UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

KATEDRA MATEMATIKY A DIDAKTIKY MATEMATIKY

ÚVOD DO TÉMATU POSLOUPNOSTÍ NA STŘEDNÍ ŠKOLE KNIŽNÍ KULTURY PODNĚTNÝM ZPŮSOBEM

INTRODUCTION INTO THE TOPIC OF SEQUENCES AT THE SECONDARY SCHOOL OF BOOK CULTURE IN A MOTIVATING WAY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

AUTOR PRÁCE: Bc. Petra Bay

VEDOUCÍ PRÁCE: doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.

PRAHA 2014

Prohlášení:

Tuto práci jsem vypracovala samostatně, veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využila, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byla jsem seznámena s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Karlova má právo uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Karlova oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v Univerzitní knihovně Univerzity Karlovy.

V Praze dne 20. června 2014 ……………………………..

Za pomoc při psaní mé diplomové práce děkuji doc. RNDr. Nadě Vondrové, Ph.D., především za její doporučení a podněty. Děkuji svým žákům za spolupráci ve výuce.

Abstrakt

Cílem diplomové práce je představit potenciál konstruktivistických přístupů ve výuce posloupností na střední škole a především úloh na zobecňování. Dočtete se o kritických místech v procesu zobecňování, která vzešla z mezinárodního výzkumu TIMSS a PISA, a na která je zaměřen výukový experiment. Problematika motivace k učení se matematice je nedílnou součástí práce, stejně jako je nedílnou součástí konstruktivistického přístupu k vyučování.

V první a druhé kapitole je analýza školních kurikulárních dokumentů, odborných článků, učebnic a mezinárodních výzkumů TIMSS a PISA tvořící teoretický rámec pro výukový experiment. Základním východiskem pro výukový experiment je teorie generických modelů M. Hejného a jeho konstruktivistické přístupy ve vyučování matematice, které prezentuje třetí kapitola. Další kapitolu představuje výukový experiment a předexperiment, který je jádrem práce. Přináší návrhy, jak překonat kritická místa v procesu zobecňování a jak motivovat žáky k učení se matematice.

Klíčová slova

posloupnost, zobecňování, matematizace, motivace, přístupy k výuce, konstruktivismus

Abstract

The aim of the thesis is to present the potential of constructivist approaches to teach sequences at high school, with special attention to the problems leading to generalisation. You will read about critical points in the process of generalisation which occurred in TIMSS and PISA international studies and which were examined in the teaching experiment. The question of motivation to learn mathematics is an essential part of this thesis as well as it is an essential part of constructivist approaches to teaching.

Two chapters at the beginning analyze school curricular documents, science articles, school textbooks and TIMSS and PISA international studies which formed the theoretical frame of the teaching experiment. The teaching experiment is based on Hejný´s theory of generic models and on constructivist approaches to teaching which are introduced in the third chapter. Chapter four which describes the teaching experiment and pre-experiment is the main part of the thesis. It brings inspiration how to deal with the critical points in the process of generalisation and how to motivate pupils to learn mathematics.

Key words

sequence, generalisation, mathematisation, motivation, approaches to teaching, constructivism

Obsah

Úvod

Kolik kdo rozumí, tolik ať zvyká vysloviti, a naopak, co pronáší, tomu ať se učí rozuměti. Neboť kdo nedovede vyjádřit, co myslí, je jako socha; kdo tlachá, čemu nerozuměl, je jako papoušek.

Komenský (1905, s. 222)

Jako žákyně jsem se v hodinách matematiky potkávala pouze s transmisivním přístupem a vždy jsem měla na vysvědčení samé jedničky. Zábavnou a praktickou se pro mě ale matematika stala, až když jsem se na vysoké škole setkala v hodinách didaktiky matematiky s konstruktivistickým přístupem. Už před tímto osudovým setkáním jsem věděla, že chci matematiku učit jinak, než bylo zvykem, že chci s žáky řešit úlohy, které se týkají jejich každodenního života, diskutovat nad způsoby řešení a reálným dopadem těchto úloh. Nyní mohu svůj pedagogický záměr opřít o uznávanou teorii didaktického konstruktivismu.

Právě víra v konstruktivistický přístup byla hlavním motivem k napsání této práce. Druhým zásadním motivem bylo jeho odmítání na středních školách. Měla jsem možnost asistovat a praktikovat učitelkám na dvou pražských gymnáziích a mou snahou bylo aplikovat konstruktivní přístupy ve výuce. Byla jsem však učitelkami tlačena k transmisivnímu přístupu se slovy, že *si s žáky moc hraji*. Zároveň si ale po výuce jedna z učitelek posteskla, že žáci stále neobjevili smysplnost a užitečnost matematiky. To bych ráda ve své učitelské praxi eliminovala. V této práci ukáži část cesty, kterou jsem zvolila a to na tématu posloupností. Posloupnosti jsem vybrala především proto, že bývají považovány za jednoduché, a tak jsou podle mého názoru vhodné pro přechod k výuce podle myšlenek a zásad konstruktivismu. Nebo alespoň k expermentování či zpestření výuky.

Cílem diplomové práce je představit potenciál konstruktivistických přístupů ve výuce posloupností na střední škole, především úloh na zobecňování, zmapovat kritická místa v procesu zobecňování a zjistit, zda mnou navržená koncepce výuky vede k vyšší motivaci žáka učit se matematice a zda respektuje fáze poznávacího procesu podle teorie M. Hejného, propagátora konstruktivistických přístupů ve vyučování matematice.

V první kapitole analyzuji, jak téma posloupností zpracovávají školní kurikulární dokumenty, odborné články a učebnice. U učebnic jsem se zaměřila na úlohy s reálným kontextem a na úlohy vedoucí na zobecňování matematických vztahů.

Další kapitola zmiňuje mezinárodní výzkumy TIMSS a PISA, které hovoří o špatném vztahu žáků k matematice a jejich nízké motivaci k učení se matematice. První zmíněný výzkum se zabýval také problematikou zobecňování, kterou více rozvádím.

Pro zahájení procesu učení je motivace prvotní podmínkou. Motivace je také základní a první fází poznávacího procesu podle M. Hejného, o kterém pojednává třetí kapitola, včetně konstruktivistického přístupu ve vyučování matematice, jehož velikým propagátorem je zmíněný M. Hejný.

Poslední kapitolu tvoří můj výukový experiment k tématu posloupností, jehož základním výukovým prostředím jsou úlohy na zobecňování funkčních vztahů, a který aplikuje konstruktivistické přístupy do výuky posloupností na Střední škole knižní kultury, kde druhým rokem vyučuji.

1 Přístupy k výuce posloupností z hlediska učebnic a odborných článků

Čeští žáci na základní škole nemají příliš zkušeností s úlohami na posloupnosti a zobecňování funkčních vztahů. Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání učivo posloupností zmiňuje pouze jako Nestandartní aplikační úlohy a problémy (RVP ZV, 2009, s. 32) v podobě *číselných řad* (posloupnost čísel zadaná výčtem prvků, kde má žák za úkol zjistit další člen posloupnosti), které učitelé využívají ke zpestření výuky. O zobecňování není zmínka. Na základní škole můžeme spíše hovořit o propedeutice posloupností v tématu funkce a v matematizaci reálných situací. Místem, kde se žák základní školy může také setkat s posloupnostmi, jsou *číselné řady* v časopisech, v IQ testech nebo ve SCIO testech, v číselné i obrazové podobě.

Téma posloupností je zařazeno až na střední školy. Například vzdělávací oblast Matematika a její aplikace Rámcového vzdělávacího programu pro obor vzdělání Knihkupecké a nakladatelské činnosti (ze kterého vychází škola, kde působím a provádím výukový experiment) má za cíl, aby žáci dovedli:

- „využívat matematických vědomostí a dovedností v praktickém životě; při řešení běžných situací vyžadujících efektivní způsoby výpočtu a poznatků o geometrických útvarech;
- aplikovat matematické poznatky a postupy v odborné složce vzdělávání;
- matematizovat reálné situace, pracovat s matematickým modelem a vyhodnotit výsledek řešení vzhledem k realitě;
- zkoumat a řešit problémy, včetně diskuze výsledků jejich řešení;
- číst s porozuměním matematický text, vyhodnotit informace získané z různých zdrojů - grafů, diagramů, tabulek a internetu, přesně se matematicky vyjadřovat;
- používat pomůcky: odbornou literaturu, internet, PC, kalkulátor, rýsovací pomůcky." (RVP Kn, 2009, s. 35)

Důraz je zde kladen především na praktickou stránku matematiky, matematizaci reálných situací a porozumění matematickému textu. Stejně tak rámcové vzdělávací programy středního odborného školství (například pro obor Letecký mechanik) uvádí cíle týkající se praktické stránky matematiky. V porovnání s Rámcovým vzdělávacím programem pro gymnázia, který zmiňuje cíle obecnější s důrazem na analýzu problémů, jejich abstrakci a zobecňování. Zobecňování je tedy explicitně zmíněno až na gymnáziích.

Učivo **Posloupnosti a jejich využití** je podle Rámcového vzdělávacího programu pro obor vzdělání Knihkupecké a nakladatelské činnosti zpracováno následovně (RVP Kn, 2009, s. 37):

Výsledky vzdělávání	**Učivo**
Žák: - vysvětlí posloupnosti jako zvláštní případ funkce; - určí posloupnost: vzorcem pro n-tý člen, výčtem prvků, graficky; - rozliší aritmetickou a geometrickou posloupnost; - provádí výpočty jednoduchých finančních záležitostí a orientuje se v základních pojmech finanční matematiky.	- Aritmetická a geometrická posloupnost - Finanční matematika

Tabulka 1.1: Učivo posloupností v RVP

Školní vzdělávací program Knižní kultura vychází ze zmíněného rámcového programu a učivo posloupností a výstupy z výuky jsou uvedeny v následující tabulce 1.2 (ŠVP KK, 2010, s. 156).

Výsledky vzdělávání ŠVP	**Učivo**
Žák: - vysvětlí posloupnost jako zvláštní případ funkce; - určí posloupnost: vzorcem pro n-tý člen, výčtem prvků, graficky; - rozliší aritmetickou a geometrickou posloupnost.	- Aritmetická a geometrická posloupnost

Tabulka 1.2: Učivo posloupností v ŠVP

1.1 Učebnice

Analyzovala jsem všechny dostupné učebnice pro střední školy:

- Matematika pro gymnázia (nakladatelství Prometheus);
- Matematika pro střední odborné školy (nakladatelství Prometheus);
- Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť (nakladatelství Prometheus);

- Matematika pro střední školy (nakladatelství Didaktis);
- materiály dostupné z www.realisticky.cz.

A zajímala jsem se, jak je v nich pojato téma posloupností, a zda se v nich objevují úlohy na zobecňování.

1.1.1 Nakladatelství Prometheus

Při analýze učebnic matematiky vydavatelství Prometheus jsem zaznamenala mezi řadou učebnic pro gymnázia a řadami ostatními patrný rozdíl v tom, že gymnaziální učebnice jsou obecné a úlohy s reálným kontextem jsou více v řadách pro střední odborné školy, jak nastavují příslušné RVP. V učebnici Matematika pro gymnázia jsou úlohy zadány v matematickém jazyce a reálný kontext se objevuje pouze v úlohách kapitoly Užití aritmetické posloupnosti (osm úloh) a Užití geometrické posloupnosti (čtrnáct úloh). V žádné učebnici není úloha na zobecňování. Vztahy jsou na počátku zadány obecně a dále se s nimi pracuje. Zobecnění konkrétního pojmu posloupnost, aritmetická posloupnost, rekurentní vzorec aj. učebnice také nenabízí. Teorie a definice jsou vyloženy na začátku kapitol.

Autor učebnice Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU (která se nabízí pro výuku na škole, kde působím) zařazuje definice a vzorce také na začátek kapitol. Úlohy s reálným kontextem slouží jako úlohy doplňující k procvičení nebo jsou také na začátku kapitoly spolu s teorií. Například v kapitole Součet aritmetické řady a Součet geometrické řady, kde jsou úlohy vyřešené. V celé kapitole posloupností je k procvičení pouze šest úloh s reálným kontextem ze třiceti. Další úlohy na procvičení jsou již bez reálného kontextu, používají čistě matematický jazyk a také ho procvičují. Úlohy s reálným kontextem mají většinou technický nebo všeobecný charakter a na mé žáky nepůsobí motivačně, kontext a využití učiva jsou jim vzdáleny. Abych ve vlastní výuce dosáhla výukového cíle RVP *aplikace matematických poznatků v odborné složce vzdělávání,* použila jsem k výuce vedle této učebnice mnohých dalších (pseudo)reálných kontextů z různých zdrojů nebo kontext vlastní.

Učebnice Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU vychází při zavádění pojmu posloupnost z jejího běžného použití (posloupnost kroků, posloupnost událostí, posloupnost českých králů) a přechází k matematickému jazyku (pravidlo, které přiřazuje) a odkazuje se na zobrazení. Následně učebnice zavádí symboliku používanou u posloupností, odkazuje se funkce a posloupnost definuje. Úvodní úlohy jsou na procvičení tohoto matematického jazyka.

Úvod do tématu vede učitele na transmisivní přístup. Zpočátku je vyložena teorie, dále je v učebnici vyřešeno několik ukázkových úloh a následně se podle vzoru řešených úloh úlohy procvičují. Úvod pro mou výuku naprosto nevyhovující. Takto zavedená teorie je již zobecněním pojmů a vztahů a žáci si pak konkrétní modely dobudovávají a mnozí žáci mají právě v tomto obtíže. Sama jsem v matematice jako žákyně na gymnáziu ostře rozlišovala úlohy (které jsem řešila bez problémů) a teorii (kterou jsem vůbec neovládala, nechápala a zdála se mi naprosto odtržená od řešených úloh, třebaže byli již v matematickém jazyce a oproštěny reálného kontextu). Proto jsem měla potřebu vytvořit vlastní koncepci výuky. A také proto, že v učebnici není žádná úloha vedoucí na zobecňování ani v rovině zobecnění funkčního vztahu ani v rovině zobecnění pojmu. Úlohy, které považuji za základní pro poznávací proces a budování matematického myšlení.

1.1.2 Materiály k výuce dostupné z www.realisticky.cz

Materiály dostupné z www.realisticky.cz podporují žáky k tomu, aby *zkoumali a řešili problémy a diskutovali výsledky jejich řešení.* Způsob práce s úlohami podporuje u žáků také *porozumění matematickému textu* a *zobecňování na základě poznávání jejich charakteristických vlastností* je velmi časté (RVP Kn, 2009), které se děje hned na začátku tématu.

Téma je zaváděno pomocí funkcí. Autor navrhuje zadat žákům několik úloh na funkce a jejich grafy a z nich vyvodit podmínku definičního oboru přirozených čísel *N*. Úlohy doplňuje otázkami na protipříklady posloupnosti a následně zavádí značení a pojmenování u posloupností. Demonstruje i podobnosti a odlišnosti značení a pojmenování u funkcí. Připravené úlohy a otázky vedou žáky k objevování vztahů a souvislostí. Žáci, alespoň někteří, by měli ke zobecnění vztahů a pojmů dospět.

Úlohy s reálným kontextem nebo na zobecňování funkčních vztahů se neobjevují, ale poznávací proces je respektován při zavádění nové látky a poznatky nejsou žákům předány hotové.

1.1.3 Nakladatelství Didaktis

Řada učebnic nakladelství Didaktis pokrývá pouze část učiva a téma posloupností není prozatím zpracováno. Oproti jiným učebnicím mají poměrně hodně úloh s reálným kontextem, praktickým využitím a úlohy na rozhodování o pravdivosti tvrzení, které pomáhají abstraktní látku lépe uchopit a nutí žáky zobecňovat vztahy. Časté jsou také grafické prezentace vztahů, čísel a podobně. Za každou kapitolou je pro žáky připravená část reflektování učiva, což jim může významně zvýšit motivaci a sebedůvěru ve své schopnosti. Reflexe také významně napomáhá k upevnění učiva a zařazení do struktury již získaných poznatků.

1.2 Odborné články

Problematika posloupností je většinou považována za jednoduchou učební látku, a proto jí není v odborné veřejnosti věnována přílišná pozornost. Našla jsem několik zajímavých sbírek úloh, které mi byli inspirací, například Matematické úlohy z korespondenčních seminářů, ale na teoreticko-didaktické úrovni jsem úspěch neměla. Při bližším zkoumání této problematiky jsem neobjevila příliš literatury a musela si vystačit pouze s článkem o podnětném zavedení vzorce součtu geometrické řady v časopise Educational Studies in Mathematics a článkem o podnětném zavedení aritmetické posloupnosti v časopise Australian Mathematics Teachers. Zavedení aritmetické posloupnosti australského vysokoškolského učitele mě zaujalo natolik, že jsem úlohu integrovala do své koncepce výuky a získala inspiraci pro objevování rekurzivních vzorců a vzorců pro *n*-tý člen.

2 Výsledky výzkumů TIMSS, PISA

Matematickou gramotností se zabývají například mezinárodní výzkumy PISA (Programme for International Student Assessment) a TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study). Zde je matematická gramotnost chápána jako „schopnost jedince poznat a pochopit, jakou roli hraje matematika ve světě, dělat dobře podložené úsudky a proniknout do matematiky tak, aby splňovala jeho životní potřeby jako tvořivého, zainteresovaného a přemýšlivého občana“ (Mandíková, Palečková, 2011, s. 213). Matematickou gramotnost zkoumají tyto výzkumy i z hlediska motivace a zobecňování funkčních vztahů, což je mým předmětem zájmu.

2.1 Výzkum TIMSS

Výzkum TIMSS se zabývá především školními výsledky žáků a vychází z kurikulárních dokumentů jednotlivých států. Jako jeden z mála se zabývá tématem posloupností a zobecňováním funkčních vztahů. Zajímal mě ale také v současnosti hodně diskutovaný negativní vztah českých žáků k matematice a klesání jejich úspěšnosti v matematice.

Nejnovější výzkum TIMSS 2011 ukazuje zlom ve trendu klesání úspěšnosti českých žáků v matematice. I v přírodních vědách, což je pozitivní zpráva. Můžeme se dohadovat, kdo nebo co je tomu příčinou. Ale můžeme předpokládat, že lepší výsledky v matematice jsou pro žáky i učitele motivující a zlepšují vztah k ní. Přesto se zaměřím více na kritická místa českých žáků v matematice, protože se týkají problematiky posloupností a zobecňování.

Výzkum TIMSS 2007 proběhl v České Republice u žáků 4. a 8. ročníků. Na středních školách bohužel ne, ale pro vzdělávání na terciálnim stupni můžeme vycházet z výsledků žáků 8. ročníků. Tento výzkum zkoumal kognitivní dovednosti rozdělené do těchto kategorií: *Prokazování znalostí, Používání znalostí* a *Uvažování*. Při hodnocení těchto dovedností byli čeští žáci nejméně úspěšní v *Používání znalostí* a *Uvažování*, velmi úspěšní byli v *Prokazování znalostí* (Rendl, Vondrová, 2014).

Za povšimnutí stojí především oblast *Používání znalostí* v úlohách s (pseudo)reálným kontextem a v úlohách používající matematický jazyk a symboliku. Průměrná úspěšnost českých žáků v úlohách s (pseudo)reálným kontextem je o 13 % vyšší oproti mezinárodnímu souboru a v úlohách používající matematický jazyk a symboliku je vyšší pouze o 7 % (Rendl, Vondrová, 2014). Úspěšnost tedy klesá s úlohami, kde je potřeba abstrakce a obecného vyjádření funkčních vztahů. Tento výsledek je o to zajímavější, porovnáme-li ho například s výsledky *úloh o pohybu* u mezinárodního souboru. Úlohy vyžadující od žáků najít výsledek pro konkrétní číselné hodnoty jsou řešeny méně úspěšně než úloha vyžadující algebraické vyjádření závislosti dráhy d na čase t.

To potvrzují M. Rendl a N. Vondrová. Vyvozují z šetření TIMSS 2007, že „výkony českých žáků se zhoršují na dvou kritických místech: na přechodu od názorné představivosti k pochopení závislosti, ale zejména na přechodu od pochopení funkční závislosti (díky němuž dokážou žáci pracovat s konkrétními čísly) k jejímu algebraickému vyjádření“ (Rendl, Vondrová, 2014, s. 44). Stěžejní témata dotýkajících se těchto kritických míst jsou funkce a algebraické výrazy, kdy žák musí umět zobecnit vztahy a poté je matematizovat, algebraicky vyjádřit. A to činí mnohým žákům potíže. Problematiku pochopení funkční závislosti a její následné algebraické vyjádření zkoumám ve svém výukovém experimentu.

Domnívám se, že pořadí osvojování zmíněných dovedností, prvotní *pochopení funkční závislosti* a její následné *algebraické vyjádření* je v tomto případě zásadní. Aby byli žáci schopni závislost mezi objekty a jevy zapsat obecně, musí závislost nejdříve odhalit a pochopit. Proto se domnívám, že úlohy na zobecňování a postřehování pravidel mezi objekty by měly být zařazovány, a to mnohem dříve, než s tématem funkce. Například vzorec na obsah obdélníka nemusí být žákům předložen hotový a následně procvičen. Žáci již od druhého ročníku základní školy mohou tento vztah odhalovat při nacvičování násobilky. Konkrétně při počítání dílků tabulky čokolády, kdy vynásobením počtu řádků a počtu sloupců získají žáci celý obsah čokolády obdélníkového tvaru. Můžeme provést i propedeutiku k posloupnostem a zobecňování otázkou: Jak se změní počty dílků tabulky čokolády, pokud budou postupně přibývat sloupce tabulky. Jakým výpočtem dojdeme k výsledku?

Není bez zajímavosti, že rámcové vzdělávací programy (dále jen RVP) cílí nejdříve ke schopnosti matematizovat reálné situace a až na střední škole k umění zobecňovat. Dalo by se uvažovat, že je matematizace použita ve smyslu převedení zadání úlohy s (pseudo)reálným kontextem do konkrétního výpočtu, ale již na základní škole se vyučují algebraické výrazy, které používají zobecněné číslo. Zde vnímám rozpor a domnívám se, že úlohy na zobecňování mohou přispět k lepšímu uchopení tématu algebraických výrazů, ale i většímu pozorumění obecných zápisů matematických vztahů a vzorců.

Výukové cíle týkající se problematiky zobecňování a matematizace reálných situací jsou uvedené v rámcových vzdělávacích programech následovně:

RVP	Vzdělávání žáka vede k:
ZŠ	Vnímání složitosti reálného světa a jeho porozumění; rozvíjení zkušeností s matematickým modelováním (matematizací reálných situací).
SOŠ	Matematizaci reálných situací, práci s matematickým modelem a vyhodnocení výsledku řešení vzhledem k realitě.
G	Osvojování základních matematických pojmů a vztahů postupnou abstrakcí a zobecňováním na základě poznávání jejich charakteristických vlastností.

Tabulka 2.1: Vybrané výukové cíle dle RVP

Šetření výzkumu TIMSS 2007 také přináší informaci o tom, že čeští i ostatní žáci mezinárodního souboru nejsou téměř schopni konstruovat výraz sami, ale úspěšnost nalezení správného algebraického výrazu mezi nabídnutými možnostmi je poměrně vyšší. Může to znamenat, že žáci pochopili funkční závislost, ale nejsou ji schopni algebraicky vyjádřit. Pokud je jim výraz předložen, funkční závislost už v něm často správně objeví.

2.2 Výzkum PISA

Výzkum PISA se oproti výzkumu TIMSS více zabývá schopností jedince využívat matematické dovednosti a znalosti prakticky. PISA 2012 uvádí stejně jako výzkum TIMSS 2011 zlepšení výsledků českých žáků v matematice. Zlepšení je ale oproti poslednímu výzkumu z roku 2009 statisticky zanedbatelné a úrovněň matematické gramotnosti je ve srovnání s rokem 2003 stále horší (Palečková, Tomášek, Basl, 2010).

PISA zkoumala úspěšnost v matematických postupech, které rozlišovala jako *Formulování, Používání* a *Interpretaci*. Bylo zjištěno, že čeští žáci jsou nejúspěšnější v *Používání* znalostí a algoritmů a jsou nad mezinárodním průměrem. Pod mezinárodním proměrem je úspěšnost ve *Formulování* situací matematicky a *Interpretaci*, aplikaci a hodnocení matematických výsledků (Palečková, Tomášek, 2013). Otázkou k zamyšlení je, zda to nemohl způsobit nedostatek úloh na zobecňování a přeskočení několika fází poznávacího procesu, že žáci umí znalost použít, ale ne ji formulovat a interpretovat, tedy matematizovat, zobecnit a vysvětlit.

Posloupnostmi se tento výzkum nezabýval.

3 Poznávací proces a konstruktivistické přístupy k vyučování matematice

Národní program vzdělávání v České republice usiluje o to, aby „vzdělání mělo pro všechny žáky smysl a osobní význam“ (Bílá kniha, 2001, s. 18), čemuž tradiční výuka vždy neodpovídá. Dotazníkové šetření provedené při výzkumu PISA z roku 2009 přináší informace o nepříliš dobrém vztahu žáků ke škole. Více než polovina českých dětí se ve škole často nudí a třetina nechce ani do školy chodit (Mandíková, Palečková, s. 217). Nevnímají školu jako smysluplnou a předkládané poznatky za užitečné. I ve starších zprávách výzkumu TIMSS 1995 se dočteme, že plná polovina dotazovaných žáků 8. ročníku odpovídá na otázku: „Jak rád(a) máš matematiku?“ negativně. Pouhých 8 procent žáků odpovědělo, že mají matematiku velmi rádi (Palečková, Straková, Tomášek, 1996).

Má zkušenost je podobná. Vysvětluji si to jednak tím, že působím na humanitně zaměřené škole a jednak tím, že je matematika většinou žákům předkládána jako systém pouček a vzorců bez vztahu k běžnému životu. Pro takto prezentovanou matematiku, ale nejenom ji, se dnes již běžně používá pojem transmisivní přístup k vyučování, někdy také tradiční přístup k vyučování. Jde o „vyučování zaměřené na výkon žáka spíše než na rozvoj jeho osobnosti. Učitel se v transmisivně vedené výuce snaží předat žákům již hotové znalosti v dobré víře, že toto je nejlehčí a nejrychlejší cesta k poznání“ (Stehlíková, 2004, s. 19). U žáků ale někdy dochází k tomu, že poznatky plně nepochopí a jenom je reprodují. Výkony ve škole tedy mohou být dobré, ale „mnozí nejsou schopni použít matematické poznatky v praxi a zdá se jim matematika odtržená od života“ (Hejný, Kuřina, 2009).

Na tento problém poukazuje i mezinárodní výzkum PISA. Já sama jsem měla matematiku ráda, protože mi nečinila žádné potíže, ale nepovažovala jsem ji za užitečnou pro běžný život, natož za zábavnou. Dokud jsem se neseznámila s konstruktivistickým přístupem (představím dále v oddíle 3.2), kdy jsem například řešila úlohy s praktickým využitím matematických poznatků nebo dokud jsem neviděla názorné důkazy matematických vztahů. Proto jsem se začala problematikou konstruktivistických přístupů k vyučování matematice blíže zajímat a aplikovat tento přístup do vlastní výuky.

3.1 Poznávací proces

Konstruktivistický přístup k vyučování se snaží respektovat poznávací proces každého jedince, jeho tempo, úroveň poznávání a uzpůsobit výuku tak, aby její jednotlivé části kopírovali poznávací proces.

V poznávacím procesu a ve výuce hraje zásadní roli motivace. Aby byla činnost smysluplná, musí směřovat k určitému cíli a tento cíl musí uspokojovat žákovy potřeby. Použití úloh na objevování vztahů v matematice pomáhá žákům více zažívat radost z učení a uspokojuje jejich poznávací potřebu, která je dána každému člověku. U některých žáků střední školy může být vlivem různých faktorů tato motivace v matematice eliminována, ale pozitivně působí, že žáci mohou při těchto úlohách pracovat více svým tempem a nejsou vystaveni takovému časovému tlaku. Transmisivní přístup ve výuce cílí spíše na výkonnové potřeby, které ale nemusí každý žák mít. Nebo nemusí být jeho potřebou prioritní.

Jean Piaget, psycholog zabývající se kognitivním vývojem jedince, vytvořil dodnes uznávanou teorii poznávacího procesu. Tento proces člení do čtyř stádií:

1. **Senzomotorické stádium** – jedinec poznává svět pomocí pohybu a smyslů, vnímá stálost objektů (do dvou let života).
2. **Předoperační stádium**– jedinec se učí používat jazyk (od dvou do sedmi let).
3. **Stádium konkrétních operací** – jedinec dokáže logicky přemýšlet o konkrétních událostech, chápe stálost počtu, množství a hmotnosti (od sedmi do dvanácti let).
4. **Stádium formálních operací** – jedinec dokáže logicky myslet o abstraktních pojmech (od dvanácti let dále) (Piaget, Inhelderová, 1997).

Tomu odpovídají i ontogenetická stádia procesu myšlení, kdy jedinec přechází z prvotního stádia konkrétně-operativního, od manipulování s věcmi, k myšlení formálně-operativnímu, k představám o manipulování s věcmi (Nakonečný, 1998).

Fakt, že je žák přibližně od dvanácti let schopen abstraktního myšlení, ještě neznamená, že si od tohoto věku vystačí pouze s abstraktními schématy. Stádia poznávacího procesu bychom měli v určité míře dodržovat při konstrukci všech poznatků. Kdyby totiž jedinec „neměl možnost tvořit si jednotlivé konkrétní modely vnějšího světa a kdyby jeho myšlení bylo omezeno na pouhá abstraktní schémata, vznikly by vážné problémy. Jedinec by byl závislý ve svém jednání na vnějších okolnostech a vlivech. Podobal by se mechanickému stroji“ (Pospělov, Puškin, 1978).

3.1.1 Poznávací proces podle M. Hejného

M. Hejný vytvořil celou teorii poznávacího procesu a výukové metody odpovídající konstruktivistickým přístupům. Opírá se o myšlenky Jana Amose Komenského, především o jeho didaktické zásady poznávat všemi smysly, být aktivní a užívat poznatky v praxi (Komenský, 1946). Tyto zásady by měly minimalizovat současný stav, kdy „se žák učí matematiku takřka nazpaměť, vzdělání má verbální a formální charakter. Veřejnost pak právem pociťuje takové matematické vzdělání za zbytečné“ (Hejný, Kuřina, 2009, s. 119).

Tzv. teorie generických modelů M. Hejného dělí poznávací proces do několika fází.

1. fáze motivace

Motivace je důležitým předpokladem zahájení procesu učení. Na střední škole může mít motivace formu vhodně formulované otázky nebo problému, úlohy vážící se ke způsobu života a diskuze o nápadu, názoru žáka. Méně už pak podobu hry, která má své uplatnění spíše na nižším stupni vzdělávání.

2. fáze izolovaných modelů

Žák se setkává s konkrétními reprezentanty (modely), které mu jsou oporou pro vybudování obecné představy o pojmu a struktuře poznatků. Pro pojem posloupnost je izolovaným modelem např. počet namnožených buněk zjištěných při laboratorních kontrolách, počet králíků Fibonacciho posloupnosti, figurální čísla, či grafické znázornění konkrétních hodnot.

Důležitou roli v této fázi hrají i tzv. ne-modely, zdánlivé nebo překvapivé modely. Žákovi pomáhají objevit odlišnosti a podobnosti mezi každým konkrétním příkladem a protipříkladem. Definice jsou přesnou formulací M. Hejného. „Ne-model je takový jev, který ilustruje komplement zkoumaného objektu.“ Například 1. úloha z výukového experimentu (viz. Příloha 1) staví vedle sebe uspořádané objekty, které jsou modelem posloupnosti, a náhodně rozmístěné objekty, u nichž nelze jednoznačně určit pořadí a o posloupnost se nejedná. „Zdánlivým modelem rozmíme něco, co modelem daného objektu není, ale může se tak jevit.“ Například funkce měnící se s časem. Zadání úlohy stačí upravit takovým způsobem, aby definičním oborem nebyla reálná čísla, ale pouze čísla přirozená, což jsem udělala se 4. úlohou (viz. Příloha 1) a funkce tak splňuje podmínku posloupnosti. „Překvapivým nazýváme takový model, který se tváří, že jím není, i takový, jehož existenci jsme nepředpokládali“ (Hejný, 2004, s. 30). Například posloupnost náhodně seřazených iraconálních čísel π, log 2, tg 60°, $\sqrt{3}$.

3. fáze generických modelů

Generický model je jeden z vybraných izolovaných modelů nebo nově konstruovaný model, který dává žákovi vhled do skupiny izolovaných modelů a často mu slouží jako prototyp všech izolovaných modelů nebo jeho části. Mezi 2. a 3. fází došlo u žáka k prvnímu abstrakčnímu zdvihu, jež má obecný charakter. Například generický model pro graf posloupnosti je graf izolovaných bodů, který má na ose x nanesená pouze přirozená čísla počínaje číslem jedna. Jde o jeden konkrétní poznaný graf, pro něž si žák v jiných úlohách pouze zaměňuje hodnoty.

4. fáze abstraktních modelů

Abstraktní znalost je na nejvyšším stupni lidského poznání, žák se k ní dostane pomocí druhého abstrakčního zdvihu, kdy je generický model zbaven věškerého reálného kontextu (ten ustoupil do pozadí) a utváří se v abstraktní definici. Pro graf posloupnosti je to představa grafu funkce s definičním oborem přirozených čísel *N.* Sám M. Hejný ale dodává, že „ne každý poznávací proces prochází všemi etapami. Každý poznávací proces však musí obsahovat etapu izolovaných modelů a aspoň jeden zdvih“ (Hejný, Kuřina, 2009, s. 136).

Dále autor zmiňuje fázi *krystalizace*, kdy je pojem zařazen do struktury poznatků. Někdy je třeba tuto strukturu přeorganizovat a dřívější znalosti přizpůsobit novému poznání. Např. žáci mají izolovaný (ne)model časové posloupnosti, která je v rozporu s definicí posloupnosti jako funkce s definičním oborem přirozených čísel. Tedy pokud žáci zaznamenávají hodnoty v průběhu času (obor reálných čísel), nejedná se o posloupnost.

3.2 Konstruktivistické přístupy k výučování matematice

V současné době převládají v pedagogické teorii a praxi dva přístupy k vyučování. Oba jsem již zmínila. Jde o přístup konstruktivistický a přístup transmisivní. V případě transmisivního přístupu volí učitel cestu předání (transmise) hotových poznatků směrem k žákovi a žák tyto poznatky pasivně přijme. V naší společnosti je tento přístup tradiční a často se tak také označuje. O konstruktivistickém přístupu se mluví až od 80. let 20. století, ale jeho kořeny můžeme nahlédnout již v myšlenkách Sokrata. Podstatou je „aktivní vytváření části matematiky v mysli žáka. Podle povahy žáka může být podkladem pro takovou konstrukci otázka či problém ze světa přírody, techniky nebo matematiky samé.“ (Kuřina, 2002b).

3.2.1 Zásady didaktického konstruktivismu

Autoři a propagátoři konstruktivistického přístupu ve vyučování matematice formulovali deset hlavních zásad, které popisují jejich pojetí didaktického konstruktivismu. Zkrácený popis následuje (Hejný, Kuřina, 2009).

1. Matematika je chápána jako specifická lidská aktivita, ne jen jako její výsledek.
2. Podstatnou složkou matematické aktivity je hledání souvislostí, řešení úloh a problémů, tvorba pojmů, zobecňování tvrzení, jejich prověřování a zdůvodňování.
3. Poznatky jsou nepřenosné, vznikají v mysli poznávajícího člověka.
4. Tvorba poznatků se opírá o zkušenosti poznávajícího.
5. Základem matematického vzdělávání je vytváření prostředí podněcující tvořivost.
6. K rozvoji konstrukce poznatků přispívá sociální interakce ve třídě.
7. Důležité je použití různých druhů reprezentace a strukturální budování matematického světa.
8. Značný význam má komunikace ve třídě a pěstování různých jazyků matematiky.
9. Vzdělávací proces je nutno hodnotit minimálně ze tří hledisek: porozumění matematice, zvládnutí matematického řemesla, aplikace matematiky.

10. Poznání založené na reprodukci informací vede k pseudopoznání, k formálnímu poznání.

M. Hejný označuje jako formální znalosti takové znalosti, které žák získal bez porozumění. Často je neumí použít v jiných situacích než má nacvičené a snáze je zapomene. Například když žák formuluje definici posloupnosti a vytvoří k ní spojitý graf nebo u grafu zamění definiční obor přirozených čísel za obor hodnot.

Konstruktivistický přístup vnímám jako zásadní nástroj prevence formálních poznatků. Také ho považuji za nástroj prevence zapomínání poznatků a za významný motivační činitel. Jsem si vědoma, že každý přístup má své výhody a nevýhody a učitel se musí snažit eliminovat negativa, ale konstruktivistický přístup podle mého názoru více odpovídá uznávaným psychologickým poznatkům, které jsem již nastínila, i léty ověřeným pedagogickým zásadám Sokrata a J. A. Komenského. Také koresponduje s poznávacím procesem podle M. Hejného a já tento přístup aplikuji ve vlastní výuce posloupností.

4 Vlastní přístup k výuce tématu

Ve školním roce 2012/2013 jsem se stala učitelkou matematiky na střední škole s humanitním zaměřením. Motivací žáků pro volbu této školy je často touha vyhnout se matematice a získat maturitu. Pro mě jako učitele to byla výzva a další z důvodů, proč jsem zavedla do výuky konstruktivistické přístupy. Většina žáků přichází ze základní školy s minimálními znalostmi z matematiky a motivace pro učení se matematice je většinou velmi nízká. Na této škole jsem provedla svůj výukový experiment.

Cílem výukového experimentu je zjistit, zda má vlastní koncepce výuky posloupností vede k větší motivaci žáka učit se matematice a zda vede žáka ke zobecnění vztahů ve smyslu abstrakčního zdvihu teorie M. Hejného. Cílem je také zjistit, jakými strategiemi ke zobecnění žák dospěje a co mu na této cestě pomáhá. Dosahování výukových cílů demonstruji rozborem čtyř úvodních hodin.

V prvních čtyřech vyučovacích hodinách povedu žáky k vyvození definice pojmu posloupnost a žáci na mnohých úlohách budou zobecňovat vzorce pro *n*-tý člen posloupnosti. Zobecňování bude tedy probíhat ve dvou úrovních. První úroveň představuje zobecnění konkrétních funkčních vztahů úloh s (pseudo)reálným kontextem a druhá úroveň znamená zobecnit pojem posloupnost a formulovat její definici. Budu demonstrovat fáze poznávacího procesu na skladbě a souslednosti úloh. Zaměřím se také na žákovu motivaci k práci a na osvojování systematické práce při objevování vztahů v posloupnosti.

Z důvodu změny ŠVP na škole jsem před hlavním experimentem měla možnost provést předexperiment ve 2. ročníku, kde je téma posloupností nově zařazeno na konec školního roku po tématu funkce a rovnice a nerovnice. Poté jsem některé postupy a úlohy upravila pro 4. ročník, který měl ještě podle starého programu téma posloupností na začátku následujícího školního roku. Po tomto tématu se vyučovala finanční matematika. V každém ročníku je jedna třída a proto budu uvádět označení třídy žáků jako 2. ročník nebo 4. ročník.

4.1 Výukový předexperiment

Výukový předexperiment proběhl v květnu 2013 ve 2. ročníku, kdy se žáci od začátku školního roku učili o různých typech funkcí, jejich grafech a zobecňovali například souvislost mezi explicitním vyjádřením funkce a jejím grafem. Vyučovací hodiny matematiky byly dvě za týden. V pondělí 3. vyučovací hodinu a v úterý 4. vyučovací hodinu.

4.1.1 Příprava obsahu výukového předexperimentu

Má příprava k výuce posloupností a výukového experimentu spočívala v nastudování textů týkajících se konstruktivistických přístupů vyučování matematice a všech dostupných učebnic pro střední školy. Dále jsem pracovala se speciálními sbírkami úloh, s úlohami výzkumů TIMSS a náměty jsem také čerpala z odborných článků. Vybírala jsem takové úlohy, které mají reálný kontext, jsou motivační a přizpůsobila jsem je tak, aby žáci byli sami schopni úlohy řešit a zobecňovat funkční závislosti. V některých úlohách jsem přidala izolované modely, především za účelem diferenciace pojmu od jeho ne-modelů nebo s cílem gradování úlohy. Powerpointovou prezentaci se zadáním úloh a podnětnými otázkami, kterou jsem promítala žákům ve výuce naleznete v Příloze 1. Zadání úloh a podnětné otázky uvádím také v průběhu hlavního výukového experimentu.

Znalosti žáků, které můžeme označit za prekoncepty problematiky posloupností a o které se při výuce opřu, jsou především z oblasti funkcí a mocnin. Operování se slovem závislost, grafy funkcí, čísla v mocninném tvaru apod.

Očekávám ve výuce následující problémy, kterým se budu snažit předejít:

- Žáci se ke správnému řešení úlohy dopracují až po několika neúspěších a v zápiscích si nechají řešení chybné nebo dostatečně toto chybné řešení neodliší od správného. Přinesu žákům vždy dostatek papírů, na které si mohou úlohy zkoušet řešit a do sešitů si zapisovat až správné řešení.
- Dva velmi slabí žáci a jeden s dyskalkulií (budu ho uvádět pod jménem Jakub) budou mít potíže s pochopením zadání úlohy, hledáním vztahů pro vysoká čísla a zobecněním vztahu. Nachystám čtverečkovaný papír a pomůcky k názorné

manipulaci (sirky, semena hrachu, kameny). Zpočátku budu u těchto žáků vyžadovat určit pouze řešení pro několik blízkých členů a postupně navyšovat obtížnost pro vysoká čísla a obecné řešení.

- Žáci nebudou motivováni úlohy řešit a raději počkají na výsledek. Dovolím jim řešit úlohy se sousedem v lavici (na což jsou již zvyklí), ale neustále budu procházet třídou a kontrolovat, zda pracují. Navíc motivuji žáky ziskem bonusového bodu k testu, pokud danou úlohu vyřeší správně.

První vyučovací hodina: pojem posloupnost, uspořadatelnost prvků – fáze motivace a izolovaných modelů

Na úvod do tématu posloupností mám připravenou techniku brainstorming, abych zmapovala, s čím mají žáci pojem posloupnosti spojený a jak ho vnímají. (Brainstorming zadám i na závěr celého tématu posloupností jako shrnutí, kdy jednotlivá hesla zanesou žáci ve skupinách do myšlenkové mapy.)

Následují tři jednoduché úlohy s obrázkovými a číselnými modely (a ne-modely) posloupností, ze kterých žáci vyvodí nutnost uspořadatelnosti prvků. První postřehnutí vlastností mezi objekty a jejich zobecnění. Tyto úlohy jsem zvolila jednoduché, aby měla hodina spád a žáci zažili pocit úspěchu a byli motivovaní pro řešení dalších úloh.

V další čtvrté úloze, jejíž mírně upravenou verzi jsem již dříve použila na úvod do tématu funkce (demonstrace schodovitého grafu), žáci objevují a zobecňují funkční vztah mezi dvěma proměnnými. Nyní jsem ji upravila tak, aby definičním oborem byla pouze přirozená čísla a šlo o model posloupnosti. Úloha se všemi částmi vyžaduje více času, přibližně 1,5 vyučovací hodiny, takže mám za cíl, aby po první vyučovací hodině odcházeli žáci se zobecněným zápisem vztahu. Graf a další varianty úlohy nechávám do další vyučovací hodiny.

Abych žáky lépe připravila na kritické místo při zobecňování, o kterém psal M. Rendl a N. Vondrová (*přechod od pochopení funkční závislosti k jejímu algebraickému vyjádření*), budu rozepisovat i elementární výpočty a směřovat tím žáky k lepší analýze výpočtů a jejich matematizaci. Protože sama jsem se často ve své učitelské praxi setkala s tím, že žák výpočet zná, verbalizuje ho, ale není schopen ho napsat.

Cíle první vyučovací hodiny jsou následující:

- Žák uvede hesla, která má spojeny s pojmem posloupnost.
- Žák je pozitivně naladěn na výuku posloupností.
- Žák je motivován k řešení zadaných úloh.
- Žák se seznámí s několika modely posloupnosti (číselné i obrázkové).
- Žák rozliší model a ne-model posloupnosti.
- Žák objeví podmínku uspořadatelnosti prvků v posloupnosti.
- Žák si připomene dříve řešenou exponenciální funkci na úloze s reálným kontextem.
- Žák operuje s číslem v mocninném tvaru, například 2^{10}, 2^{100}, 2^{x}.
- Žák objeví obecný vztah mezi čísly a zapíše ho.
- Žák pozná symbol a pro člen posloupnosti a index pořadí n, pro konkrétní čísla a_1, a_2, a_3...

Druhá vyučovací hodina: graf posloupnosti – fáze izolovaných modelů

Ve druhé vyučovací hodině nechám žáky formulovat, co se o posloupnostech dozvěděli a připomněli si nedokončenou úlohu z předchozí vyučovací hodiny. Poté budou žáci tvořit graf získané posloupnosti pro několik prvních členů a ode mne budou vědět, jaká data mají na příslušné osy nanášet. Ve zbývajícím čase řeší žáci další varianty úlohy, které pak budeme společně reflektovat a zobecníme vztahy mezi proměnnými. Jednu z variant úlohy zadám žákům za domácí úkol.

Cíle druhé vyučovací hodiny jsou následující:

- Žák si připomene informace a úlohy z minulé vyučovací hodiny.
- Žák vysvětlí obecný vztah mezi dvěma proměnnými v nedokončené úloze z minulé vyučovací hodiny.
- Žák vytvoří graf k dané posloupnosti.
- Žák vysvětlí diskrétnost grafu.

- Žák objeví obecný vztah i pro jiné číselné varianty dané úlohy.
- Žák pracuje se symboly a_1, a_2, a_3...

Třetí vyučovací hodina: Mezipředmětová vazba – fáze motivace a izolovaných modelů

Zavedení posloupnosti jako *funkce s definičním oborem přirozených čísel N* na začátku výuky posloupností, jak jí uvádějí všechny středoškolské učebnice, by dle mého názoru způsobilo v očích žáků hrůzu a zklamání. Definice obsahuje matematický pojem funkce, a co hůře, pojem definiční obor, který obecně činí žákům veliké potíže. Předpokládám, že pojem posloupnosti žáci budou správně intuitivně chápat a tuto svou domněnku ověřím technikou brainstorming. A matematická definice je v poznávacím procesu až to poslední, kam se žák může dopracovat. Jde o abstraktní model, proto se na definici budu ptát až při shrnutí několika dalších úloh, které ve třetí a čtvrté vyučovací hodině budou žáci řešit.

Definici neodsouvám na samotný konec tématu, protože se domnívám, že žáci budou schopni již po čtyřech vyučovacích hodinách navrhnutého konceptu výuky pojem posloupnosti definovat a formulace definice jim umožní lépe uchopit další oblasti problematiky posloupnosti.

V úvodu hodiny si připomeneme získané poznatky a poté navodím atmosféru k sehrání jednoduché a krátké dramatické scénky vztahující se k drogové problematice, která má simulovat funkční změnu hodnot. Úlohu jsem volila jako motivační. Motivační dramatickou scénkou a také tématem. V předmětu základy přírodních věd se totiž ve stejnou dobu věnujeme botanice a rostlinným drogám a mohu udělat mezipředmětovou vazbu. Úloha také plní funkci dalšího modelu posloupnosti, modelu exponenciální funkce a slouží k procvičení zápisu čísla v mocninném tvaru. Zobecnění vyžaduje opět více času, a proto stejně jako u předchozí úlohy nechám graf a další varianty úlohy do další, čtvrté, vyučovací hodiny.

Cíle třetí vyučovací hodiny jsou následující:

- Žák formuluje svými slovy, co se o posloupnostech již dozvěděl.
- Žák je opětovně motivován k řešení úloh (dramatickou aktivitou).

- Žák se seznámí s dalšími modely posloupnosti na úlohách s (pseudo)reálným kontextem.
- Žák pracuje systematicky při objevování obecných vztahů.
- Žák zobecní vztah mezi čísly a zapíše ho.
- Žák upevňuje dovednost pracovat s čísly v mocninném tvaru.

Čtvrtá vyučovací hodina: definice posloupnosti – abstrakční zdvih

Jako první aktivitou žáků v hodině je formulace získaných znalostí z předchozích hodin a připomenutí nedokončené úlohy s drogovou tématikou, ke které v této hodině vytvoří graf. Poté jim zadám další úlohu s reálným kontextem vedoucí na nepřímou úměrnost, aby žáci nezískali dojem, že posloupnost musí být vždy rostoucí.

V závěru hodiny budu otázkami žáky vést k definici posloupnosti a k jejímu odhalení v již vyřešených úlohách.

Cíle čtvrté vyučovací hodiny jsou následující:

- Žák si připomene dosavadní poznatky a nedokončenou úlohu.
- Žák se seznámí s dalšími modely posloupnosti na úlohách z reálného života.
- Žák pracuje systematicky při objevování obecných vztahů.
- Žák objeví obecný vztah mezi čísly a zapíše ho.
- Žák dokáže sestavit graf posloupnosti.
- Žák pomocí návodných otázek formuluje definici posloupnosti.
- Žák nalézá generický model pro pojem posloupnost a jeho graf.

4.1.2 Organizace výukového předexperimentu

Výuka proběhne v kmenové třídě s interaktivní tabulí, kde promítnu zadání úloh v powerpointové prezentaci, znění otázek k vyvození teoretických poznatků a samotné teoretické poznatky. Žáci budou řešit úlohy nejdříve samostatně a poté mohou diskutovat řešení ve dvojicích. Později mohou i se sousedními žáky. Doporučím žákům zapisovat si výpočty na volné listy papírů a po společné prezentaci výsledků a ověření jejich správnosti si žáci zapíší správná řešení do sešitů. Výrazně rychlejší žáci dostanou za úkol řešit *další varianty*, které připisuji přímo do zadání konkrétních úloh.

4.1.3 Charakteristika žáků výukového předexperimentu

Před samotným výukovým experimentem se při mé výuce žáci několikrát setkali s prvky konstruktivistických přístupů (viz. odd. 4.1). Občas také pracovali ve dvojicích. Větší skupinky se příliš neosvědčily, protože mnozí žáci jsou introvertní, nejistí, stydliví a komunikace s někým jiným než se sousedem v lavici se většinou neuskutečňuje.

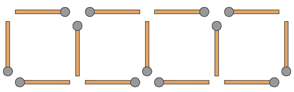
V předexperimentální třídě 2. ročníku je celkem 17 žáků, 9 dívek a 8 chlapců, z toho jeden chlapec, Jakub, s velkými dyskalkulickými obtížemi především v oblasti abstrakce a prostorové představivosti. U žáků používám fiktivní jména.

K hlubší analýze dosahování cílů výukového experimentu jsem si zvolila tři žáky, dvě dívky a jednoho chlapce. Udělala jsem s nim několik neformálních rozhovorů hned po ukončení hodiny ve třídě nebo na školní chodbě o přestávkách. K celkové reflexi výuky posloupností mi posloužily polostrukturované rozhovory s dotyčnými žáky provedené na konec tématu posloupností. První dívku Janu jsem vybrala pro její otevřenost, komunikativnost a dobré studijní výsledky. V matematce má ale jisté limity a považuji ji za průměrnou v porovnání s celou žákovskou populací. Druhá dívka Tereza má studijní výsledky v matematice špatné, z důvodu časté absence ve výuce a pro neochotu pracovat, jak sama několikrát předtím přiznala. Třetím vybraným žákem je chlapec Dan, perfekconista, velmi úzkostlivý. Úlohy řeší správně, píše bezchybné testy, ale neustále potřebuje ujišťovat o správnosti svého jednání. Očekávám, že se mu hodiny matematiky nebudou již tolik líbit, protože nedostane jednoznačný návod k řešení, úlohy budou mít i více způsobů řešení a on ztratí jistotu.

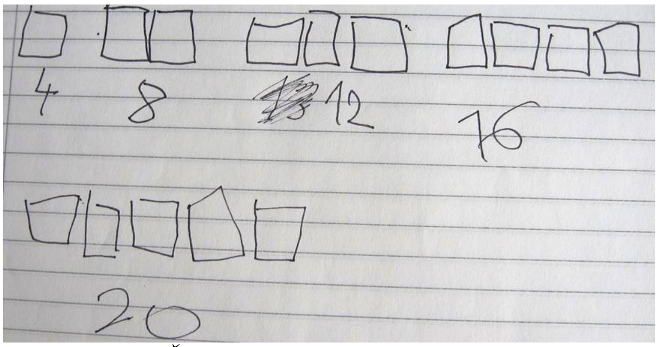
4.1.4 Průběh výukového předexperimentu

Během výuky jsem měla při sobě fotoaparát, na který jsem zachycovala obrazový a zvukový materiál. Po vyučovací hodině jsem si udělala do vytištěné přípravy krátké poznámky o průběhu a po ukončení tématu jsem vedla polostrukturovaný rozhovor se třemi vybranými žáky.

Výuka celého tématu posloupností probíhala podle připravené koncepce. Očekávaným problémům jsem čelila podle plánu. V první vyučovací hodině potvrdila technika brainstorming mou hypotézu, že žáci správně intuitivně chápou pojem posloupnost a v další výuce jsem se odkazovala na zmíněné zkušenosti žáků s tímto pojmem. Výuka také potvrdila mou druhou hypotézu, že žáci budou vyjadřovat negativní emoce ve vztahu k posloupnosti, které se váží k matematice obecně.



Obrázek 4.1: Předloha sirky



Obrázek 4.2: Řešení Jakuba

Při řešení první úlohy překreslili dva žáci špatně zadání (obr. 4.1). Vnímali obrázek jako soustavu samostatných čtverců, každý o čtyřech sirkách (obr. 4.2). Tuto chybu napravili, když jsem jim podala krabičku sirek se slovy: „Poskládejte sirky přesně podle obrázku.“ Očekávaný problém se tedy okamžitě vyřešil.

Při této úloze jsem použila pro zápis pořadí obrázku jako 1. *o*, 2. *o*, … a v další úloze s tečkami zase 1. *t,* 2. *t,* ... podle počátečních písmen a navrhla jsem, abychom zápis sjednotili na tradičně používané písmeno *a.* Žáci nadále používali proměnnou *a*, ale používali ji často chybně, a když jsem později použila jako index pořadí proměnnou *n,* byli ještě více zmateni.

První úloha na zobecňování funkčních vztahu mezi členy posloupnosti (viz. 4. úloha o množení bakterií) probíhala podle očekávání. Některým žákům chvíli trvalo, než začali úlohu řešit. Možná doufali, že jim řešení brzy sdělím nebo nevěděli, jak úlohu řešit. Žáci často původně navrhovali místo výrazu 2^x výraz $2x$. Použili známou funkci $y = 2x$ jako rekurentní vzorec, který neuměli jinak napsat. Což se u některých opakovalo i v dalších úlohách. Více jak polovina žáků třídy ale odhalila v posloupnosti čísel exponenciální funkci $y = 2^x$ a zapsala ji. Graf posloupnosti měla většina žáků spojitý a čtyři žáci schodovitý navzdory tomu, že jsem upozorňovala na odlišnost zadání již známé úlohy.

V další úloze na zobecňování jsem individuálně pomáhala Kryštofovi, který se snažil objevit vztah, ale nešlo mu to. Postupně jsem mu dávala rady, až vztah objevil. Nadšeně přitom zvolal: „Já jsem tak chytrej!“ Podíval se na mne a dodal: „Když Vás mám vedle sebe.“ Považuji to za velmi pozitivní zpětnou vazbu. Kryštof zažil pocit úspěchu a měl z něj radost a také vnímal primárně svůj podíl na objevení vztahu. Neměl pocit, že bych mu výsledek prozradila.

K definici posloupnosti jsme se podle plánu dostali ke konci čtvrté vyučovací hodiny. Formulovat ji dokázala Jana a ještě jeden žák. Možná by to dokázali i jiní žáci, ale oni dva to sdělili jako první. Tak jsem nechala ostatní zpětně vysvětlit souvislost definice s již probranými úlohami, abych se přesvědčila o jejich porozumění definici. U třech žáků jsem tohoto cíle nedosáhla (Jakub a další dva žáci, kteří mají s abstrakcí potíže).

4.1.5 Reflexe výukového předexperimentu

Během zkoumání tří vybraných žáků a následných rozhovorů se mi dostalo pozitivních zpětných vazeb. Všichni sdělovali, že výuka byla srozumitelná, pochopitelná a dobře organizovaná. Negativa neuváděli, což připisuji tomu, že jsme vždy hovořili osobně a nechtěli mi případné nedostatky říci tváří v tvář. Zmiňovali však nepochopení nebo zmatení ze symbolů n a a_n, což jsem sama během výuky pozorovala.

Jana, žákyně s dobrými školními výsledky, plnila veškeré zadané úkoly a řešila i mnohé varianty úloh, které byly navíc. Při řešení úloh nedělala příliš chyb a pokud nějaké udělala, tak je po opravě již neopakovala. Při objevování vzorce pro n-tý člen si rozepisovala výpočty do třetího nebo čtvrtého členu. Někdy také výpočet nerozepisovala vůbec a vzorce našla správně většinou napoprvé. V písemné reflexi uvádí: „Nevyhovuje mi, když už něco probíráme měsíc a rozepisujete výpočet do detailu. Připadám si potom hloupě a navíc mě to mate. Když už tomu rozumím, narušuje mi to vnitřní systém.“ Jana si osvojila práci se symboly n a a_n, ale při závěrečné reflexi výuky přiznává, že si jejich významem není příliš jistá. Nechala jsem ji opět formulovat, jak zmíněné symboly chápe. Parafrázovala má sdělení a definice. Zdálo se, že jim rozumí správně, ale v hlase měla tázavý a nejistý tón. Jako většinu žáků ji nejvíce zaujala Fibonacciho posloupnost. Domnívám se, že Jany nejisté uchopení symbolů n a a_n se pohybuje v kritickém místě na přechodu od pochopení funkční závislosti (která jí nečinila potíže a výpočet jednotlivých členů si nemusela příliš rozepisovat) k jejímu algebraickému vyjádření. Čtvrtá úloha ji sloužila jako generický model vyjádření posloupnosti, ale k druhému abstrakčnímu zdvihu a abstraktnímu modelu zápisu posloupnosti u ní nedošlo.

Tereza v rozhovoru přiznala, že některé pojmy a úlohy nepochopila, ale připisuje to své nepozornosti a časté nemoci. V průběhu experimentu mnohokrát chyběla. Opět je zde otázkou, zda negativa neuváděla pouze proto, aby se vyhnula případné nepříjemné konfrontaci a sdělila, že jí úlohy bavili, především úloha s králíky vedoucí na Fibonacciho posloupnost, nebo úloha na součet aritmetické řady, kde počítala se sedadly v hledišti. Prý ji tato praktická stránka úloh zaujala a bavila, stejně jako výskyt Fibonacciho posloupnosti v přírodě a ve zlatém řezu. Se zobecňováním úloh neměla potíže, ale neuměla pracovat se symboly n a a_n, a různě kombinovala vzorec pro n-tý člen se vzorcem rekurentním.

Dan nesplnil má negativní očekávání a jeho vztah k matematice zůstal nadále pozitivní. Přiznal se k tomu, že mu dělalo obtíže objevovat vzorce pro n-tý člen a sama jsem ve výuce nezřídka zaznamenala jeho nejistý a zklamaný pohled, když úlohu nevyřešil hned napoprvé. „Nejhůře mi šly asi některé složitější slovní úlohy, protože na ně nemám hlavu. Je jen škoda, že nemáme více matematiky, protože takto se všechno rychle zapomíná.“ Z druhé věty je patrný jeho zájem o matematiku, který projevuje i při jiných příležitostech. Pozitivní vztah zůstal podle mého přesvědčení díky tomu, že správný vzorec pro n-tý člen nakonec vždy našel a způsob výuky neměl vliv na jeho školní výsledky. Ve své práci byl velmi svědomitý a systematický, takže si výpočty opravdu poctivě a přehledně rozepisoval, hledal podobnosti, vztahy a souvislosti, což ho nakonec vždy dovedlo ke správnému zobecnění. Dan měl spíše potíže v pochopení funkční závislosti než s jejím algebraickým vyjádřením.

Manipulací s předměty jsem u některých žáků předešla problémům s matematizací úlohy nebo jim manipulace pomohla s jejich odstraněním. Při zobecňování vzorce pro n-tý člen pomáhalo psát více členů než původně zamýšlené čtyři. Celkově také žáci dělali pokroky při zobecňování, pracovali více systematicky a někteří právě v tomto typu úlohy spatřovali zábavu a projevovali radost z objevování.

Zásadní závěry pro mou koncepci výuky jsou takové, že značení n a a_n zavedu později, až žáci poznají více izolovaných modelů, protože se často objevovaly obtíže s jejich rozlišením a samotným pochopením, co písmena značí. (Tento problém ale zmiňovali i oslovení učitelé vyučující tradičním způsobem.) Mnou navržená koncepce výuky měla ve veliké míře pozitivní vliv na motivaci žáků k práci v hodinách matematiky, ale i mimo ně a v tomto ohledu považuji koncepci za vyhovující. K vyslovení definice posloupnosti se většina žáků ve čtvrté vyučovací hodině dopracovala a koncepci v tomto ohledu ponechám beze změny.

4.2 Hlavní výukový experiment

Hlavní výukový experiment proběhl ve 4. ročníku na začátku školního roku, v září 2013. Pro možné neznalosti tématu funkcí jsem zařadila na začátek dvě hodiny opakování funkcí (definice a předpis funkce, lineární a exponenciální funkce, jejich graf) a následným testem jako propedeutiku k posloupnostem. Vyučovací hodiny matematiky byly dvě za týden. V úterý 1. a 2. vyučovací hodinu.

Průběh výukového experimentu byl pozitivně ovlivněn tím, že výuka probíhala ve dvou vyučovacích hodinách bezprostředně po sobě jdoucích, přerušená pouze přestávkou. Úlohy na zobecňování vyžadují více času a mohla jsem se tak jedné úloze věnovat více do hloubky a dát žákům dostatek času na objevování mnohých vztahů včetně nanesení hodnot do grafu.

4.2.1 Příprava obsahu hlavního výukového experimentu

Po zpracování poznámek z předexperimentu jsem do koncepce výukového experimentu více zapracovala využití analogie posloupností s funkcemi a posunula na později zavedení proměnných n a a_n. Cíle hlavního experimentu se s cíli předexperimentu shodují, pouze vynechávám cíle týkající se zavedení a osvojení si práce s proměnnými označených n a a_n.

Stále budu zpočátku používat slovo závislost, ale budu více pracovat v jazyce funkcí a užívat nejdříve označení proměnných x a y. Až později, ve čtvrté vyučovací hodině, provedu výměnu proměnných x a y za jiná písmena. Než zavedu n a a_n, využiji i jiných označení proměnných podle počátečního písmene příslušné proměnné, například pro první obrázek použiji zápis 1. o, později o_1. Předpokládám lepší pochopení hodnot n a a_n a jejich vzájemné odlišení. Celý proces záměny shrnuji do následujícího schématu:

$$1.\ o \rightarrow o_1 \rightarrow a_1$$
$$2.\ o \rightarrow o_2 \rightarrow a_2$$
$$\dots$$
$$x\text{-tý } o \rightarrow o_x \rightarrow a_x$$
$$n\text{-tý } o \rightarrow o_n \rightarrow a_n$$

Jako první zavedu proměnnou n, kterou odůvodním vazbou na číselný obor přirozených čísel N a později a_n.

Při zobecňování vzorce pro n-tý člen pomáhalo žákům v předexperimentu psát více členů než původně zamýšlené čtyři. Proto především v počátku budu psát více prvních členů.

Definici posloupnosti zavedu podle původní koncepce na konci čtvrté vyučovací hodiny. Nejsem si ale stále jistá, zda to není příliš brzy. Domnívám se však, jak se mi potvrdilo v předexperimentu, že žáci budou přesto schopni pomocí série návodných otázek podstatu posloupnosti odhalit. Výhodou je, že mohu na definici dále stavět. Pohybuji se podle mého názoru na pomezí mezi konstruktivistickým a transmisivním přístupem a očekávám, že hlavní výukový experiment mi poodhalí další aspekty tohoto rozhodnutí.

4.2.2 Organizace hlavního výukového experimentu

Výuka bude organizována stejně jako předexperiment, proběhne v kmenové třídě s interaktivní tabulí, kde promítnu zadání úloh v powerpointové prezentaci, znění otázek k vyvození teoretických poznatků a samotné teoretické poznatky. Žáci si budou zapisovat do svých sešitů. Budou nad úlohami bádat nejdříve samostatně a poté diskutovat řešení ve dvojicích. Později mohou i se sousedními žáky.

4.2.3 Charakteristika žáků hlavního výukového experimentu

Ve 4. ročníku je 27 žáků, z toho 19 dívek a 8 chlapců, tři žáci mají diagnostikovanou dyskalkulii s obtížemi v různých oblastech.

K lepší analýze dosahování cílů výukového experimentu jsem si zvolila tři žáky, opět 2 dívky a 1 chlapce. Udělala jsem s nimi několik neformálních rozhovorů hned po ukončení hodiny ve třídě nebo na školní chodbě o přestávkách. K celkové reflexi výuky posloupností mi posloužily polostrukturované rozhovory s dotyčnými žáky po ukončení výuky posloupností.

První dívka Dominika má v matematice výborné výsledky a považuji ji za nadanou. Je snaživá a klade na sebe vysoké nároky. Očekávám od ní, že mi poskytne zpětnou vazbu k obtížnějším variantám gradovaných úloh. Druhá dívka Eliška má v matematice také výborné výsledky, ale spíše jí vyhovuje transmisivní přístup, jak sama komentovala po jedné z vyučovacích hodin: „Vím, jak mám počítat, dá se podle toho jednoduše naučit. Tyhle úlohy jsou zajímavý, baví mě, ale vždycky musím hodně přemýšlet, než příklad vypočítám." Očekávám u ní konflikt ve změně vyučovacího přístupu, třebaže nejde o radikální změnu. Třetím vybraným žákem je František pro jeho neangažovanost v hodinách matematiky, pro jeho hodnocení v matematice známkou nedostatečně a pro jeho tvůrčí nadání. Očekávám u něj především zvýšení motivace a z toho plynoucí lepší školní výsledky.

4.2.4 Průběh hlavního výukového experimentu

Během výuky jsem opět měla při sobě fotoaparát, na který jsem zachycovala obrazový a zvukový materiál. Po vyučovací hodině jsem si udělala do vytištěné přípravy krátké poznámky o průběhu a po ukončení tématu jsem vedla polostrukturovaný rozhovor se zmíněnými třemi vybranými žáky.

První dvě vyučovací hodiny: pojem posloupnost, uspořadatelnost prvků – fáze motivace a izolovaných modelů

V úvodu hodiny jsem žákům sdělila nové téma ve výuce, že se jím zabývám ve své diplomové práci a poprosila jsem je o spolupráci se zaznamenáváním dat na fotoaparát.

Opřela jsem se o jejich písemný souhlas, který každý ve škole vyslovil. Tyto informace jsem také avizovala již dříve, aby byli žáci připraveni.

Vyzvala jsem žáky k technice brainstormingu, kterou již znali, a tak jsme si pravidla jenom v krátkosti připomněli. Při brainstormingu jsem zapisovala uváděná hesla na tabuli a poté vybídla žáky, aby je roztřídili do skupin a pojmenovali je. Výsledek shrnuji pro přehlednost do tabulky:

Co to je posloupnost?	*Kde jsme posloupnost viděli?*	*Co cítíme při slově posloupnost?*
popořadě	sloup	bolest
systém	Řecko	utrpení
řada čísel	grafy	zlo
stupňování	čas	temno
seřazení	matematika	
navazující	jízdní řády	
	letopočet	
	žebříček	
	Leonardo da Vinci	

Tabulka 4.1: Brainstorming

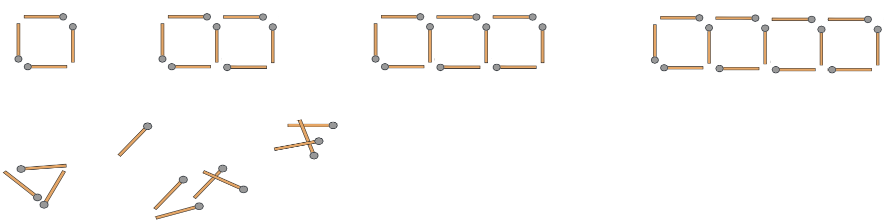
Žáci mi tak poskytli cennou reflexi svých dosavadních zkušeností s posloupnostmi a potvrdili mou hypotézu, že pojem posloupnost správně chápou, ale emoce jsou negativní.

Poté jsem zadala následující úlohu k samostatnému bádání:

1. Obrázky se mění podle určitého pravidla. Urči počet sirek v 5. obrázku podle objeveného pravidla a toto pravidlo zapiš.

a)

b)



Obrázek 4.3: Zadání úlohy se sirkami

Po chvíli se Dominika ptala: „Co je to *béčko*? To máme taky vyřešit?“ Když jsem přikývla na souhlas, přidal se Vlasta: „To je nesmysl! To přece nemůžu nikdy spočítat!“ Vybídla jsem žáky, aby splnili zadání úlohy, zatímco jsem prošla třídou a zkontrolovala řešení. První variantu úlohy měli všichni vypočtenou správně, zapsala jsem tedy na tabuli postup výpočtu:

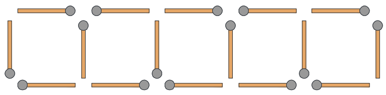
1. o ... 4

2. o ... 4 + 3 = 7

3. o ... 4 + 3 + 3 = 10

4. o ... 4 + 3 + 3 + 3 = 13

5. o ... 4 + 3 + 3 + 3 + 3 = 16



Obrázek 4.4: Řešení úlohy se sirkami

Když jsem po žácích chtěla, aby mi diktovali způsob výpočtu, měli v hlase otrávený tón. Obhajovala jsem rozepisování výpočtu jako pomůcku pro řešení těžších úloh. Argumentovala jsem i situací, která se stala v předexperimentu u Jakuba (viz. obr. 4.2, s. 32).

Ptala jsem se dále na řešení druhé varianty úlohy 1b). Ze zadní lavice reagoval Tomáš, který je velmi líný a na mé otázky odpovídá většinou velmi stroze nebo se odpovědi úplně vyhýbá: „Je to blbost!“ Na to po chvíli reagoval David: „Já bych tam dal dvě sirky.“ A na prstech ukazoval jejich polohu. Pobídla jsem ho k formulaci pravidla, podle kterého dospěl k tomuto závěru. Formuloval jedno hodně obecné, které by mohlo fungovat a já zase přidala jiné pravidlo s jiným výsledkem. Obrátila jsem se do třídy s otázkou: „Co je správně?“ Vlasta jako první vybral možnost, že úloha nemá řešení, v hlase měl ale tázavý tón. Přitakali mu další dvě žákyně. David přišel s dalším pravidlem a dalším řešením. Jelikož se žáci běžně nesetkávají s úlohou, která má divergentní řešení, prozradila jsem jim výsledek.

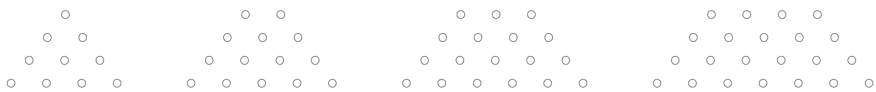
b) Nelze jednoznačně určit.

Tereza na to reagovala: „Takže to nemá řešení.“ Oponovala jsem, že to není pravda a chvíli jsem čekala, jak informaci žáci zpracují. Petra po chvíli zvolala: „Ahá, ono to má řešení, ale my nevíme který!“ Tak jsem úspěšně uzavřela první úlohu a vyzdvihla ještě důležitost slova *jednoznačně*.

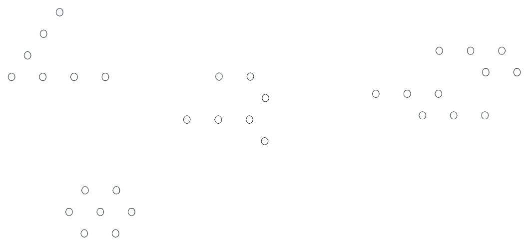
U následujících dvou úloh jsme si s žáky řekli pouze řešení, bez rozepisování výpočtů, aby měla vyučovací hodina spád a žáky nenudila. Pro ilustraci uvádím zadání.

2. Obrázky se mění podle určitého pravidla. Urči počet teček v 5. obrázku podle objeveného pravidla a toto pravidlo zapiš.

a)



b)



Obrázek 4.5: Zadání úlohy s tečkami

3. Urči další číslo namísto otazníku, předpokládáme-li, že se čísla mění podle určitého pravidla. Toto pravidlo zapiš.

a) 5 −12

−8 ?

−2

b) 1, −2, 3, −4, 5, −6, 7, ?

Žáci již neměli potíže určit správné řešení, i v případě ne-modelu posloupnosti.

Po těchto úlohách jsem položila otázky: „Kdy má smysl se ptát na další obrázky, čísla? Za jakých podmínek mluvíme o posloupnosti?“ Žáci nahlédli podmínku, že čísla nebo obrazce musí být uspořádané, formulovali sami toto pravidlo a zapsali si text, který jsem promítla na tabuli:

Aby se jednalo o posloupnost, musí být **členy uspořádané**. Uspořádanost nám určuje další členy posloupnosti. V závislosti na tom, o kolikátý člen jde, můžeme usuzovat na jeho hodnotu (u obrazců podobu).

V poslední části hodiny žáci pracovali na zobecnění vztahů mezi dvěma proměnnými. Oproti předexperimentu nepoužívám označení proměnné *n*, ale *x*.

4. Bakterie Lactobacillus Thermophillus, která tvoří z mléka jogurt, se dělí binárně – za každý časový úsek (přibližně 1 h) se buňka rozdělí na dvě totožné. Chemický laborant má za úkol každou hodinu buňky spočítat. Určete počty buněk, které laborant získal po 1., 2., 3., ..., 10., 100. a *x*-té kontrole přepokládáme-li, že žádná buňka nezemřela a buňky se dělí po jedné hodině.

+ Vyjádřete závislost počtu buněk na pořadí kontroly.

+ Zaznamenejte hodnoty do grafu (na osu *x* pořadí kontroly, na osu *y* počet buněk). Stačí prvních pět hodnot.

+ DALŠÍ VARIANTY: Jaké budou hodnoty při *x*-té kontrole za následujících podmínek:

a) Buňka se nedělí na 2, ale na 3 totožné buňky?

b) Buňka se dělí na 4 totožné buňky?

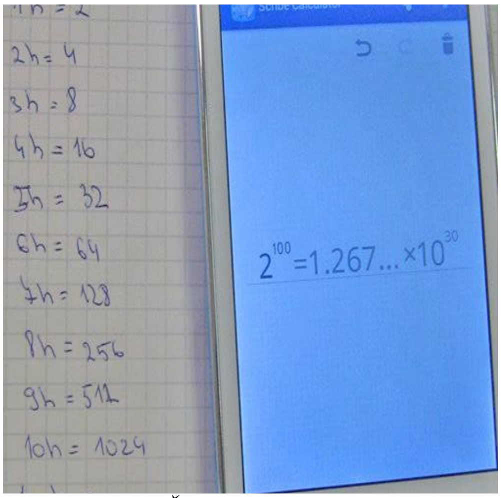
c) Buňka se dělí na 2 totožné a na začátku jich máme 5?

d) Buňka se dělí na 3 totožné a na začátku jich máme 5?

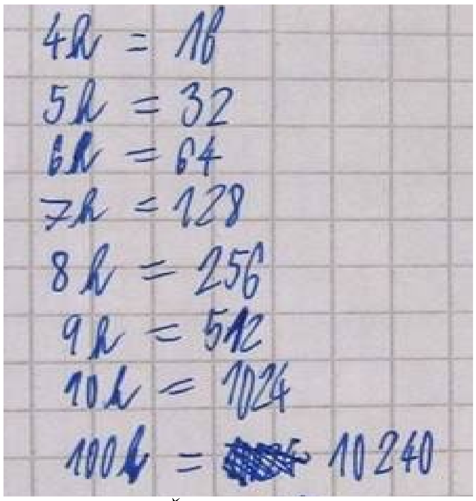
+ DOMÁCÍ ÚKOL: Jak se změní řešení úlohy, pokud jsou na začátku 4 buňky Lactobacilla?

Všichni žáci kromě Venduly zjistili hodnoty prvního až desátého členu samostatně, bez mé pomoci. Vendule jsem podala semena hrachu, aby množení znázornila rozložením hrachu na lavici, protože tečky nakreslené v sešitě prezentující buňky měla nahuštěné a bylo velmi obtížné, i pro mne, je spočítat. Jinak nebyl o semena hrachu zájem, žáci si vystačili s kreslením buněk, většinou do třetí kontroly laboranta, pak již zaznamenávali pouze čísla.

Při určování 100. členu nastaly mezi žáky značné rozdíly. Vlasta jako první nahlas do celé třídy sděloval: „To nejde vyřešit, kalkulačka to neumí!“ Navrhla jsem mu a celé třídě, ať zapíší pouze to, co zadávali do kalkulačky. Vlasta chvíli nechápavě koukal, ale napsal to. Chodila jsem mezi žáky a další dvě dvojice žáků měly úplně stejný problém jako Vlasta. Kateřina se mě také ptala, jak má zapsat výsledek, který jí ukázala kalkulačka (obr. 4.6). Zopakovala jsem nahlas do celé třídy, že stačí napsat pouze to, co zadávají do kalkulačky. A podpořila je argumentem, že jde také o číslo.



Obrázek 4.6: Řešení Kateřiny

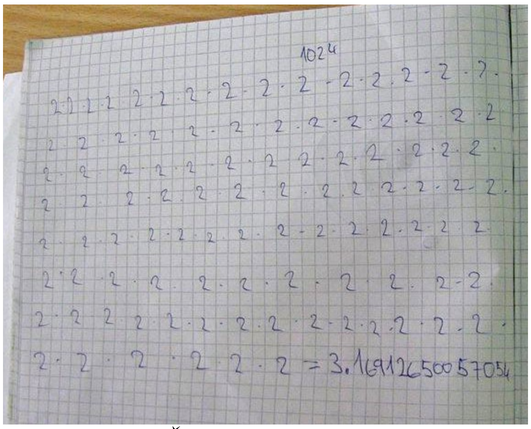


Obrázek 4.7: Řešení Elišky

Eliška měla zapsané řešení (obr. 4.7), které obhajovala popisem hodnoty pro 100. člen tak, že: „Každý další číslo se násobí dvěma, takže když chci stý číslo, násobím stem. Teda deseti! Když mám deset hodin, to je tisíc dvacet čtyři, a chci sto hodin, násobím deseti, protože $10 \cdot 10 = 100$.“ Snažila jsem se její teorii vyvrátit. „Podle tvého pravidla násobení deseti, by tedy mělo platit následující: Když je za čtyři hodiny šestnáct buněk, pak za osm hodin by jich mělo být třicet dva, ano? Protože $4 \cdot 2 = 8$, a $16 \cdot 2 = 32$. Počet hodin se zdojnásobí, takže počet buněk také.“ Eliška uznala, že její vztah nefunguje a snažila se chybu napravit. Stejnou chybu jsem později zaznamenala u jiné dívky, zatímco se Eliška opravila, když vyslechla mou radu a rozepsala si výpočty. Vyžádala jsem si pozornost celé třídy, ukázala chybné řešení a nechala jsem Elišku vysvětlit, proč to není správně. A poté ještě vysvětlit, jak to je správně..

Neochota pracovat s tvarem čísla 2^{100} je možná způsobena nedostatečnými znalostmi, ale u většiny žáků spočíval problém podle mého nározu spíše v tom, že nevnímali 2^{100} jako číslo, ale jako výpočet. Někteří zase nebyli ochotní s takovýmto způsobem zápisu hodnoty operovat pro jeho nepředstavitelnost (podobně jako s hodnotou ve tvaru $\sqrt{2}$ nebo s konstantou π). Osvojení tohoto zápisu čísla považuji za zásadní moment na cestě k vyjádření obecného výrazu 2^x. Jednak proto, že ze samotných čísel 2, 4, 8, 16 nebo 1 024 není vidět proces výpočtu, tedy není vidět jak získat jiné členy posloupnosti a jednak proto, že ukazuje schopnost žáka analyzovat proces výpočtu a nahlédnout vztah mezi čísly. Pokud žák došel v poznávacím procesu k hodnotě 2^{100} a obecnému vyjádření 2^x, došlo u něj k prvnímu abstrakčnímu zdvihu a žák si pravděpodobně vytvořil abstraktní model pro mocniny čísla dvě.

Petr pro získání hodnoty stého členu volí exhaustivní metodu (obr. 4.8).



Obrázek 4.8: Řešení Petra

Funkční závislost objevil správně, ale má problém na přechodu k jejímu algebraickému vyjádření. Neví jak tento výpočet zapsat v mocninném tvaru a výslednou hodnotu pro stý člen nemá správně vypočtenou. Když jsem mu napověděla otázkou: „Jak se zapíše v mocninném tvaru $2 \cdot 2$ nebo $2 \cdot 2 \cdot 2$?“, uvědomil si podobnost a zapsal výsledek správně.

David, který se věnuje matematice jen do té míry, aby neměl na vysvědčení pětku, s naprostou samozřejmostí uvedl výsledek $1\,024^{10}$. Jeho slovní popis závislosti „...každou hodinu se násobí...“ není dostačující, avšak vztah matematizoval správně. Pobídla jsem ho dále ke zobecnění. Později jsem nechala jeho spolužáky rozhodnout, zda platí vztah $2^{100} = 1\,024^{10}$. Žádný v jeho tvrzení důvěru neměl a David si před nimi musel svůj zápis obhájit, a to se mu povedlo.

Za tohoto stavu zvonilo na přestávku. Dominika se přihlásila a ještě před mým odchodem ze třídy chtěla vědět, zda je její řešení správné, což bylo. Během přestávky za mnou přišel na chodbu Vlasta, abych mu také potvrdila správnost výsledku. Jeho řešení ale neodpovídalo, musel ho přepracovat a ještě během přestávky za mnou přišel znovu se správným řešením. David za mnou s návrhem obecného vzorce přišel také ještě během přestávky. Zeptala jsem se ho, jak se od výrazu $1\,024^{10}$ dopracoval k 2^x. Odpověděl s lehkostí, že číslo 1 024 mu při nalézaní vzorce nefungovalo. Byla to pro mne velice pozitivní zpráva ze dvou důvodů: prvním důvodem je, že žáci byli natolik motivováni a zaujati úlohou, že ji řešili i o přestávce a druhým, že jsem motivovala Davida, který jindy raději kouká z okna a spokojí se známkou dostatečně.

V další hodině jsem si vyžádala pozornost celé třídy a napsala na tabuli:

1. kontrola … 2	$(= 2^1)$	7. k … 128	$(= 2^7)$
2. k … $4 = 2 \cdot 2$	$(= 2^2)$	8. k … 256	$(= 2^8)$
3. k … $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$	$(= 2^3)$	9. k … 512	$(= 2^9)$
4. k … $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	$(= 2^4)$	10. k … 1 024	$(= 2^{10})$
5. k … 32	$(= 2^5)$	100. k …	
6. k … 64	$(= 2^6)$	x-tá k …	

Vybídla jsem žáky, aby si čísla zapsali v mocninném tvaru, a ubezpečila jsem je, že jde také o čísla a mohou s nimi operovat. Vysvětlila jsem také, kde je v zápisu schováno násobení dvěma mezi sousedními členy. Když jsem poté prošla třídou, dalších pět žáků uvedlo správný výsledek pro stou kontrolu a Dominika i pro libovolnou x-tou. Když jsem potvrdila těmto žákům správnost stého členu, opravili si sami i hodnotu x-tého členu.

Původně ale šestnáct žáků zapsalo obecný vztah jako $y = 2x$. Použili tuto známou funkci jako rekurentní vzorec, který neuměli jinak napsat. Což se u některých opakovalo i v dalších úlohách. O rekurentním zápisu jsem jim ještě neříkala, pouze jsem jim potvrdila správnost myšlenky rekurze, a zároveň vyvrátila správnost zápisu vzorce pro n-tý člen dosazením několika hodnot proměnné.

Po získání všech sledovaných hodnot a doplnění řešení na tabuli jsem se věnovala grafům. Načrtla jsem na rameno tabule, které jsem žákům skryla, tabulku a pak jsem jim navrhla, že si data mohou nanést do tabulky, jak jsou tomu zvyklí u funkcí a jejich grafů. Jako ukázku jsem odkryla rameno tabule. Grafy žáků byly původně bez výjimky spojité, jak jsem očekávala a jak tomu bylo i v předexperimentu ve 2. ročníku.

Položila jsem žákům otázky: „Kdo má body grafu spojené?“ Téměř všichni žáci zvedli ruku. „Kdo má nechané jenom body?“ Nikdo se nehlásil. „Co je správně a proč?“ Někteří se podivovali nad mou otázkou. Po chvíli reagovala Tereza: „Mno, budou to jenom body.“ Obhájit tvrzení matematicky nedokázala a přiznala, že tak usuzuje podle toho, že jsem se na to ptala. Prozradila jsem jim tedy správnou odpověď a vyzvala je, aby si graf opravili a neodcházeli z hodiny s chybným řešením. Vysvětlení jsem nechala žákům k zamyšlení do příště s malou nápovědou, ať se zaměří na to, že jde o kontroly a hodnoty v nich naměřené.

Závěry z těchto prvních dvou vyučovacích hodin:

- Žáci intuitivně chápou pojem posloupnost a na základě příkladu a protipříkladu posloupnosti odvodili bez problémů potřebu uspořadatelnosti, která se objevovala již v heslech při brainstormingu.
- Žáci asociují negativní emoce v souvislosti s pojmem posloupnost.
- Žáci nevidí potřebu rozepisovat výpočet v první úloze, kde mají najít pouze několik blízkých členů. Rozepisování výpočtu tedy nechávám až na úlohu, kde žáci zobecňují.
- Práce s velkými čísly, které vyčíslí kalkulačka pouze pomocí desetinného rozvoje, nutí žáky pracovat s hodnotami v mocninném tvaru, což je žádoucí.
- Žáci obecný vztah mezi proměnnými spíše tipují a nekontrolují si ho. Snadno lze jejich řešení vyvrátit dosazením několika prvních členů. Ukáži příště žákům, jak si sami mohou ověřit správnost navrženého vztahu.
- Žáci bez problémů nalézají rekurentní vztah mezi čísly, ale neumí ho zapsat.
- Žáci bez přemýšlení tvoří spojité grafy. Je potřeba již ve výuce funkcí seznámit žáky s diskrétními funkcemi a jejich grafy. Budu více ověřovat, zda žáci vědí, proč je graf diskrétní a to na úlohách s (pseudo)reálným kontextem.

Druhé dvě vyučovací hodiny: posloupnost jako funkce s definičním oborem přirozených čísel – fáze izolovaných modelů a abstrakční zdvih ke generickému modelu

Na začátku hodiny jsem nechala žáky říci, co se o posloupnostech doposud dozvěděli, a zkontrolovala jsem domácí úkol. Poté jsem se vrátila k otázce z konce minulé hodiny: „Proč je graf diskrétní a proč jsou grafem pouze body?“ Nikdo neodpověděl. Zřejmě nad tím žáci nepřemýšleli, protože nápověda: „Co by znamenal bod grafu, jehož x-ová souřadnice je 1,5?“ navedla hned dva žáky ke správné odpovědi. Poté jsem se ještě dotazovala dalších žáků, abych se přesvědčila, že významu diskrétnosti grafu rozumí.

V hlavní části vyučovací hodiny jsem navodila atmosféru k sehrání dramatické scénky. „Představte si, že jste se všichni stali drogovými dealery. Ti si mezi sebou prodávají drogy takovým způsobem, že si polovinu množství nechají a polovinu prodají dalšímu dealerovi. Ten zakoupenou polovinu opět rozdělí na půlky, jednu půlku si nechá a druhou prodá dál, atd. Konkrétně použijeme *papírek* LSD (mám v ruce list formátu A4) a budeme ho trhat.“

Proběhla krátká debata o tom, co je LSD, a vyzývala jsem dobrovolníky (kvůli veliké početnosti třídy) k zapojení do scénky. Po každém *prodeji* jsem se *dealera* ptala na část *papírku*, kterou si ponechal. Žáci byli schopni dělit *papírek* až na jednu dvaatřicetinu, což pro demonstraci změny hodnot stačilo. Petra při sledování scénky vznesla námitku, že „...by pak dealeři prodávali drogy hrozně málo a nevyplatilo by se jim to.“ To se mi hodilo ke krátké zmínce drogové problematiky, kterou jsem zamýšlela. Podala jsem žákům informaci, že dealer musí drogu namíchat s něčím jiným, aby zvětšil objem, např. s moukou nebo omítkou. Připomněla jsem žákům také již dříve sdělenou informaci o nastavování uzenin sojovými preparáty. Tato mezipředmětová vazba trvala přibližně 3 minuty. Poté jsem promítla zadání:

5. Dealeři prodávají drogu takovým způsobem, že si polovinu množství nechají a polovinu prodají dalšímu dealerovi. Ten zakoupenou polovinu rozdělí zase na poloviny, jednu si nechá a druhou prodá dál, atd. Určete množství drogy, které měli jednotliví dealeři (1., 2., 3., ..., 10., 100., x-tý dealer).

\+ Vyjádřete závislost množství drogy na pořadí dealera.

+ Zaznamenejte hodnoty do grafu (na osu *x* pořadí dealera, na osu *y* množství drogy).

+ DALŠÍ VARIANTY: Určete množství drogy, které by měli jednotliví dealeři (1., 2., 3., ..., 10., 100., *x*-tý dealer) za následujících podmínek:

a) Drogu nedělí na 2, ale na 3 díly a nechávají si pouze 1 díl?

b) Drogu dělí na 3 díly a nechávají si 2 díly?

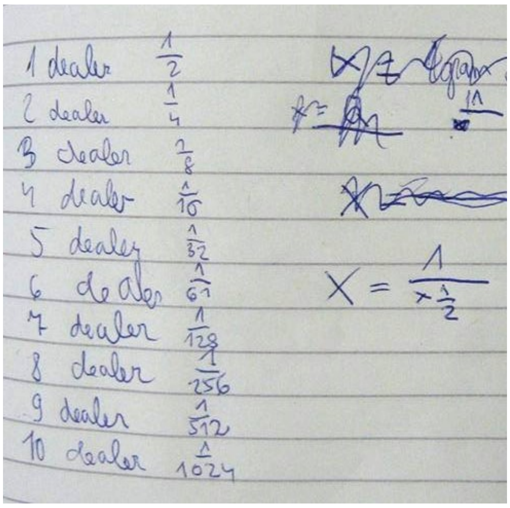
c) Drogu dělí na 4 díly a nechávají si pouze 1 díl?

d) Drogu dělí na 4 díly a nechávají si 3 díly?

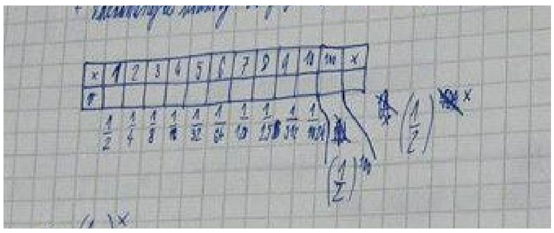
+ DOMÁCÍ ÚKOL: Jak by se změnilo řešení úlohy, kdyby jednotliví dealeři dělili drogu na 3 díly a nechávali si 2 díly?

Při řešení této úlohy se u pěti žáků objevily potíže s určením konkrétního množství drogy, i když jsem považovala za dostačující sehrání scénky se sdělením, jak velký díl má konkrétní *dealer.* Tři dyskalkuličtí žáci určili hodnoty až po krátkém připomenutí látky zlomků. Ostatní žáci poměrně rychle objevili ve jmenovateli zlomku hodnoty funkce $y = 2^x$.

Objevila se také formální chyba v zápisu (obr. 4.9), kdy Kristýna objevila vliv jedné poloviny na výpočet, ale zapsat to neuměla. Opět jsem ve výuce narazila na kritické místo na přechodu od pochopení funkční závislosti k jejímu algebraickému vyjádření.

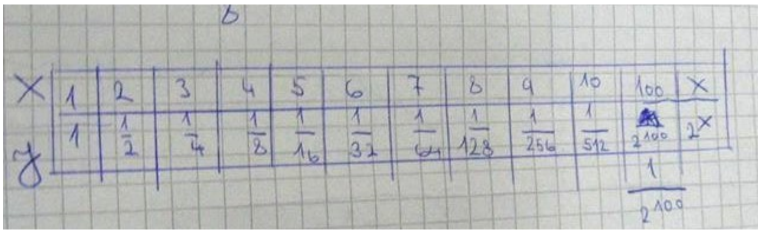


Obrázek 4.9: Zobecnění Kristýny


Obrázek 4.10: Zobecnění Elišky

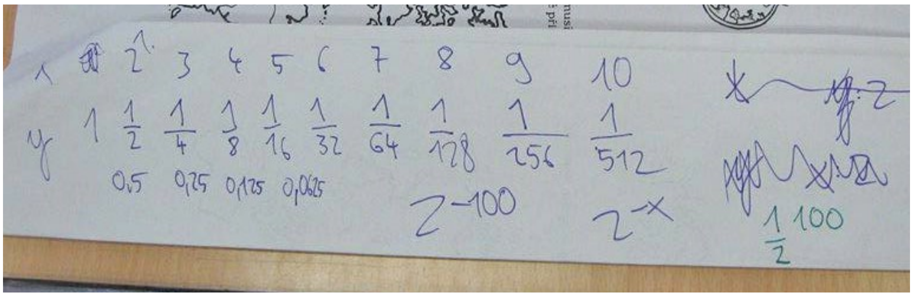
Další zajímavý moment nastal nad zobecněným řešením Elišky (obr. 4.10), ve kterém se promítlo její transmisivní přijímání informací. Eliška má zafixovanou exponenciální funkci $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, a proto nevyjádřila posloupnost funkcí $y = \frac{1}{2^x}$ jako mnozí její spolužáci. Na mou otázku: „Kde jsi mezi členy nahlédla jednu polovinu?“ reagovala: „Já si tuhle exponenciální funkci pamatuju.“ Zde jí dobrá paměť urychlila proces zobecňování, protože nemusela vztah objevovat a ihned se jí vybavila spojitost mezi jednotlivými čísly a předpisem funkce.

Petr z neobjasněného důvodu napsal zobecněný vztah bez čitatele (obr. 4.11). Jeho záznam údajů se ale stává přehlednější, nemá problém s vyjádřením čísla ve tvaru 2^{100} nebo 2^x.



Obrázek 4.11: Zobecnění Petra

Další způsob zapsání výsledných hodnot (obr. 4.12) byl pro mne hodně překvapující především proto, že s ním přišel František, který podobně jako David pracuje v hodinách matematiky spíše do té míry, aby nepropadal.



Obrázek 4.12: Zobecnění Františka

Ještě zajímavější bylo jeho vysvětlení na mou otázku: „Jak jsi přišel na znaménko mínus v mocnině?“ Odpověděl: „Protože to jde do mínusu. Hodnota čísel se zmenšuje.“ Jako doplnění svého tvrzení načrtává kružnici, kterou dělí na polovinu a pak ještě polovinu z poloviny. Dodává: „Kdyby to šlo do plusu, tak získávám větší a větší čísla.“ A kreslí vedle další kružnici jako 2^1, k těmto dvěma ještě další dvě kružnice jako 2^2 a k těmto čtyřem ještě další čtyři kružnice jako 2^3. Pochválila jsem ho za jeho vysvětlení, že se mi moc líbí, a zeptala se, zda toto vysvětlení už někdy slyšel. Odpověděl s jistotou a s lehkým údivem nad mou otázkou: „Ne, tak to prostě je, ne?“

Úspěšným řešitelům jsem zapsala bonusové body a nechala Františka sdělit ostatním žákům řešení úlohy. Vyzvala jsem ještě další dva žáky, aby formulovali svůj způsob řešení: Elišku, která měla funkci $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, a jiného žáka s funkcí $y = \frac{1}{2^x}$. Napsala jsem všechny tři zápisy obecného vztahu vedle sebe na tabuli a položila žákům otázku, zda si jsou výrazy rovny. Někteří žáci začali bez rozmyslu tipovat. Vybídla jsem je, aby si napsali dané výrazy do rovnosti a pokusili se rovnost úpravou výrazů dokázat nebo ji vyvrátit. Šest žáků rovnost dokázalo a já důkaz zapsala na tabuli. Pro kontrolu jsem se obrátila k neúspěšným řešitelům s otázkou, jaký by byl výsledek pro 50, 99 a 200 dealerů, abych se přesvědčila, zda řešení již porozuměli, a také abych dosazením demonstrovala rovnost všech třech výrazů.

Po přestávce jsem se zaměřila na graf posloupnosti s otázkou: „Kdo má body grafu spojené?“ Nyní nikdo ruku nezvedl. „Kdo má nechané jenom body?“ Nadpoloviční většina žáků se hlásí. „Co je správně a proč?“ Žáci mlčeli. Nevěděla jsem, zda stále nenašli důvod, tak jsem je navedla k zamyšlení o významu hodnoty 1,5 v definičním oboru. Dominika správně odpověděla, že „...bychom museli mít 1,5-tého dealera.“ Vrátila jsem se tedy ještě ke grafu čtvrté úlohy z předchozího týdne a nechala jsem další žáky i u této úlohy zdůvodnit nespojitost grafu.

Byli jsme v polovině vyučovací hodiny a já promítla další úlohu, ve které jsem v porovnání se zadáním v předexperimentu zaměnila původní označení proměnné *n* za intuitivnější *v*.

6. V sázce je výhra 1 000 000 Kč. Jak se změní výherní částka v závislosti na počtu výherců (1, 2, 3, ..., 10, 100, *v*), pokud všichni výherci získávají stejný obnos peněz?

+ Vyjádřete závislost výše výhry na počtu výherců.

+ Zaznamenejte hodnoty do grafu (na osu *x* počet výherců, na osu *y* výši výhry).

+ DOMÁCÍ ÚKOL: Jak se změní řešení úlohy, pokud jsou v sázce 3 000 000 Kč?

+ DALŠÍ VARIANTY:

a) Jak se změní řešení úlohy, pokud jsou v sázce 2 752 000 Kč?

b) Každý výherce má nějakou osobu natolik rád, že se jí rozhodne dát polovinu výhry. Jakou částku dostane tato osoba, pokud je 1, 2, 3, ..., 10, 100 a v výherců?

c) Jak se změní řešení úlohy pro 1, 2, 3, ..., 10, 100 a v výherců, pokud z celkového počtu výherců vždy jeden člověk výherní lístek ztratí? (Například pro 10 výherců je pouze 9 výherních lístků a částka se rozdělí mezi 9 výherců).

Tuto úlohu vyřešili žáci poměrně rychle, jediný problém byl s nanášením hodnot na osu y v grafu. Někteří si ale uvědomili, že podobný problém již někdy ve výuce řešili, a zvolili si vhodné měřítko pro nanášení hodnot. Některým jsem pomohla.

Graf byl vždy diskrétní. Vysvětlení jsem požadovala od tří žáků, u kterých jsem si ještě nebyla jistá, zda důvod pochopili. Argumentovali správně: „Není žádný 1,5-tý výherce.“ Dalšího žáka jsem nenechala pouze zopakovat tento argument a chtěla jsem jinou formulaci, abych se přesvědčila, že nereprodukuje odpověď spolužáka bez pochopení. „Není žádný 2,5-tý nebo 3,5-tý výherce.“ Třetí žák Jirka z pochopitelných důvodů volil stejnou odpověď, ale s jinými čísly. Požadovala jsem nyní úplně jinou formulaci, abych se přesvědčila, že žák nepostřehl pouze fakt, že musí v odpovědi měnit hodnoty. Jirka se tvářil dotčeně a po chvíli řekl: „Prostě dealeři nemůžou bejt desetinný číslo, ale jenom celý.“ To jsem považovala za dostatečné.

Po těchto šesti úlohách jsem se odvážila položit otázku: „Jakým pojmem se v matematice označuje závislost mezi dvěma množinami prvků?“ Nikdo neodpověděl. U předexperimentální třídy 2. ročníku jsem žákům doporučila prolistovat sešity a hledat, jedna žákyně spojitost s funkcemi našla, ale ve 4. ročníku jsem se neměla na co odkázat. Pomohla jsem si tedy otázkami: „S jakým tématem máte spojené grafy? Ve kterém tématu se určuje definiční obor a obor hodnot?“ Na to už správně reagovala Eliška. Ptala jsem se na definiční obor a po získání správné odpovědi jsem promítla definici:

Posloupnost je funkce s definičním oborem množiny přirozených čísel N.

Tuto definici jsem nechala žáky zpětně *objevit* ve všech předchozích úlohách i s grafy a reflektovala proběhlou výuku.

Závěry z těchto dvou vyučovacích hodin:

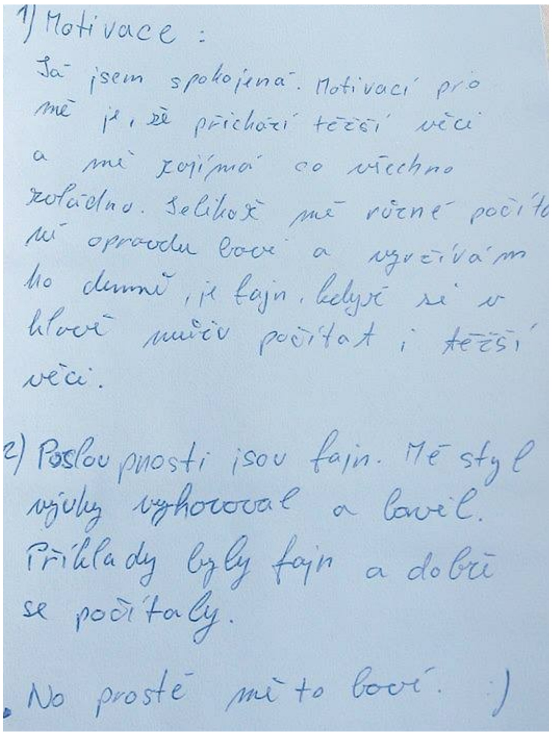
- Žáci byli motivováni řešit zadané úlohy, všichni bez výjimky úlohy řešili.
- Žáci poznali další dva izolované modely posloupnosti.
- Někteří žáci zaznamenávají data více přehledně a hledají systém pro zobecnění funkčních vztahů.
- Žáci pracovali s vyjádřením čísla v mocninném tvaru.
- U jedné dívky se opakovala chyba v aplikaci vztahu mezi hodnotami pořadí členu posloupnosti na vztah mezi hodnotami členu jako předchozí týden u jiných dvou dívek. Chybující žákyně jsem nechala řešení opravit.
- Patnáct žáků objevilo jednu z funkcí $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = \frac{1}{2^x}$, $y = 2^{-x}$ a šest z nich dokázalo jejich rovnost.
- U poslední 6. úlohy měli všichni žáci graf diskrétní, o porozumění tomuto faktu mě přesvědčily odhadem tři čtvrtiny žáků.
- František přišel s velmi pěkným vysvětlením jak funguje záporné číslo v exponentu.
- Žáci upevnili vztah posloupnosti a funkce. Tři žákyně (Dominika, Eliška a Tereza) objevili pomocí návodných otázek definici posloupnosti a přibližně polovina žáků ji zpětně objevila v konkrétních úlohách.

4.2.5 Reflexe hlavního výukového experimentu

Při závěrečné reflexi, kdy měli žáci napsat *Moje pocity při výuce posloupností,* se mi dostalo pozitivních reakcí. Negativní emoce žáci nevyjadřovali vůbec. Dvě dívky a dva chlapci psali o lhostejnosti nebo nezájmu k tématu a volili spíše emočně neutrální adjektiva. Oproti počátečnímu negativnímu postoji k posloupnostem to považuji za úspěch. Ostatní žáci hodnotili výuku jako srozumitelnou, dobře vysvětlenou a zajímavou. Žáky bavilo například skládání kamenů do figurálních čísel, Fibonacciho posloupnost, její historie, výskyt v přírodě, zlatý řez nebo výpočet sedadel v hledišti (součet aritmetické řady).

Při prezentaci výskytu Fibonacciho posloupnosti v přírodě dokonce František zvolal: „Teď konečně vidím, že je matika smysluplná!“ Jeho dosavadní pololetní hodnocení z matematiky byla za mého působení (seřazeno chronologicky): nedostatečné, dostatečné, výborné. Jeho výkony se během výukového experimentu rapidně zlepšili, což jsem velmi oceňovala a chválila, protože jsem z toho měla upřímnou radost a také proto, abych upevnila jeho práci ve výuce. Zobecňování mu nečinilo žádné potíže, úlohy vyřešil mezi prvními ve třídě a řešil je velmi elegantně. To jsem také před třídou velmi chválila a poukazovala na jeho skrytý talent, který nechává nevyužitý dřímat. Domnívám se ale, že pokud by mu tento typ úloh nešel a nezískával bonusové body, nepracoval by. Protože jako motivaci uváděl pouze zisk bonusových bodů k testu: „Když jsem věděl, že stačí dělat v hodině a pak budu mít v testu výhodu, tak jsem dělal. Jaký byly úlohy, mi bylo jedno.“ Jeho angažovanost a dobré výkony v hodinách matematiky zůstávají nadále.

Dominika mi napsala následující reflexi (obr. 4.13):


1) Motivace:
Já jsem spokojená. Motivací pro mě je, že přichází těžší věci a mě zajímá co všechno zvládnu. Jelikož mě různé počítání opravdu baví a využívám ho denně, je fajn, když se v hlavě můžu počítat i těžší věci.

2) Posloupnosti jsou fajn. Mě styl výuky vyhovoval a bavil. Příklady byly fajn a dobře se počítaly.

No prostě mě to baví. :)

Obrázek 4.13: Reflexe Dominiky

Během vyučovacích hodin opravdu pracovala s velikým nasazením a měla výborné výsledky. Je na sebe náročná a někdy si vyžádala k úloze další varianty a mohla jsem si k ní také dovolit otázky na zobecňování dalších vztahů a postřehování vzájemných souvislostí. (Františkovi se nechtělo s těmito otázkami namáhat). Ke správnému zobecnění docházela většinou po několika neúspěších. Dominika svou cestu od chybného řešení ke správnému komentovala následovně: „Abych si to opravila, pomohlo mi rozepisovat ty výpočty, jak jste ukazovala. Sice to byla někdy otrava, ale to mi pomáhalo. A taky jsem zbytečně dělala chyby, když jsem si myslela, že to napíšu hned, jak pochopím zadání a pak jsem v tom zamotala. Vy jste pořád říkala, že to mám zkusit rozepsat, ale já to chtěla vyřešit rovnou, i bez toho. Ale to rozepisování bylo dobrý."

Eliška se přiznala, že jí vadila nepřehlednost látky: „Nevěděla jsem co počítat, co to je za úlohy. Věděla jsem jenom, že se to týká posloupností. Až nakonec se to vždycky shrnulo, ale vůbec jsem nevěděla jak si psát zápisky, protože jsme nejdřív počítali ty úlohy, a pak to nějak shrnuli." I někteří jiní žáci nebyli schopni vytáhnout si sami z úloh a z nich vyvozené teorie informace, roztřídit je a kategorizovat. Psali přesně, co bylo na powerpointové prezentaci. Tento způsob organizace výuky trénujeme i mimo výukový experiment a stále některým žákům činí potíže. Jde o jistý způsob zobecnění a abstrakce, nestačí si teorii pouze zapsat a naučit se jí reprodukovat, ale je potřeba jí především porozumět. To některým žákům činí potíže. Domnívám se, že neporozumění může být nedostatkem zkušeností s tímto přístupem, neochotou se nad úlohami a souvislostmi zamýšlet nebo také z důvodu individuálních kognitivních obtíží s abstrakcí.

Na úvodních čtyřech hodinách výuky žáky zaujalo, že funkční vztah můžeme zapsat více způsoby a že žákům různá (správná) řešení uznám a netrvám pouze na jediném způsobu: „Líbilo se mi, že způsob řešení nebyl daný dopředu a mohl jsem ho sám objevit. A taky bylo fajn, že jste uznala i různý řešení." Žáci si také chválili reálný kontext úloh: „...že nepočítáme jenom s čísly, ale můžu si za tím něco představit...", a že mohou řešení diskutovat a porovnávat s ostatními. Toto vše uváděli žáci jako motivační faktory ve výuce, a v největší míře se objevoval faktor zisku bonusového bodu k písemce.

4.3 Závěr výukového experimentu

Koncepci výuky posloupností i vybrané části pro výukový experiment hodnotím z hlediska motivace pozitivně. Experiment motivoval žáky k práci z několika důvodů. Nejčastější a asi také nejsilnějším faktorem byl zisk bonusového bodu k testu. Některým žákům sice úlohy na zobecňování řešit nešly a nezískávali bonusové body, přesto se o ně snažili. Alespoň pro konkrétní čísla, což jsem bez výjimek požadovala. Jedna žákyně to odůvodnila takto: „Když všichni počítali a šlo jim to, tak jsem nechtěla bejt jediná za blbce, kterýmu to nejde.“ Tento faktor podporovalo i to, že žáci mohli diskutovat řešení ve dvojicích nebo se spolužákem sedícím před nimi či za nimi v lavici a styděli by se přiznat, že nic nevypočítali.

Dalším silným motivačním faktorem, který žáci v reflexi uváděli, bylo individuální tempo, které způsob práce umožňoval. Žáci měli dostatek času na objevování vztahů a já měla roli podporovatele a kontrolora. Jejich práce byla z velké části samostatná, a i když jsem některým žákům dost pomáhala a napovídala, měli pocit, že úlohu vyřešili oni (viz. situace s Kryštofem, s. 33).

Pololetní klasifikace se u mnohých žáků zlepšila, u Františka dokonce z hodnocení dostatečné na výborné. Velmi potěšujícím a velikým ukazatelem zaujetí žáků úlohami bylo, když za mnou chodili po skončení vyučovací hodiny. Reálný kontext úloh žáci chválili, byl pro ně zajímavý a pomáhal jim pochopit funkční vztahy. Jako motivace k řešení úlohy ale reálný kontext žákům nesloužil, nezmiňovali ho v reflexi.

První fáze poznávacího procesu proběhla u žáků úspěšně a cíl experimentu motivovat žáky učit se matematice byl z velké části naplněn. Další fáze poznávacího procesu směřovali přímo ke zobecňování, které probíhali ve dvou úrovních.

První úrovní a cílem úvodních čtyř vyučovacích hodin bylo dospět zobecněním k definici posloupnosti. S pomocí několika izolovaných modelů jednotlivých úloh, pracování s proměnnými x a y, používání slova závislost aj., došli žáci ke generickému modelu posloupnosti, většinou ale až v pozdější výuce bezprostředně navazující na výukový experiment. Nejčastěji jim jako generický model sloužila čtvrtá úloha s bakteriemi a její graf s proměnnými x a y. K druhému abstrakčnímu zdvihu došlo pouze u některých žáků, a to až ke konci výuky posloupností. Usuzuji tak z toho, že dotyční žáci uváděli u řešení úloh pojmy funkce, grafy tvořili diskrétní a neodkazovali se při obhajobě řešení na konkrétní úlohu, ale pouze na obecné vztahy.

Tři žáci napsali v reflexi jako pozitivum, že posloupnosti pochopili. Jeden z nich konkrétně napsal: „Posloupnosti jsem ke konci pochopil.“ Vzhledem k tomu, že šlo o anonymní písemné hodnocení výuky, neměla jsem šanci zjistit konkrétnější formulaci. Vysvětluji si to dvěma způsoby. Výuka byla koncipována podle poznávacího procesu M. Hejného, kdy žák dojde k definici pojmu a její podstatě až na konci poznávacího procesu, tedy žák pochopil význam posloupnosti až na konci výuky tématu a můžeme to považovat za žádoucí reflexi výukového experimentu. Nebo posloupnosti ke konci pochopil, protože až ke konci bylo téma jinými žáky shrnuto, související pojmy byly zaneseny do myšlenkové mapy a někdo jiný mu transmisivně předal informace, které on sám neobjevil. Obě dvě vysvětlení považuji za vhodná, protože cílem ve vyučování je látku pochopit, a k tomu žák dospěl. Třebaže bych preferovala první vysvětlení.

Druhou úroveň, ve které probíhalo zobecňování, tvořili jednotlivé úlohy vedoucí na zobecňování. Ty vyvolaly u některých žáků (včetně Elišky) očekávané nevole. Důvodem tomu byla vysoká náročnost úloh na kognitivní dovednosti. Zpočátku dělaly většině žáků problémy, ale někteří později hodnotili úlohy jako zajímavé a bavilo je objevovat vztahy a souvislosti. Několikrát jsem u žáků narazila na kritické místo na přechodu od pochopení funkční závislosti k jejímu algebraickému vyjádření. K algebraickému vyjádření posloupnosti vzorcem pro n-tý pomáhalo vždy systematické rozepisování jednotlivých výpočtů, hledání podobností mezi výpočty a hledání závislosti hodnot na pořadí členu. Žáky ke zobecnění vzorce pro n-tý člen nutila vysoká čísla, která už nemohli spočítat na kalkulačce. Vysoká čísla měla i tu výhodu, že nabádala žáky opustit myšlenku rekurze, která se snáze odhalila, ale pro výpočet dalekého členu byla nevyhovující. Překážkou na přechodu k algebraickému vyjádření funkčního vztahu bylo neosvojení zápisu čísla v mocninném tvaru, ať už z důvodu převažujícího vnímání zápisu jako proces nebo pro absenci této znalosti.

Zajímavé bylo také pozorovat proces záměny proměnných x a y za n a a_n. Žáci bez obtíží pracovali s x a y, a když jsem zvolila jiná písmena, většina z nich je nechtěla použít. Jelikož jsem trvala na výsledku s příslušnými proměnnými, provedli na konci zobecnění substituci za x a y. Když jsem žákům v další výuce navazující na výukový experiment navrhla sjednotit písmena na n a a_n, probíhalo to stejně. Pracovali s x a y a jako poslední krok zaměnili označení proměnné. Jazykem teorie M. Hejného: označení proměnných x a y bylo žákům generickým modelem. Problémy s používáním n a a_n se oproti předexperimentu podstatně zmenšili, především přechod z konkrétních hodnot na obecné x a později n považuji za plynulý a úspěšný. Ve své pedagogické činnosti se nyní zaměřím na přechod k hodnotě a_n, protože při jejím zavedení začali žáci zmatkovat a v obecném řešení zaměňovali a_n za n a naopak.

5 Závěr

Posloupnosti jsou považovány za jednoduchou středoškolskou látku například oproti goniometrickým funkcím nebo logaritmu. Pracují s definičním oborem přirozených čísel a jsou pro člověka poměrně intuitivní. Bohužel jsou tradičně vyučovány *naruby*. Intuitivní představa o posloupnosti je ignorována, zavádí se matematická definice (zobecnění všech vztahů), která intuitivní představě nijak neodpovídá a pak se počítají úlohy (izolované modely). Úlohy zbavené reálného kontextu, za kterými žák opět nevidí žádnou souvislost s dosavadní představou o posloupnosti. Využívá se pouze analogie s pořadím. Na tento přístup ve vyučování jsem zvyklá, matematika mi vždy šla dobře a jako žákyně i jako studentka jsem se do ukončení bakalářského studia s jiným přístupem nesetkala. Přesto mi tento přístup jako učitelce nevyhovuje a považuji ho za jakési filosofování bez vztahu k realitě.

Ve své výuce postupně zavádím konstruktivistické prvky a diplomová práce pro mne byla příležitostí zpracovat a analyzovat jedno téma zcela podle konstruktivistických zásad. Chtěla jsem sama sobě, ale i případným čtenářům dokázat, že konstruktivistický přístup má své místo i na střední škole, že nemusí jít o žádné „hraní" a pro žáky bude taková výuka zajímavá a motivující. Tento cíl považuji za splněný. Reálný kontext úloh a zobecňování vztahů žáky opravdu zaujali a bavili, což ještě umocnil systém bodování.

Koncept respektuje fáze poznávacího procesu podle teorie M. Hejného a žáci ve velké míře dospěli ke zobecnění vztahů a pojmu posloupnost. Kritickým místem byl přechod od pochopení funkční závislosti k jejímu algebraickému vyjádření, které zmiňují M. Rendl a N. Vondrová v analýze výzkumu TIMSS. Žákům činilo potíže rozepisovat výpočty a analyzovat je, ať už z lenosti nebo pro jejich náročnost. Problém také činili matematické neznalosti jako problém se zapsáním čísla v mocninném tvaru nebo ve tvaru zlomku. Obtíže se v průběhu experimentu a další výuky zmenšovali, žáci pracovali systematičtěji a chybovali méně.

Hlavní přínos diplomové práce byl pro mne v tom, že jsem připravila koncept výuky, který žáky motivoval k práci a zmírnil jejich negativní postoj k učení se matematice. Když za mnou žáci chodili s otázkami i o přestávce, měla jsem upřímnou radost a radost je ještě větší, protože diskuze o matematice iniciované žáky probíhají během přestávek i nadále. Velmi mě to motivuje k další práci a dalším vlastním přípravám na výuku v duchu konstruktivistických přístupů, které mi jsou bližší.

Ze stejných důvodů může být má práce přínosná i pro jiné učitele, kteří by rádi ve výuce zavedli konstruktivistické přístupy, ale časová náročnost přípravy takové výuky, neověřenost přípravy nebo jiné faktory je odrazují. Některé z uvedených úloh lze také do výuky integrovat samostatně jako úlohu vedoucí ke zobecnění funkčních vztahů ve výuce funkcí (lineární funkce, exponenciální funkce, racionální lomená funkce) nebo jako úvodní motivační úlohu či domácí úkol.

Nyní se v konceptu výuky posloupností zaměřím na zavedení proměnné a_n, protože se zde ještě objevovaly obtíže a na stejné obtíže si stěžovali i jiní učitelé na různých typech škol vyučující spíše tradičním způsobem, které osobně znám nebo u nichž jsem praktikovala.

Posloupnosti tedy nejsou tak jednoduchým učivem, za jaké se považují a jejich vyučování podnětným způsobem může vyvolat mnohé zajímavé momenty, které obohatí pohled žáka i učitele na matematiku.

6 Literatura

Appropriating geometric series as a cultural tool: study of student collaborative learning. *Educational Studies in Mathematics* [online]. 2010, roč. 74, č. 2 [cit. 2013-12-03]. Dostupné z: http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10649-010-9230-0

A constructivist lesson to introduce arithmetic sequences with patterns. *Australian Mathematics Teacher* [online]. 2005, roč. 61, č. 4 [cit. 2013-12-03]. Dostupné z: http://eric.ed.gov/?id=EJ743576

CALDA, E. *Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU, 2. díl.* Praha: Prometheus, 1997.

HEJNÝ, M. Mechanismus poznávacího procesu. In Hejný, M., Novotná, J., Stehlíková, N. (eds.), *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky.* PedF UK, Praha: 2004. s. 23-42.

HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D. *Matematické úlohy pro druhý stupeň základního vzdělávání: Náměty pro rozvoj kompetencí žáků na základě zjištění výzkumu TIMSS 2007.* Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání, 2011.

HEJNÝ, M., KUŘINA, F. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. Praha: Portál, 2009.

KOMENSKÝ, J. A. *Didaktika analytická*. Praha: Samcovo knihkupectví, 1946.

KRYNICKÝ, M. *Posloupnosti a jejich vlastnosti* [online]. 2010. [cit. 2013-13-04]. Dostupné z: http://www.realisticky.cz/kapitola.php?id=76

MANDÍKOVÁ, D. Výsledky českých žáků ve výzkumu TIMSS 2007. In *Sborník ze semináře OS FPS JČMF: Jak učím fyziku?* PF UJEP, Ústí nad Labem: 2009. s. 1-13.

MAREŠ, J. Pedagogická psychologie. Praha: Portál, 2013.

Národní program rozvoje vzdělávání: Bílá kniha. Praha: MŠMT, 2001.

NAKONEČNÝ, M. *Základy psychologie*. Praha: Academia, 2001.

ODVÁRKO, O. *Matematika pro gymnázia: Posloupnosti a řady.* Praha: Prometheus, 1995.

PALEČKOVÁ, J., TOMÁŠEK, V. BASL, J. *Hlavní zjištění výzkumu PISA 2009: Umíme ještě číst?* Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání, 2010.

PALEČKOVÁ, J., TOMÁŠEK, V., a kol. *Hlavní zjištění výzkumu PISA 2012: Matematická gramotnost patnáctiletých žáků.* Praha: ČSI, 2013.

PIAGET, J., INHELDEROVÁ, B. *Psychologie dítěte*. Praha: Portál, 1997.

POSPĚLOV, D. A., PUŠKIN, V. N. *Myšlení a automaty.* Praha: Academia, 1978.

Porozumění matematice, matematické řemeslo a tvořivost. *Matematika, fyzika, informatika.* 2002, roč. 12, č. 1, s. 1-12.

Rámcový vzdělávací program pro gymnázia. Praha: Výzkumný ústav pedagogický, 2007.

Rámcový vzdělávací program pro obor knihkupecké a nakladatelské činnosti. Praha: Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy, 2009.

Rámcový vzdělávací program pro obor letecký mechanik. Praha: Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy, 2010.

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. Praha: Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy, 2007.

RENDL, M., VONDROVÁ, N. Kritická místa v matematice u českých žáků na základě výsledků šetření TIMSS 2007. *Pedagogická orientace,* 2014, roč. 24, č. 1, s. 22-57.

STEHLÍKOVÁ, N. Konstruktivistické přístupy k vyučování matematice. In Hejný, M., Novotná, J., Stehlíková, N. (eds.), *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky.* PedF UK, Praha: 2004. s. 11-21.

STRAKOVÁ, J., TOMÁŠEK, V., PALEČKOVÁ, J. *Třetí mezinárodní výzkum matematického a přírodovědného vzdělávání. Souhrnné výsledky žáků posledních ročníků středních škol*. Praha: Výzkumný ústav pedagogický, 1996.

Školní vzdělávací program Knižní kultura. Praha: Střední škola knižní kultury, o. p. s., 2013.

Výsledky českých žáků ve výzkumu PISA 2009 – zhoršení v matematice i přírodních vědách. *Matematika, fyzika, informatika.* 2011, roč. 21, č. 4. s. 210-222.

ZHOUF, J., a kol. *Matematické příběhy z korespondenčních seminářů*. Praha: Prometheus, 2006.

7 Seznam obrázků

8 Seznam tabulek

Přílohy

Příloha 1 Powerpointová prezentace k výukovému experimentu

POSLOUPNOSTI

BRAINSTORMING

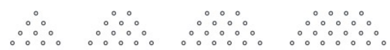
1. Obrázky se mění podle určitého pravidla. Urči počet sirek v 5. obrázku dle objeveného pravidla a toto pravidlo zapiš.

a)

b)

2. Obrázky se mění podle určitého pravidla. Urči počet teček v 5. obrázku dle objeveného pravidla a toto pravidlo zapiš.

a)



b)

3. Urči další číslo místo otazníku, předpokládáme-li, že se čísla mění dle určitého pravidla. Toto pravidlo zapiš.

a) 5 −12

−8 ?

−2

b) 1, −2, 3, −4, 5, −6, 7, ?

POSLOUPNOST

- Kdy má smysl se ptát na další prvky? Za jakých podmínek mluvíme o posloupnosti?

  *Aby se jednalo o posloupnost, musí být **členy uspořádané**. Uspořádanost nám určuje další členy posloupnosti. V závislosti na tom, o kolikátý člen jde, můžeme usoudit na jeho hodnotu (u obrazců podobu).*

- Jaký zjednodušený zápis bychom použili místo vypisování: „první obrázek je 4“, „druhé číslo je 7“, atd.?

4. Bakterie Lactobacillus se dělí binárně – za každý časový úsek (1 h) se buňka rozdělí na dvě totožné. Chemický laborant má za úkol každou hodinu buňky spočítat. Určete počty buněk, které laborant získal po 1., 2., 3., ..., 10., 100. a *x*-té kontrole přepokládáme-li, že žádná buňka nezemřela a buňky se dělí po jedné hodině.

+ Vyjádřete závislost počtu buněk na pořadí kontroly.

+ Zaznamenejte hodnoty do grafu (na osu *x* pořadí kontroly, na osu *y* počet buněk).

+ DOMÁCÍ ÚKOL: Jak se změní řešení úlohy, pokud je na začátku 5 buněk Lactobacilla?

+ DALŠÍ VARIANTY: Jaké budou hodnoty při *x*-té kontrole za následujících podmínek:

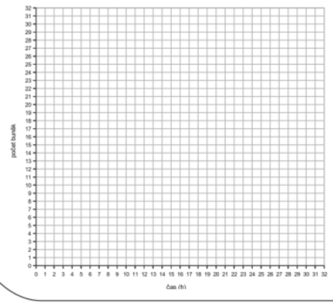
a) Buňka se nedělí na 2, ale na 3 totožné buňky?

b) Buňka se dělí na 4 totožné buňky?

c) Buňka se dělí na 2 totožné a na začátku jich máme 5?

d) Buňka se dělí na 3 totožné a na začátku jichmáme 5?

- Jak má vypadat správně graf? Bude jím spojitá křivka? Zdůvodněte.



5. Dealeři distrubují drogu tak, že si půl dávky nechají a půlku prodají dál. Určete množství drogy, které budou mít jednotliví dealeři (1., 2., 3., ..., 10., 100., *x*-tý).

+ Vyjádřete závislost množství drogy vůči pořadí dealera.

+ Zaznamenejte hodnoty do grafu (na osu x pořadí dealera, na osu y množství drogy).

+ DOMÁCÍ ÚKOL: Jak by se změnilo řešení úlohy, kdyby jednotliví dealeři dělili drogu na 3 díly a nechávali si 2 díly?

+ DALŠÍ VARIANTY: Určete množství drogy, které by měli jednotliví dealeři (1., 2., 3., ..., 10., 100., *x*-tý dealer) za následujících podmínek:

a) Drogu nedělí na 2, ale na 3 díly a nechávají si pouze 1 díl?

b) Drogu dělí na 3 díly a nechávají si 2 díly?

c) Drogu dělí na 4 díly a nechávají si pouze 1 díl?

d) Drogu dělí na 4 díly a nechávají si 3 díly?

6. V sázce je výhra 1 000 000 Kč. Jak se změní výherní částka v závislosti na počtu výherců (1, 2, 3, ..., 10, 100, *v*), pokud všichni výherci získávají stejný obnos peněz?

+ Vyjádřete závislost výše výhry na počtu výherců.

+ Zaznamenejte hodnoty do grafu (na osu *x* počet výherců, na osu *y* výši výhry).

+ DOMÁCÍ ÚKOL: Jak se změní řešení úlohy, pokud jsou v sázce 3 000 000 Kč?

+ DALŠÍ VARIANTY:

a) Jak se změní řešení, pokud je v sázce částka 2 752 000 Kč?

b) Každý výherce má nějakou osobu natolik rád, že se jí rozhodne dát polovinu výhry. Jakou částku dostane tato osoba, pokud je 1, 2, 3, ..., 10, 100 nebo *v* výherců?

+ DALŠÍ VARIANTY:

c) Jak se změní řešení úlohy pro 1, 2, 3, ..., 10, 100 a *v* výherců, pokud z celkového počtu výherců vždy jeden člověk výherní lístek ztratí? (Například pro 10 výherců je pouze 9 výherních lístků a částka se rozdělí mezi 9 výherců).

- Kdo má body grafu spojené? A kdo ne? Co je správně a proč?
- Jakým pojmem se v matematice označuje závislost mezi dvěma množinami prvků? (Závislost počtu studentů ve škole na čase, závislost počtu ujetých kilometrů na spotřebě benzínu, závislost hodnoty čísla na jeho pořadí.)

Posloupnost je funkce s definičním oborem přirozených čísel *N*.