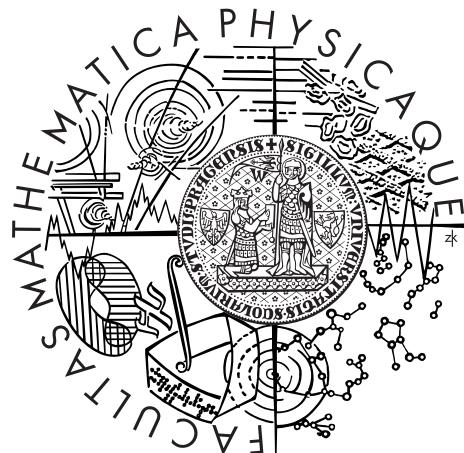


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Bc. Filip Dohnálek

Hustota Minkovského funkcionálů stacionárních náhodných množin

Matematický ústav UK

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Jan Rataj, CSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Pravděpodobnost, matematická statistika a ekonometrie

Praha 2014

Je mou milou povinností poděkovat prof. RNDr. Janu Ratajovi, CSc., za odborné vedení při tvorbě práce, za cenné rady, trpělivost a čas, který mi věnoval při konzultacích. Nerad bych opomenu i doc. RNDr. Tomáše Mrkvičku, Ph.D., který poskytl používaný software včetně potřebného know how. Dále děkuji své přítelkyni a celé své rodině za jejich podporu v průběhu psaní diplomové práce.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 27. července 2014

Filip Dohnálek

Název práce: Hustota Minkovského funkcionálů stacionárních náhodných množin

Autor: Bc. Filip Dohnálek

Katedra: Matematický ústav UK

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Jan Rataj, CSc., Matematický ústav UK

Abstrakt: V předložené práci nalezneme vybudovanou teorii náhodné uzavřené nadúrovňové množiny generované Gaussovským reálným náhodným polem. Specializujeme se na reálné náhodné pole, které je definované na regulární stratifikované varietě. Součástí textu je určení podmínek pro náhodné pole a stratifikovanou varietu, za kterých existují hustoty vnitřních objemů pro nadúrovňové množiny. Při existenci hustot vnitřních objemů jsou následně odvozeny vlastnosti a vztahy hustot vnitřních objemů nadúrovňového modelu. Na závěr je provedena simulační studie, kde porovnáváme teoretické a odhadované hodnoty hustot. Následně je vedena diskuze k výsledkům, které poté porovnáváme s Booleovským modelem.

Klíčová slova: Hustota vnitřních objemů, Nadúrovňová množina, Reálné náhodné pole, Varieta

Title: Density of Minkowski functionals of stationary random sets

Author: Bc. Filip Dohnálek

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: prof. RNDr. Jan Rataj, CSc., Mathematical Institute of Charles University

Abstract: In the presented work we can find the created theory of random closed excursion set generated by means of Gaussian real random field. We specialize in a real random field, which is defined on the regular stratified manifold. The text includes a determination of conditions for a random field and stratified manifold in which densities of the intrinsic volumes for excursion sets exist. Then subsequently attributes and relations of the excursion set are derived for the existence of densities of the intrinsic volumes. Finally, a simulated study is made where we compare theoretical and estimated values of densities. This is followed by a discussion on the results, which we compare to the Boolean model.

Keywords: Densities of the intrinsic volume, Excursion set, Manifold, Real random field

Obsah

Používané symboly	2
Úvod	3
1 Teoretická část	5
1.1 Náhodné pole	5
1.1.1 L^2 -diferencovatelnost náhodného pole	6
1.2 Varieta	8
1.2.1 Tečný prostor	10
1.2.2 Whitneyho stratifikovaný prostor	12
1.2.3 Vnitřní objemy Whitneyho stratifikovaného prostoru	13
1.3 Náhodné pole na varietách	15
1.4 Hustoty vnitřních objemů	17
1.5 Funkce splňující podmíinku hladkosti	25
1.6 Booleovský model	29
2 Numerická část	35
2.1 Popis algoritmu	35
2.2 Dosavadní výsledky	36
2.3 Realizace 2D	37
2.4 Realizace 3D	38
2.5 Diskuze	38
Příloha 1	47
Příloha 2	50
Seznam použité literatury	53

Používané symboly

\mathbb{N}	množina přirozených čísel
\mathbb{N}_0	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
\mathbb{Z}	množina celých čísel
\mathbb{R}^d	d -rozměrný Euklidův prostor
\mathbb{R}	množina reálných čísel
$\mathbb{R}_{\geq 0}$	množina nezáporných reálných čísel
\mathcal{B}	systém borelovských množin
\mathcal{B}_0	systém omezených borelovských množin
\mathcal{K}	systém kompaktních a konvexních množin v \mathbb{R}^d
\mathcal{K}'	systém neprázdných kompaktních a konvexních množin v \mathbb{R}^d
\mathcal{C}	systém kompaktních množin v \mathbb{R}^d
\mathcal{S}	rozšířený konvexní okruh v \mathbb{R}^d
\mathcal{F}	systém uzavřených množin v \mathbb{R}^d
$N(0,1)$	normované normální rozdělení
u_α	α -kvantil normovaného normálního rozdělení
$U(a,b)$	rovnoměrné rozdělení na intervalu $[a,b]$
C_f	kovarianční funkce náhodného pole f
l.i.m.	limita v prostoru \mathcal{L}^2
(M,g)	Riemannova varieta
$T_t M$	tečný prostor množiny M v bodě t
$S(T_t M)$	množina všech jednotkových tečných vektorů prostoru $T_t M$
α	normálový Morseho index
\mathcal{H}_d	Hausdorffova d -rozměrná míra
$B^i(x,r)$	koule se středem x o poloměru r v prostoru \mathbb{R}^i
κ_i	objem jednotkové koule $B^i(0,1)$
ω_i	povrch jednotkové koule $B^i(0,1)$
Graff_k^d	systém všech affinních k -dimenzionálních podprostorů množiny \mathbb{R}^d
C^d	jednotková krychle $[0,1]^d$
C_0^d	jednotková polootevřená krychle $[0,1)^d$
$\partial^+ C^d$	$C^d \setminus C_0^d$
$\text{dist}(x,X)$	vzdálenost bodu x od množiny X
\oplus	Minkovského suma
$\mathbf{1}_A$	indikátorová funkce množiny A
M°	vnitřek množiny M
M^c	komplement množiny M
M^\perp	ortogonální doplněk množiny M
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	skalární součin
Id	identické zobrazení
$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$	$\binom{n}{k} \frac{\kappa_n}{\kappa_{n-k} \kappa_k}$

Úvod

Dovolte mi na samém začátku seznámit Vás s důvody napsání této diplomové práce. Uvažujme, že máme neprázdnou kompaktní a konvexní množinu $K \subset \mathbb{R}^d$ v d -rozměrném Eukleidovském prostoru. Známý Steinerův vzorec říká, že pro libovolné $\epsilon > 0$ platí rovnost

$$V_d(K_\epsilon) = \sum_{i=0}^d \epsilon^i \kappa_i V_{d-i}(K),$$

kde $K_\epsilon := \{x \in \mathbb{R}^d : \text{dist}(x, K) \leq \epsilon\}$, $V_i : \mathcal{K}' \rightarrow \mathbb{R}$ jsou funkcionály definované na systému neprázdných konvexních a kompaktních množin v \mathbb{R}^d a κ_i značí objem jednotkové koule v prostoru \mathbb{R}^i . Pro soubor funkcionálů $\{V_i\}_{i=0}^d$ nebo soubor vhodně normovaných funkcionálů se uchytilo několik pojmenování. Můžeme se setkat s pojmem Minkovského funkcionál, Steinerův funkcionál případně s názvem integrál křivosti. Po zralé úvaze jsem se přiklonil ke krásnému českému názvu a nadále budeme mluvit o vnitřních objemech. Toto označení má své opodstatnění. V případě dvourozměrného prostoru je hodnota $V_2(K)$ rovna objemu množiny K a hodnota $2V_1(K)$ je rovna obvodu množiny K . V případě trojrozměrného prostoru platí analogie. Objem množiny K je roven hodnotě $V_3(K)$. Povrch množiny K je roven $2V_2(K)$ a střední šířka množiny K je rovna hodnotě $1/2V_1(K)$. Pro doplnění $V_0(K)$ jest Eulerova charakteristika množiny K , což pro konvexní a kompaktní množinu je vždy rovno jedné. Vnitřní objemy se nedefinují pouze pro neprázdné konvexní a kompaktní množiny, ale postupným rozšiřováním se zavádí pro daleko bohatší systémy množin.

Nechť Z je stacionární náhodná uzavřená množina. Definujeme hustoty vnitřních objemů předpisem

$$\bar{V}_k(Z) := \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}\{V_k(Z \cap rK)\}}{V_d(rK)}, \quad k \in \{0, \dots, d\},$$

pouze pokud limita existuje a je nezávislá na K . V textu se někdy bude objevovat místo hustota označení intenzita vnitřních objemů. Teoretická hodnota hustot vnitřních objemů zůstává pro mnohé množiny neznámá. Výjimkou zůstává Booleovský model, který bude představen v kapitole 1.6 a kompletní informace o něm nalezneme v knize [12]. Najít jiný model, pro který budeme znát intenzitu, byl jeden z cílů této práce. Moje bádání se zaměřilo na nadúrovňové množiny. Představme si, že f je reálné náhodné pole na prostoru $T \subset \mathbb{R}^d$. Definujme náhodnou uzavřenou množinu předpisem

$$A_u(f, T) := \{t \in T : f(t) \geq u\},$$

kde $u \in \mathbb{R}$ je parametr nadúrovňové množiny. Problematice nadúrovňových množin generovaných náhodným polem na varietách se zabývá kniha [1], odkud bereme základy pro vybudování teorie v následujících kapitolách. Na tuto teorii jsem úspěšně navázal a podařilo se mi vypracovat takzvaný nadúrovňový model, u kterého známe teoretické hodnoty hustot vnitřních objemů respektive Minkovských funkcionálů. Nechybí ani tvrzení a následné odvození vlastností nadúrovňového modelu.

Druhým zajímavým úkolem, kterého jsem se zhostil, bylo pokusit se implementovat odhady objevující se v článcích [6] a [7] pro hustoty vnitřních objemů na nově objeveném modelu. Jak už bylo uvedeno výše, jsou známy hustoty vnitřních objemů pouze pro Booleovský model. To znamená, že pro vyhodnocení odhadu mělo smysl používat odhad pouze na tento model. Objevením nového modelu rozšírujeme pole působnosti použití odhadu. Navíc v článku [5] se objevuje simulační studie pro Booleovský model v trojrozměrném prostoru. Ze závěru článku plyne, že odhad hustoty Eulerovy charakteristiky pro Booleovský model v prostoru nevykazuje příliš dobré výsledky. Nastává otázka, jak se bude odhad chovat pro nadúrovňový model. Speciálně bude-li odhad hustoty Eulerovy charakteristiky pro trojrozměrný prostor taktéž problematický. Z těchto důvodů jsem provedl simulační studii. Pro výsledky a diskuzi s komentáři je vyhrazena závěrečná část diplomové práce.

Kapitola 1

Teoretická část

Nebude-li uvedeno jinak, tak v celém textu explicitně pro hodnotu dimenze odpovídajícího prostoru používáme symbol $d \in \mathbb{N}$.

1.1 Náhodné pole

Definice. Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ je pravděpodobnostní prostor a budiž $T \subset \mathbb{R}^d$. Pak soubor reálných náhodných veličin $\{f(t) : t \in T\}$ definovaných na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ nazveme reálným náhodným polem na T .

Definice. Reálné náhodné pole f nazveme Gaussovským polem, jestliže všechna jeho konečně rozměrná rozdělení jsou normální, tj. pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $t_1, \dots, t_n \in T$ má vektor $(f(t_1), \dots, f(t_n))^T$ n -rozměrné normální rozdělení.

Poznámka :

Gaussovské náhodné pole f je jednoznačně určeno středními hodnotami

$$m(t) := \mathbb{E}\{f(t)\}, \quad t \in T$$

a kovarianční funkcí

$$C_f(s, t) := \text{cov}(f(s), f(t)) = \mathbb{E}\{(f(s) - m(s))(f(t) - m(t))\}, \quad s, t \in T.$$

U reálných náhodných polích lze rozlišovat takzvanou striktní a slabou stacionaritu. My si však vystačíme pouze s pojmem stacionarity a uvedeme definici, aby nedocházelo k nejasnostem.

Definice. Řekneme, že reálné náhodné pole f s konečnými momenty je stacionární, jestliže střední hodnota $m(t)$ je konstantní pro všechny $t \in T$ a kovarianční funkce je invariantní vůči posunutí, tj. $C_f(s + h, t + h) = C_f(s, t)$ pro všechny $s, t \in T$ a $h \in \mathbb{R}^d$ splňující $s + h, t + h \in T$.

V případě stacionárního náhodného pole f se dopouštíme zjednodušení zápisu kovarianční funkce $C_f(s - t) = C_f(s, t)$, kde první $C_f(\cdot)$ je funkce jedné proměnné na \mathbb{R}^d .

Definice. Řekneme, že reálné stacionární náhodné pole f je izotropní, pokud $C_f(s, t) = C_f(s', t')$ pro všechny $s, t, s', t' \in T$ splňující $|s - t| = |s' - t'|$.

V případě izotropního náhodného pole f se analogicky jako ve stacionárním případě dopouštíme zjednodušení zápisu kovarianční funkce $C_f(|s - t|) = C_f(s, t)$, kde první $C_f(\cdot)$ je tentokrát funkce na $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

1.1.1 L^2 -diferencovatelnost náhodného pole

Není-li explicitně uvedeno jinak, mluvíme-li o reálném náhodném poli, máme vždy na mysli centrované náhodné pole na \mathbb{R}^d s konečnými druhými momenty a někdy místo pojmu náhodné pole použijeme pojem náhodný proces.

Definice. Řekneme, že reálné náhodné pole f s konečnými druhými momenty má L^2 -parciální derivaci řádu $k \in \mathbb{N}$ v bodě $t \in \mathbb{R}^d$, a to ve směru $t' = (t'_1, \dots, t'_k)$, kde $t'_i \in \mathbb{R}^d$ pro všechny $i \in \{1, \dots, k\}$, pokud existuje následující limita v \mathcal{L}^2

$$D_{L^2}^k f(t, t') := \lim_{h_1, \dots, h_k \rightarrow 0} \frac{1}{\prod_{i=1}^k h_i} F(t, (h_1 t'_1, \dots, h_k t'_k)),$$

kde funkce F je dána předpisem

$$F(t, (h_1 t'_1, \dots, h_k t'_k)) := \sum_{s \in \{0,1\}^k} (-1)^{k - \sum_{i=1}^k s_i} f \left(t + \sum_{i=1}^k s_i h_i t'_i \right).$$

První suma v definici F prochází přes všechny posloupnosti velikosti k sestávající se ze samých nul a jedniček a limita je myšlena postupná. L^2 -parciální derivaci řádu k v bodě t , a to ve směru t' značíme výše uvedeným symbolem $D_{L^2}^k f(t, t')$.

Bude-li mít reálné náhodné pole L^2 -parciální derivaci řádu k pro všechny body t , a to pro všechny směry t' , pak zkráceně řekneme, že reálné náhodné pole f je L^2 -diferencovatelné řádu k . L^2 -diferencovatelná reálná náhodná pole tvoří širší škálu procesů, než budeme potřebovat. Zaměříme se pouze na procesy mající L^2 -parciální derivaci.

Definice. Mějme $k \in \mathbb{N}$ a $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, d\}$. Budíž f reálné náhodné pole, které má ve všech bodech $t \in \mathbb{R}^d$ L^2 -parciální derivaci řádu k , a to ve směru $t' = (e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$, kde e_{i_j} je kanonický vektor. Tj. s jedničkou na i_j -té pozici a s nulami na ostatních pozicích vektoru. Definujme reálné parciální náhodné pole $f_{i_1 \dots i_k}$ předpisem

$$f_{i_1 \dots i_k}(t) = \frac{\partial^k f}{\partial t_{i_1} \dots \partial t_{i_k}}(t) := D_{L^2}^k f(t, (e_{i_1}, \dots, e_{i_k})), \quad t \in \mathbb{R}^d.$$

Lemma 1. Budíž f reálné náhodné pole s kovarianční funkcí $C_f \in C^{2k}$ pro pevné $k \in \mathbb{N}$. Budíž $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, d\}$ a nechť existuje reálné parciální náhodné pole $f_{i_1 \dots i_k}$. Potom pro kovarianční funkci $C_{f_{i_1 \dots i_k}}$ platí rovnost

$$C_{f_{i_1 \dots i_k}}(s, t) = \frac{\partial^{2k} C_f}{\partial s_{i_1} \partial t_{i_1} \dots \partial s_{i_k} \partial t_{i_k}}(s, t) \quad \forall s, t \in \mathbb{R}^d.$$

Je-li navíc náhodný proces f stacionární, je takéž proces $f_{i_1 \dots i_k}$ stacionární a platí

$$C_{f_{i_1 \dots i_k}}(s, t) = C_{f_{i_1 \dots i_k}}(s - t) = (-1)^k \left. \frac{\partial^{2k} C_f}{\partial^2 h_{i_1} \dots \partial^2 h_{i_k}}(h) \right|_{h=s-t} \quad \forall s, t \in \mathbb{R}^d.$$

Důkaz. Bud' $s, t \in \mathbb{R}^d$, pak

$$\begin{aligned}
C_{f_{i_1 \dots i_k}}(s, t) &= \mathbb{E} \left\{ \frac{\partial^k f}{\partial s_{i_1} \dots \partial s_{i_k}}(s) \frac{\partial^k f}{\partial t_{i_1} \dots \partial t_{i_k}}(t) \right\} \\
&= \mathbb{E} \left\{ \underset{h_1, \dots, h_k \rightarrow 0}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{\prod_{j=1}^k h_j} F(s, (h_1 e_{i_1}, \dots, h_k e_{i_k})) \right. \\
&\quad \times \left. \underset{\hat{h}_1, \dots, \hat{h}_k \rightarrow 0}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{\prod_{j=1}^k \hat{h}_j} F(t, (\hat{h}_1 e_{i_1}, \dots, \hat{h}_k e_{i_k})) \right\} \\
&\stackrel{*}{=} \lim_{h_1, \dots, h_k, \hat{h}_1, \dots, \hat{h}_k \rightarrow 0} \frac{1}{\prod_{j=1}^k h_j \hat{h}_j} \mathbb{E} \left\{ F(s, (h_1 e_{i_1}, \dots, h_k e_{i_k})) \right. \\
&\quad \times \left. F(t, (\hat{h}_1 e_{i_1}, \dots, \hat{h}_k e_{i_k})) \right\} \\
&= \lim_{h_1, \dots, h_k, \hat{h}_1, \dots, \hat{h}_k \rightarrow 0} \frac{1}{\prod_{j=1}^k h_j \hat{h}_j} \mathbb{E} \left\{ \sum_{b \in \{0,1\}^k} (-1)^{k - \sum_{j=1}^k b_j} \right. \\
&\quad \times f \left(s + \sum_{j=1}^k b_j h_j e_{i_j} \right) \sum_{a \in \{0,1\}^k} (-1)^{k - \sum_{j=1}^k a_j} f \left(t + \sum_{j=1}^k a_j \hat{h}_j e_{i_j} \right) \left. \right\} \\
&= \lim_{h_1, \dots, h_k, \hat{h}_1, \dots, \hat{h}_k \rightarrow 0} \frac{1}{\prod_{j=1}^k h_j \hat{h}_j} \sum_{c \in \{0,1\}^{2k}} (-1)^{2k - \sum_{j=1}^{2k} c_j} \\
&\quad \times C_f \left(s + \sum_{j=1}^k c_j h_j e_{i_j}, t + \sum_{j=k+1}^{2k} c_j \hat{h}_j e_{i_j} \right) \\
&= \frac{\partial^{2k} C_f}{\partial s_{i_1} \partial t_{i_1} \dots \partial s_{i_k} \partial t_{i_k}}(s, t).
\end{aligned}$$

Měli bychom odůvodnit záměnu limit u rovnosti s hvězdičkou. To však není žádný problém. Pro jednoduchost předpokládejme, že $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a $\{Y_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ jsou systémy centrováných náhodných veličin s konečnými druhými momenty. Nechť dále platí

$$\underset{n \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} X_n = X \quad \text{a} \quad \underset{m \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} Y_m = Y,$$

kde X, Y jsou náhodné veličiny s konečnými druhými momenty. Výsledkem je nerovnost

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}\{X_n Y_m\} - \mathbb{E}\{XY\}| &= |\mathbb{E}\{(X_n - X + X)(Y_m - Y + Y)\} - \mathbb{E}\{XY\}| \\
&\leq \mathbb{E}\{|(X_n - X)(Y_m - Y)|\} + \mathbb{E}\{|(X_n - X)Y|\} \\
&\quad + \mathbb{E}\{|(Y_m - Y)X|\} \\
&\leq \sqrt{\mathbb{E}\{(X_n - X)^2\} \mathbb{E}\{(Y_m - Y)^2\}} \xrightarrow[n, m \rightarrow \infty]{} 0 \\
&\quad + \sqrt{\mathbb{E}\{(X_n - X)^2\} \mathbb{E}\{Y^2\}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \\
&\quad + \sqrt{\mathbb{E}\{(Y_m - Y)^2\} \mathbb{E}\{X^2\}} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0.
\end{aligned}$$

Dokázali jsme zjednodušenou modifikaci čtvrté rovnosti

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \mathbb{E}\{X_n Y_m\} = \mathbb{E}\{ \underset{n \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} X_n \underset{m \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} Y_m \}.$$

Je-li f stacionární, sled rovností vychází následovně

$$\begin{aligned}
C_{f_{i_1 \dots i_k}}(s, t) &= \frac{\partial^{2k} C_f}{\partial s_{i_1} \partial t_{i_1} \dots \partial s_{i_k} \partial t_{i_k}}(s, t) \\
&= \lim_{h_1, \dots, h_k, \hat{h}_1, \dots, \hat{h}_k \rightarrow 0} \frac{1}{\prod_{j=1}^k h_j \hat{h}_j} \sum_{c \in \{0,1\}^{2k}} (-1)^{2k - \sum_{j=1}^{2k} c_j} \\
&\quad \times C_f \left(s + \sum_{j=1}^k c_j h_j e_{i_j}, t + \sum_{j=k+1}^{2k} c_j \hat{h}_j e_{i_j} \right) \\
&= \lim_{h_1, \dots, h_k, \hat{h}_1, \dots, \hat{h}_k \rightarrow 0} \frac{1}{\prod_{j=1}^k h_j \hat{h}_j} \sum_{c \in \{0,1\}^{2k}} (-1)^{2k - \sum_{j=1}^{2k} c_j} \\
&\quad \times C_f \left(s + \sum_{j=1}^k c_j h_j e_{i_j} - t - \sum_{j=k+1}^{2k} c_j \hat{h}_j e_{i_j} \right) \\
&= (-1)^k \lim_{h_1, \dots, h_k, \hat{h}_1, \dots, \hat{h}_k \rightarrow 0} \frac{1}{\prod_{j=1}^k h_j (-\hat{h}_j)} \sum_{c \in \{0,1\}^{2k}} (-1)^{2k - \sum_{j=1}^{2k} c_j} \\
&\quad \times C_f \left(s - t + \sum_{j=1}^k c_j h_j e_{i_j} + \sum_{j=k+1}^{2k} c_j (-\hat{h}_j) e_{i_j} \right) \\
&= (-1)^k \left. \frac{\partial^{2k} C_f}{\partial^2 h_{i_1} \dots \partial^2 h_{i_k}}(h) \right|_{h=s-t}.
\end{aligned}$$

□

Předchozí lemma nám udává vztah mezi C_f a $C_{f_{i_1 \dots i_k}}$. Dále jsme implicitně schopní vyjádřit funkci stacionárního procesu. Vyhstavá otázka, jak se chová izotropní náhodné pole. Bohužel izotropie f nám neimplikuje izotropii $f_{i_1 \dots i_k}$, jak je vidět z následujícího příkladu. Bud'

$$C_f(h) = e^{-|h|^2} = e^{-(h_1^2 + \dots + h_d^2)}, \quad h \in \mathbb{R}^d.$$

Potom pro libovolné $i \in \{1, \dots, d\}$ a $s, t \in \mathbb{R}^d$ platí

$$C_{f_i}(s, t) = -\left. \frac{\partial^2 C_f}{\partial^2 h_i}(h) \right|_{h=s-t} = 2e^{-|s-t|^2} - 4(s_i - t_i)^2 e^{-|s-t|^2}.$$

Další zajímavou poznámkou je skutečnost, že pokud náhodné pole f je Gaussovské a existuje parciální náhodné pole $f_{i_1 \dots i_k}$, pak náhodné pole $f_{i_1 \dots i_k}$ je také Gaussovské.

1.2 Varieta

V následujících kapitolách o varietách vycházíme z teorií vybudovaných v knihách [4], [1], [3] a [9], kde nalezneme i hlubší teoretické výsledky. Nebude-li v následujícím textu uvedeno jinak, předpokládáme, že $k, l \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$.

Definice. *Budíž M Hausdorffův topologický prostor se spočetnou bází otevřených množin.*

1. Prostor M nazveme varietou dimenze d nebo též d -varietou, jestliže pro všechny $t \in M$ existuje otevřená množina $U \subset M$ obsahující t , otevřená množina $V \subset \mathbb{R}^d$ a homeomorfizmus $\varphi : U \rightarrow V$.
2. Prostor M nazveme d -varietou s hranicí, jestliže pro všechny $t \in M$ existuje otevřená množina $U \subset M$ obsahující t , otevřená množina $V \subset \mathbb{H}^d$ a homeomorfizmus $\varphi : U \rightarrow V$, kde $\mathbb{H}^d := \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_d \geq 0\}$.

Poznámka :

- Pro pojem variety dimenze d se někdy používá pojem d -varieta bez hranice.
- Pro hodnotu dimenze variety užíváme symbol $\dim(M)$.
- Nebude-li hodnota dimenze variety důležitá, označení dimenze vycházíme.
- Primárním příkladem pro d -variety je prostor \mathbb{R}^d .
- Máme-li d -variety s hranicí, lze ukázat, že ji lze rozložit na $(d-1)$ -variety ∂M a d -variety $\text{Int}M$, které jsou navzájem disjunktní.
- Pozor: V případě ∂M se nejedná o hranici variety M v topologickém slova smyslu.

Pro další práci s varietami uvedeme poměrně širokou škálu definic, které se pojí s pojmem varieta.

Definice. Budíž M d -varieta. Zavedeme následující pojmy:

1. Dvojici (U, φ) z definice variety nazveme mapou variety M . To jest, $U \subset M$ je otevřená množina a $\varphi : U \rightarrow V = \varphi(U)$ je homeomorfizmus.
2. Množinu $S \subset M$ nazveme vnořenou podvarieta dimenze $m \in \{0, \dots, d\}$, jestliže pro všechny $p \in S$ existuje mapa (U, φ) obsahující p a $\varphi(S \cap U)$ je m -řezem množiny $\varphi(U)$. Tedy $p \in U$ a $\varphi(S \cap U)$ je tvaru

$$\varphi(S \cap U) = \{(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_d) \in \varphi(U) : x_{m+1} = c_{m+1}, \dots, x_d = c_d\}$$

pro nějaké konstanty $c_{m+1}, \dots, c_d \in \mathbb{R}$.

3. Řekneme, že mapy (U, φ) a (W, ψ) jsou C^k -kompatibilní, jestliže $U \cap W = \emptyset$ nebo zobrazení $\psi \circ \varphi^{-1}$, definované předpisem

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap W) \rightarrow \psi(U \cap W),$$

je C^k -difeomorfizmus¹.

4. Atlasem variety M rozumíme systém map $\mathcal{A} := \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in A}$, kde $M = \bigcup_{i \in A} U_i$.

¹Homeomorfizmus $\psi \circ \varphi^{-1}$ a k němu existující inverzní homeomorfizmus $\varphi \circ \psi^{-1}$ jsou řádu C^k .

5. Řekneme, že atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in A}$ variety M je maximálním C^k -atlasem variety M , jestliže jsou splněny tyto podmínky:
- i. Pro všechny $i, j \in A$ takové, že $i \neq j$, jsou (U_i, φ_i) a (U_j, φ_j) C^k -kompatibilní.
 - ii. Pokud mapa (U, φ) variety M je C^k -kompatibilní s (U_i, φ_i) pro všechny $i \in A$, pak platí $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$.
6. Dvojici (M, \mathcal{A}) nazveme C^k -varietou, pokud \mathcal{A} je maximálním C^k -atlasem variety M .

Pro jednoduchost se u C^k -variety nevypisuje struktura \mathcal{A} a C^k -varieta se značí pouze symbolem M . Musíme mít však na paměti, že nadále pracujeme s varietou M a s mapami (U, φ) náležejícími do struktury \mathcal{A} .

1.2.1 Tečný prostor

Definice. Nechť M je C^k -varieta a $l \leq k$. Řekneme, že funkce $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ je třídy C^l , jestliže pro všechny $t \in M$ existuje mapa (U, φ) obsahující t takové, že funkce $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ je řádu C^l . Množinu všech funkcí na M s předcházející vlastností označme $C^l(M)$.

Pro lepší představu nejdříve zkonztruujeme tečný prostor pro bod $y \in \mathbb{R}^d$ v prostoru \mathbb{R}^d . Symbolem v_y označme vektor vycházející z bodu y . Vektor lze zapsat ve tvaru $v_y = ((y_1, v_1 e^1), \dots, (y_n, v_n e^n))$, kde $\{e^i\}_{1 \leq i \leq d}$ je báze prostoru \mathbb{R}^d . Přirozeným způsobem definuje operátor $D_{v_y} : C^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$D_{v_y}(f) = D_v f(y) := \sum_{i=1}^d v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(y).$$

Operátor splňuje součinové pravidlo $D_{v_y}(fg) = f(y)D_{v_y}(g) + g(y)D_{v_y}(f)$ a jsou-li f, g funkce shodné na okolí bodu y , pak $D_{v_y}(f) = D_{v_y}(g)$. To nám dává návod definovat tečný prostor v bodě y .

Definice. Nechť máme bod $y \in \mathbb{R}^d$. Pak prostor všech lineárních zobrazení $D_y : C^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ splňujících součinové pravidlo

$$D_y(fg) = f(y)D_y(g) + g(y)D_y(f) \quad \forall f, g \in C^1(\mathbb{R}^d),$$

nazveme tečným prostorem bodu y a značíme symbolem $T_y \mathbb{R}^d$.

Analogicky zadefinujeme tečný prostor pro varietu.

Definice. Nechť M je C^k -varieta a $t \in M$. Pak systém všech lineárních zobrazení $D_t : C^1(M) \rightarrow \mathbb{R}$ splňujících

$$D_t(fg) = f(t)D_t(g) + g(t)D_t(f) \quad \forall f, g \in C^1(M),$$

nazveme tečným prostorem variety M v bodě t a značíme $T_t M$.

V knize [3] je ukázáno, že $T_t M$ je vektorový prostor dimenze $\dim(M)$ vzhledem k operacím definovaných předpisem

$$(X_t + Y_t)(f) := X_t(f) + Y_t(f),$$

$$(cX_t)(f) := c(X_t(f))$$

pro $X_t, Y_t \in T_t M$, $f \in C^1(M)$ a $c \in \mathbb{R}$.

Zároveň je-li (U, φ) mapa C^k -variety M obsahující bod $t \in M$, pak lineární zobrazení $\varphi_{*,t}^{-1} : T_{\varphi(t)} \mathbb{R}^d \rightarrow T_t M$ dáné předpisem

$$(\varphi_{*,t}^{-1}(D_{\varphi(t)}))(f) := D_{\varphi(t)}(f \circ \varphi^{-1})$$

je izomorfismus. Že se opravdu jedná o izomorfismus, se můžeme přesvědčit v knize [4].

Definice. Nechť M je C^k -varieta. Pak:

1. *Disjunktní sjednocení*

$$T(M) := \bigcup_{t \in M} T_t M$$

všech tečných prostorů ve všech bodech M nazveme tečným fibrovaným prostorem.

2. *Na tečném fibrovaném prostoru $T(M)$ definujeme projektivní zobrazení $\pi : T(M) \rightarrow M$, kde každému vektoru $\nu \in T_t M$ přiřadíme bod $t \in M$.*

3. *Zobrazení $X : M \rightarrow T(M)$ takové, že $\pi \circ X = \text{Id}$ na M , nazveme vektorovým polem na M .*

To jest, vektorové pole X bodu $t \in T$ přiřadí tečný vektor X_t z vektorového prostoru $T_t M$. Vektorové pole pro diferencovatelnou funkci f přirozeným způsobem definuje novou funkci $Xf : M \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$(Xf)(t) := X_t(f), \quad t \in M.$$

Předtím, než se vrhneme do definování množin se složitější strukturou, zadefinujeme Riemannovu varietu. Doted' totiž nemáme po ruce žádný nástroj k určení velikosti vektorů a samotné vzdálenosti na varietě M .

Definice. *Tenzorovým polem typu $(0,q)$ na varietě M pro $q \in \mathbb{N}$ rozumíme zobrazení T , které každému bodu $t \in M$ přiřazuje q -lineární formu $T_t \in T^q(T_t^* M)$, kde $T^q(T_t^* M)$ je vektorový prostor generovaný všemi q -lineárními formami na $T_t M$.*

Definice. *Riemannovou metrikou na varietě M rozumíme tenzorové pole g typu $(0,2)$ takové, že pro všechny $t \in M$ je bilineární forma*

$$g_t : T_t M \times T_t M \rightarrow \mathbb{R}$$

symetrická a pozitivně definitní.

Riemannovou C^k -varieta budeme rozumět dvojici (M,g) , kde M je C^k -varieta a g je Riemannova metrika na M . Implicitně předpokládáme, že zobrazení g je nejvyšší možné třídy C^{k-1} .

Příklad :

Nejdůležitějším příkladem Riemannovy metriky je Eukleidovská metrika g na \mathbb{R}^d . Pro bod $y \in \mathbb{R}^d$ a vektory $v, w \in T_y \mathbb{R}^d$ je metrika dána skalárním součinem vektorů. To jest

$$g_y(v, w) = \langle v, w \rangle := \sum_{i=1}^d v_i w_i.$$

Na Riemannovu metriku nemůžeme nahlížet jako na metriku v metrickém prostoru. Na druhou stranu Riemannova metrika generuje metriku definovanou jako nejmenší délka křivky spojující dva body viz kniha [4].

1.2.2 Whitneyho stratifikovaný prostor

Výhoda Whitneyho stratifikovaného prostoru je ta, že pokrývá širokou škálu prostorů s jednoznačně definovanou Eulerovou charakteristikou. Navíc se využije modifikovaná Morseho věta pro stratifikovaný prostor ve větě 1, pro vyjádření Eulerovy charakteristiky pomocí rozkladu prostoru a Morseho funkcí na tomto prostoru.

Definice. Bud' \widetilde{M} C^k -varieta a $l \leq k$. Budíž $M \subset \widetilde{M}$ s lokálně konečným rozkladem podmnožin \mathcal{Z} . Pak dvojici (M, \mathcal{Z}) nazveme stratifikovanou C^l -varieta v \widetilde{M} , pokud jsou splněny dvě podmínky:

1. Každá $Z \in \mathcal{Z}$ je vnořená C^l -podvarieta \widetilde{M} .
2. Jestliže $R, S \in \mathcal{Z}$ a $R \cap \bar{S} \neq \emptyset$, pak $R \subset \bar{S}$.

Poznámka :

- Pomocí druhé podmínky zavedeme relaci uspořádání \leq pro rozklad \mathcal{Z} . Pro $R, S \in \mathcal{Z}$ bud' $R \leq S$, jestliže $R \cap \bar{S} \neq \emptyset$.
- M je po částech C^l -hladká varieta. To znamená, že sama o sobě není C^l -varieta. Na druhou stranu obsahuje rozklad na C^l -podvariety.
- M může mít několik rozkladů.

Definice. Nechť (M, \mathcal{Z}) je stratifikovaná varieta v \widetilde{M} . Nechť t leží v M a bud' (U, φ) mapa variety \widetilde{M} obsahující t . Řekneme, že (M, \mathcal{Z}) splňuje Whitneyho podmítku v bodě t , jestliže pro všechny $T, S \in \mathcal{Z}$ takové, že $T \leq S$ a $t \in T$ platí toto:

Máme-li dvě posloupnosti $\{t_n \in T\}_{n \in \mathbb{N}}$ a $\{s_n \in S\}_{n \in \mathbb{N}}$ splňující následující tři podmínky:

1. Posloupnost bodů t_n konverguje k t a posloupnost s_n konverguje k t .

2. Posloupnost úseček $\overline{\varphi(t_n)\varphi(s_n)} \subset \mathbb{R}^d$ konverguje v projektivním prostoru k přímce l .

3. Posloupnost tečných prostorů $T_{s_n}S$ konverguje k tečnému podprostoru $\tau \subset T_t\widetilde{M}$.

Pak $\varphi_{*,t}^{-1}(l) \subset \tau$.

Whitneyho stratifikovaná varieta (M, \mathcal{Z}) v \widetilde{M} je stratifikovaná varieta v \widetilde{M} splňující Whitneyho podmínu v každém svém bodě.

Právě jsme definovali Whitneyho podmínu, která bývá v odborné literatuře označována jako Whitneyho podmínka (B). Existuje i Whitneyho podmínka (A), která má však slabší předpoklady než podmínka (B). V knize [9] nalezneme důkaz tvrzení, že Whitneyho podmínka je nezávislá na volbě mapy.

Vzorovým příkladem, který splňuje Whitneyho podmínu, je jednotková krychle $I = [0,1]^d$ v \mathbb{R}^d s přirozeným rozkladem na fasety krychle. To jest na vrcholy, otevřené hrany a postupně až k otevřené množině I° .

1.2.3 Vnitřní objemy Whitneyho stratifikovaného prostoru

Pro detailnější a hlubší analýzu všech pojmu a symbolů v této kapitole není v této diplomové práci prostor, proto odkazuji na knihu [1]. Zastavíme se však u pojmu fádnost Whitneyho stratifikované variety.

Definice. Bud' $K \in \mathbb{N}$. Uzavřenou Whitneyho stratifikovanou varietu (M, \mathcal{Z}) v $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ nazveme K -fádní, jestliže jsou splněny podmínky:

1. Pro všechny $S \in \mathcal{Z}$ má kolekce tečných prostorů

$$\left\{ \lim_{t_n \rightarrow t} T_{t_n}S : t \in \partial S \right\}$$

Hausdorffovu dimenzi menší než $\dim(S)$.

2. Pro všechny $t \in M$ a všechny směry ν_t platí, že je-li normálový Morseho index definovaný, pak

$$|\alpha(\nu_t, M)| \leq K.$$

Předcházející definice je ryze technického rázu a je potřeba pro definici míry křivosti pro stratifikované variety. Naše studované množiny tuto podmínu splňují. Zároveň budeme vynechávat hodnotu K a explicitně mluvíme o fádní Whitneyho stratifikované varietě.

Zastavíme se ještě u pojmu normálového Morseho indexu, který se objevil v předchozí definici. Pro $t \in M$ bud' $\nu_t \in T_t^\perp S$ jednotkový vektor, kde $S \in \mathcal{Z}$ a $T_t^\perp S$ je ortogonální doplněk vektorového prostoru $T_t S$ v \widetilde{M} . To jest

$$T_t^\perp S := \left\{ X_t \in T_t \widetilde{M} : \tilde{g}(X_t, Y_t) = 0 \quad \forall Y_t \in T_t S \right\}.$$

Nyní zafixujeme dostatečně malé $\delta_0 > 0$ a $\epsilon_0 > 0$, tak aby pro všechny $0 < \delta < \delta_0$ a $0 < \epsilon < \epsilon_0$ se neměnila topologie množiny

$$\varphi_t(U_t \cap M) \bigcap \left\{ x \in \mathbb{R}^{\dim(\widetilde{M})} : \langle x - \varphi(t), \varphi_{*,t}(\nu_t) \rangle = -\epsilon \right\} \bigcap B^{\dim(\widetilde{M})}(\varphi(t), \delta).$$

Je-li definována Eulerova charakteristika pro předchozí množinu, označíme ji předpisem $\chi(\nu_t)$, pak normálový Morseho index variety M v bodě t ve směru ν_t definujeme předpisem

$$\alpha(\nu_t, M) := 1 - \chi(\nu_t).$$

Dostáváme se k dalšímu bodu podkapitoly, a to k definici měr křivosti, námi tak složitě definované Whitneyho stratifikované variety.

Definice. *Nechť M je d -dimenzionální, Whitneyho fádní stratifikovaná C^2 -varieta v Riemannově varietě $(\widetilde{M}, \tilde{g})$. Definujme míru křivosti M předpisem*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i(M, U) := & \sum_{j=i}^d (2\pi)^{-(j-i)/2} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{j-i}{2} \rfloor} \frac{(-1)^m C(d-j, j-i-2m)}{m!(j-i-2m)!} \\ & \times \int_{\partial_j M \cap U} \int_{S(T_t^\perp \partial_j M)} \text{Tr}^{T_t \partial_j M} (\tilde{R}^m \tilde{S}_{\nu_{d-j}}^{j-i-2m}) \\ & \times \alpha(\nu_{d-j}) \mathcal{H}_{d-j-1}(d\nu_{d-j}) \mathcal{H}_j(dt) \end{aligned}$$

pro $i \in \{0, \dots, d-1\}$ a

$$\mathcal{L}_d(M, U) := \mathcal{H}_d(M \cap U).$$

Definujeme vnitřní objem M předpisem

$$\mathcal{L}_i(M) := \mathcal{L}_i(M, M)$$

a Minkovského funkcionály předpisem

$$W_i(M) := \frac{\kappa_i \mathcal{L}_{d-i}(M)}{\binom{d}{i}}$$

pro $i \in \{0, \dots, d\}$.

Jak už bylo řečeno, není zde prostor definovat všechny pojmy v předchozí definici, a proto odkazují na knihu [1], kde přijímáme i odpovídající konvence v poznámkách 10.5.2 a 10.7.1. Pro přehlednost si alespoň telegraficky řekneme význam symbolů.

1. Hausdorffovu i -rozměrnou míru vzhledem k metrice generované Riemannovou metrikou \tilde{g} značíme předpisem \mathcal{H}_i .
2. Funkce $C : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ je definována předpisem

$$C(m, i) := \begin{cases} \frac{(2\pi)^{i/2}}{\omega_{m+i}}, & m + i > 0 \\ 1 & m = 0. \end{cases}$$

3. Prostor $S(T_t^\perp \partial_j M)$ je prostor všech normovaných vektorů z prostoru $T_t^\perp \partial_j M$. To jest

$$S(T_t^\perp \partial_j M) := \{\nu \in T_t^\perp \partial_j M : \tilde{g}(\nu, \nu) = 1\},$$

kde $\partial_j M := \bigcup_{S \in \mathcal{Z}: \dim(S)=j} S$ a

$$T_t^\perp \partial_j M := \left\{ X_t \in T_t \widetilde{M} : \tilde{g}_t(X_t, Y_t) = 0 \quad \forall Y_t \in T_t \partial_j M \right\}.$$

4. Symbolem \tilde{R} značíme Riemannův tenzor křivosti a je definovaný předpisem

$$\tilde{R}(X, Y, Z, W) := \tilde{g} \left(\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - [X, Y] Z, W \right)$$

pro vektorová pole X, Y, Z a W , kde $\tilde{\nabla}$ je Levi-Civita konexe a $[X, Y]$ je Lieova závorka. Dodejme jen, že pro prostor \mathbb{R}^d vybaven Eukleidovskou metrikou je $\tilde{R} = 0$.

5. Symbolem \tilde{S}_ν značíme druhou skalární fundamentální formu prostoru $\partial_j M$ v \widetilde{M} , kde pro vektorové pole $X, Y \in T(\partial_j M)$ a jednotkové vektorové pole $\nu \in T(\widetilde{M})$ splňující $v_t \in T_t^\perp(\partial_j M)$ pro všechna $t \in \partial_j M$ je definována druhá skalární fundamentální forma předpisem

$$\tilde{S}_\nu(X, Y) := \tilde{g}(S(X, Y), \nu),$$

kde $S(X, Y)$ značí druhou fundamentální formu prostoru $\partial_j M$ v \widetilde{M} .

6. Pro kompaktní a konvexní množinu v \mathbb{R}^d s C^2 -hladkou hranicí je definice vnitřních objemů ekvivalentní s definicí vnitřních objemů definovaný v integrální geometrii.

1.3 Náhodné pole na varietách

Definice. Řekneme, že reálné náhodné pole f na $T \subset \mathbb{R}^d$ splňuje podmínu hladkosti, jestliže jsou splněny následující podmínky:

1. Proces f je centrované Gaussovské pole.
2. Proces f je L^2 -diferecovatelný řádu alespoň dvě.
3. Pro všechny $t \in T$ je rozdělení $(f_i(t), f_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,d}$ nedegenerované.
4. Existují $\alpha, \beta > 0$ a $0 < K < \infty$ takové, že platí

$$\max_{i,j \in \{1, \dots, d\}} |C_{f_{ij}}(t, t) + C_{f_{ij}}(s, s) - 2C_{f_{ij}}(s, t)| \leq \frac{K}{|\ln|t-s||^{1+\alpha}} \quad (1.1)$$

pro všechny $s, t \in T$ takové, že $|t-s| \leq \beta$.

Bude-li náhodný proces f na \mathbb{R}^d splňovat podmínu hladkosti na T při specifickém výběru T , pak trajektorie náhodného procesu f jsou skoro jistě Morseho funkce na T .

To jest:

1. $f \in C^2$ na otevřeném okolí T ,
2. kritické body $f|_{\partial_k T}$ jsou nedegenerované pro všechny $k \in \{0, \dots, d\}$,
3. $f|_{\partial_k T}$ nemá kritické body na množině $\cup_{j=0}^{k-1} \partial_j T$ pro všechny $k \in \{1, \dots, d\}$.

Kritickým bodem rozumíme bod, ve kterém je gradient ∇f nulový. Bod označíme nedegenerovaným, pokud je determinant Hessovy matice v tomto bodě nenulový. Na Morseho funkce f se aplikuje vybudovaná Morseho teorie, která se využije v následující větě. Nejdříve však zadefinujeme regulární varietu.

Definice. Nechť M je Whitneyho stratifikovaná C^2 -varietu v C^3 -varietě $(\widetilde{M}, \tilde{g})$. Nechť M je též $C^{2,1}$ -kuželový prostor libovolné hloubky a bud' M K -fádní pro nějaké konečné K . Pak M nazveme regulární stratifikovanou varietou v \widetilde{M} .

Definici $C^{2,1}$ -kuželového prostoru libovolné hloubky nalezneme v knize [9], odkud jí převzal autor knihy [1]. V knize je taktéž ukázáno, že krychle tuto podmínu splňuje. Autor se zároveň zamýslí nad tím, že podmínka $C^{2,1}$ -kuželového prostoru libovolné hloubky není stěžejní a pravděpodobně není nutná.

Věta 1. Nechť M je d -dimenzionální regulární stratifikovaná varietu v \widetilde{M} . Nechť f je náhodný proces na \widetilde{M} splňující tyto body:

1. Proces f je centrované Gaussovské pole.
2. $C_f(t,t) = 1$ pro všechny $t \in M$.
3. Pro libovolný spočetný atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ variety \widetilde{M} platí, že Gaussovské pole $f_\alpha := f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ na $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^d$ splňuje podmínu hladkosti pro všechny $\alpha \in A$.

Potom pro libovolné $u \in \mathbb{R}$ platí rovnost

$$\mathbb{E} \{ \mathcal{L}_0(A_u(f, M)) \} = \sum_{i=0}^d \mathcal{L}_i(M) \rho_i(u), \quad (1.2)$$

kde:

1. Vnitřní objemy \mathcal{L}_i jsou definované vzhledem k regulární stratifikované varietě s Riemannovou metrikou g generovanou náhodným polem f předpisem

$$g_t(X_t, Y_t) := \mathbb{E} \{ X_t(f) Y_t(f) \}, \quad t \in M, \quad X_t, Y_t \in T_t \widetilde{M}, \quad (1.3)$$

2.

$$A_u(f, M) := \{x \in M : f(x) \geq u\} = f^{-1}([u, \infty)) \cap M,$$

3.

$$\rho_j(u) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{j+1}{2}}} H_{j-1}(u) e^{-\frac{u^2}{2}}, \quad j \in \mathbb{N}_0,$$

4.

$$H_{-1}(u) := \sqrt{2\pi} e^{\frac{u^2}{2}} (1 - \mathbb{P}(X \leq u)), \quad X \sim N(0,1),$$

5.

$$H_k(u) := k! \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{(-1)^q u^{k-2q}}{q!(k-2q)!2^q}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Důkaz. Důkaz nalezneme v knize [1] viz věta 12.4.2. \square

Speciálním případem je kompaktní a konvexní množina M mající po částech C^2 -hladkou hranici v prostoru \mathbb{R}^d . Z předchozí poznámky vyplývá, že Riemannova metrika g závisí na procesu f . Převedeme vyjádření vzorce (1.3) následovně

$$g_t(X_t, Y_t) = X_s X_t C(s, t) \Big|_{s=t}.$$

To znamená, že vnitřní objemy závisí na kovarianční funkci C náhodného procesu f . Speciálně pro izotropní náhodný proces s $C_{f_i}(t, t) = \lambda$ se metrika redukuje na tvar

$$g_t(X_t, Y_t) = \lambda \langle X_t, Y_t \rangle.$$

Odvození bychom našli v knize [1]. Bereme-li za $\lambda = 1$, poté proces f generuje metriku totožnou s Eukleidovskou metrikou. Pro obecné λ převod mezi vnitřními objemy není složitý. Vycházíme ze vzorců (12.2.22) a (7.4.9) v knize [1], a proto pro náhodný proces platí

$$\int_A \mathcal{H}^g(dt) = \int_A |\det \Lambda_t|^{1/2} dt, \quad A \subset \mathbb{R}^d,$$

kde matice Λ_t je tvořena prvky

$$\lambda_t(i, j) = \left. \frac{\partial^2 C}{\partial r_i \partial s_j} (r, s) \right|_{(r, s) = (t, t)}.$$

Bude-li za f izotropní proces, pak $\Lambda_t = \lambda I$, kde I je jednotková matice a to vede ke vzorci

$$\mathcal{L}_i(M) = \lambda^{i/2} V_i(M) \quad \forall i \in \{0, \dots, d\}, \quad (1.4)$$

kde vnitřní objem na levé straně je počítán vzhledem k metrice generované izotropním procesem f a vnitřní objem na pravé straně je počítán vzhledem k Eukleidovské metrice.

1.4 Hustoty vnitřních objemů

Našim úkolem bude odpovídajícím způsobem definovat hustoty vnitřních objemů množiny M generované reálným náhodným polem f . Budeme postupovat analogicky jako v knize [12], kde pracují s náhodnou stacionární uzavřenou množinou Z , která je skoro jistě z rozšířeného konvexního okruhu a zároveň je vybavena podmínkou integrovatelnosti. Hustota je v knize definována předpisem

$$\overline{V}_i(Z) := \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} \{ V_i(Z \cap rK) \}}{V_d(rK)}$$

pro $i \in \{0, \dots, d\}$, $K \in \mathcal{K}' : V_d(K) > 0$. V knize [12] je taktéž dokázáno, že předcházející limity existují a jsou pro všechny $i \in \{0, \dots, d\}$ rovny

$$\bar{V}_i(Z) = \mathbb{E} \{ V_i(Z \cap C_0^d) \} := \mathbb{E} \{ V_i(Z \cap C^d) - V_i(Z \cap \partial^+ C^d) \}, \quad (1.5)$$

kde $C_0^d := [0,1]^d$ a $\partial^+ C^d := C^d \setminus C_0^d$.

My budeme muset být o něco opatrnější s podmínkami vzhledem k náhodné uzavřené množině a průnikové množině K . Naší hlavní zbraní bude modifikovaná věta 13.2.1 z knihy [1]. Napišme její plné znění.

Věta 2. *Bud' f náhodné pole na \mathbb{R}^d , které splňuje následující podmínky:*

1. f na \mathbb{R}^d splňuje podmínu hladkosti,
2. f je izotropní,
3. $C_f(0) = 1$,
4. $C_{f_i}(0) = \lambda$ pro všechny $i \in \{1, \dots, d\}$, kde $0 < \lambda < \infty$.

Dále předpokládejme, že množina $M \subset \mathbb{R}^d$:

- i) je kompaktní regulární stratifikovaná varieta v \mathbb{R}^d ,
- ii) pro všechny $k \in \{0, \dots, d-1\}$ je množina $M \cap V$ také kompaktní regulární stratifikovaná varieta v \mathbb{R}^d pro skoro všechny $V \in \text{Graff}_k^d$. Symbolem Graff_k^d značíme množinu všech affinních k -dimenzionálních podprostorů \mathbb{R}^d .

Potom pro všechny $u \in \mathbb{R}$ a všechny $j \in \{0, \dots, d\}$ platí rovnost

$$\mathbb{E} \{ V_j(A_u(f, M)) \} = \sum_{l=0}^{d-j} \begin{bmatrix} j+l \\ l \end{bmatrix} \lambda^{\frac{l}{2}} \rho_l(u) V_{j+l}(M), \quad (1.6)$$

kde vnitřní objemy na levé i pravé straně jsou počítány vzhledem k Eukleidovské metrice a kde:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} := \binom{n}{k} \frac{\kappa_n}{\kappa_{n-k} \kappa_k}, \quad k, n \in \mathbb{N}_0 : k \leq n.$$

Důkaz. Budeme postupovat analogicky jako v knize [1]. Pozor však na to, že v důkazu knihy [1] se objevuje chyba, která se projevuje ve špatném vzorci pro vyjádření střední hodnoty pro vnitřní objemy nadúrovňových množin viz vzorec (1.6).

Důkaz rozdělíme do dvou kroků. Zafixujme $j \in \{0, \dots, d\}$ a $u \in \mathbb{R}$:

- 1) Předpokládejme, že $\lambda = 1$. Pokud $j = 0$, potom tvrzení plyne přímo

z věty 1. Pro nenulový index j platí

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \{ V_j(A_u(f,M)) \} &\stackrel{1}{=} \int_{\text{Graff}_{d-j}^d} \mathbb{E} \{ V_0(A_u(f,M) \cap V) \} \lambda_{d-j}^d(dV) \\
&= \int_{\text{Graff}_{d-j}^d} \mathbb{E} \{ V_0(A_u(f,M \cap V)) \} \lambda_{d-j}^d(dV) \\
&\stackrel{2}{=} \int_{\text{Graff}_{d-j}^d} \sum_{l=0}^d \rho_l(u) V_l(M \cap V) \lambda_{d-j}^d(dV) \\
&= \int_{\text{Graff}_{d-j}^d} \sum_{l=0}^{d-j} \rho_l(u) V_l(M \cap V) \lambda_{d-j}^d(dV) \\
&= \sum_{l=0}^{d-j} \rho_l(u) \int_{\text{Graff}_{d-j}^d} V_l(M \cap V) \lambda_{d-j}^d(dV) \\
&\stackrel{3}{=} \sum_{l=0}^{d-j} \binom{j+l}{l} \rho_l(u) V_{j+l}(M).
\end{aligned}$$

V rovnosti číslo 3 využíváme Croftonův vzorec pro stratifikovanou varietu, jež má vyjádření

$$\int_{\text{Graff}_{d-k}^d} V_q(W \cap V) \lambda_{d-k}^d(dV) = \binom{k+q}{q} V_{k+q}(W)$$

pro kompaktní Whitneyho fádní stratifikovanou varietu $W \subset \mathbb{R}^d$, kde vzorec platí pro libovolné $k \in \{1, \dots, d\}$ a $q \in \{0, \dots, d-1\} : k+q \leq d$. Aby nedošlo k žádnému omylu, míru λ_k^d na prostoru Graff_k^d normalizujeme následovně

$$\lambda_k^d \{ V \in \text{Graff}_k^d : V \cap B^d(0,1) \neq \emptyset \} = \binom{d}{d-k} \kappa_{d-k}, \quad k \in \{0, \dots, d-1\}.$$

Bud' $q = 0$ a $k \in \{1, \dots, d\}$. Dosad'me do Croftonova vzorce

$$V_k(W) = \binom{k+0}{0} V_{k+0}(W) = \int_{\text{Graff}_{d-k}^d} V_0(W \cap V) \lambda_{d-k}^d(dV).$$

Předcházející vzorec se nazývá Hadwigerův a využijeme ho právě v rovnosti číslo 1. Věta 1 nás opravňuje použít rovnost číslo 2.

2) Nechť $\lambda \in \mathbb{R}$. Předcházející úvahy zůstávají v platnosti a platí rovnost

$$\mathbb{E} \{ V_j^\lambda(A_u(f,M)) \} = \sum_{l=0}^{d-j} \binom{j+l}{l} \rho_l(u) V_{j+l}^\lambda(M), \quad (1.7)$$

kde však vnitřní objemy na levé i pravé straně jsou počítány vzhledem k metrice generované procesem f a jsou závislé na λ . Proces f je izotropní a pomocí vzorce (1.4) přepíšeme vzorec (1.7) do tvaru

$$\mathbb{E} \left\{ \lambda^{\frac{j}{2}} V_j(A_u(f,M)) \right\} = \sum_{l=0}^{d-j} \binom{j+l}{l} \rho_l(u) \lambda^{\frac{j+l}{2}} V_{j+l}(M),$$

kde už vnitřní objemy jsou počítány vzhledem k Eukleidovské metrice. To znamená, že platí rovnost

$$\mathbb{E} \{ V_j(A_u(f, M)) \} = \sum_{l=0}^{d-j} \begin{bmatrix} j+l \\ l \end{bmatrix} \rho_l(u) \lambda^{\frac{l}{2}} V_{j+l}(M).$$

Tím je důkaz hotov. \square

Věta 3. Nechť náhodné pole f a množina $M \subset \mathbb{R}^d$ splňují podmínky věty 2. Nechť navíc $V_d(M) \neq 0$ a $V_j(M) < \infty$ pro všechny $j \in \{0, \dots, d\}$. Bud' $u \in \mathbb{R}$. Pak pro všechny $j \in \{0, \dots, d\}$ existuje limita

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} \{ V_j(f^{-1}([u, \infty)) \cap rM) \}}{V_d(rM)},$$

jejíž hodnota je nezávislá na množině M .

Označme ji předpisem $\bar{V}_j(f^{-1}([u, \infty)))$. Platí vzorec

$$\bar{V}_j(f^{-1}([u, \infty))) = \begin{bmatrix} d \\ d-j \end{bmatrix} \lambda^{\frac{d-j}{2}} \rho_{d-j}(u).$$

Důkaz. Zafixujme $j \in \{0, \dots, d\}$. Využijeme věty 2 a rovnost (1.6). Pro jednoduchost označme

$$\text{Konst}(u, \lambda, l, j) := \begin{bmatrix} j+l \\ l \end{bmatrix} \lambda^{\frac{l}{2}} \rho_l(u), \quad l \in \{0, \dots, d-j\}$$

a počítejme

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} \{ V_j(f^{-1}([u, \infty)) \cap rM) \}}{V_d(rM)} &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} \{ V_j(A_u(f, rM)) \}}{V_d(rM)} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sum_{l=0}^{d-j} \text{Konst}(u, \lambda, l, j) V_{j+l}(rM)}{V_d(rM)} \\ &= \sum_{l=0}^{d-j} \text{Konst}(u, \lambda, l, j) \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{V_{j+l}(rM)}{V_d(rM)} \\ &= \sum_{l=0}^{d-j} \text{Konst}(u, \lambda, l, j) \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^{j+l} V_{j+l}(M)}{r^d V_d(M)} \\ &= \sum_{l=0}^{d-j} \text{Konst}(u, \lambda, l, j) \frac{V_{j+l}(M)}{V_d(M)} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^{j+l}}{r^d} \\ &= \text{Konst}(u, \lambda, d-j, j) \frac{V_{j+d-j}(M)}{V_d(M)} \\ &= \begin{bmatrix} d \\ d-j \end{bmatrix} \lambda^{\frac{d-j}{2}} \rho_{d-j}(u). \end{aligned}$$

\square

	$d = 1$	$d = 1$	$d = 3$
\bar{V}_0	$\frac{\lambda^{1/2}}{2\pi} e^{-\frac{u^2}{2}}$	$\frac{\lambda u}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{u^2}{2}}$	$\frac{\lambda^{3/2}(u^2-1)}{(2\pi)^2} e^{-\frac{u^2}{2}}$
\bar{V}_1	$\mathbb{P}(X > u)$	$\frac{\lambda^{1/2}}{4} e^{-\frac{u^2}{2}}$	$\frac{2\lambda u}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{u^2}{2}}$
\bar{V}_2		$\mathbb{P}(X > u)$	$\frac{\lambda^{1/2}}{\pi} e^{-\frac{u^2}{2}}$
\bar{V}_3			$\mathbb{P}(X > u)$

Tabulka 1.1: Přehled intenzit nadúrovňového modelu s parametrem $u \in \mathbb{R}$ a $0 < \lambda < \infty$ vzhledem k dimenzi $d = 1$, $d = 2$ a $d = 3$, kde $X \sim N(0,1)$.

To znamená, že jsme schopni explicitně vyjádřit hustotu náhodné uzavřené množiny generované náhodným reálným procesem. Pro představu si vypíšeme intenzity pro dimenze nižších rádů. Bud' X náhodná veličina s normovaným náhodným rozdělením. V tabulce 1.1 jsou rozepsány intenzity $\bar{V}_0, \bar{V}_1, \bar{V}_2$ a \bar{V}_3 pro dimenze $d = 1, d = 2$ a $d = 3$.

Naším dalším úkolem bude zjistit, jaký vliv mají parametry λ a u na intenzity \bar{V}_i pro $i \in \{0, \dots, d\}$. Pozorování rozdělíme do tří kroků. Nejdříve hodnotu α -kvantilu normovaného normálního rozdělení označme symbolem u_α a vypočítejme hustotu objemu

$$p := \bar{V}_d = 1 - \mathbb{P}(X \leq u).$$

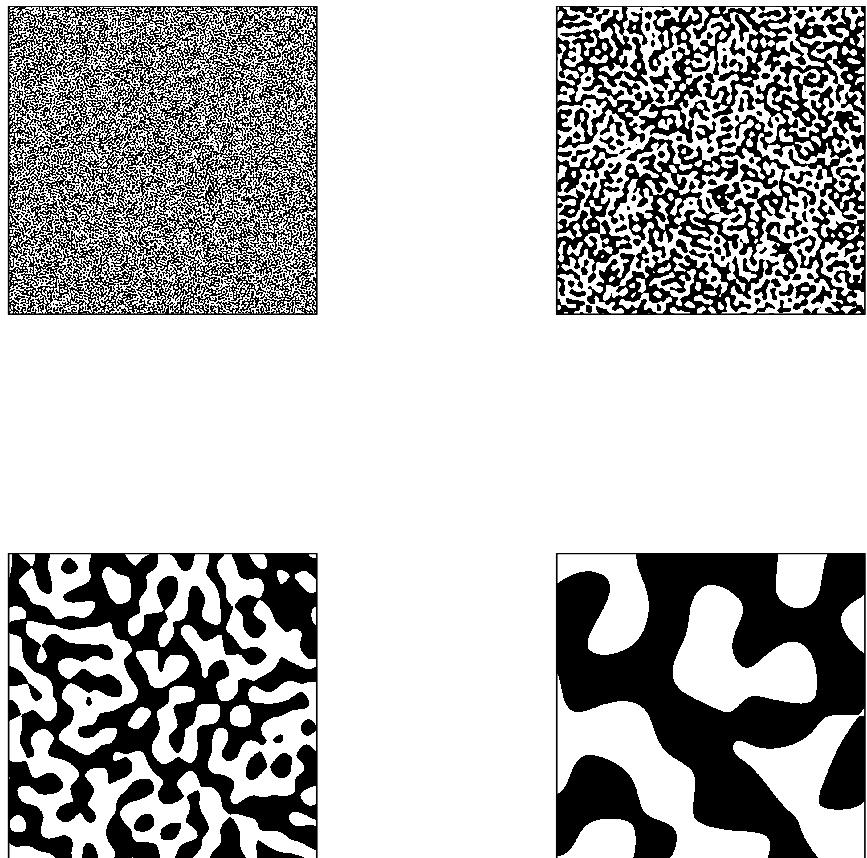
Parametr u jednoznačně určuje intenzitu objemu p , která je nezávislá na parametru λ . Zafixováním pevného $0 < p < 1$ získáme jednoznačné určení parametru $u = u_{1-p}$.

Dalším krokem je výpočet intenzity povrchu

$$\bar{V}_{d-1} = \begin{bmatrix} d \\ 1 \end{bmatrix} \lambda^{1/2} \rho_1(u) = \begin{bmatrix} d \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\lambda^{1/2} e^{-\frac{u^2}{2}}}{2\pi}.$$

Při zafixovaném p intenzity objemu množiny máme zafixovaný parametr u a parametr λ bude mít vliv na intenzitu povrchu množiny. S rostoucí λ roste intenzita povrchu při pevné intenzitě objemu. Dochází k tomu, že při pevně stanoveném parametru u rostoucí λ rozmlénuje nadúrovňové množiny, aby zachovaly svůj objem, ale přitom zvýšily svůj povrch. Na obrázku 1.1 je tato vlastnost viditelná.

Není to zatím příliš zřejmé, ale tuto skutečnost si musíme uvědomit při pozdější simulaci náhodného procesu. Simulujeme vždy na diskrétní mřížce



Obrázek 1.1: Realizace nadúrovňového sinusového modelu s pevnou objemovou intenzitou $p = 0.5$ postupně s parametry $\lambda = 0.2$, $\lambda = 0.02$, $\lambda = 0.002$ a $\lambda = 0.0002$. Z obrázku je patrné, že s klesajícím parametrem λ roste hladkost množiny.

o pevném počtu pixelů. Větou 2 máme sice zaručenou hladkost nadúrovňových množin, ale pro příliš vysoké λ se hladkost ztrácí, a to právě z důvodu rastru mřížky. Volíme tedy λ s dostatečným citem pro uchování hladkosti množiny, aby nedošlo k příliš velkému rozdrobení nadúrovňové množiny.

Poslední zajímavost jsem našel v symetrii intenzit. Pro $j \in \{0, \dots, d-1\}$ na ρ_{d-j} nahlížejme jako na funkci a pro přehlednost si opět napíšeme její vyjádření

$$\rho_{d-j}(u) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d-j+1}{2}}} H_{d-j-1}(u) e^{-\frac{u^2}{2}}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Funkce $e^{-\frac{u^2}{2}}$ je nepochybně sudou funkcí. Zaměříme se tedy na

$$H_{d-j-1}(u) = (d-j-1)! \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{d-j-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^q u^{d-j-1-2q}}{q!(d-j-1-2q)!2^q}.$$

Bude-li mít $d-j-1$ lichou hodnotu, bude H_{d-j-1} lichou funkcí a odtud i ρ_{d-j} zdědí lichost. Naopak pro sudé číslo $d-j-1$ budou funkce H_{d-j-1} i ρ_{d-j} sudými funkcemi.

Zafixujme pevné λ a buď $p_1, p_2 \in (0,1)$ hustoty objemů takové, že $p_1 + p_2 = 1$. Fixováním hustot objemů získáme parametry u_1 a u_2 . Pak tedy

$$u_1 = u_{1-p_1} = -u_{p_1} = -u_{1-p_2} = -u_2.$$

To však znamená, že

$$\bar{V}_j^1 = \bar{V}_j^2 \quad \forall j \in \{0, \dots, d-1\}, \text{ pokud } d-j-1 \in 2\mathbb{Z}$$

a

$$\bar{V}_j^1 = -\bar{V}_j^2 \quad \forall j \in \{0, \dots, d-1\}, \text{ pokud } d-j-1 \in 2\mathbb{Z} + 1,$$

kde \bar{V}_j^1 a \bar{V}_j^2 značí intenzitu nadúrovňového modelu se společným parametrem λ a parametrem u_1 respektive u_2 .

Jak už jsem zmínil na začátku podkapitoly, postupujeme analogicky jako v knize [12]. Nastává otázka, je-li možné intenzitu vyjádřit i pomocí rovnice (1.5). Odpověď je nám následující tvrzení.

Věta 4. Za předpokladu věty 3 platí rovnost

$$\bar{V}_j(f^{-1}([u, \infty))) = \mathbb{E} \{ V_j(f^{-1}([u, \infty)) \cap C_0^d) \} \quad \forall j \in \{0, \dots, d\}. \quad (1.8)$$

Důkaz. Zafixujme $j \in \{0, \dots, d\}$ a $u \in \mathbb{R}$. Začněme s výpočtem pravé strany

rovnice (1.8). Využijeme větu 2

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \{ V_j(f^{-1}([u, \infty)) \cap C_0^d) \} &= \mathbb{E} \{ V_j(A_u(f, C^d)) \} - \mathbb{E} \{ V_j(A_u(f, \partial^+ C^d)) \} \\
&= \sum_{l=0}^{d-j} \binom{j+l}{l} \lambda^{\frac{l}{2}} \rho_l(u) V_{j+l}(C^d) \\
&\quad - \sum_{l=0}^{d-j} \binom{j+l}{l} \lambda^{\frac{l}{2}} \rho_l(u) V_{j+l}(\partial^+ C^d) \\
&= \binom{d}{d-j} \lambda^{\frac{d-j}{2}} \rho_{d-j}(u) V_d(C^d) \\
&\quad + \sum_{l=0}^{d-j-1} \binom{j+l}{l} \lambda^{\frac{l}{2}} \rho_l(u) V_{j+l}(C^d) \\
&\quad - \sum_{l=0}^{d-j-1} \binom{j+l}{l} \lambda^{\frac{l}{2}} \rho_l(u) V_{j+l}(\partial^+ C^d).
\end{aligned}$$

To znamená, že rovnice (1.8) je ekvivalentní s rovností

$$V_j(C^d) = V_j(\partial^+ C^d) \quad \forall j = 0, \dots, d-1. \quad (1.9)$$

Důkaz předcházející rovnice (1.9) rozložíme do několika kroků. Mějme na paměti, že nyní fixujeme $j \in \{0, \dots, d-1\}$:

1. Vyjádření levé strany rovnice (1.9) nalezneme například v knize [11]. Platí jednoduchý vzorec

$$V_j(C^d) = \binom{d}{j}.$$

Pěkný důkaz se objevuje i v již zmíněné knize [1].

2. Složitější je vyjádření pravé strany (1.9). Zaměřme se na to, z čeho se skládá množina $\partial^+ C^d$. De facto se jedná o fasety krychle mající společný bod $[1, \dots, 1]$. Každá faseta je zároveň krychle odpovídající své dimenzi. Suma sumárum množina $\partial^+ C^d$ obsahuje

$$\begin{aligned}
&\binom{d}{d-1} \text{ faset dimenze } d-1, \\
&\binom{d}{d-2} \text{ faset dimenze } d-2, \\
&\vdots \\
&\binom{d}{1} \text{ faset dimenze 1}, \\
&\binom{d}{0} \text{ faset dimenze 0}.
\end{aligned}$$

3. Není žádné tajemství, že funkcionál V_j je aditivní. Spolu z předcházejícími úvahami vyplývá, že platí rovnost

$$\begin{aligned} V_j(\partial^+ C^d) &= \binom{d}{d-1} \binom{d-1}{j} - \binom{d}{d-2} \binom{d-2}{j} + \binom{d}{d-3} \binom{d-3}{j} \\ &\quad - \binom{d}{d-4} \binom{d-4}{j} \cdots (-1)^{d-j+1} \binom{d}{j} \binom{j}{j} \\ &= \sum_{i=1}^{d-j} (-1)^{i+1} \binom{d}{d-i} \binom{d-i}{j}. \end{aligned}$$

4. V posledním kroku důkazu využijeme binomické věty k rozvoji výrazu $(1-1)^{d-j}$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{d-j} (-1)^{i+1} \binom{d}{d-i} \binom{d-i}{j} &= \sum_{i=1}^{d-j} (-1)^{i+1} \frac{d!}{(d-i)!i!} \frac{(d-i)!}{(d-i-j)!j!} \\ &= \sum_{i=1}^{d-j} (-1)^{i+1} \frac{d!}{(d-j)!j!} \frac{(d-j)!}{(d-i-j)!i!} \\ &= \binom{d}{j} \sum_{i=1}^{d-j} (-1)^{i+1} \binom{d-j}{i} \\ &= \binom{d}{j} \left[\sum_{i=0}^{d-j} (-1)^{i+1} \binom{d-j}{i} + 1 \right] \\ &= \binom{d}{j} \left[1 - \sum_{i=0}^{d-j} \binom{d-j}{i} 1^{d-j-i} (-1)^i \right] \\ &= \binom{d}{j} \left[1 - (1-1)^{d-j} \right] = \binom{d}{j}. \end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. □

1.5 Funkce splňující podmínu hladkosti

V této kapitole si uvedeme příklady izotropních kovariančních funkcí, které splňují podmínu věty 2. Nalezl jsem několik kandidátů, kteří splňují podmínu hladkosti. Pro naše uvedené příklady nedokazuju všechny podmínky věty, ale zabývám se pouze důležitými částmi.

Příklad 1:

První příklad je kovarianční funkce s exponenciálním vyjádřením. Probereme ho podrobněji, jelikož v následujících kapitolách budeme simulovat data pomocí Gaussovskeho pole s kovarianční funkcí s exponenciálním vyjádřením. Následně data využijeme pro odhadu hustot vnitřních objemů.

Nechť pro pevné $0 < a < \infty$ je funkce C_f dána předpisem

$$C_f(h) = e^{-a|h|^2} = e^{-a(h_1^2 + \dots + h_d^2)}, \quad h \in \mathbb{R}^d.$$

Že se jedná o izotropní kovarianční funkci, se přesvědčíme v knize [10]. Naše první zjištění je rovnost

$$\mathbb{E}\{f^2(t)\} = C_f(0) = 1.$$

Dle lemmatu 1 vypočítáme kovarianční funkce C_{f_i} , $C_{f_{ii}}$ a $C_{f_{ij}}$ pro libovolné $i, j \in \{1, \dots, d\}$ a $h \in \mathbb{R}^d$ takové, že $i \neq j$. Tyto funkce rozepíšeme do více tvarů:

$$\begin{aligned} C_{f_i}(h) &= 2ae^{-a|h|^2} - 4a^2h_i^2e^{-a|h|^2}, \\ C_{f_{ii}}(h) &= 4a^2e^{-a|h|^2}(3 - 12ah_i^2 + 4a^2h_i^4) \\ &= 4a^2e^{-a|h|^2}((2ah_i^2 - 3)^2 - 6), \\ C_{f_{ij}}(h) &= C_{f_{ji}}(h) \\ &= 4a^2e^{-a|h|^2}(1 - 2ah_i^2 - 2ah_j^2 + 4a^2h_i^2h_j^2) \\ &= 4a^2e^{-a|h|^2}((1 - 2ah_i^2)(1 - 2ah_j^2)). \end{aligned}$$

Budeme-li vycházet z konvence značení věty 2, dostáváme

$$\mathbb{E}\{f_i^2(t)\} = C_{f_i}(0) = 2a = \lambda \quad \forall i \in \{1, \dots, d\}.$$

Základní pozorování:

- Existuje $\beta_1 > 0$ takové, že pro všechny $h \in \mathbb{R}^d$ splňující $|h| \leq \beta_1$ platí

$$0 \leq 3 - 12ah_i^2 + 4a^2h_i^4 \leq 3 \quad \forall i \in \{1, \dots, d\}.$$

- Existuje $\beta_2 > 0$ takové, že pro všechny $h \in \mathbb{R}^d$ splňující $|h| \leq \beta_2$ platí

$$0 \leq (1 - 2ah_i^2) \leq 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, d\}.$$

- Platí nerovnost

$$1 - e^{-ah^2} \leq ah^2 \quad \forall h \in \mathbb{R}.$$

- Existuje $\beta_3 > 0$ takové, že pro všechny $h \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ splňující $|h| \leq \beta_3$ platí

$$|h| \leq \frac{1}{|\ln|h||}.$$

Odvození základních pozorování:

- Plyne jednoduše z vlastností polynomických funkcí.
- Plyne opět z vlastností polynomických funkcí.
- Funkce na levé i pravé straně jsou spojité. Problém převedeme na nerovnost $1 - e^{-q} \leq q$ pro všechny $q \geq 0$. Zderivujeme na levé i pravé straně a získáme $e^{-q} \leq 1$, což platí pro libovolné nezáporné q , a tím je předchozí nerovnost dokázána.
- Plyne ze znalosti limity

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0.$$

Definujme $\beta := \min(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $\alpha := 1$ a $K := 120a^3$. Pro libovolné $h \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ splňující $|h| \leq \beta$ platí

$$\begin{aligned} |2C_{f_{ii}}(0) - 2C_{f_{ii}}(h)| &= \left| 24a^2 - 8a^2e^{-a|h|^2}(3 - 12ah_i^2 + 4a^2h_i^4) \right| \\ &\stackrel{1}{=} 24a^2 - 8a^2e^{-a|h|^2}(3 - 12ah_i^2 + 4a^2h_i^4) \\ &\leq 24a^2(1 - e^{-a|h|^2}) + 96e^{-a|h|^2}a^3h_i^2 \\ &\stackrel{3}{\leq} 24a^3|h|^2 + 96a^3h_i^2 \\ &\leq (24a^3 + 96a^3)|h|^2 \\ &\stackrel{4}{\leq} \frac{K}{|\ln|h||^2} = \frac{K}{|\ln|h||^{1+\alpha}} \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} |2C_{f_{ij}}(0) - 2C_{f_{ij}}(h)| &= \left| 8a^2 - 8a^2e^{-a|h|^2}(1 - 2ah_i^2 - 2ah_j^2 + 4a^2h_i^2h_j^2) \right| \\ &\stackrel{2}{=} 8a^2 - 8a^2e^{-a|h|^2}(1 - 2ah_i^2 - 2ah_j^2 + 4a^2h_i^2h_j^2) \\ &\leq 8a^2(1 - e^{-a|h|^2}) + e^{-a|h|^2}(16a^3h_i^2 + 16a^3h_j^2) \\ &\stackrel{3}{\leq} 8a^3|h|^2 + 16a^3h_i^2 + 16a^3h_j^2 \\ &\leq (8a^3 + 16a^3)|h|^2 \\ &\stackrel{4}{\leq} \frac{K}{|\ln|h||^2} = \frac{K}{|\ln|h||^{1+\alpha}}, \end{aligned}$$

kde čísla nad rovnostmi a nerovnostmi náleží k bodům základních pozorování. Našli jsme požadované konstanty $\alpha, \beta > 0$ a $0 < K < \infty$, pro které platí

$$\max_{i,j \in \{1, \dots, d\}} |C_{f_{ij}}(t,t) + C_{f_{ij}}(s,s) - 2C_{f_{ij}}(s,t)| \leq \frac{K}{|\ln|t-s||^{\alpha+1}}$$

pro $\forall s, t \in \mathbb{R}^d : |t-s| \leq \beta$ a tedy máme splněnou podmínsku (1.1) pro kovarianční funkci C_f .

Příklad 2:

Funkce, kterou budeme nyní vyšetřovat, je tvaru

$$C_f(h) = \left(1 + \frac{|h|^2}{2}\right)^{-1}, \quad h \in \mathbb{R}^d.$$

Budeme postupovat analogicky jako v předchozím příkladě. Předně se jedná o izotropní kovarianční funkci viz kniha [10] a zároveň

$$C_f(0) = 1.$$

Dle lemmatu 1 vypočítáme kovarianční funkce C_{f_i} , $C_{f_{ii}}$ a $C_{f_{ij}}$ pro libovolné

$i, j \in \{1, \dots, d\}$ a $h \in \mathbb{R}^d$ takové, že $i \neq j$:

$$\begin{aligned} C_{f_i}(h) &= -\frac{4(4h_i^2 - |h|^2 - 2)}{(|h|^2 + 2)^3}, \\ C_{f_{ii}}(h) &= \frac{48(5h_i^4 - 10h_i^2(z_i + 2) + (z_i + 2)^2)}{(|h|^2 + 2)^5}, \\ C_{f_{ij}}(h) &= C_{f_{ji}}(h) \\ &= -\frac{16(5h_i^4 + 5h_j^4 - 38h_i^2h_j^2 + 8h_i^2 + 8h_j^2 + 4z_{ij}(h_i^2 + h_j^2) - (z_{ij} + 2)^2)}{(|h|^2 + 2)^5}, \end{aligned}$$

kde $z_i := |h|^2 - h_i^2$ a $z_{ij} := |h|^2 - h_i^2 - h_j^2$.

Základní pozorování:

1. Platí rovnosti

$$C_f(0) = 1 = \lambda, \quad C_{f_{ii}}(0) = 6 \quad \text{a} \quad C_{f_{ij}}(0) = 2.$$

2. Existují $0 < K_1 < \infty$ a $\beta_1 > 0$ takové, že pro všechny $h \in \mathbb{R}^d$ splňující $|h| \leq \beta_1$ platí

$$|6 - C_{f_{ii}}(h)| \leq K_1|h|^2.$$

3. Existují $0 < K_2 < \infty$ a $\beta_2 > 0$ takové, že pro všechny $h \in \mathbb{R}^d$ splňující $|h| \leq \beta_2$ platí

$$|2 - C_{f_{ij}}(h)| \leq K_2|h|^2.$$

4. Existuje $\beta_3 > 0$ takové, že pro všechny $h \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ splňující $|h| \leq \beta_3$ platí

$$|h| \leq \frac{1}{|\ln|h||}.$$

Definujme $\beta := \min(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $K := 2 \max(K_1, K_2)$ a $\alpha := 1$. Podobně jako v prvním příkladu jednoduše platí, že s těmito koeficienty je splněna podmínka

$$\max_{i,j \in \{1, \dots, d\}} |C_{f_{ij}}(t, t) + C_{f_{ij}}(s, s) - 2C_{f_{ij}}(s, t)| \leq \frac{K}{|\ln|t-s||^{\alpha+1}}$$

pro $\forall s, t \in \mathbb{R}^d : |t - s| \leq \beta$.

Příklad 3:

Dalšího vhodného kandidáta jsem našel v sinusovém vyjádření kovarianční funkce danou předpisem

$$C_f(h) = \frac{\sin(a|h|)}{a|h|} \mathbf{1}_{(0, \infty)}(|h|) + \mathbf{1}_{\{0\}}(|h|), \quad h \in \mathbb{R}^d$$

pro pevné $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $d \leq 3$. Dle knihy [2] se jedná o izotropní kovarianční funkci. Nasimulovaná data pomocí sinusového modelu ukazují, že nadúrovňové

množiny mají oproti exponenciálnímu modelu hezčí strukturu. To by se mohlo projevit v lepším odhadu intenzit vnitřních objemů. Na druhou stranu, jak se sami přesvědčíme, nedokazují důležitou podmínu (1.1) pro hladkost nadúrovňových množin. Jedná se jen o předpoklad, o který se opíráme. Pro jednoduchost budeme pracovat pouze s jednodimenzionálním procesem. Nejdříve se musíme ujistit, že se jedná o spojitou funkci. Vypočítáme následující limitu

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a|h|)}{a|h|} = 1.$$

Zjevně platí $C_f(0) = 1$. Předpokládejme, že $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a vypočítejme následující derivace

$$\frac{\partial^2 C_f}{\partial^2 h_1}(h) = -\frac{(a^2 h^2 - 2) \sin(a|h|) + 2a|h| \cos(a|h|)}{a|h|^3}$$

a

$$\frac{\partial^4 C_f}{\partial^4 h_1}(h) = \frac{4a|h|(a^2 h^2 - 6) \cos(a|h|) + (a^4 h^4 - 12a^2 h^2 + 24) \sin(a|h|)}{ah^4|h|}.$$

Taktéž vypočítáme jejich limity

$$\lim_{h \rightarrow 0} -\frac{(a^2 h^2 - 2) \sin(a|h|) + 2a|h| \cos(a|h|)}{a|h|^3} = -\frac{a^2}{3}$$

a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4a|h|(a^2 h^2 - 6) \cos(a|h|) + (a^4 h^4 - 12a^2 h^2 + 24) \sin(a|h|)}{ah^4|h|} = \frac{a^4}{5}.$$

To znamená, že C_{f_1} a $C_{f_{11}}$ mají pro $h \in \mathbb{R}$ následující tvary

$$C_{f_1}(h) = \frac{(a^2 h^2 - 2) \sin(a|h|) + 2a|h| \cos(a|h|)}{a|h|^3} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(|h|) + \frac{a^2}{3} \mathbf{1}_{\{0\}}(|h|)$$

a

$$\begin{aligned} C_{f_{11}}(h) &= \frac{4a|h|(a^2 h^2 - 6) \cos(a|h|) + (a^4 h^4 - 12a^2 h^2 + 24) \sin(a|h|)}{ah^4|h|} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(|h|) \\ &\quad + \frac{a^4}{5} \mathbf{1}_{\{0\}}(|h|). \end{aligned}$$

Nakonec vypočítáme hodnotu λ z věty 2

$$\mathbb{E}\{f_1^2(t)\} = C_{f_1}(0) = \frac{a^2}{3} = \lambda.$$

1.6 Booleovský model

V této kapitole budeme využívat koncepci a značení vybudované v knize [12]. Nechť X je bodový proces na \mathcal{F}' . Definujme míru intenzity procesu X předpisem

$$\Theta(A) := \mathbb{E}\{X(A)\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathcal{F}'),$$

kde předpokládáme, že platí

$$\Theta(\mathcal{F}_C) < \infty \quad \forall C \in \mathcal{C}'. \quad (1.10)$$

Množina \mathcal{F}_C je definována předpisem

$$\mathcal{F}_C := \{F \in \mathcal{F} : F \cap C \neq \emptyset\}$$

a podmínka (1.10) nám zaručuje, že Θ je lokálně konečná. Bodový proces X , pro kterou platí $\Theta(\mathcal{F}' \setminus \mathcal{C}') = 0$, nazveme částicovým procesem. Bez újmy na obecnosti vždy předpokládáme, že míra intenzit je nenulová. Následně definujme zobrazení

$$c : \mathcal{C}' \rightarrow \mathbb{R}^d,$$

které neprázdné kompaktní množině $C \in \mathcal{C}'$ přiřadí jednoznačně určený střed nejmenší koule obsahující C . Prostor všech zrn pro částicový proces rozumíme množinu

$$\mathcal{C}_0 := \{C \in \mathcal{C}' : c(C) = 0\}.$$

Věta 5. Nechť X je stacionární částicový proces s intenzitou míry Θ , pro kterou platí $\Theta \neq 0$. Potom míra intenzity je invariantní vzhledem k posunutí a existuje jednoznačně určená hodnota $\gamma \in (0, \infty)$ a jednoznačně určená pravděpodobnostní míra \mathbb{Q} na \mathcal{C}_0 takové, že

$$\Theta(A) = \gamma \int_{\mathcal{C}_0} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_A(x + C) dx \mathbb{Q}(dC) \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{C}').$$

Je-li navíc X izotropní, je míra \mathbb{Q} invariantní vzhledem k otočení.

Důkaz. Důkaz nalezneme v knize [12] viz věta 4.1.1. □

Definice. Bud' X stacionární částicový proces z předchozího tvrzení. Hodnotu γ z téhož tvrzení nazveme intenzitou částicového procesu X . Pravděpodobnostní míru \mathbb{Q} nazveme rozdělení zrna a náhodnou množinu s rozdělením \mathbb{Q} nazveme typickým zrnem procesu X .

Pro jednoduchost budeme jev $C \in \text{supp}(X)$ zkráceně značit $C \in X$, kde pro obecnou celočíselnou náhodnou míru μ na E definujeme nosič $\text{supp}(\mu)$ míry μ předpisem

$$\text{supp}(\mu) := \{x \in E : \mu(\{x\}) \geq 1\}.$$

Dle věty 4.1.3. v knize [12] pro libovolné $A \in \mathcal{B}(\mathcal{C}_0)$ a pro libovolné $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) : 0 < V_d(B) < \infty$ platí

$$\gamma \mathbb{Q}(A) = \frac{1}{V_d(B)} \mathbb{E} \left\{ \sum_{C \in X, c(C) \in B} \mathbf{1}_A(C - c(C)) \right\}.$$

To nám dává dílčí výsledek

$$\gamma = \frac{1}{V_d(B)} \mathbb{E} \left\{ \sum_{C \in X, c(C) \in B} 1 \right\} = \frac{1}{V_d(B)} \mathbb{E} \{ \# \{C \in X : c(C) \in B\} \}.$$

Intenzitu γ lze interpretovat jako střední počet častic částicového procesu v okně s jednotkovým objemem. Zároveň body $c(C), C \in X$ přirozeným způsobem definují bodový proces $X^0 := \sum_{C \in X} \delta_{c(C)}$ na \mathbb{R}^d a jedná se o stacionární bodový proces s intenzitou γ .

Definice. Nechť X je Poissonův částicový proces. Potom náhodnou uzavřenou množinu definovanou předpisem

$$Z := \bigcup_{K \in X} K$$

nazveme Booleovským modelem.

Z věty 3.6.2. z knihy [12] plyne, že předchozí definice je korektní. Navíc je-li X stacionární respektive izotropní, pak taktéž náhodná uzavřená množina Z je stacionární respektive izotropní.

Dostáváme se k nejdůležitější větě této kapitoly.

Věta 6. Nechť Z je Booleovský model generovaný stacionárním a izotropním Poissonovým konvexním částicovým procesem. Pak limita

$$\overline{V}_j(Z) := \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}\{V_j(Z \cap rK)\}}{V_d(rK)}$$

existuje pro libovolné $K \in \mathcal{K}' : V_d(K) > 0$. Dále platí

$$\overline{V}_j(Z) = e^{-\overline{V}_d(X)} \left[\overline{V}_j(X) - \frac{d! \kappa_d}{j! \kappa_j} \sum_{s=2}^{d-j} \frac{(-1)^s}{s!} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_s=j+1 \\ m_1 + \dots + m_s = (s-1)d+j}}^{d-1} \prod_{i=1}^s \frac{m_i! \kappa_{m_i}}{d! \kappa_d} \overline{V}_{m_i}(X) \right]$$

pro všechny $j \in \{0, \dots, d-1\}$ a

$$\overline{V}_d(Z) = 1 - e^{-\overline{V}_d(X)},$$

kde

$$\overline{V}_j(X) := \gamma \int_{\mathcal{K}_0} V_j(K) \mathbb{Q}(\mathrm{d}K) \quad \forall j \in \{0, \dots, d\}.$$

Důkaz. Důkaz nalezneme v knize [12] viz věta 9.1.4. Pouze upozorním, že v knize [12] došlo pravděpodobně k překlepku případně k chybě a výraz $c_j^{m_i} := \frac{m_i! \kappa_{m_i}}{j! \kappa_j}$ musíme nahradit výrazem $c_d^{m_i} := \frac{m_i! \kappa_{m_i}}{d! \kappa_d}$ a zároveň došlo k vynechání koeficientu $c_j^d = \frac{d! \kappa_d}{j! \kappa_j}$ před první sumou. \square

Označme typické zrno Booleovského modelu symbolem Z^0 . Konvexním částicovým procesem rozumíme částicový proces, kde rozdělení typického zrna Z^0 žije pouze na prostoru \mathcal{K}_0 . Dostáváme tedy rovnost

$$\overline{V}_0(X) = \gamma \int_{\mathcal{K}_0} V_0(K) \mathbb{Q}(\mathrm{d}K) = \gamma \int_{\mathcal{K}_0} 1 \mathbb{Q}(\mathrm{d}K) = \gamma.$$

Tak jako v kapitolách o intenzitě vnitřních objemů generovaných nadúrovňovými množinami značíme hustotu objemu náhodné uzavřené množiny písmenem p a z předchozí věty plyne

$$p = \overline{V}_d(Z) = 1 - e^{-\overline{V}_d(X)} = 1 - e^{-\gamma \mathbb{E}\{V_d(Z^0)\}}.$$

Odvodíme si hustoty vnitřních objemů Booleovského modelu pro dvourozměrný a trojrozměrný případ. Nechť se pohybujeme v prostoru \mathbb{R}^2 a jsou splněny předpoklady věty 6. Vypočítejme hustotu $\bar{V}_1(Z)$

$$\begin{aligned}\bar{V}_1(Z) &= e^{-\bar{V}_2(X)} \left[\bar{V}_1(X) - \frac{2!\kappa_2}{1!\kappa_1} \sum_{s=2}^1 \frac{(-1)^s}{s!} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_s=1+1 \\ m_1+\dots+m_s=(s-1)2+1}}^{2-1} \prod_{i=1}^s \frac{m_i! \kappa_{m_i}}{2!\kappa_2} \bar{V}_{m_i}(X) \right] \\ &= \left(1 - \left(1 - e^{-\bar{V}_2(X)}\right)\right) \bar{V}_1(X) \\ &= (1-p) \gamma \mathbb{E} \{V_1(Z^0)\}.\end{aligned}$$

Dalším úkolem je vypočítat intenzitu Eulerovy charakteristiky

$$\begin{aligned}\bar{V}_0(Z) &= e^{-\bar{V}_2(X)} \left[\bar{V}_0(X) - \frac{2!\kappa_2}{0!\kappa_0} \sum_{s=2}^2 \frac{(-1)^s}{s!} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_s=1 \\ m_1+\dots+m_s=(s-1)2}}^{2-1} \prod_{i=1}^s \frac{m_i! \kappa_{m_i}}{2!\kappa_2} \bar{V}_{m_i}(X) \right] \\ &= (1-p) \left[\gamma - \frac{2\pi}{2} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_2=1 \\ m_1+\dots+m_2=2}}^1 \prod_{i=1}^2 \frac{m_i! \kappa_{m_i}}{2\kappa_2} \bar{V}_{m_i}(X) \right] \\ &= (1-p) \left[\gamma - \frac{\pi}{1} \left(\frac{1!\kappa_1}{2\kappa_2} \bar{V}_1(X) \right)^2 \right] \\ &= (1-p) \left[\gamma - \frac{\pi}{1} \left(\frac{2}{2\pi} \bar{V}_1(X) \right)^2 \right] \\ &= (1-p) \left[\gamma - \frac{\gamma^2}{\pi} (\mathbb{E} \{V_1(Z^0)\})^2 \right].\end{aligned}$$

Přejděme k dimenzi $d = 3$. Analogicky jako v předchozím textu, vypočítáme postupně hustoty vnitřních objemů $\bar{V}_2(Z), \bar{V}_1(Z)$ a $\bar{V}_0(Z)$:

$$\begin{aligned}\bar{V}_2(Z) &= e^{-\bar{V}_3(X)} \left[\bar{V}_2(X) - \frac{3!\kappa_3}{2!\kappa_2} \sum_{s=2}^1 \frac{(-1)^s}{s!} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_s=3 \\ m_1+\dots+m_s=(s-1)3+2}}^2 \prod_{i=1}^s \frac{m_i! \kappa_{m_i}}{3!\kappa_3} \bar{V}_{m_i}(X) \right] \\ &= (1-p) (\gamma \mathbb{E} \{V_2(Z^0)\}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{V}_1(Z) &= e^{-\overline{V}_3(X)} \left[\overline{V}_1(X) - \frac{3!\kappa_3}{1!\kappa_1} \sum_{s=2}^2 \frac{(-1)^s}{s!} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_s=2 \\ m_1+\dots+m_s=(s-1)3+1}}^2 \prod_{i=1}^s \frac{m_i!\kappa_{m_i}}{3!\kappa_3} \overline{V}_{m_i}(X) \right] \\
&= (1-p) \left[\overline{V}_1(X) - \frac{8\pi}{4} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_2=2 \\ m_1+\dots+m_2=4}}^2 \prod_{i=1}^2 \frac{m_i!\kappa_{m_i}}{8\pi} \overline{V}_{m_i}(X) \right] \\
&= (1-p) \left[\overline{V}_1(X) - \frac{8\pi}{4} \left(\frac{2!\kappa_2}{8\pi} \overline{V}_2(X) \right)^2 \right] \\
&= (1-p) \left[\gamma \mathbb{E}\{V_1(Z^0)\} - \frac{\pi}{8} \gamma^2 (\mathbb{E}\{V_2(Z^0)\})^2 \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{V}_0(Z) &= e^{-\overline{V}_3(X)} \left[\overline{V}_0(X) - \frac{3!\kappa_3}{0!\kappa_0} \sum_{s=2}^3 \frac{(-1)^s}{s!} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_s=1 \\ m_1+\dots+m_s=(s-1)3}}^2 \prod_{i=1}^s \frac{m_i!\kappa_{m_i}}{3!\kappa_3} \overline{V}_{m_i}(X) \right] \\
&= (1-p) \left[\gamma - 8\pi \left(\frac{1}{2} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_2=1 \\ m_1+\dots+m_2=3}}^2 \prod_{i=1}^2 \frac{m_i!\kappa_{m_i}}{8\pi} \overline{V}_{m_i}(X) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{6} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_3=1 \\ m_1+\dots+m_3=6}}^2 \prod_{i=1}^3 \frac{m_i!\kappa_{m_i}}{8\pi} \overline{V}_{m_i}(X) \right) \right] \\
&= (1-p) \left[\gamma - 8\pi \left(\frac{1!\kappa_1 2!\kappa_2}{(8\pi)^2} \overline{V}_1(X) \overline{V}_2(X) - \frac{1}{6} \left(\frac{2!\kappa_2}{8\pi} \overline{V}_2(X) \right)^3 \right) \right] \\
&= (1-p) \left[\gamma - 8\pi \left(\frac{1}{16\pi} \overline{V}_1(X) \overline{V}_2(X) - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4} \overline{V}_2(X) \right)^3 \right) \right] \\
&= (1-p) \left[\gamma - \frac{\gamma^2}{2} \mathbb{E}\{V_1(Z^0)\} \mathbb{E}\{V_2(Z^0)\} + \frac{\pi\gamma^3}{48} (\mathbb{E}\{V_2(Z^0)\})^3 \right].
\end{aligned}$$

Do této doby jsme pracovali s Booleovským modelem majícím typické zrno, které je s.j. konvexní a kompaktní množinou. Nadešel čas omezit se na model, se kterým pracují v článku [6]. Jedná se o model, kde Booleovský model má typické zrno v podobě koule, kde poloměr koule r má rovnoměrné rozdělení na intervalu $[a,b]$ pro $0 < a < b < \infty$. Tento model má tu dobrou vlastnost, že má své uplatnění a dobře se simuluje. Intenzity vnitřních objemů Booleovského modelu s typickým zrnem v podobě koule již nebudeme odvozovat, ale pouze uvedeme v tabulce 1.2.

	$\mathbb{E} r = \frac{a+b}{2}, \quad \mathbb{E} r^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3}, \quad \mathbb{E} r^3 = \frac{a^3+a^2b+ab^2+b^3}{4}$	
	$d = 2$	$d = 3$
γ	$-\frac{\ln(1-p)}{\pi \mathbb{E} r^2}$	$-\frac{3 \ln(1-p)}{4\pi \mathbb{E} r^3}$
\bar{V}_0	$(1-p)\gamma [1 - \gamma \pi (\mathbb{E} r)^2]$	$(1-p)\gamma \left[1 - 4\gamma \pi \mathbb{E} r \mathbb{E} r^2 + \frac{\gamma^2 \pi^4}{6} (\mathbb{E} r^2)^3\right]$
\bar{V}_1	$(1-p)\gamma \pi \mathbb{E} r$	$(1-p)\gamma \left[4\mathbb{E} r - \frac{\gamma \pi^3}{2} (\mathbb{E} r^2)^2\right]$
\bar{V}_2		$2(1-p)\gamma \pi \mathbb{E} r^2$

Tabulka 1.2: Přehled intenzit Booleovského modelu mající typické zrno v podobě koule s poloměrem $r \sim U(a,b)$ pro $0 < a < b < \infty$, kde z praktického hlediska fixujeme objemovou intenzitu $0 < p < 1$.

Kapitola 2

Numerická část

V kapitole týkající se praktické části zužitkujeme konstrukci vybudovanou v předchozí teoretické části. Pokusíme se aplikovat postupy pro odhad hustot vnitřních objemů a výsledky porovnat s teoretickými hodnotami. Neklademe si za cíl vytvořit nový postup pro odhadování intenzit. Využijeme odhady již vytvořené v článku [6] a pomocí simulační studie vyhodnotíme vlastnosti modelu a srovnáme s publikovanými výsledky odhadů aplikovaných na Booleovský model.

2.1 Popis algoritmu

Používáme aparát, který byl vytvořen v článcích [6] a poté vylepšen v [7]. V základních rysech si nastíníme ideu postupu pro odhad hustot. Upozorňuji, že se jedná pouze o nástin nikoliv o korektní definici postupu.

Nechť máme množinu $X \subset \mathbb{R}^d$, která je z rozšířeného konvexního okruhu. Ve zkratce řečeno, jedná se o množinu, pro kterou platí, že množinu $K \cap X$ lze rozepsat jako konečné sjednocení konvexních a kompaktních množin pro všechny konvexní a kompaktní množiny K . Bud' $\epsilon > 0$. Označme $X_\epsilon := X \oplus b(0, \epsilon)$ naefuklou množinu X o ϵ a pracujme s uzávěrem jejího doplňku $X_\epsilon^* := \overline{((X_\epsilon)^\complement)}$. Množina X_ϵ^* je množina s kladným dosahem. To znamená, že pro každý bod vnějšího okolí hranice X_ϵ^* existuje jednoznačně nejbližší bod z množiny X_ϵ^* . Této vlastnosti následně využijeme. Zobrazení přiřazující bod vnějšího okolí množiny k jednoznačně nejbližšímu bodu množiny označme ξ .

Nechť dále máme testovací borelovskou omezenou množinu $B \in \mathcal{B}_0$ s kladným objemem a dělení $\Delta = \{0 < \delta_1, \dots, \delta_n < \epsilon\}$ intervalu $[0, \epsilon]$, kde předpokládáme $n \geq d$. Označme vektor

$$V(X, \epsilon, \Delta, B) := (v(X, \epsilon, \delta_1, B), \dots, v(X, \epsilon, \delta_n, B))^T,$$

kde $v(X, \epsilon, \delta_i, B) := V_d \left(((X_\epsilon^*)_{\delta_i} \setminus X_\epsilon^*) \cap \xi_{X_\epsilon^*}^{-1}(B) \right) / V_d(B)$ pro $i \in \{1, \dots, n\}$. Definujme matici

$$M_\Delta := \begin{pmatrix} \delta_1 \kappa_1 & \delta_2 \kappa_1 & \cdots & \delta_n \kappa_1 \\ \delta_1^2 \kappa_2 & \delta_2^2 \kappa_2 & \cdots & \delta_n^2 \kappa_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_1^d \kappa_d & \delta_2^d \kappa_d & \cdots & \delta_n^d \kappa_d \end{pmatrix}$$

a označme Σ_d diagonální $(d \times d)$ -matici s prvky na diagonále $\Sigma_d(i,i) = (-1)^{i-1}$ pro všechny $i \in \{1, \dots, d\}$. Výsledný odhad se poté definuje předpisem

$$\widehat{V}(X, \epsilon, \Delta, B) := \Sigma_d (M_\Delta M_\Delta^\top)^{-1} M_\Delta V(X, \epsilon, \Delta, B).$$

Věta 7. Nechť Ξ je stacionární náhodná uzavřená množina v \mathbb{R}^d s hodnotami v rozšířeném konvexním okruhu \mathcal{S} , která splňuje podmínu integrovatelnosti. Tj.

$$\mathbb{E} \left\{ 2^{N(\Xi \cap C^d)} \right\} < \infty,$$

kde $N(\Xi \cap C^d)$ značí počet množin k nejmenšímu možnému rozkladu $\Xi \cap C^d$. Nechť $B \in \mathcal{B}_0 : V_d(\partial B) = 0$ a $V_d(B) > 0$. Pak

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \overline{V}(\Xi_\epsilon) = \overline{V}(\Xi)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{\max \Delta \rightarrow 0} \mathbb{E} \left\{ \widehat{V}(\Xi, \epsilon, \Delta, B) \right\} = \overline{V}(\Xi),$$

kde $\overline{V}(\Xi) := (\overline{V}_{d-1}(\Xi), \dots, \overline{V}_0(\Xi))^\top$.

Důkaz. Důkaz nalezneme v článku [6] viz věta 1. \square

Pro prostor \mathbb{R}^2 existuje dokonce silnější tvrzení.

Věta 8. Nechť Ξ splňuje podmínky z předchozího tvrzení pro $d = 2$. Bud' $B \in \mathcal{B}_0 : V_2(B) > 0$ a $q > 0$, pak platí rovnost

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{\substack{\Delta \subseteq (0, \epsilon) \\ q(\Delta) \leq q}} \left| \mathbb{E} \left\{ \widehat{V}(\Xi, \epsilon, \Delta, B) \right\} - \overline{V}(\Xi) \right| = 0,$$

kde

$$q(\Delta) := \frac{(\sum_i \delta_i^2)(\sum_i \delta_i^4) + (\sum_i \delta_i^3)^2}{(\sum_i \delta_i^2)(\sum_i \delta_i^4) - (\sum_i \delta_i^3)^2}.$$

Důkaz. Důkaz nalezneme v článku [7] viz věta 2.3. \square

Pro náhodnou uzavřenou množinu Ξ budeme intenzity vnitřních objemů odhadovat pomocí vektoru $\widehat{V}(\Xi, \epsilon, \Delta, B)$. Naší snahou je minimalizovat ϵ , abychom minimalizovali chybu odhadu. Na druhou stranu potřebujeme dostatečně jemné dělení pro lineární regresi určující odhad \widehat{V} . Tyto dvě podmínky samozřejmě jdou proti sobě. V článku [6] našli optimum v hodnotě $n = 14$ pro dimenzi $d = 2$ a v článku [5] je určeno $n = 22$ pro $d = 3$. Problém rastru koulí do mřížky a volba hodnot $\delta_1, \dots, \delta_n$ a ϵ jsou již řešené a uvedené v již zmíněných článcích a nebudeme se tomuto problému více věnovat.

2.2 Dosavadní výsledky

Vedle výše zmíněného a posléze používaného algoritmu existují i jiné algoritmy pro odhad intenzit vnitřních objemů. Založeny jsou na přímém výpočtu bez používání nafukování doplňku studované množiny.

V následujících textech a tabulkách budeme symbolem \bar{V} značit teoretické hodnoty intenzit vnitřních objemů. Bud' \tilde{V} průměr z odhadů získané pomocí vyhodnocení výše zmínovaného algoritmu. Podobně \tilde{V}^S značíme průměr odhadů získané pomocí algoritmu, který vymysleli profesor Volker Schmidt spolu s profesorem Evgeny Spodarevem. Výsledky publikovali v článku [13]. Poslední zmínovaný postup pro odhad intenzit množiny se objevuje v knize [8] a analogicky značíme průměry tohoto odhadu symbolem \tilde{V}^O .

Pro možnost porovnávání teoretických hodnot s odhadovanou hodnotou přebíráme v již zmíněných článcích používanou míru v podobě relativní chyby, která je dána předpisem $\delta_{\alpha,\beta} := \frac{\beta-\alpha}{\alpha} \cdot 100\%$, kde α je teoretická hodnota a β je odhadovaná hodnota. V pozdější diskuzi však zjistíme, že se nejedná o příliš štastný výběr a doporučil bych použít kompatibilnější porovnávání. Směrodatnou odchylku, vypovídající o kvalitě odhadu, značíme SD a pro střední čtvercovou chybu odhadu jsme si vyhradili symbol MSE.

V tabulce 2.1 jsou uvedeny odhady intenzit dvourozměrného Booleovského modelu s typickým zrnem v podobě koule o poloměru $r \sim U(20,40)$ pomocí různých algoritmů. Odhad se získával z 200 realizací na pozorovacím okně $B = [1000]^2$.

Pro trojrozměrný prostor již příliš simulací nenalezneme. Uvedeme pouze tabulku 2.2 s výsledky vydané v článku [5] pro odhad \hat{V} Booleovského modelu s typickým zrnem v podobě koule o poloměru $r \sim U(40,80)$. Odhad se získával z 50 realizací na pozorovacím okně $B = [0,1000]^3$.

2.3 Realizace 2D

Ve výpočetní studii pro dvourozměrný prostor jsme postupně v programu **R** generovali modely nadúrovňových množin pomocí centrovánoho Gaussovského izotropního procesu f s kovarianční funkcí

$$C_f(h) = e^{-a|h|^2}, \quad h \in \mathbb{R}^2.$$

Ověřili jsme si již, že splňuje podmínky věty 2 a známe teoretické hodnoty intenzit viz tabulka 1.1. Hodnotu a získáme z odvozeného vzorce

$$\mathbb{E}\{f_i^2(t)\} = C_{f_i}(0) = 2a = \lambda,$$

kde λ je parametr modelu. Pro parametr λ jsme postupně brali hodnoty 0,002; 0,001 a nakonec 0,0003. Druhý parametr u nadúrovňového modelu určíme ze vztahu $u = u_{1-p}$, kde fixujeme objemovou intenzitu p . Hodnoty objemových intenzit oproti článkům jsme pozměnili a bereme v úvahu hodnoty 0,2; 0,45 a 0,7. Má to svůj prozaický důvod. Předně pro $p = 0,5$ je hodnota parametru $u = 0$ a intenzita Eulerovy charakteristiky je taktéž rovna nule. Nemůžeme proto definovat relativní chybu $\delta_{\bar{V}_0, \tilde{V}_0}$. V druhém případě víme z diskuze v kapitole 1.4, že pro $p = 0,8$ jsou intenzity vnitřních objemů až na znaménko rovny intenzitám vnitřních objemů pro $p = 0,2$.

Pro každý model nadúrovňových množin jsme vygenerovali 100 realizací na diskrétní mřížce $[0,1000]^2$. Následně jsme odhadovali hustoty vnitřních objemů pomocí programu WinEiv2d, který vytvořil doc. RNDr. Tomáš Mrkvíčka, Ph.D. a nalezneme ho na webové stránce <http://home.ef.jcu.cz/~mrkvicka/EIV/EIV2D.htm>. Program odhaduje hustoty vnitřních objemů množin pomocí výše zmíněného postupu. Menší problém nastal v tom, že program pracuje pouze se soubory ve formátu PBM tvaru P4. Našim úkolem tedy bylo nejen nasimulovat nadúrovňové množiny, ale následně i výsledek uložit do formátu PBM tvaru P4. Algoritmus, který jsem pro tento účel vytvořil v programu **R**, nalezneme v příloze 1 na stránce 47. Výsledky celkového počinu nalezneme v tabulkách 2.3; 2.4 a 2.5.

2.4 Realizace 3D

Analogicky jako pro 2D jsme postupovali při realizaci v trojrozměrném prostoru. Jako primární generátor nadúrovňových množin jsme si opět zvolili centrovány Gaussovské izotropní pole se stejnou kovarianční funkcí

$$C_f(h) = e^{-a|h|^2}, \quad h \in \mathbb{R}^3.$$

Snažili jsme se postupovat podobně jako v článku [5]. Pro uspokojivé výhodnocení odhadů jsme generovali 50 realizací. Museli jsme se však spokojit s realizací pouze na diskrétní mřížce pozorovacího okna $B = [0,310]^3$ na rozdíl od článku [5], kde se používalo okno $B = [0,1000]^3$. Ozřejmíme důvod tohoto rozdílu. Při generování pseudonáhodných nadúrovňových množin pomocí náhodného procesu je časově náročnější než generovaní Booleovského modelu. Při realizaci Booleovského modelu nejdříve vygenerujeme Poissonův bodový proces s potřebnou intenzitou a následně pro každý bod bodového procesu nezávisle vygenerujeme poloměr koule s potřebným rozdělením. Na druhou stranu při generování náhodného pole výhodnocujeme chování každého pixelu vzhledem ke svému okolí. V případě dvourozměrného prostoru není rozdíl tak markantní, ale v trojrozměrném prostoru jsme již museli zmenšit pozorovací okno. Výsledky odhadů \widehat{V} pro naši realizaci nalezneme v tabulce 2.6. Pro odhad hustot vnitřních objemů pro trojrozměrný prostor jsme použili program WinEiv3d opět vytvořený doc. RNDr. Tomášem Mrkvíčkou, Ph.D. a nalezneme ho na webové stránce <http://home.ef.jcu.cz/~mrkvicka/EIV/EIV3D.htm>. Algoritmus vytvořený v programu **R** pro simulaci řezů nadúrovňových množin a následného ukládání do formátu PBM ve tvaru P4 nalezneme v příloze 2 na stránce 50.

2.5 Diskuze

Dovolte mi závěrečnou diskuzi rozdělit do několika kroků.

1. Pustíme se do výhodnocování výsledků, které jsou nad očekávání dobré. Především podotkneme, že odhad z článku [6] je použitelný pro nadúrovňové modely. Dokonce v naší simulaci vykazujeme podobné výsledky jako pro Booleovský model.

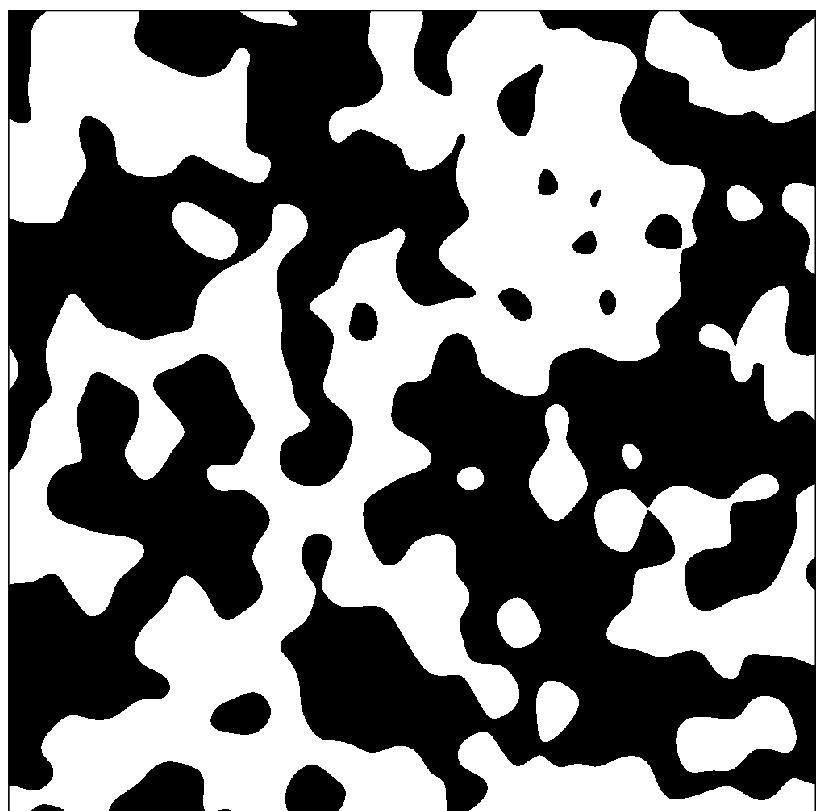
V dvourozměrném modelu si můžeme povšimnout dvou zajímavostí. Za prvé pro parametr $p = 0,45$ jsou odhady Eulerovy charakteristiky horší než pro zbylé parametry p . Avšak odhady intenzit \bar{V}_1 pro $p = 0,45$ jsou na druhou stranu lepší než pro $p = 0,2$ nebo $p = 0,7$, a to nezávisle na parametru λ . Je otázkou, čím je to způsobeno. Rozdíl však není zas tak velký a pro adekvátní odpověď bychom potřebovali více simulací. Druhý pozorovatelný trend je jasnější. S rostoucím λ se jednoznačně zhoršuje odhad. Jak už jsme podotkli, s rostoucím λ se nám rozmlňuje nadúrovňová množina a při tom se ztrácí její hladkost. To se právě projevuje v horším odhadu.

U trojrozměrného modelu jsme si nemohli dovolit příliš simulací. Pro představu jedna realizace nadúrovňového modelu na pozorovacím okně $[0,310]^3$ trvala téměř 30 minut. Z tohoto důvodu jsme realizovali model pouze pro jeden parametr λ . Analogicky jako pro dvourozměrný případ by se z mého pohledu projevil trend, kdy při zvětšujícím se λ by se zhoršoval odhad. Porovnáme-li naše výsledky pro nadúrovňový model s výsledky pro Booleovský model, můžeme s potěšením konstatovat, že jsme opět získali hezký odhad.

2. Dále bych zmínil problém související s předpoklady věty 7. Ve větě 7 vyžadujeme, aby náhodná uzavřená množina byla skoro jistě z rozšířeného konvexního okruhu. Je to předpoklad, který náhodné uzavřené nadúrovňové množiny nesplňuje. Jedná se na první pohled o poměrně závažný problém. Na druhou stranu výsledky ukazují, že tento předpoklad pro naše generované nadúrovňové množiny není příliš zásadní. Odůvodnění by mohlo být následující. Odhad z věty 7 je založen na tom, že se množina z rozšířeného konvexního okruhu převede pomocí nafouknutí a následného doplnku na množinu s kladným dosahem a následně se pracuje s touto množinou. Uvědomme si, že množiny nadúrovňového modelu mají skoro jistě kladný dosah a převedením pomocí nafouknutí a následného doplnku dostáváme opět skoro jistě množinu s kladným dosahem. Navíc při realizaci dochází k rastrování obrazu, a tudíž předpoklad ve větě 7 v našem případě nebude mít zásadní vliv na odhad \hat{V} .
3. V dalším bodu diskuze bych se zabýval možným vylepšením odhadu \hat{V} objevujícím se v článku [7]. Laicky řečeno ve vylepšeném odhadu stále nafukujeme studovanou množinu pomocí dělení Δ s tím, že povolujeme i zakousnutí se do studované množiny. V tabulce 2.7 jsou uvedeny výsledky pro nadúrovňový model s intenzitou $\lambda = 0,002$ pro dvourozměrný případ, kde parametr δ_ϵ uvádí počet diskrétních koulí používaný k vnějšímu nafouknutí. Pro $\delta_\epsilon = 14$ se jedná o klasický odhad \hat{V} . Z výsledků lze vypozorovat, že relativní chyba $\delta_{\bar{V}_1, \tilde{V}_1}$ klesá vzhledem ke klesající hodnotě δ_ϵ . Na druhou stranu se neobjevuje žádný trend v podobě vylepšení odhadu pro Eulerovu charakteristiku. Nastává otázka, jak si tento jev vysvětlit. Důvod bude pravděpodobně následující. Nadúrovňový model na rozdíl od Booleovského modelu může obsahovat malé ostrůvky viz obrázek 2.1. Vynechání těchto malých ostrůvků při výpočtu odhadu nebude mít příliš vliv na odhad intenzity V_1 , ale velmi může ovlivnit odhad intenzity Eulerovy charakteristiky.

Z tohoto důvodu bych doporučoval s rozmyslem používat vylepšený odhad objevující se v článku [7] pro model nadúrovňových množin.

4. V poslední části diskuze se dotkneme problému vyhodnocování výsledků pomocí relativní chyby definované předpisem $\delta_{\alpha,\beta} = \frac{\beta-\alpha}{\alpha} \cdot 100\%$, kde α je teoretická hodnota a β je odhadovaná hodnota. Pokud si vzpomínáme na úvodní slovo této práce, jedním z důvodů napsání a nalezení nového modelu se známými hustotami vnitřních objemů byl ten, že odhad Eulerovy charakteristiky Booleovského modelu v trojrozměrném případě objevující se v článku [5] se jevil jako špatný. Ano, našli jsme model, pro který odhad Eulerovy charakteristiky je lepší v trojrozměrném prostoru. Měli bychom se však zamyslet, proč odhad pro Booleovský model není tak dobrý. Od pověď je poměrně jednoduchá. V definici relativní chyby si všimněme, že dělíme teoretickou hodnotou. To znamená, že pokud se teoretická hodnota blíží nule, pak jakákoli odchylka od teoretické hodnoty se projevuje velmi výrazně. A to se právě stalo v případě Eulerovy charakteristiky pro trojrozměrný prostor. Při zafixování objemové intenzity $p = 0,2$ je teoretická hodnota Eulerovy charakteristiky už rádu 10^{-8} a z tohoto důvodu je relativní chyba tak velká, ačkoliv je odhad z mého pohledu dobrý. Doporučoval bych proto lepší míru pro porovnávání odhadů hustot vnitřních objemů.



Obrázek 2.1: Realizace nadúrovňového exponenciálního modelu s pevnou objemovou intenzitou $p = 0,5$ a parametrem $\lambda = 0,002$.

	$p = 0,2$	$p = 0,5$	$p = 0,8$
$\bar{V}_0 \times 10^5$	4,7782	3,9195	-6,0593
$\tilde{V}_0 \times 10^5$	4,1964	1,5353	-6,7906
$\tilde{V}_0^S \times 10^5$	4,3487	1,555	-1,08
$\tilde{V}_0^O \times 10^5$	4,3125	1,5956	-1,0672
$\delta_{\bar{V}_0, \tilde{V}_0} \%$	-12,18	-60,83	12,07
$\delta_{\bar{V}_0, \tilde{V}_0^S} \%$	-8,99	-60,33	78,22
$\delta_{\bar{V}_0, \tilde{V}_0^O} \%$	-9,75	-59,29	76,13
$SD(\tilde{V}_0) \times 10^6$	4,4929	8,3423	8,1626
$MSE(\tilde{V}_0) \times 10^{10}$	0,5403	6,3806	1,2010
$2\bar{V}_1 \times 10^2$	1,1476	2,28	2,0693
$2\tilde{V}_1 \times 10^2$	1,2077	2,0598	1,4850
$2\tilde{V}_1^S \times 10^2$	1,2123	2,3402	2,1547
$2\tilde{V}_1^O \times 10^2$	1,1361	2,1947	2,022
$\delta_{\bar{V}_1, \tilde{V}_1} \%$	5,24	-7,55	-28,23
$\delta_{\bar{V}_1, \tilde{V}_1^S} \%$	5,64	5,04	4,13
$\delta_{\bar{V}_1, \tilde{V}_1^O} \%$	-1,0	-1,5	-2,29
$SD(2\tilde{V}_1) \times 10^3$	1,1	0,728	0,936
$MSE(2\tilde{V}_1) \times 10^5$	0,157	0,336	3,5

Tabulka 2.1: Teoretické a odhadované hodnoty hustot vnitřních objemů Booleovského modelu s typickým zrnem v podobě koule o poloměru $r \sim U(20,40)$ při realizacích na pozorovacím okně $B = [0,1000]^2$. Tabulka je převzata z článku [6].

	$p = 0,2$	$p = 0,5$	$p = 0,8$
$\bar{V}_0 \times 10^7$	0,7402	-1,8589	-4,2946
$\delta_{\bar{V}_0, \tilde{V}_0} \%$	-1890,32	1265,026	359,23
$SD(\tilde{V}_0) \times 10^7$	0,704	0,802	1,16
$\bar{V}_1 \times 10^5$	3,4101	3,1377	-3,3917
$\delta_{\bar{V}_1, \tilde{V}_1} \%$	-32,2	-93,06	62,44
$SD(\tilde{V}_1) \times 10^6$	1,11	2,46	2,34
$\bar{V}_2 \times 10^3$	4,1653	8,0867	7,5107
$\delta_{\bar{V}_2, \tilde{V}_2} \%$	9,48	-1,92	-17,77
$SD(\tilde{V}_2) \times 10^4$	1,3	1,12	1,35

Tabulka 2.2: Teoretické a odhadované hodnoty hustot vnitřních objemů Booleovského modelu s typickým zrnem v podobě koule o poloměru $r \sim U(40,80)$ při 50 realizacích na pozorovacím okně $B = [0,1000]^3$. Tabulka je převzata z článku [5].

	$p = 0,2$	$p = 0,45$	$p = 0,7$
$\bar{V}_0 \times 10^5$	7,5001	1,5832	-5,8038
$\tilde{V}_0 \times 10^5$	7,207	1,0706	-6,2308
$\delta_{\bar{V}_0, \tilde{V}_0} \%$	-3,9079	-32,379	7,3577
$SD(\tilde{V}_0) \times 10^6$	6,4804	9,7995	7,5472
$MSE(\tilde{V}_0) \times 10^{11}$	4,1576	9,5069	5,6391
$2\bar{V}_1 \times 10^2$	1,5692	2,2185	1,9488
$2\tilde{V}_1 \times 10^2$	1,7924	2,2641	1,7967
$\delta_{\bar{V}_1, \tilde{V}_1} \%$	14,223	2,0581	-7,8048
$SD(2\tilde{V}_1) \times 10^4$	9,0609	5,858	8,3421
$MSE(2\tilde{V}_1) \times 10^7$	8,1279	3,3973	6,8894

Tabulka 2.3: Teoretické a odhadované hodnoty hustot vnitřních objemů nadúrovňového modelu s parametrem $\lambda = 0,002$ při 100 realizacích na pozorovacím okně $B = [0,1000]^2$.

	$p = 0,2$	$p = 0,45$	$p = 0,7$
$\bar{V}_0 \times 10^5$	3,75	0,7916	-2,9019
$\tilde{V}_0 \times 10^5$	3,8378	0,8245	-3,0172
$\delta_{\bar{V}_0, \tilde{V}_0} \%$	2,3393	4,151	3,9731
$SD(\tilde{V}_0) \times 10^6$	4,731	6,7153	6,1434
$MSE(\tilde{V}_0) \times 10^{11}$	2,2158	4,4644	3,7364
$2\bar{V}_1 \times 10^2$	1,1096	1,5687	1,378
$2\tilde{V}_1 \times 10^2$	1,2268	1,6157	1,312
$\delta_{\bar{V}_1, \tilde{V}_1} \%$	10,561	2,996	-4,7909
$SD(2\tilde{V}_1) \times 10^4$	8,3958	5,6351	8,183
$MSE(2\tilde{V}_1) \times 10^7$	6,9785	3,1437	6,6291

Tabulka 2.4: Teoretické a odhadované hodnoty hustot vnitřních objemů nadúrovňového modelu s parametrem $\lambda = 0,001$ při 100 realizacích na pozorovacím okně $B = [0,1000]^2$.

	$p = 0,2$	$p = 0,45$	$p = 0,7$
$\bar{V}_0 \times 10^5$	1,125	0,2375	-0,8706
$\tilde{V}_0 \times 10^5$	1,147	0,1585	-0,8621
$\delta_{\bar{V}_0, \tilde{V}_0} \%$	1,9566	-33,239	-0,9673
$SD(\tilde{V}_0) \times 10^6$	2,6608	4,3311	3,2322
$MSE(\tilde{V}_0) \times 10^{11}$	0,7009	1,8571	1,0343
$2\bar{V}_1 \times 10^2$	0,6077	0,8592	0,7548
$2\tilde{V}_1 \times 10^2$	0,6352	0,8757	0,7425
$\delta_{\bar{V}_1, \tilde{V}_1} \%$	4,5177	1,913	-1,63
$SD(2\tilde{V}_1) \times 10^4$	8,9539	5,7081	7,3991
$MSE(2\tilde{V}_1) \times 10^7$	7,9371	3,2256	5,42

Tabulka 2.5: Teoretické a odhadované hodnoty hustot vnitřních objemů nadúrovňového modelu s parametrem $\lambda = 0,0003$ při 100 realizacích na pozorovacím okně $B = [0,1000]^2$.

	$p = 0,2$	$p = 0,45$	$p = 0,7$
$\bar{V}_0 \times 10^7$	-1,6396	-7,8217	-5,0614
$\tilde{V}_0 \times 10^7$	-26,7035	-16,6858	5,8396
$\delta_{\bar{V}_0, \tilde{V}_0} \%$	1528,7	113,328	-215,375
$SD(\tilde{V}_0) \times 10^7$	5,7516	9,2743	7,3523
$MSE(\tilde{V}_0) \times 10^{13}$	3,2419	8,4293	5,2976
$\bar{V}_1 \times 10^5$	7,5001	1,5831	-5,8038
$\tilde{V}_1 \times 10^5$	5,5552	-0,4696	-6,0448
$\delta_{\bar{V}_1, \tilde{V}_1} \%$	-25,932	-129,661	4,1537
$SD(\tilde{V}_1) \times 10^5$	1,129	1,7866	0,9803
$MSE(\tilde{V}_1) \times 10^{10}$	1,2491	3,1281	0,942
$\bar{V}_2 \times 10^3$	7,0638	9,9867	8,7728
$\tilde{V}_2 \times 10^3$	7,9985	10,0422	7,8948
$\delta_{\bar{V}_2, \tilde{V}_2} \%$	13,2327	0,5556	-10,0075
$SD(\tilde{V}_2) \times 10^4$	6,7903	4,0866	7,5336
$MSE(\tilde{V}_2) \times 10^7$	4,5186	1,6366	5,562

Tabulka 2.6: Teoretické a odhadované hodnoty hustot vnitřních objemů nadúrovňového modelu s parametrem $\lambda = 0,001$ při 50 realizacích na pozorovacím okně $B = [0,310]^3$.

δ_ϵ	$\delta_{\bar{V}_0, \tilde{V}_0} \%$			$\delta_{\bar{V}_1, \tilde{V}_1} \%$		
	$p = 0,2$	$p = 0,45$	$p = 0,7$	$p = 0,2$	$p = 0,45$	$p = 0,7$
1	7,3719	32,889	-0,7985	5,0223	1,7758	0,187
2	10,693	31,247	4,4639	6,3134	1,9111	-0,7414
3	0,3061	6,8339	0,226	7,2775	1,8887	-1,705
4	4,4866	10,082	3,9986	8,6438	2,083	-2,5466
5	8,7376	12,385	8,2372	9,8655	2,1224	-3,6464
6	-6,1971	-18,146	1,5199	9,4848	1,9059	-3,775
7	9,3826	16,913	5,9471	10,984	2,342	-4,1996
8	-2,0096	-12,503	4,1212	10,852	2,119	-4,5746
9	2,6813	-6,9676	7,1722	12,124	2,1926	-5,5983
10	3,605	-2,122	4,6206	13,212	2,3542	-6,2477
11	-8,5793	-37,872	4,8637	12,962	2,0006	-6,7959
12	15,447	22,051	8,7576	14,733	2,604	-7,1094
13	7,3709	-1,8388	8,8176	14,448	2,4006	-7,2675
14	-3,9079	-32,379	7,3577	14,223	2,0581	-7,8048

Tabulka 2.7: Hodnoty relativních chyb $\delta_{\bar{V}_0, \tilde{V}_0}$ a $\delta_{\bar{V}_1, \tilde{V}_1}$ pro odhadы nadúrovňového modelu s parametrem $\lambda = 0,002$ při 100 realizacích na pozorovacím okně $B = [0,1000]^2$. Relativní chyby s hodnotou δ_{14} jsou totožné s relativními chybami při odhadech \tilde{V}_0 a \tilde{V}_1 viz tabulka 2.3.

Příloha 1

```
library(RandomFields)
# Knihovna pro generovani realnych nahodnych procesu v prostoru
library(stringr)
# Vyuziti funkce str_length v ukladani 0001.pbm
library(GA)
# Funkce binary2decimal pro prevod binarniho cisla do decimalniho

velx<-1000
vely<-1000
# Velikost x,y,z-tove hrany pozorovaneho okna

x <- seq(0,velx-1, length=velx)
y <- seq(0,vely-1, length=vely)
# Mriz o velikosti velx x vely

n<-100
# Pocet simulaci
p<-0.45
# Objemova intenzita p
u<-qnorm((1-p), mean=0, sd=1)
# Parametr u nadurovnoveho modelu
lam<-0.002
# Parametr lambda

s<-sqrt(2/lam)
# Potrebne znormalizovani pro exponencialni model
# s<-sqrt(1/(3*lam))
# # Potrebne znormalizovani pro sinusovy model

model <- RMgauss(var=1,scale=s)
# Exponencialni model
# Pozor! Spravne znormalizovat s pro kazdy model zvlast.
# model <- RMwave(var=1,scale=s)
# # Sinusovy model

umi<- "C:/Users/Filip/Desktop/Data/"
# Umistení souboru pro ukladani souboru .pbm
dir.create(umi)
# Vytvorí soubor v případě, kdy neexistuje.

PrevodBin<-function(x)
# Pomocna funkce pro prevod matice x do tvaru P4 souboru pbm,
# ktery pak ukladame do souboru .pbm
{
M<-x
# Pracujeme s matici M
if ( ncol(M)%%8!=0)
```

```

# Pokud nam na konci chybí ocasek.
# Chceme aby velikost radku byla nasobnosti 8.
{
  Nulmatice<-matrix(0, nrow=nrow(M),ncol=(8-ncol(M)%%8))
  # Vytvorime si nulovou matici, kde velikost sloupce bude jako matice
  # a velikost radku je pocet chybejiciho ocasku

  M<-cbind(M,Nulmatice)
  # Nyni je velikost radku nasobnosti 8
} # Konec if

M<-as.vector(t(M))
# Transponujeme matici a prevedeme do vektoru
q <- matrix(M,8,length(M)/8)
# Matice vytvorena pro funkci apply,
# kde v sloupci je 8 cisel hodnot 0,1, ktere prevadime do decimalniho tvaru

vysledek <- apply(q,2,binary2decimal)
# Prevedeme pomocí funkce binary2decimal
PrevodBin<-return(as.integer(as.vector(vysledek)))
# Vysledek jako posloupnost ziskanych hodnot

} # Konec PrevodBin

for ( i in 1:n)
# n krat vygenerujeme nadurovnovy model

{ # Nejdrive prevedeme hodnoty procesu do 0,1-kove matice,
# kde 1 je pro hodnoty vetsi nez u a 0 opak

RFOptions(seed=sample(1000000)[1])
# Novy generator nahodnych cisel

S2D <- RFsimulate(model=RPgauss(model), x=x,y=y,grid=T,n=1)
# Nasimulujieme nahodne Gaussovske pole na 2D mrizce

a<-matrix(data = 0, nrow = nrow(as.matrix(S2D[1])))
, ncol = ncol(as.matrix(S2D[1])))
# Nulova matice

a[as.matrix(S2D[1])>u]<-1
# Kdyz hodnota procesu preskoci u tak prepiseme na 1
a<-t(a)
# Tento krok muzeme vynechat. Matice ma hodnoty 0,1,
# kde nadurovnova mnozina je reprezentovana hodnotou 1.

# Nasledujici funkce switch vytvorí nazev souboru, kam budeme ukladat
switch(str_length(i), "1" = {
# Mame ciselnou promenou i ( napriklad 10 )
# a vytvorime nazev souboru C:/Users/Filip/Desktop/Pokus/00010.pbm
# tak aby pocet cislic byl stale 5

file<-umi
file<-paste(file,"0000",sep="")
file<-paste(file,i,sep="")
file<-paste(file,".pbm",sep="")
}, "2"= {
file<-umi

```

```

file<-paste(file,"000",sep="")
file<-paste(file,i,sep="")
file<-paste(file,".pbm",sep="")
}, "3"= {
file<-umi
file<-paste(file,"00",sep="")
file<-paste(file,i,sep="")
file<-paste(file,".pbm",sep="")
}, "4"= {
file<-umi
file<-paste(file,"0",sep="")
file<-paste(file,i,sep="")
file<-paste(file,".pbm",sep="")
}, "5"= {
file<-umi
file<-paste(file,i,sep="")
file<-paste(q,".pbm",sep="") })
# Konec switch

con <- file(file, open = "wb")
# Otevreme cestu do pozadovaneho souboru
writeChar(paste("P", 4, "\n", sep = ""), con = con,eos = NULL)
# Soubor musi byt typu P4

writeChar(paste(ncol(a)," ",nrow(a),"\n", sep = ""), con = con,eos = NULL)
# Musi se zadat velikost obrazku v pixlech

writeBin(PrevodBin(a), con, size = 1)
# Vlozime hodnoty, to jest, nejdrive prevedeme napriklad posloupnost 11111111
# na cislo 255 a pak cislo 255 na odpovidajici znak ASCII

close(con)
# Uzavreme cestu k souboru
} # Konec for cyklu pro ukladani souboru

```

Příloha 2

```
library(RandomFields)
# Knihovna pro generovani realnych nahodnych procesu v prostoru
library(stringr)
# Vyuziti funkce str_length v ukladani 0001.pbm
library(GA)
# Funkce binary2decimal pro prevod binarniho cisla do decimalniho

pixelx<-310
pixely<-310
pixelz<-310
# Velikost x,y,z-tove hrany pozorovaneho okna

x <- seq(0,pixelx-1, length=pixelx)
y <-seq(0,pixely-1, length=pixely)
z <- seq(0,pixelz-1, length=pixelz)
# Mriz o velikosti pixelx x pixely x pixelz

n<-50
# Pocet simulaci
p<-0.2
# Objemova intenzita p
u<-qnorm((1-p), mean=0, sd=1)
# Parametr u nadurovnoveho modelu
lam<-0.001
# Parametr lambda

s<-sqrt(2/lam)
# Potrebne znormalizovani pro exponencialni model
# s<-sqrt(1/(3*lam))
# # Potrebne znormalizovani pro sinusovy model

model <- RMgauss(var=1,scale=s)
# Exponencialni model
# Pozor! Spravne znormalizovat s pro kazdy model zvlast.
# model <- RMwave(var=1,scale=s)
# # Sinusovy model

umi<- "C:/Users/Filip/Desktop/Data3D/"
# Umistení složky pro ukladani vysledku
dir.create(umi)
# Vytvorí soubor v případě, kdy neexistuje.

PrevodBin<-function(x)
# Pomocna funkce pro prevod matice x do tvaru P4 souboru pbm,
# který pak ukladame do souboru .pbm
```

```

{
M<-x
# Pracujeme s matici M

if ( ncol(M)%%8!=0 ) # Pokud nam na konci chybi ocasek.
# Chceme aby velikost radku byla nasobnosti 8.
{
  Nulmatice<-matrix(0, nrow=nrow(M),ncol=(8-ncol(M))%%8))
  # Vytvorime si nulovou matici, kde velikost sloupce bude jako matice
  # a velikost radku je pocet chybejiciho ocasku

  M<-cbind(M,Nulmatice)
  # Nyni je velikost radku nasobnosti 8
} # Konec if

M<-as.vector(t(M))
# Transponujeme matici a prevedeme do vektoru
q <- matrix(M,8,length(M)/8)
# Matice vytvorena pro funkci apply,
# kde v sloupci je 8 cisel hodnot 0,1, ktere prevadime do decimalniho tvaru

vysledek <- apply(q,2,binary2decimal)
# Prevedeme pomocni funkce binary2decimal
PrevodBin<-return(as.integer(as.vector(vysledek)))
# Vysledek jako posloupnost ziskanych hodnot

} # Konec PrevodBin

for ( i in 1:n) # # n krat vygenerujeme nadurovnovy model a ulozime
{
soubor<-umi

switch(str_length(i),
# Vytvoreni slozek pro ukladani jednotlivych simulaci
"1" = {
soubor<-paste(soubor,"0",sep="")
soubor<-paste(soubor,i,sep="")
},
"2"= {
soubor<-paste(soubor,"",sep="")
soubor<-paste(soubor,i,sep="")
}) # Konec switch

soubor<-paste(soubor,"/",sep="")
dir.create(soubor)

RFoptions(seed=sample(1000000)[1])
# Novy generator nahodnych cisel
S2D <- RFsimulate(model=RPgauss(model), x=x,y=y,z=z,grid=T,n=1)
# Nasimulujeme nahodne Gaussovske pole na 3D mrizce

for ( j in 1:pixelz)
{ # Jednotlive rezky vyhodnotime a ulozime do souboru

b<-matrix(S2D@data[((j-1)*pixelx*pixely+1):((j-1)*pixelx*pixely+pixelx*pixely),]
,nrow=pixelx, ncol = pixely)
# V promenne b mame rez j ze souboru S2D
}
}

```

```

a<-matrix(data = 0, nrow = pixelx, ncol = pixely)
# Nulova matice
a[b>u]<-1
# Kdyz hodnota procesu preskoci u tak prepiseme na 1
a<-t(a)
# Tento krok muzeme vynechat

file<-soubor

# Nasledujici funkce switch vytvori nazev souboru, kam budeme ukladat
switch(str_length(j), "1" = {
# Mame ciselnou promenou ( napriklad 10 )
# a vytvorime nazev souboru C:/Users/Filip/Desktop/Pokus/00010.pbm
# tak aby pocet cislic byl stale 5

file<-paste(file,"00",sep="")
file<-paste(file,j,sep="")
file<-paste(file,".pbm",sep="")
}, "2"= {
file<-paste(file,"0",sep="")
file<-paste(file,j,sep="")
file<-paste(file,".pbm",sep="")
}, "3"= {
file<-paste(file,"",sep="")
file<-paste(file,j,sep="")
file<-paste(file,".pbm",sep="")
}) # Konec switch

con <- file(file, open = "wb")
# Otevreme cestu do pozadovaneho souboru
writeChar(paste("P", 4, "\n", sep = ""), con = con,eos = NULL)
# soubor musi byt typu P4

writeChar(paste(ncol(a), " ",nrow(a),"\\n", sep = ""), con = con,eos = NULL)
# Musi se zadat velikost obrazku v pixlech

writeBin(PrevodBin(a), con, size = 1)
# Vlozime hodnoty, to jest, nejdrive prevedeme napriklad 11111111
# na cislo 255 a pak cislo 255 na odpovidajici znak ASCII

close(con)
# Uzavreme cestu k souboru

} # Konec for cyklu ukladani rezu

} # Konec for cyklu pro generovani n procesu S2D

```

Seznam použité literatury

- [1] ADLER, R. J. – TAYLOR, J. E. *Random Fields and Geometry*. New York: Springer, 2007. ISBN 978-0-387-48112-8.
- [2] CHILES J. P. – DELFINER P. *Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty*. New York: John Wiley, 1999. ISBN 0-471-08315-1.
- [3] KOWALSKI, O. *Základy matematické analýzy na varietách*. Praha: Universita Karlova, 1975.
- [4] LEE J. M. *Introduction to Smooth Manifolds*. New York: Springer, 2003. ISBN 0-387-95495-3.
- [5] MRKVIČKA, T. *Estimation of intrinsic volumes via parallel sets in plane and space*. Inżynieria Materiałowa **29** (2008), 392–395.
- [6] MRKVIČKA, T. – RATAJ, J. *On the estimation of intrinsic volume densities of stationary random closed sets*. Stochastic Processes and their Applications **118** (2008), 213–231.
- [7] MRKVIČKA, T. – RATAJ, J. *On estimation of intrinsic volume densities of stationary random closed sets via parallel sets in the plane*. Kybernetika **45** (2009), 931–945.
- [8] OHSER, J. – MÜCKLICH, F. *Statistical Analysis of Microstructures in Materials Science*. New York: John Wiley, 2000. ISBN 978-0-471-97486-4.
- [9] PFLAUM, M. J. *Analytic and Geometric Study of Stratified Spaces*. Berlin: Springer, 2001. ISBN 3-540-42626-4.
- [10] RASMUSSEN C. E. – WILLIAMS CH. K. I. *Gaussian Processes for Machine Learning*. Cambridge: MIT Press, 2006. ISBN 978-0-262-18253-9.
- [11] SANTALÓ L. A. *Integral Geometry and Geometric Probability*. 2nd edition. Cambridge: University Press, 2004. ISBN 978-0-521-52344-8.
- [12] SCHNEIDER, R. – WEIL, W. *Probability and its Applications: Stochastic and Integral Geometry*. Berlin: Springer, 2008. ISBN 978-3-540-78858-4.
- [13] SPODAREV, E. – SCHMIDT V. *On the local connectivity number of stationary random closed sets*. In: Mathematical Morphology: 40 Years On. Berlin: Springer, 2005, 343–354. ISBN 978-1-4020-3442-8.