. Otázkou ostáva, či sú dané kríženia jednotlivých šnúrok správne usporiadané na to, aby bolo možné siteswap žonglovať. Opäť využijeme ideu spätného prehrávania videozáznamu. Poloha rúk pri vnútorných hodoch prechádzala zvonku do vnútra tela. Pri spätnom chode pôjde poloha rúk zvnútra mimo telo a stačí nám použiť vonkajšie hody.

Pravidlá pohybu loptičky pri použití vonkajších hodov

- (i) Práve vyhodená loptička vonkajším hodom prechádza ponad všetky loptičky, ktoré boli vyhodené skôr a dopadnú skôr ako daná loptička. Pričom uvažované loptičky dopadajú do rovnakej ruky, z akej vyhadzujeme.
- (ii) Práve vyhodená loptička vonkajším hodom nepárnej výšky prechádza popod všetky loptičky, ktoré boli vyhodené skôr a dopadnú neskôr ako daná loptička.
- (iii) Práve vyhodená loptička vonkajším hodom párnej výšky prechádza popod všetky loptičky, ktoré boli vyhodené skôr a dopadnú neskôr ako daná loptička. Pričom uvažované loptičky dopadajú do rovnakej ruky, z akej vyhadzujeme.

Všimnime si, že oproti vnútorným hodom sa líši len prvé pravidlo.

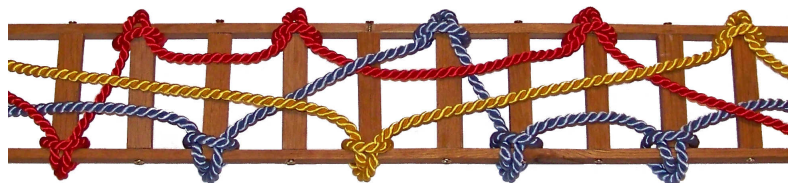
Veta 2.4. *Nech je daná žonglovacia postupnosť $h = \{h_k\}_{k=0}^{p-1}$. Postupnosť h^{-1} , ktorá vznikne obrátením časovej osi je žonglovacou postupnosťou. Postupnosť h^{-1} nazývame reverzná žonglovacia postupnosť k postupnosti h .*



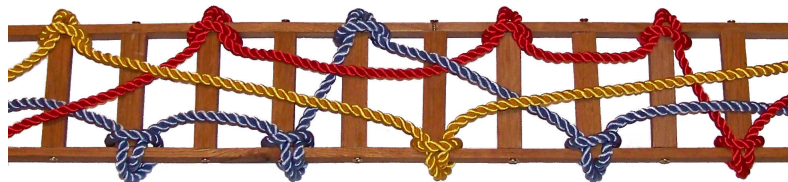
Obr. 69

Dôkaz. Použijeme dopadovú funkciu, ktorú dostaneme periodickým opakovaním siteswapu $\phi(i) = h_i + i$. Údery vyhodena loptičky i sa pri obrátení času stanú údermi dopadu a naopak. Hody budú prebiehať opačne, avšak ich výšky sa nezmenia. ϕ je permutáciou celých čísel, preto pre každé $j \in \mathbf{Z}$ existuje $i_j \in \mathbf{Z}$ také, že $\phi(i_j) = -j$. Definujme ďalej $h'_j = h_{i_j}$ a $\phi'(j) = h'_j + j$. Platí, že $\phi'(j) = h'_j + j = h_{i_j} - \phi(i_j) = -i_j$ a ϕ' je zrejme permutáciou. Rozdelením postupnosti hodov $\{h_j\}$ na intervaly obdržime žonglovaciu postupnosť (Obrázok 69). \square

Grafická skúška je pre nás dostatočným dôkazom toho, že reverzný siteswap je siteswapom, uvedený dôkaz má však konštrukčný charakter a presne popisuje postupnosť, ktorá vznikne.



Siteswap 12345 žonglovaný vnútornými hodmi.



Siteswap 52413 žonglovaný vonkajšími hodmi.

Obr. 70: Vrkoč a opačný vrkoč.

Príklad 2.10 (Obrázok 70⁵⁵). Majme daný siteswap 12345 žonglovaný vnútornými hodmi.

⁵⁵Príloha A - /siteswapy/28_12345.i.jml, /siteswapy/28_52413.o.jml

$$\begin{array}{c|ccccc}
i & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
h_i & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\phi(i) \bmod 5 & 1 & 3 & 0 & 2 & 4
\end{array}$$

K nemu reverzný siteswap 52413 dostaneme podľa predošlej vety.

$$\begin{array}{c|ccccc}
j & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 \\
i_j & 4 & 1 & 3 & 0 & 2 \\
h'_j & 5 & 2 & 4 & 1 & 3 \\
\phi'(j) \bmod 5 & 1 & 4 & 2 & 0 & 3
\end{array}$$

Reverzný siteswap je hádzaný vonkajšími hodmi. Aby sme zobrazili celý vrkoč potrebujeme 2 krát dĺžku periódy.

Nakoľko zložením vrkoču a opačného vrkoču dostávame triviálny vrkoč, tak aj zložením (rýdzeho) vrkoču siteswapu a reverzného siteswapu je triviálny vrkoč.

Príklad 2.11 (Obrázok 64⁵⁶). Reverzný siteswap sa môže zhodovať s pôvodným siteswapom (u kaskád a fontán je to zrejmé). Pripomeňme si siteswap 423 hádzaný vnútornými hodmi zo začiatku tejto podkapitoly a vytvorme k nemu reverznú postupnosť.

$$\begin{array}{c|ccc|ccc}
i & 0 & 1 & 2 & j & -2 & -1 & 0 \\
h_i & 4 & 2 & 3 & i_j & 2 & 0 & 1 \\
\phi(i) \bmod 3 & 1 & 0 & 2 & h'_j & 3 & 4 & 2 \\
& & & & \phi'(j) \bmod 3 & 1 & 0 & 2
\end{array}$$

Reverznou žonglovacou postupnosťou bude rovnaká postupnosť 423, hádzaná však vonkajšími hodmi.

Hádzanie vnútorných a vonkajších hodov je korením siteswapov a žongléri ho radi používajú. Hody totiž nemusia byť v triku stále jedného typu, ale môžu sa ľubovoľne obmieňať. Typickým príkladom sú obmeny kaskády s tromi loptičkami⁵⁷.

⁵⁶Príloha A - /siteswapy/29_423_i.jml, /siteswapy/29_423_o.jml

⁵⁷Hry s vonkajšími a vnútornými hodmi mal v oblube vynikajúci žonglér Luke Wilson (Obrázok 71). V roku 2010 sa autor textu na Európskej žonglérskej stretávke (EJC) vo Fínsku nechal inšpirovať jeho workshopom. Bohužiaľ, Luke Wilson nás kvôli chorobe opustil v mladom veku. I touto spomienkou chceme vyjadriť česť jeho pamiatke!

Príklad 2.12 (Obrázok 72⁵⁸). Priradíme kaskáde (siteswap 3) typ hodu v jednotlivé úderu. Vnútorňý hod označíme písmenom *I* a vonkajší hod písmenom *O*, z ktorých vytvoríme slovo. Začiatok slova odpovedá nultému úderu siteswapu a po skončení sa slovo ďalej opakuje. Napríklad slovo *IIO* priradíme siteswapu 3 a vytvoríme tak vzor nazývaný „tenis“, jeho vrkoč vidíme na obrázku.



Obr. 72: Vrkoč kaskády hádzanej pomocou slova *IIO*.

Kým sa poradie loptičiek siteswapu dostane do začiatkovej pozície, ubehne čas $p \cdot NSN(2, 3) = 6$ úderov. Za tento čas sa dané slovo taktiež dostane do začiatkovej pozície. Žongľovanie takto jednoduchého vzoru na 6 úderov hravo zvládne každý začiatočník. Omnoho viac sústredenia je potrebné vynaložiť ak dĺžka slova nebude deliť počet úderov na zopakovanie triku. Počet opakovaní siteswapu, kým sa celý vzor zopakuje aj vrátane typu hodu spočítame jednoducho pridaním dĺžky slova do najmenšieho spoločného násobku. Pri tomto príklade si ešte povšimnime, že vytvorený vrkoč je ekvivalentný triviálnemu vrkoču. Modrá loptička prechádza popod všetky ostatné, červená loptička prechádza vždy popod žltú loptičku a žltá prechádza ponad všetky ostatné loptičky. Reverzný vrkoč vytvára rovnaký siteswap žongľovaný slovom so zamenenými písmenami *OOI*. Typ hodu závisí od polohy ruky a spätným chodom zrejme vždy vytvoríme reverzné slovo týmto spôsobom.

Príklad 2.13 (Obrázok 73⁵⁹). Ukážeme si ešte jeden klasický príklad, a to hádzaním vnútorňého hodu z jednej a vonkajšieho hodu z druhej ruky. Vznikne slovo *IO*, ktoré aplikujeme na siteswap 423. Všimnime si, že pri hode výšky 2 neovplyvní typ hodu výsledný vrkoč. Vzor sa zopakuje po 6 úderoch.

⁵⁸Príloha A - /siteswapy/30_3_io.jml, /siteswapy/30_3_ooi.jml

⁵⁹Príloha A - /siteswapy/31_423_io.jml



Obr. 73: Vrkoč siteswapu 423 hádzaného pomocou slova IO .



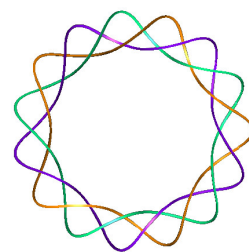
Obr. 71: Luke Wilson, 1976 - 2012.

Zdroj: <http://www.lukewilson.de>

Najprv je zafinovaná žonglovacia postupnosť, ktorá vytvára triviálny vrkoč. Ďalej sú vytvorené siteswapy vrkočových generátorov a napokon je pomocou nich zostavená žonglovacia postupnosť ľubovoľného vrkoču.

Počas dôkazu tvrdenia budeme pracovať s minimálnou žonglovacou postupnosťou, ak je dĺžka periódy p párna. Ak je p nepárne, tak kvôli použitiu oboch rúk budeme uvažovať žonglovaciu postupnosť na $2p$ úderoch. Žonglovacia postupnosť je nezávislá na cyklickej zámene, jej vrkoč na danej dĺžke periódy sa však takouto zámennou môže zmeniť. Vrkoč preto uzavrieme spojením začiatoč-

ných a koncových bodov. Takýto objekt sa v matematike nazýva *vrkoč v anuloid*⁶¹ (Obrázok 74). Môžeme si predstavovať, že žonglér sa nepohybuje po priamke,



Obr. 74: Vrkoč v anuloide.

⁶⁰Zámerom nášho textu nie je presný fyzikálny popis, preto ho nebudeme podrobne rozoberať.

⁶¹Anglicky „solid torus braid“.

ale po kružnici. Vzťah medzi vrkočmi a vrkočmi v anuloidie popísal Markov nasledovne.

Definícia 2.1. N -vrkoče $\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{B}_n$ sa nazývajú *konjugované*, ak existuje $\alpha \in \mathbf{B}_n$ také, že $\omega_1 = \alpha\omega_2\alpha^{-1}$.

Takto definovaná konjugácia vrkočov je zrejme reláciou ekvivalencie a jej bloky nazývame *triedami konjugácie*. Môžeme preto písať nasledovné tvrdenie, ktoré uvádzame bez dôkazu.

Veta 2.5 (Markovova, ((10), Veta 3)).⁶² *Triedy konjugácie vrkočovej grupy \mathbf{B}_n sú vrkoče v anuloidie.*

Najprv zostrojíme žonglovaciu postupnosť, ktorá odpovedá triviálnemu vrkoču v anuloidie. Nech je daných b šnúrok (loptičiek). Prvú loptičku vyhodíme na úder $t = 0$ a priradíme jej výšku hodu $h_0 = 3$. Vždy keď loptička dopadne, tak je znovu vyhodená do rovnakej výšky. Druhá loptička je vyhodená na úder $t = 1$ do výšky $h_1 = 3^3$ a pri dopade sa opakuje rovnaký hod. Nech ďalej $\alpha_1 = 0$ a $\alpha_k = 3^0 + 3^2 + \dots + 3^{2(k-2)}$ pre $k \in \{2, \dots, b\}$. Každá k -ta loptička je vyhodená na úder $t = \alpha_k$ do výšky $h_t = h_{\alpha_k} = 3^{2k-1}$. Zároveň pre $t \neq \alpha_k$ je $h_t = 0$. Odpovedajúca dopoadová funkcia potom bude (Obrázok 75)

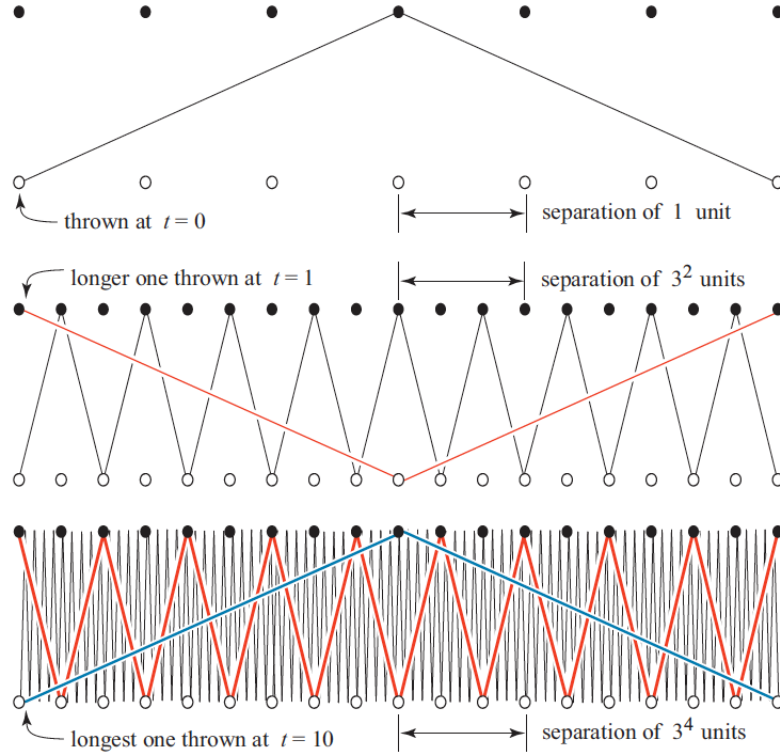
$$\phi_b(t) = \begin{cases} t + 3^{2k-1} & \text{ak } t \equiv (\alpha_k + m3^{2k-1}) \pmod{3^{2b-1}} \\ t & \text{inak} \end{cases}$$

kde $k \in \{1, 2, \dots, b\}$ a $m \in \mathbb{Z}$.

Veta 2.6 ((4), Veta 6). $\{h_t\}_{t=0}^{3^{2b-1}-1}$ je žonglovacia postupnosť.

Dôkaz. Tvrdenie nebudeme technicky dokazovať, plyní však z Vety 1.4 o skúške permutácie. □

⁶²Uvádzame len tú časť vety, ktorú budeme potrebovať.



Obr. 75: Vrkočové diagramy ϕ_1, ϕ_2 a ϕ_3 .

Zdroj: arxiv.org/pdf/math/0602476

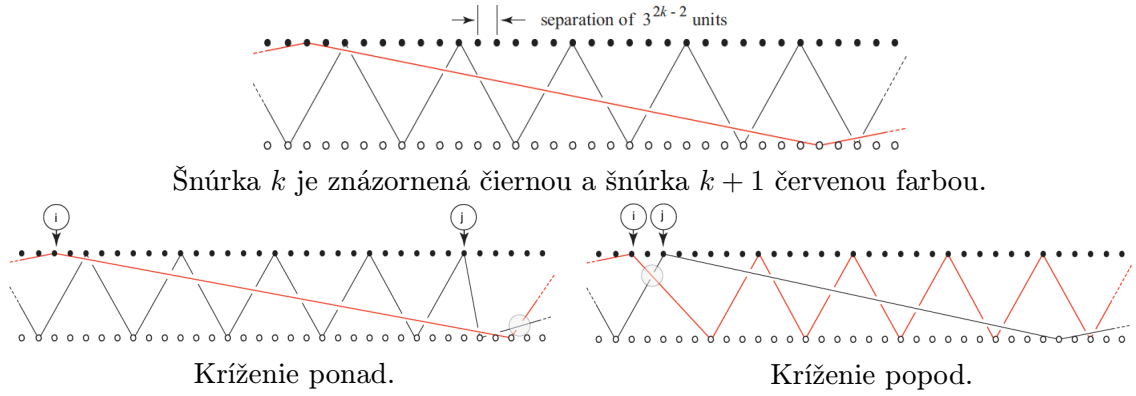
Rebríkový diagram, ktorý vznikne žonglovaním podľa funkcie ϕ_b vytvorí triviálny vrkoč. Dôkaz tohto tvrdenia taktiež neuvádzame, je možné ho nájsť v (4), Veta 7. Každá v poradí k -ta šnúrka prejde ponad všetky j -te šnúrky, kde $j < k$ a popod j -te šnúrky pre $j > k$. Keďže najvyšší hod 3^{2b-1} je nepárny, budeme operovať na perióde $2 \cdot 3^{2b-1}$. Uvedomme si, že práve v tomto prípade sú výšky všetkých hodov veľmi rozdielne a preto je možné vyhodiť loptičku ponad všetky ostatné.

Ďalej pre ľubovoľné pevne zvolené $k \in \{1, \dots, b-1\}$ nájdeme pomocou operácie zámény strán žonglovaciú postupnosť, ktoré odpovedajú generátorom σ_k a σ_k^{-1} . Inak povedané vytvoríme kríženie k -tej šnúrky popod i ponad šnúrku $k+1$. Postup je znázornený na Obrázku 76, kde sú kvôli prehľadnosti zakreslené len k -ta a $k+1$ -vá šnúrka.

Kríženie k -tej šnúrky ponad šnúrku $k+1$ vytvoríme nasledovne:

Zvoľme údery $i_k^+ = \alpha_{k+1}$ a $j_k^+ = \alpha_k + 3^{2k+1}$. Platí, že

$$h_{i_k^+} + i_k^+ = 3_{2k+1} + \alpha_k + 3^{2k} > 3_{2k+1} + \alpha_k = j_k^+$$



Obr. 76: Vytvorenie generátorov pomocou zámény strán.

Zdroj: arxiv.org/pdf/math/0602476

a sú tak splnené predpoklady Vety 1.8 pre operáciu zámény strán. Odpovedajúca dopadová funkcia bude:

$$C_{k,b}(t) = \begin{cases} \phi_b(j_k^+) + (j_k^+ - i_k^+) & \text{ak } t \equiv i_k^+ \pmod{2 \cdot 3^{2b-1}} \\ \phi_b(i_k^+) - (j_k^+ - i_k^+) & \text{ak } t \equiv j_k^+ \pmod{2 \cdot 3^{2b-1}} \\ \phi_b & \text{inak} \end{cases}$$

Dá sa ukázať ((4), Lemma 9), že žonglovaním podľa tejto dopadovej funkcie získame generátor σ_k .

Križenie k -tej šnúrky popod šnúrku $k + 1$ vytvoríme nasledovne:

Zvoľme údery $i_k^- = \alpha_{k+1}$ a $j_k^- = \alpha_k + 3^{2k-1}$. Platí, že

$$h_{i_k^-} + i_k^- = 3_{2k+1} + \alpha_k + 3^{2k} > 3_{2k-1} + \alpha_k = j_k^-$$

a sú tak splnené predpoklady Vety 1.8 pre operáciu zámény strán. Odpovedajúca dopadová funkcia bude:

$$C_{k,b}^{-1}(t) = \begin{cases} \phi_b(j_k^-) + (j_k^- - i_k^-) & \text{ak } t \equiv i_k^- \pmod{2 \cdot 3^{2b-1}} \\ \phi_b(i_k^-) - (j_k^- - i_k^-) & \text{ak } t \equiv j_k^- \pmod{2 \cdot 3^{2b-1}} \\ \phi_b & \text{inak} \end{cases}$$

Podobne ako v predošlom prípade sa dá ukázať ((4), Lemma 10), že žonglovaním podľa tejto dopadovej funkcie získame generátor σ_k^{-1} .

Dĺžka takto definovaných žonglovacích postupností je $2 \cdot 3^{2b-1}$.

S takto vytvorenými generátormi môžeme prejsť ku konštrukcii ľubovoľného vrkoču na anuloide.

Veta 2.7. *Pre každý vrkoč na anuloide existuje žonglovacia postupnosť, ktorá sa naň zobrazí.*

Náznak dôkazu. Nech je n -vrkoč na anuloide ω zapísaný vrkočovým slovom

$\omega = \sigma_{k_1}^{l_1} \sigma_{k_2}^{l_2} \dots \sigma_{k_r}^{l_r}$, kde $l_i \in \{+1, -1\}$ pre $i \in \{1, \dots, r\}$. Ďalej nech $i_k^+, i_k^-, j_k^+, j_k^-$ majú rovnaký význam ako v predošlom texte. Definujme funkciu

$$\phi_b^\omega(t) = \begin{cases} \phi_b(j_{k_q}^{l_q}) + (j_{k_q}^{l_q} - i_{k_q}^{l_q}) & \text{ak } t \equiv i_{k_q}^{l_q} + 2(q-1)3^{2b-1} \pmod{2r3^{2b-1}} \\ \phi_b(i_{k_q}^{l_q}) - (j_{k_q}^{l_q} - i_{k_q}^{l_q}) & \text{ak } t \equiv j_{k_q}^{l_q} + 2(q-1)3^{2b-1} \pmod{2r3^{2b-1}} \\ \phi_b(t) & \text{inak} \end{cases}$$

pričom exponenty chápeme v prípade $l_i = 1$ ako „+“ a v prípade $l_i = -1$ ako „-“. Dá sa ukázať ((4), Veta 4), že žonglovaním podľa tejto dopadovej funkcie získame vrkoč ω . \square

Ak vrkoč v anuloide rozrežeme v nejakom mieste a „vyrovnáme“ tak dostaneme klasický vrkoč. Vďaka tomu sa vyhneme nezávislosti siteswapu na cyklickej zámene. Všimnime si, že takto vybudovaný siteswap je prakticky nemožné žonglovať, keďže sú ako výšky hodov použité mocniny čísla tri⁶³. Tento nedostatok si uvedomujú aj autori, no napriek tomu je táto konštrukcia zaujímavá prepojením vzťahov medzi matematickou teóriou žonglovania a teóriou uzlov.

⁶³ Alebo ľubovoľného prvočísla väčšieho ako dva.

Záver

Cieľom tejto práce bolo predstaviť metódy matematického popisu žonglovania a sprístupniť ich výsledky pre širšiu verejnosť. Práca poukazuje na súvislosti žonglovania a teórie grafov zavedením a užívaním cyklického diagramu. Za zaujímavý a netriviálny považujeme najmä dôkaz vzorca pre počet generátorov žonglovacích postupností užívajúc základy teórie grup. Dôkladne, na mnohých príkladoch, sú preberané vzťahy medzi žonglovaním a teóriou uzlov. Čitateľovi je poskytnutý matematický popis pohybu loptičiek pri žonglovaní pomocou vnútorných a vonkajších hodov. Okrem toho je, ako výrazný výsledok v tejto oblasti, prevedená konštrukcia ľubovoľného vrkoču pomocou žonglovacích postupností.

Ako to už vo vede býva, každá zodpovedaná otázka otvára priehrstie nových. Za problémy otvorené v tejto práci považujeme dopočítanie počtu všetkých žonglovacích postupností daných podmienok z generátorov, či vyjadrenie ľubovoľného vrkoču pomocou zadaných vnútorných a vonkajších hodov, žonglovaním fyzicky reálnych siteswapov. Okrem toho by bolo veľmi zaujímavé popísať žonglovanie a vrkoče pri krížení rúk. Matematických odvetví, ktorých sa žonglovanie dotýka je mnoho a záujem žonglérov o workshopy, či matematikov o pochopenie tohto javu podnecuje k ďalšej práci v tejto oblasti.

Literatúra

- [1] ARTIN, E.: Theory of braids. In: *Annals of mathematics*, Jan., 1947, Second Series, Vol. 48, No. 1, p. 101-126.
Dostupné z URL: <http://www.maths.ed.ac.uk/~aar/papers/artinbraids.pdf>
- [2] BEEK, J. - LEWBEL, A.: The Science of Juggling. *Scientific American*, 1995, vol. 273, no. 5, p. 92-97.
Dostupné z URL: <https://www2.bc.edu/~lewbel/jugweb/science-1.html>
- [3] BUHLER, J. - EISENBUD, D. - GRAHAM, R. - WRIGHT, C.: Juggling drops and descents. In: *Amer. Math. Monthly*, 1994, vol. 101, no. 6, p. 507-519.
Dostupné z URL: <http://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=1274973>
- [4] DEVADOSS, S. L., MUGNO, J.: Juggling Braids and Links. *The Mathematical Intelligencer*, Jan., 2007, vol 29, Issue 3, p. 15-22.
Dostupné z URL: <http://arxiv.org/pdf/math/0602476.pdf>
- [5] DEHORNOY, P.: A Fast Method for Comparing Braids. In: *Adv. Mat.*, 1997, vol.125, p. 200-235.
Dostupné z URL: <http://www.math.unicaen.fr/~dehornoy/Papers/Dfo.pdf>
- [6] HALL, M.: A combinatorial problem on abelian groups. In: *Proc. Amer. Soc.*, 1950-, vol. 3, p. 584-587.
Dostupné z URL: <http://www.ams.org/journals/proc/1952-003-04/S0002-9939-1952-0050579-7/S0002-9939-1952-0050579-7.pdf>
- [7] HALL, M.: *Combinatorial theory*. New York: John Wiley & Sons, 1986, ISBN 0-471-09138-3

- [8] KARTTUNEN, A.: A061417. *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* [online]. c2001
Dostupné z URL: <http://oeis.org/A061417>
- [9] LEWBEL, A.: *Research in Juggling History* [online]. c1995, last revision March 2002
Dostupné z URL: <https://www2.bc.edu/~lewbel/jugweb/history-1.html>
- [10] LAMBROPOULOU: Solid torus links and Hecke algebras of B-type. In: *Proceedings of the Conference on Quantum Topology*, D. N. Yetter ed. World Scientific Press, 1994.
Dostupné z URL: <http://www.math.ntua.gr/~sofia/publications/A1%20yet-my%20pdf.pdf>
- [11] MACAULEY, M.: *Braids and Juggling Patterns*. Claremont, 2003. 51 p. Senior thesis, Harvey Mudd College. Advisor: Michael Orrison
Dostupné z URL: <http://www.math.hmc.edu/seniorthesis/archives/2003/mmacaule/mmacaule-2003-thesis.pdf>
- [12] MAGNUSSON, B., TIEMANN, B.: The physics of juggling. In: *Physics Teacher*, 1989, vol. 27, p. 584-589.
Dostupné z URL: http://www.jugglingevent.com/images/physics_of_juggling.pdf
- [13] MAYS, A.: *Combinatorial aspects of juggling*. Melbourne, 2006. 60 p. Honours thesis, Departments of Mathematics and Statistics, University of Melbourne. Supervisor: Dr. Peter Forrester
Dostupné z URL: http://www.ms.unimelb.edu.au/~amays/juggling%20thesis_Mays.pdf
- [14] MORAN, S.: *The Mathematical Theory of Knots and Braids*. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V., 1983. 295 p., ISBN 0-444-96714-7

- [15] MURASUGI, K.: *Knot Theory*. Boston: Birkhäuser, 1996. 341 p., ISBN 3-7643-3817-2
- [16] POLSTER, B.: *The Mathematics of Juggling*. New York: Springer - Verlag, 2003. 226 p., ISBN 0-387-95513-5
- [17] SHANNON, C.E. - SLOANE, N. - WYNER, A.: Scientific aspects of juggling. In: *Claude Elwood Shannon: Collected papers*. New York: IEEE Press, 1993, p. 850-864.
- [18] STANOVSKÝ, D.: *Základy algebry*. Praha: MATFYZPRESS, 2010. 153 p., ISBN 978-80-7378-105-7
- [19] TAWNEY, J.: *Jugglinks*, Master's Thesis, The Ohio State University. Máj, 2001.
- [20] TAYLOR, G.: *A juggling theorem* [online]. c2011
Dostupné z URL: http://tartarus.org/gareth/maths/stuff/juggling_theorem.pdf
- [21] ZIETHEN, K.H. - SERENA, A.: *Virtuosos of juggling: From the Ming Dynasty to Cirque du Soleil*. China: Palace Press International, 2003. 156 p., ISBN 0-9741848-0-2

Webové stránky zaoberajúce sa problematikou matematiky žonglovania:

<http://www.juggling.org/jw/>

<http://www.siteswapgeneration.com/>

Webové stránky zaoberajúce sa teóriou uzlov vo Wolfram Mathematica:

<http://katlas.math.toronto.edu/>

knižnica užitá pre vytvorenie vrkočových diagramov: KnotTheory'

Newsgroup:

groups.google.com/group/rec.juggling/

Zoznam príloh

Príloha A: CD médium

K diplomovej práci je priložené CD médium s nasledovným obsahom:

- software *JugglingLab-0.6.1* v rovnomennom súbore obsahujúc originálny návod k inštalácii a používaniu a dokumentáciu
- animácie siteswapov použitých v texte, v zložke /siteswapy/, cesty k súborom sú poznačené v poznámkach pod čiarov pri danom siteswape
- cykl_diagram.nb: Program je vytvorený v programe *Wolfram Mathematica 9 for Students* potrebnom rovnako pre spustenie súboru. Po spustení notebooku zadáva užívateľ siteswap. Postupnosť je potrebné písať do množinových zátvoriek, oddeľujúc každé číslo čiarkou (pre výšky hodov väčšie než 10 používame taktiež číselné značenie). Po kliknutí na Menu → Evaluate → Evaluate Notebook sa po prepočte vytvorí cyklický diagram.