Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Soustavy lineárních rovnic na základní škole – obtíže žáků a pohled učitelů

Systems of linear equations at the primary school – pupils' problems and teachers' views

Diplomová práce

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.
Autor diplomové práce: Mgr. Jiří Kliner
Studijní obor: Učitelství pro ZŠ a SŠ – matematika
Forma studia: kombinovaná
Diplomová práce dokončena: Praha, 2015

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma *Soustavy lineárních rovnic na základní škole – obtíže žáků a pohled učitelů* vypracoval samostatně pod vedením doc. RNDr. Nadi Vondrové, Ph.D. Všechny použité prameny a literatura byly řádně citovány a práce nebyla použita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne ……….………………..…

Podpis ……….…………….…………

Poděkování

Děkuji vedoucí mé práce doc. RNDr. Nadě Vondrové, Ph.D. za odborné vedení, cenné rady a podnětné připomínky. Děkuji učitelům za rozhovory, bez nichž by se tato práce neobešla.

Abstrakt

Cílem diplomové práce bylo popsat kritická místa při řešení soustav lineárních rovnic na základní škole. Nejdříve jsou přehledně uvedeny různé metody řešení soustav rovnic se dvěma neznámými, stručně nastíněna historie soustav lineárních rovnic a dále je téma popsáno z hlediska kurikulárních dokumentů. Na základě studia odborné literatury jsou popsána kritická místa a chyby, kterých se žáci v této oblasti dopouštějí. Realizované výzkumné šetření využilo smíšenou výzkumnou strategii, kde hlavní strategií byl kvalitativní a vedlejší strategií kvantitativní výzkum. Vlastní výzkum sestával z polostrukturovaných rozhovorů se čtyřmi zkušenými učiteli, sestavení dotazníku pro žáky základních škol a vytvoření didaktického testu. Hlavními výsledky práce je popis nejčastějších obtíží žáků při řešení soustav lineárních rovnic, didaktická analýza učebnic a nástin pohledu učitelů na toto téma.

Klíčová slova:

lineární rovnice a jejich soustavy, obtíže žáků, chyby, polostrukturované rozhovory, didaktický test

Abstract

The goal of the diploma thesis was to describe critical moments for solving systems of linear equations at the primary school. First, various methods of solving systems of two linear equations with two unknowns are summarized, the history of systems of linear equations is briefly outlined and the theme is described from the point of view of curricular documents. Based on the review of literature, the critical moments and types of mistake made by pupils are described. My own research used the mixed research strategy, where the main strategy was qualitative and the secondary strategy was quantitative. The research consisted of semi-structured interviews with four mathematics teachers, the preparation and realization of a questionnaire for primary school pupils and the creation, realization and analysis of a didactic test. The main results of the thesis consists of the description of the most frequent pupils' problems when solving systems of linear equations, the didactic analysis of textbooks and teachers' views of the topic and its teaching.

Keywords:

linear equations and their systems, pupils' problems, mistakes, semi-structured interviews, didactic test

Obsah

1. Úvod

Jedním z důvodů, proč se učit rovnice a jejich soustavy, může být získání všeobecného přehledu nebo nástroje na řešení různých problémů z běžného života. Ze své dosavadní pedagogické praxe vím, jak je pro žáky obtížné řešit úlohy z okolního světa, matematizovat slovní zadání úlohy, sestavit výraz nebo rovnici odpovídající problému. Proč ale žáci selhávají při řešení jednoduchých soustav dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými, když mají k dispozici jasné algoritmy a postupy, které je dovedou ke správnému řešení?

Obecným cílem diplomové práce bylo prozkoumat téma soustavy dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými a najít v něm kritická místa, která činí žákům největší problémy při jejich řešení. Konkrétní cíle diplomové práce jsou:

- popsat obtíže žáků v oblasti soustav lineárních rovnic, jak je vidí učitelé,
- zjistit, jaké strategie používají žáci při řešení soustav lineárních rovnic,
- zjistit, jakých nejčastějších chyb se žáci dopouštějí při řešení soustav lineárních rovnic,
- zjištěné poznatky porovnat mezi sebou i s poznatky z odborné literatury.

Poznámka: Pod soustavami rovnic budu v textu myslet vždy soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých.

V kapitole 2 jsou zavedeny pojmy lineární rovnice a soustava rovnic a ekvivalentní úpravy a uveden počet možných řešení lineárních rovnic a jejich soustav. Kapitola rovněž podává přehled všech základních metod řešení soustav dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými a zabývá se historickým vývojem tématu soustav lineárních rovnic od nejstarších civilizací do poloviny 18. století s příklady několika jednoduchých úloh.

Ve třetí kapitole je analyzováno téma soustav lineárních rovnic na základě kurikulárních dokumentů. Konkrétně jsem se zabýval tím, jak je téma zpracováno v rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání, ve školních vzdělávacích programech dvou vybraných škol a v učebnicích matematiky pro druhý stupeň základních škol.

Ve čtvrté kapitole jsem shrnul kritická místa a typy chyb související se soustavami rovnic, které se mi podařilo najít v odborné literatuře.

Pátá kapitola obsahuje analyzované údaje získané v rozhovorech s vybranými učiteli základních škol, které jsem vyhodnocoval vzhledem k cílům práce.

Šestá kapitola dokumentuje výzkum kritických míst při řešení soustav lineárních rovnic z pohledu žáků. Pomocí dotazníku jsem zjišťoval, jaké metody řešení žáci používají, co jim pomáhá překonat obtíže a kde spatřují největší problémy při řešení soustav lineárních rovnic.

Na předchozí kapitoly navazuji v sedmé kapitole výzkumem, ve kterém jsem analýzou didaktických testů zjišťoval nejčastější chyby, kterých se žáci dopouštěli. Z rozhovorů s učiteli vyplynuly některé hypotézy, které jsem dále v této kapitole ověřoval.

Práce je ukončena závěrem, který shrnuje vybrané výsledky a obsahuje didaktická doporučení.

Přílohy obsahují správná žákovská řešení obou didaktických testů, ukázku přepisu rozhovoru s jedním učitelem, odkazy na vlastní digitální učební materiály a seznam tabulek a obrázků.

2. Soustavy lineárních rovnic

2.1 Lineární rovnice

Rovnice $ax + b = 0$, kde $a, b \in R$, $a \neq 0$, nebo takové, které se dají na tento tvar převést, se nazývají lineární rovnice (s neznámou x). Všechny možné hodnoty neznámé x, které po dosazení do rovnice splňují požadovanou rovnost, nazýváme řešením rovnice nebo též kořeny rovnice. Pojem řešení rovnice používáme i k označení postupu vedoucího k nalezení kořenů rovnice. Dvě rovnice se nazývají ekvivalentní, pokud mají stejnou množinu kořenů. Ekvivalentní úpravou myslíme takovou úpravu, která převede rovnici na rovnici s ní ekvivalentní. Zkouškou nazýváme kontrolu správnosti řešení, kterou provedeme dosazením kořenů do původní rovnice.

Mezi ekvivalentní úpravy patří

- přičtení nebo odečtení stejného čísla nebo výrazu obsahujícího neznámou k oběma stranám rovnice,
- násobení nebo dělení obou stran rovnice stejným nenulovým číslem nebo výrazem obsahujícího neznámou, pokud je různý od nuly,
- vzájemná výměna stran rovnice,
- umocnění obou stran rovnice stejným přirozeným číslem, jsou-li obě strany nezáporné (nebo naopak záporné) v celém oboru řešení rovnice.

Lineární rovnice o jedné neznámé může mít

- právě jedno řešení,
- nekonečně mnoho řešení,
- žádné řešení.

Rovnice $ax + by = c$, kde $a, b, c \in R$, $a, b \neq 0$, nebo takové, které se dají na tento tvar převést, se nazývají lineární rovnice se dvěma neznámými. Řešením lineární rovnice se dvěma neznámými je uspořádaná dvojice čísel x, y, která po dosazení do rovnice změní tuto rovnici v rovnost. Pro lineární rovnici se dvěma neznámými platí stejné ekvivalentní úpravy jako pro lineární rovnici s jednou neznámou. Každá lineární rovnice se dvěma neznámými má nekonečně mnoho řešení v množině reálných čísel.

2.2 Soustava dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými

Soustavy rovnic

$$a_1x + b_1y = c_1,$$
$$a_2x + b_2y = c_2,$$

kde $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in R$, nebo soustavy, které se dají na tento tvar převést, se nazývají soustavy dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými *x, y.* Řešením soustavy nazveme každou uspořádanou dvojici *[x, y]*, která je řešením obou jejich rovnic.

Mezi ekvivalentní úpravy soustavy rovnic patří:

- nahrazení libovolné rovnice soustavy rovnicí, která je s původní rovnicí ekvivalentní,
- nahrazení libovolné rovnice soustavy rovnicí, která vznikla součtem této rovnice s libovolnou jinou rovnicí soustavy,
- dosazení neznámé nebo výrazu s neznámou z jedné rovnice soustavy do libovolné jiné rovnice této soustavy,
- záměna pořadí rovnic,
- vynechání rovnice, která je násobkem jiné rovnice soustavy.

Soustava rovnic může mít

- právě jedno řešení, kterým je uspořádaná dvojice čísel,
- nekonečně mnoho řešení,
- žádné řešení.

Pokud mohu pomocí ekvivalentních úprav převést alespoň jednu rovnici na tvar $0 = 0$, pak má soustava nekonečně mnoho řešení. Soustava rovnic nemá řešení, pokud alespoň jednu rovnici převedeme pomocí ekvivalentních úprav na tvar nepravdivé rovnosti. Podstatou řešení soustavy dvou rovnic se dvěma neznámými je často vyloučení jedné neznámé z některé z rovnic soustavy. Existuje několik základních metod.

2.2.1 Metody řešení soustav lineárních rovnic

Metoda dosazovací (substituční)

Podstata této metody spočívá ve vyjádření jedné neznámé z jedné rovnice soustavy a dosazení do druhé rovnice, čímž se jedna neznámá z této rovnice vyloučí.

Postup řešení je následující:

1. Vyjádříme jednu z rovnic ze soustavy ve tvaru $y = ax + b$, popř. $x = cy + d$.
2. Do druhé rovnice dosadíme za y výraz $ax + b$, popř. za x výraz $cy + d.$ Získáme rovnici o jedné neznámé *x* nebo *y,* kterou vyřešíme.

3. Číslo, které je řešením této rovnice, dosadíme za x nebo y do jedné z rovnic dané soustavy, dospějeme tak k jedné rovnici o jedné neznámé y nebo x. Vyřešením této rovnice určíme i druhou neznámou.

Metoda sčítací (adiční)

Podstatou sčítací metody je násobení obou rovnic čísly tak, aby se po sečtení rovnic jedna neznámá vyloučila.

Postup řešení shrneme do tří bodů:

1. Každou rovnici soustavy vynásobíme vhodným nenulovým číslem tak, aby koeficienty u neznámé x, popř. y, byla opačná čísla.
2. Levé i pravé strany takto upravených rovnic sečteme a získáme tím rovnici o jedné neznámé, kterou následně vyřešíme.
3. Číslo, které je řešením této rovnice, dosadíme za x nebo y do jedné z rovnic dané soustavy, dospějeme tak k jedné rovnici o jedné neznámé y nebo x. Vyřešením této rovnice určíme i druhou neznámou.

Metoda srovnávací (komparační)

Podstatou srovnávací metody je vyjádření jedné neznámé z obou rovnic a porovnání stejných výrazů.

Postup řešení:

1. Z obou rovnic vyjádříme stejnou neznámou y, popř. x. Dospějeme k soustavě rovnic ve tvaru $y = a_1x + b_2$, $y = a_2x + b_2$, popř. ve tvaru $x = c_1y + d_2$, $x = c_2y + d_2$.
2. Výrazy na pravých stranách se rovnají stejné hodnotě neznámé, sestavíme tedy jednu rovnici o jedné neznámé ve tvaru $a_1x + b_2 = a_2x + b_2$, popř. $c_1y + d_2 = c_2y + d_2$. Rovnici vyřešíme.
3. Číslo, které je řešením této rovnice, dosadíme za x nebo y do jedné z rovnic dané soustavy, dospějeme tak k jedné rovnici o jedné neznámé y nebo x. Vyřešením této rovnice určíme i druhou neznámou.

Grafická metoda

Grafické řešení soustavy dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými vychází z poznatku, že množinou všech bodů, jejichž kartézské souřadnice splňují lineární rovnici, je přímka. Jestliže sestrojíme přímky, které graficky znázorňují v soustavě kartézských souřadnic Oxy obě dané lineární rovnice, pak body jejich průniku mají souřadnice, jež představují řešení soustavy těchto lineárních rovnic.

Soustava rovnic má

- právě jedno řešení, jestliže přímky znázorňující obě rovnice jsou různoběžné,
- žádné řešení, jestliže tyto přímky jsou rovnoběžné různé,
- nekonečně mnoho řešení, jestliže obě přímky splývají.

Coufalová (2013) uvádí následující postup řešení:

1. Každou rovnici soustavy upravíme na tvar rovnice lineární funkce $y = ax + b$. Získáme tak rovnice dvou lineárních funkcí.
2. Sestavíme tabulky funkčních hodnot obou funkcí. V téže soustavě souřadnic sestrojíme grafy obou funkcí.
3. Určíme průsečík přímek. Souřadnice průsečíku jsou řešením dané soustavy rovnic.

Gaussova eliminační metoda

Princip Gaussovy eliminační metody je založen na postupném převedení soustavy rovnic pomocí řádkových ekvivalentních úprav do soustavy řádkově odstupňovaného tvaru, která je ekvivalentní s původní soustavou, a pak nalezení řešení pomocí zpětné substituce. V praxi se metoda využívá především při řešení soustav více rovnic s více neznámými, při řešení soustavy dvou rovnic se dvěma neznámými je většinou rychlejší použít některou z předchozích metod.

Postup řešení:

1. Soustavu upravíme tak, aby v první rovnici byl u neznámé, kterou zapisujeme jako první, nenulový koeficient (nejčastěji jednička). Pokud tomu tak není přímo v dané soustavě, změníme pořadí rovnic, popř. změníme pořadí, v němž v rovnicích zapisujeme neznámé.
2. První rovnici opíšeme, ke druhé rovnici, popř. k jejímu nenulovému násobku, přičteme takový násobek první rovnice, aby v této rovnici neznámá zapisovaná jako první „zmizela“. Získáme jednu rovnici s jednou neznámou, kterou vyřešíme.
3. Číslo, které je řešením této rovnice, dosadíme za x nebo y do jedné z rovnic dané soustavy, dospějeme tak k jedné rovnici o jedné neznámé y nebo x. Vyřešením této rovnice určíme i druhou neznámou.

Cramerovo pravidlo

Cramerovo pravidlo se používá pro řešení soustavy lineárních rovnic s regulární maticí pomocí determinantů. Regulární matice je čtvercová matice, jejíž determinant je různý od nuly. Pravidlo je vhodné pro soustavy dvou a tří rovnic, protože výpočet determinantů čtvrtého a vyššího řádu je náročný postup.

Uvažujme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

Matice koeficientů je čtvercová matice. Označme Δ determinant matice soustavy lineárních rovnic:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Nyní označme Δ_1 a Δ_2 determinanty matice soustavy, ve které jsou první a druhý sloupec nahrazeny sloupcem pravých stran soustavy.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Pokud je determinant matice nenulový $\Delta \neq 0$, matice je regulární, soustava má jedno řešení, pro které platí:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

Na základní škole se při výuce využívají první čtyři metody řešení (dosazovací, sčítací, srovnávací a grafická). Gaussova eliminační metoda a Cramerovo pravidlo je založeno na znalostech matic a determinantů, žáci se s nimi tedy setkávají nejčastěji na střední nebo vysoké škole.

2.3 Historie soustav lineárních rovnic

Úlohy, které vedou na soustavy lineárních rovnic, se vyskytují již v nejstarších civilizacích, ve starém Egyptě nebo Mezopotámii. Například Kolman (1968) popisuje úlohy, které bychom mohli považovat za rovnice, jež se dochovaly z období kolem roku 2000 př. n. l. Tyto úlohy se vyskytují na hliněných babylónských destičkách, ve starých čínských sbírkách příkladů nebo v Ahmesově papyru. K výraznému pokroku v metodách řešení takovýchto úloh pak došlo ve staré Číně před dvěma tisíci léty. Formulace úloh byly tehdy vyjadřovány slovy a větami, nebyly známy znaky pro početní výkony ani pro znaménko rovnosti. Podstatou ale bylo stanovení neznámého čísla, které by vyhovovalo určitým podmínkám.

O řešení rovnic ve starém Egyptě nám poskytuje informace především Ahmesův (Rhidův) papyrus. Většinou se jedná o úlohy určit nějaké množství, které splňuje dané podmínky. Řešení těchto úloh se provádělo metodou falešného předpokladu. Nejprve bylo odhadnuto řešení, poté se dosadilo do zadání. Správný výsledek se získal úměrným zvětšením nebo zmenšením odhadu. Tím byla třeba úloha, kde počet 15 tvořila hromada a její čtvrtina. (Bečvář a kol., 2001) V dnešní symbolice by se dala přepsat jednoduchou lineární rovnicí $x + \frac{1}{4}x = 15$. V Moskevském papyru se podle Bečváře (2007) vyskytuje několik úloh, které je možno vyjádřit jednoduchými soustavami lineárních rovnic. Jsou věnované problematice chleba a piva, z matematického hlediska jsou zcela triviální, řešené přímým dělením a dosazovací metodou.

Již v 18. století př. n. l. se ve staré Mezopotámii řešily úlohy, které dnes řešíme pomocí lineárních rovnic a jejich soustav. Jsou většinou složitější než úlohy egyptské. Často se objevovaly úlohy vedoucí na soustavu lineární a kvadratické rovnice. Původ většiny úloh byl geometrický, tudíž se nejvíce používala geometrická terminologie. Neznámé veličiny se označovaly jako *délka, šířka, výška, hloubka*, součin dvou neznámých jako *obsah* či *plocha*, součin tří neznámých byl označován jako *objem*. (Bečvář a kol., 2001) Na soustavu rovnic vede například úloha psaná na hliněné destičce, kterou lze formulovat takto: *Součet výměr dvou polí dává 30 čtverečných jednotek, z nich sklidili (18, 20) měřic zrna. Určete výměru pole, když víte, že ze 30 čtverečných jednotek prvního pole sklízejí (20, 0) měřic zrna a ze 30 čtverečných jednotek druhého pole sklízejí (15, 0) měřic zrna.* (Konforovič, 1989, str. 28) Označíme-li výměry polí *x, y*, pak můžeme tuto úlohu vyjádřit soustavou lineárních rovnic:

$$40x + 30y = 1100$$

$$x + y = 30$$

Výměry polí jsou 20 a 10 čtverečných jednotek.

Jak uvádí Bečvář (2001), ve starém Řecku přispěl k řešení rovnic matematik Diofantos, který žil ve 3. stol. př. n. l. a působil v Alexandrii. Ve svém spise *Aritmetika* poprvé v historii zavádí algebraickou symboliku. Zavedl symbol pro neznámou, symboly pro mocniny neznámé i pro operaci odčítání. Formuloval některá pravidla pro řešení rovnic. Jednak přičítal záporné členy, aby na obou stranách rovnice zůstaly pouze kladné členy, dále pak odčítal absolutní členy, tak aby na každé straně rovnice zůstal pouze jeden člen. U svých úloh uvádí podmínky řešení a u konkrétních výpočtů vždy provádí zkoušku správnosti řešení. Balada (1959) doplňuje, že se věnoval řešení neurčitých rovnic (řešením jsou pouze celá čísla), které se po něm nazývají diofantovské rovnice. Jinak se ve starém Řecku lineární rovnice a jejich soustavy prakticky neobjevují, jelikož pozornost tehdejších matematiků byla zaměřena hlavně na teoretické problémy než na konkrétní počítání.

Na přelomu 8. a 9. stol. n. l. žil významný arabský matematik Abú Abdalláh Muhammad ibn Músá al Madžúsí al-Chwarizmí. Ve svém spise *Aldžebr v'almukabala* (Algebra) navazuje na Diofanta v úpravách rovnic. Mezi úpravy rovnic řadil: přenášení členů rovnice z jedné strany na druhou s opačným významem a slučování podobných členů. Geometricky řešil některé kvadratické rovnice. (Konforovič, 1989)

Úlohy vedoucí na lineární a kvadratické rovnice a jejich soustavy jsou i v nejstarším dochovaném čínském pojednání o matematice, spisu *Matematika v devíti knihách* z období dynastie Chan 1206-1225 př. n. l. Obsah této sbírky odpovídal praktickým potřebám tehdejší čínské společnosti; vyměřování polí, oceňování prací, poměrné rozdělování. Texty úloh nemají žádné vysvětlivky, za textem úlohy se nachází pouze výsledek a naznačený postup řešení. Příklad úlohy řešené metodou falešných předpokladů je následující: *Několik lidí společně kupuje berana. Když každý přispěje pěti penězi, bude chybět 45 penízů do ceny berana. Když každý přispěje sedmi penězi, budou chybět tři peníze. Kolik je lidí a jakou cenu má beran?* (Konforovič, 1989, str. 93) Označíme-li x počet lidí a y cenu berana, pak úloha vede na řešení soustavy

$$5x + 45 = y,$$

$$7x + 3 = y,$$

z níž dostaneme, že bylo 21 lidí a beran stál 150 penízů. Ve spise *Matematika v devíti knihách* se objevují také úlohy vedoucí k řešení soustav lineárních rovnic o třech až pěti neznámých. Takové úlohy byly v tomto spise řešeny metodou fang čcheng (maticová metoda). Významným důsledkem této metody byl objev záporných čísel.

Zajímavé úlohy se nacházejí také v dílech indických matematiků Mahávíra, který žil v 9. století n. l., a Bháskara II. (1114–1145). Jako příklad uvedu úlohu, ve které se má určit majetek dvou osob, jestliže víme, že kdyby první osoba dostala od druhé 100, byla by dvakrát bohatší než druhá, a jestliže by druhá dostala od první 10, byla by šestkrát bohatší než první. (Juškevič, 1978, str. 135) Úloha vede k soustavě

$$x + 100 = 2(y - 100),$$

$$y + 10 = 6(x - 10),$$

odkud $x = 40$ a $y = 170$.

Ve středověku řešili matematici podle Bečváře (2007) celou řadu úloh vedoucích na lineární rovnice a jejich soustavy. K výpočtům používali metodu chybného předpokladu, metodu dosazovací a substituční. Objevují se třeba ve spisech arménského matematika Širakaciho nebo ve sbírce vzniklé na dvoře Karla Velikého *Úlohy k bystření mladíků*. Významným matematikem evropského středověku byl Leonardo Pisánský zvaný Fibonacci, který žil na přelomu 12. a 13. století. V jeho spise *Liber abaci* se vyskytuje velké množství úloh vedoucí na lineární a kvadratické rovnice a na jejich soustavy. Uvedl i značně komplikované úlohy a problémy, které se vymykaly matematikům před ním i dlouho po něm. Jako příklad jednoduché úlohy vedoucí k soustavě rovnic uvádím následující: *Dá-li první druhému denár, budou mít oba stejně. Dá-li* *druhý prvnímu denár, bude mít první desetkrát tolik.* (Bečvář a kol., 2001, str. 283) Úloha vede na soustavu

$$x - 1 = y + 1,$$
$$x + 1 = 10(y - 1),$$

odkud $x = 3\frac{4}{9}$ a $y = 1\frac{4}{9}$.

Jak uvádí Konforovič (1989), teprve v období novověku v 17. století zaváděl René Descartes moderní symboliku. Písmena ze začátku abecedy používal jako symboly známých proměnných, parametrů, písmeny z konce abecedy nahrazuje neznámé proměnné. Složitější soustavy rovnic se řešily maticovým způsobem přeneseným postupně z Číny a později nazvaným Gaussovou eliminační metodou. Po polovině 18. století nabylo podle Bečváře (2007) při řešení soustav rovnic v Evropě na významu Cramerovo pravidlo, které dalo podnět k rozvoji teorie determinantů.

3. Kurikulární dokumenty a učebnice

3.1 Rámcový vzdělávací program

Rámcový vzdělávací program zahrnuje učivo soustavy rovnic se dvěma neznámými ve vzdělávacím oboru Matematika a její aplikace do tematického okruhu Číslo a proměnná. Ten je zde charakterizován takto: *V tematickém okruhu Číslo a proměnná si žáci osvojují aritmetické operace v jejich třech složkách: dovednost provádět operaci, algoritmické porozumění (proč je operace prováděna předloženým postupem) a významové porozumění (umět operaci propojit s reálnou situací). Učí se získávat číselné údaje měřením, odhadováním, výpočtem a zaokrouhlováním. Seznamují se s pojmem proměnná a s její rolí při matematizaci reálných situací.* (RVP ZV, 2013, str. 49) Mezi učivo tohoto okruhu, které se dotýká tématu této práce, patří lineární rovnice a soustava dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými. Mezi očekávané výstupy spojené s tímto učivem bych zařadil (RVP ZV, 2013):

- Žák matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných; určí hodnotu výrazu, sčítá a násobí mnohočleny, provádí rozklad mnohočlenu na součin pomocí vzorců a vytýkáním.
- Žák formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav.
- Žák analyzuje a řeší jednoduché problémy, modeluje konkrétní situace, v nichž využívá matematický aparát v oboru celých a racionálních čísel.

Vzdělávání v dané vzdělávací oblasti směřuje k utváření a rozvíjení klíčových kompetencí prostřednictvím specifických cílů. S učivem soustavy rovnic se dvěma neznámými nejvíce souvisí podle mého názoru následující cíle (RVP ZV, 2013):

- rozvíjení paměti žáků prostřednictvím numerických výpočtů a osvojováním si nezbytných matematických vzorců a algoritmů,
- rozvíjení abstraktního a exaktního myšlení osvojováním si a využíváním základních matematických pojmů a vztahů, k poznávání jejich charakteristických vlastností a na základě těchto vlastností k určování a zařazování pojmů,
- vytváření zásoby matematických nástrojů (početních operací, algoritmů, metod řešení úloh) a k efektivnímu využívání osvojeného matematického aparátu,

- rozvíjení spolupráce při řešení problémových a aplikovaných úloh vyjadřujících situace z běžného života a následně k využití získaného řešení v praxi; k poznávání možností matematiky a skutečnosti, že k výsledku lze dospět různými způsoby,
- rozvíjení důvěry ve vlastní schopnosti a možnosti při řešení úloh, k soustavné sebekontrole při každém kroku postupu řešení, k rozvíjení systematičnosti, vytrvalosti a přesnosti, k vytváření dovednosti vyslovovat hypotézy na základě zkušenosti nebo pokusu a k jejich ověřování nebo vyvracení pomocí protipříkladů.

Téma soustavy rovnic se vyskytuje i v rámcovém vzdělávacím programu pro gymnázia. I zde je zahrnut ve vzdělávacím oboru Matematika a její aplikace do tematického okruhu Číslo a proměnná. Mezi cíle spojené se soustavami rovnic bych zařadil (RVP G, 2007):

- Žák řeší lineární a kvadratické rovnice a nerovnice, řeší soustavy rovnic, v jednodušších případech diskutuje řešitelnost nebo počet řešení.
- Žák rozlišuje ekvivalentní a neekvivalentní úpravy.
- Žák geometricky interpretuje číselné, algebraické a funkční vztahy, graficky znázorňuje řešení rovnic, nerovnic a jejich soustav.
- Žák analyzuje a řeší problémy, v nichž aplikuje řešení lineárních a kvadratických rovnic a jejich soustav.

3.2 Školní vzdělávací programy

Školní vzdělávací programy jsou učební dokumenty, ve kterých každá škola realizuje požadavky rámcového vzdělávacího programu pro daný obor vzdělávání. Učitelé mohou pomocí něj profilovat svoji školu, aby ji odlišili od jiných škol, formulovat vlastní představy o podobě vzdělávání, učit kreativně nebo spolupracovat při mezioborovém vzdělávání.

Vlastní výzkumné šetření bylo provedeno v devátých ročnících dvou základních škol. První poměrně velká škola se nachází ve městě nedaleko Prahy, druhá škola se sníženým počtem žáků ve třídách se nalézá přímo v Praze.

3.2.1 ŠVP ZŠ nedaleko Prahy

Školní vzdělávací program této školy je zaměřen tak, aby rozvíjel žáky, jejich hodnoty, postoje, dovednosti a osobní vlastnosti. Respektuje právo dítěte na individuální rozvoj, vlastní prožívání a hledání, objevování a chybování, zaměřuje se na tvořivou a samostatnou práci, podporuje individualitu každého žáka a vyžaduje spolupráci s rodinou. Škola si zakládá na svém materiálním vybavení. Důležitá je specializace učitelů, zájmy žáků a jejich rodičů. Mezi hlavní oblasti zájmu patří informatika, komunikace a ekologie. Využitím moderních technologií, tvorbou školního časopisu a školních webových stránek a environmentálními projekty se škola snaží vést žáky k potřebným postojům a znalostem. Za hlavní cíl si stanovuje všestrannou kultivaci dětské osobnosti pomocí klíčových kompetencí s důrazem na sebeutváření, sebezdokonalování a rozvíjení vloh, které jsou v každém žákovi.

Matematika je realizována na obou stupních v samostatném vyučovacím předmětu s časovou dotací 4 hodiny týdně v 1., 6. a 9. ročníku, ve 2. až 5. ročníku a v 7. a 8. ročníku je časová dotace 5 hodin týdně. Důraz je zde kladen na logické myšlení, argumentaci, získávání dat a informací a jejich zpracování. Žáci by měli své dovednosti následně uplatnit v praktickém životě a vytvořit si základní bázi pro další vzdělávání.

Celý obsah učiva a metody výuky směřují k vytváření pozitivní motivace a zapojení žáků do samostatného rozvoje svých dovedností. Slouží k tomu skupinové práce, matematické soutěže a olympiády a vhodné výukové programy. Je zdůrazněno začlenění průřezového tématu Osobnostní a sociální výchovy, pomocí kterého žáci rozvíjejí své schopnosti poznávání. Smyslem a cílem vzdělávání je vybavit žáky souborem klíčových kompetencí, a připravit je tak na další vzdělávání a uplatnění ve společnosti. ŠVP zdůrazňuje mezipředmětové vztahy s jinými předměty, nejčastěji fyzikou, chemií a zeměpisem.

Téma lineárních rovnic a jejich soustav je v učebních osnovách obsaženo v 8. a 9. ročníku. V 8. ročníku se žáci učí řešit lineární rovnice pomocí ekvivalentních úprav a matematizovat reálnou situaci danou slovní formou do tvaru lineární rovnice. V 9. ročníku je důraz kladen na formulaci a řešení reálné situace pomocí rovnic a jejich soustav. Žáci by měli umět ze zadaných údajů sestavit rovnici a soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, vyřešit rovnici nebo soustavu dvou rovnic o dvou neznámých pomocí ekvivalentních úprav, ověřit správnost řešení provedením zkoušky, rozhodnout, která rovnice odpovídá zadané slovní úloze, a rozhodnout, zda rovnice nebo soustava rovnic má řešení, které patří do zadaného číselného oboru. Mezi evaluačními nástroji jsou uvedeny krátký test, větší písemná práce, pozorování při práci v hodině a při skupinové práci.

3.2.2 ŠVP ZŠ v Praze

Školní vzdělávací program této školy je zaměřen tak, aby poskytl základní vzdělání s důrazem na praktické využití získaných vědomostí a dovedností. Cílem je vychovat zdravě sebevědomého žáka, který dokáže být samostatný, orientovat se v nových situacích, vést dialog, umět naslouchat, být schopen sebereflexe, pečovat o své zdraví, tolerovat odlišnosti a přijímat odpovědnost za sebe, druhé i za životní prostředí. Vzdělávací program je založen na důležitých hodnotách: tvořivosti, individuálnímu přístupu, akceptování kulturních nebo náboženských rozdílů, multikultuře a integraci. Důležitá je správná komunikace a orientace v životě. Výchovné a vzdělávací cíle jsou uvedeny pomocí klíčových kompetencí.

Matematika je realizována na obou stupních v samostatném vyučovacím předmětu Matematika a její aplikace s časovou dotací 4 hodiny týdně v 1., 2. a 3. ročníku, ve 4. a 5. ročníku a v 6. až 9. ročníku je časová dotace 5 hodin týdně. Učivo matematiky je tematicky propojováno s ostatními vyučovacími předměty (zejména vlastivědou, přírodovědou, fyzikou chemií, zeměpisem) tak, aby žáci pochopili praktický význam matematiky a naučili se používat poznatků v běžném životě. Výchovnými a vzdělávacími strategiemi jsou řešení problémových úloh, pozorování okolního světa, experiment, utváření a ověřování hypotéz, vytváření strategií, aplikace znalostí a dovedností na reálné situace.

Téma rovnice a soustavy rovnic je v učebních osnovách uvedeno v 8. a 9. ročníku. Žáci by v 8. ročníku měli pochopit vztah a zápis rovnosti, používat ekvivalentních úprav rovnic, řešit úlohy s využitím symbolů, zamýšlet se nad reálností řešení a používat kontroly výpočtu a využívat optimální způsob zápisu. Do obsahu učiva v 9. ročníku jsou zařazeny úlohy vedoucí k řešení pomocí dvou rovnic, pomocí grafu nebo k různým řešitelským strategiím s využitím rovnic, dále rovnice s neznámou ve jmenovateli a různé aplikační úlohy například o společné práci. Žáci by měli umět řešit soustavu dvou lineárních rovnic pomocí sčítací i dosazovací metody a pomocí grafu, aplikovat tyto metody při řešení slovních úloh o dvou neznámých, řešit rovnici s neznámou ve jmenovateli a úlohy vedoucí k různým řešitelským strategiím – úlohy o věku, o odměnách, nákupech, pohybu, směsích, společné práci apod.

3.3 Analýza učebnic

V této části se zaměřuji především na analýzu učebnic z hlediska tématu soustavy dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými, kterou jsem provedl na základě těchto kritérií:

- typ úvodní úlohy,
- uvedené metody řešení,
- přehlednost,
- počet úloh k procvičení,
- motivační prvky (atraktivita, obrázky, doplňující prvky).

3.3.1 Analyzované učebnice

Zaměřil jsem se na analýzu níže uvedených učebnic:

- COUFALOVÁ, J. a kol. *Matematika pro 9. ročník základní školy*. 2. upr. vyd. Praha: Fortuna, 2013, ISBN 978-80-7168-995-9.
- TREJBAL, J. *Matematika pro 9. ročník základní školy, 2. díl*. 2. vyd. Praha: SPN, 1999, ISBN 80-7235-057-9.

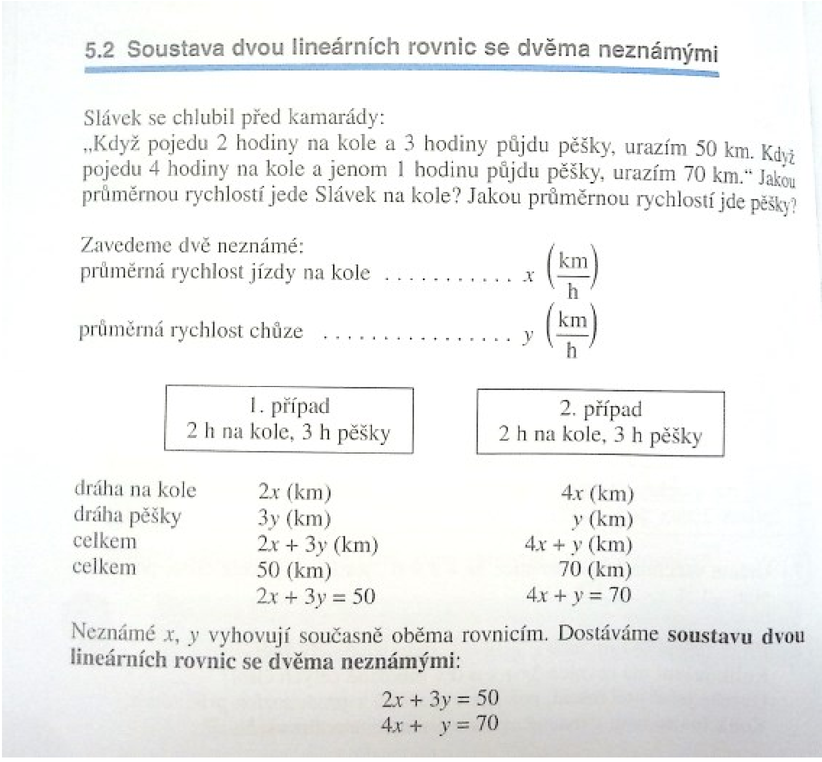
- ŠAROUNOVÁ, A. a kol. *Matematika 9, 1. díl*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2007, ISBN 978-80-7196-155-0.
- HERMAN, J. a kol. *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií, rovnice a jejich soustavy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2006, ISBN 80-7196-137-X.
- BINTEROVÁ, H. a kol. *Matematika 9, Algebra, učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2010, ISBN 978-80-7238-689-5.
- PŮLPÁN, Z. a kol. *Matematika pro základní školy, algebra*. 1. vyd. Praha: SPN, 2010, ISBN 978-80-7235-487-0.
- ROSECKÁ, Z. a kol. *Algebra, učebnice pro 9. ročník*. 1. vyd. Brno: Nová škola, 2000, ISBN 80-7289-024-7.

Pro jednoduchost budu na jednotlivé učebnice odkazovat názvem nakladatelství a jménem hlavního autora. Učebnice jsou představeny ve stejném pořadí, jaké je ve výčtu učebnic výše.

Fortuna, Coufalová

Kapitola *Soustavy lineárních rovnic* se dvěma neznámými je rozdělena do sedmi oddílů. První oddíl se věnuje lineárním rovnicím se dvěma neznámými. Autoři zde zavádějí dvě neznámé a lineární rovnice se dvěma neznámými. Uvádějí řešení lineární rovnice se dvěma neznámými v podobě uspořádané dvojice čísel x, y a doplňují, že pro lineární rovnici se dvěma neznámými platí stejné ekvivalentní úpravy jako pro lineární rovnici s jednou neznámou. Ve cvičeních mají žáci zjišťovat, zda jsou uspořádané dvojice čísel řešením rovnice, vyjadřovat a dopočítávat neznámé. Úlohy jsou často zadávány formou tabulky. Dále mají žáci hledat řešení rovnice v množině celých čísel a zjistit, jak se liší řešení v množině čísel reálných. Na konci oddílu je uvedeno, že každá lineární rovnice se dvěma neznámými má v množině reálných čísel nekonečně mnoho řešení.

Následuje oddíl věnovaný soustavě dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými. Pomocí slovní úlohy je zde ukázán princip vytvoření jedné soustavy dvou rovnic se dvěma neznámými. Slovní úloha je na obrázku 3.1. V jediném cvičení mají žáci zkoušet ze slovního zadání sestavovat další soustavy.



5.2 Soustava dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými

Slávek se chlubil před kamarády:
„Když pojedu 2 hodiny na kole a 3 hodiny půjdu pěšky, urazím 50 km. Když pojedu 4 hodiny na kole a jenom 1 hodinu půjdu pěšky, urazím 70 km.“ Jakou průměrnou rychlostí jede Slávek na kole? Jakou průměrnou rychlostí jde pěšky?

Zavedeme dvě neznámé:
průměrná rychlost jízdy na kole . . . . x $\left(\frac{km}{h}\right)$

průměrná rychlost chůze . . . . y $\left(\frac{km}{h}\right)$

	1. případ 2 h na kole, 3 h pěšky	2. případ 2 h na kole, 3 h pěšky
dráha na kole	$2x$ (km)	$4x$ (km)
dráha pěšky	$3y$ (km)	y (km)
celkem	$2x + 3y$ (km)	$4x + y$ (km)
celkem	50 (km)	70 (km)
	$2x + 3y = 50$	$4x + y = 70$

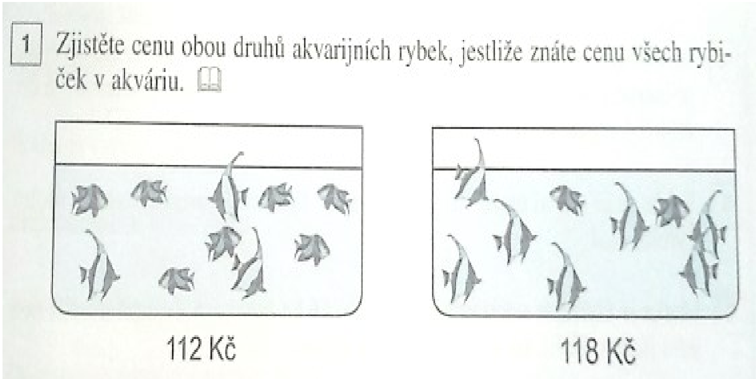
Neznámé x, y vyhovují současně oběma rovnicím. Dostáváme **soustavu dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými:**

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 50 \\ 4x + y &= 70 \end{aligned}$$

Obrázek 3.1: Úvodní úloha tématu soustavy dvou rovnic se dvěma neznámými (str. 96)

V následujících dvou oddílech je představena dosazovací a sčítací metoda. Obě kapitoly začínají slovní úlohou, ze které je sestavena soustava rovnic. Zvlášť je uveden princip metody, popis řešení soustavy rovnic je poté rozepsán v tabulce. V levém sloupci je řešení popisováno slovně, v pravém sloupci je uveden konkrétní příklad. V prvním cvičení mají žáci nejprve vysvětlit způsob řešení, ve druhém už řeší soustavu danou metodou. V oddílu věnovanému dosazovací metodě autoři dále poukazují, že je důležité upravit soustavu do jednoduššího tvaru. Tuto dovednost procvičují žáci v následujících dvou cvičeních. V oddílu o sčítací metodě je jako příklad ukázáno řešení soustavy rovnic s neznámou ve jmenovateli a rozbor počtu řešení soustavy rovnic. Oboje je označeno svislým pruhem, který znamená rozšiřující učivo pro žáky s hlubším zájmem o matematiku. Následuje cvičení, ve kterém žáci zjišťují počet řešení dané soustavy.

Pátý a šestý oddíl se zabývá řešením slovních úloh pomocí soustav rovnic. V úvodu je vždy uvedeno řešení jedné slovní úlohy. Dále je slovně popsán obecný postup při řešení slovních úloh. Následuje několik slovních úloh, které mají žáci vyřešit v rámci procvičování. Zajímavá je úloha zjišťující cenu akvarijních rybiček, která je zadaná obrázkem (obrázek 3.2). Druhý oddíl se složitějšími slovními úlohami je označen svislým pruhem označující rozšiřující učivo.



Obrázek 3.2: Slovní úloha zadaná obrázkem (str. 107)

Závěrečný oddíl této kapitoly je věnovaný opakování. Obsahuje pět cvičení věnovaných procvičování předchozích znalostí a dovedností.

Grafická metoda řešení soustavy rovnic je uvedena až v následující kapitole *Funkce* a je označena jako rozšiřující učivo. Opět je uvedena slovní úlohou, ze které je sestavena odpovídající soustava. Řešení je slovně popsáno v levém sloupci tabulky, v pravém jsou zaznamenány konkrétní kroky řešení této soustavy. Autoři rovněž ukazují grafické řešení soustav, která nemají řešení, nebo naopak mají řešení nekonečně mnoho. První část uvedených cvičení je zaměřená na grafické řešení uvedených soustav, zbylá cvičení obsahují slovní úlohy.

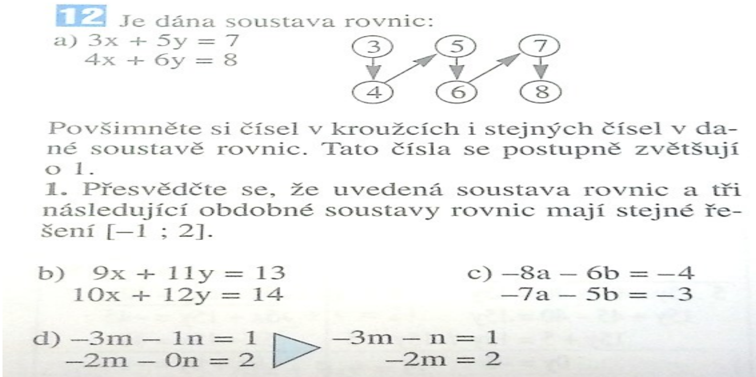
Autoři této učebnice vždy začínají konkrétní téma slovní úlohou. Myslím, že je to vhodné, pomáhá to žákům lépe se dostat do dané problematiky, propojuje ji s reálným životem. Učivo má logickou návaznost, učebnice mi připadá přehledná. Možná je to tím, že s ní v současné době stále pracuji. Znalosti, které si žáci mají pamatovat, jsou barevně zvýrazněny. Informace jsou členěny do dílčích kroků pomocí tabulek. Rozšiřující učivo, jak jsem zmínil výše, je označeno svislým pruhem. Otazníkem jsou označeny náročnější úlohy, ve kterých žáci musí použít více poznatků.

Soustavy rovnic jsou zde řešeny dosazovací, sčítací a grafickou metodou. Chybí metoda srovnávací. Počet úloh k procvičování je podle mého názoru dostatečný. Učebnice nabízí úlohy různé obtížnosti, většinou obtížnost vzrůstá postupně v daném pořadí. Je zpracována standardně, chybí mi snaha o větší atraktivitu, zajímavější formu a design.

SPN, Trejbal

V této učebnici je kapitola *Soustava dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými* rozdělena do čtyř oddílů. První oddíl se zabývá lineárními rovnicemi se dvěma neznámými. Pomocí slovní úlohy je zde zavedena rovnice se dvěma neznámými, zápis řešení v podobě uspořádané dvojice a je rozebrán možný počet řešení v oboru reálných čísel. Žáci mají v uvedených cvičeních vyjadřovat neznámé, vybírat správná řešení dané rovnice a ověřovat to zkouškou, určovat hodnoty druhé neznámé, které jsou řešením uvedených rovnic.

Druhý oddíl je věnovaný soustavě dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými. Hned v úvodu je vyřešena soustava rovnic ve čtyřech krocích pomocí uspořádaných dvojic čísel. Přestože to v učebnici není uvedeno, jedná se o srovnávací metodu. Následuje řešení dosazovací a sčítací metodou, které jsou uvedeny v tabulkách. Slovní popis i jednotlivé konkrétní kroky jsou zapsány společně. Zvýrazněné je tu řešení kombinovanou metodou, při kterém autoři volí početně méně náročné kroky obou metod. Tuto metodu osobně považuji za metodu sčítací. V učebnici jsem to nenašel uvedené, ale myslím, že modré zvýraznění znamenalo rozšiřující učivo. Teprve za uvedenými metodami autoři ukazují, jak vypadá soustava rovnic a její řešení. Pomocí dalšího příkladu se žáci seznamují s ekvivalentními úpravami a s možným počtem řešení soustavy rovnic. V závěru je uvedeno zajímavé cvičení na jeden konkrétní typ soustav rovnic (na obrázku 3.3) a rozšiřující cvičení, ve kterém se vyskytují rovnice s neznámou ve jmenovateli a kvadratickými členy.



12 Je dána soustava rovnic:

a) $3x + 5y = 7$
$4x + 6y = 8$

Povšimněte si čísel v kroužcích i stejných čísel v dané soustavě rovnic. Tato čísla se postupně zvětšují o 1.

1. Přesvědčte se, že uvedená soustava rovnic a tři následující obdobné soustavy rovnic mají stejné řešení $[-1\ ;\ 2]$.

b) $9x + 11y = 13$
$10x + 12y = 14$

c) $-8a - 6b = -4$
$-7a - 5b = -3$

d) $-3m - 1n = 1$
$-2m - 0n = 2$
▷ $-3m - n = 1$
$-2m = 2$

Obrázek 3.3: Zajímavá úloha na speciální typ soustavy rovnic (str. 12)

Třetí oddíl je věnován slovním úlohám řešených pomocí soustav rovnic. Postup řešení je vysvětlován na několika slovních úlohách. V jedné z nich je zápis slovní úlohy zaznamenán do tabulky. Následuje velký počet slovních úloh, nechybí úlohy o společné práci, o pohybu a o směsích.

Poslední oddíl popisuje grafické řešení soustav rovnic a ukazuje, jak mohou vypadat grafy pro různý počet řešení dané soustavy. První část cvičení je zaměřená na grafické řešení uvedených soustav, zbylá cvičení obsahují slovní úlohy. Velmi netradiční je poslední úloha, kde je uvedena kopie části grafikonu železniční dopravy.

Učebnice mi připadala poměrně nepřehledná. Možná je to tím, že celý text je psaný na jedné stránce ve dvou sloupcích. Více zvýrazněné je rozšiřující učivo místo podstatných informací. Kladně hodnotím naznačený zápis slovních úloh pomocí tabulek. Úloh k procvičování je zde dostatek, uvedené symboly rozlišují úlohy, které jsou součástí výkladu, úlohy, které rozšiřují nové učivo o další poznatky, úlohy s nepatrně zvýšenou náročností a obtížné úlohy.

Učebnice používá při řešení soustav rovnic metodu srovnávací, dosazovací, sčítací a kombinovanou. Nepřipadá mi graficky příliš atraktivní, v této kapitole nebyly žádné obrázky ani jiné doplňující prvky.

Prometheus, Šarounová

Téma soustav lineárních rovnic se dvěma neznámými je spojeno se třemi oddíly v kapitole *Rovnice.* První oddíly jsou věnované opakování tématu rovnice, rovnicím s neznámou ve jmenovateli a úlohám o směsích.

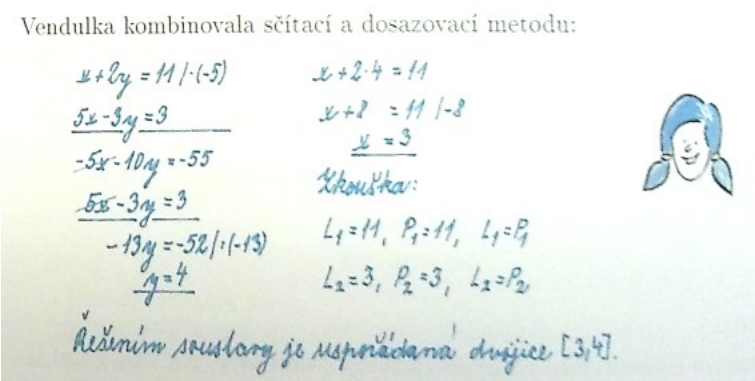
Čtvrtý oddíl této kapitoly se zabývá lineárními rovnicemi se dvěma neznámými. Na úvodní úloze se žáci seznamují s rovnicí se dvěma neznámými a se zápisem jejího řešení. Dále autoři upozorňují, že je důležité uvést, do které číselné množiny má řešení náležet. V dalších řešených úlohách ukazují dosazování hodnot do zadaných rovnic, vyjadřování neznámé a grafické řešení. Za oddílem je seznam cvičení, která jsou obdobou řešených úloh.

Následující oddíl se věnuje soustavě dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými. Hned v úvodu mají žáci zjišťovat, které z uspořádaných dvojic jsou řešením obou uvedených rovnic. V další části je vysvětleno řešení soustav pomocí dosazovací, sčítací a grafické metody. Jsou rovněž rozebrány různé případy v závislosti na tom, kolik má soustava řešení. V řešených úlohách se vyskytují i rovnice s neznámou ve jmenovateli. Za oddílem jsou cvičení s velkým počtem soustav rovnic.

Poslední oddíl je věnován slovním úlohám. Na řešených příkladech je zde uvedeno sestavování soustav ze slovního zadání a jejich následné řešení. K samotnému procvičování je připojeno pouze pět slovních úloh.

Učivo v této učebnici má logickou návaznost. Autoři plynule přecházejí z jedné části do druhé, chybělo mi lepší členění tématu. Znalosti, které si žáci mají pamatovat, jsou barevně zvýrazněny. Po pravé straně některých listů jsou barevné proužky se sloupečky čísel, výrazů či obrázků. Autoři uvádějí, že vhodným prohnutím listů k sobě lze získat řadu dalších úloh. Na konci učebnice je v matematické herně řada námětů a úloh, které slouží k rozšíření znalostí z matematiky a k pobavení.

Soustavy rovnic jsou v učebnici řešeny dosazovací, sčítací a grafickou metodou. V jedné řešené úloze je ukázána metoda kombinovaná. Chybí metoda srovnávací. Žáci zde také mohou srovnávat svá řešení s ukázkami žákovských prací (obrázek 3.4). Počet úloh k procvičování je podle mého názoru přiměřený, jen slovních úloh bych očekával více. Učivo je doplňováno obrázky, které zde mají pouze ilustrativní charakter.



Vendulka kombinovala sčítací a dosazovací metodu:

$$x + 2y = 11 \quad / \cdot (-5)$$
$$5x - 3y = 3$$

$$-5x - 10y = -55$$
$$5x - 3y = 3$$

$$-13y = -52 \quad / : (-13)$$
$$y = 4$$

$$x + 2 \cdot 4 = 11$$
$$x + 8 = 11 \quad / -8$$
$$x = 3$$

Zkouška:

$L_1 = 11,\ P_1 = 11,\ L_1 = P_1$

$L_2 = 3,\ P_2 = 3,\ L_2 = P_2$

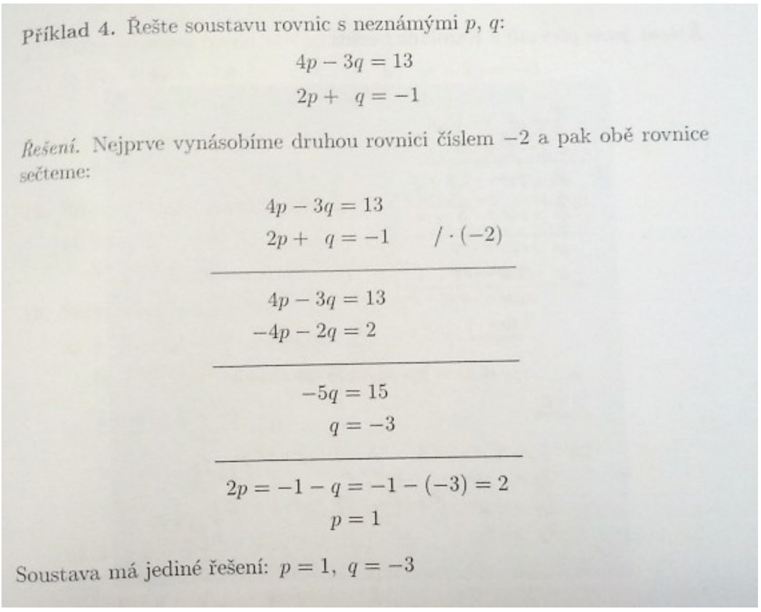
Řešením soustavy je uspořádaná dvojice [3; 4].

Obrázek 3.4: Ukázka žákovského způsobu řešení soustavy kombinovanou metodou (str. 92)

Prometheus, Herman

Tato učebnice je zaměřena na žáky nižších tříd víceletých gymnázií. Soustavy rovnic jsou obsaženy v jedné kapitole *Rovnice s více neznámými*, která je dále členěna pomocí jednoduchých otázek.

V úvodu kapitoly autoři obecně informují, co by žáci už měli znát a co se nového naučí v této části. Následně seznamují žáky s pojmem soustava rovnic a jejím řešením pomocí slovní úlohy s cenami za různé množství čokolády a balíčků oříšků. Dále se žáci učí vyjadřovat jednu neznámou pomocí druhé neznámé, čehož pak využívají při řešení soustavy srovnávací metodou. Podobně autoři seznamují žáky s metodou dosazovací a sčítací. Jednotlivé kroky řešení jsou pro přehlednost odděleny vodorovnými čarami (obrázek 3.5). V další části jsou rozebrány jednotlivé případy podle počtu řešení soustavy. Oproti předchozím učebnicím zde autoři žáky seznamují se zápisem řešení pomocí parametru, pokud má soustava nekonečně mnoho řešení.



Příklad 4. Řešte soustavu rovnic s neznámými p, q:

$$4p - 3q = 13$$
$$2p + q = -1$$

Řešení. Nejprve vynásobíme druhou rovnici číslem -2 a pak obě rovnice sečteme:

$$4p - 3q = 13$$
$$2p + q = -1 \qquad / \cdot (-2)$$

$$4p - 3q = 13$$
$$-4p - 2q = 2$$

$$-5q = 15$$
$$q = -3$$

$$2p = -1 - q = -1 - (-3) = 2$$
$$p = 1$$

Soustava má jediné řešení: $p = 1,\ q = -3$

Obrázek 3.5: Řešení soustavy rovnic sčítací metodou a použití vodorovných čar (str. 87)

Poslední část této kapitoly se zabývá řešením složitějších soustav rovnic. Objevují se tu rovnice s neznámou ve jmenovateli i se smíšenými členy (se členy, které obsahují součin proměnných). Za kapitolou následuje cvičení s velkým počtem soustav rovnic.

Slovní úlohy řešené pomocí soustav jsou umístěny v následující kapitole. Celkem je v ní uvedeno osm vzorově vyřešených slovních úloh a velký počet dalších slovních úloh určených k procvičování. Další úlohy, které se řeší pomocí soustav rovnic, jsou navíc v navazující kapitole *Úlohy z matematické olympiády*.

Učivo v učebnici na sebe logicky navazuje, je popsáno jednoduchým a pochopitelným jazykem, který by mohl být žákům blízký. Výklad nového učiva je uveden motivující otázkou. Drobnějším písmem jsou uvedeny pasáže, které překračují standardní rámec učiva.

V učebnici jsou zařazeny ukázky „opsané“ z žákovských sešitů, které by mohly posloužit jako vzory takových zápisů. Důležité informace jsou shrnuty ve větách, které jsou graficky ohraničeny rámečky. Modrou šipkou jsou v textu vyznačeny průběžné úkoly, ke kontrole zvládnutí učiva je určeno cvičení za každdou kapitolou. Jednoduchými symboly hvězdiček a čtverečků jsou označeny obtížnější nebo zajímavé úlohy.

Velmi kladně hodnotím bohatý „příkladový“ materiál i přítomnost obtížnějších úloh. Obrázky se vyskytují v malé míře a slouží pouze jako ilustrace.

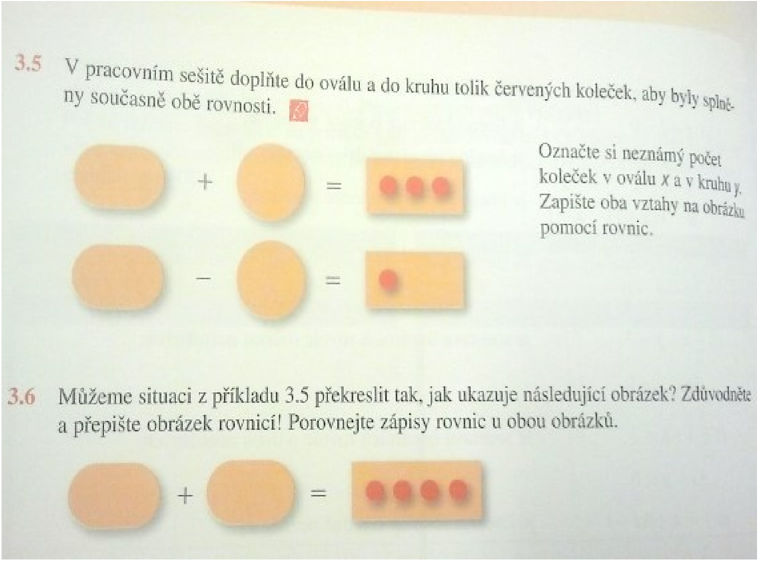
Fraus, Binterová

Soustavy rovnic jsou v této učebnici obsaženy ve třetí části kapitoly *Rovnice*, která se nazývá *Více lineárních rovnic a více neznámých = soustava rovnic*. Na rozdíl od předchozích učebnic zde nejsou v úvodu nabídnuty úlohy s postupem řešení. Žáci se mají snažit odlišit lineární rovnice s jednou a dvěma neznámými a soustavy rovnic, rovněž zkouší sami najít jejich řešení pomocí obrázků získaných v programu Derive. Takto vlastně žáky hned v úvodu seznamují s grafickým řešením. Dále je zavedena lineární rovnice se dvěma neznámými, soustava dvou rovnic se dvěma neznámými a řešení v podobě uspořádané dvojice.

Pomocí oválů, kruhů a červených koleček je v další části zadána soustava

$$x + y = 3,$$
$$x - y = 1.$$

Jedná se o jednoduchý model, pomocí kterého mají žáci odhalit smysl sčítací metody (na obrázku 3.6). Úloha je následně pomocí modelu vyřešena a celé řešení zapsáno také pomocí neznámých.

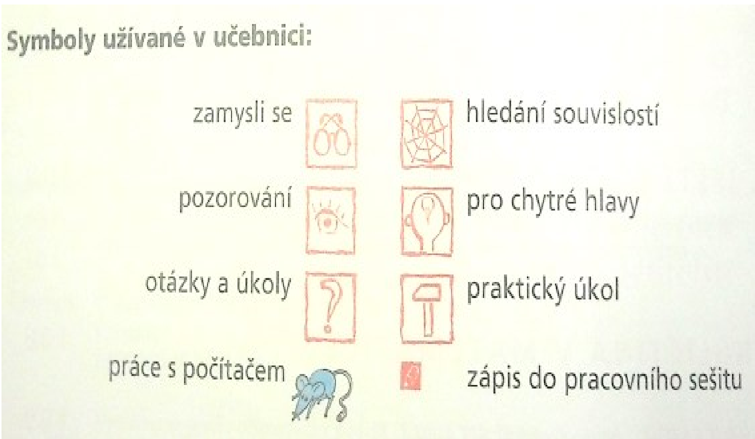


Obrázek 3.6: Model k zavedení sčítací metody při řešení soustavy rovnic (str. 54)

Na vzorové slovní úloze je v následující části ukázáno sestavení soustavy rovnic a jejího řešení pomocí dosazovací metody. Následuje sada procvičovacích úloh, mezi kterými nechybí ani rovnice s neznámou ve jmenovateli a několik slovních úloh.

Dále autoři navádějí žáky k práci na počítači v programu GeoGebra. Opět tak mohou pracovat s grafickým řešením soustav rovnic a počtem řešení pro jednotlivé případy. Následuje ještě několik slovních úloh. V samém závěru je přehledné shrnutí celé kapitoly a zkouška znalostí ve formě opakovacích cvičení.

Autoři se podle svých slov snaží, aby matematika žáky bavila a aby získané vědomosti byly dětem užitečné. Proto vycházejí vstříc dětské potřebě objevovat a experimentovat. Učebnice mají stimulovat žáky k větší činnosti, kladou důraz na vizualizaci a grafické ztvárnění. Učebnice pracuje se symboly, které zpřehledňují učivo. Jsou uvedeny na obrázku 3.7. Obrázky plní motivační i názornou funkci.



Obrázek 3.7: Symboly používané v učebnici (str. 4)

Prostřednictvím otázek na okraji stran se autoři snaží o podporu mezipředmětových vztahů. Propojení s jinými předměty, konkrétně s fyzikou, jsem našel i v závěrečných opakovacích úlohách. Velmi se mi líbila přítomnost úkolů na práci s počítačovými programy Geogebra a Derive.

Učebnice je přehledná, kladně hodnotím závěrečné shrnutí. Soustavy rovnic jsou řešeny pouze sčítací a dosazovací metodou. Grafická metoda se objevuje při práci s počítačem. Množství cvičení a úloh je dostatečné.

SPN, Půlpán

Kapitola *Soustava dvou rovnic se dvěma neznámými* logicky navazuje v této učebnici na kapitolu *Vyjádření neznámé ze vzorce* a je rozdělena na čtyři části. První část je věnovaná jedné rovnici se dvěma neznámými a jejímu řešení. Pomocí slovní úlohy je zavedena jedna rovnice se dvěma neznámými a její řešení ve formě uspořádané dvojice. K sestavení rovnice je použita přehledná tabulka, k jejímu řešení je zvolena dovednost vysvětlovaná v předchozí kapitole. Dále autoři rozebírají možný počet řešení v závislosti na velikosti koeficientů v rovnici a číselného oboru proměnných.

Druhá část obsahuje soustavu dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými a její řešení. Tato část tentokrát není uvedena slovní úlohou. Autoři rovnou zavádějí pojem soustavy rovnic a představují základní metody řešení: dosazovací, sčítací, srovnávací a kombinovanou. Poslední dvě uvedené metody mají přídomek *rozšiřující učivo*. Závěr této části se věnuje počtu řešení, kterých mohou soustavy nabývat, a krátkému shrnutí. Opakovací cvičení jsou převážně zaměřena na řešení soustav rovnic, úlohy s hvězdičkou obsahují rovnice se zlomky a se smíšenými členy.

Třetí část má název *Rovnice a jejich soustavy kolem nás* a zabývá se slovními úlohami a jejich řešením pomocí soustav rovnic. Slovní úlohy jsou rozděleny na několik typů: různé úlohy, o pohybu, o společné práci a výkonech lidí i strojů a o směsích. V úvodní řešené úloze autoři nabízejí hned několik možných postupů k jejímu vyřešení. Kromě standardního řešení pomocí soustav rovnic ukazují řešení jednou rovnicí s jednou neznámou nebo úsudkem bez rovnic. Velmi se mi líbil zápis slovních úloh pomocí přehledných tabulek (obrázek 3.8).

Proveďte opakovaně zkoušku a napište, nebo alespoň vyslovte požadovanou odpověď.

b) K rovnici $18t = 30 \cdot \left(t - \frac{1}{5}\right)$ můžeme dospět i prostřednictvím údajů v následující tabulce:

Účastníci jízdy	Průměrna rychlost jízdy v $\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$	Doba jeho (v h) na dráze s (v km)	Překonaná vzdálenost (v km)
Bára	18	t	$18t$
pan Špoták	30	$t - \frac{1}{5}$	$30 \cdot \left(t - \frac{1}{5}\right)$

Vzdálenost, kterou překonala Bára,	se rovná	vzdálenosti, kterou překonal pan Špoták.

Opět platí: $18\,t = 30 \cdot \left(t - \frac{1}{5}\right)$.

Obrázek 3.8: Zápis slovní úlohy pomocí tabulky (str. 37)

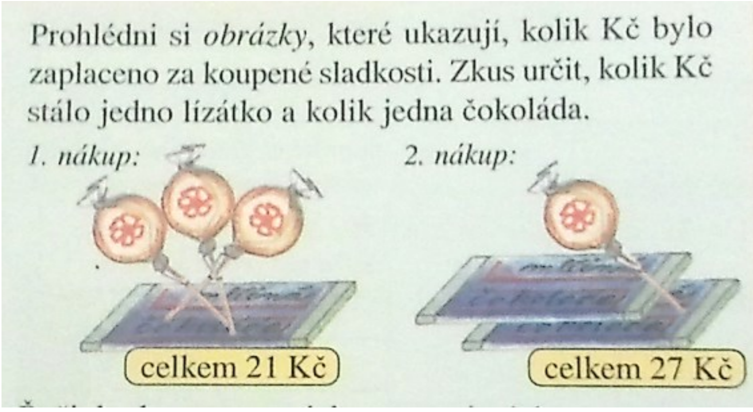
V poslední části je závěrečné opakování a krátký odstavec věnovaný historii matematiky. Grafická metoda řešení soustav rovnic je uvedena v kapitole *Lineární funkce* s přídomkem *rozšiřující učivo.* V ní nejprve autoři připomínají, jak vypadá a jak se tvoří graf lineární rovnice. Dále se věnují řešení soustav rovnic grafickou metodou pro různé volby zadání v závislosti na počtu řešení zadané soustavy. Grafické řešení používají autoři i v následující kapitole *Lineární funkce kolem nás* k řešení slovních úloh.

Učivo v učebnici na sebe logicky navazuje a je vhodně členěno. Důležité informace jsou barevně zvýrazněny. Autoři používají k řešení soustav rovnic všechny základní metody: dosazovací, sčítací, srovnávací, kombinovanou a grafickou. Počet úloh k procvičování je dostatečný, v rámci slovních úloh až nadstandardní. Ocenil jsem přehledné zapisování slovních úloh do tabulky a i nabízený postup řešení pomocí úsudku. Obrázky mají pouze ilustrativní charakter, doplňujícími prvky jsou zde krátké poznámky z historie matematiky.

Nová škola, Rosecká

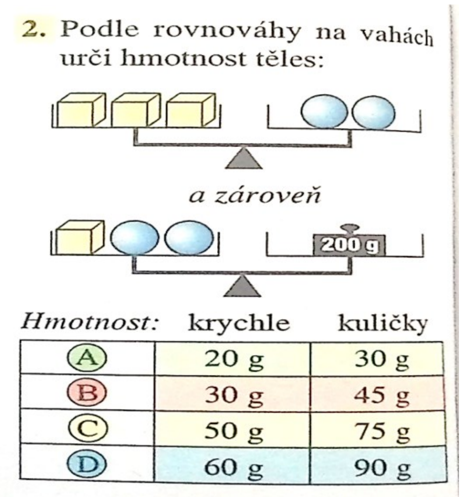
Téma soustav rovnic je spojeno se dvěma částmi v kapitole *Lineární rovnice.* První části jsou věnované řešení rovnic, rovnicím s neznámou ve jmenovateli, výpočtu neznámé ze vzorce a nerovnicím.

Pátá část je věnována samotným soustavám rovnic se dvěma neznámými. Na rozdíl od jiných učebnic zde není zavedena jedna rovnice pro dvě neznámé. Úvodní úloha je zadána pomocí obrázků a jejím smyslem je zjistit cenu za zakoupené sladkosti (obrázek 3.9). Zajímavé je, že souběžně na postranním sloupci je řešena obtížnější úloha s neznámou ve jmenovateli pomocí dosazovací metody.



Obrázek 3.9: Úvodní slovní úloha zadaná pomocí obrázku (str. 48)

Teprve dále autoři uvádějí řešení soustav pomocí základních metod: dosazovací, sčítací a srovnávací. Následně jsou ukázány tři soustavy rovnic s různým počtem řešení. V postranním sloupci je uvedena úloha na výpočet hmotnosti těles. Je zde použit model vah, který je podle mého názoru velmi vhodným v souvislosti s řešením rovnic (obrázek 3.10). Navazuje několik cvičení, které obsahuje jednodušší soustavy rovnic.



Obrázek 3.10: Úloha využívající model vah (str. 50)

Šestou část tvoří slovní úlohy řešené pomocí soustavy rovnic, úlohy o pohybu, o společné práci a o směsích. Grafické řešení soustavy rovnic je začleněno do kapitoly *Funkce.*

Autoři této učebnice podávají učivo stručně a srozumitelně. Důraz je kladen na velké množství doplňujících cvičení ve formě minitestů, zlatých testů, matematických rébusů, cvičení „pro radost z počítání“, různých zajímavostí z vědy a techniky a poznámek z historie. Rozdělení stránek na dva sloupce a množství cvičení působí občas trochu nepřehledně. Atraktivitu zvyšuje barevné členění a množství obrázků, které zde mají názorný a motivační charakter. Překvapilo mě, že oproti ostatním učebnicím není v této učebnici zavedena rovnice se dvěma neznámými. Počet úloh na procvičování je veliký, navíc k učebnici patří dva pracovní sešity.

3.3.2 Shrnutí analýzy učebnic

Výše uvedenou analýzu shrnuji v tabulce 3.1.

Učebnice	**Typ úvodní úlohy**	**Uvedené metody řešení**	**Přehlednost**	**Počet úloh k procvičení**	**Motivační prvky**
Fortuna, Coufalová	slovní úloha	dosazovací sčítací grafická	ano	dostatečný	nejsou
SPN, Trejbal	soustava rovnic	dosazovací sčítací (kombinovaná) grafická	ne	dostatečný	nejsou
Prometheus, Šarounová	soustava rovnic	dosazovací sčítací (kombinovaná)	ano	menší počet slovních úloh	postranní barevné proužky
Prometheus, Herman	slovní úloha	dosazovací sčítací srovnávací	ano	velký	motivační otázky
Fraus, Binterová	přiřazování	dosazovací sčítací grafická (okrajově)	ano	dostatečný + pracovní sešit	obrázky, symboly, práce s počítačem
SPN, Půlpán	žádná	dosazovací sčítací srovnávací grafická	ano	velké množství slovních úloh + pracovní sešit	poznámky z historie matematiky
Nová škola, Rosecká	slovní úloha s obrázkem	dosazovací sčítací srovnávací grafická	méně	velký + pracovní sešit	barevná atraktivita, obrázky, doplňující cvičení, rébusy, historické poznámky

Tabulka 3.1: Souhrn analýzy učebnic

4. Obtíže žáků při řešení soustav lineárních rovnic

4.1 Kritická místa související se soustavami rovnic

Kritická místa v matematice základní školy jsou oblasti, „v nichž žáci často a opakovaně selhávají, jinak řečeno, která nezvládnou na takové úrovni, aby se jejich matematická gramotnost produktivně rozvíjela a také aby mohla být tvořivě užívána v každodenním životě“ (Rendl, Vondrová, 2013, str. 7–8). Mezi taková kritická místa pro české žáky patří algebra (Vondrová, Žalská, 2013), která je pro soustavy lineárních rovnic klíčová. O algebře se sice někdy hovoří jako o zobecněné aritmetice, ale od aritmetiky se v mnohém odlišuje. V aritmetice žáci pracují se známými čísly a usilují o získání neznámé nebo odpovědi. Veškeré operace probíhají s čísly. Naopak v algebře často pracujeme se vztahy mezi neurčenými čísly, čísla mohou být konkrétní, ale zatím neznámá, nebo čísla, která můžeme měnit v daném rozsahu – proměnné.

Výzkumy zaměřené na to, jak se žáci učí a chápou algebraické pojmy, ukazují na obtíže, které přináší přechod z aritmetiky na algebru (Bednarz, Kieran a Lee, 1996; Kieran, 1992, 2007; Stacey Chick a Kendal, 2004; Sutherland et al., 2000, vše cit. v Häggström, 2008). Velmi málo výzkumů však bylo věnováno právě konkrétně pojmu soustav lineárních rovnic. Ve dvou nejrozsáhlejších rešerších zaměřených na algebru vytvořené Carolyn Kieran (Häggström, 2008) jsou uváděny pouhé tři studie zaměřené na učení se pojmu soustav lineárních rovnic. Pokud jde o způsob jejich výuky, nebyly takové studie prakticky žádné. Výjimkou je doktorská práce *Teaching systems of linear equations in Sweden and China: What is made possible to learn?* (Häggström, 2008)

Häggström (2008) vychází z toho, že velkým problémem ve zvládnutí školní algebry je používání písmen. Písmeno (např. x) může být použito různým způsobem, může hrát různé role v různých kontextech. V souvislosti s rovnicemi se písmena používají k reprezentaci specifického ale zatím neznámého čísla. Úkolem řešení lineárních rovnic je tak odhalit tato neznámá čísla. Písmena dále mohou být reprezentována jako čísla, která jsou známa, libovolný počet nebo číslo, které se může měnit v určitém rozsahu, ale také nemusí být vůbec jako čísla interpretována. Nejen ve výše uvedených studiích se ukázalo, že žáci nedostatečně chápou smysl písmen. Velmi často se místo pochopení zaměřují spíše na postupy, jen použitím mechanických pravidel manipulují se symboly tak dlouho, než získají správné řešení. Někteří žáci si neuvědomují, že stejné písmeno v rovnici představuje také stejné číslo, přestože většina učitelů to bere jako samozřejmost.

Výhoda algebry spočívá v tom, že ji lze využít při popisu problémů z matematiky, jiných vědních oblastí či každodenního života. Problém popíšeme algebraickými symboly a tím se odpoutáme od kontextu a řešíme problém jen matematickými prostředky. Rovnice lze tedy vyřešit příslušným postupem bez ohledu na to, jak byly vytvořeny, a bez ohledu na konkrétní kontext. Toto „zbavení kontextu“ však může být jedním z důvodů, které činí žákům potíže.

Další problém ve školní algebře tvoří „staticko-dynamická dualita“ většiny matematických symbolických zápisů. Kieran (1981) uvádí, že velmi důležité k pochopení rovnic je pojetí rovnosti. V aritmetice se často rovnítko používá v dynamickém smyslu. Např. výraz $2 + 3 = 5$ je interpretován jako „máme dva, přidají se tři a dostaneme pět“. Výraz je vnímám jako postup vedoucí z levé na pravou stranu, kde levá strana je to, co máme na začátku, a pravá strana to, co získáme po provedení operace. Tato dynamická interpretace je důležitá i při řešení nejjednodušších rovnic, jako je např. $11 + x = 25$. Při řešení složitější rovnice, např. $2x + 3 = = 13 - x$, je třeba dívat se na rovnítko statickým způsobem, levá a pravá strana musí existovat současně a je stejná (Häggström, 2008, str. 19).

Ve studiích (Filloy, Rojano, Solares, 2003, 2004) měli žáci, kteří již uměli řešit lineární rovnice s jednou neznámou, ale neměli zavedené dvě neznámé, řešit soustavu rovnic $4x - 3 = y$ a $6x + 7 = y$. Žáci nebyli schopni nahradit y z první rovnice výrazem rovným y z druhé rovnice, a získat tak rovnici $4x - 3 = 6x + 7$. Aby bylo možné použít metodu substituce a nahradit neznámou y výrazem $6x + 7$, je třeba ho vidět a zpracovat jako objekt a nikoli jako výzvu k výpočtu („vypočítat šestkrát neznámé číslo a pak přidat sedm“).

Häggström (2008, str. 29) shrnuje problémy vztahující se k soustavám rovnic následovně:

- Žáci si nemusí uvědomit, že stejné písmeno reprezentuje stejné číslo v obou rovnicích.
- Žáci si nemusí uvědomit, že písmena mohou interpretovat jedno číslo i mnoho čísel současně.
- Žáci nemusí být schopni uplatňovat transitivitu při rovnosti stejných výrazů.
- Žáci nemusí vidět a manipulovat s výrazy jako s objekty ve smyslu substituce.

4.2 Typy chyb při řešení soustav lineárních rovnic

Kritická místa vymezují oblasti, ve kterých se žáci dopouštějí nejvíce chyb. Tato místa jsou pro žáky nějakým způsobem obtížná a nejasná, žáci nemají dostatečný vhled do prováděných úprav. Rendl a Vondrová (2014) ve své studii zkoumají výsledky šetření TIMSS a poukazují na to, že čeští žáci zaostávají za svým standardem a dokonce za mezinárodním průměrem v řešení soustavy dvou lineárních rovnic. Z výsledku TIMSS však nelze vyčíst, jakých chyb se žáci konkrétně dopouštějí. Nepovedlo se mi nalézt ani žádnou studii, která by typologii chyb v této oblasti uváděla.

Více výzkumů bylo zaměřeno na řešení jednoduchých lineárních rovnic. Hall (2002) shrnul z dostupné literatury kategorie chyb a na základě vlastních experimentů je přeorganizoval a rozšířil o nové kategorie. Obrázek 4.1 ukazuje celkem 9 kategorií, ke kterým dospěl při svých experimentech ve Velké Británii na vzorku 246 žáků. Největší počet chyb se objevil při nesprávném přechodu z jedné strany rovnice na druhou, chyby z vyčerpání, chyby z nesprávného používání sčítací inverze, transpoziční chyby, chyby při dělení a při nesprávném izolování proměnné. Hall (2002) ve své studii neřeší použitou metodu řešení, tedy nezabírá se procesem vzniku chyb.

Table III

Error Types in the Large-Scale Study

Deletion error (Lit)	Redistribution error (Lit)	Switching Addends error (Lit)
$3x - 3 + 2 = 12 - 3$	$5x + 2 - 2x = 2x + 12 - 2x$	$6x + 2 = 3x + 12$
$x + 2 = 9$	$3x + 2 + 2 = 12 - 2$	$9x = 14$
Transposing error (Lit)	**Omissions error (New)**	**Other Inverse error (New)**
$5 + \frac{x}{2} = 2$	$5x + x + 2 = 3x + 12$	$4x = 1$
$5 + x = 4$	$6x + 2 - 2 = 3x + 12$	$x = 1 - 4$
Number Line Error (New)	**Division error (New)**	**Absence of Structure error (New)**
$-3 + 1 = -4$	$3x = 10$	$5x + x + 2 = 3x + 12$
	$x = 3.1$	$3 + 2 = 3x - 8$

Obrázek 4.1: Kategorizace chyb při řešení jednoduchých lineárních rovnic (Hall, 2002, str. 26)

Nováková (2012) ve své diplomové práci analyzovala Hallovu kategorizaci chyb a pokusila se jeho kategorie rozčlenit do skupin podle předpokládané metody vzniku. Dospěla ke třem následujícím skupinám. První skupina plyne z nesprávného použití metody váhy. Žáci pracují s oběma stranami rovnice zároveň, ale svými chybnými kroky poruší rovnost. Druhou skupinou jsou chyby plynoucí z nesprávného používání metody „měnič“, které vznikají nesprávným přenesením čísla, proměnné nebo výrazu mezi stranami rovnice. Žáci při změně strany rovnice nezmění znaménko u přesunutého členu. Termín „měnič“ pochází z učebnice (Odvárko, Kadleček, 1999). Třetí skupinou jsou chyby z nesprávného používání jiné, ne nutně matematické oblasti. Hlavně se jedná o práci se zlomky, celými čísly, neznalost struktury a nepochopení potřebných matematických vazeb.

Když žáci začínají pracovat se soustavami lineárních rovnic, mají už zkušenosti s některými metodami a pojmy ze školní algebry (např. lineární rovnice s jednou neznámou nebo zjednodušování výrazů), které jim pomáhají překonat obtíže se zavedením tohoto pojmu.

5. Kritická místa při řešení soustav lineárních rovnic z pohledu učitelů

5.1 Výzkumné otázky a realizace experimentu

První část mého výzkumu se týkala rozhovorů s učiteli, s cílem popsat obtíže žáků v oblasti soustav lineárních rovnic, jak je vidí učitelé. Zajímalo mě, jak vybraní učitelé přistupují k tématu soustavy rovnic, kde spatřují ze svého pohledu kritická místa a největší úskalí této oblasti.

Výzkumné otázky tedy zněly takto:

- Jaké didaktické praktiky používají vybraní zkušení učitelé při výuce soustav lineárních rovnic? Jedná se o běžné praktiky nebo si vytvářejí vlastní?
- Jaká úskalí spatřují v tématu soustavy lineárních rovnic a jak je překonávají?

K výzkumným otázkám jsem formuloval otázky, které tvořily základní rámec polostrukturovaných rozhovorů s učiteli:

- Jak začínáte učit soustavy rovnic se dvěma neznámými? Jakým způsobem látku vykládáte?
- Využíváte učebnice? Jakým způsobem? Máte jiné zdroje úloh?
- Jaké metody řešení soustav rovnic používáte?
- Jaké modely používáte při výuce soustav lineárních rovnic?
- Jaká úskalí spatřujete při výuce tématu soustavy rovnic? A jak je překonáváte?
- Jakými metodami zkoušíte míru znalostí a pochopení žáků?
- Jaká je míra pochopení žáky?
- Objevují se někde zásadní kritická místa? A jakých chyb se nejčastěji žáci při řešení soustav rovnic dopouštějí?
- Jaké máte návrhy na zlepšení?

Při výběru učitelů bylo důležité, aby měli ve své aprobaci matematiku, jistou délku praxe a souhlasili s nahráváním rozhovorů. Základní informace týkající se učitelů a realizovaných rozhovorů zachycuje tabulka 5.1. V příloze 5 uvádím pro ilustraci přepis rozhovoru s učitelkou JK.

Iniciály učitele	Délka praxe	Datum rozhovoru	Místo působení učitele v době konání rozhovoru
JK	25	13. 2. 2013	ZŠ nedaleko Prahy
IŠ	31	11. 2. 2013	ZŠ nedaleko Prahy
JB	46	20. 3. 2014	v důchodu
DR	10	15. 1. 2014	ZŠ v Praze

Tabulka 5.1: Základní informace o rozhovorech s učiteli

Veškeré rozhovory byly nahrány na diktafon a následně přepsány do rozhovorů. Délka rozhovorů byla přibližně třicet minut. Předem připravené otázky jsem měnil podle toho, jakým směrem rozhovory směřovaly.

5.2 Interpretace rozhovorů

Moje první otázka směřovala k zavádění pojmu soustavy rovnic se dvěma neznámými. Zajímalo mě, jak začínají vybraní učitelé toto téma učit, zda používají nějaké vlastní netradiční nebo zajímavé didaktické metody a postupy.

Z rozhovorů bylo patrné, že učitelé přemýšlejí o návaznosti učiva na předchozí témata. Tři z nich přímo uvedli, že začínají opakováním lineárních rovnic. Snaží se přimět žáky, aby si vybavili poznatky získané v předchozích hodinách, vzpomněli si na věci, které už znají. Učitel DR podle své odpovědi poskytne na začátku žákům sadu slovních úloh směřujících na soustavu dvou rovnic. Žáci pak mají vyzkoušet vlastní způsoby řešení, tím si také připomínají znalosti předešlé výuky. Až poté učitel ukáže žákům svůj univerzální postup, kterým je řešení soustavy rovnic pomocí základních metod. Všichni učitelé tedy pracují s prekoncepty žáků získaných během předchozího vzdělávání. Během rozhovorů jsem nezjistil, že by někdo z vybraných učitelů používal při své práci se soustavami rovnic nějaké netradiční postupy. Učitelka JK uvedla, že je to *normální výklad*.

Všichni uvedení učitelé při svém vyučování používají učebnice. Rovněž všichni dodali, že učebnice využívají hlavně jako sbírku nebo zdroj úloh. Učitel DR to komentoval tak, že se *žáci doma z učebnic stejně neučí.* Podle učitelky JK jsou v učebnicích *dobře vyřešené postupy rozebrané krok po kroku*, ale přesto si myslí, že by danou látku zvládlo pomocí učebnice jen málo žáků. Učitelka IŠ dodala, že pomocí učebnice mohou dohnat zameškané znalosti žáci, kteří chyběli. Rovněž je to možnost pro žáky *vidět látku jinak.* Také využívá vzorové *výkladové* úlohy, další cvičení z učebnice dává žákům ve formě domácích úkolů. Klade důraz, aby žáci měli spočítány všechny úlohy z učebnice.

Každý z učitelů má i své další zdroje úloh. Učitelka JK používá ve svých hodinách internet, sbírky a další namnožené materiály. Podle svých slov hodně času věnuje právě vyhledávání různých zdrojů na procvičování. Učitelka IŠ využívá jako zdroje úloh převážně starších i novějších sbírek. V rozhovoru zmínila sbírku od Františka Bělouna (Běloun, 1998), která je podle jejích slov pro základní školu v současnosti *příliš těžká*. Učitel DR využívá své nebo převzaté pracovní listy, různé testy, prezentace vytvořené v programech MS Powerpoint nebo ActivStudio a jiné sbírky úloh.

Dále jsem zjišťoval, jaké modely používají učitelé při své výuce, konkrétně při budování schématu soustavy rovnic. Učitel JB uvedl, že problematiku lineárních rovnic vysvětluje na laboratorních vahách, které žáci znají z fyziky. Zdůrazňuje, že stále musí být zachována rovnost, co *se přidá na jedné straně, musí se přidat i na té druhé a naopak*. Vysvětlení prý musel provádět vždy vícekrát i za pomoci obrázků. Učitelka IŠ se snaží používat modely z fyziky. Zbylí dva vyučující podle svých odpovědí žádné modely nepoužívají, ani o žádných nevědí.

Všichni učitelé se shodují v názoru, že je správné učit žáky všem základním metodám řešení soustavy rovnic, tedy metodu dosazovací, sčítací, srovnávací a grafickou. Učitelka JK používá metody sčítací, dosazovací a kombinovanou, trochu stranou prý nechává grafickou metodu. Podle jejího názoru každá metoda procvičuje něco jiného. Všechny metody řádně vysvětlí a žáky upozorní, že každá je vhodná pro jiný typ úloh. Podle jejích slov nemají žáci jednoznačně oblíbenou jednu metodu. I podle názoru učitelky IŠ by *žáci měli umět všechno a vybrat si to nejlepší*. Začíná vyučovat dosazovací metodu, což je podle ní důvod, proč je pak pro slabší žáky podle jejich názoru pochopitelnější. Sama má raději metodu sčítací, kterou pak *bravurně využívají jedničkáři a dvojkaři*. Rovněž je z jejího hlediska zajímavá grafická metoda, kterou hodně využívá při řešení fyzikálních úloh. Učitel DR používá metody dosazovací, sčítací a grafickou, při čemž při své výuce začíná také metodou dosazovací.

Míru znalostí a pochopení dané látky zkouší všichni učitelé podobně. Učitel DR uváděl písemné testy, pracovní listy a pozorování. Pozorování je pro něj nejvhodnější metoda, jelikož učí menší skupiny žáků, a má tedy jednodušší podmínky sledovat všechny členy třídy individuálně. Učitel JB dával podle svých slov žákům jednou týdně testy a větší písemky po uzavření učebního celku. Zmínil rovněž procvičování jednoduchých rovnic (např. $3x = 9$ nebo $5 + x = 8$), které každý žák musí *z hlavy* vyřešit. Učitelka JK mluvila o *klasických* metodách – procvičování a písemky, nejčastěji ovšem používá společné řešení úlohy na tabuli pomocí otázek. Také se krátce zmínila o skupinové práci. Podle jejího názoru byla míra pochopení soustavy rovnic *před mnoha lety* mnohem lepší, v poslední době se zhoršuje a u dnešních dětí je *slabá a špatná*. Rovněž zdůraznila velký vliv období, kdy se soustavy lineárních rovnic probírají. Nevhodný je podle ní konec školního roku 9. ročníku.

Podobné názory vyslovila i učitelka IŠ. Problémy vidí *v dalších věcech, které žáky rozptylují* od samotného řešení soustavy lineárních rovnic. Často se jí stává, že v jedné třídě žáci problematiku pochopí snáze, v jiné třídě naopak žáci nic pochopit nemohou. Učitel JB rovněž zmínil, že v každé třídě je míra pochopení soustav lineárních rovnic jiná. Většinou ale podle jeho slov více než polovina žáků rovnice chápe. Učitel DR se snaží u tématu setrvat tak dlouho, dokud nemá pocit, že v určité míře chápou soustavu lineárních rovnic všichni.

V další části rozhovorů jsem se učitelů ptal, kde vidí kritická místa při řešení soustav rovnic a kde žáci nejčastěji chybují. Učitelka JK vidí nejhlavnější příčinu ve špatných předchozích znalostech. Za nejdůležitější považuje schopnost řešit jednoduché lineární rovnice. Už tady podle ní mnozí žáci selhávají, nedokáží zvládnout *mnoho kroků postupu*. Mezi další uvedla práci s celými čísly, se zlomky, nepochopení algebry, práci s mnohočleny. Další problematická místa vidí ve vyjádření neznámé, ve zkouškách a slovních úlohách. Zmínila rovněž úpravu soustavy rovnic do základního tvaru a hledání společných násobků při použití sčítací metody. Zastavila se i u grafické metody, kterou spojuje spíše s funkcemi.

Také učitelka IŠ spatřuje základní kritická místa v tom, že žáci nepoužívají znalosti a dovednosti získané v předchozích letech školní docházky. Postupem doby podle ní žáci *naučené věci zapomínají* a v 9. ročníku se stále častěji objevují *základní chyby*. Konkrétně uvedla sčítání a odčítání celých čísel, což je důležité hlavně u sčítací metody. Dalším kritickým místem je podle jejího názoru přemísťování členů z jedné strany rovnice na druhou a s tím spojená změna znaménka. Špatnou práci se znaménky spatřuje i v dosazování členů do rovnice za neznámou. Pokud je před neznámou znaménko mínus, hned se tam podle jejích zkušeností objeví chyba. Také se zmínila o problémech žáků se zkouškou, kdy místo do zadání dosazují žáci do upravených rovnic. Překvapivě podle jejích zkušeností nemají žáci problémy se slovními úlohami a ze slovního zadání dokáží sestavit soustavu dvou rovnic se dvěma neznámými.

Učitel JB spatřuje kritická místa hned v několika oblastech. Za prvé podle něj žáci rychle zapomínají, pokud se určitou dobu žáci s danou problematikou nesetkávají, je třeba jim vše znovu připomenout a vysvětlit. Největší potíže vidí v práci s algebraickými výrazy, nejčastěji žáci chybují, pokud se v rovnicích vyskytují závorky, zlomky a celá čísla. Zásadním problémem je podle něj také práce se znaménky, nejvíce při „přesouvání členů přes rovnítko“, nebo pokud se znaménko mínus objeví před členem ve tvaru zlomku, např. $-\frac{3x-4}{2}$. Žáci podle jeho zkušeností pořád zapomínají, že *znaménko rovná se je důležité*.

Podle názoru učitele DR *žáci nemají rádi algebru, a jakmile vidí písmenka, tak se leknou*. Podle něj mají žáci největší problémy při sestavování soustavy rovnic ze zadání slovní úlohy. Vlastní řešení pak již zvládají. *(Pokud chtějí, tak se to naučí každý.*) Chyby rozdělil do tří oblastí: chyby plynoucí z nedostatečného procvičování, chyby z nezvládnutí předchozích celků (zlomky, celá čísla, ekvivalentní úpravy rovnic) a chyby při sestavování rovnic.

Návrhy na zlepšení dané situace se u jednotlivých učitelů docela lišily. Učitelka JK klade důraz na to, aby měli žáci více času na procvičování, na rozdělení postupu řešení do jednotlivých kroků a na to, aby se každý krok procvičoval dostatečně dlouho. K tomu by využívala například počítačů. Upřesnila, že počítače mohou v krátké době podat zpětnou vazbu, a jsou tak vhodné i k samostatnému procvičování. Některé internetové aplikace také jedním kliknutím poskytnou další sadu podobných úloh. Rovněž navrhovala přesunout téma soustavy lineárních rovnic do 8. ročníku nebo na začátek 9. ročníku.

Učitelka IŠ se snaží zlepšit situaci používáním praktických úloh, úloh ze života nebo z fyziky. Snaží se žákům slovní úlohy znázornit pomocí obrázků, velmi názorná je podle ní grafická metoda. Podle učitele JB je důležité opakovat a procvičovat, od jednoduchých soustav rovnic ke složitějším. Často nabízel žákům i doučování. Učitel DR se podle svých zkušeností snaží problematiku *namíchat* tak, aby dával prostor jak rutinním postupům řešení, tak vlastním originálním způsobům řešení. U některých žáků může rutina podle jeho slov demotivovat. Hodnotí zvlášť správně sestavenou soustavu rovnic ze slovní úlohy a vlastní řešení soustavy. Důležité je podle něj *čas od času se k tomu vracet*.

V tabulce 5.2 uvádím vybrané citace z rozhovorů s učiteli pro vybrané kategorie.

Kategorie	**Citace**
Zavedení rovnic	IŠ – *Já se snažím je donutit, aby si vzpomněli na to, co znají.* JK – *Je to normální výklad, nepřišla jsem zatím na žádnou speciální metodu, pravděpodobně normální výklad.*
Učebnice/vlastní materiály	DR – *Učebnice využívám výhradně jako zdroj úloh. Mám zkušenost, že žáci se z učebnic doma stejně neučí, když už, tak ze sešitu.* *IŠ – Ano, používám, ale používám je jako v podstatě sbírku příkladů. A pro děti, když třeba chybějí, aby si to měli kde zopakovat. Pro děti, které nestíhají, tak aby to viděli jinak.*
Modely	JB – *Lineární rovnice jsem vždy vysvětloval na laboratorních váhách, které znali žáci z fyziky. Pořád musí být zachována rovnost, pořád musí platit znaménko =. Co přidám na jedné straně, musím přidat i na druhé a naopak.*
Metody	JK – *Určitě všechny, děti by měly znát všechny, každá metoda vlastně procvičuje něco jiného, takže všechny. Sčítací, dosazovací, každou zvlášť, pak teda dětem řeknu, že mohou použít i kombinovanou, teď nemluvím o grafickém řešení.*

Metody	*IŠ – Začínám tím, co je pro děti, nevím proč, pro mě ne, pro děti je nejpochopitelnější řešení rovnice dosazováním.*
Pochopení/porozumění	JK – *Míra pochopení soustavy rovnic byla mnohem lepší před mnoha lety, teď se ta míra pochopení zhoršuje.* DR – *Snažím se u tématu vždy setrvat tak dlouho, dokud nemám pocit, že to na určité úrovni (to na co mají) pochopili všichni.*
Kritická místa	JB – *Žáci pořád zapomínají, že znaménko = je důležité.* JK – *No tak, určitě, špatné předchozí znalosti.*
Návrhy na zlepšení	JK – *Zlepšení…víc času, víc procvičování. Děti to nechápou.* JB – *Návrhy na zlepšení moc nemám. Jen opakovat, procvičovat od jednoduchých rovnic ke složitějším.*

Tabulka 5.2: Vybrané citace z rozhovorů pro vybrané kategorie

6. Kritická místa při řešení soustav lineárních rovnic z pohledu žáků

6.1 Realizace dotazníkového šetření

Druhá část mého výzkumu se týkala žáků. Cílem této části bylo zjistit, jaké strategie používají žáci při řešení soustav lineárních rovnic. Zajímalo mě, jak se dívají na problematiku řešení soustavy rovnic, kde spatřují kritická místa a co jim pomáhá tyto obtíže překonat.

Výzkumné otázky zněly takto:

- Jaká úskalí spatřují samotní žáci při řešení soustavy lineárních rovnic?
- Jak tato úskalí překonávají?

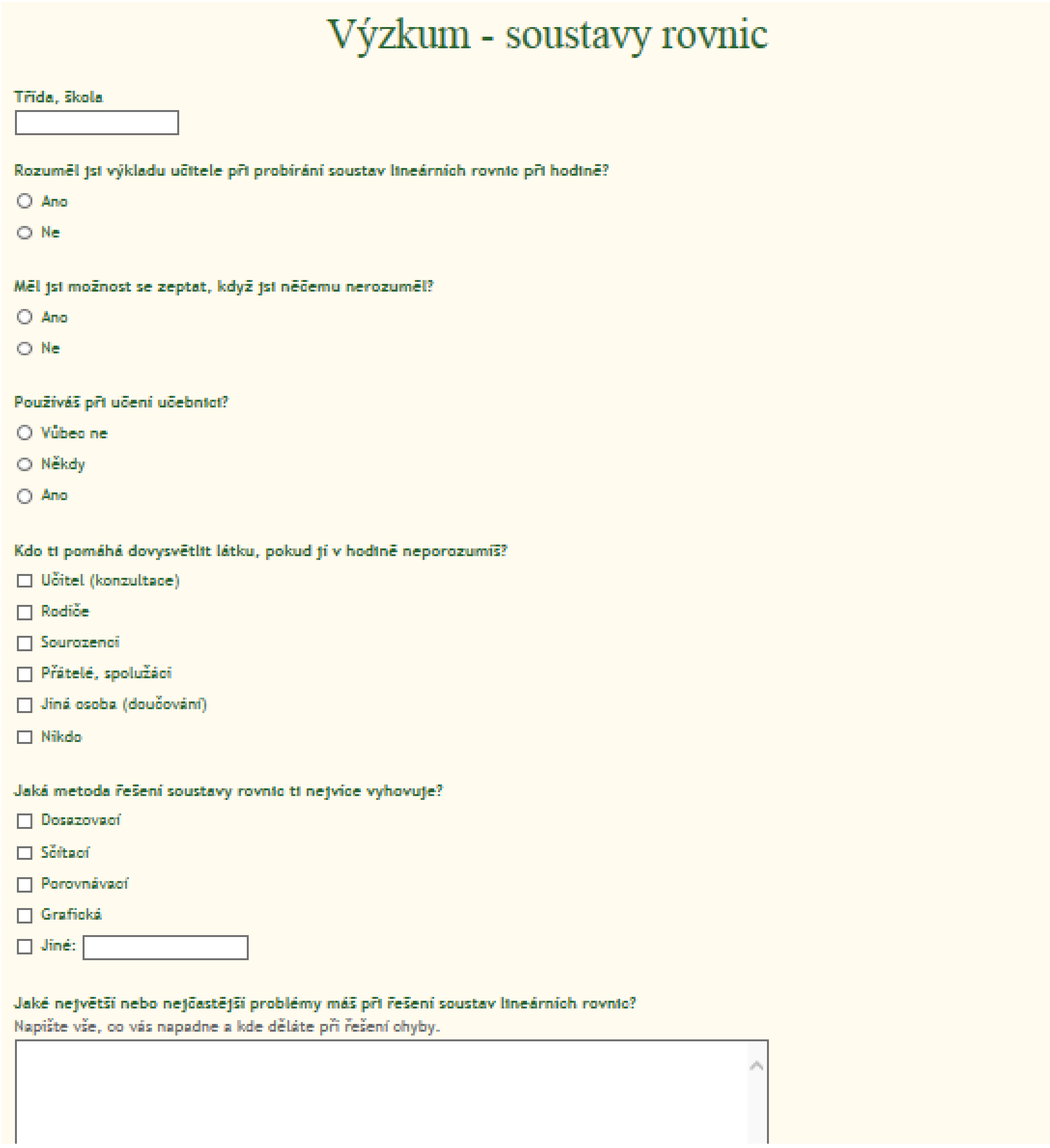
K těmto cílům jsem formuloval otázky, které tvořily základní strukturu dotazníku:

- Rozuměl jsi výkladu učitele při probírání soustav rovnic při hodině?
- Měl jsi možnost se zeptat, když jsi něčemu nerozuměl?
- Používáš při učení učebnici?
- Kdo ti pomáhá dovysvětlit látku, pokud jí v hodině neporozumíš?
- Jaká metoda řešení soustav lineárních rovnic ti nejvíce vyhovuje?
- Jaké největší a nejčastější problémy máš při řešení soustav rovnic?

Pokud jde o metodu sběru dat, zvolil jsem metodu dotazníku, který jsem vytvořil na serveru www.google.com v aplikaci Google Formuláře. Struktura online dotazníku se skládá z pěti uzavřených a jedné otevřené otázky (obrázek 6.1) a nachází se na adrese https://docs.google.com/forms/d/14opUWzgxoBYnBffFxvgjqTYUkiiCSBTE79dMQx0c8Qw/viewform.

Dotazník vyplnilo 135 žáků dvou základních škol. Rozbor jejich školních vzdělávacích programů jsem uvedl v oddílu 3.2. Dotazník vyplňovali žáci 9. ročníků při hodině matematiky v počítačové učebně, na první škole v obdobích 1. – 8. 4. 2013 a 24. – 28. 3. 2014, na druhé škole v období 27. 1. – 31. 1. 2014.

Před zahájením vyplňování dotazníku jsem žáky seznámil s cílem své práce a snažil se je motivovat k odpovědím. Rovněž jsem jim vysvětlil, jak mají postupovat při vyplňování dotazníku, které otázky umožňují pouze jednu variantu odpovědi a kdy je možno zadat více možností. Důrazně jsem upozornil na důležitost otevřené otázky, která se týkala kritických míst při řešení soustavy lineárních rovnic.



Výzkum - soustavy rovnic

Třída, škola

Rozuměl jsi výkladu učitele při probírání soustav lineárních rovnic při hodině?
- Ano
- Ne

Měl jsi možnost se zeptat, když jsi něčemu nerozuměl?
- Ano
- Ne

Používáš při učení učebnici?
- Vůbec ne
- Někdy
- Ano

Kdo ti pomáhá dovysvětlit látku, pokud jí v hodině neporozumíš?
- Učitel (konzultace)
- Rodiče
- Sourozenci
- Přátelé, spolužáci
- Jiná osoba (doučování)
- Nikdo

Jaká metoda řešení soustavy rovnic ti nejvíce vyhovuje?
- Dosazovací
- Sčítací
- Porovnávací
- Grafická
- Jiné:

Jaké největší nebo nejčastější problémy máš při řešení soustav lineárních rovnic?
Napište vše, co vás napadne a kde děláte při řešení chyby.

Obrázek 6.1: Dotazník pro žáky vytvořený v prostředí Google Formuláře

6.2 Vyhodnocení dotazníku

Při vyhodnocení dotazníku jsem také využil aplikaci Google Formuláře. Odpovědi na dané uzavřené otázky od všech 135 žáků jsou přehledně uvedeny v tabulce 6.1. V případě polytomických výčtových otázek, kdy žáci mohli zaškrtnout více možných odpovědí, jsou odpovědi vyhodnoceny pomocí sloupcových grafů s uvedenými četnostmi a procenty.

Otázka	Ano		Ne		Někdy	
Rozuměl jsi výkladu učitele při probírání soustav rovnic při hodině?	101	**75 %**	34	**25 %**		
Měl jsi možnost se zeptat, když jsi něčemu nerozuměl?	124	**92 %**	11	**8 %**		
Používáš při učení učebnici?	27	**20 %**	86	**64 %**	21	**16 %**

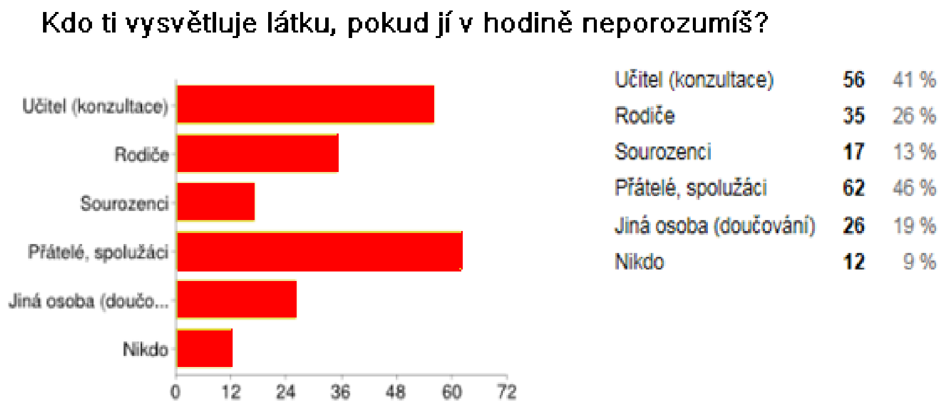
Tabulka 6.1: Vyhodnocení uzavřených otázek z dotazníkového šetření

Hned u první otázky mě překvapilo, že tři čtvrtiny dotazovaných žáků tvrdí, že porozumělo výkladu učitele při probírání tématu soustavy rovnic. Většinou se ve své praxi setkávám s „hláškami“ typu: *Tomu nerozumím. To se v životě nikdy nenaučím*. Rovněž učitelé v rozhovorech uváděli, že míra pochopení je u dnešních dětí slabší, než bývala dříve. Žáci mohou mít představu, že tomu rozumějí. Při výkladu učitele se jim postupy zdají jednoduché a lehké. Pokud však musí řešit úlohu sami, tak selhávají na nedostatečném vhledu a pochopení. Dnešním žákům podle mého názoru také často chybí domácí příprava a dostatek procvičování, probrané učivo rychle zapomínají a dokáží ho používat jen do té doby, než se začne probírat nové téma.

Mezi vybranými žáky a učiteli panuje podle výsledků dotazníku vzájemná důvěra. Přes 90 % žáků uvedlo, že se svého učitele mohou při hodině bez problémů zeptat, pokud něčemu nerozumí. Navíc 41 % žáků uvedlo, že látku, které nerozumí, konzultují se svým učitelem ještě mimo vyučování. Skoro polovina dětí uvedla, že si nechávají některé matematické problémy vysvětlit od svých přátel nebo spolužáků. Vzájemné diskuze a komunikace mezi žáky podle mých zkušeností rovněž napomáhá k lepšímu pochopení učiva. Žáci se mohou i vzájemně motivovat, buď otevřeně, vzájemným povzbuzením nebo vnitřně: *chci umět to, co umí ten druhý*.

Učebnici používá podle uvedených odpovědí alespoň někdy 80 % žáků. Podle mínění učitelů se žáci podle učebnic neučí. Nejpravděpodobněji se tedy bude jednat o procvičování a vypracování domácích úkolů. Podrobněji jsem se bohužel žáků v dotazníku na povahu jejich používání učebnic nevyptal.

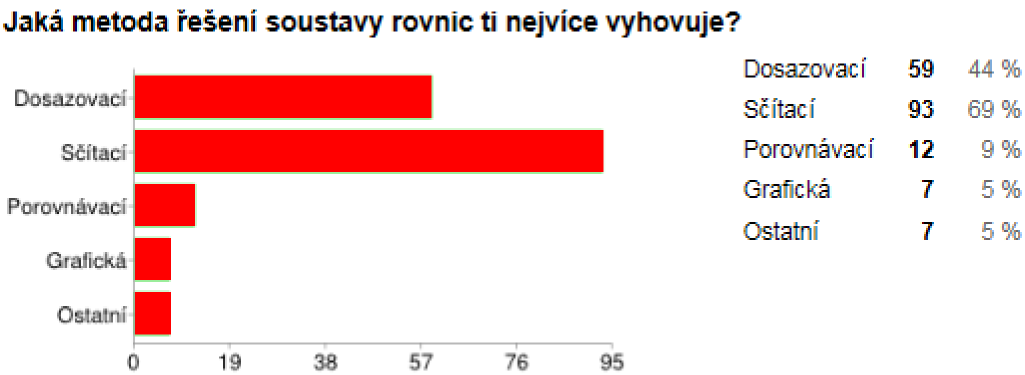
Čtvrtá otázka zjišťovala, kdo žákům vysvětluje nepochopenou látku (obrázek 6.2). Žáci zde mohli zaškrtnout více možných odpovědí. Podle dotazovaných žáků to nejčastěji bývají přátelé nebo spolužáci (46 %), učitelé na speciální konzultaci (41 %), rodiče (26 %), doučování (19 %) nebo sourozenci (13 %). 9 % žáků uvedlo, že jim nikdo další látku nevykládá.



Obrázek 6.2: Vysvětlení dané látky v případě neporozumění

V páté otázce jsem zjišťoval, která z používaných metod nejvíce žákům z jejich pohledu vyhovuje (obrázek 6.3). Podle očekávání nejčastěji žáci vybírali dvě nejpoužívanější metody, metodu dosazovací a sčítací. Jako svou nejoblíbenější metodu při řešení soustavy rovnic zvolila největší část žáků metodu sčítací (69 %). Toto je v mírném rozporu s tvrzením učitelů, kteří se domnívali, že žáci spíše s oblibou využívají metodu dosazovací, protože se většinou vyučuje jako první. Jistým překvapením pro mě byl i fakt, že sedm žáků vybralo metodu grafickou. Opravdu jsem ve druhém didaktickém testu narazil na řešení pouze grafickou metodou (viz oddíl 7.4).

Ze sedmi žáků, kteří vybrali *Ostatní,* pouze jeden připojil, že záleží na situaci, zbývajících šest připsalo věty typu *Co to je?*.



Obrázek 6.3: Obliba metody při řešení soustav rovnic

Poslední otázka byla otevřená. Žáci zde měli možnost vypsat všechna kritická místa nebo chyby, kterých se podle svého názoru dopouštějí při řešení soustavy rovnic. Vytvořil jsem si určitou strukturu kategorií, které jsem očekával, že se v odpovědích vyskytnou. Tuto strukturu jsem pak upravoval na základě konkrétních informací. Z analýzy vyplynula následující zjištění:

- Nejvyšší četnost byla zjištěna u kategorie *Znaménka*, podkategorie *Přesun přes rovnítko*. Do ní jsem zařadil výpovědi, kdy žáci zmiňovali chyby při práci se znaménky a chyby při „přenášení“ členů z jedné strany rovnice na druhou.
- Velkou četnost měla kategorie *Výpočty* s podkategoriemi *Numerické chyby*, *Nepozornost a jednoduché chyby*, *Závorky* a *Přednost operací*. Žáci často zmiňovali chyby při výpočtech. Uváděli, že dělají jednoduché chyby v průběhu řešení.
- Kategorie *Postup* obsahovala podkategorie *Nepochopení, Ztráta, Jak začít, Co dělat* s rovnoměrným rozložením četností. Do této kategorie jsem zařadil výpovědi, ve kterých žáci popisovali, že nepochopili postup řešení soustavy rovnic nebo si ho nepamatují.
- Kategorie *Metoda* obsahovala podkategorie *Sčítací*, *Grafická* a *Dosazovací.* Někteří žáci podle svých odpovědí neumí řešit rovnice některou ze základních metod nebo používají pouze metodu jednu.
- Do kategorií s vyšší četností patřila ještě kategorie *Rovnice* s podkategoriemi *Slovní úlohy*, *Zkouška*, *Vynásobení/Rozšíření*, *Dlouhé/Složité*, *Písmenka/Neznámá*. Do této kategorie jsem zařadil výpovědi, ve kterých žáci uvedli obtíže při práci s rovnicemi. S nimi jsou rovněž spojené slovní úlohy a zkouška.
- Kategoriemi s nízkou četností byly *Učitel/Výklad* a *Nic.* První kategorie obsahuje výpovědi týkající se samotného učitele nebo jeho výkladu. Do druhé kategorie patří tvrzení žáků, kteří podle svých slov žádné problémy s řešením soustav rovnic nemají.

Popis kategorií vyplývá převážně z jejich názvu, pro ilustraci uvádím v tabulce 6.2 vybrané citace z dotazníku s uvedenými kategoriemi v souvislosti s kritickými místy.

Kategorie	**Citace**
Znaménka/Postup/Zlomky	*Problémy mi dělají znamínka, někdy i způsob řešení a roznásobování zlomků.*
Znaménka/Zlomky	*Znamínka, z vlastní nepozornosti zapomenu vynásobit celou rovnici, většinou udělám chybu na začátku počítání tak pak už to mám celé blbě a neumím počítat se zlomky.*
Znaménka/Zkouška/Čísla	*Dělám chyby ve znaménkách. Ale hlavně dělám chyby ve zkoušce. Také dělám chyby, když jsou tam zlomky nebo závorky. A někdy také když jsou velká čísla. Ale u těch čísel je to zase tak, že u čísel dělám nejvíce chyb v desetinných číslech. Ty mi fakt nejdou.*

Postup	*Na začátku každé lineární soustavy nevím jak začít. Dělá mi velké potíže zapamatovat si postup, proto se snažím občas používat sešit, který si s panem učitelem píšeme.*
Znaménka/Zkouška/Slovní úlohy	*Moje nejčastější problémy jsou: Při jednoduchých rovnicích dělám zbytečné chyby, např. špatně změním znaménko (z + na - a na opak) nebo myslím příliš napředu a do rovnic dosazuju jiná čísla, než které mi vyjdou a nevyjde mi to. U složitějších rovnic mám problém jako u všech složitějších (i jednoduchých) příkladů, že pracuji příliš rychle a nedávám pozor na to co píšu. A u slovních úloh? Ty si neumim představit. Slovní úlohy vidím jako čísla a dává mi problém pochopit ten text a sestavit rovnici. To by bylo asi vše k tomuto tématu. Napadá mě spousta dalších nedostatků, ale ty se odstraňují cvičením.*
Metoda	*Zjistit, jaká metoda více vyhovuje danému příkladu, ale spíše nemám problémy s příklady, co se týče soustav lineárních rovnic.*
Zlomky/Znaménka/Zkouška/Metoda/Rovnice	*Většinou udělám chybu, když jsou v soustavě zlomky nebo se často musí měnit znaménka. Často zapomínám dělat zkoušky nebo udělám chybu hned na začátku. Nejde mi grafická a sčítací metoda. Když jsou rovnice moc dlouhé, snadněji udělám chybu.*
Znaménka /Metoda	*Neměním znaménka při daní čísel z levé strany na pravou a naopak neumím rovnice řešit jinak než sčítací metodou.*
Písmenka/Znaménka/Výklad	*Já nevím, asi tam je mnoho písmenek a číslic a všechno se to motá dohromady a taky znaménka mi dělají problém. A nemáme dost času na to to pochopit, protože jedeme moc rychle a nestíhám všemu porozumět. A ti co nejsou tak dobří, například já, nemají šanci to zvládat. Je to moc těžké.*
Slovní úlohy/Znaménka/Závorky/Písmenka	*Nevim, prostě se to vždycky snažím spočítat a ty chyby se tam objevují samy, nebo při slovních úlohách si to špatně přečtu a pak napíšu špatně zápis a pak to mám špatně celý. Dost často taky dělám chyby ve znamínkách, blbý že spletu jedno znamínko a pak mám špatně celej příklad. Taky když musim roznásobit dvě závorky tak tam jsou ty znamínka nejhorší, když je před závorkou mínus, já to nevidim a pak mám celou závorku špatně. Když je ten příklad dlouhej tak se v tom po chvíli začínám ztrácet, všude samý písmenka!!!*

Tabulka 6.2: Vybrané citace odpovědí žáků v dotazníku v souvislosti s kritickými místy

Přestože jsem žáky upozorňoval na důležitost této otázky, 30 žáků neuvedlo žádnou odpověď. Tabulka 6.3 uvádí přehledné shrnutí jednotlivých kategorií a jejich četností.

Velice mě překvapilo, jak žáci dokázali popsat kritická místa a nejčastější chyby, které dělají při řešení soustavy rovnic. Navíc jejich odpovědi odpovídají kritickým místům, která uváděli ve svých rozhovorech vybraní učitelé. Žáci uvedli, že rozuměli výkladu učitele, vědí, kde nejčastěji chybují, přesto se chybám často nedokáží vyvarovat. Je možné, že učitelé podrobně rozebírají se svými žáky místa, kde žáci často chybují. Žáci tak sice dokáží zopakovat to, co jim učitelé stále připomínají, ale nejsou schopni při řešení úlohy dávat na problematická místa větší pozor a tyto chyby eliminovat.

Největší problémy mají podle svého mínění v práci se znaménky. Konkrétně zmiňovali změnu znaménka při přesunu členů přes rovnítko. Žáci se s učiteli shodují v tvrzení, že často chybují v matematických oblastech z předcházejících období. Často chybují při práci se zlomky, zmínili rovněž desetinná a záporná čísla. Pouze jeden žák uvedl ve své odpovědi přednost operací. Jak uvidíme v kapitole 7, tato chyba se v didaktických testech objevovala častěji.

Kategorie	Podkategorie	Četnost
Znaménka		**59**
	Přesun přes rovnítko	8
Výpočty		**31**
	Numerické chyby	14
	Nepozornost	10
	Závorky	6
	Přednost operací	1
Postup		**28**
	Nepochopení	7
	Ztráta	7
	Jak začít	7
	Co dělat	7
Metoda		**27**
	Sčítací	7
	Grafická	6
	Dosazovací	3
Rovnice		**27**
	Slovní úlohy	8
	Zkouška	7
	Dlouhé/Složité	4
	Vynásobení/Rozšíření	4
	Písmenka/Neznámá	4
Čísla		**19**
	Zlomky	12
	Desetinná čísla	3
	Záporná čísla	2
	Velká čísla	2
Učitel/Výklad		**7**
Nic		**3**
Neodpovědělo		**30**

Tabulka 6.3: Kritická místa a chyby z pohledu žáků

V souladu s první otázkou uvedlo 28 žáků, že nerozumí postupu, neví, jak začít a co dělat. Několik žáků v souvislosti s tím dosti negativně hodnotilo ve svých názorech způsob výuky učitele. Pro početnou skupinu žáků je kritickým místem při řešení soustavy rovnic i volba vhodné metody.

7. Kritická místa při řešení soustav rovnic v didaktických testech

7.1 Cíle výzkumného šetření a jeho účastníci

Ve třetí části výzkumného šetření jsem zjišťoval, jak žáci zvládají řešení soustavy rovnic pomocí didaktických testů. Cílem bylo zjistit, jakých nejčastějších chyb se žáci dopouštějí při řešení soustav lineárních rovnic. Také jsem ověřoval, zda se dopouštějí chyb, které byly popsány v předchozích částech práce.

Experimentu se opět zúčastnili žáci 9. ročníků základních škol uvedených v předchozích částech práce. Vytvořil jsem celkem dva didaktické testy, které byly žákům rozdány v hodinách matematiky zhruba týden po vyplňování dotazníku. První test odevzdalo 108 žáků, druhý test vyplnilo 100 žáků z obou škol.

Vzhledem k předchozím rozhovorům s učiteli a dotazníkovému šetření jsem před samotnou tvorbou didaktických testů předpokládal, že zadanou soustavu rovnic vyřeší danou metodou úspěšně více než 50 % žáků. Očekával jsem, že žáci budou dávat přednost dosazovací metodě a že budou chybovat především ve znalostech a dovednostech získaných v průběhu předchozího matematického vzdělávání (tedy že chyby nebudou spočívat v aplikaci metody řešení soustav lineárních rovnic).

7.2 Didaktické testy

První didaktický test obsahoval čtyři jednoduché soustavy dvou rovnic se dvěma neznámými v základním tvaru. Žáci měli za úkol vyřešit zadané soustavy předem určenými metodami a provést zkoušky. Žáci měli dokázat, že ovládají metodu dosazovací, sčítací, srovnávací a grafickou. Soustavy jsem volil tak, aby se daná metoda řešení nejvíce hodila pro danou soustavu. Všechny zadané soustavy měly právě jedno řešení. Test byl vytvořen ve dvou variantách A a B, abych zamezil případnému opisování žáků v lavici. Obě varianty zadání didaktického testu jsou uvedeny na obrázku 7.1. Ukázku správného žákovského řešení daných soustav uvádím v přílohách 1 a 2.

Druhý didaktický test obsahoval dvě složitější soustavy dvou rovnic se dvěma neznámými. Rovnice nebyly uvedeny v základním tvaru. Soustavy jsem volil tak, aby žáci museli pracovat se zlomky, celými čísly, závorkami a dávat pozor na správné pořadí početních operací. Žáci mohli řešit obě soustavy libovolnou metodou. Test byl opět vytvořen ve dvou variantách A a B (viz obr. 7.2). První ze soustavy v obou variantách měla právě jedno řešení. Druhá soustava ve variantě A měla nekonečně mnoho řešení, ve variantě B neměla soustava žádné řešení. Ukázku správného žákovského řešení daných soustav uvádím v přílohách 3 a 4.

A

1, Vyřešte dosazovací metodou a proveďte zkoušku

$3x - 7y = -2$

$x - 3y = 10$

2, Vyřešte sčítací metodou a proveďte zkoušku

$3x + 5y = 18$

$4x - 2y = -2$

3, Vyřešte porovnávací metodou a proveďte zkoušku

$u - 3v = -1$

$u + 5v = 7$

4, Vyřešte grafickou metodou a proveďte zkoušku

$x + y = 7$

$x - y = 1$

B

1, Vyřešte dosazovací metodou a proveďte zkoušku

$3x - 7y = 14$

$x + 3y = 10$

2, Vyřešte sčítací metodou a proveďte zkoušku

$2x + 3y = -8$

$3x - 2y = 27$

3, Vyřešte porovnávací metodou a proveďte zkoušku

$3a + b = -14$

$-3a + b = -10$

4, Vyřešte grafickou metodou a proveďte zkoušku

$x + y = 10$

$x - y = 2$

Obrázek 7.1: Zadání prvního didaktického testu – varianty A a B

A

Vyřešte soustavy

$$\frac{x+3}{2} - \frac{y-2}{2} = 1$$

$$\frac{x-1}{4} + \frac{y+1}{3} = 4$$

$$4(a-4) = 2 + 5(b+2)$$

$$5(-2b-6) = 10 - 8(a-2)$$

B

Vyřešte soustavy

$$\frac{x+1}{3} - \frac{y+2}{2} = 2$$

$$\frac{2x-1}{3} + \frac{y-1}{3} = 2$$

$$3(3a-10b) = 20 - 3(3a-2b)$$

$$3(a+3b) = 10 + 3(2a-b)$$

Obrázek 7.2: Zadání druhého didaktického testu – varianty A a B

Didaktické testy byly zadávány při hodinách matematiky učiteli, kteří danou třídu běžně matematiku vyučují. Jednalo se o „normální“ písemnou práci, která byla hodnocena tradičními známkami a byla součástí jejich hodnocení v matematice. Učitel však navíc žákům oznámil, že jejich práce bude posléze použita do výzkumného šetření této diplomové práce. Žáci měli na vypracování každého z didaktických testů přibližně půl hodiny. Při své práci mohou běžně používat kalkulačky.

7.3 Vyhodnocení didaktických testů

Didaktické testy jsem vyhodnotil v závislosti na tom, zda se žákům podařilo nalézt správné řešení dané soustavy. Z předchozích rozhovorů a dotazníků jsem určil kategorie chyb, které jsem očekával, podle potřeby jsem je dále doplňoval a upravoval. Chyby jsem pak hledal v jednotlivých řešeních. Do statistiky chyb jsem nakonec nezahrnul řešení poslední, čtvrté soustavy pomocí grafické metody. Grafická metoda spadá svou podstatou spíše k funkcím, řešení grafickou metodou se tedy od ostatních metod dosti liší. Navíc se ukázalo, že pomocí ní dokázala vyřešit zadanou soustavu pouze malá část žáků. Zbylá část se o samotné řešení většinou ani nepokusila.

Zjišťoval jsem, pomocí které metody jsou při řešení zadané soustavy lineárních rovnic žáci úspěšnější. Ve druhém didaktickém testu mě rovněž zajímalo, kterou metodu zvolí žáci, kteří budou v testu úspěšní.

7.3.1 První didaktický test

V prvním didaktickém testu měli žáci pevně stanovenu metodu, pomocí které mají danou soustavu řešit. Přehledné shrnutí výsledků je uvedeno v tabulce 7.1.

Metody	Vyřešil	Procent	Nevyřešil	Procent
Dosazovací (úloha 1)	53	49 %	55	51 %
Sčítací (úloha 2)	57	53 %	51	47 %
Srovnávací (úloha 3)	33	31 %	75	69 %
Grafická (úloha 4)	17	16 %	91	84 %

Tabulka 7.1: Úspěšnost řešení zadaných soustav lineárních rovnic v prvním didaktickém testu

Analýza chyb přinesla následující výsledky:

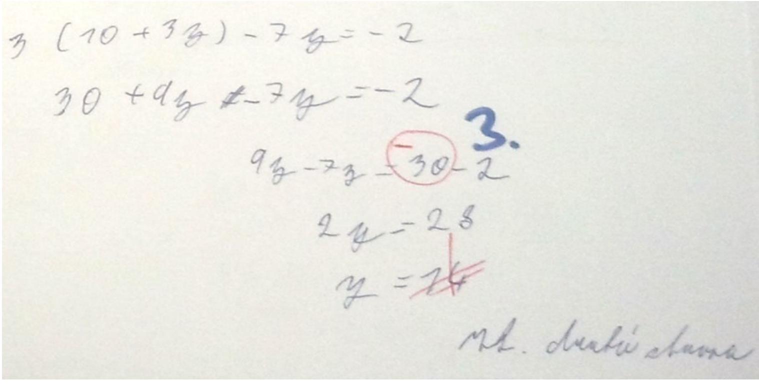
- Největší četnost byla zjištěna u kategorie *Postup.* Do ní jsem zařadil situace, kdy žák nevěděl, co má dělat, neznal postup řešení nebo požadovanou metodu.
- Do kategorie *Rovnice* jsem zařadil špatné vyjádření neznámé, předčasné sčítání rovnic, špatné dosazení za neznámou do rovnice, nedotažení výpočtu do konce při řešení jednoduché rovnice, chyby při násobení rovnice číslem a neopodstatněnou ztrátu nebo výskyt nového členu.

- Velkou četnost měla kategorie *Znaménka*. Do ní jsem zařadil chyby při změně znaménka při přesunu členu přes rovnítko, neodůvodněnou změnu znaménka a chybu ve znaménku při roznásobení závorky.
- Kategorie *Celá čísla* obsahovala chyby při sčítání, odčítání, násobení a dělení celých čísel.
- Kategorie *Výpočty* obsahovala chyby z nepozornosti a špatného opisování, při triviálních výpočtech, nevhodné zaokrouhlování a špatné roznásobení závorky nebo chybu při sčítání mnohočlenů.

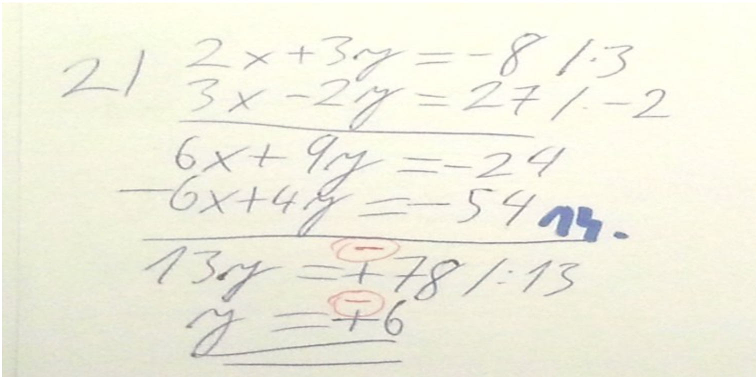
Tabulka 7.2 uvádí přehledné shrnutí kategorií chyb a jejich četností pro první tři úlohy. Obrázky 7.3–7.7 uvádějí příklady nejčastější žákovských chyb, které se vyskytly v prvním didaktickém testu.

Kategorie	Podkategorie	Četnost
Postup	Jak začít, Ztráta, Neznalost metody	**73**
Rovnice		**36**
	Vyjádření neznámé	12
	Předčasné sčítání rovnic	9
	Špatné dosazení za neznámou	15
	Řešení triviální rovnice, nedotažení výpočtu	4
	Násobení rovnice číslem	4
	Neodůvodněná ztráta nebo objev členu	2
Znaménka		**35**
	Přesun přes rovnítko	23
	Neodůvodněná změna	13
	Roznásobení závorky	2
Celá čísla		**20**
Výpočty		**19**
	Nepozornost, Špatné opisování	8
	Triviální výpočty	7
	Nevhodné zaokrouhlování	2
	Roznásobení závorky	1
	Sčítání mnohočlenů	1

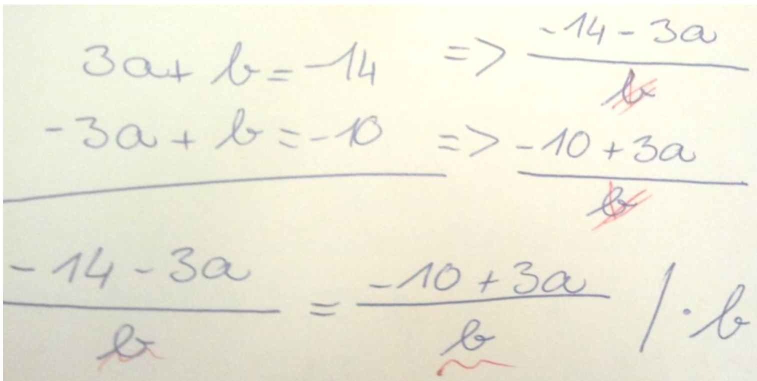
Tabulka 7.2: Kategorie a četnosti chyb v prvním didaktickém testu



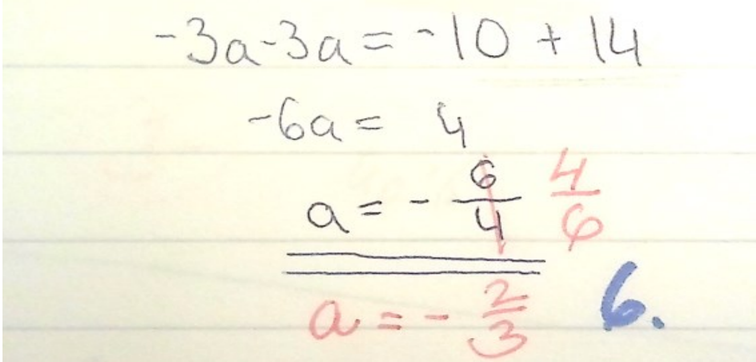
Obrázek 7.3: Ukázka chyby v didaktickém testu – změna znaménka při přesunu členu přes rovnítko



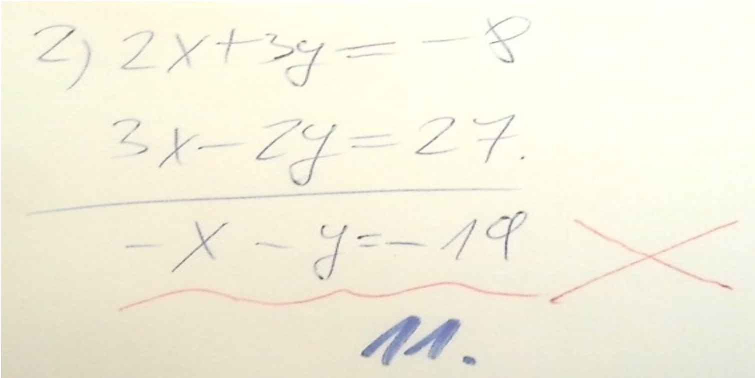
Obrázek 7.4: Ukázka chyby v didaktickém testu – špatné sčítání celých čísel



Obrázek 7.5: Ukázka chyby v didaktickém testu – špatné vyjádření neznámé



Obrázek 7.6: Ukázka chyby v didaktickém testu – špatné řešení jednoduché rovnice



Obrázek 7.7: Ukázka chyby v didaktickém testu – předčasné sčítání rovnic

7.3.2 Druhý didaktický test

Ve druhém didaktickém testu mohli žáci při řešení dvou soustav rovnic používat libovolnou metodu. Výsledky shrnuje tabulka 7.3.

Soustava	Vyřešil	Procent	Nevyřešil	Procent
Se zlomky (úloha 1)	13	13 %	87	87 %
Se závorkami (úloha 2)	12	12 %	88	88 %

Tabulka 7.3: Úspěšnost řešení zadaných soustav v druhém didaktickém testu

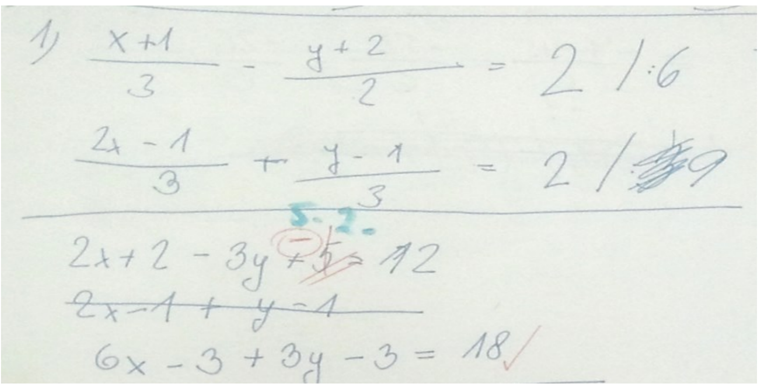
Analýza chyb přinesla následující výsledky:

- Největší četnost byla zjištěna u kategorie *Znaménka*. Do této kategorie jsem zařadil chybu při práci se znaménky při úpravě zlomků, chybu při práci se znaménky při roznásobení závorky. Dále se objevila chyba při změně znaménka při přesunu přes rovnítko a neodůvodněná změna znaménka.
- Velkou četnost měla kategorie *Rovnice*. Nejčastěji žáci chybovali při násobení rovnice číslem. Zařadil jsem sem i předčasné sčítání rovnic, špatné vyjádření neznámé, nedotažení výpočtu do konce při řešení triviální rovnice a neodůvodněnou ztrátu nebo výskyt členu.
- Velkou četnost měla také kategorie *Výpočty*. Kategorie obsahovala chyby při triviálních výpočtech, špatné pořadí matematických operací, chyby při roznásobení závorky, které se netýkaly znaménka, nepozornost nebo špatné opisování a nevhodné zaokrouhlování.
- Do kategorie *Postup* jsem zaznamenával situace, kdy žák neznal postup řešení nebo nevěděl, co má dělat.
- Malou četnost měla kategorie *Celá čísla*, do které zařadil práci s celými čísly.

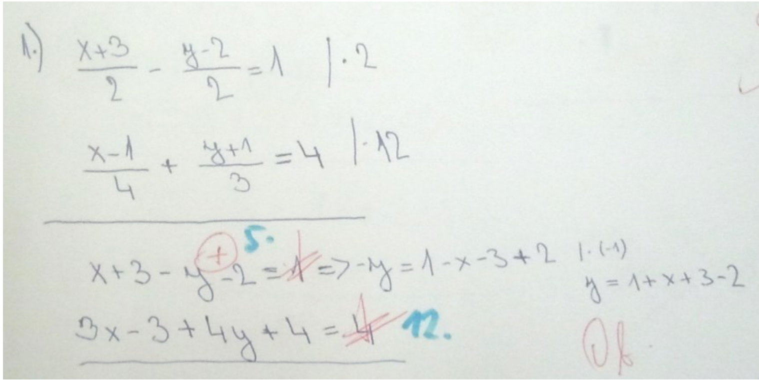
Tabulka 7.4 uvádí přehledné shrnutí kategorií chyb a jejich četností. Obrázky 7.8–7.11 uvádějí příklady nejčastější žákovských chyb, které se vyskytly ve druhém didaktickém testu.

Kategorie	Podkategorie	Četnost
Znaménka		**66**
	Při úpravě zlomku	35
	Při roznásobení závorky	16
	Přesun přes rovnítko	11
	Neodůvodněná změna	4
Rovnice		**46**
	Násobení rovnice číslem	28
	Předčasné sčítání rovnic	7
	Vyjádření neznámé	6
	Řešení triviální rovnice, nedotažení výpočtu	4
	Neodůvodněná ztráta nebo objev členu	1
Výpočty		**46**
	Triviální výpočty	17
	Přednost operací	12
	Roznásobení závorky	8
	Nepozornost, Špatné opisování	8
	Nevhodné zaokrouhlování	1
Postup	Jak začít, Ztráta, Neznalost postupu	**34**
Celá čísla		**4**

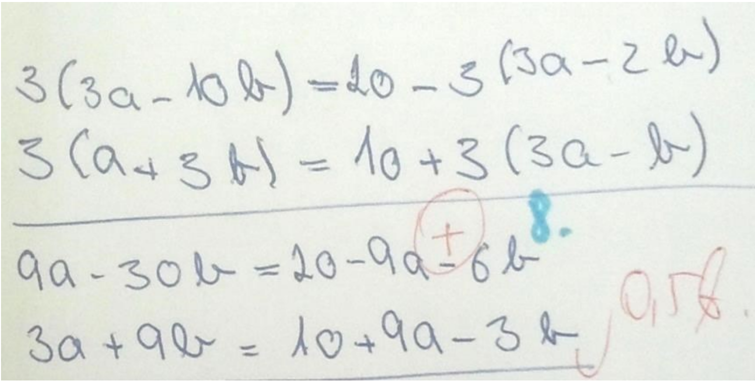
Tabulka 7.4: Kategorie a četnosti chyb ve druhém didaktickém testu



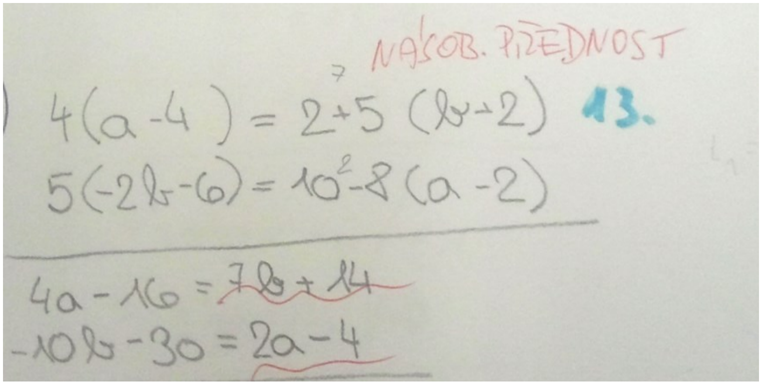
Obrázek 7.8: Ukázka chyb v didaktickém testu – chybné znaménko při úpravě zlomku a triviální numerická chyba



Obrázek 7.9: Ukázka chyb v didaktickém testu – chybné znaménko při úpravě zlomku a špatné násobení rovnice číslem



Obrázek 7.10: Ukázka chyby v didaktickém testu – chybné znaménko při roznásobení závorky



Obrázek 7.11: Ukázka chyby v didaktickém testu – špatné pořadí matematických operací

7.4 Komentáře k výsledkům didaktických testů

Můj předpoklad, že zadanou soustavu rovnic vyřeší danou metodou úspěšně více než 50 % žáků, se nenaplnil. Pomocí dosazovací metody vyřešilo soustavu 49 % žáků, pomocí srovnávací metody 31 % a pomocí grafické metody jen 16 % žáků. Jen pomocí sčítací metody uspělo více než 50 % žáků, konkrétně 53 %.

Největší problém vidím v tom, že u 32 žáků (celkem u 73 soustav) nebylo uvedeno vůbec žádné řešení, žáci neznali postup řešení nebo požadovanou metodu, nevěděli jak začít. Nejhorší situace byla u srovnávací metody, řešení grafické metody jsem do této statistiky nezahrnul. Příčiny tohoto neúspěchu jsou podle mého názoru kombinací všech kritických míst, která jsem uvedl v kapitole 4. Jedním z faktorů je motivace samotných žáků k učení. Soustavy dvou rovnic se dvěma neznámými se nejčastěji probírají v druhém pololetí 9. ročníku, kdy mnozí žáci už nemají o učení zájem. Podobný názor vyjádřila v rozhovoru i učitelka JK.

Při řešení třetí soustavy srovnávací metodou často žáci nenapsali vůbec nic. Metodu si tedy nepamatovali, nevěděli jak začít. Někteří použili k vyřešení zadané soustavy jinou metodu. Pravděpodobně je to dáno tím, že se hlavní pozornost při výuce soustřeďuje na dvě nejdůležitější metody, dosazovací a sčítací. Srovnávací metoda tak zůstává trochu stranou. Grafická metoda měla ještě nižší procento úspěšnosti. Tato metoda souvisí matematicky spíše s funkcemi, které dělají podle mých zkušeností žákům velké problémy. Navíc se přidává i neochota rýsovat.

Výběr vhodné metody řešení soustavy dvou rovnic se dvěma neznámými může výrazně ulehčit a zkrátit celé řešení. Z rozhovoru s učitelkou IŠ vyplynulo, že žáci používají spíše dosazovací metodu, protože se vyučuje většinou dříve než metody ostatní. Zkoumal jsem tedy, jaké metody volili žáci při řešení zadaných soustav v druhém didaktickém testu. Ani tady se mé očekávání nenaplnilo. Ze 100 žáků jich nejvíce řešilo obě soustavy metodou sčítací. Dosazovací metoda měla druhou nejvyšší četnost. Objevila se i metoda srovnávací a dokonce jeden žák řešil obě soustavy grafickou metodou. Devět žáků zvolilo při řešení obou soustav rozdílné metody. Zbylých 28 žáků nemělo v didaktickém testu uvedeno žádné řešení. Přehledně to shrnuje tabulka 7.5.

Zvolená metoda řešení	Dosazovací	Sčítací	Srovnávací	Grafická	Dvě metody
Četnost	23	36	3	1	9

Tabulka 7.5: Výběr metody řešení soustav lineárních rovnic ve druhém didaktickém testu (celkem 100 žáků)

Rovněž mě zajímalo, které metody se objevily ve správných řešeních. První soustavu rovnic se zlomky ve druhém didaktickém testu vyřešilo úspěšně celkem 13 žáků, druhou soustavu se závorkami 12 žáků. Převažovala sčítací metoda nad metodou dosazovací, jeden žák správně vyřešil druhou soustavu metodou srovnávací. Přehledné shrnutí je uvedeno v tabulce 7.6.

	Zvolená metoda řešení úspěšných žáků		
Zadaná soustava	Sčítací	Dosazovací	Srovnávací
První – se zlomky	10	3	0
Druhá – se závorkami	10	1	1

Tabulka 7.6: Výběr metody řešení soustav lineárních rovnic ve druhém didaktickém testu úspěšnými žáky

Žáci, kteří se účastnili výzkumu, volili při řešení zadaných soustav nejčastěji metodu sčítací. Tato metoda je podle názorů učitelů „elegantnější“ a často vede k vyřešení soustavy nejrychleji. V mém výzkumu ji využili hlavně žáci, kteří byli v didaktickém testu úspěšní. Žáci by ale podle mého názoru měli znát a jistým způsobem ovládat všechny základní metody řešení soustav dvou rovnic.

Naplnilo se mé očekávání, že žáci budou chybovat především ve znalostech a dovednostech získaných v průběhu předchozího matematického vzdělávání. Nejčastěji se chyby objevovaly při práci s celými čísly, se zlomky, závorkami a při ekvivalentních úpravách rovnic.

V prvním didaktickém testu žáci, kteří uměli použít danou metodu a znali postup výpočtu, nejčastěji selhávali při práci s celými čísly. Chyby se nejvíce projevují při používání sčítací metody. Dále se projevovaly nedostatky v realizaci ekvivalentních úprav lineárních rovnic, jak byly popsány v oddílu 4.2. Jedná se nejčastěji o přesun členů mezi stranami rovnice, kdy žáci zapomenou změnit znaménko nebo naopak mění znaménko bezdůvodně. Toto kritické místo si velmi uvědomují i samotní žáci, kteří jej nejčastěji uváděli ve svých odpovědích v dotazníku. Mezi dovednosti při práci s lineárními rovnicemi, ve kterých žáci chybovali, patří i vyjádření neznámé, které je nutné pro zvládnutí dosazovací metody.

Ve druhém didaktickém testu se ještě více projevily chyby, které učitelé zmiňovali v rozhovorech. Nejčastějším problémem byla změna znaménka při úpravě členu ve tvaru zlomku. Učitel JB to vyjádřil v rozhovoru následovně: *pokud dám v rovnicích před zlomek mínus, žáci tam určitě udělají chybu.* Podobný problém nastává, pokud se znaménko mínus objeví před závorkou. I tady žáci ve druhém didaktickém testu často chybovali.

Podobně jako v prvním didaktickém testu docházelo často k chybám ve změně znaménka při přesunu členů přes rovnítko. Kritickým místem bylo i násobení rovnice číslem, kdy žáci zapomněli vynásobit všechny členy rovnice, nejčastěji pravou stranu. Důvody mohou být v nepozornosti, ale také v nepochopení dané problematiky a matematických vazeb. Žáci se často učí postupy a algoritmy, nevědí, proč fungují, co je v dané problematice ukryto, což se pak projevuje například při porušení rovnosti mezi oběma stranami rovnice.

Oproti prvnímu didaktickému testu narostl u druhého didaktického testu počet chyb v jednoduchých výpočtech. Podle mého názoru se jedná hlavně o chyby z vyčerpání, žáci už nebyli schopni se řádně soustředit na dlouhé úpravy a práci s rovnicemi. Velmi závažným problémem je podle mého názoru, že nedokáží své výpočty a postupy po sobě zkontrolovat a tyto triviální chyby následně odhalit.

Zmíním ještě jedno kritické místo, které se objevilo při řešení druhé soustavy rovnic ve druhém didaktickém testu. Žáci nedodržovali správné pořadí matematických operací, neuvědomovali si, že násobení má přednost před sčítáním. I zde chybí žákům správné představy z předchozího matematického vzdělávání. Žáci nevnímají násobení jako opakované sčítání, což je v tomto případě zásadní.

Tabulka 7.7 shrnuje všechny chyby v žákovských řešeních z obou didaktických testů seřazené podle četnosti.

Chyba	**Četnost**
Neznalost postupu, metody, neví jak začít	107
Změna znaménka při úpravě zlomku	35
Změna znaménka při přesunu členu přes rovnítko	34
Počítání s celými čísly	33
Triviální numerické chyby	33
Špatné vynásobení celé rovnice číslem	32
Změna znaménka při roznásobení závorky	18
Špatné vyjádření neznámé	18
Neodůvodněná změna znaménka	17
Předčasné sčítání rovnic	16
Nepozornost, špatné opisování	16
Chybná přednost operací	12
Špatné roznásobení závorky	9
Řešení triviální rovnice, nedotažení výpočtu	8
Špatné dosazení za neznámou	5
Ztratil se nebo přibyl člen	3
Nevhodné zaokrouhlování	3
Špatné sčítání mnohočlenů	1

Tabulka 7.7: Četnosti chyb v žákovských řešeních z obou didaktických testů

8. Závěr

Cílem diplomové práce bylo:

- zjistit kritická místa, která učitelé spatřují v tématu soustavy lineárních rovnic,
- zjistit, jaké metody používají žáci při řešení soustav lineárních rovnic,
- zjistit, jakých nejčastějších chyb se žáci dopouštějí při řešení soustav dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými,
- zjištěné poznatky porovnat mezi sebou i s poznatky z odborné literatury.

Z rozhovorů se čtyřmi vybranými učiteli vyplynulo, že žáci nejčastěji chybují při používání znalostí a dovedností, které získávali během předchozího vzdělávání. Jedná se hlavně o práci se zlomky, s celými čísly nebo algebraickými výrazy, nesprávné provádění ekvivalentních úprav rovnic, jejichž důsledkem je především špatná práce se znaménky při přesouvání členů přes rovnítko.

Důvody učitelé vidí například v nevhodném období, kdy se soustavy rovnic probírají. Žáci podle nich nemají v druhé polovině 9. ročníku správnou motivaci k učení. Přidává se neobliba algebry, práce s písmenky a nedostatečné procvičování. Učitelé, se kterými jsem mluvil, byli dost skeptičtí. Situace se podle nich během posledních let zhoršuje. Nezjistil jsem, že by učitelé používali vlastní nebo speciální didaktické praktiky při výuce soustav lineárních rovnic. Důležité je z jejich hlediska navázat na předchozí znalosti, zejména na práci s lineárními rovnicemi.

Učitelé v rozhovorech uvedli, že při své výuce učebnice používají. Překvapilo mě, že podle jejich tvrzení je využívají většinou pouze jako sbírky úloh. Jedním z dílčích cílů práce bylo analyzovat učebnice s ohledem na to, jak přistupují k tématu soustavy rovnic. Stanovil jsem pět kritérií, podle kterých jsem analýzu provedl: typy úvodních úloh, uvedené metody řešení soustav rovnic, přehlednost, počet úloh k procvičení a motivační prvky. Přehledné shrnutí je uvedeno v tabulce 3.1.

Na základní škole se vyučuje několik základních metod řešení soustav rovnic. Každá z nich procvičuje jiné matematické dovednosti, vhodná volba metody může zjednodušit nebo zrychlit řešení dané soustavy. Většina žáků, kteří se zúčastnili dotazníkového šetření, podle svého vyjádření raději používá sčítací metodu. Při řešení zadané soustavy rovnic sčítací metodou v prvním didaktickém testu byla úspěšná největší část žáků. Žáci ji také nejčastěji volili při řešení obtížnějších soustav ve druhém didaktickém testu. Při svém řešení sčítací metodu používali hlavně žáci, kteří byli v testu úspěšní. Podle mého názoru oblibu metody výrazně ovlivňuje samotný učitel. Pokud by učitel výhradně prosazoval pouze jednu metodu, projevilo by se to i na výběru metody žáky. Může se stát, že se žáci přikloní k metodě, která se probírala jako první, ale můj výzkum takové tvrzení nepotvrdil.

Na základě předchozích rozhovorů s učiteli jsem vytvořil dva didaktické testy, ve kterých jsem zjišťoval, která místa jsou při řešení soustav rovnic kritická a kde žáci nejčastěji chybují. Analýzu chyb, kterých se žáci dopustili v didaktických testech, jsem vypracoval v oddílu 7.3. Tabulka 7.7 přehledně shrnuje všechny chyby, které se v obou didaktických testech objevily.

Necelá třetina žáků neuvedla v prvním didaktickém testu alespoň u jedné soustavy žádné řešení. Tito žáci nevědí, jak mají úlohu řešit, případně neznají metodu, která je zadáním požadována. Nejhorší situace byla u metody srovnávací a grafické. Dále se potvrdilo tvrzení, že žáci selhávají ve znalostech a dovednostech získaných během předchozího vzdělávání. Jedná se hlavně o práci se zlomky, s celými čísly, ekvivalentní úpravy rovnic a s nimi související změna znaménka při přesunu členů přes rovnítko. Při řešení náročnějších rovnic stoupá chybovost v jednoduchých výpočtech. Žáci nejsou schopni jednotlivé kroky svého výpočtu po sobě zkontrolovat a tyto triviální chyby opravit. Z dotazníků vyplynulo, že žáci si jsou těchto nedostatků vesměs vědomi. Velmi mě překvapilo, jak dobře dokázali chyby, kterých se dopouštějí, sami uvést a popsat.

Mezi důvody, proč žáci selhávají v matematice, patří nezájem a nízká motivace žáků a zdánlivá nepotřebnost nových poznatků. To mohlo hrát roli i v neúspěchu žáků při řešení soustav lineárních rovnic. (V rámci projektu EU peníze školám jsem vytvořil sadu digitálních učebních materiálů, které by mohly přispět ke zvýšení motivace žáků řešit soustavy rovnic. V příloze 6 uvádím seznam odkazů na internetový portál dumy.cz, kde jsou materiály volně ke stažení.)

Velkým problémem pro žáky je přechod od aritmetiky k algebře. Žáci nedostatečně chápou smysl písmen. Místo pochopení se zaměřují spíše na postupy, jen použitím mechanických pravidel manipulují se symboly tak dlouho, než získají nějaké řešení. Typy chyb při řešení soustav lineárních rovnic jsou velmi podobné chybám při řešení jednoduchých lineárních rovnic, jak je popsali ve svých výzkumech Hall (2002) a Nováková (2012).

V práci jsem se věnoval řešení soustav rovnic především pomocí dosazovací, sčítací a srovnávací metody. Trochu stranou zůstala metoda grafická, která svou podstatou patří spíše k funkcím. Rovněž v učebnicích je často uvedena později, právě až v tematickém celku o funkcích. Grafická metoda je velmi účinná, pokud je třeba vysvětlit, kolik řešení může daný typ soustavy rovnic mít.

Soustavy rovnic pomáhají při řešení problémů v reálných situacích. Podle mých zkušeností mají žáci problémy při řešení slovních úloh z běžného života. Matematizace slovních úloh a jejich řešení byla nad rámec mé práce a mohla by být námětem jejího rozšíření.

Při tvorbě práce jsem se dozvěděl řadu zajímavých poznatků týkajících se tématu soustavy rovnic, seznámil se s některými odbornými texty a přístupy některých učebnic k výuce tohoto tématu. Důležité pro mou učitelskou praxi byl rovněž kontakt se zkušenými učiteli a seznámení se s jejich přístupy a metodami výuky.

9. Literatura a zdroje

BALADA, F. *Z dějin elementární matematiky,* Praha: SPN, 1959.

BEČVÁŘ, J. *Z historie lineární algebry*, Praha: Matfyzpress, 2007.

BEČVÁŘ, J. a kol. *Matematika ve středověké Evropě*, Praha: Prometheus, 2001.

BEDNARZ, N., KIERAN, C., LEE, L. (1996). *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching*. Dordrecht: Kluwer.

BĚLOUN, F. a kol. *Sbírka úloh z matematiky pro základní školu,* Praha: Prometheus, 1994.

BINTEROVÁ, H. a kol. *Matematika 9, Algebra, učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2010, ISBN 978-80-7238-689-5.

COUFALOVÁ, J. a kol. *Matematika pro 9. ročník základní školy*. 2. upr. vyd. Praha: Fortuna, 2013, ISBN 978-80-7168-995-9.

FILLOY, E., ROJANO, T., SOLARES, A. (2004). Arithmetic/algebraic problém-solving and the representation of two unknown quantities. In M. Johnsen Hřines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education*. Bergen University College.

HÄGGSTRÖM, J. (2008). *Teaching systems of linear equations in Sweden and China: what is made possible to learn?*. Diss. Göteborg : Göteborgs universitet, 2008, E-published version available at http://hdl.handle.net/2077/17286.

HALL, R. D. G. (2002) An Analysis of Errors Made in the Solution of Simple Linear Equations. *Philosophy of Mathematics Education Journal 15*, Dostupné z: http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome15/hall_errors.pdf.

HERMAN, J. a kol. *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií, rovnice a jejich soustavy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2006, ISBN 80-7196-137-X.

JUŠKEVIČ, A. P. *Dějiny matematiky ve středověku*, Praha: Academia, 1978.

KIERAN, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12 (3), 317–326.

KIERAN, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390–419). New York: Macmillan.

KIERAN, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707–762). Charlotte, NC: Information Age Pub.

KOLMAN, A. *Dějiny matematiky ve starověku*, Praha: Academia, 1968.

KONFOROVIČ, A. G. *Významné matematické úlohy*, Praha: SPN, 1989.

NOVÁKOVÁ, A. *Kritická místa matematiky na základní škole - analýza didaktických praktik učitelů (lineární rovnice)*. Praha, 2013. Dostupné z: https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/101284/. Diplomová práce. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky a didaktiky matematiky. Vedoucí práce doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.

ODVÁRKO, O., KADLEČEK, J. *Matematika pro 8. ročník základní školy: 2. díl.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 1999.

PŮLPÁN, Z. a kol. *Matematika pro základní školy, algebra*. 1. vyd. Praha: SPN, 2010, ISBN 978-80-7235-487-0.

Rámcový vzdělávací program pro gymnázia. Praha: VÚP, 2007.

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. Praha: VÚP, 2013.

RENDL, M., VONDROVÁ, N. (2014). Kritická místa v matematice u českých žáků na základě výsledků šetření TIMSS 2007. *Pedagogická orientace, 24*(1), 22–57. DOI: http://dx.doi.org/10.5817/PedOr2014-1-22.

ROSECKÁ, Z. a kol. *Algebra, učebnice pro 9. ročník*. 1. vyd. Brno: Nová škola, 2000, ISBN 80-7289-024-7.

STACEY, K., CHICK, H., KENDAL, M. (2004). *The future of the teaching and learning of algebra: the 12th ICMI study*. Boston: Kluwer Academic Publishers.

STRAUSS, A., CORBINOVÁ, J. *Základy kvalitativního výzkumu: Postupy a techniky metody zakotvené teorie* 1. vyd. Boskovice: Albert, 1999, 196 s. ISBN 80-858-3460-X.

SUTHERLAND, R., ROJANO, T., BELL, A., LINS, R. C. (Eds.). (2000). *Perspectives on school algebra*. Boston: Kluwer Academic Publishers.

ŠAROUNOVÁ, A. a kol. *Matematika 9, 1. díl*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2007, ISBN 978-80-7196-155-0.

Školní vzdělávací program pro základní vzdělávání Základní školy Neratovice, 28. října 1157, okres Mělník. Neratovice, 2013. Dostupné z: http://www.3zsneratovice.cz/UserFiles/Files/Dokumnety/SVP.pdf.

Školní vzdělávací program pro základní vzdělávání ZŠ Klíček, Praha, 2013. Dostupné z: http://www.klicek.cz/wp-content/uploads/%C5%A0VP-Z%C5%A0-Kl%C3%AD%C4%8Dek-platnost-od-1.9.2013.pdf.

TREJBAL, J. *Matematika pro 9. ročník základní školy, 2. díl*. 2. vyd. Praha: SPN, 1999, ISBN 80-7235-057-9.

VONDROVÁ, N., ŽALSKÁ, J. Kritická místa matematiky na 2. stupni základní školy v diskurzu učitelů. In Rendl, M., Vondrová, N. a kol. *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*. 1. vyd. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2013, 73–79.

10. Přílohy

Příloha 1 – Správné žákovské řešení prvního didaktického testu – varianta A

[A]

1) $3x - 7y = -2$

$x - 3y = 10 \rightarrow x = 10 + 3y$

$3(10+3y) - 7y = -2$

$30 + 9y - 7y = -2$

$2y = -32 \;/:2$

$y = -16$

$x = -38$

$L_1 = -114 + 112 = -2 \quad P_1 = -2$

$L_2 = -38 + 48 = 10 \quad P_2 = 10$

$[-38, -16]$

2) $3x + 5y = 18 \;/\cdot 2$

$4x - 2y = -2 \;/\cdot 5$

$6x + 10y = 36$

$20x - 10y = -10$

$26x = 26$

$x = 1$

$y \Rightarrow -2y = -6$

$y = 3$

$L_1 = 3 + 15 = 18 \quad P_1 = 18$

$L_2 = 4 - 6 = -2 \quad P_2 = -2$

$[1, 3]$

3) $u - 3v = -1 \rightarrow u = -1 + 3v$

$u + 5v = 7 \rightarrow u = 7 - 5v$

$-1 + 3v = 7 - 5v$

$8v = 8$

$v = 1$

$u = 2$

$L_1 = 2 - 3 = -1 \quad P_1 = -1$

$L_2 = 2 + 5 = 7 \quad P_2 = 7$

$[2, 1]$

1b.

4) $x + y = 7$

$x - y = 1$

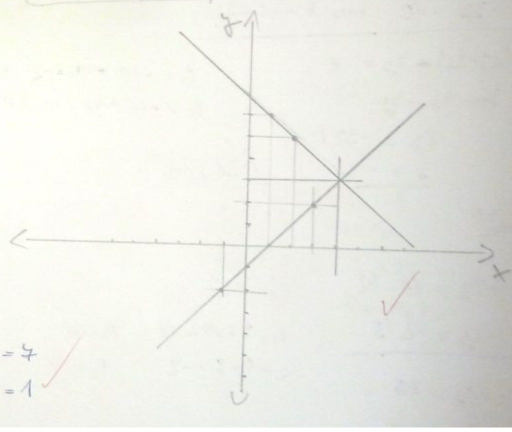
1.

x	1	2
y	6	5

2.

x	-1	3
y	-2	2

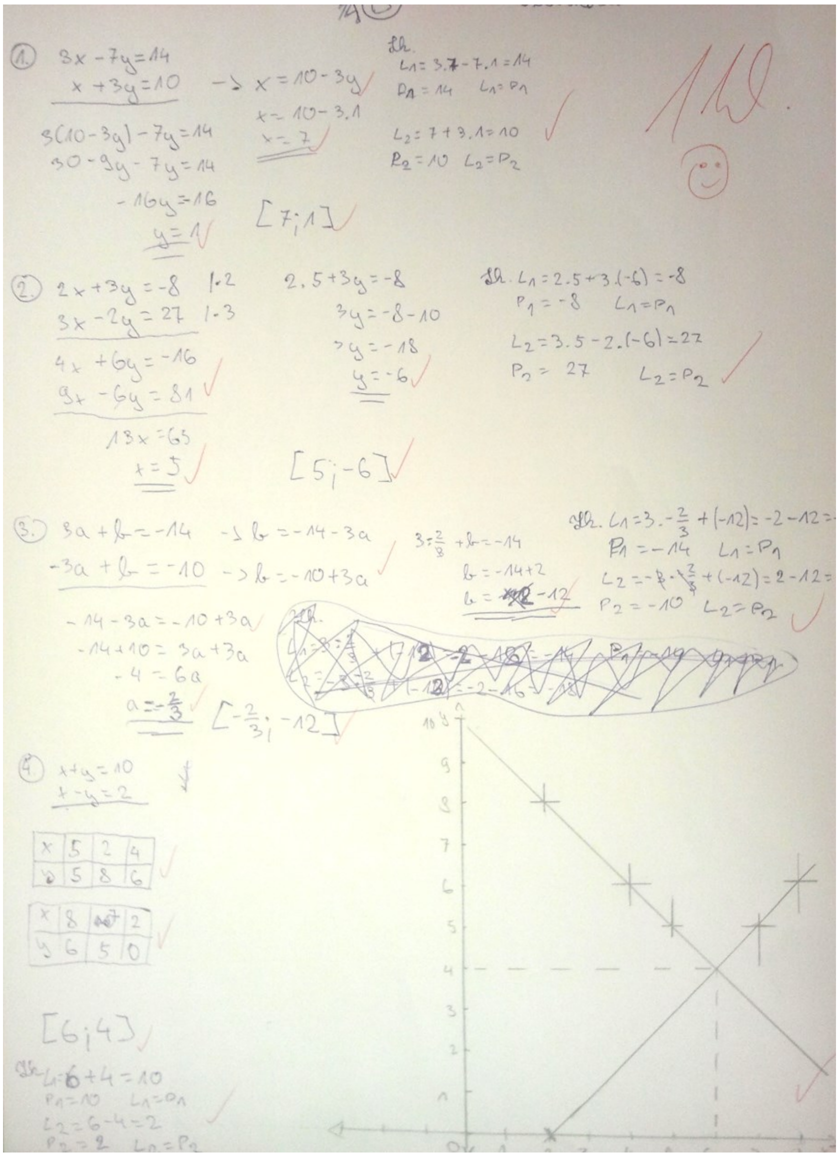
$[4, 3]$



$L_1 = 3 + 4 = 7 \quad P_1 = 7$

$L_2 = 4 - 3 = 1 \quad P_2 = 1$

Příloha 2 – Správné žákovské řešení prvního didaktického testu – varianta B


1) $3x - 7y = 14$, $x + 3y = 10$ → $x = 10 - 3y$

$3(10-3y) - 7y = 14$

$30 - 9y - 7y = 14$

$-16y = -16$

$y = 1$

$x = 10 - 3 \cdot 1$

$x = 7$

$[7; 1]$

Zk. $L_1 = 3 \cdot 7 - 7 \cdot 1 = 14$, $P_1 = 14$, $L_1 = P_1$

$L_2 = 7 + 3 \cdot 1 = 10$, $P_2 = 10$, $L_2 = P_2$

1 b.

2) $2x + 3y = -8$ $| \cdot 2$, $3x - 2y = 27$ $| \cdot 3$

$4x + 6y = -16$

$9x - 6y = 81$

$13x = 65$

$x = 5$

$2 \cdot 5 + 3y = -8$

$3y = -8 - 10$

$3y = -18$

$y = -6$

$[5; -6]$

Zk. $L_1 = 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-6) = -8$, $P_1 = -8$, $L_1 = P_1$

$L_2 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot (-6) = 27$, $P_2 = 27$, $L_2 = P_2$

3) $3a + b = -14$ → $b = -14 - 3a$

$-3a + b = -10$ → $b = -10 + 3a$

$-14 - 3a = -10 + 3a$

$-14 + 10 = 3a + 3a$

$-4 = 6a$

$a = -\frac{2}{3}$

$3 \cdot \frac{2}{3} + b = -14$

$b = -14 + 2$

$b = -12$

$[-\frac{2}{3}; -12]$

Zk. $L_1 = 3 \cdot -\frac{2}{3} + (-12) = -2 - 12 = -14$, $P_1 = -14$, $L_1 = P_1$

$L_2 = -3 \cdot -\frac{2}{3} + (-12) = 2 - 12 = -10$, $P_2 = -10$, $L_2 = P_2$

4) $x + y = 10$, $x - y = 2$

x	5	2	4
y	5	8	6

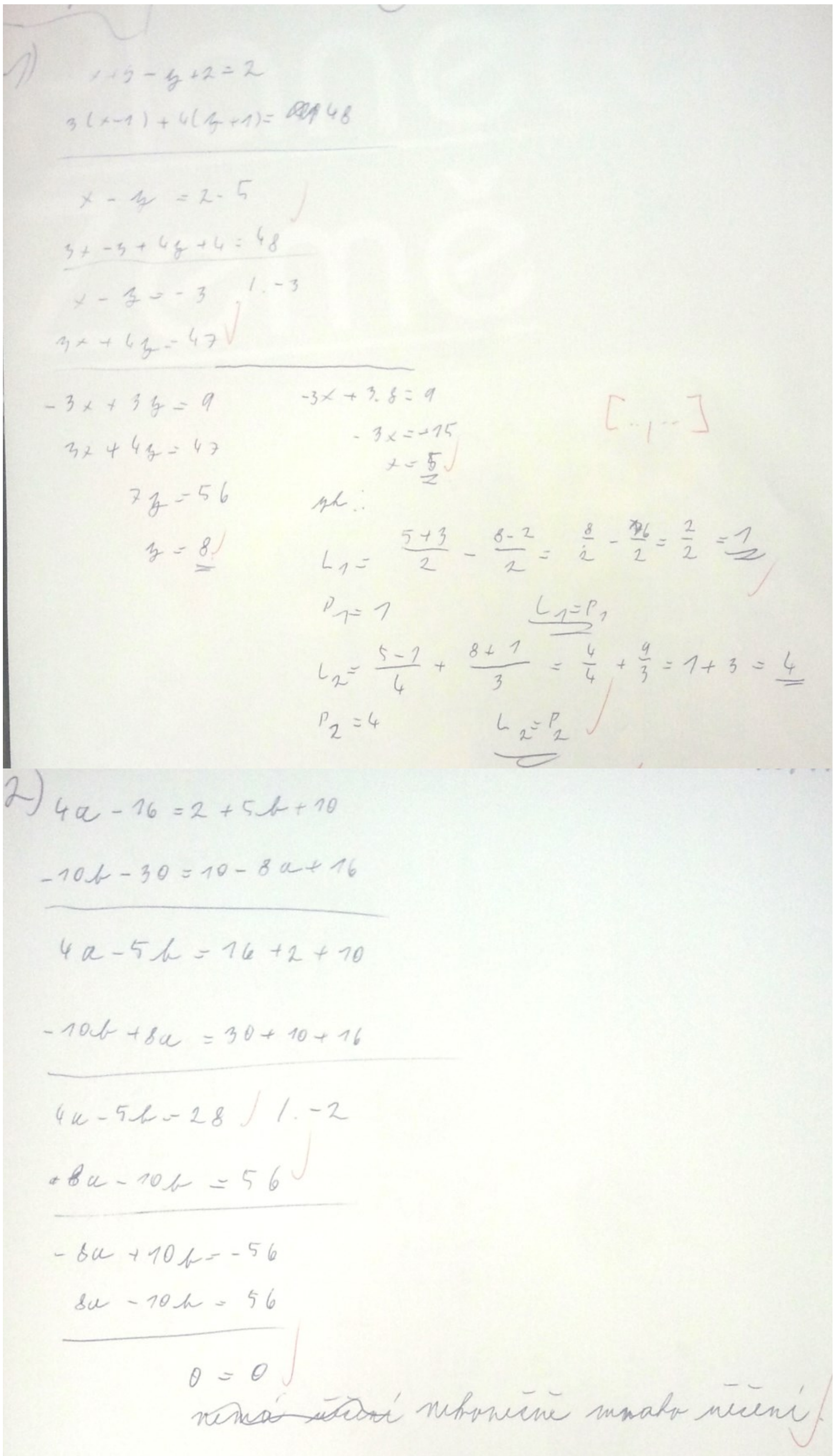
x	8	7	2
y	6	5	0

$[6; 4]$

Zk. $L_1 = 6 + 4 = 10$, $P_1 = 10$, $L_1 = P_1$

$L_2 = 6 - 4 = 2$, $P_2 = 2$, $L_2 = P_2$

Příloha 3 – Správné žákovské řešení druhého didaktického testu – varianta A


1) $x+3-y+2=2$

$3(x-1)+4(y+1)=48$

$x-y=2-5$

$3x-3+4y+4=48$

$x-y=-3 \quad /\cdot(-3)$

$3x+4y=47$

$-3x+3y=9$

$3x+4y=47$

$7y=56$

$y=8$

$-3x+3\cdot 8=9$

$-3x=-15$

$x=5$

zk.:

$L_1=\frac{5+3}{2}-\frac{8-2}{2}=\frac{8}{2}-\frac{6}{2}=\frac{2}{2}=1$

$P_1=1 \qquad L_1=P_1$

$L_2=\frac{5-1}{4}+\frac{8+1}{3}=\frac{4}{4}+\frac{9}{3}=1+3=4$

$P_2=4 \qquad L_2=P_2$

[..., ...]

2) $4a-16=2+5b+10$

$-10b-30=10-8a+16$

$4a-5b=16+2+10$

$-10b+8a=30+10+16$

$4a-5b=28 \quad /\cdot(-2)$

$8a-10b=56$

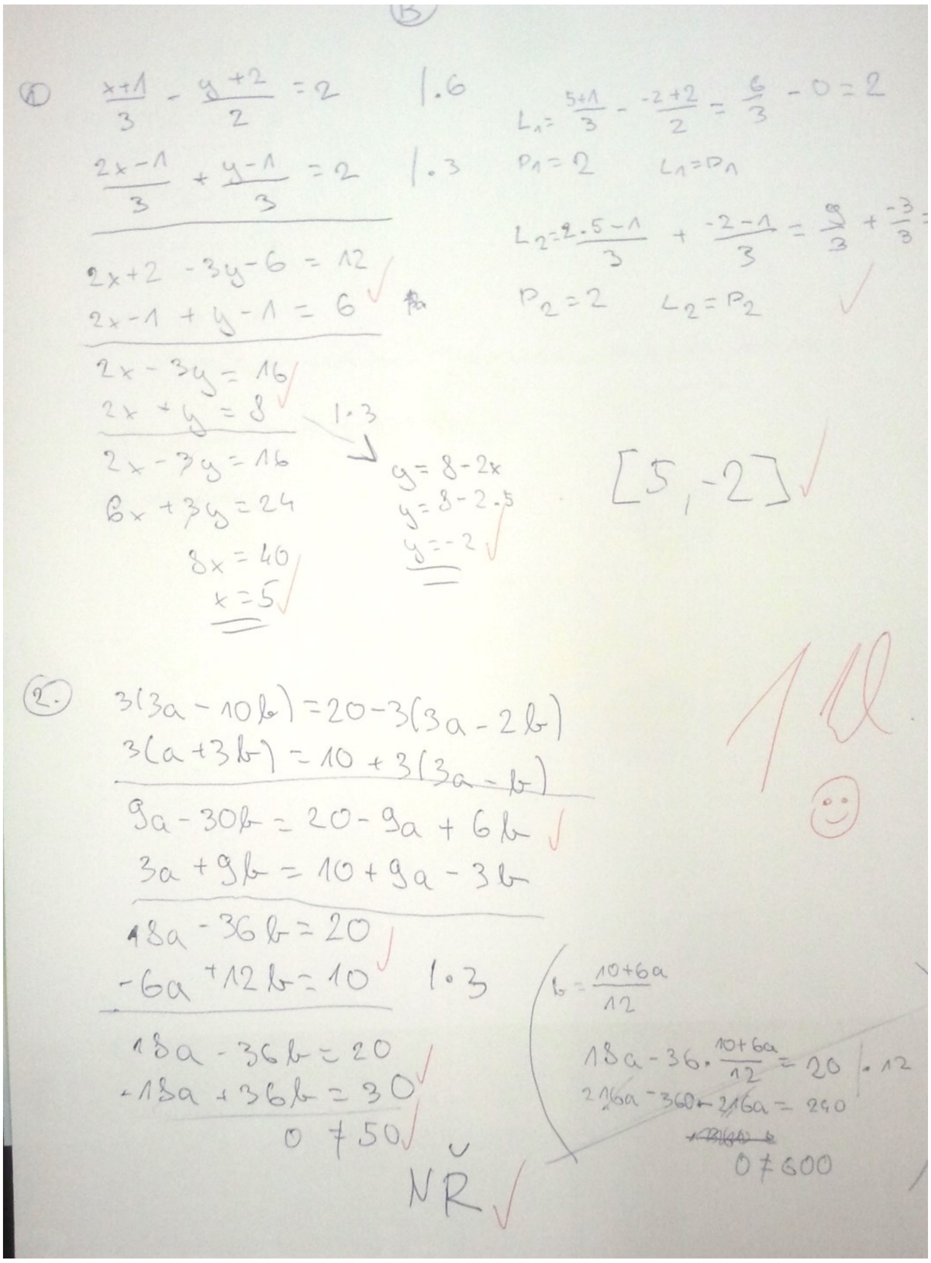
$-8a+10b=-56$

$8a-10b=56$

$0=0$

~~nemá řešení~~ nekonečně mnoho řešení

Příloha 4 – Správné žákovské řešení druhého didaktického testu – varianta B



(B)

1) $\frac{x+1}{3} - \frac{y+2}{2} = 2 \quad |\cdot 6$

$\frac{2x-1}{3} + \frac{y-1}{3} = 2 \quad |\cdot 3$

$2x+2-3y-6=12$

$2x-1+y-1=6$

$2x-3y=16$

$2x+y=8 \quad |\cdot 3$

$2x-3y=16$

$6x+3y=24$

$8x=40$

$x=5$

$y=8-2x$

$y=8-2\cdot 5$

$y=-2$

$L_1 = \frac{5+1}{3} - \frac{-2+2}{2} = \frac{6}{3} - 0 = 2$

$P_1 = 2 \quad L_1 = P_1$

$L_2 = \frac{2\cdot 5-1}{3} + \frac{-2-1}{3} = \frac{9}{3} + \frac{-3}{3}$

$P_2 = 2 \quad L_2 = P_2$

$[5, -2]$

1 ☺

2) $3(3a-10b) = 20-3(3a-2b)$

$3(a+3b) = 10+3(3a-b)$

$9a-30b = 20-9a+6b$

$3a+9b = 10+9a-3b$

$18a-36b=20$

$-6a+12b=10 \quad |\cdot 3$

$18a-36b=20$

$-18a+36b=30$

$0 \neq 50$

NŘ

$b = \frac{10+6a}{12}$

$18a - 36\cdot\frac{10+6a}{12} = 20 \quad |\cdot 12$

$216a - 360 - 216a = 240$

$0 \neq 600$

Příloha 5 – Ukázka přepisu rozhovoru s učitelem

Rozhovor s učitelkou JK – Neratovice 13. 2. 2013

T: Tázající

U: Učitelka JK

1 T: Na začátku se Vás zeptám, jak dlouho učíte matematiku?

2 U: Matematiku učím od začátku své pedagogické kariéry, to znamená dvacet pět let, mínus nějaké roky.

3 T: Přímo k soustavám rovnic. Jak je začínáte učit? Čím začínáte? Jakým způsobem látku vykládáte?

4 U: Samozřejmě, záleží, kde ta látka je. Ne v každé učebnici je jednoznačně umístěná, a pokud by navazovala na učivo o rovnicích, tak asi opakováním rovnic. Ale v některých učebnicích jsem se dívala, jsou soustavy rovnic až za funkcemi. Každopádně opakováním rovnic, to je celkem jasné.

5 T: Jakým způsobem to vykládáte? Nějak speciálně konstruktivisticky nebo je to normální výklad?

6 U: Je to normální výklad, nepřišla jsem zatím na žádnou speciální metodu, pravděpodobně normální výklad.

7 T: A využíváte učebnice? Jakým způsobem?

8 U: Samozřejmě. Určitě tady k tomu učení, čím starší žáci, čím složitější učivo, tím víc ty učebnice používám.

9 T: A jakým způsobem? Učí se žáci z učebnic sami nebo ji používáte jako sbírku příkladů?

10 U: Sami moc ne, v tomhle učivu myslím určitě ne. Jen málo dětí by tuhle látku stihlo, je to dost obsáhlá látka, jen málo dětí by ji stihlo nastudovat samo. Ale určitě ke sbírce příkladů, konkrétně v téhle učebnici jsou docela dobře vyřešené postupy, nevím, jestli je to v tomhle učivu, ale je tam třeba příklad rozebraný krok po kroku. Takže ty postupy, …ale i při vysvětlování postupů.

11 T: A jiné zdroje úloh?

12 U: Určitě, pak na procvičování, internet, sbírky, stoprocentně namnožené materiály rozdávám žákům. Hledám, jakým způsobem, kde všude možně hledat zdroje úloh na procvičování.

13 T: Jaké metody při řešení soustav používáte? Používáte všechny, vysvětlujete všechny nebo máte jednu speciální?

14 U: Určitě všechny, děti by měly znát všechny, každá metoda vlastně procvičuje něco jiného, takže všechny. Sčítací, dosazovací, každou zvlášť, pak teda dětem řeknu, že mohou použít i kombinovanou, teď nemluvím o grafickém řešení. A snažím se jich ptát, kterou metodu oni považují, která se jim líbí víc. A v průběhu mé pedagogické kariéry, těch třech nebo čtyř devítek, jsem nedošla k jednoznačnému řešení, že by děti řekly, mám radši, většina, sčítací nebo mám radši dosazovací metodu. Obě určitě vysvětlím a nechám na nich, pak jim řeknu, že pro některé zadání jsou vhodnější, některé příklady jsou vhodnější pro jednu metodu, některé zadání je vhodnější pro druhou metodu, ale v podstatě je nechám, ať si vybírají, kterou chtějí.

15 T: Používáte nějaké modely při výuce soustavy rovnic?

16 U: ?

17 T: Třeba na rovnice jsou váhy, učitelé přirovnávají rovnice k vahám nebo měnič znaménka, když se dává přes rovná se, tak se mění znaménko.

18 U: To je někde na webu? Nebo nějaké flashové animace, něco takového.

19 T: Váhy jsou třeba.

20 U: Na ty váhy možná jo. Zatím jsem nepoužila, ale tím jak vlastně hledám pořád náměty a instrukce na internetu, tak až přijdu na něco dobrého, že to určitě použiju. Váhy jsem viděla, ale na ty soustavy to asi není, ty váhy. Přidávat ubírat, to jsem viděla…

21 T: Jakými metodami zkoušíte znalosti žáků a míru pochopení?

22 U: Jakými metodami… a míru pochopení. Kromě klasických, procvičování a písemek, samozřejmě si myslím. Společným řešením na tabuli…nevím, řešíme společně, a když si myslím, že to umí, tak jim dám písemku. Ale můžeme říct klidně skupinové práce…

23 T: Jak tedy pozorujete ty žáky, že to rozuměj, že to chápou? Jakým způsobem tohle sledujete?

24 U: Když by byla skupinová práce, tak chodím mezi nimi a zjistím, jestli tomu rozumějí. Pozorování? Ale nevím, jestli jsem třeba u lineárních rovnic použila nějakou skupinovou práci. Je možný, vždycky řeším, jak mě zrovna napadnou, že teď by bylo vhodné to udělat, tak jsem někde použila. Skupinová, co by ještě mohlo být. Procvičování, skupinová práce, ale co dělám asi nejvíc, že prostě řešíme společně příklad na tabuli. Já píšu a vyvolávám děti a potom říkají, další krok bude tenhle a tenhle. To používám asi nejvíc?

25 T: A jaká je míra pochopení žáku u soustavy rovnic?

26 U: Míra pochopení… nevím, jak nazvat to slovo, ale slabá, špatná, myslím, že to …zvlášť v dnešní době, čím… míra pochopení soustavy rovnic byla mnohem lepší před mnoha lety, teď se ta míra pochopení zhoršuje. Ještě záleží, kdy učitel ty soustavy rovnic probírá, když je to vyloženě na konci školního roku, nebo ke konci školního roku, to v některých knížkách asi

je, tak záleží, že ta míra pochopení je horší, protože klesá studijní morálka těch dětí. A učivo je obtížné, si myslím, protože shrnuje jak znalost rovnic, děti musí mít, to už se blížím ke kritickým místům,…, děti musí především umět rovnice. Ne každému se to podaří, učivo o rovnicích je také specifické, pokud neumí rovnice, tak se třeba zastaví, jsem zase u kritických míst, udělají první dva řádky, upraví rovnici a neumí třeba dosadit, dokončit rovnici. Takže ta míra pochopení, pokud se zaseknou v nějakém bodě, je to taky dost kroků dost postupů. A je to rizikové, protože, když se zaseknou někde na začátku a nedodělají to. Musí tam být samozřejmě zkouška, jako u každé rovnice. Je toho dost. Než žák vyřeší soustavu rovnic, je toho dost.

27 T: Jaká tedy vidíte zásadní kritická místa při řešení soustav rovnic?

28 U: No tak, určitě, špatné předchozí znalosti. Žáci třeba neumí ani, když se používá dosazovací metoda, neumějí vyjádřit jednu neznámou pomocí druhé, ve sčítací metodě zase neumí třeba sčítat celá čísla, neumějí sečíst správně. Někteří žáci nepochopí práci algebry, to by bylo i u lomených výrazů. Zkoušky jsou samozřejmě velice kritické místo, zkoušky. Zlomky, pokud se dostaneme k řešení rovnic, které musí řešit zlomky, tak to je další kritické místo. Pokud bych psala písemku s dětma, tak bych určitě dala, alespoň jednu soustavu rovnic, která by se zlomky řešit nemusela. A třeba jednu se zlomky. Pořád jsme se nebavili o grafické metodě… ta je teda spíše podobná funkcím. Tak další kritické místo, pokud bych měla mluvit i o slovních úlohách, tak jsou slovní úlohy. Opravdu menšina dětí pochopí slovní úlohy o společné práci, o pohybu, o směsích. Grafické řešení je trošku jiné než klasické řešení,…, to bych spíše k funkcím. Musí se to probírat až po funkcích, a k tomu, záleží, kdy se soustava rovnic probírá. Jestli by bylo lepší probírat po řešení rovnice zlomky, hned najet soustavu rovnic, když ty děti mají rovnice zažité anebo dát stopku, učit děti funkce, což je v zásadě něco jiného a pak teprve se vrátit k tomu grafickému řešení soustavy rovnic. Dva postupy, nevím, jestli jsem ty postupy někdy měnila. Já jsem to učila loni, loni jsem asi grafické řešení vynechala. Ale učívala jsem grafické řešení, určitě, učívala jsem toho víc, než učím teď. To řekne každý učitel.

29 T: Zeptám se tentokrát na konkrétní chyby, jakých se žáci při tom dopouštějí. Přímo konkrétně.

30 U: Konkrétní chyby, když to vezmu od konce, tak chyby ve zkouškách, nejsou schopni pracovat s celými čísly a početní operace s jinými čísly. Potom by neuměli možná vyjadřovat,… neumějí dobře pracovat s mnohočleny. … Ve sčítací metodě neumějí najít společného jmenovatele a v dosazovací konkrétně nejsou schopni pracovat s členy a vyjádřit je zvlášť, pokud se dostanou do zlomků.

31 T: Další chyby?

32 U: Záleží na náročnosti toho příkladu. Pokud je náročný a je v tom příkladu například roznásobení, pokud náhodou není soustava rovnic vyjádřená ve tvaru, ve kterém jsou zvyklí jedna neznámá plus druhá neznámá rovná se číslo na druhé straně, tak vůbec dát si do tohoto tvaru, tam může být jedna z konkrétních chyb.

33 T: Poslední otázka, jaké máte návrhy na zlepšení?

34 U: Zlepšení…víc času, víc procvičování. Děti to nechápou. Pokud by se měli alespoň trochu naučit, mělo by se to přesunout na začátek devítky nebo do osmičky, to by byli schopný se možná naučit, ale to by na to neměli znalosti. Přesunout v plánu, nenechávat je až někdy na konec devítky nebo v druhém pololetí, ve třetím čtvrtletí, to už asi vůbec ne. Asi pokud možno nějaká automatizace, procvičování, dejme tomu, po krocích, po jednotlivých krocích, automatizace, pomocí počítačů, dát jeden krok a nechat děti udělat deset cvičení. Nejdříve třeba převádění členů, další krok udělat dvacet cvičení na společného jmenovatele, možná takhle, rozdělit to po krocích a každý procvičovat dostatečně dlouho…

35 T: Já děkuji.

Příloha 6 – Seznam odkazů na vlastní digitální učební materiály věnované soustavám lineárních rovnic vytvořené v projektu EU peníze školám

http://dumy.cz/material/73926-cestovani-po-vrcholkach-cr-aneb-soustavy-rovnic

http://dumy.cz/material/73931-soustavy-rovnic-pohadka

http://dumy.cz/material/73924-maly-test-na-soustavy-rovnic

http://dumy.cz/material/73927-kouzla-se-soustavami-rovnic

http://dumy.cz/material/73932-test-soustavy-linearnich-rovnic

http://dumy.cz/material/73930-graficke-reseni-soustavy-rovnic

http://dumy.cz/material/73923-gradovane-soustavy-rovnic

http://dumy.cz/material/73920-soustavy-rovnic-hledani-chyb

http://dumy.cz/material/73929-soustavy-rovnic-hlasovaci-zarizeni

http://dumy.cz/material/73921-kouzelne-cislo

Příloha 7 – Seznam obrázků a tabulek