Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Václav Jára

Zlatý řez ve starověké matematice

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: PhDr. Alena Šarounová, CSc.

Studijní program: Matematika
obor Učitelství matematiky v kombinaci
s deskriptivní geometrií pro střední školy

2006

Tímto bych rád poděkoval všem, kteří mi jakkoli pomáhali při psaní této práce. Zejména děkuji vedoucí PhDr. Aleně Šarounové, CSc., za odborné připomínky a pomoc při zpracování tématu. Také děkuji svým rodičům a přítelkyni za tolik potřebnou morální podporu.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 15. září 2006 Václav Jára

Obsah

Název práce: Zlatý řez ve starověké matematice
Autor: Václav Jára
Katedra (ústav): Katedra didaktiky matematiky
Vedoucí diplomové práce: PhDr. Alena Šarounová, CSc.
e-mail vedoucího: sarounov@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Diplomová práce pojednává o vývoji a výskytech zlatého řezu ve starověkých matematických textech. Uvádí do problematiky zlatého řezu, popisuje v historických souvislostech jeho vznik a postupy, pomocí nichž byly objevovány a využívány jeho vlastnosti. Shrnuje většinu poznatků z Eukleidových Základů, včetně pozdějšího Dodatku. Zmiňuje také přínos arabských matematiků v této oblasti. Práce může sloužit jako učební materiál pro matematicko-historické semináře nebo jako doplňující zdroj pro další vzdělávání pedagogů v oboru matematiky a geometrie. Texty jsou doplněny perokresbami odpovídajícími původním zápisům. Přiloženo je také CD, které obsahuje elektronickou podobu práce.

Klíčová slova: zlatý řez, platónská tělesa, řecká matematika, Základy

Title: Golden Section in the Ancient Mathematics
Author: Václav Jára
Department: Department of Mathematics Education
Supervisor: PhDr. Alena Šarounová, CSc.
Supervisor's e-mail address: sarounov@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: This graduation thesis discusses the occurrence and development of the golden section in ancient texts on mathematics. It is an introduction into the field of the golden section and it describes in an historical context the origin of the phenomenon and the processes that helped discover and make full use of its properties. It summarizes the main findings of Euclid's Elements, including later Supplement. It also mentions the contribution into the field by Arabian mathematicians. The work may serve either as a resource for seminars on the history of mathematics, or as a supplementary source for maths and geometry teachers willing to deepen their knowledge of the field. Texts contain pen drawings that correspond to original records. A CD is attached that contains the electronic form of the work.

Keywords: golden section, Plato's solids, Greek mathematics, Elements

Úvod

Non me pare, excelso Duca, in più suoi infiniti effetti al presente estenderme, peroché la carta non supliria al negro a esprimerli tutti…

Nezdá se mi vhodné, vznešený vévodo, rozepisovat se prozatím o jeho nedozírných vlivech, neboť nebude dosti papíru pro vyjádření všech…

Luca Paccioli, Divina proportione

Přestože *zlatý řez* patří odedávna mezi základní pojmy matematiky, není širší veřejnosti příliš znám. Většina lidí vůbec neví, co si pod tímto souslovím má představit. Tato práce by měla seznámit čtenáře se zlatým řezem, jak se objevoval v historii matematiky, byl postupně poznáván a užíván, posloužit tak k rozšíření povědomí o jeho výskytu v geometrii a matematice, ale také informovat o zajímavostech, které skrývá.

Zlatý řez je poměr, který se objevuje v rozličných oblastech matematiky a geometrie. Jeho definice je založena na rozdělení úsečky na dvě části tak, aby poměr délky větší z nich ku délce menší byl stejný jako poměr délky celé úsečky ku délce větší části. Tento poměr je nazýván *zlatým číslem* a jeho hodnota je $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, tj. přibližně 1,618. Matematická definice postavena takto samostatně však vůbec nevypovídá nic o vlivu zlatého řezu – ve středověku nazývaném *božským poměrem* (divina proportione). Existují celé teorie o vědomém i nevědomém užití zlatého řezu v architektuře, malířství, sochařství, fotografii, hudbě, dramaturgii nebo filosofii a mystice, jeho výskytu v biologii rostlin, mineralogii či vesmíru. Zlatý řez najdeme všude: Proč o něm není ani zmínky ve středoškolských učebnicích?

Má práce by měla přinést vhled do historických souvislostí od prvních výskytů pětiúhelníku, přes velmi hluboce zpracované teze Eukleidovy, jeho předchůdců i následníků až po přínos arabských matematiků. Může posloužit jako pomůcka při matematicko-historických seminářích, jakož i rozšiřující materiál pro další vzdělávání pedagogů.

Historické údaje uváděné v poznámkách pod čarou byly čerpány zejména z archivu O'Connora a Robertsona [5], z otevřené internetové encyklopedie Wikipedia [7], ale i dalších zdrojů v síti Internet, které vzhledem k jejich rozmanitosti neuvádím v seznamu použité literatury. Všechny náčrty byly konstruovány v aplikaci Rhinoceros© (NURBS modelování pro Windows, verze 3.0 RS4) a do dokumentu vloženy jako vektorové obrazce.

1. Od pentagramu ke zlatému řezu

Sledujeme-li historii zlatého řezu, musíme se vydat po stopách výskytu pravidelného pětiúhelníku, ve kterém tento poměr najdeme hned několikrát. *Pentagram* (pěticípou hvězdu) lze nalézt na egyptské keramice již z období první dynastie (asi 3200 let př. Kr.). Symbolicky znázorňován byl také ve starověké Mezopotámii nebo Palestině – nalezneme jej na vázách, mincích nebo hliněných destičkách. Symboly nelze vždy vykládat jako matematické objekty, leckdy ani není znám jejich skutečný význam. Jejich kreslení mohlo sloužit jako prosté odreagování [3]. Na hliněných destičkách pocházejících z období první dynastie starého Babylonu (počátek 2. tisíciletí př. Kr.) lze nalézt přibližný vypočet obsahu pravidelného pětiúhelníku. Aproximace ovšem vychází ze vztahů platných pro pravidelný šestiúhelník, nemá proto bohužel žádnou spojitost se zlatým řezem.

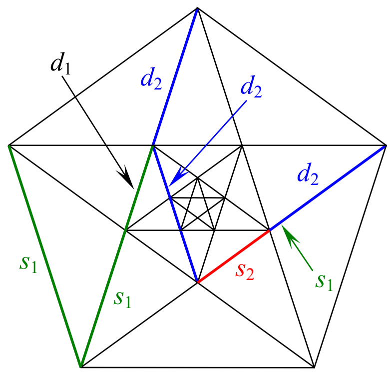
> *Říká se o Hippasovi, že byl pythagorejec, a protože jako první zveřejnil a popsal sféru z dvanácti pětiúhelníků, byl zahuben na moři za svou neúctu, ale za jeho objev dostalo se mu uznání, ačkoli ve skutečnosti veškeré náleželo JEMU (takto se odkazují na Pythagora a nenazývají jej jeho jménem).*
>
> Iamblichus, De Vita Pythagorica

Opravdový původ zlatého řezu je spojován s činností pythagorejců. Tajemství božského poměru zřejmě poodhalil Hippasos z Metapontu, zmiňovaný ve starověkých pramenech jako první pythagorejec, který se věnoval matematice. V polovině 5. století př. Kr. studoval vlastnosti pravidelného dvanáctistěnu a pětiúhelníku. Při svém bádání patrně pomocí řady vnořených pětiúhelníků a pentagramů (Obr. 1) dokázal, že strana pravidelného pětiúhelníku je *nesouměřitelná*[1] s jeho úhlopříčkou. Pomocí vlastností rovnoramenného trojúhelníku a výpočtu úhlů v mnohoúhelnících, které patřily mezi geometrické znalosti té doby, se Hippasos mohl dopracovat ke vztahům mezi délkami stran a úhlopříček jednotlivých pětiúhelníků (Obr. 1):

$$\begin{aligned} d_n - s_n &= d_{n+1} \\ s_n - d_{n+1} &= s_{n+1}. \end{aligned} \tag{1}$$

[1] Úsečky a, b byly považovány za souměřitelné, existovala-li úsečka c tak, aby obě úsečky byly jejími celočíselnými násobky, tj. $a = nc$ a $b = mc$, kde m, n jsou celá. Pokud žádná taková úsečka c neexistovala, byly úsečky a, b nazývány nesouměřitelnými. Příkladem nesouměřitelných úseček může být strana a úhlopříčka čtverce.

Takový proces pokračuje donekonečna a vztahy (1) ukazují, že neexistuje společná míra pro stranu a úhlopříčku pravidelného pětiúhelníku [3]. Hippasos tak na úsečkách, jejichž délky jsou ve *zlatém poměru,* dokázal existenci nesouměřitelnosti a odkryl tajemství čísel, které dnes nazýváme iracionálními. Jeho zjištění bylo však v rozporu s přesvědčením pythagorejců o tom, že svět lze zcela popsat pomocí celých čísel a jejich poměrů. Ironií je, že byl tento názor vyvrácen zrovna v pentagramu, znaku pythagorejské školy. Za šíření svého objevu byl Hippasos vyloučen ze spolku a údajně svými kolegy utopen.



Obr. 1
Řada vnořených pětiúhelníků:
s – strana, d – úhlopříčka.

2. Eukleidés: Základy

Podrobně se o zlatém řezu zmiňuje až starořecký matematik Eukleidés (asi 325–265 př. Kr.) ve svém stěžejním díle *Základy* (řec. *Stoicheia*). O Eukleidově životě toho prameny mnoho neříkají: Žil v egyptské Alexandrii za vlády Ptolemaia I., kde pracoval ve slavné alexandrijské knihovně. Údajně také mohl studovat Platónovu *Akademii*[2] v Řecku. V Základech, skládajících se ze třinácti částí (knih), Eukleidés systematicky shrnul veškeré tehdejší znalosti z matematiky, a položil tak skutečné základy geometrie, které dodnes říkáme *eukleidovská.* Jeho dílo se stalo po Bibli nejčastěji vydávanou knihou, po staletí byla na vysokých školách v rámci tzv. kvadrivia[3] vyžadována znalost alespoň některých jeho částí a až do počátku 20. století byly Základy pokládány za knihu, kterou každý vzdělaný člověk přečetl. Ještě dnes bychom mohli některé části užít jako jednoduchý úvod do geometrie.

O zlatém řezu se v různých podobách píše v několika knihách Základů. Jak uvádí Herz-Fischler [3], byl jeho objev velmi úzce spjat s konstrukcí pravidelného pětiúhelníku: Ještě před otevřením Akademie (386 př. Kr.) se nejspíše

---

[2] Filosofická škola založená Platónem kolem roku 386 př. Kr. nedaleko Athén. Pojmenována byla po antickém hrdinovi Academovi a stala se oceňovanou a hojně navštěvovanou institucí vyššího vzdělání – jejím žákem byl také Aristoteles. Po Platónově smrti vedl Akademii jeho synovec Sephius. Zavřena byla až roku 529 po Kr. na příkaz byzantského císaře Justiniána jako nepřátelská vůči křesťanství.

[3] **Kvadrivium** (z lat. quadrivium – čtyři cesty) navazovalo ve středověkém vzdělávacím systému na trivium, se kterým společně tvořilo *sedmero svobodných umění.* Obsahovalo aritmetiku, geometrii, hudbu a astronomii a bylo odrazovým můstkem pro studium filosofie a teologie.

Obr. 2
Titulní strana prvního anglického vydání Základů (1570).

Theaitétos[4] pustil do úkolu nalézt přesné konstrukce pravidelných mnohoúhelníků. Vepsání pětiúhelníku do kružnice vedlo k obsahové definici zlatého řezu prezentované ve druhé knize Základů (viz 2.1). Následně přistoupil Theaitétos k řešení problému konstrukce pravidelných mnohostěnů vepsáním do sféry a současně odvodil některá tvrzení třinácté knihy, která bezprostředně souvisejí se zlatým řezem (viz 2.4). Jako důsledek vepisování mnohoúhelníků do kružnice byly později, pravděpodobně také Theaitétem nebo některým z jeho žáků, klasifikovány některé iracionální hodnoty získané při konstrukci pětiúhelníku. Po určité době, kdy se dále rozvíjela teorie iracionalit, bylo konečně vyřešeno také vepsání pravidelného dvacetistěnu do sféry. A nová definice zlatého řezu jako *dělení ve středním a krajním poměru,* zmiňovaná Eukleidem v šesté knize Základů (viz 2.3) a užívaná dodnes, vznikla nejspíše až po vytvoření teorie poměrů shrnuté v knize páté. Nahradila starší obsahovou definici (viz 2.1) a lze se domnívat, že podle ní byla upravena také terminologie užitá v tvrzeních knihy třinácté (viz 2.4).

V následujících odstavcích přináším poznatky antických matematiků, jak byly shrnuty v Základech (volný překlad z Fitzpatricka [2], Herz-Fischlera [3] a Joyce [4]). Ačkoli není zcela jasné, v jakém pořadí byly jednotlivé objevy uskutečněny, uvádím je ve sledu, jak je Eukleidés zaznamenal, včetně původních důkazů nebo alespoň jejich zkrácené verze.

Pro zjednodušení jinak složitého textu zavádím následující značení, které dodržuji také v dalších částech textu:

S_{AB}	obsah čtverce o straně délky $\lvert AB \rvert$,
$R_{AB,BC}$	obsah obdélníku o stranách délky $\lvert AB \rvert$ a $\lvert BC \rvert$,
R_{AC}	obsah pravoúhelníku, jehož úhlopříčkou je úsečka AC,
R_{ABCD}	obsah pravoúhelníku $ABCD$,
G_{KLM}	obsah *gnómonu*[5] KLM,

[4] **Theaitétos z Athén** (asi 417–369 př. Kr.): athénský matematik, astronom a filosof, žák Sokratův a Platónův. Podle dostupných pramenů byl prvním, kdo podrobně popsal a zkonstruoval vepsáním do sféry pět pravidelných mnohostěnů – tzv. *platónská tělesa.* Spojován je také s klasifikací některých iracionálních hodnot vzniklých při konstrukcích pravidelných mnohoúhelníků.

[5] **Gnómonem** nazýváme v geometrii rovinný útvar tvaru písmene „L“, který vznikne oddělením menšího rovnoběžníku od většího, přičemž oddělovaný rovnoběžník je podobný pů-

$\overset{\frown}{AB}$	kratší z oblouků kružnice ohraničený body A, B,
$\overset{\frown}{ABCD}$	oblouk kružnice ohraničený body A, D obsahující body B, C v uvedeném pořadí,
$\lvert\overset{\frown}{AB}\rvert$	délka oblouku $\overset{\frown}{AB}$.

2.1 Kniha druhá

Druhá kniha Základů bývá často nazývána *geometrickou algebrou.* Prvních deset tvrzení představuje totiž geometrické vyjádření obecně známých algebraických identit (např. distributivní zákon) a řešení lineárních či kvadratických rovnic. Od předchozích poněkud odlišné tvrzení II-11 přináší poměrně obtížnou úlohu o dělení úsečky, která vede na rozdělení úsečky ve zlatém poměru. Toto tvrzení je proto označováno jako *obsahová definice* zlatého řezu. Nejdříve však uvedu tvrzení šesté, pomocí něhož Eukleidés dokazuje správnost své konstrukce v tvrzení jedenáctém.

Tvrzení II-6

Jestliže rozdělíme úsečku v polovině a přidáme-li k ní jinou úsečku, potom obsah obdélníku, jehož jednou stranou je původní úsečka zvětšená o přidanou a druhou stranou přidávaná úsečka, je stejný jako obsah čtverce nad úsečkou skládající se z poloviny původní a z přidané úsečky.

Nechť je dána úsečka AB a její střed C. Prodlužme úsečku AB o úsečku BD. Potom $R_{AD,DB} + S_{CB} = S_{CD}$.

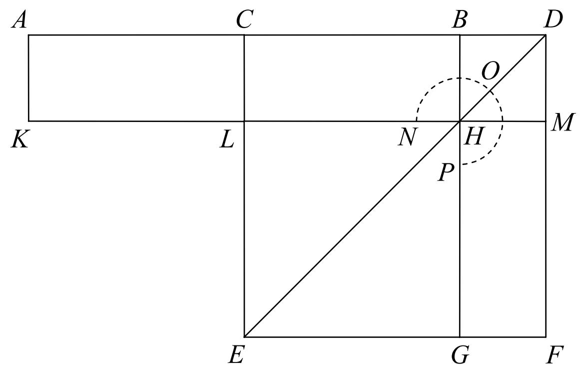
Zkonstruujme čtverec $CDFE$, spojme body D, E. Sestrojme úsečku BG rovnoběžně s EC nebo DF. Sestrojme úsečku KM skrze bod H rovnoběžně s AB nebo EF. Nakonec sestrojme úsečku AK rovnoběžně s CL nebo DM. (Situace je zakreslena na Obr. 3.)

Protože $|AC| = |CB|$, $R_{AL} = R_{CH}$. Ale $R_{CH} = R_{HF}$, takže též $R_{AL} = R_{HF}$. Přičtěme k oběma stranám R_{CM}, získáme $R_{AM} = G_{NOP}$. Ale $R_{AM} = R_{AD,DB}$, protože $|DM| = |DB|$. Tedy platí rovnost $G_{NOP} = R_{AD,DB}$. Přičtěme k oběma stranám $R_{LG} = S_{BC}$ a dostaneme $R_{AD,DB} + S_{CB} = G_{NOP} + R_{LG}$. Ale jelikož $G_{NOP} + R_{LG} = R_{CEFD} = S_{CD}$, platí také

$$R_{AD,DB} + S_{CB} = S_{CD}, \tag{2}$$

což je právě to, co mělo být ukázáno.

vodnímu a je situován do jeho rohu tak, aby úhlopříčky obou rovnoběžníků splývaly. V nákresech je gnómon značen čárkovaným obloukem a třemi body.



Obr. 3
Nákres k tvrzení II-6.

Zavedu-li označení $a=|AC|$ a $b=|BD|$, dostanu rovnost (2) vyjádřenou pomocí srozumitelnějšího algebraického výrazu $(2a+b)b+a^2=(a+b)^2$, jehož platnost dokáži velmi snadno jednoduchými úpravami levé strany:

(3) $$(2a+b)b+a^2=2ab+b^2+a^2=(a+b)^2 .$$

Tvrzení II-11 (obsahová definice zlatého řezu)

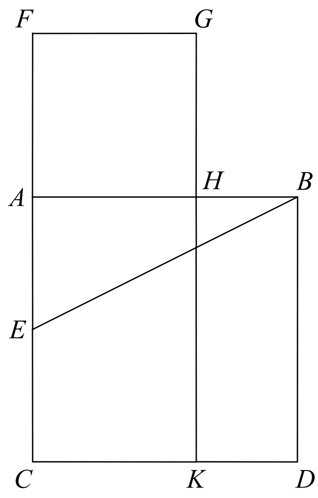
Rozdělte danou úsečku tak, aby obsah obdélníku, jehož jednou stranou je celá úsečka a druhou jedna z částí, byl stejný jako obsah čtverce nad zbývající částí úsečky.

Nechť je dána úsečka *AB*. Rozdělte úsečku *AB* bodem *H* tak, aby platilo $R_{AB,BH}=S_{AH}$.

Sestrojme čtverec *ABDC* nad úsečkou *AB*, střed úsečky *AC* označme *E* a spojme body *B*, *E*. Na polopřímce *CA* sestrojme bod *F*, aby $|EF|=|EB|$. Sestrojme čtverec *AFGH* nad úsečkou *AF*. Na polopřímce *GH* vyznačme bod *K*. Tvrdím, že úsečka *AB* je rozdělena bodem *H*, aby $R_{AB,BH}=S_{AH}$. (Situace je zakreslena na Obr. 4.)

Protože je bod *E* středem úsečky *AC* a úsečka *FA* byla k úsečce *AC* přidána, platí dle tvrzení II-6 $R_{CF,FA}+S_{AE}=S_{EF}$. Ale $R_{CF,FA}+S_{AE}=S_{EB}$, neboť $|EF|=|EB|$. Jelikož úhel při vrcholu *A* je pravý, získáme z Pythagorovy věty $S_{BA}+S_{AE}=S_{EB}$. Tudíž platí také $R_{CF,FA}+S_{AE}=S_{BA}+S_{AE}$. Od obou stran odečtěme S_{AE}, dostaneme tak $R_{CF,FA}=S_{BA}$. A protože $|AF|=|FG|$, platí též $R_{FK}=R_{CF,FA}$. Můžeme psát $R_{AD}=S_{AB}$, tudíž $R_{FK}=R_{AD}$. Od obou stran odečtěme R_{AK}, získáme $R_{FH}=R_{HD}$. Dále platí rovnost $R_{HD} = R_{AB,BH}$, protože $|AB| = |BD|$. A jelikož $R_{FH} = S_{AH}$, platí též $R_{AB,BH} = S_{HA}$.

Takže daná úsečka *AB* byla rozdělena bodem *H* tak, aby platilo $R_{AB,BH} = S_{HA}$, což je přesně to, co mělo být uděláno.



Obr. 4
Nákres k tvrzení II-11.

Důkaz správnosti postupu, jakož i postup sám, jsou značně složité a ukazuje se, že klíčovým krokem konstrukce je právě rozdělení úsečky *AC* bodem *E* na polovinu. Můžeme o něm přinejmenším říci, že je neprůhledný. – Jak na tuto myšlenku autor konstrukce přišel? Závěry historiků se liší, ale lze se domnívat, že tvrzení II-11 bylo pouze vedlejším produktem *věty o tečně a sečně*[6] uvedené ve třetí knize Základů [1]. Tvrzení II-6 by potom nebylo ničím jiným než lemmatem pro důkaz této věty [3].

Předpoklad, že věta o tečně a sečně a tvrzení II-6 a II-11 vyšla z konstrukce pravidelného pětiúhelníku, nás proto nutí k závěru, že prvních deset tvrzení druhé knihy nebylo vytvořeno jednotně a některá z nich byla spíše lemmaty dokázanými společně s dalšími výsledky. Při pohledu na strukturu Základů potom není až tak udivující, že byly rozmanité výroky týkající se *geometrie obsahů* takto shrnuty v samostatné knize [3].

2.2 Kniha čtvrtá

Ve čtvrté knize shrnuje Eukleidés konstrukce pravidelných mnohoúhelníků. Např. čtvrté tvrzení se týká vepsání čtverce do kružnice, tvrzení 12–14 potom mluví o pravidelném pětiúhelníku opsaném dané kružnici, resp. o kružnici vepsané nebo opsané danému pětiúhelníku. Patnácté tvrzení popisuje konstrukci pravidelného šestiúhelníku. Souvislost s vývojem zlatého řezu však mají pouze tvrzení IV-10 a IV-11 vedoucí k vepsání pravidelného pětiúhelníku do dané kružnice, která níže cituji.

---

6 Jedna z vět popisujících mocnost bodu ke kružnici: Vedeme-li vnějším bodem *M* kružnice její sečnu protínající kružnici v bodech *A*, *B* a tečnu dotýkající se kružnice v bodě *T*, potom platí $|MA||MB| = |MT|^2$. Tato věta je zapsána ve třetí knize Základů jako tvrzení 36. V tvrzení III-37 potom Eukleidés uvádí také obracenou implikaci; platí-li zmíněná rovnost, potom je přímka $\leftrightarrow MT$ tečnou dané kružnice.

Tvrzení IV-10

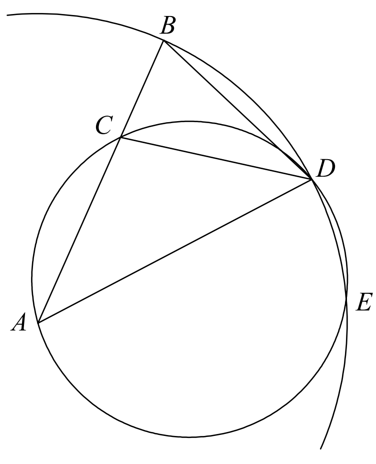
Sestrojte rovnoramenný trojúhelník mající každý z úhlů při základně dvakrát větší než úhel proti základně.

Vezměme libovolnou úsečku AB a rozdělme ji dle tvrzení II-11 bodem C, aby $R_{AB,BC} = S_{AC}$. Zkonstruujme kružnici BDE se středem A a poloměrem AB. Do kružnice BDE vepišme tětivu BD, pro kterou platí $|BD| = |AC|$, kde AC není delší než poloměr kružnice BDE. Spojme body A, D a D, C. Opišme kružnici ACD okolo trojúhelníku ACD. (Situace je zakreslena na Obr. 5.)

Protože platí $R_{AB,BC} = S_{AC}$ a $|AC| = |BD|$, dostáváme

$$R_{AB,BC} = S_{BD}. \tag{4}$$

Protože bod B leží vně kružnice ACD a úsečky BA a BD směřují ke kružnici ACD tak, že jedna z nich ji protíná a druhá se jí dotýká koncovým bodem, a navíc platí (4), přímka BD je tečnou kružnice ACD (z věty o tečně a sečně). Protože BD je tečnou kružnice ACD a úsečka DC byla zkonstruována jako její tětiva z bodu D, platí rovnost úsekového a obvodového úhlu: $|\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle DAC|$. Přičtěme k oběma stranám rovnosti $|\sphericalangle CDA|$, získáme $|\sphericalangle BDA| = |\sphericalangle CDA| + |\sphericalangle DAC|$. Avšak pro vnější úhel trojúhelníku ADC platí vztah $|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle CDA| + |\sphericalangle DAC|$, tudíž také $|\sphericalangle BDA| = |\sphericalangle BCD|$. Avšak $|\sphericalangle BDA| = |\sphericalangle CBD|$, neboť $|AD| = |AB|$ (trojúhelník ADB je rovnoramenný). Tudíž $|\sphericalangle BDA| = |\sphericalangle BCD|$ a tři úhly $\sphericalangle BDA$, $\sphericalangle DBA$ a $\sphericalangle BCD$ mají stejnou velikost. Ale $|\sphericalangle DBC| = |\sphericalangle BCD|$, takže platí také $|BD| = |DC|$ (trojúhelník BCD je rovnoramenný). Ale BD splňuje dle zadání rovnost $|BD| = |AC|$, proto $|CA| = |CD|$. Tedy platí rovněž vztah $|\sphericalangle CDA| = |\sphericalangle DAC|$ (trojúhelník DAC je rovnoramenný). A proto můžeme také psát $|\sphericalangle CDA| + |\sphericalangle DAC| = 2|\sphericalangle DAC|$. Jenže $|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle CDA| + |\sphericalangle DAC|$, tudíž $|\sphericalangle BCD| = 2|\sphericalangle CAD|$. A protože platí též vztah $|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle BDA| = |\sphericalangle DBA|$, musí $|\sphericalangle BDA| = |\sphericalangle DBA| = 2|\sphericalangle DAB|$.



Obr. 5
Nákres k tvrzení IV-10.

Takže rovnoramenný trojúhelník *ABD* byl zkonstruován tak, aby byl každý z úhlů při základně *BD* dvojnásobkem úhlu proti základně, což je právě to, co mělo být uděláno.

V trojúhelníku *ABD*, který splňuje podmínky desátého tvrzení, snadno určíme, že vnitřní úhly při základně *BD* mají velikost 72° a úhel při vrcholu *A* velikost 36°. Takový trojúhelník dnes v duchu „teorie zlatého řezu“ nazýváme *zlatým,* protože poměr délky jeho ramen a délky základny je zlaté číslo. To je ostatně zřejmé již z původního důkazu tvrzení, protože Eukleidés v něm použil k získání délky základny obsahové definice zlatého řezu (tvrzení II-11). Tvrzení IV-10 je dále využito mimo jiné v jedenáctém tvrzení čtvrté knihy ke konstrukci pravidelného pětiúhelníku vepsáním do dané kružnice.

Tvrzení IV-11 (konstrukce pravidelného pětiúhelníku)

Vepište rovnostranný a rovnoúhlý[7] *pětiúhelník do dané kružnice.*

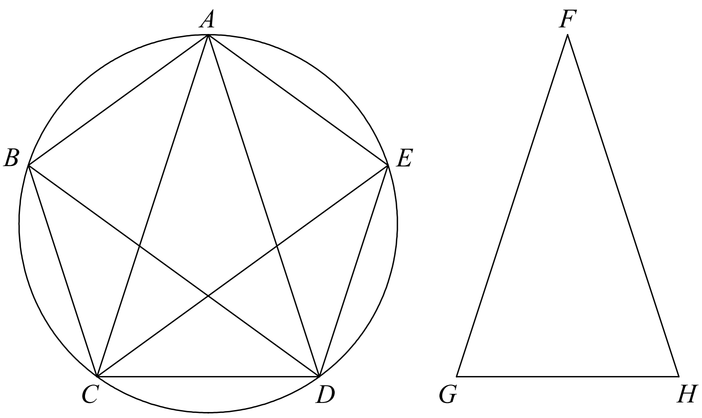
Nechť *ABCDE* je daná kružnice. Tedy je požadováno vepsat rovnostranný a rovnoúhlý pětiúhelník do kružnice *ABCDE*.

Sestrojme rovnoramenný trojúhelník *FGH* mající každý z úhlů při vrcholech *G* a *H* dvakrát větší než úhel při vrcholu *F* (dle tvrzení IV-10). A vepišme trojúhelník *ACD*, *rovnoúhlý*[8] s trojúhelníkem *FGH*, do kružnice *ABCDE* tak, že úhel $\sphericalangle CAD$ má stejnou velikost jako úhel při vrcholu *F* a velikost každého z úhlů při vrcholech *G* a *H* je rovna velikosti úhlů $\sphericalangle ACD$ a $\sphericalangle CDA$. Takže platí $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle CDA| = 2|\sphericalangle CAD|$. Každý z úhlů $\sphericalangle ACD$ a $\sphericalangle CDA$ pak rozdělme po řadě úsečkami *CE* a *DB* na polovinu. Spojme body *A*, *B*, *C* a *D*, *E*, *A*. (Situace je zakreslena na Obr. 6.)

Jelikož každý z úhlů $\sphericalangle ACD$ a $\sphericalangle CDA$ je dvojnásobkem úhlu $\sphericalangle CAD$ a jsou rozděleny úsečkami *CE* a *DB* na polovinu, pět obvodových úhlů $\sphericalangle DAC$, $\sphericalangle ACE$, $\sphericalangle ECD$, $\sphericalangle CDB$ a $\sphericalangle BDA$ má stejnou velikost. Stejné obvodové úhly však odpovídají stejným obloukům. Tedy oblouky $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{DE}$ a $\overset{\frown}{EA}$ mají stejnou délku. Takže pětiúhelník *ABCDE* je rovnostranný. Tvrdím však, že je též rovnoúhlý. Protože $|\overset{\frown}{AB}| = |\overset{\frown}{DE}|$, přičtěme k oběma stranám $|\overset{\frown}{BCD}|$, dostaneme $|\overset{\frown}{ABCD}| = |\overset{\frown}{EDCB}|$. Obvodový úhel $\sphericalangle AED$ odpovídá oblouku $\overset{\frown}{ABCD}$ a úhel $\sphericalangle BAE$ oblouku $\overset{\frown}{EDCB}$, proto platí také $|\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle AED|$. Ze stejného důvodu potom každý z úhlů $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCD$ a $\sphericalangle CDE$ má stejnou velikost jako úhel $\sphericalangle BAE$ či

[7] Za rovnoúhlý je považován takový mnohoúhelník, jehož všechny vnitřní úhly jsou si rovny.

[8] Pojmem rovnoúhlý je zde (na rozdíl od předešlého užití) myšleno podobný. Dnes bychom zřejmě řekli: „Podobný podle věty *uu* o podobnosti trojúhelníků.“



Obr. 6
Nákres k tvrzení IV-11.

> $\sphericalangle AED$. Tudíž pětiúhelník *ABCDE* je rovnoúhlý. A bylo též ukázáno, že je rovnostranný.
>
> Tedy rovnostranný a rovnoúhlý pětiúhelník byl vepsán do dané kružnice, což je přesně to, co mělo být uděláno.

Všimněme si užití zlatého trojúhelníku. Otázkou zůstává, proč byl umístěn jako vepsaný dané kružnici namísto užití úhlu 36° jako středového úhlu pravidelného desetiúhelníku, z něhož bychom pak spojením sudých vrcholů získali pětiúhelník. Tento postup se přímo nabízí již z Obr. 5: úsečka *AB* reprezentuje poloměr opsané kružnice a úsečka *BD* stranu desetiúhelníku. Naší pozornosti by však nemělo uniknout, že v důkazech tvrzení IV-10 a IV-11 není vůbec zmíněna skutečná velikost diskutovaných úhlů (pětina plného resp. dvě pětiny plného úhlu). Ve světle tohoto zjištění jsme potom vedeni k předpokladu, že pětiúhelník byl skutečně zkonstruován uvedeným způsobem. Řečtí matematici zaměřili zřejmě veškeré své úsilí na využití vlastností rovnoramenného trojúhelníku z tvrzení IV-10 a rozpůlením dvojnásobných úhlů při základně dostali stejné obvodové úhly na dané kružnici. Skutečná velikost středových nebo vnitřních úhlů pětiúhelníku tak patrně nehrála žádnou roli [3].

2.3 Kniha šestá

Šestá kniha Základů přináší využití *teorie proporcí* rozvedené v knize páté. Hned v úvodu se objevuje definice zlatého řezu tak, jak ji známe dnes.

> *Ακρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα τετμῆσθαι λέγεται, ὅταν ᾖ ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα, οὕτως τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλαττον.*
>
> *[Akron kai meson logon eutheia tetmésthai legetai hotan éi hós hé holé pros to meizon tméma houtós to meizon pros to elatton.]*

O úsečce se říká, že je rozdělena ve středním a krajním poměru, když jak je celá ku větší části, tak je větší ku menší.

Eukleidés (Heiberg), Stoicheia

Definice VI-d3 (dělení ve středním a krajním poměru)

O úsečce řekneme, že je rozdělena ve středním a krajním poměru, je-li poměr délky celé úsečky ku délce větší části stejný jako délka větší části ku délce menší části.

Eukleidés nebo jeho předchůdci nazvali zlatý řez na úsečce dělením ve středním a krajním poměru. Původ tohoto názvu nám může přiblížit sedmnácté tvrzení šesté knihy, které hovoří o vztahu tří *úměrných*[9] úseček. Tyto seřazeny podle velikosti potom můžeme rozdělit na krajní – první a poslední – a střední. Rozdělíme-li úsečku ve zlatém řezu, můžeme takto uspořádat menší část, větší část a celou úsečku, podmínka proporcionality (úměrnosti) této trojice je pak zaručena přímo definicí zlatého řezu.

Tvrzení VI-17

Jsou-li tři úsečky úměrné, potom je obsah obdélníku, jehož stranami jsou dvě krajní úsečky, roven obsahu čtverce nad střední úsečkou. A je-li obsah obdélníka, jehož stranami jsou dvě krajní úsečky, roven obsahu čtverce nad střední úsečkou, potom jsou tyto tři úsečky úměrné.

Eukleidův důkaz vychází z některých předešlých tvrzení, proto jej nebudu uvádět. Sedmnácté tvrzení však snadno dokáži pomocí dnešních algebraických nástrojů. Platí-li pro úsečky délek a, b, c vztah $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, tento upravím na $ac = b^2$, což vlastně mělo být dokázáno. Oba zápisy jsou ekvivalentní, protože délky úseček jsou různé od nuly, dokázána byla tedy také druhá část tvrzení (opačná implikace).

Zajímavostí zůstává, že třetí definice spolu se sedmnáctým tvrzením šesté knihy dohromady vyjadřují totéž, co obsahová definice zlatého řezu (viz tvrzení II-11). K této skutečnosti se ještě vrátím níže v komentáři k tvrzením třinácté knihy, v jejichž důkazech se místo starší obsahové definice užívá právě kombinace definice VI-d3 a tvrzení VI-17.

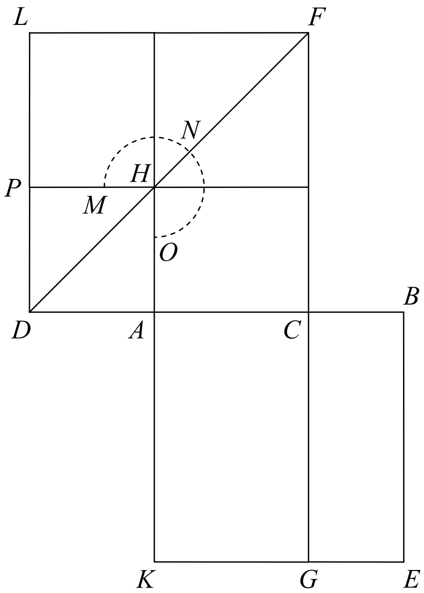
[9] Úsečky a, b, c jsou považovány za úměrné, platí-li pro jejich délky vztah $a : b = b : c$.

2.4 Kniha třináctá

Cílem třinácté knihy je popsat konstrukci pěti pravidelných těles – čtyřstěnu, osmistěnu, krychle, dvanáctistěnu a dvacetistěnu – vepsáním do dané sféry. Kniha však začíná několika tvrzeními týkajícími se vlastností zlatého řezu. Tato úvodní tvrzení dále cituji, jejich původní důkazy uvádím pouze zkráceně a u některých přidávám důkaz pomocí dnešních algebraických nástrojů.

Tvrzení XIII-1

Je-li úsečka rozdělena ve středním a krajním poměru, potom obsah čtverce nad větší částí zvětšené o polovinu celé úsečky je roven pětinásobku obsahu čtverce nad polovinou celé úsečky.



Obr. 7
Nákres k tvrzení XIII-1.

Nechť je úsečka AB rozdělena bodem C ve zlatém řezu a AD nechť je polovinou AB; situace je zakreslena na Obr. 7. Protože $|AB| = 2|AD|$, platí $|AK| = 2|AH|$ a pro obsahy $R_{CK} = 2R_{CH}$. Ale ve čtverci $CFDL$ platí $R_{CH} = R_{HL}$, tedy též $R_{CK} = R_{CH} + R_{HL}$. Z rozdělení úsečky AB bodem C ve zlatém řezu potom (dle VI-d3 a VI-17) plyne rovnost obsahů $S_{AC} = R_{AB,BC}$, jinak vyjádřeno $R_{HF} = R_{CE}$. Proto také můžeme dále psát $G_{MNO} = R_{CH} + R_{HL} + R_{HF} = R_{CK} + R_{CE} = S_{AB}$. Ze vztahu $|AB| = 2|AD|$ plyne pro obsahy $S_{AB} = 4S_{AD}$, a tedy

(5) $$S_{CD} = S_{AD} + G_{MNO} = S_{AD} + S_{AB} = 5S_{AD}.$$

Dnes bych tvrzení mohl dokázat následovně: Označím $a = |AC|$ a $b = |CB|$. Z definice dělení ve středním a krajním poměru (VI-d3) plyne vztah

(6) $$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}.$$

Tvrzení XIII-1 dále říká, že platí také

(7) $$\left(a + \frac{a+b}{2}\right)^2 = 5\left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Dostanu-li se ekvivalentními úpravami jednoho vztahu ke druhému, dokáži nejen, že z rovnosti (6) plyne (7), ale dokonce ekvivalenci těchto rovností. Roznásobením výrazů ve vztahu (7) a dalšími úpravami získám

$$\frac{9a^2+6ab+b^2}{4}=5\frac{a^2+2ab+b^2}{4}$$

$$9a^2+6ab+b^2=5a^2+10ab+5b^2 \qquad (8)$$

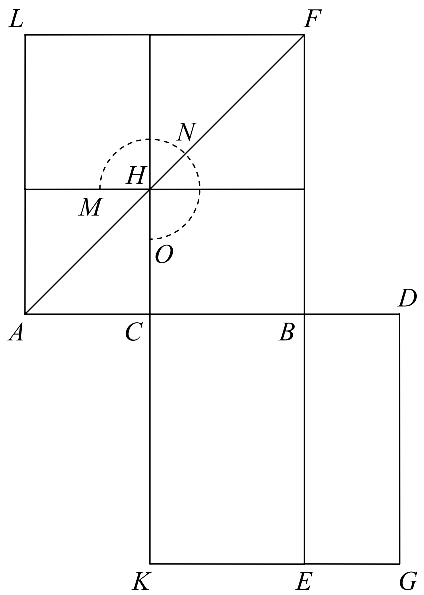
$$4a^2=4ab+4b^2$$

$$a^2=b(a+b).$$

Protože a, b vyjadřují délky úseček, mohu výsledný vztah (8) dále upravit na $\frac{a}{b}=\frac{a+b}{a}$, tj. na rovnost (6).

Tvrzení XIII-2

Jestliže je obsah čtverce nad celou úsečkou roven pětinásobku obsahu čtverce nad částí této úsečky, potom když dvojnásobek zmíněné části je rozdělen ve středním a krajním poměru, délka větší části je rovna délce zbývající části původní úsečky.



Obr. 8
Nákres k tvrzení XIII-2.

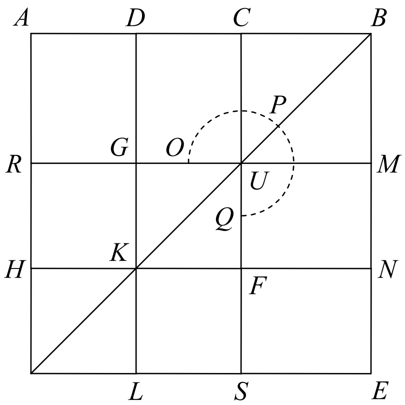
Nechť je tedy obsah čtverce nad úsečkou AB pětinásobkem obsahu čtverce nad úsečkou AC, která je její částí, a CD nechť je dvojnásobkem AC; situace je znázorněna na Obr. 8. Protože $S_{AB}=5S_{AC}$, musí platit též $G_{MNO}=4S_{AC}$. Ze zadání $|CD|=2|AC|$, tedy $S_{CD}=4S_{AC}$ a $G_{MNO}=S_{CD}$. Ze vztahů $|DC|=|CK|$ a $|AC|=|CH|$ můžeme odvodit $R_{KB}=2R_{BH}$. A jelikož platí $R_{LH}=R_{HB}$, dostáváme rovnost $R_{KB}=R_{HB}+R_{LH}$. Proto $R_{HF}=R_{BG}$, tj. $S_{CB}=R_{CD,BD}$, z čehož dále plyne dle tvrzení VI-17 vztah $\frac{|DC|}{|CB|}=\frac{|CB|}{|BD|}$. Ale $|DC|>|CB|$, takže také $|CB|>|BD|$. Je-li tedy úsečka CD rozdělena ve zlatém řezu, je větší částí právě úsečka CB.

Druhé tvrzení třinácté knihy není ničím jiným než obrácenou implikací tvrzení prvního. Protože jsem tvrzení XIII-1 pomocí algebraického vyjádření dokázal jako ekvivalenci, není třeba znovu vypisovat důkaz druhého tvrzení.

Tvrzení XIII-3

Je-li úsečka rozdělena ve středním a krajním poměru, potom obsah čtverce nad úsečkou, jejíž délka je rovna součtu menší části a poloviny větší části, je pětinásobkem obsahu čtverce nad polovinou větší části úsečky.

Nechť je úsečka AB rozdělena ve zlatém řezu bodem C a nechť AD je polovinou AC; situace je zachycena na Obr. 9. Ze vztahu $|DC| = 2|AC|$ dostaneme pro obsahy rovnost $S_{AC} = 4S_{DC}$, a tedy $R_{RS} = 4R_{FG}$. Z rozdělení úsečky AB zlatým řezem plyne dle definice VI-d3 a tvrzení VI-17 $R_{AB,BC} = S_{AC}$, jinak vyjádřeno $R_{CE} = R_{RS}$, tedy $R_{CE} = 4R_{FG}$. Protože $|AD| = |DC|$, musí rovněž $|MN| = |NE|$ a pro obsahy $R_{MF} = R_{FE}$. Jelikož $R_{MF} = R_{CG}$, platí $R_{CG} = R_{FE}$, tudíž platí také $G_{OPQ} = R_{CE}$. Protože $G_{OPQ} = 4R_{FG}$, můžeme dále též psát $R_{DN} = G_{OPQ} + R_{FG} = 5R_{FG}$, tj. $S_{DB} = 5S_{DC}$.



Obr. 9
Nákres k tvrzení XIII-3

Tvrzení však lze dokázat také následovně: Označím-li $a = |AC|$ a $b = |BC|$, z předpokladu o rozdělení úsečky zlatým řezem dostávám dle definice VI-d3

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}. \tag{9}$$

Závěr tvrzení XIII-3 při zavedeném značení zapíši jako rovnost

$$\left(b + \frac{a}{2}\right)^2 = 5\left(\frac{a}{2}\right)^2. \tag{10}$$

Nyní dokáži ekvivalenci rovností (9) a (10), která je silnější než implikace třináctého tvrzení. Roznásobením závorek ve vztahu (10) a dalšími úpravami postupně dostanu

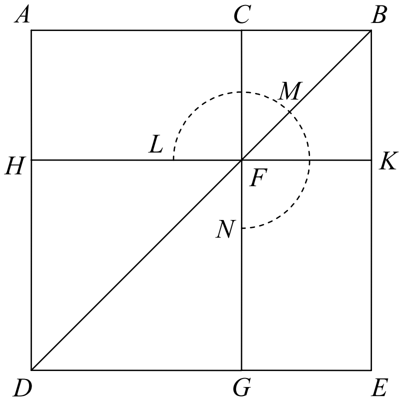
$$\begin{aligned} b^2 + ab + \frac{a^2}{4} &= \frac{5a^2}{4} \\ 4b^2 + 4ab + a^2 &= 5a^2 \\ 4b^2 + 4ab &= 4a^2 \\ b(b+a) &= a^2. \end{aligned} \tag{11}$$

Jelikož a, b vyjadřují délky úseček, mohu výsledný vztah (11) snadno upravit na $\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$, tedy na rovnost (9).

Tvrzení XIII-4

Je-li úsečka rozdělena ve středním a krajním poměru, potom součet obsahů čtverců nad celou úsečkou a nad menší částí je trojnásobkem obsahu čtverce nad větší částí úsečky.

Nechť je úsečka AB rozdělena bodem C ve zlatém řezu; situaci zachycuje Obr. 10. Z definice VI-d3 a tvrzení VI-17 plyne vztah $R_{AB,BC}=S_{AC}$, tj. $R_{AK}=R_{HG}$. Jelikož platí rovnost $R_{AF}=R_{FE}$, bude také $R_{AK}=R_{CE}$, z čehož dále plyne vztah $R_{AK}+R_{CE}=2R_{AK}$. Avšak platí rovněž $G_{LMN}+R_{CK}=2R_{AK}$, tj. $G_{LMN}+R_{CK}=2R_{HG}$. Přičtením R_{HG} k oběma stranám získáme $G_{LMN}+R_{CK}+R_{HG}=3R_{HG}$. Jenže součet $G_{LMN}+R_{HG}$ je roven též R_{AE}. Tedy $R_{AE}+R_{CK}=3R_{HG}$, jinak zapsáno také $S_{AB}+S_{BC}=3S_{AC}$.



Obr. 10
Nákres k tvrzení XIII-4.

Nebo: Zavedu-li označení $a=|AC|$ a $b=|CB|$, mohu premisu čtvrtého tvrzení vyjádřit opět rovností

$$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}. \tag{12}$$

Tvrzení XIII-4 potom při stejném značení říká slovy dnešní algebry

$$(a+b)^2+b^2=3a^2. \tag{13}$$

Stejně jako výše velmi snadno dokáži, že výrazy (12) a (13) jsou ekvivalentní. Provedením jednoduchých úprav rovnosti (13) postupně dostanu

$$\begin{aligned} a^2+2ab+b^2+b^2&=3a^2\\ 2ab+2b^2&=2a^2\\ b(a+b)&=a^2. \end{aligned} \tag{14}$$

Neznámé a, b vyjadřují délky úseček, výslednou rovnost (14) mohu proto upravit na $\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$, což je vztah (12).

Tvrzení XIII-5

Je-li úsečka rozdělena ve středním a krajním poměru a je k ní přidána úsečka, jejíž délka je rovna délce většího úseku, potom tato celá úsečka byla rozdělena ve středním a krajním poměru a původní úsečka je větší částí.

Nechť je úsečka AB rozdělena bodem C ve zlatém řezu tak, že úsek AC je větší, a nechť $|AD| = |AC|$; situace je zakreslena na Obr. 11. Z dělení ve zlatém řezu plyne dle VI-d3 a VI-17 vztah $R_{AB,BC} = S_{AC}$, tj. $R_{CE} = R_{CH}$. Protože platí $R_{HE} = R_{CE}$ a $R_{DH} = R_{HC}$, musí také $R_{DH} = R_{HE}$ a $R_{DK} = R_{AE}$. Ale $R_{DK} = R_{BD,DA}$, neboť $|AD| = |DL|$ a rovněž můžeme psát $R_{AE} = S_{AB}$. Takže $R_{BD,DA} = S_{AB}$, odkud dle VI-17 plyne $\frac{|DB|}{|BA|} = \frac{|BA|}{|AD|}$. A jelikož $|DB| > |BA|$, platí též $|BA| > |AD|$. Podle definice VI-d3 je tedy úsečka BD rozdělena bodem A ve zlatém řezu, přičemž větší částí je úsečka AB.

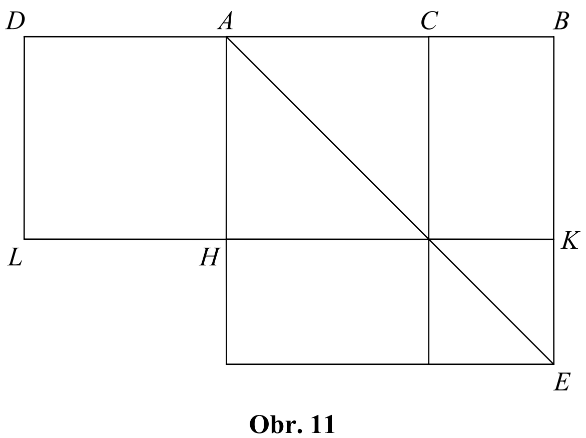
Jinak: Označím-li $a = |AC|$ a $b = |CB|$, mohu obdobně jako v předchozích tvrzeních předpoklad vyjádřit vztahem

(15) $$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}.$$

Druhou část tvrzení XIII-5 potom zapíši dnešními mechanismy jako

(16) $$\frac{2a+b}{a+b} = \frac{a+b}{a}.$$

Úkolem je opět dokázat ekvivalenci výrazů (15) a (16). Jelikož jsou a, b nenulová – vyjadřují délky úseček – dostanu ekvivalentními úpravami vztahu (16) postupně

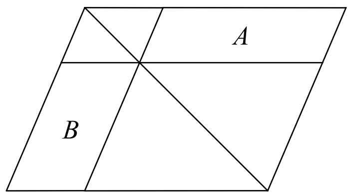


Obr. 11
Nákres k tvrzení XIII-5.

$$
\begin{aligned}
a(2a+b) &= (a+b)^2 \\
2a^2 + ab &= a^2 + 2ab + b^2 \\
a^2 &= b(a+b) \\
\frac{a}{b} &= \frac{a+b}{a}.
\end{aligned} \tag{17}
$$

Získal jsem vztah (17), čímž je páté tvrzení dokázáno.

Zhodnotíme-li důkazy prvních pěti tvrzení třinácté knihy, můžeme o nich prohlásit, že jsou velmi přímočaré a jednoduché. Zakládají se na sčítání obsahů obdélníku a čtverců a užívají dvě základní techniky: Převedení definice dělení ve středním a krajním poměru (VI-d3) na obsahovou formulaci (II-11) pomocí tvrzení VI-17 a rovnost obsahů doplňků k rovnoběžníkům při úhlopříčce (viz Obr. 12; z rovnosti obsahů trojúhelníků po obou stranách úhlopříčky plyne, že rovnoběžníky A, B mají stejný obsah). Skutečnost, že v důkazech nebyla užita tvrzení druhé knihy Základů (vč. obsahové definice zlatého řezu), nasvědčuje, že autor nebyl obeznámen se systematickým vývojem této knihy – pravděpodobně v té době ještě neexistovala. Evidentně však ovládal geometrickou algebru, neboť obratně manipuluje přímo s obsahy obdélníků [3]. Do terminologie vycházející z šesté knihy byla tato tvrzení zřejmě převedena až později, možná samotným Eukleidem.



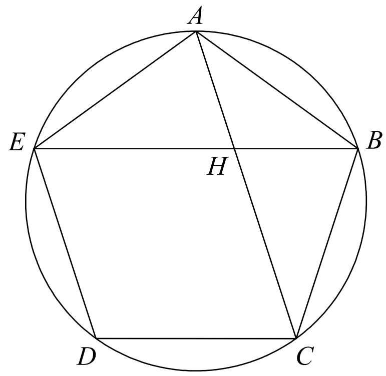
Obr. 12
Doplňky rovnoběžníků:
$S_A = S_B$.

Podle dostupných pramenů lze právě z jednoduchosti důkazů předpokládat, že tvrzení 1–5 byla pouze drobnými lemmaty, jejichž důkazy jsou nezbytné pro další výsledky třinácté knihy – konstrukci pravidelných mnohostěnů vepsáním do dané sféry. Autorem všech pěti tvrzení byl zřejmě Theaitétos, neboť právě on je spojován s objevem konstrukce platónských těles, i když některými historiky jsou lemmata přisuzována Eudoxovi[10].

[10] **Eudoxos z Knidu** (asi 410–347 př. Kr.): řecký astronom, matematik a fyzik; žák a přítel Platóna. Jeho vlastní práce se nedochovaly, ale zprávy o jeho činnosti máme z dalších zdrojů. Je zmiňován především pro svůj přínos v teorii poměrů a objevení tzv. *exhaustní metody,* kterou později užíval a rozvinul Archimédes.

Tvrzení XIII-8

Vezmeme-li v rovnostranném a rovnoúhlém pětiúhelníku dvě úsečky přetínající po řadě dva jeho vnitřní úhly[11], potom jedna druhou protíná ve středním a krajním poměru a délka větší části je rovna délce strany pětiúhelníku.



Obr. 13
Nákres k tvrzení XIII-8.

Nechť *ABCDE* je pravidelný pětiúhelník vepsaný kružnici a dvě jeho sousední úhlopříčky *AC*, *EB* nechť se protínají v bodě *H*; situaci znázorňuje Obr. 13. Z rovnosti stran a vnitřních úhlů pětiúhelníku plyne rovněž $|BE| = |AC|$ a současně shodnost trojúhelníků *BAE* a *CBA*. Protože $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ABE|$, bude $|\sphericalangle AHE| = 2|\sphericalangle BAH|$ (vnější úhel trojúhelníku *AHB*). Ale také $|\sphericalangle EAC| = 2|\sphericalangle BAC|$, jelikož platí $|\widehat{EDC}| = 2|\widehat{CB}|$ pro oblouky opsané kružnice. Ze vztahu $|\sphericalangle HAE| = |\sphericalangle AHE|$ pak plyne $|HE| = |EA|$ (trojúhelník *AEH* je rovnoramenný). Protože $|BA| = |AE|$, dostaneme pro obvodové úhly $|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle AEB|$. Ale $|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle BAH|$, proto také $|\sphericalangle BEA| = |\sphericalangle BAH|$ a trojúhelníky *BAE* a *AHB* jsou podobné. Takže pro délky jejich stran musí platit vztah $\frac{|EB|}{|BA|} = \frac{|AB|}{|BH|}$. A jelikož $|BA| = |EH|$, můžeme psát $\frac{|BE|}{|EH|} = \frac{|EH|}{|HB|}$, což podle definice VI-d3 znamená, že úsečka *BE* je rozdělena bodem *H* ve zlatém řezu. Protože $|BE| > |EH|$, bude též $|EH| > |HB|$, tedy při zmíněném dělení je větší částí úsečka *EH*, mající stejnou délku jako strana pětiúhelníku. Podobně lze dokázat, že také úhlopříčka *AC* je rozdělena bodem *H* ve zlatém řezu a délka větší části *CH* je rovna délce strany pětiúhelníku.

Pokud bychom chtěli provést důkaz tvrzení dnešními postupy, zjistíme brzy, že bez vyčíslení velikostí jednotlivých úhlů jsme nuceni postupovat obdobně jako před více než dvěma tisíci lety řečtí matematici. Klíčovými momenty důkazu zůstávají podobnost trojúhelníků *EAB*, *BAH* a rovnost $|EA| = |EH|$.

---

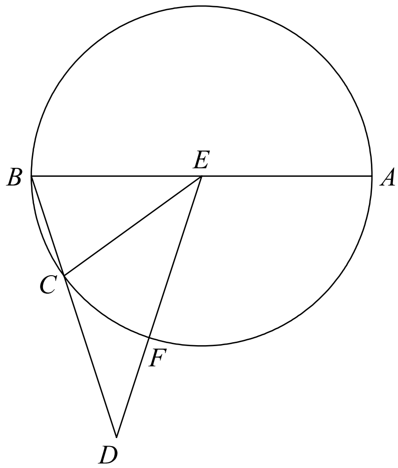
[11] Úsečkami přetínajícími po řadě dva vnitřní úhly pětiúhelníku jsou myšleny jeho dvě sousední úhlopříčky.

Osmé tvrzení, a to i jeho intuitivní znalost, je nejspíše mladší než konstrukce pětiúhelníku a prvních pět tvrzení třinácté knihy. Lze ho totiž dokázat pouze nástroji užitými v důkazech tvrzení IV-10 a IV-11 popisujících konstrukci pravidelného pětiúhelníku. Přestože říká mnoho o vlastnostech pětiúhelníku, bylo zřejmě považováno za lemma potřebné pouze k důkazu, že délka strany pravidelného pětiúhelníku vepsaného kružnici s racionálním poloměrem je iracionální úsečkou zvanou *minor*[12]. Závěry osmého tvrzení mohly být jistě dokázány dříve, nebyly však potřeba. Z toho můžeme též soudit, že tvrzení XIII-8 bylo objeveno jinou osobou než tvrzení předcházející, patrně Eudoxem. Navíc nebylo považováno za žádný významný výsledek [3].

Tvrzení XIII-9

Vytvoříme-li úsečku sečtením strany šestiúhelníku a strany desetiúhelníku vepsaných téže kružnici, potom celá tato úsečka byla rozdělena ve středním a krajním poměru a větší částí je strana šestiúhelníku.

Nechť je dána kružnice se středem E a její tětiva BC tak, že je stranou pravidelného desetiúhelníku kružnici vepsaného. Úsečku CD o délce strany pravidelného šestiúhelníku vepsaného téže kružnici nanesme na polopřímku BC za bod C; situace je zakreslena na Obr. 14. Protože BC byla definována jako strana pravidelného desetiúhelníku, musí pro délky oblouků opsané kružnice platit rovnost $\left|\widehat{ACB}\right| = 5\left|\widehat{BC}\right|$, takže $\left|\widehat{AC}\right| = 4\left|\widehat{CB}\right|$. Pro odpovídající středové úhly potom dostaneme $|\sphericalangle AEC| = 4|\sphericalangle CEB|$. Ale $|\sphericalangle EBC| = |\sphericalangle ECB|$, proto $|\sphericalangle AEC| = 2|\sphericalangle ECB|$ (vnější úhel trojúhelníku BCE). Dále $|EC| = |CD|$, neboť obě mají velikost strany pravidelného šestiúhelníku vepsaného dané kružnici, tudíž $|\sphericalangle CED| = |\sphericalangle CDE|$ a $|\sphericalangle EBC| = 2|\sphericalangle EDC|$ (vnější úhel trojúhelníku ECD). Takže můžeme psát $|\sphericalangle AEC| = 4|\sphericalangle EDC|$, tzn. $|\sphericalangle EDC| = |\sphericalangle BEC|$ a trojúhelníky EBD a BCE jsou podobné. Pro jejich strany potom platí vztah $\frac{|DB|}{|BE|} = \frac{|EB|}{|BC|}$. Ale protože $|EB| = |CD|$, platí též $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|DC|}{|CB|}$, což implikuje podle VI-d3 rozdělení úsečky BD bodem C ve zlatém řezu.



Obr. 14
Nákres k tvrzení XIII-9.

[12] Jeden ze třinácti typů *iracionalit* (viz pozn. 13 na str. 26) definovaných v desáté knize.

A jelikož $|BD| > |DC|$, musí také $|DC| > |CB|$, tedy úsečka *CD*, mající délku strany pravidelného šestiúhelníku, reprezentuje větší část dělené úsečky.

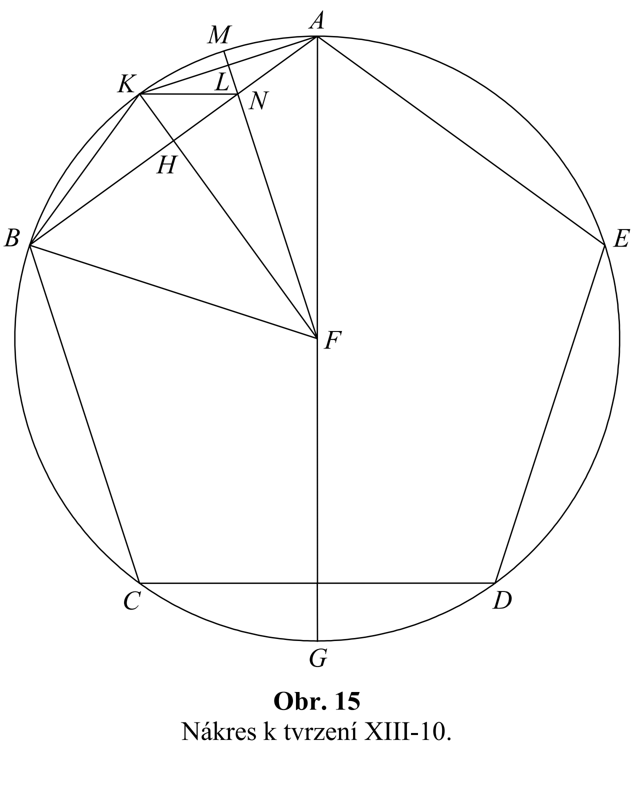
Eukleidův důkaz lze zjednodušit, uvědomíme-li si, že trojúhelník *BCE* splňuje podmínky tvrzení IV-10, je tedy trojúhelníkem zlatým a délka jeho ramene ku délce základny jsou v poměru zlatého řezu. Úsečky *BE* a *CE*, jsouce poloměry kružnice oběma mnohoúhelníkům opsané, mají stejnou délku jako strana pravidelného šestiúhelníku a základna *BC* je stranou desetiúhelníku. Dány do poměru potom skutečně tvoří zlatý řez, což mělo být dokázáno.

Tvrzení XIII-10

Je-li rovnostranný pětiúhelník vepsán kružnici, potom obsah čtverce nad stranou tohoto pětiúhelníku je roven součtu obsahů čtverců nad stranami šestiúhelníku a desetiúhelníku vepsaných téže kružnici.

Nechť je dána kružnice se středem *F* a pravidelný pětiúhelník *ABCDE* vepsaný této kružnici, veďme *FH* kolmo na stranu *AB* a průsečík s kružnicí označme *K*. Spojme *A*, *K* a *B*, *K* a veďme *FL* kolmo na *AK*, průsečík s kružnicí označme *M*, průsečík s *AB* potom *N* a spojme ještě *K*, *N*. (Situace je zachycena na Obr. 15.)

Z rovnosti délek oblouků $|\widehat{ABCG}| = |\widehat{AEDG}|$ a $|\widehat{ABC}| = |\widehat{AED}|$ vyplývá také $|\widehat{CG}| = |\widehat{GD}|$, proto připadá-li oblouk $\widehat{CD}$ straně pravidelného pětiúhelníku,



Obr. 15
Nákres k tvrzení XIII-10.

musí oblouk $\overset{\frown}{CG}$ náležet straně pravidelného desetiúhelníku vepsaného téže kružnici. Protože $|FA| = |FB|$ a $FH \perp AB$, bude $|\sphericalangle AFK| = |\sphericalangle KFB|$. Rovnost platí také pro délky odpovídajících oblouků: $|\overset{\frown}{AK}| = |\overset{\frown}{KB}|$, a tedy $|\overset{\frown}{AB}| = 2|\overset{\frown}{BK}|$. Podobně lze ukázat, že $|\overset{\frown}{AK}| = 2|\overset{\frown}{KM}|$. Jelikož $|\overset{\frown}{CD}| = |\overset{\frown}{AB}|$, tj. $|\overset{\frown}{CD}| = 2|\overset{\frown}{BK}|$, můžeme psát $|\overset{\frown}{CG}| = |\overset{\frown}{BK}|$. Ale $|\overset{\frown}{BK}| = 2|\overset{\frown}{KM}|$, neboť $|\overset{\frown}{BK}| = |\overset{\frown}{AK}|$, a proto také $|\overset{\frown}{CG}| = 2|\overset{\frown}{KM}|$. Avšak $|\overset{\frown}{CB}| = 2|\overset{\frown}{BK}|$, protože $|\overset{\frown}{CB}| = |\overset{\frown}{AB}|$. Dohromady získáme

$$
\begin{aligned}
|\overset{\frown}{GC}| + |\overset{\frown}{CB}| &= 2|\overset{\frown}{MK}| + 2|\overset{\frown}{KB}| \\
|\overset{\frown}{GB}| &= 2|\overset{\frown}{BM}|,
\end{aligned}
\tag{18}
$$

tedy pro odpovídající středové úhly $|\sphericalangle GFB| = 2|\sphericalangle BFM|$. Jenže platí rovněž $|\sphericalangle GFB| = 2|\sphericalangle FAB|$ (vnější úhel trojúhelníku *AFB*), neboť $|\sphericalangle FAB| = |\sphericalangle ABF|$. Takže $|\sphericalangle BFN| = |\sphericalangle FAB|$, a protože úhel $\sphericalangle ABF$ je společný dvěma trojúhelníkům *ABF* a *BFN*, jsou tyto podobné. Z toho dále plyne pro délky jejich stran vztah $\dfrac{|AB|}{|BF|} = \dfrac{|FB|}{|BN|}$, tudíž dle VI-17 platí též $R(AB, BN) = S(BF)$. Z rovnosti $|AK| = |LK|$ a ze skutečnosti, že *LN* je společná trojúhelníkům *ALN* a *KLN* při pravém úhlu, dále vyplývá $|KN| = |AN|$, tedy $|\sphericalangle LKN| = |\sphericalangle LAN|$ (trojúhelníky *ALN* a *KLN* jsou shodné). Avšak $|\sphericalangle LAN| = |\sphericalangle KBN|$, proto $|\sphericalangle LKN| = |\sphericalangle KBN|$. Jelikož je úhel při vrcholu *A* společný pro trojúhelníky *AKB* a *KNA*, jsou tyto podobné a pro délky jejich stran dostáváme vztah $\dfrac{|BA|}{|AK|} = \dfrac{|KA|}{|AN|}$, tzn. podle tvrzení VI-17 můžeme psát $R_{BA,AN} = S_{AK}$. V součtu potom dostaneme

$$
\begin{aligned}
R_{AB,BN} + R_{BA,AN} &= S_{BF} + S_{AK} \\
S_{BA} &= S_{BF} + S_{AK},
\end{aligned}
\tag{19}
$$

kde *BA* vyjadřuje stranu pravidelného pětiúhelníku, *BF* je stranou šestiúhelníku a *AK* stranou desetiúhelníku. Tvrzení XIII-10 je tedy dokázáno.

Původní důkaz pracuje s dvojicemi podobných trojúhelníků a k výsledku se dobírá pomocí poměrů mezi délkami jejich stran. Vezmu-li v úvahu některá již dokázaná tvrzení, mohu předložit následující algebraický důkaz: Označím délku strany pravidelného šestiúhelníku $a_6 = |AF| = |KF| = |BF|$, délku strany pětiúhelníku $a_5 = |AB|$ a délku strany desetiúhelníku $a_{10} = |AK|$. Označím-li dále úhel $\alpha = |\sphericalangle AFK|$, potom $|\sphericalangle AFB| = 2\alpha$. Protože trojúhelník *AFK* je zlatý, mohu též psát $|\sphericalangle KAF| = |\sphericalangle AKF| = 2\alpha$. Ze sinové věty v trojúhelníku *AFK* odvodím vztah $\frac{a_6}{a_{10}} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$, který upravím na $\frac{a_6}{a_{10}} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2\cos\alpha$. Podle tvrzení XIII-9 platí pro délky stran pravidelného šestiúhelníku a desetiúhelníku vztah $\frac{a_6}{a_{10}} = \frac{a_6 + a_{10}}{a_6}$, a tudíž také $2\cos\alpha = \frac{a_6 + a_{10}}{a_6}$. Z kosinové věty v trojúhelníku *AFB* potom dostávám

$$
\begin{aligned}
a_5^2 &= a_6^2 + a_6^2 - 2a_6a_6\cos 2\alpha \\
a_5^2 &= 2a_6^2\left(1 - \cos 2\alpha\right) \\
a_5^2 &= 2a_6^2\left[1 - \left(2\cos^2\alpha - 1\right)\right] \\
a_5^2 &= a_6^2\left(4 - 4\cos^2\alpha\right).
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Pro dosazení budu potřebovat výraz $4\cos^2\alpha = \frac{\left(a_6 + a_{10}\right)^2}{a_6^2}$, jehož čitatele však mohu upravit dle tvrzení XIII-4: Při zavedeném značení rovnost (13) říká, že $\left(a_6 + a_{10}\right)^2 + a_{10}^2 = 3a_6^2$, a tedy $4\cos^2\alpha = \frac{3a_6^2 - a_{10}^2}{a_6^2}$. Po dosazení do výsledného vztahu (20) dostanu

$$
\begin{aligned}
a_5^2 &= a_6^2\left(4 - \frac{3a_6^2 - a_{10}^2}{a_6^2}\right) \\
a_5^2 &= 4a_6^2 - 3a_6^2 + a_{10}^2 \\
a_5^2 &= a_6^2 + a_{10}^2,
\end{aligned}
\tag{21}
$$

což mělo být dokázáno.

Tvrzení XIII-9 a XIII-10 jsou dále použita jako lemmata, pomocí nichž je určen *typ iracionality*[13] hrany pravidelného dvacetistěnu a porovnány délky hran všech pravidelných mnohostěnů vepsaných téže kulové ploše.

Prvních dvanáct tvrzení třinácté knihy společně směřuje ke konstrukci pěti pravidelných mnohostěnů, tzv. *platónských těles.* Poslední z nich přináší vztah

---

[13] Podle teorie nesouměřitelnosti shrnuté v desáté knize Základů existovalo 13 typů iracionálních úseček. Tři základní – *mediál, binomiál* a *apotomé* – objevil a zavedl Theaitétos v souvislosti s konstrukcí pravidelných mnohoúhelníků, další – *minor* – je společně s tvrzením XIII-8 připisována Eudoxovi a ostatní klasifikoval nejspíše sám Eukleidés.

mezi délkou strany rovnostranného trojúhelníku a poloměrem kružnice tomuto opsané. Označíme-li stranu trojúhelníku a_3 a poloměr kružnice r, platí

(22) $$a_3^2 = 3r^2 .$$

Tvrzení 13–17 potom uvádějí způsoby, jakými vepsat do sféry po řadě čtyřstěn (pyramidu), osmistěn, šestistěn (krychli), dvacetistěn a dvanáctistěn. Současně určují poměr mezi délkou jejich hrany a průměrem dané kulové plochy. Označíme-li e_n délku hrany pravidelného n-stěnu a d průměr sféry tomuto tělesu opsané, potom můžeme ze Základů vypsat např. následující vztahy:

(23) $$\begin{aligned} d^2 &= \frac{3}{2} e_4^2 \\ d^2 &= 2e_8^2 \\ d^2 &= 3e_6^2 . \end{aligned}$$

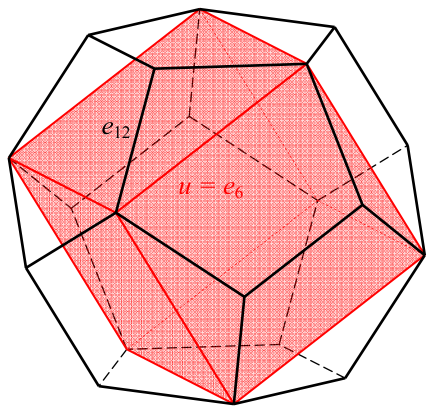
Tvrzení XIII-17 potom mimo jiné uvádí, že rozdělíme-li ve zlatém řezu hranu krychle vepsané dané kulové ploše, větší část má stejnou délku jako hrana pravidelného dvanáctistěnu vepsaného téže sféře. Spojením s výsledkem tvrzení XIII-8 lze snadno ukázat, že hrana krychle je úhlopříčkou pětiúhelníkové stěny dvanáctistěnu (viz Obr. 16). Označíme-li tuto úhlopříčku u, můžeme psát

(24) $$u = e_6 .$$

Osmnácté tvrzení porovnává délky hran všech pěti těles, popisuje, které z nich jsou iracionální, a závěrem uvádí, že neexistuje žádný další pravidelný mnohostěn kromě výše jmenovaných.

3. Poeukleidovské Řecko

Události a objevy popsané v kapitole 2 se odehrály během 100 let. Další etapa vývoje zlatého řezu ve Starém Řecku však pokrývá více než 600 let. Kromě striktně geometrického přístupu, jaký užíval Eukleidés, můžeme v pracích z tohoto období nalézt také pohled početní, plynoucí z trigonometrie nebo výpočtu obsahů a obvodů [3]. Časové údaje o matematicích navazujících na Eukleida jsou v mnoha případech značně neúplné, nelze tedy s jistotou určit pořadí jednotlivých objevů. V dalších odstavcích se stručně věnuji výskytu zlatého řezu v *Dodatku* Základů (viz 3.1) a pracích



Obr. 16
Pravidelný dvanáctistěn a krychle vepsány téže kulové ploše

Archiméda, Heróna (viz 3.2), Ptolemaia a Pappa (viz 3.3).

Jeden z největších učenců antického světa, *Archimédes*[14], se možná při své cestě za vyčíslením délky kružnice také dotkl tajemství zlatého řezu. Při výpočtu poměru mezi obvodem a průměrem kružnice se Archimédes ke kýžené hodnotě postupně přibližoval pomocí vepsaných a opsaných mnohoúhelníků. Začal zřejmě pravidelným šestiúhelníkem, který dále dělil na dvanácti-, čtyřiadvaceti- až šestadevadesátiúhelník. Někteří historici se ovšem domnívají, že mohl vycházet také z pravidelného desetiúhelníku. Svá tvrzení opírají o výskyt některých čísel v prvočíselném rozkladu jmenovatelů a čitatelů Archimédových aproximačních zlomků (více viz [3] str. 100). Užití desetiúhelníku se však zdá být přinejmenším podivné, neboť dochované odvození zmiňuje šestiúhelník a pro lepší aproximaci bychom mohli jako výchozí mnohoúhelník spíše předpokládat osmiúhelník. Při jeho dělení je totiž nutná znalost hodnoty $\sqrt{2}$, jejíž aproximace, na rozdíl od výrazu $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (nutného při dělení desetiúhelníku), byla známa již před Archimédem.

3.1 Dodatek k Základům

O čtrnácté knize Základů, jak bývá často Dodatek nazýván, toho mnoho nevíme – autorství i její chronologické zařazení jsou velmi neurčité. Závěry jsou zřejmě pozdějšího data než třináctá kniha Základů, avšak někteří historici se domnívají, že v důkazech tvrzení třinácté knihy je již využita práce Aristaia[15], který je považován za jednoho z autorů Dodatku. V následující části své práce se věnuji tvrzením sepsaným v Dodatku, která souvisejí se zlatým řezem. Jejich označení částečně přebírám z Herz-Fischlera [3], potažmo anglického překladu T. Heathe. Důkazy uvádím pouze stručně pomocí dnešního značení.

Lemma o poměru

Jsou-li dvě úsečky rozděleny ve zlatém řezu, potom poměr mezi délkou celé úsečky a délkou větší části je na obou úsečkách stejný.

---

[14] **Archimédes ze Syrakus** (287–212 př. Kr.): starořecký matematik, fyzik, astronom a filosof. Právem je považován za největšího antického matematika. Pomocí integračních metod dávno před Newtonem a Leibnitzem vypočítal obsahy mnoha geometrických útvarů a povrchy a objemy těles. Zjistil, že se při výpočtech obvodu a obsahu kruhu, povrchu a objemu koule objevuje táž konstanta, kterou velmi přesně aproximoval. Zdokonalil a hojně využíval Eudoxovu exhaustní metodu.

[15] **Aristaios** (asi 370–300 př. Kr.): antický matematik. Zmiňován je Hypsiklem jako autor díla *Porovnání pěti těles*, ve kterém dokázal tvrzení XIV-2. Do spojitosti s dílem *Pět knih o Solid Loci* popisujícím kuželosečky jej jako Aristaia staršího uvádí Pappos. Ani jedno z děl se bohužel nedochovalo. Podle některých historiků se však jedná o dvě osoby téhož jména.

Toto lemma se ve skutečnosti v Dodatku nevyskytuje samostatně, jeho výsledek je zmíněn mezi tvrzením XIV-8 a shrnutím.

Tvrzení XIV-†

Nechť jsou téže kružnici vepsány pravidelný šestiúhelník a desetiúhelník. Rozdělíme-li stranu šestiúhelníku ve zlatém řezu, potom větší část je stranou desetiúhelníku.

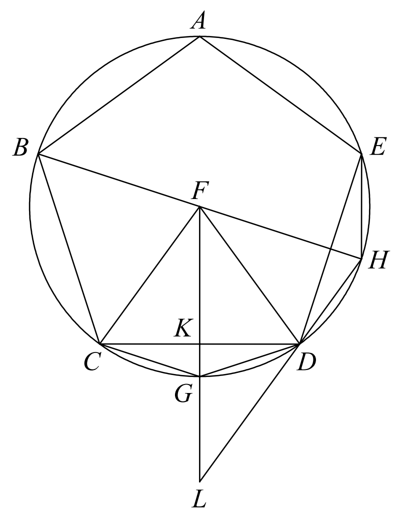
Výsledek můžeme srovnat s tvrzením XIII-9. Ani toto tvrzení není v Dodatku dokázáno samostatně, jeho platnost se předpokládá v tvrzeních 2 a 7. Lze se domnívat, že stálo samostatně nejméně v jedné z řeckých verzí, neboť bylo částečně zachováno v arabských Základech a úplně v latinském rukopisu [3].

Tvrzení XIV-1

Vepíšeme-li dané kružnici pravidelný pěti-, šesti- a desetiúhelník, potom délka kolmice spuštěné ze středu kružnice na stranu pětiúhelníku je rovna polovině součtu délek strany šestiúhelníku a desetiúhelníku.

Původní důkaz nemá nic společného se zlatým řezem, ale tvrzení budu potřebovat v dalším textu. Uvádím vlastní důkaz, který též nevychází z dělení ve zlatém poměru. Situace je zakreslena na Obr. 17.

Nechť $ABCDE$ je pravidelný pětiúhelník vepsaný kružnici se středem F, spustím kolmici z bodu F na stranu CD, její patu označím K a průsečík s kružnicí G. Obdobně spustím kolmici na stranu DE. Body C, G, D, H, E jsou vrcholy pravidelného desetiúhelníku. Protáhnu jeho stranu HD a průsečík s polopřímkou FG označím L. Jelikož je GD stranou desetiúhelníku a CD pětiúhelníku, pro středové úhly mám $|\sphericalangle CFD| = 2|\sphericalangle GFD|$. Protože $|\widehat{BCD}| = 2|\widehat{CD}|$, pro odpovídající středové úhly platí týž vztah: $|\sphericalangle BFD| = 2|\sphericalangle CFD|$, a tudíž dosazením předchozí rovnosti získám $|\sphericalangle BFD| = 4|\sphericalangle GFD|$. Středový úhel $\sphericalangle BFD$ odpovídá obvodovému $\sphericalangle BHD$, takže pro jejich velikost platí $|\sphericalangle BFD| = 2|\sphericalangle BHD|$. Dále tedy mohu psát vztah $4|\sphericalangle GFD| = 2|\sphericalangle BHD|$ a též $|\sphericalangle FHD| = 2|\sphericalangle GFD|$. Avšak $|\sphericalangle GFH| = 2|\sphericalangle GFD|$, neboť $|\widehat{GDH}| = 2|\widehat{GD}|$. Proto také $|\sphericalangle LFH| = 2|\sphericalangle FHL|$ a trojúhelník FHL musí být rovnoramenný. Ale rovnoramenný je také trojúhel-



Obr. 17
Nákres k tvrzení XIV-1.

ník *DHF*, protože $|FD| = |DH| = r$, kde r je poloměr opsané kružnice. Oba trojúhelníky mají společný úhel $\sphericalangle FHD$, jsou tedy podobné a pro úhly proti základně musí platit $|\sphericalangle FLH| = |\sphericalangle DFH|$. Dále mohu psát $|\sphericalangle FDL| = 3|\sphericalangle DFH|$ (vnější úhel trojúhelníku *FDH*), jelikož platí $|\sphericalangle FHD| = 2|\sphericalangle DFH|$. Trojúhelníky *GDF* a *DHF* jsou shodné, odečtu-li úhel $|\sphericalangle GDF| = |\sphericalangle DHF| = 2|\sphericalangle DFH|$, dostanu $|\sphericalangle GDL| = |\sphericalangle DFH|$, takže také $|\sphericalangle GDL| = |\sphericalangle GLD|$, trojúhelník *LDG* je rovnoramenný a $|GL| = |GD|$. Ale úsečka *GD* je stranou pravidelného desetiúhelníku a_{10} a úsečka *FG* stranou šestiúhelníku a_6. Dostávám tedy rovnost $|FL| = |FG| + |GL| = |FG| + |GD| = a_6 + a_{10}$. Jenže $FL \perp KD$, $|\sphericalangle KLD| = |\sphericalangle KFD|$ a úsečka *KD* je společná pro trojúhelníky *KDL* a *KFD*, a proto jsou tyto shodné a platí $|KF| = |KL|$. Získám tak rovnost $|FL| = 2|FK|$, čili $|FK| = \frac{1}{2}(a_6 + a_{10})$, což mělo být dokázáno.

Tvrzení XIV-2

Vepíšeme-li téže sféře dvacetistěn a dvanáctistěn a uvažujeme trojúhelníkovou stěnu prvního a pětiúhelníkovou stěnu druhého, potom kružnice opsané těmto rovinným útvarům jsou shodné.

Toto tvrzení je klíčovou větou celého Dodatku. V dochovaných textech můžeme najít tři různé důkazy, v Dodatku je však uveden pouze jeden, vytvořený Hypsiklem[16]. Zbylé dva pocházejí nejspíše od Aristaia a Apollonia[17], oba jsou neznámé a dochovaly se díky pracím Pappa.

Lemma k důkazu

Vepíšeme-li pravidelný pětiúhelník kružnici, potom součet obsahů čtverců nad stranou a nad diagonálou je roven pětinásobku obsahu čtverce nad poloměrem opsané kružnice.

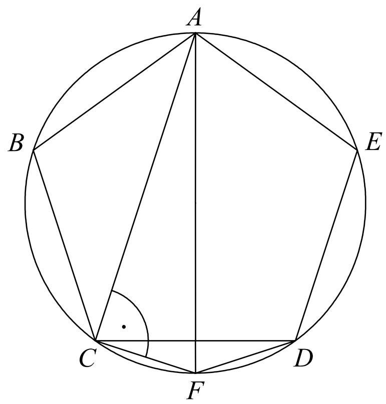
Zatímco tvrzení XIII-10 se týká stran desetiúhelníku a pětiúhelníku vepsaných kružnici, toto lemma popisuje pouze pětiúhelník. Důkaz je založen na vyloučení strany desetiúhelníku ze závěru tvrzení XIII-10 pomocí Pythagorovy

---

16 **Hypsiklés z Alexandrie** (asi 190–120 př. Kr.): řecký matematik, autor tzv. čtrnácté knihy Základů, ve které prezentuje svá zjištění o pravidelném dvanácti- a dvacetistěnu. Upřesňuje také výsledky svých předchůdců – Aristaia a Apollonia.

17 **Apollonios z Pergy** (262–190 př. Kr.): řecký matematik a astronom. Pro svůj obrovský přínos v oblasti kuželoseček označován za „Velkého geometra“. Ve svém díle *Kuželosečky* se velmi podrobně věnuje rovinným řezům kužele a jejich vlastnostem a zavádí také dnes běžně používané názvy – elipsa, parabola a hyperbola. Zmiňován je též v souvislosti s porovnáním pravidelného dvanácti- a dvacetistěnu a zpřesněním Archimédovy aproximace π.

věty. (Situaci zobrazuje Obr. 18.) Označíme-li stranu pravidelného pětiúhelníku $a_5 = |AB|$, úhlopříčku $d_5 = |AC|$, stranu desetiúhelníku $a_{10} = |CF|$, průměr kružnice opsané $d = |AF|$, její poloměr $r = \dfrac{d}{2}$ a stranu šestiúhelníku vepsaného téže kružnici $a_6 = r$. Podle tvrzení XIII-10 potom při zavedeném značení platí $a_5^2 = a_6^2 + a_{10}^2$. Z Pythagorovy věty v trojúhelníku ACF plyne $d^2 = a_{10}^2 + d_5^2$ a po dosazení do předchozího vztahu $a_5^2 = a_6^2 + d^2 - d_5^2$, tj. $a_5^2 + d_5^2 = r^2 + d^2$. Nahradíme-li průměr poloměrem, získáme $a_5^2 + d_5^2 = 5r^2$, což mělo být dokázáno.



Obr. 18
Nákres k lemmatu.

Důkaz tvrzení XIV-2

Konstrukce pravidelného dvacetistěnu je v třinácté knize Základů založena na tzv. *tvořících pětiúhelnících,* nad nimiž jsou vztyčeny dvě čepičky složené z pěti rovnostranných trojúhelníků (viz Obr. 19B). Důkaz druhého tvrzení Dodatku vychází potom z dvojího pohledu na úsečku *KL* (viz Obr. 19B, C, D): Nejprve jako na stranu trojúhelníkové stěny dvacetistěnu *KLH*, jejíž délku lze vztahovat k poloměru opsané kružnice (r_{20} na Obr. 19D). Ale také jako na stranu tvořícího pětiúhelníku *KLMNO*, jejíž délku můžeme naopak vztáhnout k průměru opsané sféry (označme jej *d*) a pomocí dalších výpočtů také k poloměru kružnice opsané pětiúhelníkové stěně *ABCDE* pravidelného dvanáctistěnu (r_{12} na obr. Obr. 19E).

Označíme-li hranu dvacetistěnu $e_{20} = |KL|$ (viz Obr. 19B, D), potom ze závěru dvanáctého tvrzení třinácté knihy dle (22) platí $e_{20}^2 = 3r_{20}^2$, nebo též

$$5e_{20}^2 = 5 \cdot 3r_{20}^2 . \tag{25}$$

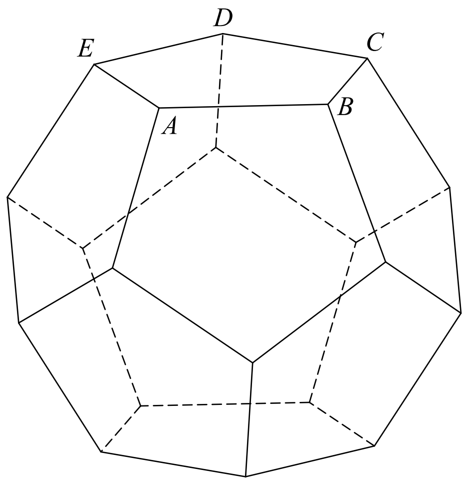
Nyní vezměme úsečku *KL* jako stranu tvořícího pětiúhelníku *KLMNO* ve dvacetistěnu (viz Obr. 19C). Označme $a_5 = |LM| = |KL|$ stranu tohoto pětiúhelníku, $\tilde{r} = |MS|$ poloměr kružnice mu opsané a $a_{10} = |MP|$ stranu pravidelného desetiúhelníku. Potom z tvrzení XIII-10 plyne $a_5^2 = a_{10}^2 + \tilde{r}^2$, jinak

$$5a_5^2 = 5a_{10}^2 + \tilde{r}^2 . \tag{26}$$

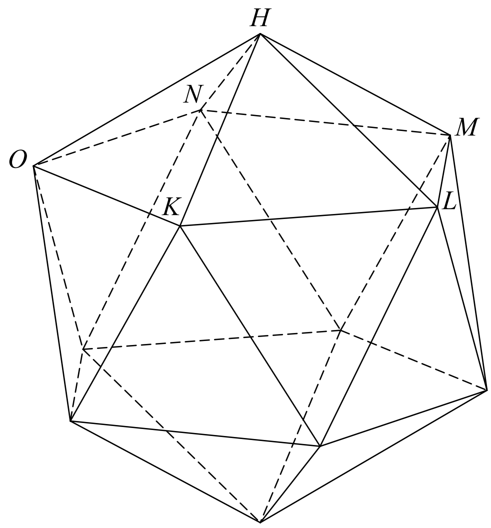
Podle jednoho ze závěrů třinácté knihy platí pro stranu tvořícího pětiúhelníku vztah $5\tilde{r}^2 = d^2$. Naproti tomu sloučením výsledků tvrzení XIII-17 a XIII-8 dostaneme dle (24) vztah $u = e_6$, kde $u = |CE|$ (viz Obr. 19E) značí úhlopříčku pětiúhelníkové stěny dvanáctistěnu a e_6 je délka hrany krychle vepsané téže sféře. Podle jednoho ze vztahů (23) pak získáváme $3u^2 = d^2$, tedy

$$5\tilde{r}^2 = d^2 = 3u^2 . \tag{27}$$

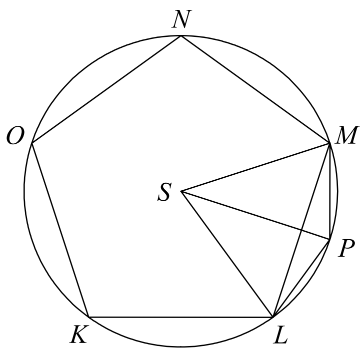
Rozdělíme-li úhlopříčku CE ve zlatém řezu, bude dle XIII-8 větší část shodná se stranou CD. Podobně při rozdělení úsečky MS, coby strany pravidelného šestiúhelníku, ve zlatém řezu bude podle tvrzení XIV-† větší částí stranou desetiúhelníku MP. Dle lemmatu o poměru pak dostáváme $\dfrac{|CE|}{|CD|} = \dfrac{|MS|}{|MP|}$, tj. $\dfrac{u}{e_{12}} = \dfrac{\tilde{r}}{a_{10}}$. Avšak rovnost (27) můžeme přepsat ve tvaru $5\tilde{r}^2 = 3u^2$ a při zacho-



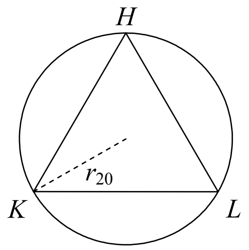
A. Pravidelný dvanáctistěn.



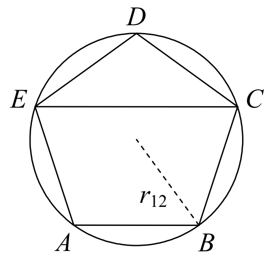
B. Pravidelný dvacetistěn.



C. Tvořící pětiúhelník pravidelného dvacetistěnu.



D. Kružnice opsaná trojúhelníku – stěně dvacetistěnu.



E. Kružnice opsaná pětiúhelníku – stěně dvanáctistěnu.

Obr. 19
Nákres k tvrzení XIV-2.

vání poměrů získáme stejný vztah mezi a_{10} a e_{12}:

(28) $$5a_{10}^2 = 3e_{12}^2.$$

Dosazením vztahů (27) a (28) do rovnosti (26) dostaneme $5a_5^2 = 3\left(e_{12}^2 + u^2\right)$. Podle lemmatu k důkazu víme, že $e_{12}^2 + u^2 = 5r_{12}^2$, a tudíž platí $5a_5^2 = 3\cdot 5r_{12}^2$, tj.

(29) $$5e_{20}^2 = 3\cdot 5r_{12}^2.$$

Porovnání vztahů (25) a (29) potom ukáže $r_{12} = r_{20}$, což mělo být dokázáno.

Následující tvrzení 3–5 jsou pouze lemmaty k důkazu XIV-6. Popisují některé mezikroky pro výpočet povrchu pravidelného dvanácti- a dvacetistěnu. Jejich autorem je nejspíše Hypsiklés.

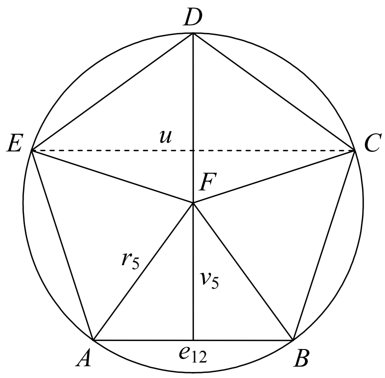
Tvrzení XIV-6

Poměr povrchů pravidelného dvanáctistěnu a dvacetistěnu vepsaných téže sféře je stejný jako poměr délek hran krychle a pravidelného dvacetistěnu vepsaných téže sféře.

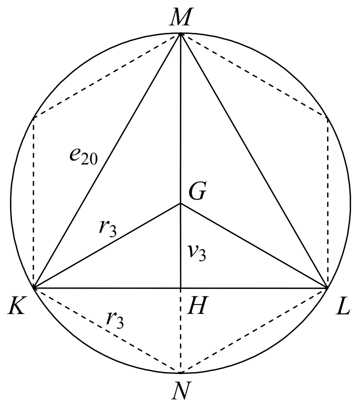
Text obsahuje dva důkazy, první pochází zřejmě od Hypsikla, autorem druhého je nejspíše Apollonios. Oba původní důkazy vycházejí z druhého tvrzení Dodatku a užívají též některé závěry třinácté knihy Základů, především tvrzení XIII-17 a XIII-9. Zbylé výpočty jsou postaveny na celočíselném porovnávání geometrických veličin, včetně použití tvrzení XIV-1. Předkládám vlastní důkaz založený na zmíněných tvrzeních.

Povrchy dvanáctistěnu a dvacetistěnu označím po řadě S_{12}, S_{20}, jejich hrany e_{12}, e_{20} a hranu krychle e_6. Dále zavedu označení S_5 pro obsah pětiúhelníkové stěny dvanáctistěnu a S_3 pro obsah trojúhelníkové stěny dvacetistěnu. Závěrem tvrzení bude potom vztah $\dfrac{S_{12}}{S_{20}} = \dfrac{e_6}{e_{20}}$. Úpravou levé strany rovnosti se budu chtít dostat k výrazu ekvivalentnímu s pravou stranou. Povrchy těles nahradím příslušným počtem obsahů stěn: $S_{12} = 12S_5$ a $S_{20} = 20S_3$, tedy $\dfrac{S_{12}}{S_{20}} = \dfrac{3S_5}{5S_3}$. Když spojím v obou útvarech (představujících stěny těles) vrcholy se středem opsané kružnice, rozdělí je tyto úsečky na shodné trojúhelníky (viz Obr. 20A, B). Stěna *ABCDE* se bude skládat z pěti trojúhelníků shodných s *ABF* (viz Obr. 20A) a stěna *KLM* ze třech trojúhelníků shodných s *KLG* (viz Obr. 20B). Označím výšky těchto trojúhelníků po řadě v_5, v_3 (viz Obr. 20A, B), a potom mohu psát

(30) $$\frac{S_{12}}{S_{20}} = \frac{3S_5}{5S_3} = \frac{3\cdot 5\cdot \dfrac{e_{12}v_5}{2}}{5\cdot 3\cdot \dfrac{e_{20}v_3}{2}} = \frac{e_{12}v_5}{e_{20}v_3}.$$



A. Pětiúhelníková stěna pravidelného dvanáctistěnu.



B. Trojúhelníková stěna pravidelného dvacetistěnu.

Obr. 20
Nákres k tvrzení XIV-6.

Velikost výšky v_3 lze snadno určit, doplním-li trojúhelník *KLM* na šestiúhelník (na Obr. 20B vyznačen čárkovaně). Tento se skládá ze šesti rovnostranných trojúhelníků shodných s *KNG*. Tedy $|GN| = |KG| = r_3$, kde r_3 značí poloměr kružnice opsané trojúhelníku *KLM*. Potom $v_3 = |GH| = \frac{|GN|}{2} = \frac{r_3}{2}$. Na druhou stranu výšku v_5 vyjádřím jednoduše podle tvrzení XIV-1: $v_5 = \frac{r_5 + a_{10}}{2}$, kde r_5 je poloměr kružnice opsané pětiúhelníku *ABCDE* a a_{10} je strana desetiúhelníku této kružnici vepsaného. Dle tvrzení XIV-2 vím, že poloměry kružnic opsaných stěnám obou těles jsou stejné, zavedu tedy $r = r_5 = r_3$. Dosazením získaných výrazů do vztahu (30) dostanu

$$\frac{S_{12}}{S_{20}} = \frac{e_{12}\frac{r + a_{10}}{2}}{e_{20}\frac{r}{2}} = \frac{e_{12}}{e_{20}} \cdot \frac{r + a_{10}}{r}. \tag{31}$$

Představím-li si pod r stranu pravidelného šestiúhelníku, zjistím z tvrzení XIII-9, že délky $r + a_{10}$ a r jsou ve zlatém poměru. Totéž ovšem mohu podle tvrzení XIII-8 říci o úhlopříčce a straně pravidelného pětiúhelníku. Při zavedeném značení tedy díky lemmatu o poměru mohu psát $\frac{u}{e_{12}} = \frac{r + a_{10}}{r}$. Vztah (24) říká, že $u = e_6$, předchozí rovnost tudíž upravím na $\frac{e_6}{e_{12}} = \frac{r + a_{10}}{r}$, dosadím do vztahu (31) a získám

(32) $$\frac{S_{12}}{S_{20}} = \frac{e_{12}}{e_{20}} \cdot \frac{e_6}{e_{12}} = \frac{e_6}{e_{20}},$$

což mělo být dokázáno.

Součástí druhého důkazu šestého tvrzení je také následující vzorec pro výpočet obsahu pravidelného pětiúhelníku; při zavedeném značení platí

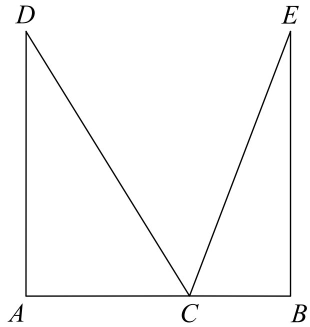
(33) $$S_5 = \frac{5}{6} u \cdot \frac{3}{4} d,$$

kde $d = 2r$ vyjadřuje průměr kružnice pětiúhelníku opsané. Tento vztah nemá sice nic společného se zlatým řezem, ale pozdějšími autory byl použit při vlastním výpočtu obsahu pětiúhelníku [3].

Tvrzení XIV-7

Vezměme libovolnou úsečku rozdělenou ve zlatém řezu. Označíme-li l_1 takovou úsečku, že obsah čtverce nad ní je roven součtu obsahů čtverce nad celou původní úsečkou a čtverce nad její větší částí, a l_2 takovou úsečku, že obsah čtverce nad ní je roven součtu obsahů čtverce nad celou původní úsečkou a čtverce nad její menší částí, potom poměr délek úseček l_1 a l_2 je roven poměru délek hran krychle a pravidelného dvacetistěnu vepsaných téže kulové ploše.

Složitě zapsané tvrzení mohu zjednodušit následovně: Nechť je dána úsečka AB, rozdělená bodem C ve zlatém řezu. Sestrojím pravoúhlé trojúhelníky ACD a CBE s pravými úhly při vrcholech A, B tak, aby pro délky odvěsen platilo $|AD| = |BE| = |AB|$ (viz Obr. 21). Dle Pythagorovy věty potom platí v trojúhelníku ACD $|CD|^2 = |AD|^2 + |AC|^2$ a v trojúhelníku BCE $|CE|^2 = |BE|^2 + |BC|^2$. Úsečky CD a CE tedy splňují po řadě kritéria pro úsečky l_1 a l_2 z textu sedmého tvrzení. Označím-li hranu krychle e_6 a hranu dvacetistěnu e_{20}, závěrem tvrzení bude vztah $\frac{e_6}{e_{20}} = \frac{l_1}{l_2}$.



Obr. 21
Nákres k tvrzení XIV-7.

Důkaz spočívá opět v tvrzení XIV-2 a některých závěrech třinácté knihy. Při zavedeném značení mohu závěr přepsat také v ekvivalentním tvaru

(34) $$\frac{e_6^2}{e_{20}^2} = \frac{l_1^2}{l_2^2},$$

kterýžto lze snadněji upravovat. Vztah (24) tvrdí, že $e_6 = u$, kde u označuje úhlopříčku pětiúhelníkové stěny dvanáctistěnu vepsaného téže sféře. Ale vztah (22) zároveň říká, že $e_{20}^2 = 3r^2$, kde r značí poloměr kružnice opsané trojúhelníkové stěně dvacetistěnu. Levou stranu vztahu (34) potom lze psát v rovnosti

(35) $$\frac{e_6^2}{e_{20}^2} = \frac{u^2}{3r^2}.$$

Úhlopříčka u pětiúhelníku je ve zlatém poměru s jeho stranou a_5, stejně jako strana pravidelného šestiúhelníku $a_6 = r$ se stranou desetiúhelníku a_{10} vepsaného téže kružnici. Podle lemmatu o poměru platí $\dfrac{u}{a_5} = \dfrac{a_6}{a_{10}}$, tedy $u = \dfrac{a_6}{a_{10}} \cdot a_5$. Nahradím-li ve vztahu (35) r za a_6 a dosadím za u, dostanu

(36) $$\frac{e_6^2}{e_{20}^2} = \frac{a_5^2}{3a_6^2} \cdot \frac{a_6^2}{a_{10}^2} = \frac{a_5^2}{3a_{10}^2}.$$

Rozdělím-li úsečku a_6 ve zlatém řezu, bude podle tvrzení XIV-† větší částí a_{10}, tudíž z tvrzení XIII-4 plyne vztah $3a_{10}^2 = a_6^2 + m^2$, kde m značí délku menší části úsečky a_6 při zmíněném dělení. Dle tvrzení XIII-10 platí též $a_5^2 = a_6^2 + a_{10}^2$. Dosazením obou výrazů do rovnosti (36) získám požadovaný vztah

(37) $$\frac{e_6^2}{e_{20}^2} = \frac{a_6^2 + a_{10}^2}{a_6^2 + m^2} = \frac{l_1^2}{l_2^2}.$$

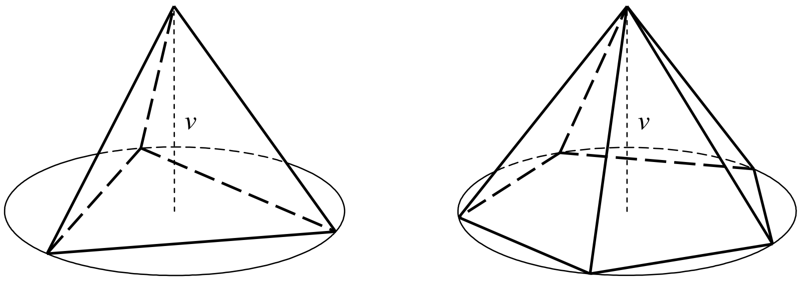
Vrátím se ještě k Obr. 21 – úsečku AB lze zvolit například tak, že $|AB| = a_6$. Pro délky jejích částí vzniklých při dělení bodem C ve zlatém řezu bude potom platit $|AC| = a_{10}$ a $|BC| = m$.

Tvrzení XIV-8'

Vepíšeme-li pravidelný dvanáctistěn a dvacetistěn téže kulové ploše, bude poměr objemů těchto těles stejný jako poměr jejich povrchů.

Hypsiklés uvádí, že toto tvrzení dokázal Apollonios a vzápětí naznačuje stejný důkaz, který je uveden v textu Dodatku. Avšak tento následuje pouze v několika málo větách hned za tvrzením druhým, které zřejmě jako první odvodil Aristaios. Lze si jen těžko představit, že by o tvrzení XIV-8' pojednával samostatný spis. Pravděpodobně jej tedy dokázal již Aristaios spolu s tvrzením XIV-2, ze kterého tvrzení XIV-8' přímo vyplývá [3].

Jestliže jsou kružnice opsané pětiúhelníkové stěně dvanáctistěnu a trojúhelníkové stěně dvacetistěnu shodné, potom jehlany, jejichž vrcholem je střed opsané sféry a podstavu tvoří stěna tělesa (viz Obr. 22), musejí mít v obou mnohostěnech stejnou výšku (jsou jim opsány stejné kuželové plochy). Tudíž



Obr. 22
Jehlany, z nichž jsou utvořeny pravidelný dvaceti- a dvanáctistěn.

objemy těchto jehlanů, které dohromady tvoří příslušné těleso, musí být ve stejném poměru jako obsah jejich podstav. A proto, označím-li objemy těles po řadě V_{12}, V_{20}, jejich povrchy S_{12}, S_{20}, obsahy jejich stěn S_5 a S_3 a výšku obou popsaných jehlanů v, mohu psát

$$\frac{V_{12}}{V_{20}} = \frac{12 \cdot S_5 \frac{v}{3}}{20 \cdot S_3 \frac{v}{3}} = \frac{12 S_5}{20 S_3} = \frac{S_{12}}{S_{20}}. \tag{38}$$

Tvrzení XIV-8

Vepíšeme-li krychli, pravidelný dvanáctistěn a dvacetistěn téže kulové ploše, bude poměr délek hran krychle a dvacetistěnu stejný jako poměr objemů dvanáctistěnu a dvacetistěnu.

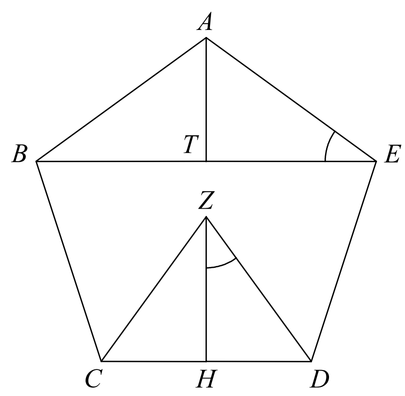
Důkaz spočívá pouze v kombinaci tvrzení XIV-6 a XIV-8'.

Jak jsem již napsal v úvodu této části, datace a původ Dodatku k Eukleidovým Základům jsou velmi nejasné. Většina textu pochází od Hypsikla, ten se však odkazuje na práce Aristaia a Apollonia. Podle dostupných pramenů lze předpokládat vývoj čtrnácté knihy v následujícím pořadí: Nejstarší jsou patrně Aristaiovy důkazy vět XIV-2 a XIV-8'. Původní verze Apolloniových důkazů šestého a sedmého tvrzení byly později upraveny Hypsiklovým otcem. Další opravu provedl sám Apollonios a zřejmě podal také nový důkaz druhého tvrzení. Jako jediný se však v textu dochoval důkaz Hypsiklův. Ten předvedl rovněž tvrzení 3–5 a použil je jako lemmata k důkazům vět XIV-1 a XIV-6 [3].

3.2 Herón

Herón z Alexandrie (asi 10–75 po Kr.) se narodil a působil zřejmě v egyptské Alexandrii. Vzhledem k obvyklosti jména Herón v té době činí historikům dodnes problém určit, které z objevů patří právě jemu a které náleží některému jinému matematikovi téhož jména. Jeho přínos matematice je směsí teoretických a početněpraktických prací, jejichž některé části se jeví jako úpravy starších poznatků, zejména z babylonského období [3]. V souvislosti se zlatým řezem bych uvedl zvláště Herónovu aproximaci obsahu pravidelného pětiúhelníku a desetiúhelníku a také dodnes nejčastěji užívanou konstrukci dělení dané úsečky ve středním a krajním poměru.

V první knize svého díla *Metrika* uvádí Herón postupy pro výpočet obsahu pravidelných mnohoúhelníků o 3–12 stranách, povrchu kužele, válce, hranolů, jehlanů a kulové plochy. Zde také prezentuje vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku pouze pomocí délek jeho stran, dnes známý jako Herónův. Ve druhé knize téhož díla se pak věnuje výpočtům objemů různých těles – koule, kužele, válce, hranolů, jehlanů apod. [5].



Obr. 23
Nákres k Herónově aproximaci obsahu pravidelného pětiúhelníku.

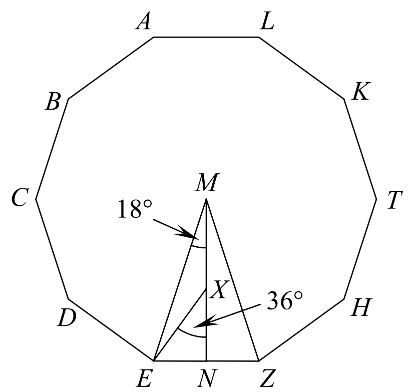
Součástí je i podrobná analýza a numerická aproximace obsahu pravidelného pětiúhelníku o straně délky 10 jednotek. K nalezení obsahu pětiúhelníku $ABCDE$ se středem Z (viz Obr. 23) stačí nejprve určit obsah trojúhelníku CDZ a násobit pěti. Protože je dáno $|CD| = 10$, je nutné zjistit pouze velikost výšky ZH. Středový úhel pětiúhelníku je 72°, takže pravoúhlý trojúhelník CZH má při vrcholu Z úhel 36°. V tomto tkví důvtip Herónova jednoduchého důkazu: Prokáže, že nejen polovina středového úhlu je rovna 36°, ale také úhel BEA mezi stranou pětiúhelníku AE a jeho úhlopříčkou BE (oba vyznačeny na Obr. 23). Jelikož podle XIII-8 jsou délky úseček BE a AE ve zlatém poměru, dostáváme dle tvrzení XIII-1 vztah $S_{AE+TE} = 5S_{TE}$, v trojúhelníku CZH potom

$$S_{CZ+ZH} = 5S_{ZH}\,. \tag{39}$$

Nyní Herón přistupuje k numerickému výpočtu a aproximacím. Zvolíme-li pro účely poměru $|ZH| = 4$, potom $5|ZH|^2 = 80$, ale tato hodnota není dokonalým čtvercem, takže 80 přiblížíme pomocí 81. Ze vztahu (39) tedy snadno získáme $|CZ| + |ZH| \approx 9$, tj. $|CZ| \approx 5$. Délky úseček CZ, ZH jsou tudíž v přibližném poměru $\frac{5}{4}$. A jelikož je trojúhelník CHZ pravoúhlý, jedná se o trojúhelník se stranami, jejichž délky jsou v poměru 3 : 4 : 5, a délky úseček ZH, CH jsou tedy v přibližném poměru $\frac{4}{3}$. Dále pak můžeme obsah trojúhelníku CHZ aproximovat výrazem $\frac{1}{2}\cdot|CD|\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{|CD|}{2}\right) = \frac{1}{3}|CD|^2$ a poměr obsahu pětiúhelníku a čtverce nad jeho stranou je tedy přibližně $\frac{5}{3}$.

Připomeňme, že tento poměr koresponduje s hodnotami nalezenými na hliněných destičkách z období starého Babylonu. Tehdejší výpočty, o nichž toho mnoho nevíme, však na rozdíl od Herónova postupu neměly žádnou spojitost se zlatým řezem. Závěrem ještě Herón poznamenal, že nalezneme-li čtverec (druhou mocninu), který bude blíže k pětinásobku jiného čtverce, můžeme určit obsah pětiúhelníku přesněji. Ve svém díle *Geometrie* potom bez dalšího komentáře uvádí, že poměr obsahu pětiúhelníku a čtverce nad jeho stranou lze přiblížit též zlomkem $\frac{12}{7}$. Tento aplikuje na pětiúhelník o straně délky 35.

V Metrice dále Herón uvádí také postup výpočtu obsahu pravidelného desetiúhelníku. Používá v něm poměry získané v případě pětiúhelníku, i když se na ně přímo neodkazuje. Nechť je tedy dán pravidelný desetiúhelník *ABCDEZHTKL* se středem *M* (viz Obr. 24). Je-li *N* patou kolmice z bodu *M* na stranu *EZ*, potom $|\sphericalangle EMN| = 18°$. Umístěme nyní bod *X* na úsečku *MN* tak, aby platilo též $|\sphericalangle MEX| = 18°$. Pak $|\sphericalangle NXE| = 36°$ a v trojúhelníku *ENX* získáme stejné úhly jako prve v pětiúhelníku. Takže $\frac{|EX|}{|NX|} \approx \frac{5}{4}$ a $\frac{|EX|}{|EN|} \approx \frac{5}{3}$.

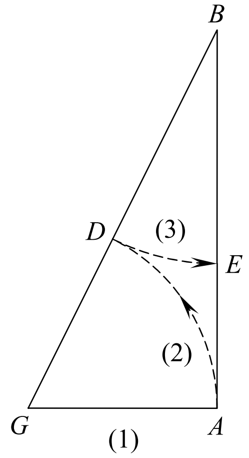


Obr. 24
Nákres k Herónově aproximaci obsahu pravidelného desetiúhelníku.

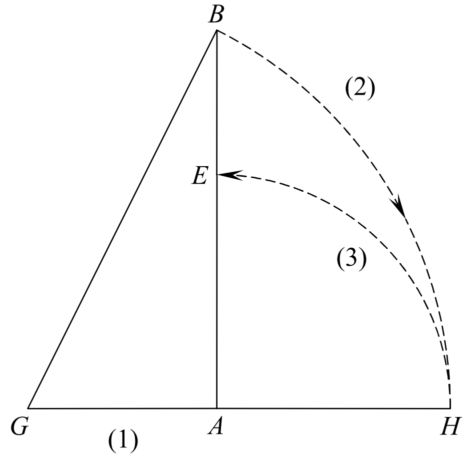
Ale trojúhelník *EXM* je rovnoramenný, tedy $|MX| = |EX|$, můžeme psát $\frac{|MN|}{|EZ|} = \frac{|MX| + |XN|}{2 \cdot |EN|} \approx \frac{5+4}{6} = \frac{3}{2}$. Další postup vede k aproximaci obsahu trojúhelníku *EZM* výrazem $\frac{1}{2} \cdot |EZ| \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot |EZ|\right) = \frac{3}{4}|EZ|^2$. Tedy poměr obsahu celého desetiúhelníku a čtverce nad jeho stranou lze přibližně vyjádřit zlomkem $\frac{15}{2}$.

Dalším Herónovým přínosem k teorii zlatého řezu je jeho obměna konstrukce uvedené v tvrzení II-11 Základů. Dochovala se díky arabskému matematikovi *al-Najrízímu* a dodnes se užívá nejčastěji. Spočívá v zakreslení úsečky *GA*, kde $|GA| = \frac{1}{2}|AB|$, kolmo na danou úsečku *AB*, pomocného bodu *D* na úsečce *BG*, že $|GD| = |GA|$. Výsledný dělící bod *E* vyneseme, aby $|BE| = |BD|$. Situace je zakreslena na Obr. 25A, čárkované šipky naznačují kroky, kterými byly jednotlivé body získány. V části B obrázku můžeme porovnat Herónovu konstrukci s postupem dle obsahové definice zlatého řezu uvedené ve druhé knize Základů, znázorněném ve stejném formátu.

Důkaz, že bod *E* skutečně dělí úsečku *AB* ve středním a krajním poměru, podává Herón následovně: $S_{BG} = S_{GD+DB} = S_{GD} + S_{DB} + 2R_{GD,DB}$, jak bylo známo dle jednoho tvrzení druhé knihy Základů. Jiné vyjádření pro S_{BG} dostaneme z Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku *GAB*: $S_{BG} = S_{AG} + S_{AB}$. S využi-



A. Herónova konstrukce.



B. Konstrukce dle tvrzení II-11.

Obr. 25
Nákres konstrukce zlatého řezu dané úsečky.

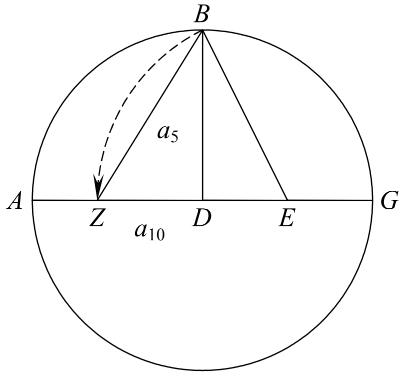
tím rovností $|GD| = |AG|$, $|DB| = |BE|$ získáme $S_{AG} + S_{AB} = S_{AG} + R_{2AG,BE} + S_{BE}$. A protože $|AB| = 2|GA|$, platí $S_{AB} = R_{AB,AE} + S_{BE}$. Avšak pro čtverec nad úsečkou AB můžeme též psát $S_{AB} = R_{AB,AE} + R_{AB,BE}$, a tedy $S_{BE} = R_{AB,AE}$, což přesně vyjadřuje tvrzení II-11.

Ve druhé knize Metriky se Herón pokouší najít objemy pravidelného dvanácti- a dvacetistěnu o hraně délky 10 jednotek. V obou případech k výsledku dochází pomocí objemu dílčích jehlanů, jejichž podstavou je stěna tělesa a vrchol je situován do středu opsané sféry (viz Obr. 22). Celkový objem dostává, vynásobí-li jej příslušným počtem stěn. K tomuto je třeba znát poměr výšky jehlanu a hrany tělesa. Bez sebemenšího vysvětlení uvádí, že poměr hrany ku výšce příslušného jehlanu je $\frac{123}{93}$ ve dvacetistěnu a $\frac{9}{8}$ ve dvanáctistěnu [3].

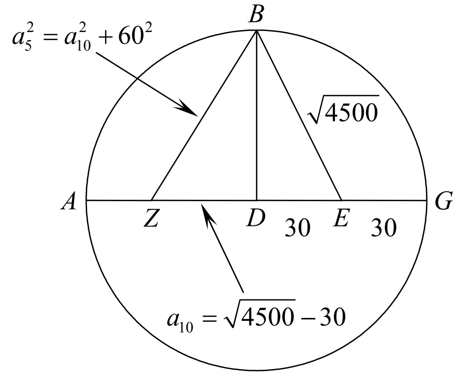
3.3 Ptolemaios a Pappos

Klaudios Ptolemaios (asi 85–165 po Kr.) byl jedním z nejvýznamnějších astronomů a geografů své doby. Předložil geocentrickou teorii uspořádání vesmíru, která převládla v evropském a arabském světě na více než 1400 let. O jeho životě toho mnoho nevíme, jedinou skutečně zaznamenanou informací, jsou zápisy o jeho pozorováních v Alexandrii v letech 127–141 po Kr. Jeho práce *Geografie* obsahovala mimo jiné atlas tehdy známého světa, který zahrnoval 180° zeměpisné délky od Kanárských ostrovů po Čínu a 80° zeměpisné šířky od severní točny po Indii a hluboko do afrického kontinentu. Údajně barevné mapy se bohužel nedochovaly, avšak Ptolemaiovy topografické záznamy posloužily v pozdějších dobách k jejich rekonstrukci.

Jeho matematické práce se zakládaly převážně na diskusích a argumentacích. Nejznámějším dílem zůstává *Almagest*[18], skládající se ze třinácti knih, která se stala nejdůležitějším zdrojem informací o starořecké astronomii. V desáté kapitole její první knihy přináší Ptolemaios tabulku tětiv, která se může srovnávat s moderními trigonometrickými tabulkami. Na rozdíl od dnešních trigonometrických funkcí byla tětiva odpovídající oblouku θ – značena jako chd(θ) – závislá na průměru kružnice, který byl v Ptolemaiově práci rozdělen na 120 částí. Z hlediska souvislosti se zlatým řezem jsou pro nás zajímavé zejména výpočty délek tětiv se středovými úhly 36° a 72°, které již Ptolemaios znal jako strany pravidelného deseti- a pětiúhelníku [3].



A. Ptolemaiova konstrukce



B. Výpočet délek tětiv

Obr. 26
Nákres Ptolemaiovy konstrukce a výpočet délek tětiv pro úhly 36° a 72°.

Podle konstrukce znázorněné na Obr. 26A zvolme bod E v polovině poloměru DG. Dále sestrojme bod Z tak, aby $|EZ| = |EB|$. Tento postup je ve skutečnosti konstrukcí podle jedenáctého tvrzení druhé knihy Základů obrácenou tak, že bod Z na Obr. 26A odpovídá bodu F na Obr. 4 (k tvrzení II-11). Ptolemaiova konstrukce neobsahuje bod odpovídající bodu H, protože není poloměr DG dělen ve zlatém řezu, kdežto rozšiřován do bodu Z tak, aby úsečka ZG byla bodem D dělena ve zlatém řezu.

Označíme-li stranu pětiúhelníku vepsaného dané kružnici a_5, stranu desetiúhelníku a_{10} a stranu šestiúhelníku $a_6 = r$ (kde r značí poloměr kružnice), můžeme důkaz konstrukce tětiv naznačit následovně: Dle tvrzení XIII-9 víme, že úsečka délky $a_6 + a_{10}$ je dělena ve středním a krajním poměru. Z předpokladů, že úsečka ZG je dělena bodem D ve zlatém řezu a $|DG| = a_6$, Ptolemaios odvo-

[18] Původní název Ptolemaiovy práce byl *Mathématiké syntaxis* (Matematický spis). Později byla uváděna jako *Hé megalé syntaxis* (Velký spis). Do arabštiny byla přeložena pod titulem *al-kitabu-l-mijisti* (Velká kniha) a arabský název byl převzat do latiny jako *Almagest.*

zuje, že $|ZD| = a_{10}$. Nepoužívá však přímo tvrzení XIII-9, ale opačnou implikaci. Protože svůj důkaz dále nekomentuje, mohl se domnívat, že jeho postup je ze třináctého tvrzení zřejmý [3]. Dále pomocí tvrzení XIII-10 můžeme získat rovnost $a_5^2 = a_6^2 + a_{10}^2 = S_{BD} + S_{ZD}$. Z Pythagorovy věty v trojúhelníku ZDB potom přímo plyne $a_5 = |BZ|$.

Při výpočtu délek tětiv a_5 a a_{10} Ptolemaios využívá pouze vlastností úseček a Pythagorovy věty, jak je zakresleno v Obr. 26B. Snadno můžeme získat vztah $|EZ|^2 = 60^2 + 30^2 = 4500$, a tedy $|ZE| = |BE| = \sqrt{4500}$, kteréžto hodnota byla aproximována číslem 67;4,55 (zapsáno v šedesátkové soustavě[19]). Z předcházející rovnosti dále dostaneme

(40) $$\operatorname{chd}(36°) = |ZD| = |ZE| - |ZD| = \sqrt{4500} - 30 \approx 37;4,55\,.$$

Vyčíslení této hodnoty $37;4,55 = 37{,}0819\overline{4}$ můžeme porovnat s přesnou velikostí strany desetiúhelníku vepsaného kružnici o poloměru $r = 60$:

(41) $$a_{10} = \operatorname{chd}(36°) = 2(60 \cdot \sin 18°) \doteq 37{,}08203932499\,.$$

Použitím získané hodnoty a pomocí Pythagorovy věty v trojúhelníku *ZDB* se Ptolemaios dopracoval k výsledku $\operatorname{chd}(72°) = |ZB| \approx 70;32,3 = 70{,}5341\overline{6}$, který můžeme srovnat s přesnou velikostí strany pravidelného pětiúhelníku:

(42) $$a_5 = \operatorname{chd}(72°) = 2(60 \cdot \sin 36°) \doteq 70{,}534230275097\,.$$

Všechny získané výsledky byly vlastně pokusem o vyčíslení hodnoty zlatého čísla, tedy onoho poměru mezi velikostmi celé úsečky a její delší části při dělení ve středním a krajním poměru. Otázkou tedy zůstává, zda to byl Ptolemaios, kdo se jako první pokoušel tuto hodnotu získat. Mnoho jeho výsledků vychází z prací *Hipparcha*[20], kterého uvádí i v souvislosti s tabulkou tětiv, bohužel bez větších podrobností o původní Hipparchově tabulce. Ačkoli v literatuře nalezneme také odkazy na práce Archiméda nebo Apollonia, Hipparchos byl zřejmě první, kdo sestavil tabulku tětiv, a stanovil tak obecné řešení trigo-

---

[19] Antičtí matematici zapisovali čísla v šedesátkové soustavě, jednotlivé „číslice" však nijak neoddělovali, jejich řády určovali zřejmě pouze z kontextu. Dodnes bývá problém čísla správně interpretovat. Na místě desetinné čárky se proto v dnešním zápisu vkládá středník a mezi ostatní členy na obou stranách čárka. Zde je navíc pro přehlednost výraz 1,7 vlevo od desetinné čárky nahrazen číslem 67. Uvedené číslo odpovídá tedy součtu $67 + \frac{4}{60} + \frac{55}{3600}$.

[20] **Hipparchos z Rhodu** (asi 190–120 př. Kr.): řecký astronom, geograf a matematik. Pokládán za největšího astronomického pozorovatele své doby. Jako první vyvinul spolehlivý způsob pro předpověď zatmění Slunce, sestavil katalog více než 800 hvězd, objevil precesi zemské osy a nejspíše také vynalezl astroláb. K vývoji trigonometrie výrazně přispěl sestavením tabulky tětiv. Většina jeho výsledků je citována nebo rozvinuta v pracích Ptolemaia.

nometrických problémů. Archimédes ve svém díle *O měření kružnice* v podstatě spočítal délky tětiv pro středové úhly 15°, 30°, … Vypočítal též hodnoty pro úhly 36° a 72°, avšak jiným způsobem než Ptolemaios. Konečně také Herón se zmiňuje o tabulce tětiv, která obsahovala délky pro úhly $\frac{1}{9}\cdot 360°$ a $\frac{1}{11}\cdot 360°$, nebylo by tedy bezdůvodné domnívat se, že byla rovněž známa hodnota pro $\frac{1}{10}\cdot 360° = 36°$. Můžeme proto říci, že zlatý řez byl pro účely trigonometrie vnímán číselně přinejmenším před Herónem a tedy i Ptolemaiem [3].

Posledním z velkých řeckých geometrů, který ve svých pracích využíval vlastností zlatého řezu, byl Pappos z Alexandrie (asi 290–350 po Kr.). O jeho životě toho prameny mnoho neuvádí, jediným spolehlivým vodítkem zůstává jeho pozorování zatmění Slunce v roce 320 po Kr. Narodil se a pravděpodobně celý život strávil v Alexandrii. Jeho největším prací je *Synagoge,* též uváděna pod názvem *Matematická sbírka* nebo pouze *Sbírka.* Dílo se skládá z osmi knih a shrnuje, komentuje a doplňuje matematické práce Pappových předchůdců.

Třetí kniha Matematické sbírky je věnována geometrické konstrukci aritmetického, geometrického a harmonického průměru, ale též sestrojení pravidelných mnohostěnů. Pappova konstrukce dvaceti- a dvanáctistěnu se v některých aspektech liší od Eukleidovy, uvedené ve třinácté knize Základů. Předně obě zmíněná tělesa postavil na stěnu a navíc již při popisu konstrukce velmi snadno dokazuje fundamentální druhé tvrzení Dodatku k Základům (XIV-2).

V páté knize Pappos hovoří o třinácti polopravidelných tělesech objevených Archimédem. Porovnává obsahy útvarů se stejnými obvody a objemy těles se stejnými povrchy. Dokázal, že objem koule je větší než objem jakéhokoli pravidelného tělesa se stejným povrchem. Souvisejícím výsledkem je také tvrzení, že ze dvou pravidelných mnohostěnů o stejném povrchu má větší objem ten, který má více stěn. Na cestě k tomuto tvrzení přináší Pappos několik lemmat, jež přímo využívají vlastností zlatého řezu. Některá z nich jsou pouze přepisem tvrzení Dodatku; dokázána jsou buď stejně, nebo jednodušeji vzhledem k Pappovým konstrukcím pravidelných mnohostěnů.

4. Ostatní světy

Také v mimoevropských civilizacích matematici narazili na problém zlatého řezu. Jedná se hlavně o arabské učence, kteří byli dozajista ovlivněni objevy antických kolegů, ale přinášejí i nové přístupy. Také indičtí matematici odhalili tajemství zlatého řezu při svých trigonometrických výpočtech v období mezi 12. a 17. století. V následujících kapitolách stručně shrnuji přínosy některých mimoevropských prací. Jejich autoři však zčásti pouze prezentují poznatky uvedené v cizích a starších zdrojích.

4.1 Arabský svět

Mnoho z asi 200 prací sepsaných převážně v 9. a 10. století v oblasti Blízkého a Středního Východu je bohužel ztraceno. Přestože se arabští matematici zabývali převážně algebraickými úlohami, nalezneme také problémy trigonometrické i čistě geometrické. Všechny úlohy i jejich řešení byly zapisovány slovně a nebyla v nich používána záporná čísla.

Al-Chwárizmí[21]

Obr. 27
Stránka z al-Chwárizmího „Knihy o počítání“.

Mezi nejznámější arabské učence patří dozajista *al-Chwárizmí*, který ve své *Stručné knize o počítání pomocí doplňování a vyrovnávání* (arab. *Al-kitáb al-muchtasar fí hisáb al-džabr*[22] *wa-l-muqábala*) jako první přinesl systematické řešení lineárních a kvadratických rovnic. Rovnice se skládaly z hodnot tří typů: jednotka (číslo), kořen (neznámá) a čtverec (druhá mocnina neznámé). Řešily se pomocí operací doplňování (al-džabr) a vyrovnávání (al-muqábala), které převáděly hodnoty téhož druhu z jedné strany rovnice na druhou vždy tak, aby bylo docíleno jednoho ze šesti typů obecně řešitelných rovnic. Dílo bylo velmi praktické, protože v něm byly řešeny problémy každodenního života [5].

Mezi ostatními úlohami al-Chwárizmí přináší také následující:

> *Když někdo řekne: „Rozdělil jsem deset na dvě části, jednu jsem vynásobil deseti a druhou samu sebou a součiny byly stejné,“ potom výpočet je tento: Vynásobíš kořen deseti, tj. deset kořenů. Potom vynásobíš deset bez kořenu samy sebou, tj. sto a čtverec bez dvaceti kořenů; což je rovno deseti kořenům. Převeď toto podle pravidel, která jsem ti výše popsal.*

Označíme-li jednu část x, druhá bude $10-x$, a podle podmínek úlohy platí $10x=(10-x)^2$. Ve tvaru zlomku tato rovnice odpovídá $\dfrac{10}{10-x}=\dfrac{10-x}{x}$, a hle-

---

21 **Muhammad ibn Músá al-Chwárizmí** (asi 780–850): perský matematik, astronom a geograf. Pracoval v Bagdádu pro chalífa al-Mamúna v tzv. *Domě moudrosti,* kde převážně překládal řecké práce do arabštiny. V knize *Al-Chwárizmí o indickém počítání* (dochovala se pouze v latinském překladu *Algoritmi de numero Indorum,* ve kterém mnohé z původního díla chybí) popisuje indickou poziční číselnou soustavu užívající číslic 1–9 a 0; dílo je patrně první, kde se objevuje 0 jako součást zápisu čísla. Z jeho jména (v latinském přepisu *Algoritmi*) vychází pojmenování algoritmů, ale také španělské slovo *guarismo* (číslice).

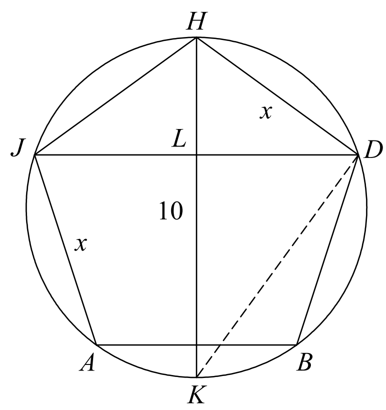
22 Z arabského slova *al-džabr* (doplnění) se vyvinul dnešní název pro algebru.

daná neznámá x je tedy menší částí úsečky délky 10 rozdělené ve zlatém řezu. Postup úprav podle al-Chwárizmího pravidel vede na rovnici $x^2 + 100 = 30x$, jejíž řešení jsou $15 + \sqrt{125}$ a $15 - \sqrt{125}$. Jelikož první hodnota je větší než deset jednotek, kteréžto byly děleny, nevyhovuje zadání.

Úloha přesně odpovídá geometrickému řešení podle tvrzení II-11 Základů, kde $10x$ je obsah obdélníku, jehož strany mají délky celé úsečky a kratší části, a $(10 - x)^2$ odpovídá obsahu čtverce nad větší částí úsečky. Historikové se domnívají, že al-Chwárizmí patrně byl obeznámen se Základy, neboť společně s ním působil v Bagdádě také *al-Hajjáj,* který Eukleidovo dílo přeložil do arabštiny. Nepochybně jimi byl také při své tvorbě ovlivněn, ale zda si byl vědom souvislosti své úlohy se zlatým řezem, zůstává otevřenou otázkou [3].

Abú Kámil[23]

Také islámský matematik *Abú Kamil* ve dvou ze svých prací využil vlastností zlatého řezu. První kniha *O pětiúhelníku a desetiúhelníku* přináší v podobě úloh postupy pro výpočet délky strany pravidelného pěti- nebo desetiúhelníku opsaného, resp. vepsaného, kružnici daného průměru, nebo naopak výpočet průměru kružnice opsané, resp. vepsané, pěti- nebo desetiúhelníku dané strany. V dalších úlohách se vyskytuje také postup k získání délky strany mnohoúhelníku, je-li dán jeho obsah; k tomuto je používána věta, kterou dokázal patrně *Banu Musa* v polovině 9. století: „Obsah mnohoúhelníku je roven součinu poloviny obvodu a poloviny poloměru mu vepsané kružnice." Na rozdíl od Herónových aproximací jsou všechny výsledky uváděny přesně jako řešení rovnic [3]. Navíc se Abú Kámil ve většině úloh vyhnul použití zlatého řezu, někdy šikovně, někdy na úkor jednoduchosti postupu.



Obr. 28
Nákres k úloze 1 Abú Kámila.

Například v první úloze je požadováno zjistit délku strany pravidelného pětiúhelníku a_5 vepsaného kružnici o průměru $d = 10$. Situace je zakreslena na Obr. 28. Označíme-li neznámou hodnotu $a_5 = x$, z podobnosti trojúhelníků

[23] **Abú Kámil Šudža** (asi 850–930): islámský matematik působící v Egyptě, bývá nazýván „egyptským počtářem". Na rozdíl od ostatních arabských matematiků se specializoval převážně na algebru. Nejznámější dílem je zřejmě *Kniha o algebře,* ve které zkombinoval při řešení rovnic řecké geometrické, al-Chwárizmího praktické a babylonské metody; pracoval s neznámou v mocninách až do osmého stupně.

HLD a *HDK* plyne $\frac{|HL|}{x} = \frac{x}{10}$, tedy $|HL| = \frac{1}{10}x^2$. Z Pythagorovy věty v trojúhelníku *HLD* dále dostáváme postupně

$$
\begin{aligned}
|DL|^2 &= |HD|^2 - |HL|^2 \\
|DL|^2 &= x^2 - \tfrac{1}{100}x^4 \qquad (43) \\
|DL| &= \sqrt{x^2 - \tfrac{1}{100}x^4}.
\end{aligned}
$$

Pro úhlopříčku *JL* potom můžeme odvodit $|JL| = \sqrt{4x^2 - \frac{1}{25}x^4}$. Abú Kámil dále uvádí, že zřejmý je také vztah $|AB||JD| + |AB||AB| = |JD||JD|$, který plyne z Ptolemaiovy věty[24]. Dosadíme-li do této rovnosti předchozí výsledky, získáme postupnými úpravami kvartickou rovnici

$$
\begin{aligned}
x \cdot \sqrt{4x^2 - \tfrac{1}{25}x^4} + x^2 &= 4x^2 - \tfrac{1}{25}x^4 \\
x^2 \cdot \sqrt{4 - \tfrac{1}{25}x^2} + x^2 &= 4x^2 - \tfrac{1}{25}x^4 \\
\sqrt{4 - \tfrac{1}{25}x^2} &= 3 - \tfrac{1}{25}x^2 \qquad (44) \\
4 - \tfrac{1}{25}x^2 &= 9 - \tfrac{6}{25}x^2 + \tfrac{1}{625}x^4 \\
\tfrac{1}{5}x^2 &= 5 + \tfrac{1}{625}x^4 \\
3125x^4 + 5 &= 125x^2,
\end{aligned}
$$

kterou můžeme řešit pro neznámou x^2 jako kvadratickou. Výsledná délka strany potom bude $a_5 = x = \sqrt{62\frac{1}{2} - \sqrt{781\frac{1}{4}}}$.

Vraťme se nyní k úloze, ve které Abú Kámil použil k důkazu správnosti řešení zlatý řez. Sedmnáctý příklad předkládá pravidelný desetiúhelník o obsahu 100 a táže se na délku jeho strany. Situace je znázorněna na Obr. 29. Abú Kamil nejdříve předkládá vztah poloměru *ZM* a strany $|ZW| = x$. Nutno však podotknout, že i na tomto místě je nejdříve na základě zobecnění výsledků některých předchozích úloh bez použití zlatého řezu uvedena rovnost

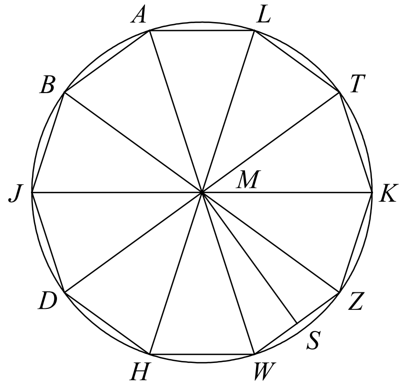
$$|ZM| = \tfrac{1}{2}x + \sqrt{1\tfrac{1}{4}x^2}. \qquad (45)$$

Po tomto výsledku následuje náhle a zcela bez upozornění jiný důkaz užitím vlastností dělení ve středním a krajním poměru. V rámci tohoto důkazu Abú Kámil nejprve uvádí, že přidáme-li k úsečce rozdělené ve zlatém řezu delší

---

[24] **Ptolemaiova věta** říká, že v jakémkoli konvexním tětivovém (vepsaném do kružnice) čtyřúhelníku *KLMN* platí vztah $|KL||MN| + |LM||KN| = |KM||LN|$, tedy součet součinů délek protějších stran je roven součinu délek úhlopříček.

část, potom poměr délek nově vzniklé úsečky a větší části je stejný jako poměr délek původní úsečky a menší části. Označíme-li větší část a, menší část b, můžeme toto zapsat v podobě rovnosti $\frac{2a+b}{a}=\frac{a+b}{b}$. Při zavedeném značení platí dle tvrzení XIII-5 $\frac{2a+b}{a+b}=\frac{a+b}{a}$ a z definice dělení ve středním a krajním poměru také $\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$. Platnost Abú Kámilova lemmatu je tedy zřejmá, i když nelze s určitostí říci, zda k jeho odvození užil právě tvrzení XIII-5. V hebrejském i latinském překladu je sice přímo zmíněn zlatý řez, avšak místo poměrů v nich stojí, že menší částí nové úsečky rozdělené ve středním a krajním poměru je větší část původní úsečky [3].

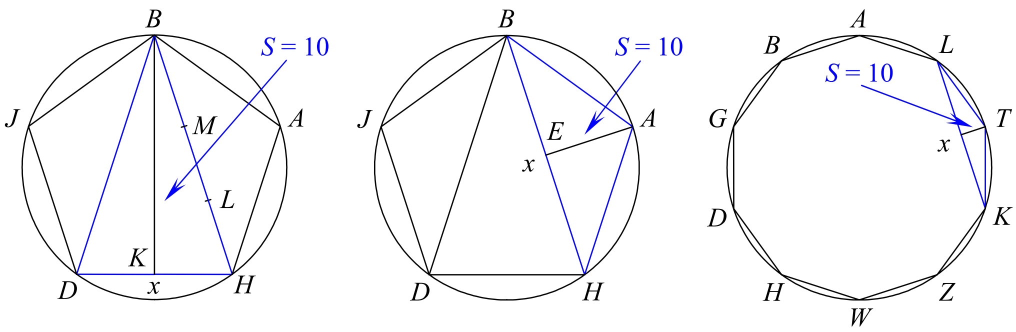


Obr. 29
Nákres k úloze 17 Abú Kámila.

Text pokračuje citací Eukleidova tvrzení XIII-9, které aplikováno na úsečky $|ZM|=r=a_6$ a $ZW=x=a_{10}$ říká, že úsečka z těchto složená je dělena ve zlatém řezu. Dále platí vztah $\left[\frac{x}{2}+\left(|ZM|-x\right)\right]^2=5\left(\frac{x}{2}\right)^2$, který odpovídá tvrzení XIII-3, ale neplyne z devátého tvrzení, které bylo citováno, nýbrž z tvrzení XIV-†. Důvod k tomuto postupu není zcela jasný, zvláště když arabský překlad Základů obsahoval také Dodatek, a tedy i tvrzení XIV-†. Abú Kamil se zřejmě snažil ospravedlnit použití třetího tvrzení odvolávajíc se přímo na tvrzení deváté, a proto také nejspíše sestavil úvodní lemma (modifikaci XIII-5) [3].

Závěrem zapišme v posledním vztahu $5\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{5}{4}x^4$ a po odmocnění obou stran dostaneme $\frac{x}{2}+\left(|ZM|-x\right)=\sqrt{1\frac{1}{4}x^2}$, a tedy rovnost (45). Sedmnáctá úloha je tak vyřešena, neboť nalezením výšky v trojúhelníku ZWM pomocí Pythagorovy věty můžeme vztáhnout obsah desetiúhelníku k délce jeho strany a porovnat s hodnotou 100, danou v zadání.

Můžeme si klást otázku, proč Abú Kámil zápis ve tvaru poměru (dle XIII-9) $\frac{|ZM|+x}{|ZM|}=\frac{|ZM|}{x}$ jednoduše neupravil na $|ZM|^2=|ZM|x+x^2$ a nevyřešil pro $|ZM|$ bera x jako konstantu. Musíme si však uvědomit, že s tímto typem rovnic, obsahujících součin dvou neznámých, arabští matematici neuměli zacházet [3]. Zajímavé by také bylo použít při výpočtu namísto třetího tvrzení první,



A. Úloha 18. **B.** Úloha 19. **C.** Úloha 20.

Obr. 30
Nákresy k úlohám 18–20 Abú Kámila.

dostali bychom pro úsek $|ZM|+x$ rovnost $\left(|ZM|+|ZM|+\frac{x}{2}\right)^2=5\left(|ZM|+x\right)^2$ a po odmocnění křížový vztah, který platí vždy. Zda Abú Kámil tuto cestu před použitím tvrzení XIII-3 vyzkoušel, není jisté.

Abú Kámil užívá zlatého řezu ještě při řešení dalších tří úloh (zakresleny na Obr. 30A, B, C). V osmnáctém příkladu je dán rovnoramenný trojúhelník *DHB* s vnitřními úhly 72° při základně a 36° proti základně (zlatý trojúhelník) a obsahem 10, úkolem je zjistit stranu *DH* pravidelného pětiúhelníku *ABJDH* (viz Obr. 30A). Řešení vychází z rozdělení úhlopříčky *BH* bodem *M* ve zlatém řezu a sestrojení bod *L* jako středu větší části *MH*. Dále je použito tvrzení XIII-3 k získání vztahu $|BL|^2=5\left(\frac{x}{2}\right)^2$, po odmocnění $|BL|=\sqrt{1\tfrac{1}{4}x^2}$, a pro úhlopříčku tedy platí $|BH|=\frac{x}{2}+\sqrt{1\tfrac{1}{4}x^2}$, což je stejné vyjádření pro délku ramene rovnoramenného trojúhelníku, které jsme obdrželi již v sedmnácté úloze. Navíc v obou příkladech má trojúhelník obsah 10, takže další postup je totožný.

V úloze 19 je dán rovnoramenný trojúhelník *ABH* o obsahu 10; vypočítat se má tentokrát délka úhlopříčky *BH*, označme ji *x* (viz Obr. 30B). Abú Kámil cituje nejdříve tvrzení XIII-1 a předkládá rovnost $5\left(\frac{|BH|}{2}\right)^2=1\tfrac{1}{4}x^2$. Odvolává se na vztah $|AH|=\sqrt{1\tfrac{1}{4}x^2}-\tfrac{1}{2}x$, který je vlastně vzorcem pro rozdělení úsečky délky *x* ve zlatém řezu, ačkoli Abú Kámil ani další autoři tuto skutečnost výslovně neuvádějí. Ke vzorci se dopracoval spojením tvrzení XIII-8 (užito také v předchozí úloze) a XIII-1 ve vztahu $\left(|AH|+\frac{x}{2}\right)^2=1\tfrac{1}{4}x^2$ a jeho odmocněním. Můžeme se pozastavit nad opakovaným odkazem na Eukleida místo odvození z již známého vztahu (45). Avšak tímto postupem bychom opět získali rovnici, v níž se objevuje součin dvou neznámých, a tu arabští matematici zřejmě řešit neuměli. Další kroky v úloze 19 jsou patrné: pomocí Pythagorovy věty spočteme výšku *AE* a délku úhlopříčky potom vztáhneme k obsahu trojúhelníku *BAH*, který byl zadán.

V posledním, dvacátém, problému Abú Kámilovy práce je zadán pravidelný desetiúhelník a řečeno, že obsah trojúhelníku *KTL* (viz Obr. 30C) je 10. Úkolem je vypočíst délku úsečky *KL*, tedy strany pravidelného pětiúhelníku. Autor při výpočtu použije zobecněného vztahu z páté úlohy (nalezení průměru d kružnice opsané pětiúhelníku o straně $a_5 = 10$) $d^2 = 2a_5^2 + \sqrt{\frac{4}{5}a_5^4}$. Tento je dále pomocí tvrzení XIII-10 vztáhnut k délkám strany desetiúhelníku *LT* a pětiúhelníku *KL*. Závěrem Abú Kámil získal výšku trojúhelníku *KTL* a pomocí zadaného obsahu odvodil vztah pro délku strany *KL*.

Další Abú Kámilovou prací, ve které se vykytuje zlatý řez, je *Kniha o algebře,* kde podobně jako al-Chwárizmí řeší mimo jiné problémy dělení 10 jednotek na části splňující různé podmínky. Předkládá také následující úlohu 42:

> *Jestliže někdo řekne, že 10 je rozděleno na dvě části a každá z nich je dělená tou druhou, potom součet podílů je odmocnina z pěti…*

Abú Kámil uvádí hned tři různé způsoby, jak problém řešit. V prvním z nich je jedna část označena x a úloha zapsána do rovnice $\frac{10-x}{x} + \frac{x}{10-x} = \sqrt{5}$, která je převedena na kvadratickou s kořeny $5 \pm \sqrt{225 - \sqrt{50000}}$. Druhá metoda substituuje zlomek $\frac{10-x}{x}$ za neznámou x', která pak splňuje vztah $x'\left(\sqrt{5} - x'\right) = 1$. Vypočítáme-li hodnotu x', pro x potom dostáváme rovnici $x^2 + 10x = 100$, tedy části jsou $\sqrt{125} - 5$ a $15 - \sqrt{125}$. Tyto odpovídají dělení ve zlatém řezu. V rámci třetího způsobu řešení Abú Kámil prohlásí zlomek $\frac{10-x}{x}$ za jednotku.

Se zlatým řezem souvisí také úloha 43:

> *Jestliže někdo řekne, že 10 je rozděleno na dvě části a každá z nich je dělená tou druhou, potom součiny každého podílu se sebou samým dávají v součtu 3…*

Příklad je možno zapsat do rovnice $\left(\frac{10-x}{x}\right)^2 + \left(\frac{x}{10-x}\right)^2 = 3$. Autor poznamenal, že součin umocňovaných členů je jedna, tedy na levé straně rovnice dostaneme druhou mocninu jejich součtu přičtením dvou. A problém je tak převeden na úlohu předchozí. Tuto úlohu tedy získáme z úlohy 42 pouhým umocněním obou stran rovnice.

Podívejme se na úlohu 43 ve světle tvrzení XIII-4, které říká, že součet čtverců nad celou úsečkou a kratší částí (při dělení ve středním a krajním poměru) je roven trojnásobku čtverce nad delší částí, algebraicky zapsáno $10^2 + (10-x)^2 = 3x^2$, nebo také $\left(\frac{10}{x}\right)^2 + \left(\frac{10-x}{x}\right)^2 = 3$. Pro převedení této rovnice na vztah určený úlohou 43 stačí využít definice zlatého řezu, tedy rovnosti $\frac{10}{x} = \frac{x}{10-x}$. Musím však podotknout, že se stejně jako v práci al-Chwárizmího jedná pouze o dva z jednačtyřiceti problémů dělení 10 na dvě části. Otázka, zda si Abú Kámil uvědomoval souvislost svých příkladů se zlatým řezem, zůstává tedy otevřená.

Ibn Júnus[25]

Arabský astronom, astrolog a básník *ibn Júnus* v desáté kapitole své *Velké astronomické příručky* (věnované chalífu al-Hakímovi) přináší rozsáhlé a velmi přesné trigonometrické tabulky. Nepracuje však s tětivami jako jeho předchůdci, nýbrž používá indickou funkci *jiva*[26]. Pro tu platily následující vztahy

(46)
$$\begin{aligned} \mathrm{jiva}(\theta) &= \frac{1}{2}\mathrm{chd}(2\theta) \\ \mathrm{jiva}(\theta) &= r \cdot \sin(\theta), \end{aligned}$$

kde chd je funkce délky tětivy zmiňovaná v kapitole 3.3, r značí poloměr kružnice a sin je dnešní funkce sinus.

Ibn Júnus rozdělil kružnici na 360 „stupňů“ a poloměr (stejně jako Ptolemaios) na 60 dílků. Z hlediska této práce jsou zajímavé následující hodnoty:

(47)
$$\begin{aligned} \mathrm{jiva}(30°) &= \frac{a_6}{2} = \frac{r}{2} = 30 \\ \mathrm{jiva}(18°) &= \frac{a_{10}}{2} \\ \mathrm{jiva}(36°) &= \frac{a_5}{2}. \end{aligned}$$

---

[25] **Abú Hasan Alí ibn Júnus** (asi 950–1009): arabský astronom působící v Egyptě pro dynastii Fátimovců. Pracoval pro chalífa al-Azíze, později chalífa al-Hakíma, kterému věnoval svou *Velkou astronomickou příručku.* Tato obsahuje záznamy jeho velmi přesných pozorování. Součástí jsou také tabulky pro přepočet data mezi různými kalendáři a především tabulky trigonometrické. Na vysoké úrovni je v práci zpracována též sférická trigonometrie.

[26] Slovo *jiva* (též *jya*) pochází ze sanskrtu a označuje půltětivu. Do arabštiny bylo v 6. století přepsáno jako *jiba*, evropskými překladateli však bylo zaměněno za *jaib* (v arabštině mají obě slova stejný zápis) s významem „zátoka“. Odtud pak pochází latinské pojmenování funkce *sinus* (v překladu zátoka nebo záhyb).

V textu knihy ibn Júnus cituje tvrzení XIII-9 a říká, že sečtením úseček délek $\text{jiva}(30°)$ a $\text{jiva}(18°)$ vznikne úsečka, která je původními dělena ve zlatém řezu. Také ukazuje, že rozdělíme-li úsečku délky $\text{jiva}(30°)$ ve středním a krajním poměru, bude mít větší úsek délku $\text{jiva}(18°)$, což v podstatě odpovídá tvrzení XIV-†. Pro výpočet zlatého řezu na úsečce délky $\text{jiva}(30°)$ je bez zdůvodnění použit vzorec $\text{jiva}(18°) = \sqrt{30^2 + 15^2} - 15$. Při pozorném nahlédnutí zjistíme, že se jedná o speciální případ vztahu pro zlatý řez úsečky délky x, který odvodil také Abú Kámil v úloze 19 (viz výše): $\sqrt{x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} - \frac{x}{2}$. Hodnota je dále také vyčíslena v šedesátkové soustavě (viz pozn. 19 na str. 42):

$$\text{jiva}(18°) \approx 18;32,27,40,15 = 18,54101967\overline{592}. \tag{48}$$

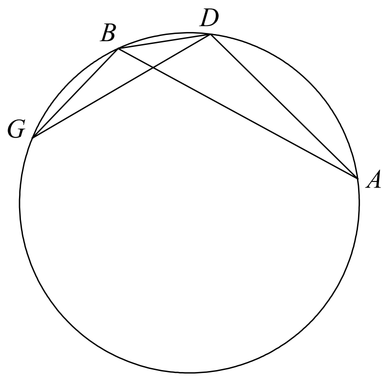
Hodnota $\text{jiva}(36°)$ je získána pomocí tvrzení XIII-10 ze známých hodnot:

$$\text{jiva}(36°) \approx 35;16,1,36,52 = 35,2671151\overline{23456790}. \tag{49}$$

Výsledky (48) a (49) můžeme po vynásobení dvěma srovnat s Ptolemaiovými aproximacemi příp. přesnými hodnotami (41) a (42).

Al-Bírúní[27]

Posledním arabsky píšícím autorem, o kterém se v souvislosti se zlatým řezem zmíním, byl al-Bírúní, všeobecně vzdělaný perský učenec. V první části matematické *Knihy o určování tětiv v kružnici* uvádí dva výsledky týkající se tzv. „zlomené tětivy" a podává několik různých důkazů svých tvrzení.



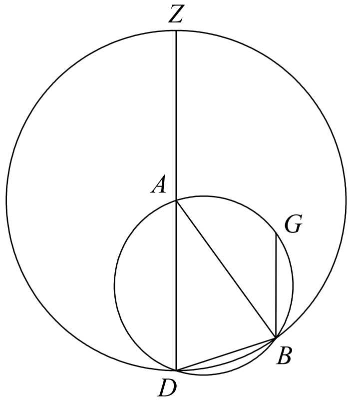
Obr. 31
Nákres k al-Bírúního druhé větě o zlomené tětivě.

Druhá věta o zlomené tětivě říká: Jsou-li A, G dva body kružnice a bod D leží uprostřed oblouku $\overset{\frown}{AG}$ (situace viz Obr. 31), potom pro každý B oblouku $\overset{\frown}{ADG}$ platí rovnost $|AD|^2 = |AB||BG| + |BD|^2$. Al-Bírúní předvádí

[27] **Abú Rajhán Muhammad al-Bírúní** (973–1048): perský astronom, matematik, fyzik, lékař a historik. Byl velmi nadaným žákem, nejen ve vědeckých oblastech, ale také vynikal znalostí několika jazyků. Od devatenácti let vydával odborné spisy a spolupracoval s ibn Sínou (Avicenou). Sepsal mnoho matematických prací, které obsáhly většinu tehdejších znalostí. Studoval metody projekce polokoule do roviny, vytvořil první glóbus. Zpřesnil řecký výpočet zemského poloměru ze 6314 na 6339,6 km (skutečná hodnota je 6378,1 km).

devět různých důkazů tohoto tvrzení, z toho čtyři jsou jeho vlastní. Nejjednodušší z nich využívá Ptolemaiovu větu (viz pozn. 24 na str. 46).

Ve druhé části stejné knihy al-Bírúní přináší to, čemu bychom dnes řekli existenční důkaz skutečnosti, že strana desetiúhelníku je známá, je-li dán poloměr opsané kružnice: Nechť je v kružnici s průměrem *ZAD* dána strana pravidelného desetiúhelníku *DB*. (Situaci zachycuje Obr. 32.) Uvažujme zlatý trojúhelník *DBA* a opišme mu kružnici. Jako přípravu na použití věty o zlomené tětivě sestrojme bod *G*, aby platilo $\left|\widehat{DBG}\right| = \left|\widehat{AD}\right|$. Označíme-li l délku menší kružnice, můžeme psát $\left|\widehat{DB}\right| = \frac{1}{5}l$. A pro oblouky $\widehat{AD}$, $\widehat{AGB}$, které jsou přeťaty stejně dlouhými tětivami *AD* a *AB*, tedy platí $\left|\widehat{AD}\right| = \left|\widehat{AGB}\right| = \frac{2}{5}l$. Dále dostáváme vztahy $\left|\widehat{DBG}\right| = \frac{2}{5}l$ a $\left|\widehat{BG}\right| = \left|\widehat{DB}\right| = \frac{1}{5}l$, takže také $|BG| = |DB|$. Z druhé věty o zlomené tětivě získáme rovnost



Obr. 32
Nákres k al-Bírúního důkazu věty o straně desetiúhelníku.

(50) $$|AD|^2 = |AB||BG| + |BD|^2 = |AD||DB| + |DB|^2 = \left(|AD| + |BD|\right)\cdot|BD|.$$

Al-Bírúní dále říká, že lomená čára *ADB* zakreslena jako úsečka je bodem *D* rozdělena ve středním a krajním poměru; větší částí je úsečka *AD*, jejíž délka je známá, neboť se jedná o poloměr dané kružnice. Menší část – úsečka *BD*, tj. strana desetiúhelníku – je tedy také známá. Po tomto důkazu autor předkládá (avšak bez zdůvodnění), jak délku strany a_{10} pomocí poloměru r vypočítat:

(51) $$a_{10} = \sqrt{\tfrac{5}{4}r^2} - \tfrac{1}{2}r.$$

Poznamenejme, že teoretická část al-Bírúního důkazu týkající se zlatého řezu je vlastně jen přepisem tvrzení XIII-9. Zdá se, že cílem důkazu je více než výpočet snaha ukázat, že stranu desetiúhelníku lze určit pomocí samotné věty o zlomené tětivě [3].

V knize *Canon Masuidius* (pojmenované po indickém panovníkovi) uvádí al-Bírúní např. tabulku souřadnic asi šesti set míst, převážně těch, které přímo znal. Avšak třetí část tohoto díla se týká trigonometrie a určování tětiv. Autor přináší vzorce pro výpočet délek stran pravidelných mnohoúhelníků. Pro stranu pětiúhelníku a_5 udává následující vztah pomocí poloměru r opsané kružnice

(52) $$a_5 = \sqrt{\sqrt{2r\cdot 2r\cdot\tfrac{5}{16}} - \left(\frac{r}{2}\right)^2 + r^2}.$$

Při podrobném pohledu zjistíme, že první člen pod odmocninou je roven výrazu $\sqrt{\frac{5}{4}r^2} - \frac{1}{2}r$, což je vzorec pro výpočet délky strany desetiúhelníku (51). A protože $a_6 = r$, vzorec (52) je algebraickou formou tvrzení XIII-10.

4.2 Indie

Zlatý řez se v indických textech vyskytuje zejména v souvislosti s výpočty trigonometrických funkcí. Připomeňme funkci *jiva*, zmiňovanou výše v práci arabského matematika ibn Június.

Indický matematik Bháskara II. (1114–1185) uvádí ve své geometrické práci bez důkazu vzorec $\text{jiva}(18°) = \frac{\sqrt{5r^2} - r}{4}$. Důkazy tohoto tvrzení přinesli až v 17. století Munisvara (trigonometrický) nebo Jagannatha (geometrický). V dalších pracích se indičtí matematici pokoušeli vyčíslit jednotlivé hodnoty funkce jiva, přičemž používali rozličné velikosti poloměru.

Závěr

Jak ukázaly jednotlivé výskyty ve starověkých textech, zlatý řez se v centru pozornosti objevoval velmi často. Jeho „vznik“ byl spojen s touhou po konstrukci pravidelných mnohoúhelníků, jeho vlastnosti pak posloužily při popisu platónských těles a dalších geometrických útvarů. Touha po konstrukci mnohoúhelníků, resp. mnohostěnů, se postupně přetransformovala v touhu po vyčíslení jejich obsahů a objemů, příp. určení jedné neznámé hodnoty na základě znalosti jiné. Arabští matematikové na zlatý řez narazili možná náhodou při sestavování algebraických úloh, vědomě pak užívali geometrické poznatky shrnuté v Eukleidových Základech. Také indičtí učenci se věnovali výpočtům, ve kterých figuruje zlatý řez.

Mohlo by se zdát, že práce starověkých matematiků vlastnosti zlatého řezu vyčerpala. Ale v souladu s Paccioliho citátem uvedeným v úvodu, jeho vliv je nedozírný a italští středověcí matematikové navázali na řecké a arabské kolegy zpřesňováním a zjednodušováním výpočtů, ale také novými objevy. Zlatý řez byl brzy nelezen i v jiných matematických odvětvích, než je geometrie. A nejen v matematice; vzhledem ke svým nádherným vlastnostem nalezl svou cestu i do umění. Renesanční malíři, včetně slavného da Vinciho, jej využívali k zakreslení (možná domněle) nejdokonalejších proporcí.

Objeven však byl také jako určitý řád přírody, jako přirozené uspořádání. V této souvislosti pronikl do různých filosofických směrů a nabídl svá obrovská křídla také mystice, která už odedávna pracovala s pentagramem. Jeho vliv možná přerostl v určitou megalomanii, kterou se někteří skeptici snažili zastavit vyvracením teorií o jeho využití v umění. Byly přeměřovány renesanční obrazy, aby se prokázalo, zda bylo zlatého řezu skutečně použito. Některé tyto názory se ujaly, jiné byly vyvráceny až na konci minulého století, kdy byly speciálními metodami pod malbou nalezeny vodící čáry dokazující použití „božského poměru“.

V souvislosti s rychlým vývojem fyziky makrosvěta a mikrosvěta byla existence zlatého řezu prokázána také v teorii chaosu či při analýze mozkových vln. Ve velkém se zlatým řezem zabývá také tzv. exaktní estetika.

Zlatý řez je tedy od starověku jistým fenoménem, stále nám dokazuje svůj nesporný vliv, ale také si udržuje mnohá tajemství, která čekají na objevení. Možná v souvislosti s útlumem zájmu o geometrii je v současné době neprávem přehlížen. Domnívám se ovšem, že bychom mu měli věnovat alespoň tolik pozornosti, kolik si zaslouží.

Literatura

[1] Beutelspacher A., Petri B. (1996): *Der Goldene Schnitt.* Spektrum Akademischen Verlag GmbH, Heidelberg-Berlin-Oxford.

[2] Fitzpatrick R. (2005): *Euclid's Elements in Greek,* Austin, Texas, USA. Řecký text: J. L. Heiberg (1883–1916).
`http://farside.ph.utexas.edu/euclid/euclid.pdf`

[3] Herz-Fischler R. (1998): *A Mathematical History of the Golden Number.* Dover Publications, Inc., Mineola, New York, USA.

[4] Joyce D. E. (1996–98): *Euclid's Elements.* Department of Mathematics and Computer Science, Clark University, Worcester, Massachusetts, USA. Upraveno z překladu T. L. Heathe (1908).
`http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html`

[5] O'Connor J. J., Robertson E. F.: *The MacTutor History of Mathematics archive.* School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, St Andrews, Skotsko, Velká Británie.
`http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/index.html`

[6] Walser, H. (2001): *The Golden Section.* The Mathematical Association of America, Inc., USA. Z německého originálu *Der Goldene Schnitt* přeložil Peter Hilton.

[7] Wikipedia, otevřená mnohojazyčná internetová encyklopedie
`http://www.wikipedia.org/`